

Д. В. ШИРКОВ, В. В. СЕРЕБРЯКОВ, В. А. МЕЩЕРЯКОВ

ДИСПЕРСИОННЫЕ ТЕОРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1967

Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Изд. «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1967 г.

Книга посвящена применению метода дисперсионных соотношений к теории сильных взаимодействий элементарных частиц при низких энергиях. Книга содержит обзор основных представлений метода дисперсионных соотношений и ряда приближенных подходов, в первую очередь к низкоэнергетическим процессам. Дано сравнение этих подходов и отмечены присущие им трудности. Основное изложение проведено на базе уравнений для низших парциальных волн, полученных при помощи дифференциального приближения. Этим методом последовательно рассмотрены процессы пион-пионного рассеяния, фоторождения пионов на пионах, пион-нуклонного рассеяния, а также электромагнитные формфакторы пионов и нуклонов. Метод, при помощи которого ведется исследование, разработан в большей своей части самими авторами.

Книга рассчитана на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, занимающихся теоретической физикой и физикой элементарных частиц, в частности сильными взаимодействиями при малых энергиях.

Таблиц 5, рисунков 77, библиография—116 назв.

*Дмитрий Васильевич Ширков, Василий Васильевич Серебряков,
Владимир Алексеевич Мещеряков*

**Дисперсионные теории сильных взаимодействий
при низких энергиях**

М., 1967 г., 324 стр. с илл.

Редактор В. И. Рыдник

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректор З. В. Автоносова

Сдано в набор 5/1 1967 г. Подписано к печати 16/VI 1967 г. Бумага 84×108³/₃₂.
Физ. печ. л. 10,12. Условн. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 17,65.

Тираж 4600 экз. Т-06984. Цена книги 1 р. 29 к. Заказ № 2236

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	6
Глава 1. Дисперсионный метод в квантовой теории	7
§ 1. Введение	7
§ 2. Задача рассеяния в квантовой механике	14
2.1. Дисперсионные соотношения (14). 2.2. Условие унитарности (23). 2.3. Двойное спектральное представление (25). 2.4. Приближение эффективного радиуса (30).	
§ 3. Дисперсионный метод в квантовой теории поля . .	32
3.1. Дисперсионный метод в теории сильных взаимодействий (32). 3.2. Левый разрез и кроссинг-симметрия (33). 3.3. Роль условия унитарности (37).	
§ 4. Экспериментальное обоснование дисперсионных соотношений в квантовой теории поля	39
§ 5. Двойное спектральное представление в квантовой теории поля	47
5.1. Кроссинг-симметрия (47). 5.2. Условие унитарности (51). 5.3. Представление Мандельштама (54). 5.4. Центральная роль $\pi\pi$ -взаимодействия (56).	
Глава 2. Основные представления низкоэнергетических приближений	58
§ 6. Аксиоматическая теория рассеяния	58
§ 7. Двухчастичная унитарность и кроссинг-симметрия	60
7.1. Двухчастичная унитарность амплитуды рассеяния (61). 7.2. Связь с сечением рассеяния и оптическая теорема (63). 7.3. Реальный случай заряженных пионов (67). 7.4. Кроссинг-симметрия пионной амплитуды рассеяния (68).	
§ 8. Кроссинг-симметрия и унитарность спектрального представления	70
8.1. Условие кроссинг-симметрии (70). 8.2. Унитарность (71). 8.3. Несовместность двухчастичной унитарности и кроссинг-симметрии (75). 8.4. Физический смысл неупругих вкладов в спектральные функции (79). 8.5. Полосовое приближение (стрип-аппроксимация) (80).	
§ 9. Низкоэнергетические уравнения для парциальных волн	84
9.1. Упругая унитарность и низшие парциальные волны (84). 9.2. Приближение Чини — Фубини (85). 9.3. Противоречивость низкоэнергетических положений (86). 9.4. Постановка задачи (87).	
§ 10. Схема Чу — Мандельштама	89
10.1. Вычисление $\text{Im } f_l$ на кроссинг-разрезах (89). 10.2. Ограничения низшими парциальными волнами (92). 10.3. Система	1*

уравнений для s - и p -волн (95). 10.4. Некоторые свойства уравнений (97).	
§ 11. Дифференциальное приближение. Нейтральная модель	99
11.1. Метод дифференциального приближения (99). 11.2. Уравнения для s - и d -волн нейтральной модели (101). 11.3. Решение нейтральной модели s -волнового рассеяния (105). 11.4. Свойства адиабатического решения (108).	
§ 12. Особенности КДД. Резонансы в нейтральной модели	109
12.1. Модель Дайсона. Физический смысл членов КДД (110). 12.2. Резонансные решения нейтральной модели (113).	
Глава 3. Рассеяние пионов	115
§ 13. Уравнения $\pi\pi$ -рассеяния. Общие свойства	115
13.1. Кроссинг-симметрия и уравнения (115). 13.2. Некоторые общие свойства решений (117).	
§ 14. Адиабатическая ветвь решения	120
14.1. Унитарное представление решений (120). 14.2. Адиабатическая ветвь (122). 14.3. Сравнение с теорией возмущений (126).	
§ 15. p -резонансное решение при малых λ	127
15.1. Дельтаобразное приближение (127). 15.2. «Двухрезонансное» решение с ρ -мезоном (130). 15.3. Другие резонансные ветви (134). 15.4. Связь между логарифмической и степенными ветвями (135).	
§ 16. p -резонансное решение в общем случае	138
16.1. Теория возмущений для унитарного представления (138). 16.2. N/D -метод (141). 16.3. Общие свойства решений (145).	
§ 17. Высшие парциальные волны	147
17.1. Высшие волны в нейтральной модели (147). 17.2. Влияние f_0 -мезона на низшие волны пион-пионного рассеяния (151).	
§ 18. Сравнение теории с экспериментом	153
18.1. Способы получения сведений о $\pi\pi$ -взаимодействии (153). 18.2. Метод Чу — Лоу и формула Селлери (156). 18.3. Экспериментальные данные (158). 18.4. Сравнение с экспериментом (160).	
Глава 4. Электромагнитные взаимодействия пионов	162
§ 19. Электромагнитный формфактор π -мезонов	162
19.1. Определение электромагнитного формфактора пионов (162). 19.2. Аналитические свойства электромагнитного формфактора пиона (164). 19.3. Решение уравнения для формфактора и единственность решения (166).	
§ 20. Фоторождение пионов на пионах	170
20.1. Кинематика и структура матричного элемента (171). 20.2. Представление Мандельштама (173). 20.3. Уравнения для парциальных волн (175). 20.4. Решение уравнения для парциальной волны и единственность решения (176).	
Глава 5. Пион-нуклонное взаимодействие	180
§ 21. Амплитуда пион-нуклонной вершины	180
21.1. Амплитуда пион-нуклонного рассеяния (180). 21.2. Связь с наблюдаемыми сечениями, парциальные волны πN -рассеяния (184). 21.3. Амплитуда процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ (185).	

§ 22. Статическая модель p -волнового πN -рассеяния	187
22.1. Физические основы модели (187). 22.2. Вывод системы уравнений (189). 22.3. Модель Чу — Лоу (193). 22.4. Основные свойства решения (195). 22.5. Кроссинг-симметрия и анализ s -волн (199).	
§ 23. Представление Мандельстама	202
23.1. Кроссинг-симметрия и полюсные члены (202). 23.2. Границы спектральных функций (204).	
§ 24. Различные варианты использования представления Мандельстама	210
24.1. Применение приближения Чини — Фубини (211). 24.2. Метод Гамильтона (212). 24.3. Наша программа (215).	
§ 25. Способ получения уравнений для парциальных волн	216
25.1. Выбор переменных и функций для аналитического продолжения (216). 25.2. Дисперсионные соотношения для фиксированного угла рассеяния (221). 25.3. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед (222). 25.4. Дисперсионные соотношения для рассеяния назад (223). 25.5. Связь с пионным формфактором (226).	
§ 26. Уравнения для s - и p -волн πN -рассеяния	229
26.1. Релятивистская форма уравнений (229). 26.2. Статический предел (230). 26.3. Свойства симметрии $\pi\pi$ -вкладов (232). 26.4. Интерпретация $\pi\pi$ -вкладов в πN -рассеяние (234).	
§ 27. Сравнение уравнений для s - и p -волн с экспериментом	236
27.1. Длины рассеяния (236). 27.2. Энергетическая зависимость $s^{(-)}$ - и $p^{(-)}$ -волн (238). 27.3. Энергетическая зависимость $s^{(+)}$ - и $p^{(+)}$ -волн (243). 27.4. Релятивистские поправки (эффект отдачи) к s -волнам (248). 27.5. Высшие парциальные волны (251).	
§ 28. Электромагнитные формфакторы нуклона	251
28.1. Определение электромагнитных формфакторов (252). 28.2. Дисперсионные соотношения для формфакторов (255).	
§ 29. Количественная теория s -волн πN -рассеяния	262
29.1. Статические уравнения Чу — Лоу для s -волн πN -рассеяния (263). 29.2. Решение задачи об s -волнах (269). 29.3. Построение формул, описывающих экспериментальные данные по s -фазам πN -рассеяния (277). 29.4. Интерпретация полюсов функций $S_i(\omega)$ (284).	
Глава 6. Итоги и выводы	283
§ 30. Анализ теории $\pi\pi$ -взаимодействия	288
30.1. Общие свойства $\pi\pi$ -решений (288). 30.2. Гипотеза «бутстрапа» (290). 30.3. Модель для амплитуды рассеяния вперед (292). 30.4. Проблема замкнутости низкоэнергетического описания (293).	
§ 31. Некоторые выводы о πN -взаимодействии	294
Заключение	301
Приложения	303
Литература	318
Предметный указатель	323

ОТ АВТОРОВ

Метод дисперсионных соотношений за десять с небольшим лет своего существования занял важное место в теории взаимодействий элементарных частиц. Этот метод нашел применение во всех основных ее разделах—как для сильных, так и для слабых взаимодействий, в области как низких, так и высоких энергий. В самое последнее время он играет существенную роль в развитии нового подхода, связанного с симметриями и алгеброй токов.

В предлагаемой книге сделана попытка дать связное изложение с единой точки зрения приложений метода дисперсионных соотношений к проблеме сильных взаимодействий при низких энергиях. Первые две главы включают также обзор основных представлений метода, начиная с квантовомеханического рассмотрения задачи рассеяния вплоть до особенностей его применения к области низких энергий.

Основное изложение проведено на базе уравнений для низших парциальных волн, полученных с помощью так называемого дифференциального приближения. Этим методом последовательно рассмотрены процессы пион-пионного рассеяния, фоторождения пионов на пионах, пион-нуклонного рассеяния, а также электромагнитные формфакторы пионов и нуклонов.

Естественно, что при такой методической направленности некоторые важные исследования в области сильных взаимодействий при низких энергиях оказались за рамками книги. Равным образом это относится и к обзорной части, которая претендует лишь на методическую полноту. Мы считаем, что описание уже завершенного этапа развития теории представляет определенный интерес и окажется полезным не только для узкого круга специалистов, но и для студентов и аспирантов, а также физиков-экспериментаторов, работающих в области сильных взаимодействий.

Авторы благодарны рецензенту книги А. В. Ефремову за большую работу по улучшению рукописи, а также многим сотрудникам Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований, Математического института СО АН СССР и, в особенности, П. С. Исаеву, за ценные советы и замечания.

ГЛАВА 1

ДИСПЕРСИОННЫЙ МЕТОД В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

§ 1. Введение

В настоящее время известно более двухсот различных частиц и резонансных состояний. Накоплено огромное количество экспериментальной информации относительно процессов взаимодействий и взаимных превращений этих частиц и резонансов. Все многообразие наблюдаемых явлений находится в соответствии с рядом основных принципов:

а) сохранения электрического заряда Q , б) сохранения барионного заряда B , в) сохранения лептонного заряда, г) инвариантности относительно неоднородной группы Лоренца L .

Следствиями лоренцевской инвариантности являются законы сохранения импульса, энергии, полного момента, а также *СРТ*-теорема, т. е. инвариантность относительно произведения трех преобразований: C — преобразования зарядового сопряжения, P — преобразования отражения пространственных осей координат (пространственная четность), T — преобразования отражения оси времени (временная четность).

Из этого многообразия можно выделить более узкий круг явлений — процессы сильного взаимодействия. Для этих процессов характерным является ядерное время порядка 10^{-22} — 10^{-24} сек. Эффекты, связанные с электромагнитными и слабыми взаимодействиями, в этих процессах оказываются, как правило, пренебрежимо малыми.

Процессы сильного взаимодействия инвариантны относительно более широкого класса преобразований:

относительно C -, P - и T -преобразований по отдельности. Они инвариантны относительно группы вращений в зарядовом или изотопическом пространстве (группа изоспина). Кроме того, для них имеется еще одно сохраняющееся квантовое число — странность S , которое связано с Q , B и третьей проекцией изоспина I_3 соотношением

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S).$$

Вместо странности S вводят также гиперзаряд Y :

$$Y = B + S.$$

Комбинирование зарядового сопряжения C с изотопической инвариантностью (точнее, с операцией вращения на 180° относительно оси I_2) приводит еще к одному преобразованию — G -сопряжению ($\hat{G} = Ce^{i\pi\hat{I}_2}$). Его важность определяется тем, что состояния $|n\rangle$, содержащие n пионов, являются собственными функциями G -преобразования с собственным значением

$$\hat{G}|n\rangle = (-1)^n |n\rangle.$$

Это свойство, в частности, запрещает переходы между состояниями с четным и нечетным числом пионов.

Перечисленные квантовые числа определяют правила отбора в процессах сильных взаимодействий. Инвариантности относительно изотопических преобразований приводят также к простым соотношениям симметрии между матричными элементами различных процессов (см., например, (7.30), (21.7) — (21.10)). Такие соотношения, однако, не устанавливают связей между матричными элементами с различными значениями кинематических переменных (энергий и импульсов частиц), т. е. не дают динамических связей.

Возможность количественного динамического описания в классической физике и в квантовой механике обычно основывается на динамическом принципе и уравнениях движения. Такого регулярного метода получения количественных результатов в теории сильно взаимодействующих частиц в настоящее время не существует. Основной теоретический метод физики элементарных взаимодействий

вий — метод квантованных полей — дает хорошее количественное описание лишь для довольно узкого круга явлений, в которых физически существенными являются электродинамические взаимодействия. Это в первую очередь процессы, затрагивающие электроны, позитроны и электромагнитное поле. Они описываются разложениями теории возмущений по степеням малого параметра — постоянной тонкой структуры α , представляющей собой квадрат константы электродинамического взаимодействия, $\alpha = e^2/4\pi \approx \approx 1/137$ (здесь и далее используются атомные единицы, в которых $\hbar = c = 1$).

Теория возмущений в квантовой электродинамике — фактически единственный раздел теории элементарных частиц, который может называться «теорией» в добром старом смысле этого слова, т. е. содержит небольшое число исходных положений, которые путем регулярной процедуры позволяют получать количественное описание всех электродинамических явлений с любой желаемой степенью точности. В сильных (ядерных) взаимодействиях теория возмущений не дает даже качественного согласия с опытом, поскольку константы связи сильного взаимодействия не являются малыми.

В теории сильных взаимодействий существует ряд приближенных схем, позволяющих в отдельных случаях проводить количественные расчеты. Наиболее разработанной среди них является схема, основанная на методе дисперсионных соотношений (далее обозначается: д. с.) и использующая ряд специфических приближений для так называемой области низких энергий, т. е. энергий порядка масс покоя рассматриваемых частиц. Эта область является физически выделенной, поскольку при взаимодействиях частиц процессы с рождением дополнительных частиц здесь либо отсутствуют, либо играют малую роль, так что ими можно пренебречь.

Лежащий в основе этой схемы метод представляет собой математическую формулировку ряда довольно общих свойств взаимодействий частиц, среди которых главную роль играет условие причинности. Следствия этих положений формулируются на языке аналитических свойств амплитуды рассеяния, аналитически продолженной в комплексную плоскость переменной энергии E .

Связь между причинностью в пространстве — времени и свойством аналитичности в комплексной плоскости E , естественно, не является спецификой квантовой теории поля и даже квантовой теории. Д. с. могут быть получены для широкого круга физических процессов, начиная с классической электродинамики (см. по этому поводу § 2). Они устанавливают определенные интегральные связи между наблюдаемыми характеристиками процессов, не зависящие от деталей взаимодействия.

Мы начинаем с изложения обычной квантовомеханической задачи потенциального рассеяния на языке метода д. с. (§ 2). Такой порядок изложения позволяет естественно перейти затем к постановке задачи в квантовой теории поля (§ 3).

Важной особенностью квантовой теории поля является свойство кроссинг-симметрии (перекрестной симметрии). Оно основано на том обстоятельстве, что в аппарате квантовой теории поля амплитуды трех различных процессов:

$$A + B \leftrightarrow \bar{C} + \bar{D},$$

$$A + C \leftrightarrow \bar{B} + \bar{D},$$

$$A + D \leftrightarrow \bar{B} + \bar{C}$$

(здесь \bar{C} обозначает античастицу по отношению к C) описываются одной и той же функцией Грина G_{ABCD} , изображенной на рис. 1, т. е. одним и тем же набором диаграмм Фейнмана. Все три матричных элемента представляют собой различные «граничные» значения одной и той же функции G_{ABCD} .

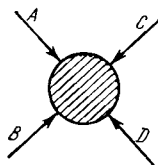


Рис. 1.

В тех случаях, когда среди этих трех процессов имеются физически одинаковые процессы, функция G обладает определенной симметрией по своим аргументам. Это свойство и называется перекрестной симметрией.

Задание аналитических свойств функции G по соответствующим кинематическим переменным позволяет связать эти различные «граничные» значения с помощью аналитического продолжения. Поэтому изучение аналити-

ческих свойств функции Грина является необходимым для формулирования свойств кроссинг-симметрии для процессов рассеяния.

Изучение аналитических свойств даже по отношению к одной переменной является математически весьма сложной задачей и не входит поэтому в наше изложение. В § 4 мы выписываем д. с. для наиболее хорошо изученного экспериментально процесса пион-нуклонного взаимодействия и приводим сравнение их с экспериментом. Это сравнение позволяет сделать вывод о правильности всех основных положений, используемых при строгом выводе д. с. Таким образом, использование метода д. с. в сильных взаимодействиях может считаться экспериментально апробированным.

Для получения системы уравнений необходимо дополнить д. с. некоторыми вспомогательными соотношениями (§ 5). Здесь мы вступаем в область приближений. Среди них весьма важным является приближение двухчастичной унитарности, а также двойное спектральное представление Мандельстама. Это представление принимается в дальнейшем в качестве одного из основных положений так называемой *аксиоматической теории рассеяния* (§ 6).

Комбинирование условия двухчастичной унитарности с представлением Мандельстама приводит к спектральному условию унитарности (§ 8.2), представляющему собой важный инструмент исследования аналитической структуры матрицы рассеяния.

Добавляя еще предположение о возможности удовлетворительного описания амплитуды рассеяния в области низких энергий малым числом парциальных волн, мы получаем возможность записать для последних систему уравнений. Эти уравнения оказываются нелинейными сингулярными интегральными уравнениями, связывающими парциальные волны рассматриваемого процесса рассеяния, а также, как правило, парциальные волны некоторых других процессов.

Исключение представляет система уравнений для парциальных волн пион-пионного рассеяния. Эта система оказывается замкнутой, т. е. не включает парциальных волн других процессов. В то же время, например, система уравнений для пион-нуклонного рассеяния включает в себя

парциальные амплитуды лл-рассеяния. Система «зависимости» одних процессов от других иллюстрируется иерархической схемой, изображенной на рис. 2 и основанной на условии двухчастичной унитарности (§ 5). На этом рисунке процессы (точнее, соответствующие им функции Грина)

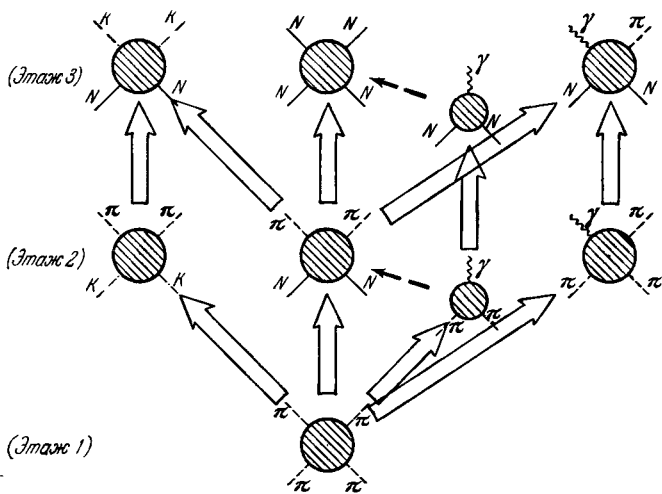


Рис. 2.

расположены на различных уровнях (этажах). Стрелки указывают на взаимную зависимость процессов. Так, например, в систему уравнений для узла лл NN входят амплитуды узла ллл; для рассмотрения процесса фоторождения пиона на нуклоне (узел $\gamma лNN$) необходимо предварительно изучить узлы лл NN и $\gamma ллл$ и т. д. Во главе «иерархического дерева» стоит узел ллл, с которого и должно начинаться изучение процессов сильного взаимодействия.

Таким образом, «дисперсионная теория сильных взаимодействий при низких энергиях» основана на следующих положениях: а) аналитичность, б) двухчастичная унитарность, в) кроссинг-симметрия, г) ограничение малым числом парциальных волн.

Строго говоря, эти четыре положения исключают друг друга, т. е. находятся во взаимном противоречии. Поэтому ими следует пользоваться не буквально, а приближенно (см. подробнее §§ 8, 9). Неудачный выбор приближений может привести к математически противоречивым уравнениям, например, к уравнениям Чу — Мандельстама для $\pi\pi$ -рассеяния (§ 10).

Мы используем схему дифференциального приближения (§ 11), в которой, в отличие от схемы Чу — Мандельстама, свойство кроссинг-симметрии для мнимой части используется приближенно. Эта схема (ДП) приводит к математически непротиворечивым уравнениям для низкоэнергетического рассеяния. В главах 3, 4, 5 методом ДП рассмотрены последовательно процессы $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$, $\pi + \gamma \rightarrow \pi + \pi$, $\pi + N \rightarrow \pi + N$, а также электромагнитные формфакторы пиона и нуклона. При этом оказывается, что решения соответствующих систем уравнений зависят от большого числа параметров, что естественным образом связано с математической природой уравнений, которые могут быть сформулированы на языке краевых задач теории функций комплексного переменного с нелинейными граничными условиями. Физически это соответствует тому, что в уравнениях дисперсионного типа нет способа каким-либо образом полностью фиксировать динамику сильного взаимодействия, что хорошо иллюстрируется в нерелятивистском случае моделью Дайсона (§ 12).

Таким образом, практически мы получаем феноменологическое описание процессов рассеяния при низких энергиях. Поскольку при движении по «иерархическому дереву» количество произвольных параметров увеличивается, мы доводим наше исследование до «уровня второго этажа». На этом уровне еще удастся провести разумное исследование процесса $\pi N \rightarrow \pi N$, который хорошо изучен экспериментально. Однако уже рассмотрение узла $\pi\pi\pi\pi$ не приводит к каким-либо надежным результатам. По этой же причине, видимо, пока преждевременно обращаться к процессам «третьего этажа».

Подчеркнем, что подобные схемы учитывают лишь длинноволновую (периферическую) часть взаимодействия. Учет коротковолновой части может изменить положение.

§ 2. Задача рассеяния в квантовой механике

2.1. Дисперсионные соотношения. В этом параграфе мы рассмотрим постановку задачи рассеяния в квантовой механике для определенного класса потенциалов, акцентируя внимание на переформулировке этой задачи в терминах аналитических свойств амплитуды рассеяния. Рассмотрение задачи рассеяния с этой точки зрения потребует для того, чтобы понять смысл гипотез, определяющих свойства амплитуды рассеяния в теории поля. Кроме того, здесь будет продемонстрирована математическая техника исследования такого рода задач, которая с небольшими изменениями переносится в теорию поля.

В квантовой механике задача рассеяния полностью определяется заданием потенциала $\lambda U(\mathbf{r})$ в уравнении Шредингера

$$\nabla^2 \Psi + [k^2 - \lambda U(\mathbf{r})] \Psi = 0. \quad (2.1)$$

Решить эту задачу — значит найти такое решение $\Psi(\mathbf{r})$ уравнения Шредингера, которое при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ имеет поведение

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, k) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (2.2)$$

Здесь θ — угол рассеяния, т. е. угол между волновым вектором \mathbf{k}_i , определяющим направление начального движения частицы, и волновым вектором \mathbf{k}_r , направленным по вектору \mathbf{r} на прибор, измеряющий рассеянные частицы. Поскольку выполняется закон сохранения энергии, то

$$|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r| = k.$$

Величина $f(\theta, k)$ называется амплитудой рассеяния. Как известно, она может быть связана с матричным элементом матрицы рассеяния

$$S_{ab} = \langle a | S | b \rangle = \delta_{ab} + i \frac{\delta(E_a - E_b)}{2\pi E} \langle \mathbf{k}_r | T | \mathbf{k}_i \rangle \quad (2.3)$$

соотношением

$$f(\theta, k) = \langle \mathbf{k}_r | T | \mathbf{k}_i \rangle.$$

Так как начальный поток частиц равен v (v — скорость

частиц вдоль k_i), а поток на единицу телесного угла согласно (2.2) равен $|f(\theta, k)|^2 \frac{1}{r^2} vr^2 d\Omega$, то дифференциальное сечение есть

$$d\sigma = \frac{\text{поток через } d\Omega}{\text{начальный поток}} = |f(\theta, k)|^2 d\Omega = |\langle k_r | T | k_i \rangle|^2 d\Omega. \quad (2.4)$$

Дифференциальное уравнение (2.1) и краевое условие (2.2) можно объединить в интегральное уравнение. Для этого нужно воспользоваться функцией Грина уравнения Шредингера, описывающего свободно движущуюся частицу, которая при больших $|r|$ дает расходящуюся волну:

$$G(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|}.$$

Тогда волновая функция $\Psi(r)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Psi(r) = e^{ik_i r} - \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} U(r') \Psi(r') dr'. \quad (2.5)$$

Так как при больших r $|r-r'| \approx r - \frac{(r'r)}{r}$ и мы предполагаем, что область, в которой потенциал существенно отличен от нуля, конечна, то

$$\Psi(r) = e^{ik_i r} - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int e^{-ik_r r'} U(r') \Psi(r') dr'.$$

Следовательно, зная $\Psi(r)$, мы можем вычислить амплитуду рассеяния по формуле

$$f(\theta, k) = -\frac{\lambda}{4\pi} \int e^{-ik_r r'} U(r') \Psi(r') dr'.$$

Используя эти интегральные представления для амплитуды рассеяния, можно рассмотреть ее аналитические свойства по переменным θ и k . Если потенциал достаточно сильно убывает на бесконечности, то амплитуда рассеяния является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной плоскости k . Мы получим это свойство для каждого члена разложения амплитуды по λ (Вонг (1957)). Далее, предполагая, что ряд по степеням λ сходится равномерно, это свойство аналитичности можно

перенести на амплитуду рассеяния в целом. Для простоты будем предполагать, что потенциал такой, что не существует связанных состояний. Впрочем, есть соответствующее доказательство аналитичности амплитуды рассеяния и без использования борновского разложения, принадлежащее Хури (1957). Используя (2.6), запишем n -й член амплитуды рассеяния $\langle k_r | T | k_i \rangle$ в виде

$$T^{(n)} = \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^n \int \prod_{m=1}^{n-1} \frac{U(r_m) U(r_n)}{|r_m - r_{m+1}|} \times \\ \times \exp \left\{ ik_i r_n - ik_r r_1 + ik \sum_{m=1}^{n-1} |r_m - r_{m+1}| \right\} dr_n dr_m, \quad (2.6)$$

$$\langle k_r | T | k_i \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n T^{(n)}. \quad (2.7)$$

Такое представление удобно тем, что переменная k входит только в экспоненту.

Так как $|k_i| = |k_r| = k$ и потенциал зависит только от $|r|$, амплитуда рассеяния является функцией переменных k и θ . Введем вектор передачи импульса

$$\Delta = k_r - k_i$$

и перейдем к новой переменной

$$\Delta^2 = \Delta^2 = -t = 2k(1 - \cos \theta), \quad (2.8)$$

$$f(k, \theta) = T(k, \Delta).$$

Рассмотрим подынтегральную экспоненту. При рассеянии вперед $\cos \theta = 1$ и $\Delta = 0$. В этом случае экспонента имеет вид

$$\exp \left\{ ik |r_n - r_1| \cos(k_i, r_n - r_1) + ik \sum_{m=1}^{n-1} |r_m - r_{m+1}| \right\}.$$

Из неравенства для суммы сторон многоугольника

$$\sum_{m=1}^{n-1} |r_m - r_{m+1}| \geq |r_n - r_1|$$

следует, что действительная часть показателя экспоненты отрицательно определена, когда $k \rightarrow k + i\gamma$ и $\gamma > 0$.

Поэтому интеграл (2.6) существует в верхней полуплоскости комплексной плоскости k , равно как и все производные $T^{(n)}$ по k . При этом следует отметить, что мы рассматриваем только физические потенциалы, т. е. такие, которые при больших r стремятся к нулю. Поэтому $T^{(n)}(k, 0)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости. Благодаря сходимости ряда (2.7) это свойство можно перенести на всю амплитуду рассеяния вперед $T(k, 0)$. Теперь амплитуду можно представить в виде интеграла Коши:

$$T(k, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{T(k', 0)}{k' - k} dk'. \quad (2.9)$$

Контур Γ изображен на рис. 3.

Если амплитуда при больших $|k|$ убывает достаточно быстро, так что интеграл по большой полуокружности стремится к нулю, то контур Γ вырождается в прямую вдоль действительной оси. В противоположном случае теорему Коши следует применять для функции $T(k, 0)/P(k)$, где $P(k)$ — полином по k такой степени, что интеграл по большой полуокружности исчезает при стремлении ее радиуса к бесконечности.

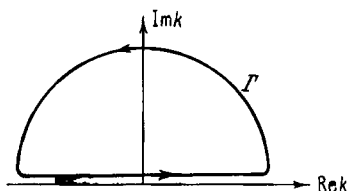


Рис. 3.

Будем считать, что потенциал — действительная функция $|r|$, т. е. что процесс рассеяния идет без поглощения. Тогда из (2.6) для действительных k следует

$$T^*(k) = T(-k). \quad (2.10)$$

Физическое значение амплитуды рассеяния достигается, когда $k \rightarrow k + i\varepsilon$, $k > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0^+$. В этом случае, используя соотношение (2.10), а также символическое равенство $\frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x} \pm i\pi\delta(x)$, легко получить следующее выражение:

$$\operatorname{Re} T(k, 0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{k'}{k'^2 - k^2} \operatorname{Im} T(k', 0) dk'. \quad (2.11)$$

Здесь и ниже символ \mathcal{P} означает главное значение интеграла Коши.

Такого рода соотношение между действительной и мнимой частями амплитуды рассеяния называется дисперсионным соотношением. Можно также получить так называемое обратное дисперсионное соотношение:

$$\text{Im } T(k, 0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{k'}{k'^2 - k^2} \text{Re } T(k', 0) dk'. \quad (2.12)$$

Мы покажем дальше (см. (2.17)), что оптическая теорема связывает функцию $\text{Im } T(k, 0)$ с полным сечением рассеяния.

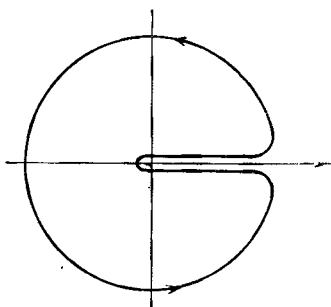


Рис. 4.

Поэтому соотношения (2.11) и (2.12) можно непосредственно проверить экспериментально. Формулу Коши (2.9) можно также рассмотреть в плоскости $k^2 = v$ (т. е. в комплексной плоскости энергетической переменной $E = v/2m$). В этом случае верхняя полуплоскость $k + i\gamma$, $\gamma > 0$, отображается на всю комплексную плоскость v . Линия интегрирования $(-\infty, 0)$ превращается в линию $(+\infty, 0)$. На рис. 4 изображен контур интегрирования в плоскости v . При условии (2.10) аналитические свойства амплитуды рассеяния вперед в плоскости v будут выражаться следующей формулой:

$$T(v, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } T(v', 0)}{v' - v} dv',$$

где v — комплексная величина.

При выводе д. с. (2.11) и (2.12) мы полагали, что амплитуда рассеяния убывает на бесконечности достаточно быстро. Однако из (2.6) нетрудно видеть, что первый борновский член амплитуды рассеяния вперед является постоянной действительной величиной, отличной от нуля,

в то время как остальные члены борновского разложения убывают по крайней мере как $1/k$. Поэтому все вышеизложенные рассуждения справедливы для функции $T(k, 0) - \lambda T^{(1)}$. Вместо (2.11) мы получим

$$\operatorname{Re} T(k, 0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} T(k', 0) \frac{k' dk'}{k'^2 - k^2} + \lambda T^{(1)}. \quad (2.13)$$

Соотношения типа (2.11) и (2.13) встречаются не только в квантовой механике, но также и в тех областях физики, где существует конкретная связь между процессом поглощения энергии, характеризуемым функцией F , и испускания (функция G):

$$\tilde{G}(\omega) = \tilde{T}(\omega) \tilde{F}(\omega).$$

Тогда временная зависимость между этими процессами представляется интегралами типа свертки:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-t') F(t') dt'.$$

Д. с. для фурье-образа функции $\tilde{T}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t) e^{i\omega t} dt$,

характеризующей внутренние свойства системы, являются следствием следующего условия причинности: невозможно испускание энергии системой раньше, чем произойдет ее поглощение, т. е. $T(t-t') = 0$, когда $t < t'$. Это условие естественно, когда в системе взаимодействие переносится с конечной скоростью или когда можно образовать волновые пакеты, строго локализованные в некоторой области. Поскольку $T(t) = 0$ при $t < 0$, то функцию $\tilde{T}(\omega)$ можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость $\omega + i\gamma$, $\gamma > 0$ и получить д. с. (2.11) и (2.13), если $T(t)$ — действительная функция.

Условие возможности такого рода продолжения в квантовой механике несколько отличается от сформулированного выше условия причинности. Дело в том, что для частиц с конечной массой нельзя сформировать строго ограни-

ченный волновой пакет (как в случае прохождения света через вещество). Кроме того, в квантовой механике нет ограничения на скорость распространения взаимодействия. Поэтому условие причинности в квантовой механике выглядит по-другому. Согласно Ван-Кампену (1953а, б) в качестве условия причинности в квантовой механике выступает следующее требование: если система описывается волновой функцией, нормированной так, что в единице объема имеется одна частица, то в любой момент времени t вероятность нахождения этой частицы вне рассеивателя ≤ 1 . В математическом формализме это соответствует тому, что выше мы использовали переход к стационарному случаю в уравнении Шредингера и выбрали функцию Грина, соответствующую расходящейся волне. В квантовой теории поля условие причинности выглядит следующим образом: события в двух точках, разделенных пространственно-подобным четырехинтервалом ($ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 < 0$), не коррелируют друг с другом при включении взаимодействия, иными словами, взаимодействие не может распространяться быстрее скорости света в вакууме. Можно назвать еще ряд примеров, где д. с. основаны на условии причинности такого рода: например, прохождение света через вещество, частотная зависимость диэлектрической проницаемости и т. д. Таким образом, мы видим, что д. с. для амплитуды рассеяния вперед основаны на весьма общих свойствах физической системы и в общем не являются привилегией квантовой теории.

Однако в квантовой механике существует более сильный результат, касающийся аналитических свойств амплитуды рассеяния как функции двух переменных k и $t (= -\Delta^2)$. Зафиксируем разность $k_r - k_i = \Delta$ и рассмотрим аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции k . Экспонента в выражении (2.6) примет вид

$$\exp \left\{ -i\Delta r_1 + ik_i(r_n - r_1) + ik \sum_{m=1}^{n-1} |r_m - r_{m+1}| \right\}.$$

Угол между векторами k_i и $r_n - r_1$ нужно выразить через углы между векторами k_i и Δ и $r_n - r_1$ и Δ , так как

вектор Δ фиксирован:

$$k_i(r_n - r_1) = k|r_n - r_1|\{\cos(\Delta, r_n - r_1)\cos(\Delta, k_i) + \\ + \sin(\Delta, r_n - r_1)\sin(\Delta, k_i)\cos\varphi\} = -\frac{1}{2}\Delta(r_n - r_1) + \\ + |r_1 - r_n|\left(k^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right)^{1/2}\sin(\Delta, r_n - r_1)\cos\varphi;$$

φ — угол между плоскостями, содержащими векторы Δ и $r_n - r_1$ и векторы Δ и k . Таким образом, экспонента может быть приведена к виду

$$\exp\left\{-i\Delta r_1 - \frac{i}{2}\Delta(r_n - r_1) + i|r_1 - r_n|\left(k^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right)^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \sin(\Delta, r_n - r_1)\cos\varphi + ik\sum_{m=1}^{n-1}|r_m - r_{m+1}|\right\}. \quad (2.14)$$

Если теперь рассматривать выражение (2.6) в верхней полуплоскости комплексной плоскости k : $k + i\gamma$, $\gamma > 0$, то действительная часть экспоненты (2.14) не будет отрицательно определена. Дело в том, что существует неравенство

$$\operatorname{Im} \sqrt{(k + i\gamma)^2 - \frac{\Delta^2}{4}} \geq \gamma > 0,$$

в справедливости которого нетрудно убедиться графически. Поэтому существуют такие области интегрирования в (2.6) по Pdr_i , когда действительная часть предпоследнего члена в (2.14) больше нуля и больше абсолютного значения действительной части последнего члена. Следовательно, интеграл (2.6) в верхней комплексной полуплоскости может расходиться. Во всех вышеизложенных рассуждениях мы не конкретизировали поведение потенциала при больших r . Если теперь предположить, что при больших r асимптотически $U(r) \sim e^{-\mu r}$, т. е. сделать гипотезу о характере взаимодействия, то ситуация с аналитическим продолжением по k при фиксированной передаче импульса не будет столь безнадежной. Действительно, существует неравенство

$$\gamma + \mu \geq \operatorname{Im} \sqrt{(k + i\gamma)^2 - \frac{\Delta^2}{4}},$$

когда $\Delta \leq 2\mu$ и $\gamma > 0$.

Учитывая поведение потенциала при больших r , к показателю экспоненты (2.14) в (2.6) следует приписать член $-\mu (|r_1| + \dots + |r_n|) < -\mu|r_n - r_1|$. Поэтому, когда $\Delta \ll 2\mu$, действительная часть показателя экспоненты становится отрицательно определенной и продолжение амплитуды рассеяния в верхнюю комплексную полуплоскость не представляет никаких трудностей.

Соответствующее дисперсионное соотношение при $\Delta \ll 2\mu$ примет вид

$$\operatorname{Re} T(k, \Delta) = T^{(1)}(k, \Delta) + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{k' \operatorname{Im} T(k', \Delta)}{k'^2 - k^2} dk'. \quad (2.15)$$

Поскольку

$$\cos \theta = 1 - \frac{\Delta^2}{2k^2},$$

то область интегрирования по k'^2 в (2.15) от 0 до $\Delta^2/4$ является нефизической. Чтобы использовать д. с. (2.15) для решения задачи рассеяния, надо знать, можно ли мнимую часть амплитуды аналитически продолжить в эту область, а если можно, то как это сделать.

Для этого нужно рассмотреть аналитические свойства амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ или Δ . Основой исследования является следующая математическая теорема: если функция от $\cos \theta$ аналитична внутри некоторого эллипса с фокусами ± 1 , то она может быть разложена внутри этой всей области в сходящийся ряд по полиномам Лежандра. В Приложении 1 доказано, что мнимая часть амплитуды рассеяния аналитична по $z = \cos \theta$ в эллипсе с фокусами в точках ± 1 и с большой полуосью, равной $1 + \frac{2\mu^2}{k^2}$ (Челлен (1950)). Тогда согласно этой теореме мы можем в этой области разложить мнимую часть амплитуды рассеяния в сходящийся ряд по полиномам Лежандра. Коэффициенты разложения этого ряда T_l являются функциями от k иназываются парциальными амплитудами или парциальными волнами рассеяния:

$$T(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} T_l(k) (2l+1) P_l(\cos \theta).$$

Парциальные амплитуды удобны в тех случаях, когда нужно использовать условие унитарности, о котором речь пойдет ниже.

В переменных Δ^2 область аналитичности амплитуды рассеяния по $\cos \theta$ (П.1.6) определяется неравенством

$$\Delta^2 < 4\mu^2 + 4k^2.$$

Поскольку д. с. (2.15) справедливы при $\Delta \leq 2\mu$, то подынтегральное выражение в них определено во всей области интегрирования по k' .

2.2. Условие унитарности. Д. с. (2.15), так же как и (2.13), не являются уравнением для амплитуды рассеяния; они только выражают ее аналитические свойства. Чтобы превратить их в уравнения, нужна дополнительная связь между действительной и мнимой частью амплитуды рассеяния. Для получения этой связи надо использовать условие унитарности, которое не зависит от потенциала и имеет общий характер.

Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы с импульсом k и комплексно сопряженное уравнение для частицы с импульсом k' . Считая потенциал действительным и умножая слева первое уравнение на $\Psi_{k'}^*$, а второе — на Ψ_k , получим после вычитания одного из другого:

$$\Psi_{k'}^* \nabla^2 \Psi_k - \Psi_k \nabla^2 \Psi_{k'}^* = 0.$$

Интегрируя это равенство по объему большой сферы и пользуясь формулой Гаусса — Остроградского, получим

$$\int_{\Omega} \left\{ \Psi_k \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{k'}^* - \Psi_{k'}^* \frac{\partial}{\partial r} \Psi_k \right\} dS = 0.$$

Здесь интегрирование проводится уже по поверхности сферы. На этой поверхности волновые функции Ψ_k и $\Psi_{k'}^*$ выражаются через амплитуду рассеяния $T(k, \theta)$:

$$\Psi_k(r) = e^{ikr} + T(k_r, k) \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$\Psi_{k'}^*(r) = e^{-ik'r} + T^*(k_r, k') \frac{e^{-ik'r}}{r}.$$

Интегрирование по поверхности Ω дает

$$\frac{1}{2i} \{T(k', k) - T^*(k', k)\} = \frac{k}{4\pi} \int T(k, k_r) T^*(k_r, k') d\Omega_r. \quad (2.16)$$

Это равенство связывает мнимую часть амплитуды рассеяния со всей амплитудой. Уравнение (2.16) называется квантовомеханическим или двухчастичным условием унитарности. Отметим, что условие (2.16) обусловлено сохранением потока вероятности. Последний сохраняется только тогда, когда потенциал действителен. Если же потенциал комплексен, то к правой части (2.16) следует приписать член, пропорциональный поглощению частиц, т. е. пропорциональный мнимой части потенциала.

Если $k' = k$, то слева мы имеем мнимую часть амплитуды рассеяния вперед, а справа — квадрат амплитуды рассеяния, проинтегрированный по всем углам, что согласно (2.4) равно полному сечению рассеяния. Это и есть так называемая оптическая теорема:

$$\text{Im } T(0, k) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{полн.}} \quad (2.17)$$

Интеграл в (2.16) удобно выразить как интеграл по z_1 и z_2 — косинусам угла рассеяния амплитуд $T(k, k_r)$ и $T(k_r, k')$, т. е. вместо переменной φ в телесном угле $d\Omega_r = dz_1 d\varphi$ нужно ввести переменную

$$z_2 = z z_1 + \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z_1^2} \cos \varphi:$$

$$\text{Im } T(k, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dz_1 \int_{-1}^{+1} dz_2 \times \\ \times \frac{\Theta(1 + 2zz_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 - z^2)}{\sqrt{1 + 2zz_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 - z^2}} T(k, z_1) T^*(k, z_2). \quad (2.18)$$

Здесь $\Theta(z)$ — ступенчатая функция: $\Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z > 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$

Используя разложение (Редже (1960))

$$\frac{\Theta(1 + 2zz_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 - z^2)}{\sqrt{1 + 2zz_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 - z^2}} = \frac{\pi}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(z) P_l(z_1) P_l(z_2),$$

нетрудно получить условие унитарности для парциальных амплитуд

$$T_l(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(z) T(k, z) dz.$$

Оно имеет простой вид:

$$\text{Im } T_l(k) = k |T_l(k)|^2. \quad (2.19)$$

Из условия унитарности (2.19) следует

$$T_l(k) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k), \quad (2.20)$$

причем функция $\delta_l(k)$ действительна при $k > 0$. Приведем еще формулу условия унитарности, когда вместо переменной z используется переменная Δ :

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } T(k, \Delta^2) = \\ = \frac{1}{4\pi k} \int_0^{4k^2} d\Delta_1^2 \int_0^{4k^2} d\Delta_2^2 \frac{T^*(k, \Delta_2) T(k, \Delta_1) \Theta(K(\Delta, \Delta_1, \Delta_2))}{\sqrt{K(\Delta, \Delta_1, \Delta_2)}}, \\ K(\Delta, \Delta_1, \Delta_2) = \\ = 2(\Delta_1^2 \Delta_2^2 + \Delta_1^2 \Delta^2 + \Delta_2^2 \Delta^2) - \Delta_1^4 - \Delta_2^4 - \Delta^4 - \frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta^2}{k^2}. \end{aligned} \right\} (2.21)$$

Мы видим, что связь мнимой части амплитуды при фиксированном Δ с действительной частью существенно зависит от значений амплитуды при всех физических углах ($0 \leq \Delta^2 \leq 4k^2$). В то же время дисперсионные соотношения (2.15) справедливы только при $\Delta \leq 2\mu$.

Поэтому без информации об аналитических свойствах амплитуды в более широкой области по Δ^2 нельзя комбинировать условие унитарности (2.21) и д. с. (2.15).

2.3. Двойное спектральное представление. В квантовой механике известен класс потенциалов, для которых исследование аналитических свойств амплитуды рассеяния по Δ^2 и k можно провести до конца. Это — суперпозиция потенциалов Юкавы

$$V = V_0 \int_{\mu_0}^{\infty} \frac{\sigma(\zeta) e^{-\zeta r}}{r} d\zeta. \quad (2.22)$$

Например, второй борновский член амплитуды рассеяния для потенциала Юкавы ($\sigma(\zeta) = \delta(\zeta - \mu)$) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} T^{(2)}(k, \Delta^2) &= m^2 V_0^2 \int_{-1}^{+1} dy \frac{1}{\lambda(y) [\mu^2 - 2ik\lambda(y)]}, \\ \lambda(y) &= \sqrt{\mu^2 + \frac{\Delta^2}{4}(1-y^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Это выражение аналитично в верхней комплексной плоскости k , если $\Delta^2 > -4\mu^2$. Поэтому (2.23) можно представить как

$$T^{(2)} = \int_0^{\infty} \frac{dk'^2}{\pi} \frac{W(k'^2, \Delta)}{k'^2 - k^2 - i\varepsilon}, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} W(k^2, \Delta) &= \text{Im } T^{(2)}(k, \Delta^2) = \\ &= 2m^2 V_0^2 k \int_{-1}^{+1} dy \frac{1}{\mu^2 + 4k^2 \left[\mu^2 + \frac{\Delta^2}{4}(1-y^2) \right]}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подынтегральное выражение (2.25) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2 + 4k^2 \left[\mu^2 + \frac{\Delta^2}{4}(1-y^2) \right]} &= \\ &= \frac{1}{k^2} \frac{1}{1-y^2} \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{t' + \Delta^2} \delta \left[t' - \frac{\mu^4 + 4k^2 \mu^2}{k^2(1-y^2)} \right]. \end{aligned}$$

Если теперь в (2.25) выполнить интегрирование по y , то получим

$$\text{Im } T^{(2)}(k, \Delta^2) = \int_0^{\infty} \frac{dt'}{t' + \Delta^2} \frac{1}{\sqrt{t'}} \frac{\Theta(k^2 t' - \mu^4 - 4k^2 \mu^2)}{\sqrt{k^2 t' - \mu^4 - 4k^2 \mu^2}}. \quad (2.26)$$

Это соотношение определяет аналитические свойства $\text{Im } T^{(2)}(k, \Delta^2)$ по переменной Δ^2 . Именно, $\text{Im } T^{(2)}(k, \Delta^2)$ является аналитической функцией Δ^2 в комплексной плe-

скости Δ^2 , разрезанной вдоль линии $\Delta_{\text{порог}}^2 = \frac{\mu^2(\mu^2 + 4k^2)}{k^2} \ll \Delta^2 < \infty$. Отсюда можно написать спектральное представление амплитуды $T^{(2)}(k, \Delta^2)$ как функции комплексных переменных $k^2 = s$ и $\Delta^2 = -t$:

$$T^{(2)}(s, t) = \int_0^\infty \frac{ds'}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt'}{\pi} \frac{\rho_2(s', t')}{(s' - s - i\epsilon)(t' - t)}, \quad (2.27)$$

где

$$\rho_2(s, t) = \frac{4m^2 V_0^2}{2} \frac{\pi}{\sqrt{t}} \frac{\Theta(st - \mu^2 - 4s\mu^2)}{\sqrt{st - \mu^4 - 4s\mu^2}} \quad (2.28)$$

— действительная функция, отличная от нуля в области, ограниченной кривой $t = \frac{\mu^4 + 4s\mu^2}{s}$ в плоскости s, t . Эта область заштрихована на рис. 5.

Анализируя следующие члены борновского разложения, можно прийти к выводу, что $T^{(n)}(s, t)$ имеет такое же спектральное представление, как и $T^{(2)}(s, t)$. Мы не будем здесь проводить этого анализа из-за громоздкости выкладок (см., например, Голдбергер, Ватсон (1964)); отметим только, что соответствующая спектральная функция $\rho_n(s, t)$ отлична от нуля в меньшей области. Граница этой области при $s \rightarrow \infty$ равна $n^2\mu^2$.

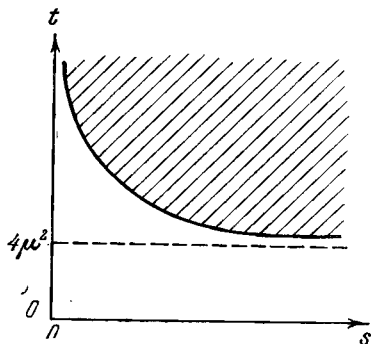


Рис. 5.

Итак, в случае суперпозиции потенциалов Юкавы имеем следующее спектральное представление для амплитуды рассеяния:

$$T(s, t) = -\frac{\tilde{V}_0}{\mu^2 - t} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty ds' \int_0^\infty dt' \frac{\rho(s', t')}{(s' - s - i\epsilon)(t' - t)}, \quad (2.29)$$

$$\tilde{V}_0 = 2mV_0, \quad k^2 = s, \quad -\Delta^2 = t.$$

Выражение (2.29) называется двойным спектральным представлением Мандельштама (1958). Исторически оно сначала было постулировано в квантовой теории поля и только потом строго доказано в квантовой механике для суперпозиции потенциалов Юкавы. Переход к суперпозиции в (2.29) тривиален: достаточно вместо борновского члена в (2.29)

$$\text{написать } \frac{1}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{\sigma(t')}{t' - t} dt'.$$

Теперь, чтобы воспользоваться этим представлением для решения задачи рассеяния, нужно переписать условие унитарности для спектральной функции $\rho(s, t)$. Удобнее рассматривать эту проблему в переменных s и $z = \cos \theta$. Из спектрального представления (2.29) следует

$$T(s, z) = \frac{1}{\pi} \int_{z_0(s)}^{\infty} \frac{\text{Im}_z T'(s, z') dz'}{z' - z}, \quad |z, (s)| > 1.$$

Условие унитарности (2.16) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{Im}_s T(s, z) &= \\ &= \frac{\sqrt{s}}{4\pi^3} \int_{-1}^{+1} dz_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int dz' dz'' \frac{\text{Im}_{z'} T(s, z') \text{Im}_{z''} T^*(s, z'')}{(z' - z_1)(z'' - z z_1 - \sqrt{1 - z^2} \sqrt{1 - z_1^2} \cos \varphi)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по φ и z_1 и считая при этом $|z| < 1$, получим

$$\left. \begin{aligned} \text{Im}_s T(s, z) &= \frac{\sqrt{s}}{2\pi^2} \int dz' \int dz'' \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{z - z' - z'' - \sqrt{k}}{z - z' - z'' + \sqrt{k}} \text{Im}_{z'} T(s, z') \text{Im}_{z''} T^*(s, z''), \\ &k = z^2 + z'^2 + z''^2 - 2zz'z'' - 1. \end{aligned} \right\} (2.30)$$

При этом ветвь логарифма выбрана так, что фаза его равна нулю, когда $|z| < 1$, т. е. в физической области амплитуды рассеяния.

Формула (2.30) является интегральным представлением для $\text{Im}_s T(s, z)$, осуществляющим аналитическое продолжение функции $\text{Im}_s T(s, z)$ в область $|z| > 1$. В Приложении 1 детально рассмотрена процедура этого

продолжения. Функция $\text{Im}_s T(s, z)$ аналитична в комплексной плоскости z , разрезанной вдоль прямой $z_{\min} = \frac{2\mu^2}{s} \left(1 + \frac{\mu^2}{4s}\right) + 1 \leq z < \infty$. Скачок функции $\text{Im}_s T(s, z)$ на этой прямой даст спектральную функцию $\rho(s, z)$. В переменных s и t спектральная функция определяется соотношением (см. Приложение 2):

$$\rho(s, t) = \text{Im}_t \{ \text{Im}_s T(s, t) \} = \frac{1}{2\pi \sqrt{s}} \int_{\mu^2}^{\infty} dt' \int_{\mu^2}^{\infty} dt'' \frac{\text{Im}_{t'} T(s, t') \text{Im}_{t''} T^*(s, t'')}{\sqrt{K(s; t, t', t'')}} , \quad (2.31)$$

$$K(s; t, t', t'') = t^2 + t'^2 + t''^2 - 2(tt' + tt'' + t't'') - \frac{tt't''}{s} . \quad (2.32)$$

При этом область интегрирования фиксируется условием

$$t \geq t' + t'' + \frac{t't''}{2s} + 2(t't'')^{1/2} \left(1 + \frac{t'}{2s}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{t''}{2s}\right)^{1/2} . \quad (2.33)$$

Соотношения (2.31), (2.33) и (2.29) образуют систему уравнений, определяющую амплитуду рассеяния и эквивалентную уравнению Шредингера с потенциалом $-\frac{\tilde{V}_0}{\mu^2 - t}$.

Это следует из того факта, что область интегрирования сильно ограничивается условием (2.33). Граница спектральной функции определяется уравнением (2.33), когда t' и t'' достигают наименьших значений, равных μ^2 :

$$t = 4\mu^2 \left(1 + \frac{\mu^2}{4s}\right) . \quad (2.34)$$

Для общности предположим, что борновский член потенциала Юкавы имеет вид $\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\rho_0(t') dt'}{t' - t}$. Используя (2.29) и условие унитарности (2.31), мы можем написать уравнение для $\text{Im}_t T(s, t)$:

$$\text{Im}_t T(s, t) = \rho_0(t) + \frac{1}{2\pi^2} \int_{\substack{t_0 \\ t-t_0}}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{s'}} \frac{1}{s' - s} \int_{t_0}^{\infty} dt' \int_{t_0}^{\infty} dt'' \frac{\text{Im}_{t'} T(s', t') \text{Im}_{t''} T^*(s', t'')}{\sqrt{K(s'; t, t', t'')}} .$$

Интегрирование ограничивается областью (2.33). Очевидно, что при $t_0 < t < 4t_0$ функция $\text{Im}_t T(s, t) = \rho_0(t)$, так как для положительных s подынтегральный корень больше нуля, когда $t > 4t_0$ (см. (2.34), где $\mu^2 = t_0$). Для положительности $K(s; t, t', t'')$ (2.32) необходимым условием является требование

$$t^2 + t'^2 + t''^2 - 2(tt' + tt'' + t't'') > 0,$$

или

$$t > [(t')^{1/2} + (t'')^{1/2}]^2.$$

Поэтому при положительных s' , если t лежит в интервале $4t_0 < t < 9t_0$, следует интегрировать по t' и t'' в пределах от t_0 до $4t_0$. А в этом случае функция $\text{Im}_t T(s, t)$ определена предыдущей итерацией. Нетрудно понять, что после n итераций функция $\text{Im}_t T(s, t)$ точно определена на отрезке $t_0 < t < n^2 t_0$. Следовательно, из представления (2.29) и условия унитарности (2.31) амплитуда рассеяния находится однозначно.

Таким образом, задачу рассеяния на суперпозиции потенциалов Юкавы мы переформулировали в терминах аналитических свойств амплитуды рассеяния и условия унитарности. Совокупность условий аналитичности и унитарности оказывается тем самым эквивалентной уравнению Шредингера.

2.4. Приближение эффективного радиуса. Представление Мандельштама (2.29) определяет также аналитические свойства парциальных волн как функций переменной s .

Проинтегрируем $T(s, t)$ в (2.29) по z с весом $\frac{1}{2} P_l(z)$:

$$T_l(s) = -\frac{\tilde{V}_0}{2s} Q_l\left(1 + \frac{\mu^2}{4s}\right) + \frac{1}{2\pi^2 s} \int_{s' - s - i\epsilon}^{s' dt'} \rho(s', t') Q_l\left(1 + \frac{t'}{2s}\right). \quad (2.35)$$

Здесь $Q_l(\zeta)$ — функция Лежандра второго рода. Основные ее свойства; а) она аналитична в комплексной плоскости ζ , разрезанной вдоль отрезка $-1 \leq \zeta \leq +1$; б) при $\zeta \rightarrow 0$ $Q_l(\zeta) \approx (2\zeta)^{-l-1} \sqrt{\pi} \Gamma(l+1) / \Gamma(l+3/2)$.

Следовательно, функция $T_l(s)$ аналитична в плоскости s с разрезами $(0, \infty)$ и $(-\infty, -\mu^2/4)$. Кроме того, при $s \rightarrow 0$ будет $T_l \sim s^l$. Заметим, что первый член в (2.35)

ответствен за разрез $(-\mu^2/4, -\infty)$, в то время как второй член дает разрезы $(0, +\infty)$ и $(-\mu^2, -\infty)$, так как спектральная функция при $t < 4\mu^2$ обращается в нуль.

Представим $T_l(s)$ в виде

$$T_l(s) = \frac{N_l(s)}{D_l(s)}, \quad (2.36)$$

где функция $N_l(s)$ обладает только левым разрезом $(-\infty, -\mu^2/4)$, а функция $D_l(s)$ — только правым, $(0, \infty)$. В физической области функция $T_l(s)$ может быть записана в виде

$$T_l(s + i0) = \frac{e^{i\delta_l(s+i0)} \sin \delta_l(s + i0)}{\sqrt{s + i0}}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\text{Im } D_l(s) = -\sqrt{s} N_l(s), \quad s > 0. \quad (2.37)$$

Последнее равенство легко преобразуется к виду

$$\text{Im } [D_l(s) + i\sqrt{s} N_l(s)] = 0, \quad s > 0. \quad (2.38)$$

Здесь выбрана та ветвь функции \sqrt{s} , для которой $\sqrt{s+i0} > 0$ при $s > 0$. Из формулы (2.38) следует, что аналитическая функция $D_l(s) + i\sqrt{s} N_l(s)$ не имеет правого разреза, т. е. разреза на луче $(0, \infty)$. Исходя из определения функций $D_l(s)$ и $N_l(s)$ (2.36), мы можем утверждать, что функция $D_l(s) + i\sqrt{s} N_l(s)$ имеет только разрез $(-\infty, -\mu^2/4)$, обусловленный вторым ее слагаемым. Поэтому ее можно разлагать в ряд Тейлора в круге с центром в $s = 0$ и радиусом сходимости $R = \mu^2/4$. Заметим теперь, что

$$\text{Re } [D_l(s) + i\sqrt{s} N_l(s)] = \sqrt{s} N_l(s) \text{ctg } \delta_l(s), \quad (2.39)$$

или

$$\sqrt{s} N_l(s) \text{ctg } \delta_l(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^l s^n.$$

Так как функция $N_l(s)$ аналитична в том же круге, что и $D_l(s) + i\sqrt{s} N_l(s)$, и при малых s в окрестности порога $N_l(s) \sim s^l$, то

$$s^{l+1/2} \text{ctg } \delta_l(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^l s^n. \quad (2.40)$$

Если ограничиться несколькими первыми членами разложения, то мы получим формулу, называемую «приближением эффективного радиуса» (Ландау, Смородинский (1944)). Ее можно получить при более слабых предположениях; например, достаточно потребовать убывания потенциала при больших r , как $e^{-\mu r}$. Вообще же «приближение эффективного радиуса» хорошо работает там, где область действия потенциала мала, и чем меньше эта область (больше μ), тем шире область сходимости ряда (2.40) и тем меньшего числа членов достаточно, чтобы удовлетворительно описать парциальную амплитуду при низких энергиях. Кроме того, из выражения (2.35) видно, что $a_0^l \sim \mu^{-2l}$, и если μ достаточно велико (т. е. эффективный радиус действия $\sim 1/\mu$ мал), то высшие парциальные гармоники в низкоэнергетической области малы.

§ 3. Дисперсионный метод в квантовой теории поля

3.1. Дисперсионный метод в теории сильных взаимодействий. В отличие от квантовой механики, в квантовой теории поля фактически не существует динамического способа описания явлений, т. е. способа основанного на уравнениях движения. Это во всяком случае верно для сильных взаимодействий, которые нас сейчас интересуют.

Здесь имеется другой путь. Этот путь — метод дисперсионных соотношений — позволяет, не обращаясь к деталям динамики, исходя только из самых общих свойств квантовой теории поля, таких как причинность, унитарность, релятивистская инвариантность, существование полной системы физических состояний, установить аналитические свойства амплитуд рассеяния сильно взаимодействующих частиц в комплексной плоскости энергий, т. е. получить формулы типа (2.15), (2.29), именуемые дисперсионными соотношениями.

Объектом рассмотрения здесь является амплитуда рассеяния, определение которой через элементы S -матрицы имеет примерно следующий вид (подробнее по этому поводу см. §§ 7.1, 21.1):

$$\langle f | S - 1 | i \rangle = \frac{i\delta(p_i - p_f)}{\prod_n (2p_n^0)^{1/2}} f(E, \theta),$$

где p — 4-импульс, p^0 — четвертая его компонента, f и i отвечают конечному и начальному состояниям системы, $n = i, f$.

Как было показано в § 2, дисперсионный метод изучает аналитические свойства амплитуды $f(E, \theta)$, являющейся функцией энергии E и угла рассеяния θ , в комплексной плоскости переменной E , т. е. свойства аналитического продолжения $f(E, \theta)$ на комплексные значения аргумента E . Такое аналитическое продолжение проводится с помощью интегрального Фурье-представления $f(E, \theta)$ через матричные элементы, записанные в пространственно-временном представлении, и оказывается возможным благодаря условию причинности в пространстве — времени.

Соответствующее рассмотрение использует сложный аппарат современной квантовой теории поля, а также математические методы, лежащие на грани теории функций многих комплексных переменных и теории обобщенных функций (см., например, Боголюбов, Ширков (1957) и Боголюбов, Медведев, Поливанов (1958)). Даже беглое ознакомление с упомянутым кругом идей и представлений весьма существенно увело бы нас от основной линии изложения. Ввиду этого мы ограничимся констатированием того факта, что упомянутые математические методы позволяют, опираясь на перечисленные выше самые общие свойства локальной квантовой теории поля, совершенно строго получить д. с. по энергетической переменной для амплитуд рассеяния для ряда наиболее важных процессов рассеяния сильно взаимодействующих частиц (в том числе для процессов $\pi\pi$ - и πN -рассеяния).

Относительно просто могут быть доказаны д. с. по E при фиксированном угле рассеяния $\theta = 0$, т. е. для рассеяния вперед.

3.2. Левый разрез и кроссинг-симметрия. Д. с. для рассеяния вперед имеют довольно простой вид, во многом напоминающий д. с. в квантовой механике (2.15). Наиболее существенное отличие между ними состоит в том, что в комплексной плоскости функция $f(E, 0)$ имеет второй разрез, лежащий на отрицательной части действительной оси. Так, например, д. с. для амплитуды рассеяния скалярных частиц с массой μ на фиксированном источнике

содержат интеграл по этому разрезу и имеют примерно следующий вид:

$$\operatorname{Re} f(E) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE'}{E' - E} \operatorname{Im} f(E') + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{dE'}{E' - E} \operatorname{Im} f(E'). \quad (3.1)$$

Второй интеграл по левому разрезу $(-\mu, -\infty)$ не имеет нерелятивистского аналога. Область интегрирования $E' < 0$ является, очевидно, нефизической.

Однако значения амплитуды в этой области можно связать со значениями амплитуды в физической области $E > \mu$ путем весьма простых рассуждений. В рассматриваемом модельном случае волновая функция в координатном представлении $\varphi(x)$ должна быть действительной величиной, что соответствует отсутствию у частиц электрического заряда. Ввиду этого ее фурье-образ

$$f(E) = \int e^{iEt} \varphi(x, t) d\mathbf{x} dt$$

обладает свойством

$$f^*(E) = f(-E), \quad (3.2)$$

т. е.

$$\operatorname{Re} f(-E) = \operatorname{Re} f(E); \quad \operatorname{Im} f(-E) = -\operatorname{Im} f(E). \quad (3.3)$$

С помощью (3.2) соотношение (3.1) приводится к виду

$$\operatorname{Re} f(E) = \frac{2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{E' dE'}{E'^2 - E^2} \operatorname{Im} f(E'). \quad (3.4)$$

Таким образом, мы исключили нефизические отрицательные энергии с помощью соображений симметрии. В более общем случае, например, рассеяния реальных заряженных π -мезонов (пионов) друг на друге или рассеяния пионов на нуклонах исключение левого разреза по отрицательным E производится аналогичным образом. Соответствующие (3.2) соотношения симметрии при этом имеют более сложный матричный вид и называются условиями кроссинг-симметрии. Более подробно свойства кроссинг-симметрии излагаются в §§ 5, 7, 8, 21, 22, 23. Реальные д. с. отличаются поэтому от (3.1) наличием матричной

структуры. Они представляют собой систему соотношений для нескольких функций $f_i(E)$, $i = 1, 2, \dots, k$, причем физический интеграл при $E' > 0$ диагонален по индексу i , а нефизический интеграл, как правило, недиагонален.

Второе важное отличие связано с тем, что интегралы вида (3.1), (3.4) обычно расходятся. В силу оптической теоремы (2.17) мнимая часть амплитуды рассеяния вперед может быть выражена через полное сечение. Допустим, что эта связь имеет вид (в реальном случае она может иметь более сложную форму, ср. (7.25))

$$\text{Im } f(E) = \frac{V \sqrt{E^2 - \mu^2}}{4\pi} \sigma_{\text{полн}}(E)$$

и что

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \sigma_{\text{полн}}(E) = \sigma_{\infty} = \text{const} > 0.$$

Тогда правая часть (3.4) расходится линейно.¹ Как было сказано в § 2.1, это означает, что теорему Коши следует записать не для $f(E)$, а для $f(E)$, деленной на полином $P(E)$. Выбирая полином P в виде $P(E) = E^2 - E_0^2$, $|E_0| \ll \mu$, $\text{Im } E_0 = 0$, получаем после взятия вычета в точке $E^2 = E_0^2$ для функции $\varphi(E) = f(E) / (E^2 - E_0^2)$:

$$\frac{\text{Re} f(E)}{E^2 - E_0^2} = \frac{f(E_0)}{E^2 - E_0^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dE'^2}{E'^2 - E^2} \frac{\text{Im } f(E')}{E'^2 - E_0^2},$$

или

$$\text{Re} [f(E) - f(E_0)] = \frac{E^2 - E_0^2}{\pi} \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dE'^2}{E'^2 - E^2} \frac{\text{Im } f(E')}{E'^2 - E^2}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) можно также получить из (3.4), проведя в нем вычитание в точке $E^2 = E_0^2$. Таким образом, применение теоремы Коши для функции $f(E)/(E^2 - E_0^2)$ приводит к тем же результатам, что и вычитание.

Проведенная операция, в результате которой интеграл становится сходящимся, вводит новую константу $\text{Re } f(E_0)$. Ввиду этого следует выбрать точку вычитания так, чтобы величина $f(E_0)$ имела простой физический смысл. Полагая $E_0 = \mu$ и используя тот факт, что на пороге амплитуда

обычно сводится к длине рассеяния s -волны

$$f(E_0) = a,$$

получаем

$$\operatorname{Re} f(E) = a + \frac{E^2 - \mu^2}{4\pi^2} \int_{\mu}^{\infty} \frac{E' \sigma(E') dE'}{\sqrt{E'^2 - \mu^2} (E'^2 - E^2)}.$$

Наконец, д. с. могут содержать еще полюсные члены, отвечающие возможности виртуального перехода двух рассеивающихся частиц в одночастичное состояние. Такая возможность реализуется, например, в πN -рассеянии. Д. с. для этого случая рассмотрены в § 4, где проведено также их сравнение с экспериментом.

Здесь важно отметить еще одно обстоятельство. Как мы видели ранее (см. § 2.1), физическим значениям амплитуды рассеяния соответствует верхняя грань физического разреза, т. е.

$$f(E) = f(E + i0).$$

Входящие в (3.1), (3.5) физические амплитуды $\operatorname{Re} f(E)$, $\operatorname{Im} f(E)$ при $E > \mu$ следует понимать именно в этом смысле. Возникает вопрос об аналогичном определении амплитуды на левом кроссинг-разреze $-\infty < E < -\mu$. Не представляет труда убедиться в том, что для комплексных $z = E + i\gamma$ соотношение (3.2) может быть детализовано так:

$$f^*(z) = f(z^*), \quad (3.6)$$

$$f(z) = f(-z). \quad (3.7)$$

Формула (3.6) отражает тот факт, что f является действительной функцией комплексного аргумента. Она связывает, в частности, значения амплитуды на верхнем и нижнем берегах каждого из разрезов. Формула (3.7) дает собственно свойства симметрии. В рассматриваемом случае (3.7) устанавливает, в частности, связь между значениями на верхнем берегу физического разреза и нижнем берегу кроссинг-разреза, т. е. $f(E + i0) = f(-E - i0)$, а также вторую связь $f(E - i0) = f(-E + i0)$. Это положение иллюстрирует рис. 6.

Связь (3.6) является универсальной для различных д. с., в то время как соотношения кроссинг-симметрии (3.7) в общем случае имеют матричную структуру. Например, для случая рассеяния π^\pm -мезонов на протонах вместо (3.7) получаем

$$f_{\pi^\pm p}(E + i0) = f_{\pi^\mp p}(-E - i0), \quad (3.8)$$

вследствие чего д. с. для амплитуд $f_{\pi^+ p}$ и $f_{\pi^- p}$ оказываются связанными между собой через кроссинг-разрез. Выражая $\text{Im } f_{\pi^\pm p}(E)$ с помощью оптической теоремы через

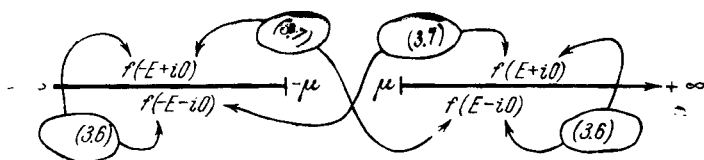


Рис. 6.

эффективные сечения, приходим к формулам, содержащим только физически наблюдаемые величины. Такие формулы можно сравнивать с экспериментальными данными (см. § 4).

Чтобы получить не соотношения между наблюдаемыми величинами, а уравнения для них, к д. с. вида (3.3) следует добавить, по крайней мере, еще одну связь между $\text{Im } f$ и $\text{Re } f$. Такую связь можно получить из условия унитарности для матрицы рассеяния S , имеющего вид

$$SS^+ = 1.$$

3.3. Роль условия унитарности. Матрицу рассеяния, записанную в дискретном представлении, представим в виде

$$\langle a | S | b \rangle = \delta_{ab} + i \langle a | T | b \rangle.$$

Здесь a и b — дискретные индексы, описывающие конечные и начальные состояния. Подставляя это выражение в условие унитарности

$$\sum_n \langle a | S^+ | n \rangle \langle n | S | b \rangle = \delta_{ab},$$

получаем

$$\text{Im} \langle a | T | b \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \langle a | T^+ | n \rangle \langle n | T | b \rangle, \quad (3.9)$$

где $\langle a | T | b \rangle$ — матричный элемент перехода из состояния $|b\rangle$ в состояние $|a\rangle$, а суммирование в правой части проводится по полной системе физических состояний $|n\rangle$, включающей, в частности, состояние с произвольно большим числом частиц.

Для того чтобы применить (3.9) к интересующему нас случаю упругого рассеяния, необходимо считать состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ двухчастичными, в нашем случае — двухмезонными. Тогда в левой части (3.9) мы получим мнимую часть амплитуды упругого рассеяния $\text{Im} f$. В правой части, однако, кроме произведения амплитуд вида $f^* f$ войдут еще члены, соответствующие промежуточным состояниям $|n\rangle$ с числом частиц, большим двух.

Для получения замкнутой формулы в области низких энергий этими многочастичными вкладами обычно пренебрегают. В результате указанной двухчастичной аппроксимации условие унитарности (3.9) приводится к виду

$$\text{Im} f(E, \theta) = \frac{p}{E} \int \frac{d\Omega'}{4\pi} f^*(E, \theta') f(E, \theta''), \quad (3.10)$$

где углы θ , θ' и θ'' связаны между собой сферической формулой сложения.

Формула унитарности (3.10) дает искомое второе соотношение между $\text{Im} f$ и $\text{Re} f$. Она, однако, связывает между собой различные углы и делает невозможным изолированное изучение амплитуды рассеяния вперед $f(E, 0)$. Поэтому необходимо также иметь д. с. для рассеяния на произвольный физический угол $\theta \neq 0$, $|\cos \theta| < 1$. Здесь мы наталкиваемся на трудности, которые, по всей видимости, имеют чисто технический характер. Дело в том, что существующие методы доказательства д. с. позволяют обобщать результаты, полученные для рассеяния вперед ($\theta = 0$), только вполне определенным образом. Именно, аналогично тому, как это имеет место в квантовой механике, удастся доказать аналитические свойства амплитуды f в комплексной плоскости энергии, лишь фиксируя передачу импульса $t = -(\Delta p)^2 = -(p_1 - p_2)^2$. Здесь p_1 —

3-импульс налетающей частицы, а p_2 — 3-импульс рассеянной частицы (в с. ц. м.). Не удается, например, изучить аналитические свойства по E для амплитуды, рассматриваемой при фиксированном угле рассеяния $\theta \neq 0$. Более того, доказательство при фиксированном $t = -\Delta^2$ оказывается возможным лишь для некоторого интервала значений $0 > t > t_{\min}$ (Боголюбов и др. (1958)), причем предельное значение t_{\min} зависит не только от вида изучаемого процесса, но и от деталей метода доказательства, т. е. от искусства исследователя. В то же время наличие границы t_{\min} приводит к тому, что область, в которой доказана аналитичность амплитуды f по энергии, не покрывает целиком физической области. Кроме того, получаемые этим путем д. с. при $t \neq 0$ содержат подпороговую нефизическую область, что приводит к новым затруднениям.

Поэтому простая по своей идее программа совместного использования д. с. и условий унитарности для получения системы уравнений подобно тому, как это оказалось возможным в квантовой механике, наталкивается на серьезные препятствия. Являются ли эти препятствия чисто техническими или содержат в себе какой-либо принципиальный момент, не совсем ясно. Первая точка зрения кажется весьма правдоподобной. Она находится в соответствии с построениями, основанными на ряде вполне естественных гипотез, которые мы изложим в § 5.

§ 4. Экспериментальное обоснование дисперсионных соотношений в квантовой теории поля

Как уже было сказано, вопрос о соответствии д. с. экспериментальным данным представляет принципиальную важность особенно для теории сильных взаимодействий, где нет ни одного результата теории, количественно соответствующего экспериментальным данным. Поэтому сравнение результатов дисперсионного подхода для сильных взаимодействий с опытом имеет особое значение. Для проведения такого сравнения следует выбрать процесс, для которого имеется достаточный экспериментальный материал, а д.с. не содержат каких-либо неоправданных гипотез. Этим двум условиям удовлетворяет

процесс пион-нуклонного рассеяния на нулевой угол. Д.с. для него получены Голдбергером и др. (1955) и имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 D_+(E) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{\mu}\right) D_+(\mu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{\mu}\right) D_-(\mu) + \\
 &+ \frac{q^2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE'}{q'^2} \left[\frac{A_+(E')}{E' - E} + \frac{A_-(E')}{E' + E} \right] + \\
 &+ 2f^2 \frac{1}{\mu^2} \frac{q^2}{E - \frac{\mu^2}{2M}}, \\
 D_-(E) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E}{\mu}\right) D_-(\mu) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E}{\mu}\right) D_+(\mu) + \\
 &+ \frac{q^2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{dE'}{q'^2} \left[\frac{A_-(E')}{E' - E} + \frac{A_+(E')}{E' + E} \right] - \\
 &- 2f^2 \frac{1}{\mu^2} \frac{q^2}{E + \frac{\mu^2}{2M}},
 \end{aligned} \right\} (4.1)$$

где M, μ — соответственно массы нуклона и пиона, f — константа связи. Смысл величин D_{\pm} и A_{\pm} ясен из следующего выражения для амплитуд процессов $\pi^{\pm} + p \rightarrow \pi^{\pm} + p$:

$$f_{\pm}(E) = D_{\pm}(E) + iA_{\pm}(E). \quad (4.2)$$

По известной оптической теореме функции $A_{\pm}(E)$ выражаются через полные сечения (см. (21.18)):

$$A_{\pm}(E) = \frac{q}{4\pi} \sigma_{\pm}^{\text{полн}}(E), \quad (4.3)$$

где q — импульс, а E — полная энергия пиона в л. с. к.

Соотношения (4.1) выписаны для процессов $\pi^{\pm}p$ -рассеяния. Полезно иметь в виду и другую форму записи соотношений (4.1) через их полусумму и полуразность, так как в этом случае наиболее отчетливо проявляется кроссинг-симметрия (3.8), а именно:

$$\frac{1}{2} [f_+(E) \mp f_-(E)] = \mp \frac{1}{2} [f_+(-E) \mp f_-(-E)]. \quad (4.4)$$

Помимо интегральных членов, д. с. в этом случае содержат полюсные и полиномиальные. Степень полиномов связана с ростом амплитуд $f_{\pm}(E)$ на бесконечности. Вопрос о степени роста амплитуды процесса всегда лежит вне рамок дисперсионного подхода и до настоящего времени не может быть однозначно определен теоретически (см., однако, конец § 8.5). Поэтому здесь приходится обращаться к экспериментальным данным, которые, по-видимому, указывают на то, что при $E \gg 10 \text{ Гэв}$ сечения слабо меняются, так что их можно считать постоянными. Этот вывод, конечно, не строг, но если его принять, то из (4.3) следует линейный рост амплитуд $f_{\pm}(E)$, и формула (4.1) оправдана.

При таком подходе, однако, оценка степени роста функции $\frac{1}{2}[f_+(E) - f_-(E)]$ получается завышенной. Причина этого состоит в том, что в оптическую теорему входят $\sigma_{\pm}(E)$, для которых справедлива теорема Померанчука (1958)

$$\lim_{E \rightarrow \infty} [\sigma_+(E) - \sigma_-(E)] = 0. \quad (4.5)$$

Д. с. для $\frac{1}{2}[f_+(E) - f_-(E)]$ (так называемое «д. с. без вычитания») не содержит полиномов по E . Известно, что оно хорошо согласуется с опытом.

Поэтому, строго говоря, присутствие двух постоянных $D_{\pm}(\mu)$ в д. с. (4.1) не является необходимым и объясняется соображениями удобства записи.

Полюсы в амплитудах $f_{\pm}(E)$ присутствуют потому, что законы сохранения допускают следующую последовательность в реакциях π^{\pm} p-рассеяния:

$$\pi^- + p \rightarrow n \rightarrow \pi^- + p,$$

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + (\pi^+ + n) \rightarrow \pi^+ + p.$$

Иными словами, в условии унитарности (3.9) первым из полной системы функций $|n\rangle$ и наимизшим по массе является однонуклонное состояние $|N\rangle$. Полюсные вклады в амплитуды (4.2) соответствуют низшему порядку теории возмущений (см. рис. 7). Отсюда понятно, что полюсные члены пропорциональны $f^2 = \frac{1}{4\pi} \left(g \frac{\mu}{2M}\right)^2$.

Положение их определяется законом сохранения энергии для элементарных процессов $\pi^- + p \rightarrow n$, $p \rightarrow n + \pi^+$.

Нетрудно получить для энергии пиона E значения $\pm \mu^2/2M$, так как имеем равенства

$$E + M = \sqrt{M^2 + E^2 - \mu^2}, \quad M = E + \sqrt{M^2 + E^2 - \mu^2}.$$

Пионы с полными энергиями $\pm \mu^2/2M$ являются нефизическими, ибо у них $q^2 = E^2 - \mu^2 < 0$.

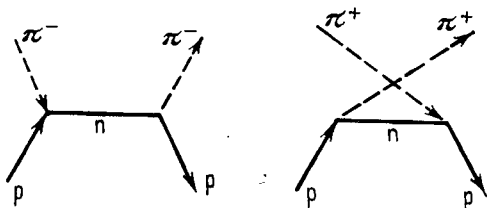


Рис. 7.

Следует подчеркнуть, что g^2 есть не константа связи в теории возмущений, а так называемая перенормированная константа связи мезон-нуклонного взаимодействия. То, что д. с. (4.1) содержат перенормированную константу связи, является несомненным достоинством дисперсионного подхода, так как он связывает значения g^2 с наблюдаемыми величинами $\sigma_{\pm}(E)$ и $D_{\pm}(E)$. Тем самым g^2 приобретает полный смысл физической величины, выражаемой через данные опыта.

Действительно, в соотношения (4.1) входят величины $D_{\pm}(E)$, $D_{\pm}(\mu)$ и $\sigma_{\pm}(E)$. Ниже будет показано, что все они определяются экспериментально. Тогда единственным свободным параметром в (4.1) является f^2 . Поэтому проверка (4.1) состоит в установлении того, что существует значение f^2 , для которого правые и левые части (4.1) равны. Одновременно такая проверка служит и способом определения величины f^2 .

Для этой проверки необходимо вычислить $D_{\pm}(E)$ как функции энергии через интегралы от $\sigma_{\pm}(E)$ и f^2 , а затем сравнить полученные кривые с экспериментальными значениями. Величины $D_{\pm}(E)$ можно получить из экспериментальных данных по дифференциальным сечениям,

поскольку

$$\frac{d\sigma_{\pm}}{d\Omega} \Big|_{\theta=0} = |D_{\pm}(E)|^2 + \left| \frac{q}{4\pi} \sigma_{\pm}(E) \right|^2.$$

Знак $D_{\pm}(E)$ определяется по интерференции с кулоновским рассеянием. Значения $D_{\pm}(\mu)$ выражаются через длины рассеяния.

Построение функций $D_{\pm}(E)$ требует вычисления интегралов в смысле главного значения от полных сечений $\sigma_{\pm}(E)$. Последние известны с ошибками и могут быть аппроксимированы различными способами. Довольно быстро было установлено, что, варьируя вид кривых $\sigma_{\pm}(E)$ в пределах экспериментальных ошибок, можно получить для $D_{\pm}(E)$ достаточно широкий коридор, захватывающий экспериментальные точки (Зади, Ломон (1958)). Такая чувствительность $D_{\pm}(E)$ к форме кривых $\sigma_{\pm}(E)$ объясняется присутствием в соотношениях (4.1) интегралов в смысле главного значения. Последние легко представить в виде

$$\mathcal{P} \int_{\mu}^{\infty} \frac{f(E') dE'}{E' - E} = \int_{\mu}^{\infty} \frac{f(E') - f(2E - E')}{E' - E} dE' + \int_{2E - \mu}^{\infty} \frac{f(E') dE'}{E' - E}. \quad (4.6)$$

Второй интеграл в правой части (4.6) является обычным несобственным интегралом. Подынтегральная функция первого интеграла содержит неопределенность типа 0/0 в точке $E' = E$. Если эту точку выделить из интервала интегрирования, то для плавных функций будет справедлива оценка

$$\int_{E-\varepsilon}^E \frac{f(E') - f(2E - E')}{E' - E} dE' \approx f(E + \varepsilon) - f(E - \varepsilon).$$

Отсюда и видна сильная зависимость интеграла в смысле главного значения от величины производной подынтегральной функции. Поэтому выбор вида зависимости полных сечений от энергии важен и должен основываться на физических гипотезах.

Представим каждое из полных сечений $\sigma_{\pm}(E)$ как сумму упругой и неупругой частей:

$$\sigma_{\pm}(E) = \sigma_{\pm}^{\text{упр}}(E) + \sigma_{\pm}^{\text{неупр}}(E).$$

В свою очередь, упругие сечения зададим в виде суммы брейт-вигнеровских резонансных формул и некоторой плавной убывающей функции, описывающей в основном s -рассеяние (см. Клепиков и др. (1960)). Каждое парциальное сечение, т. е. сечение рассеяния пионов с моментом l , дает в полное упругое сечение вклад

$$\sigma_{l,J} = (2J + 1) \frac{2\pi}{q^2} \sin^2 \delta_{l,J}(q). \quad (4.7)$$

Вспоминая поведение фазы $\delta_{l,J} \sim a_{l,J} q^{2l+1}$ при малых q , легко получить, что значения $\sigma_{\pm}(\mu)$ определяются только s -волнами. Далее, из формулы (4.7) очевидно, что вклад любого парциального сечения $\sigma_{l,J}$ в полное упругое падает с энергией не медленнее, чем $1/q^2$. Следовательно, s -волны можно учесть, например, с помощью функций

$$L_{\pm}(E) = \frac{\sigma_{\pm}(\mu)}{1 + a_{\pm} q^2}, \quad a_{\pm} > 0. \quad (4.8)$$

В качестве примера резонансной формулы приведем формулу для первого из резонансов в сечениях $\sigma_{\pm}(E)$ — так называемую формулу Бракнера (в ней учтена релятивистская зависимость энергии от импульса):

$$\sigma_{1,3/2} = 4 \cdot \frac{2\pi}{q^2} \frac{\Gamma^2}{(W - W_r)^2 + \Gamma^2}. \quad (4.9)$$

Здесь $W = \sqrt{M^2 + q^2} + \sqrt{\mu^2 + q^2}$ — полная энергия системы в системе центра масс, а ширина резонанса Γ имеет вид

$$\Gamma = \alpha \frac{(\beta q)^3}{1 + (\beta q)^2}.$$

Параметры резонанса имеют следующие значения:

$W_r = 1238 M_{\pi\pi}$ (резонансная кинетическая энергия пиона в л. с. к. равна $195,4 M_{\pi\pi}$);

α (параметр ширины резонанса) = $0,37 \mu\text{с}^2 = 52 M_{\pi\pi}$;

β (параметр асимметрии резонанса) = $0,973 \frac{\hbar}{\mu\text{с}}$.

Поведение Γ при малых q ($\Gamma \sim q^3$) можно понять на основе теории эффективного радиуса; оно соответствует тому, что резонанс имеет место в состоянии с $l = 1$.

Наконец, для $\sigma_+^{\text{неупр}}$ и $\sigma_-^{\text{неупр}}$ используем одну и ту же функцию $\sigma(E)$, отличную от нуля только выше порога первого неупругого процесса ($\pi + N \rightarrow 2\pi + N$) и становящуюся на бесконечности постоянной σ_∞ . В соответствии с теоремой Померанчука эта постоянная одинакова для π^+p - и π^-p -рассеяний.

Результаты анализа полных сечений согласно такой гипотезе приведены на рис. 8. Если теперь вычислить

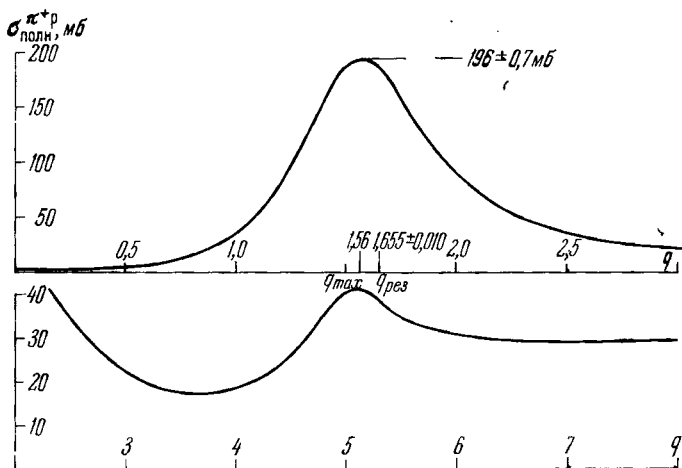


Рис. 8.

функции $D_{\pm}(E)$, то при значении $f^2 = 0,08$ в широком интервале энергий получается хорошее совпадение теоретических кривых $D_{\pm}(E)$ и экспериментальных данных (см. рис. 9 и 10).

В последнее время д. с. (4.1) проверяются и при больших энергиях (см. Барашенков (1966)). В этом случае очень важен конкретный вид функций $\sigma_{\pm}^{\text{неупр}}(E)$, так как именно он определяет те детали высокоэнергетического поведения $D_{\pm}(E)$, которые при малых энергиях задаются брейт-вигнеровскими формулами. В настоящее время еще нет достаточных теоретических и экспериментальных данных для того, чтобы говорить о справедливости или несправедливости д. с. при энергиях $E \gtrsim 10$ Гэв.

Однако можно утверждать, что сравнение д. с. с опытом убеждает в их справедливости в широком интервале энергий до 10 Гэв.

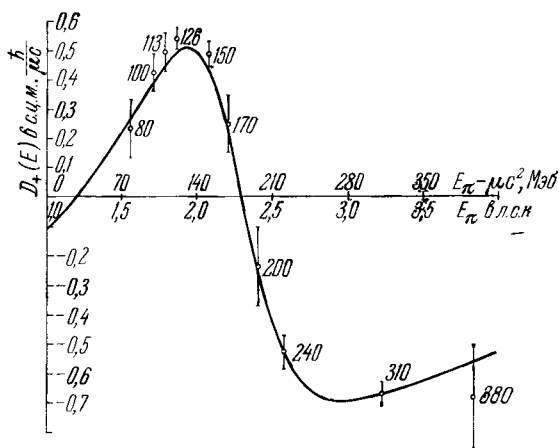


Рис. 9.

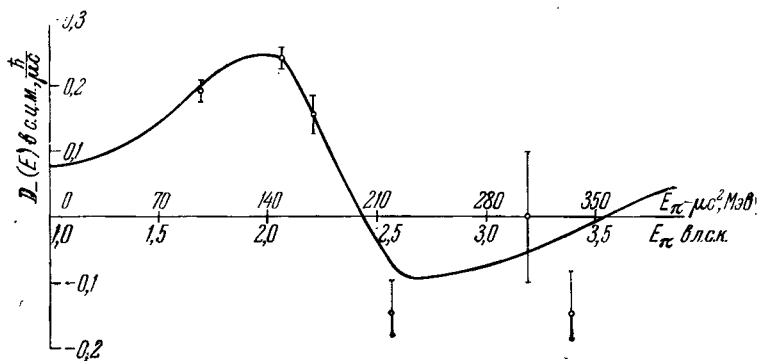


Рис. 10.

Следовательно, принципы, лежащие в их основе, а именно, причинность (аналитичность), унитарность и кроссинг-симметрия, получают хорошее экспериментальное подтверждение. Эти принципы служат фундаментом

всего дисперсионного подхода. На их основе строятся многочисленные применения к отдельным процессам, которые связаны с дополнительными гипотезами и приближениями. Поэтому трудности применения дисперсионного подхода к конкретным процессам скорее всего заключены в этих дополнительных предположениях.

§ 5. Двойное спектральное представление в квантовой теории поля

Выше мы показали, как задача рассеяния в квантовой механике может быть переформулирована в терминах аналитических свойств и унитарности. Двойное спектральное представление (2.29) описывает аналитические свойства амплитуды рассеяния одновременно по двум комплексным аргументам. Это двойное представление совместно с условием спектральной унитарности (2.31) дает способ последовательного определения амплитуды рассеяния f , полностью эквивалентный решению уравнения Шредингера.

В квантовой теории поля сильных взаимодействий мы имеем одномерные д. с., доказанная область применимости которых не покрывает целиком физической области. Эти д. с. для рассеяния с передачей импульса, отличной от нуля, содержат также интегралы по подпороговой ненаблюдаемой области. Поэтому условия унитарности и одномерные д. с. по энергии в принципе недостаточны для получения системы уравнений для амплитуды рассеяния. Недостающим элементом являются аналитические свойства амплитуды рассеяния по передаче импульса. Напомним, что и в квантовой механике именно учет аналитических свойств по передаче импульса привел к двойному спектральному представлению и к окончательной формулировке задачи.

5.1. Кроссинг-симметрия. В квантовой теории поля одновременное изучение аналитических свойств по энергии при фиксированной передаче импульса и по передаче импульса при фиксированной энергии является совершенно естественным с точки зрения свойств кроссинг-симметрии. Здесь мы подошли к понятию кроссинг-симметрии несколько более широкому, чем то, которое использовалось выше в д. с. для рассеяния вперед. Мы обсудим сейчас

более подробно это чрезвычайно важное понятие, обратившись в целях наглядности к диаграммам Фейнмана.

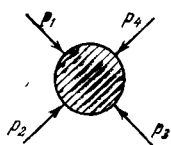


Рис. 11.

Рассмотрим четырехконцевую функцию Грина, т. е. совокупность диаграмм Фейнмана с четырьмя внешними линиями (рис. 11). Известно, что при помощи функции Грина можно описывать три процесса рассеяния (если массы частиц 1, 2, 3 и 4 таковы, что ни одна из этих частиц не распадается на три другие).

Пусть p_i лежат на массовой поверхности $p_i^2 = m_i^2$.

Если

$$p_1^0, p_2^0 > 0, \text{ а } p_3^0, p_4^0 < 0,$$

то эта функция Грина описывает процесс

$$\text{I. } (p_1) + (p_2) \rightarrow (-p_3) + (-p_4);$$

если $p_1^0, p_3^0 > 0, \text{ а } p_2^0, p_4^0 < 0, \text{ то}$

$$\text{II. } (p_1) + (p_3) \rightarrow (-p_2) + (-p_4);$$

если $p_1^0, p_4^0 > 0, \text{ а } p_2^0, p_3^0 < 0, \text{ то}$

$$\text{III. } (p_1) + (p_4) \rightarrow (-p_2) + (-p_3).$$

(5.4)

Процессы I, II, III называются соответствующими каналами задачи рассеяния.

Рассмотрим, например, функцию Грина с двумя пионными и двумя нуклонными концами на массовой поверхности (рис. 12). Такая функция Грина описывает процессы рассеяния $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$, $\bar{\pi}' + N \rightarrow \bar{\pi} + N'$. Здесь черта над символом частицы обозначает античастицу; например, $\bar{\pi}^+ = \pi^-$. Каждая нуклонная линия на диаграмме рис. 12 описывает либо нуклон, движущийся по направлению фермионной линии, либо антинуклон, движущийся против направления этой линии. Поэтому та же функция Грина характеризует и процесс $\bar{\pi}' + \pi \rightarrow \bar{N} + N'$. Таким образом, она одновременно описывает три процесса:

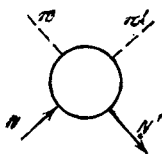


Рис. 12.

$$\text{I. } \pi + N \rightarrow \pi' + N'.$$

$$\text{II. } \bar{\pi}' + N \rightarrow \bar{\pi} + N'.$$

$$\text{III. } \bar{\pi}' + \pi \rightarrow \bar{N} + N'.$$

Введем три инвариантные переменные

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad u = (p_1 + p_3)^2, \quad t = (p_1 + p_4)^2, \quad (5.2)$$

которые соответствуют квадратам полных энергий в с. ц. м. для процессов I—III. Они связаны соотношением

$$s + u + t = \sum_i p_i^2 = \sum_i m_i^2. \quad (5.3)$$

Физическая область изменения переменных s, u, t соответствует действительным значениям импульсов и углов рассеяния частиц. Для процессов $\pi + \pi' \rightarrow \pi + \pi'$ и $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$ они изображены на рис. 13, 18, 46.

В силу лоренцевской инвариантности рассматриваемая функция Грина выражается через скалярные функции переменных s, u, t . Если какие-либо каналы из (5.1) физически совпадают, как, например, I, II для πNN -узла, то при соответствующих заменах аргументов эти скалярные функции переходят друг в друга. Это свойство и называется *кроссинг-симметрией*.

Если же эти каналы физически не совпадают, то при такой замене аргументов мы не получаем каких-либо свойств симметрии. Однако и в этом случае различные процессы описываются одной и той же функцией Грина, рассматриваемой в различных областях изменения аргументов. При этом говорят, что переход от одной реакции к другой осуществляется с помощью *правила подстановки*.

Отсюда ясно, что при таком одновременном описании нескольких процессов одной функцией Грина аргументы s, u, t выступают совершенно равноправно. Поэтому одновременное изучение аналитических свойств по всем трем переменным s, u, t здесь совершенно естественно. Как уже говорилось, каждая из этих трех переменных является квадратом энергетической переменной для одной из трех реакций. Дисперсионные соотношения по энергии первой реакции при фиксированной передаче импульса суть д. с. по s при $t = \text{const}$. Д. с. по передаче импульса при фиксированной энергии первой реакции суть д. с. по t при $s = \text{const}$, т. е. д. с. по энергии для процесса III при фиксированной передаче импульса. С учетом связи (5.3) между s, u, t можно также

рассматривать первые д. с. как д. с. по u при $t = \text{const}$, а вторые — как д. с. по u при $s = \text{const}$, т. е. д. с. по энергии II канала. Отражение этого факта мы уже фактически наблюдали в д. с. для рассеяния вперед (3.1). Там замена E на $-E$ (что эквивалентно замене s на u),

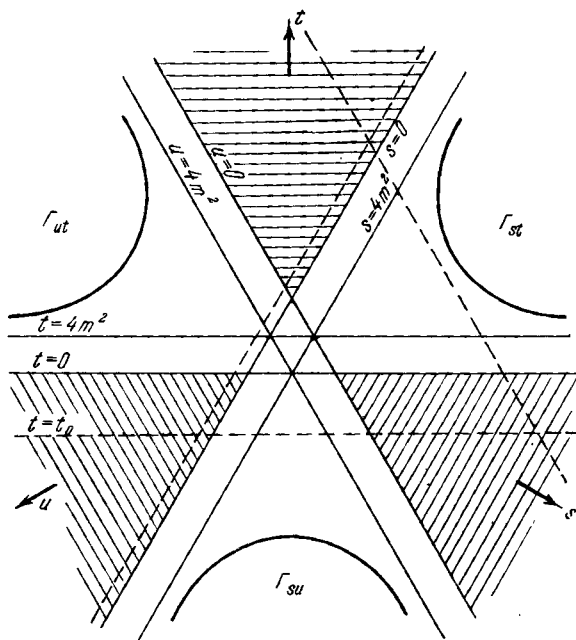


Рис. 13.

т. е. переход от энергии I канала к энергии II канала, переводит д. с. (при $t = \text{const} = 0$) сами в себя. В квантовой теории поля равноправно выступает также третье д. с. по t (или по s) при $u = \text{const}$.

Все эти свойства удобно изобразить на графике с помощью симметричной косоугольной системы координат, в которой углы между осями s , u , t равны 120° . Такой график для случая равных друг другу внешних масс $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ изображен на рис. 13. В этом случае физическая область реакции I определяется соотношениями $s > 4m^2$, $t < 0$ и $u < 0$; реакции II — соот-

ношениями $u > 4m^2$, $s < 0$, $t < 0$; а реакции III — соотношениями $t > 4m^2$, $s < 0$, $u < 0$. Это немедленно вытекает, например, из представления переменных реакции I через импульс q и косинус угла рассеяния $c = \cos \theta$ в с. ц. м.: $s = 4(q^2 + m^2)$, $u = -2q^2(1 + c)$, $t = -2q^2(1 - c)$.

На рис. 13 физические области заштрихованы. Линии, по которым производится интегрирование в упомянутых выше д. с., обозначены пунктиром. Из рис. 13 видно, что каждая линия интегрирования захватывает две физические области. Например, дисперсионное соотношение при фиксированном $t = t_0$ имеет вид

$$f(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t_0) ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_u(u', t_0) du'}{u' - u} = \\ = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_s(s', t) ds'}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{u_0 - t_0} \frac{A_u(4 - t_0 - s', t_0)}{s' - s} ds'. \quad (5.4)$$

Здесь $A_s(s', t)$ — мнимая часть амплитуды по s , которая определяется условием унитарности в I канале; $A_u(u', t)$ — мнимая часть амплитуды по u , которая определяется условием унитарности в III канале.

Сам факт существования таких д. с. является гипотезой, которая весьма естественна, но, к сожалению, еще строго не доказана, например, для таких важных реакций, как $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ и $NN \rightarrow NN$.

Пределы интегрирования в (5.4) зависят от s_0 , u_0 , а также от t_0 . Физический смысл констант s_0 , u_0 , t_0 легко может быть понят с помощью условия унитарности. Заметим для этого, что числитель интеграла $A_s(s, t)$ представляет собой мнимую часть амплитуды рассеяния в канале, в котором s является полной энергией в с. ц. м.

5.2. Условие унитарности. Запишем условие унитарности для

$$A_s(s, t) = \text{Im}_s f(s, u, t) \quad (5.5)$$

в общем случае рассеяния на ненулевой угол.

Поскольку нас сейчас не будут интересовать точные формулы, приведем лишь схему выкладок (аккуратные вычисления для $\pi\pi$ - и πN -рассеяния содержатся в §§ 7, 21).

Условие унитарности имеет вид (3.9). При этом в силу закона сохранения энергии условие $E_a = E_b = E_n$ или $s_a = s_b = s_n$ при любом фиксированном значении энергии обрезает сумму (3.9) на конечном числе членов. Разумеется, остальные законы сохранения также приводят к соответствующим правилам отбора промежуточных состояний.

Возьмем, например, случай, когда состояния a и b содержат по два пиона каждое, т. е. когда T_{ab} является

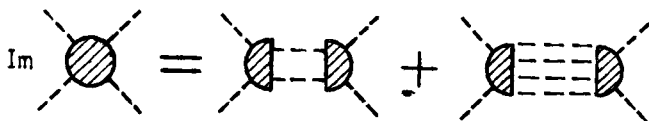


Рис. 14.

амплитудой пион-пионного рассеяния. Если ограничиться интервалом полной энергии

$$4 \leq s \leq 16, \quad (5.6)$$

то в сумме (3.9) останутся вклады от двухпионных состояний. Действительно, в силу G -четности матричные элементы перехода (2 пиона) \rightarrow (3 пиона) равны нулю, а 4 пиона при столь малых энергиях образоваться еще не могут. Таким образом, в этом интервале мнимая часть амплитуды пион-пионного рассеяния выражается через сумму (точнее, интеграл) от произведения двух пион-пионных амплитуд.

Ниже порога двухчастичного состояния, при $s < 4$, получаем

$$\text{Im} \langle a | T | b \rangle = 0, \quad s < s_0 = 4. \quad (5.7)$$

В интервале $16 \leq s \leq 36$ к двухчастичному вкладу в (3.9) добавляется четырехчастичное слагаемое, и т. д.

Формуле (3.9) обычно сопоставляют графические схемы. В данном случае эта схема имеет вид, изображенный на рис. 14.

Из изложенного ясно, что нижние пределы интегрирования в (5.4) определяются началом непрерывного спектра, связанного с двухчастичными состояниями. Поэтому

при $t < 0$ в д. с. (5.4), так же как и в квантовой механике, появляются подпороговые нефизические области. Мнимые части здесь определяются аналитическим продолжением по t двухчастичного условия унитарности. Ввиду симметрии относительно перестановок всех четырех пионов

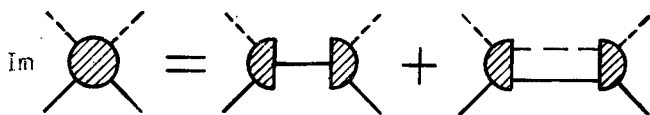


Рис. 15.

те же свойства верны для A_u и A_t — мнимых частей амплитуды в каналах II и III.

Важным для нас случаем, в котором эта симметрия отсутствует, является πN -узел. Здесь A_s и A_u — мнимые части в каналах I и II, т. е. мнимые части амплитуд

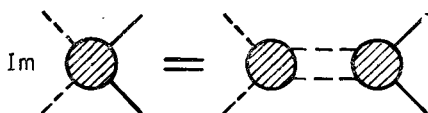


Рис. 16.

пион-нуклонного рассеяния. Низшим массовым состоянием является однонуклонное. Пороги интегрирования определяются двухчастичным вкладом в пион-нуклонную унитарность от состояния, содержащего один пион и один нуклон, т. е. лежат на прямых $s = (M + \mu)^2$, $u = (M + \mu)^2$ (рис. 15).

Однако ситуация с A_t , соответствующей аннигиляционному каналу $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, несколько отличается от первых двух случаев. В этом случае физический порог реакции соответствует $t = (M + M)^2 = 4M^2$. Между тем низшим промежуточным состоянием будет двухпионное, нижняя граница которого $t_0 = 4\mu^2$ (рис. 16). Вся область $4\mu^2 \leq t \leq 4M^2$ является нефизической. Амплитуда процесса $\pi\pi \rightarrow \bar{N}N$ в этой области должна рассматриваться как

аналитическое продолжение соответствующего выражения из физической области процесса при $t \geq 4M^2$.

5.3. Представление Мандельстама. Из приведенных примеров видно, что использование условия унитарности для мнимых частей A_s , A_u и A_t неизбежно приводит к необходимости изучения аналитических продолжений амплитуд в нефизические области. Аналитические свойства амплитуд рассеяния по каждой из переменных s , u , t в отдельности нами уже упоминались. Мы видели, что все три канала описываются одной и той же функцией Грина на массовой поверхности $f(s, u, t)$. Оказывается возможным допустить существование таких аналитических свойств функции $f(s, u, t)$ одновременно по всем ее аргументам, так что все одномерные д. с., а также аналитически продолженные условия унитарности являются следствиями этих свойств. Мы имеем здесь в виду так называемое двойное дисперсионное представление Мандельстама (1958, 1959).

Это представление имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(s, u, t) = & \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{a_s(s')}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{a_t(t')}{t' - t} dt' + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{a_u(u')}{u' - u} du' + \frac{1}{\pi^2} \int_{\Gamma_{st}} \frac{\rho_{st}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} ds' dt' + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{\Gamma_{su}} \frac{\rho_{su}(s', u')}{(s' - s)(u' - u)} ds' du' + \frac{1}{\pi^2} \int_{\Gamma_{tu}} \frac{\rho_{tu}(t', u')}{(t' - t)(u' - u)} dt' du'.
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Вещественные области интегрирования Γ_{st} , Γ_{su} , Γ_{tu} были схематически показаны на рис. 13. Представление (5.8) имеет вид, аналогичный рассмотренному выше квантовомеханическому представлению амплитуды рассеяния по s и t (2.29). Спектральные функции ρ_{st} , ρ_{su} и ρ_{tu} действительны; асимптотические границы областей Γ при больших s , u или t и области интегрирования одномерных интегралов, так же как и в квантовой механике, определяются условиями двухчастичной унитарности в каждом канале. Интегралы в (5.8) — типа Коши; поэтому функция $f(s, u, t)$ является аналитической в комплексном про-

странстве s, u, t , за исключением некоторых гиперплоскостей. Амплитуды физических процессов являются граничными значениями функции $f(s, u, t)$ при соответствующем стремлении переменных s, u, t к вещественным значениям. Например, для случая равных масс амплитуды канала I определяются при $s \rightarrow s + i\varepsilon, s > 4m^2, t < 0, u < 0$ ($s + t + u = 4m^2$), амплитуды канала II — при $u \rightarrow u + i\varepsilon, u > 4m^2, s < 0, t < 0$, амплитуды канала III — при $t \rightarrow t + i\varepsilon, t > 4m^2, s < 0, u < 0$.

Из представления (5.8) для $f(s, u, t)$ при $s + u + t = \sum_i m_i^2$ вытекают все три д. с. Получим, например, д. с. при фиксированном s . Для этого в последнем члене формулы (5.8) произведем преобразование

$$\frac{1}{(t' - t)(u' - u)} = -\frac{1}{(s' - s)(u' - u)} - \frac{1}{(s' - s)(t' - t)}. \quad (5.9)$$

Здесь введена новая переменная интегрирования $s' = \sum_i m_i^2 - t' - u'$. Последний член в (5.8) распадается на два интеграла. Объединяя первый из них со вторым и четвертым членами (5.8), а второй с третьим и пятым членами, представим (5.8) в виде

$$f(s, u, t) = f_0(s) + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_t(t', s)}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_u(u', s)}{u' - u} du', \quad (5.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_t(t', s) &= a_t(t') + \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{st}(s', t')}{s' - s} ds' - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{tu}(t', \sum m_i^2 - t' - s')}{s' - s} ds', \\ f_u(u', s) &= a_u(u') + \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{su}(s', u')}{s' - s} ds' - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{tu}(\sum m_i^2 - u' - s', u')}{s' - s} ds', \\ f_0(s) &= \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{a_s(s')}{s' - s} ds'. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Формула (5.10) представляет искомое д. с. при фиксированном s . Формулы (5.11) определяют аналитические свойства $A_u(u, s)$ и $A_t(t, s)$ по переменной s . В физических областях соответствующих реакций они являются действительными функциями и совпадают с мнимыми частями физических амплитуд рассеяния. В общем случае они являются комплексными функциями и поэтому называются абсорбтивными частями функции $f(s, u, t)$.

Подобно тому как это было сделано в § 2, с помощью формул (5.11) можно перенести условия унитарности для функций A_t и A_u в их физических областях на спектральные функции ρ . Эти условия спектральной унитарности позволят определить точные границы областей Γ_{st} , Γ_{su} , Γ_{tu} , в которых спектральные функции отличны от нуля. Для интересующих нас процессов эти границы будут обсуждаться ниже (см. §§ 8, 23). Свойства кроссинг-симметрии для функции $f(s, u, t)$ приводят к определенным взаимным связям между спектральными функциями.

5.4. Центральная роль $\pi\pi$ -взаимодействия. Двойное спектральное представление Мандельштама (5.8) совместно с условиями спектральной унитарности служит базой для построения различных аппроксимационных схем. Мы здесь не будем рассматривать вклады в спектральную унитарность от промежуточных состояний, в которых имеется более двух частиц, — так называемые правила Ландау — Катковского, так как дальше мы будем интересоваться низкоэнергетическими приближениями. В таких приближениях, существенно опирающихся на двухчастичную унитарность, имеется определенная взаимосвязь различных процессов.

Так, для 4-пионного узла условие унитарности выражает мнимые части через ту же самую амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния. Поэтому в рамках двухчастичной унитарности пион-пионная проблема является замкнутой. Однако уже в πN -узле унитарность в канале $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ приводит нас к амплитуде $\pi\pi$ -рассеяния, которая, таким образом, должна быть задана извне для изучения πN -узла. Для исследования NN -узла необходим πN -узел, и т. д. Мы приходим к иерархической схеме, упомянутой во введении (рис. 2).

На этой схеме кроме основной последовательности пион-нуклонных процессов (центральная вертикаль) для иллюстрации мы изобразили процессы с K -мезонами (крайняя левая ветвь), а также процессы с γ -квантами, всегда рассматриваемыми в методе д. с. только в нижнем порядке по константе электромагнитного взаимодействия (что эквивалентно неучету γ -квантов в полной системе промежуточных состояний в условиях унитарности).

Во главе иерархического древа стоит 4-вершинная функция рассеяния самых легких из сильно взаимодействующих частиц — пионов. Таким образом, пион-пионное рассеяние занимает ключевое место в дисперсионном анализе сильных взаимодействий.

Если теперь принять во внимание, что изучение этого рассеяния недоступно прямому эксперименту и оценивается только косвенно, путем изучения его влияния на πN -рассеяние, формфактор нуклона и т. д., то становится ясной важность теоретического исследования этого процесса. Именно к этой центральной задаче теории сильных взаимодействий мы и обратимся.

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

§ 6. Аксиоматическая теория рассеяния

В предыдущих параграфах было показано, что метод д. с. в квантовой теории поля позволяет получить ряд важных соотношений между наблюдаемыми величинами для процессов рассеяния сильно взаимодействующих частиц — пионов, нуклонов и т. д. Эти д. с., как отмечалось, могут быть получены без обращения к динамическим источникам информации, таким как гамильтониан или лагранжиан взаимодействия, а исходя из определенной системы аксиом, содержащей такую информацию лишь косвенно. Здесь имеются в виду массы частиц и дискретные правила отбора (по электрическому заряду, изотопическому спину, четности и т. п.), которым в последнее время иногда пытаются придать динамический смысл. Метод непосредственного получения следствий из самых общих аксиом квантовой теории поля, таких как унитарность, инвариантность, причинность, называется *аксиоматическим*.

Важность аксиоматического метода определяется следующими обстоятельствами. Хорошо известно, что «классическая» квантовая теория поля практически располагает лишь одним «отлаженным» аппаратом — теорией возмущений (т. в.). В рамках ковариантной т. в. удалось преодолеть трудности, связанные с наличием ультрафиолетовых расходимостей. Метод исключения этих расходимостей, известный под названием теории перенормировок, носит, однако, ограниченный и несколько формальный характер. Его не удается сформулировать для слабых

взаимодействий. Т. в. с процедурой перенормировок принесла несомненный успех лишь в квантовой электродинамике.

В этих условиях интерес к аксиоматическому методу в теории сильных взаимодействий является вполне очевидным. Существенная черта этого метода состоит в том, что при формулировке аксиом не используются понятия, соответствующие ненаблюдаемым характеристикам, таким как голые невзаимодействующие частицы, виртуальные частицы и т. п. Эти понятия, как и понятие диаграммы Фейнмана, являются атрибутом т. в.; они связаны с используемой в т. в. концепцией свободных полей, не взаимодействующих с вакуумом, и с учетом этого взаимодействия как возмущения.

В аксиоматическом подходе квантованные поля сопоставляются асимптотически свободным падающим и рассеянным частицам. Амплитуды состояний, содержащих такие реальные частицы, наделяются требуемыми трансформационными свойствами по отношению к лоренцевским, изотопическим и другим преобразованиям. Система этих амплитуд с определенными значениями энергии и импульса является полной. Состояние, содержащее рассеянные частицы, связано с состоянием, содержащим падающие частицы, унитарным оператором — матрицей рассеяния S . Матричные элементы этого оператора между реальными состояниями могут быть выражены через вакуумные ожидания от вариационных производных S по полям. Свойство локальной причинности формулируется в виде условия на эти вариационные производные. Оно отражает тот факт, что события, разделенные пространственно-подобным интервалом, не коррелируют друг с другом.

Перечисленных положений оказывается достаточно для того, чтобы получить из них описанные выше д. с., а также ряд других важных результатов: спектральные свойства одночастичных пропагаторов, *SPT*-теорему и ряд других. Однако, как уже упоминалось, на этом пути все же не удается получить систему уравнений для наблюдаемых величин типа матричных элементов рассеяния. Указанные результаты приходится дополнять правдоподобными гипотезами. Одной из таких гипотез является

двойное спектральное представление Мандельстама для амплитуды рассеяния, которому, по-видимому, удовлетворяют отдельные члены обычной теории возмущений.

Схема аксиоматического описания процессов рассеяния, основанная на представлении Мандельстама, получила в последние годы известность под названием «теории матрицы рассеяния» (теории S -матрицы) — см., например, монографию Чу (1962). Система исходных положений этой теории включает аналитические свойства матричных элементов, постулированные в виде спектральных представлений, обладающих свойствами кроссинг-симметрии. Нижние границы областей интегрирования в этих представлениях находятся в соответствии с двухчастичными условиями унитарности. Система включает также условие унитарности S -матрицы.

Привлекательность «теории матрицы рассеяния», таким образом, состоит в том, что эта схема представляет собой как бы вариант аксиоматической теории поля, «очищенной» от квантово-полевых понятий, связанных со вторичным квантованием. Эти понятия фактически используются как наводящие соображения при конкретном установлении аналитических свойств, которые затем постулируются.

Недостаток упомянутой теории заключается в том, что ее исходные посылыки недостаточны для получения конкретных результатов. Мы увидим ниже (§ 7), что без дальнейших упрощающих предположений не удастся далеко продвинуться. Среди этих предположений важную роль играет «приближение эффективного радиуса» (effective range), низкоэнергетические приближения упругой унитарности и ограничения небольшим числом низших парциальных волн. С помощью подобных упрощений удастся получить систему уравнений для низших парциальных волн упругого рассеяния (§§ 8, 9).

§ 7. Двухчастичная унитарность и кроссинг-симметрия

Здесь мы подробно рассмотрим условие двухчастичной унитарности для амплитуды рассеяния. Основные выкладки выполним детально для наиболее простого модельного случая рассеяния нейтральных бозонов; мы приве-

дем также конечные формулы для реального изотопического случая рассеяния заряженных пионов. Соответствующие формулы для πN -рассеяния будут даны в гл. 5.

7.1. Двухчастичная унитарность амплитуды рассеяния. Рассмотрим матричный элемент рассеяния двух нейтральных псевдоскалярных бесспиновых бозонов:

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \langle 0 | a(\mathbf{p}_1) a(\mathbf{p}_2) S a^+(\mathbf{q}_1) a^+(\mathbf{q}_2) | 0 \rangle. \quad (7.1)$$

Здесь S — матрица рассеяния, a^+ и a — операторы рождения и уничтожения мезонов, подчиненные перестановочным соотношениям

$$[a(\mathbf{p}), a^+(\mathbf{q})] = a(\mathbf{p}) a^+(\mathbf{q}) - a^+(\mathbf{q}) a(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

$$|0\rangle - \text{амплитуда вакуума,}$$

$$a(\mathbf{q}) |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

Матричный элемент (7.1) удобно представить в виде

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | S | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle =$$

$$= I_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} + \frac{i\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{4 \sqrt{p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0}} f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \quad (7.2)$$

где

$$I_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2) + \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_2) \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1) =$$

$$= \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | 1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle, \quad (7.3)$$

$p_i^0 = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m^2}$, а f — амплитуда рассеяния, являющаяся релятивистски инвариантной величиной. Она есть скалярная функция скалярных инвариантных аргументов

$$s = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 \equiv (\mathbf{p}_1^0 + \mathbf{p}_2^0)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2, \quad t = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{q}_1)^2. \quad (7.4)$$

Условие унитарности матрицы рассеяния имеет вид

$$S^+ S = S S^+ = 1. \quad (7.5)$$

Возьмем от (7.5) матричный элемент

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | S S^+ | \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = I_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2}^{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}. \quad (7.6)$$

Произведение двух операторов вида AB может быть

разложено по полной системе реальных состояний $|n\rangle$:

$$AB = \sum_n A |n\rangle \langle n| B.$$

Здесь символ \sum_n обозначает суммирование по дискретным и интегрирование по непрерывным переменным, характеризующим состояние $|n\rangle$. Подставляя это разложение в (7.6), заметим, что в области энергий ниже порога рождения дополнительной пары мезонов $s < 16 m^2$ (один дополнительный мезон не может родиться из-за псевдоскалярности) в сумме

$$\sum_n \langle p_1, p_2 | S | n \rangle \langle n | S^+ | q_1, q_2 \rangle$$

отличными от нуля являются лишь члены, соответствующие двухмезонным промежуточным состояниям:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \frac{1}{2} \int dk_1 dk_2 |k_1, k_2\rangle \langle k_1, k_2|.$$

Поэтому (7.6) принимает вид

$$I_{q_1, q_2}^{p_1, p_2} = \frac{1}{2} \int \langle p_1, p_2 | S | k_1, k_2 \rangle \langle k_1, k_2 | S^+ | q_1, q_2 \rangle dk_1 dk_2 \quad (7.7)$$

при $(p_1 + p_2)^2 < 16 m^2$.

Подставляя в (7.7) формулу (7.2) и ей сопряженную, получим после очевидных упрощений

$$\begin{aligned} \text{Im } f(p_1, p_2; q_1, q_2) &= \frac{1}{16} \int \frac{dk_1}{k_1^0} \frac{dk_2}{k_2^0} f(p_1, p_2; k_1, k_2) \times \\ &\times \overset{*}{f}(k_1, k_2; q_1, q_2) \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2). \end{aligned}$$

Теперь удобно ввести инвариантные переменные (7.4), а также перейти к с.ц.м., в которой

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -p_2 = p, & q_1 &= -q_2 = q, \\ p_1^0 &= p_2^0 = q_1^0 = q_2^0 = E, \\ \frac{s}{m^2} &= 4(\nu + 1), & \frac{t}{m^2} &= -2\nu(1 - c), \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

где ν — безразмерный квадрат импульса, $\nu = q^2/m^2$, $c = \cos \theta$ — косинус угла рассеяния, $c = (\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1)/p^2$. Тогда имеем

$$\text{Im } f(s, t) = \frac{K(\nu)}{32} \int d\Omega f(s, t_1) f^*(s, t_2), \quad (7.9)$$

где

$$K(\nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}}, \quad d\Omega = dc_1 d\varphi,$$

$$t_i = -2\nu(1 - c_i), \quad c_2 = cc_1 + \sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{1 - c^2} \cos \varphi$$

(здесь и ниже масса мезона положена равной единице: $m_\pi^2 = 1$).

Сейчас удобно изменить нормировку амплитуды, положив

$$f = \frac{8}{\pi} A, \quad (7.10)$$

так чтобы

$$\text{Im } A(s, t) = K(\nu) \int \frac{d\Omega}{4\pi} A(s, t_1) A^*(s, t_2). \quad (7.11)$$

Из (7.11) видно, что коэффициенты разложения A в ряд Лежандра

$$A(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(c) A_l(\nu) \quad (7.12)$$

удовлетворяют условиям унитарности вида

$$\text{Im } A_l(\nu) = K(\nu) |A_l(\nu)|^2, \quad (7.13)$$

так что они выражаются через действительные фазы рассеяния $\delta_l(\nu)$:

$$A_l(\nu) = \frac{e^{2i\delta_l(\nu)} - 1}{2iK(\nu)} = \sqrt{\frac{\nu+1}{\nu}} e^{i\delta_l(\nu)} \sin \delta_l(\nu), \quad (7.14)$$

т. е. представляют собой парциальные волны релятивистского рассеяния в простой нормировке. Эта нормировка является наиболее употребительной.

7.2. Связь с сечением рассеяния и оптическая теорема. Следует еще связать амплитуду рассеяния с эффективным поперечным сечением рассеяния σ . Для этого воспользу-

емся методом рассуждения из § 22 книги Боголюбова и Ширкова (1957).

Рассмотрим амплитуду состояния с двумя свободными мезонами:

$$\Phi(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \chi_1(k_1) \chi_2(k_2) a^+(k_1) a^+(k_2) |0\rangle dk_1 dk_2. \quad (7.15)$$

Функция χ является волновой функцией мезона в импульсном представлении, а ее фурье-образ $\varphi_i(x_i)$

$$\chi_i(k_i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \varphi_i(x_i) e^{-ik_i x_i} dx_i \quad (7.16)$$

— волновой функцией в координатном представлении. Норма амплитуды $\Phi(1, 2)$ есть, очевидно,

$$N = \langle \Phi^+(1, 2) \Phi(1, 2) \rangle = N_1 N_2,$$

$$N_i = \int |\chi_i(k)|^2 dk = \int |\varphi_i(x)|^2 dx.$$

Величина $|\varphi(x)|^2 dx$ может поэтому рассматриваться как плотность вероятности. Полагая

$$\varphi_i(x) = e^{ip_i x},$$

получаем состояние, нормированное на единицу объема, для каждой из частиц (т. е. $n_i = N_i/V = 1$). В то же время согласно (7.16) и (7.15) в этом случае

$$\Phi(1, 2) = \frac{(2\pi)^3}{\sqrt{2}} a^+(p_1) a^+(p_2) |0\rangle = \frac{(2\pi)^3}{\sqrt{2}} |p_1, p_2\rangle. \quad (7.17)$$

Поэтому амплитуда (7.17) соответствует нормировке на единицу объема для каждой из частиц.

В результате рассеяния амплитуда (7.17) перейдет в

$$\frac{(2\pi)^3}{\sqrt{2}} S |p_1, p_2\rangle.$$

Согласно общим правилам квантовой механики вероятность перехода в состояние Φ_α равна

$$w = \frac{(2\pi)^6}{2} \frac{|\langle \Phi_\alpha^+ | S | p_1, p_2 \rangle|^2}{\langle \Phi_\alpha^+ | \Phi_\alpha \rangle}.$$

Конечное состояние Φ_α возьмем в виде

$$\Phi_\alpha^+ = \langle 0 | \int_G a(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2,$$

где G — область объемом $\Delta \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{q}_2$ около средних значений $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$. Тогда

$$\langle \Phi_\alpha^+ \Phi_\alpha \rangle = 2 \Delta \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{q}_2$$

и

$$\langle \Phi_\alpha^+ | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \Delta \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{q}_2 \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle,$$

вследствие чего

$$w = \frac{(2\pi)^6}{4} \Delta \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{q}_2 |\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 | S | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle|^2. \quad (7.18)$$

Полагая, что импульсы начальных и конечных мезонов не совпадают, подставим (7.2) в (7.18). Учтем при этом, что

$$|\delta(\Sigma \mathbf{p}_i)|^2 \sim \frac{VT}{(2\pi)^4} \delta(\Sigma \mathbf{p}_i),$$

где V и T — полный объем и полное время. Поэтому вероятность перехода в единицу времени и в единице объема будет равна

$$dw = \frac{w}{VT} = |A|^2 \frac{4\Delta \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{q}_2}{p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2).$$

Переходя в с. ц. м. и заменяя малые объемы дифференциалами, $\Delta \mathbf{q}_i \rightarrow d\mathbf{q}_i$, получаем, последовательно снимая интеграции:

$$dw = \frac{4|A|^2}{(p_1^0)^2 (q_1^0)^2} \delta(2p_1^0 - 2q_1^0) dq_1 = 2|A|^2 \frac{|q_1| d\Omega}{E^3}. \quad (7.19)$$

Дифференциальная вероятность dw выражается через дифференциальное сечение $d\sigma$ с помощью соотношения

$$dw = v_{p_1} d\sigma, \quad (7.20)$$

где v_{p_1} — скорость относительного сближения мезонов, равная $v_{p_1} = 2|\mathbf{p}_1|/E$. Подставляя (7.20) в (7.19), получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|A|^2}{E^2} = \frac{|A(\mathbf{v}, c)|^2}{v+1}, \quad (7.21)$$

откуда

$$\sigma(\nu) = \frac{2\pi}{\nu+1} \int_{-1}^{+1} |A(\nu, c)|^2 dc, \quad (7.22)$$

или, в инвариантных переменных,

$$\sigma(s) = \frac{16\pi}{s(s-4)} \int_{4-s}^0 |A(s, t)|^2 dt. \quad (7.23)$$

Не проводя рассуждений в л.с.к., выпишем лишь некоторые формулы. Дифференциальное сечение:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{л.с.к.}} = \frac{4q(E_q + m)}{m^2 p(E_p + m)} |A|^2.$$

Полное сечение:

$$\sigma_{\text{л.с.к.}} = \frac{8\pi}{m^2} \int \frac{q(E_q + m)}{p(E_p + m)} |A(p, c_{\text{л.с.к.}})|^2 dc_{\text{л.с.к.}} \quad (7.24)$$

Импульс рассеянного мезона $q = |\mathbf{q}_1|$ и косинус угла рассеяния $c_{\text{л.с.к.}} = (\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1) / |\mathbf{p}_1| |\mathbf{q}_1|$ связаны соотношением

$$c_{\text{л.с.к.}} = \cos \theta_{\text{л.с.к.}} = \left(\frac{E_p + m}{E_p - m} \frac{E_q - m}{E_q + m} \right)^{1/2},$$

$$E_q = \sqrt{q^2 + m^2},$$

а интегрирование в (7.24) выполняется в пределах $0 < c_{\text{л.с.к.}} < 1$.

Получим теперь оптическую теорему. Для этого положим в (7.11) $t = 0$, т. е. рассмотрим рассеяние вперед; тогда

$$\text{Im } A(s, 0) = K(\nu) \int \frac{d\Omega}{4\pi} |A(s, t_1)|^2.$$

Сравнивая правую часть с (7.22), получим оптическую теорему:

$$\text{Im } A(s, 0) = \frac{\sqrt{\nu(1+\nu)}}{4\pi} \sigma(s) = \frac{qE}{4\pi} \sigma. \quad (7.25)$$

В л.с.к.

$$\text{Im } A(s, 0) = \frac{|\mathbf{p}|_{\text{л.с.к.}}}{8\pi} \sigma(s).$$

7.3. Реальный случай заряженных пионов. Перейдем теперь к симметричным заряженным псевдоскалярным мезонам. Они описываются трехкомпонентной величиной — вектором в изотопическом пространстве. Операторы a и a^+ приобретают изотопический индекс

$$a \rightarrow a_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Коммутаторы операторов a_α имеют вид

$$[a_\alpha(p), a_\beta^+(q)] = \delta_{\alpha\beta} \delta(p - q).$$

Матричный элемент рассеяния пионов

$$\begin{aligned} \langle p_1, \alpha; p_2, \beta | S | q_1, \gamma; q_2, \delta \rangle = \\ = \langle 0 | a_\alpha(p_1) a_\beta(p_2) S a_\gamma^+(q_1) a_\delta^+(q_2) | 0 \rangle \end{aligned}$$

представим в виде

$$\begin{aligned} \langle p_1, \alpha; p_2, \beta | S | q_1, \gamma; q_2, \delta \rangle = \\ = I_{q_1\gamma, q_2\delta}^{p_1\alpha, p_2\beta} + \frac{2i\delta(p_1 + p_2 - q_1 - q_2)}{\pi \sqrt{p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0}} F_{\alpha\beta, \gamma\delta}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

где

$$I_{q_1\gamma, q_2\delta}^{p_1\alpha, p_2\beta} = \langle p_1, \alpha; p_2, \beta | 1 | q_1, \gamma; q_2, \delta \rangle,$$

а F — инвариантная амплитуда рассеяния, имеющая матричную структуру (см. Приложение 3):

$$F_{\alpha\beta, \gamma\delta} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} A + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} B + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} C. \quad (7.27)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в начале параграфа, получим условие унитарности в виде, аналогичном (7.11):

$$\text{Im } A_I(s, t) = K(v) \int \frac{d\Omega}{4\pi} A_I(s, t_1) A_I^*(s, t_2), \quad (7.28)$$

где A_I — амплитуды, соответствующие определенному значению полного изотопического момента I ($I = 0, 1, 2$) (см. Приложение 3). При этом

$$A_0 = 3A + B + C, \quad A_1 = B - C, \quad A_2 = B + C. \quad (7.29)$$

Перейдем теперь к эффективным поперечным сечениям. Заметим, что амплитуды, описывающие различные процессы вида (2 пиона \rightarrow 2 пиона), выражаются через A_I

следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A(\pi^\pm, \pi^\pm \rightarrow \pi^\pm, \pi^\pm) &\equiv A_{\pm\pm, \pm\pm} = A_2 = B + C, \\ A_{\pm 0, \pm 0} &= \frac{1}{2} (A_1 + A_2) = B, \\ A_{+-, +-} &= \frac{1}{3} A_0 + \frac{1}{2} A_1 + \frac{1}{6} A_2 = A + B, \\ A_{00, 00} &= \frac{1}{3} A_0 + \frac{2}{3} A_2 = A + B + C, \\ A_{\pm, 00} &= \frac{1}{3} A_0 - \frac{1}{3} A_2 = A. \end{aligned} \right\} (7.30)$$

Соответственно дифференциальные сечения будут равны

$$\frac{d\sigma(ik, jl)}{d\Omega} = \frac{1}{v+1} |A_{ik, jl}|^2. \quad (7.31)$$

7.4. Кроссинг-симметрия пионной амплитуды рассеяния. В описании рассеяния заряженных пионов важную роль играет кроссинг-симметрия. Из определения амплитуды рассеяния F (7.26) вытекает, что одновременная замена

$$p_1 \leftrightarrow p_2, \quad \alpha \leftrightarrow \beta \quad (7.32)$$

не меняет F . С помощью (7.27) получаем

$$A(s, u, t) = A(s, t, u), \quad B(s, u, t) = C(s, t, u). \quad (7.33)$$

Напомним, что

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - q_1)^2, \quad u = (p_2 - q_1)^2.$$

Свойство (7.33) следует из того, что амплитуда $|p_1\alpha; p_2\beta\rangle$ симметрична относительно преобразования (7.32).

Второе свойство симметрии функции F следует из ее релятивистской инвариантности. В силу лоренцевской инвариантности F зависит лишь от инвариантных переменных s, t, u и не зависит, например, от знаков энергий p_i^0, q_i^0 . Вследствие этого она не может измениться при замене частицы p_1, α на $-q_1, \gamma$. Отсюда находим, что перестановка $p_1 \leftrightarrow -q_1$ одновременно с $\alpha \leftrightarrow \gamma$ также не меняет F , что эквивалентно

$$A(s, u, t) = C(u, s, t), \quad B(s, u, t) = B(u, s, t). \quad (7.34)$$

Перестановка $p_1 \leftrightarrow -q_2$, $\alpha \leftrightarrow \delta$ дает

$$A(s, u, t) = B(t, u, s), \quad C(s, u, t) = C(t, u, s). \quad (7.35)$$

Свойство симметрии (7.33) приводит к определенным свойствам симметрии изотопических амплитуд A_I относительно замены $t \leftrightarrow u$ и, следовательно, относительно косинуса угла рассеяния $c = \cos \theta$:

$$A_I(v, c) = (-1)^I A_I(v, -c). \quad (7.36)$$

Вследствие этого разложения Лежандра для A_0 и A_2 содержат только четные парциальные волны:

$$A_{0,2}(v, c) = \sum_{\text{четн. } l} (2l+1) P_l(c) A_{0,2}^l(v), \quad (7.37)$$

а для A_1 — только нечетные:

$$A_1(v, c) = \sum_{\text{неч. } l} (2l+1) P_l(c) A_1^l(v). \quad (7.38)$$

Свойства симметрии при перестановках s с u и t (7.34) приводят также к тому, что для кроссинг-реакций, в которых полные энергии соответствуют переменным t и u , изотопические амплитуды образуются комбинациями структурных функций, отличными от (7.29):

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(а) в канале } u: & \text{(б) в канале } t: \\ A_0 = 3C + A + B, & A_0 = 3B + A + C, \\ A_1 = B - A, & A_1 = A - C, \\ A_2 = B + A; & A_2 = A + C. \end{array} \right\} \quad (7.39)$$

Таким образом, кроссинг-симметрия как бы перепутывает изотопические амплитуды различных каналов рассеяния. В πN -рассеянии она перепутывает амплитуды физически различных реакций $\pi N \leftrightarrow \pi N$ и $\pi \pi \leftrightarrow N\bar{N}$ (подробнее см. главу 5).

Формулы (7.29) и (7.39) позволяют связать изотопические амплитуды в различных каналах:

$$A_I^{(s)} = \sum_{I'} \alpha_{II'}^{su} A_{I'}^{(u)} = \sum_{I'} \alpha_{II'}^{st} A_{I'}^{(t)}. \quad (7.40)$$

Здесь, например, $A_I^{(s)}$ — изотопические амплитуды в s -канале и т. д., а α^{su} и α^{st} — соответствующие матрицы кроссинг-симметрии:

$$\alpha^{su} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{st} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (7.41)$$

§ 8. Кроссинг-симметрия и унитарность спектрального представления

8.1. Условие кроссинг-симметрии. Рассмотренные только что свойства кроссинг-симметрии, будучи сформулированы в терминах двойного спектрального представления, приводят к ряду своеобразных следствий, которые записываются через одномерные и двумерные спектральные плотности этого представления:

$$\begin{aligned} f(s, u, t) = & \frac{1}{\pi} \int \frac{f_s(s') ds'}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_u(u') du'}{u' - u} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_t(t') dt'}{t' - t} + \frac{1}{\pi^2} \int \frac{f_{st}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} ds' dt' + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \int \frac{f_{su}(s', u')}{(s' - s)(u' - u)} ds' du' + \frac{1}{\pi^2} \int \frac{f_{ut}(u', t')}{(u' - u)(t' - t)} du' dt', \end{aligned} \quad (8.1)$$

а также через мнимые (абсорбтивные) части амплитуд $f_s(s, u, t)$, $f_u(s, u, t)$, $f_t(s, u, t)$, определенные согласно (5.10), (5.11).

Так, подразумевая под f амплитуду рассеяния нейтральных мезонов, имеющую свойства симметрии

$$f(s, u, t) = f(s, t, u) = f(t, u, s),$$

получаем

$$\begin{aligned} f_s(x) &= f_t(x) = f_u(x) = f(x); \\ f_s(s, u, t) &= f_s(s, t, u) = f_t(t, u, s) = \\ &= f_t(t, s, u) = f_u(u, s, t) = f_u(u, t, s); \\ f_{st}(x, y) &= f_{su}(x, y) = f_{ut}(x, y) = \rho(x, y) = \rho(y, x). \end{aligned}$$

В случае заряженных пионов представление (8.1) имеет место для каждой из трех структурных функций A , B , C (см. (7.27)). Условия кроссинг-симметрии для соответствующих спектральных функций и абсорбтивных частей в соответствии с (7.33)–(7.35) будут:

$$\left. \begin{aligned} A_t(x) = A_u(x) = B_s(x) = B_u(x) = C_s(x) = C_t(x) = a_1(x), \\ A_s(x) = B_t(x) = C_u(x) = a_2(x); \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_s(s, u, t) = A_s(s, t, u) = B_u(t, u, s) = B_u(u, t, s) = \\ = C_t(u, s, t) = C_t(t, s, u), \\ B_s(s, u, t) = C_s(s, t, u) = A_u(t, u, s) = C_u(t, s, u) = \\ = A_t(u, t, s) = B_t(u, s, t); \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{tu}(x, y) = B_{su}(x, y) = C_{st}(x, y) = \rho_s(x, y) = \rho_s(y, x), \\ A_{st}(x, y) = A_{su}(x, y) = B_{ut}(y, x) = B_{st}(y, x) = \\ = C_{su}(y, x) = C_{ut}(x, y) = \rho(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

8.2. Унитарность. Применим теперь условие двухчастичной унитарности

$$\begin{aligned} f_s(s, u, t) &= \text{Im}_s f(s, 4 - t - s, t) = \\ &= \frac{K(\nu)}{4\pi} \int d\Omega f(s, 4 - s - t_1, t_1) f^*(s, 4 - s - t_2, t_2) \end{aligned}$$

к амплитуде рассеяния, записанной в виде (8.1). Из (8.1) вытекает, что при фиксированном s амплитуда $f(s, t)$ может быть представлена в виде

$$f(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{f_t(s, t')}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-s} \frac{\varphi_t(s, t')}{t' - t} dt', \quad (8.5)$$

где

$$\varphi_t(s, t') = f_u(s, 4 - s - t').$$

Переходя с помощью подстановки

$$t = -2\nu(1 - c), \quad t' = -2\nu(1 - z') = \frac{4-s}{2}(1 - z')$$

от переменных t, t' к переменным s, z' , получаем

$$f(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_+ > 1}^{\infty} \frac{\alpha_t(s, z')}{z' - c} dz' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{z_- < -1} \frac{\beta_t(s, z')}{z' - c} dz'. \quad (8.6)$$

Внося представление (8.6) в правую часть условия унитарности (7.11), находим

$$\begin{aligned} \text{Im}_s f(s, t) = & \frac{K(v)}{\pi^2} \int dz' \int dz'' [\alpha_t(s, z') + \beta_t(s, z')] \times \\ & \times [\alpha_t^*(s, z'') + \beta_t^*(s, z'')] I(c, z', z''), \end{aligned} \quad (8.7)$$

где

$$I(c, z', z'') = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{(z' - c_1)(z'' - c_2)},$$

причем

$$d\Omega = d\varphi dc_1, \quad c_2 = cc_1 + \sqrt{1 - c_1^2} \sqrt{1 - c^2} \cos \varphi.$$

Вычисляя этот интеграл в явном виде, получаем

$$\left. \begin{aligned} I(c, z', z'') = & \frac{1}{2\sqrt{k}} \ln \frac{c - z'z'' - \sqrt{k}}{c - z'z'' + \sqrt{k}}, \\ k = & c^2 + z'^2 + z''^2 - 2cz'z'' - 1. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Мы выбрали ветвь логарифма, не имеющую мнимой части для физических значений $\cos \theta$ при $-1 < c < 1$. При нефизических значениях $\cos \theta = z, |z| > 1$ выражение в правой части (8.8) становится комплексным.

Используем его для аналитического продолжения $\text{Im}_s f(s, t)$ в нефизическую область, подставив (8.8) в (8.7):

$$\begin{aligned} f_s(s, u, t) = & \frac{K(v)}{\pi^2} \iint dz' dz'' [\alpha_t(s, z') + \beta_t(s, z')] \times \\ & \times [\alpha_t^*(s, z'') + \beta_t^*(s, z'')] I(z, z', z''). \end{aligned} \quad (8.9)$$

При $|z| > 1$ выражение (8.9) становится комплексным, и мы можем вычислить скачки функции I , а следовательно, и $f_s(s, u, t)$ на разрезах в плоскости комплексной переменной z , т. е. определить спектральные функции,

поскольку согласно (8.1) при $s > 4$

$$\begin{aligned}
 f_s(s, u, t) &= f_s(s) + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_{st}(s, t')}{t' - t} dt + \frac{1}{\pi} \int \frac{f_{su}(s, u')}{u' - u} du' = \\
 &= f_s(s) + \frac{1}{\pi} \int_{z' > 1} \frac{\rho_+(s, z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{\pi} \int_{z' < -1} \frac{\rho_-(s, z')}{z' - z} dz'.
 \end{aligned}$$

Вычисление мнимой части (см. Приложение 2) дает $\text{Im } I(z, z', z'') = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \neq 0$ при $k > 0$ и выполнении условий:

$$\begin{aligned}
 z > z' z'', & \text{ если } z' z'' > 1, \\
 z < z' z'', & \text{ если } z' z'' < 1.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим первую область, $z > z' z'' > 1$. Возвращаясь к инвариантным переменным, получаем

$$\begin{aligned}
 \rho_+(s, z) &= \frac{K(v)}{\pi} \iint \frac{dz' dz''}{\sqrt{k(z, z', z'')}} [\alpha_t(s, z') \alpha_t^*(s, z'') + \\
 &+ \beta_t(s, z') \beta_t^*(s, z'')] = \frac{2}{\pi \sqrt{s(s-4)}} \iint \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{K(s, t, t_1, t_2)}} \times \\
 &\times [f_t(s, t_1) f_t^*(s, t_2) + \varphi_t(s, t_1) \varphi_t^*(s, t_2)],
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 K(s, t, t_1, t_2) &= [t - (\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2})^2] [t - (\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2})^2] - \\
 &- \frac{4tt_1t_2}{s-4} = \frac{(s-4)^2}{4} k(z, z_1, z_2).
 \end{aligned}$$

Выполняя во втором слагаемом в правой части замену переменных интегрирования $t_i = 4 - s - u_i$, с помощью (8.5) представим $\rho_+(s, z)$ в виде

$$\begin{aligned}
 f_{st}^{(s)}(s, t) &= \frac{2}{\pi \sqrt{s(s-4)}} \int_4^\infty \int_4^\infty \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{K(s, t, t_1, t_2)}} f_t(s, t_1) f_t^*(s, t_2) + \\
 &+ \frac{2}{\pi \sqrt{s(s-4)}} \int_4^\infty \int_4^\infty \frac{du_1 du_2}{\sqrt{K(s, t, u_1, u_2)}} f_u(s, u_1) f_u^*(s, u_2) \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

(смысл верхнего значка (s) станет ясен из дальнейшего).

Рассмотрим теперь область определения спектральной функции $f_{st}(s, t)$, фиксируемую областью интегрирова-

ния в правой части (8.10). Ввиду очевидной симметрии по переменным t и u изучим только первый интеграл. Область интегрирования в нем определяется условиями

$$s > 4, t_1 \geq 4, t_2 \geq 4, K(s, t, t_1, t_2) > 0. \quad (8.11)$$

Из (8.11) и (8.9) вытекает, что область, в которой f_{st}

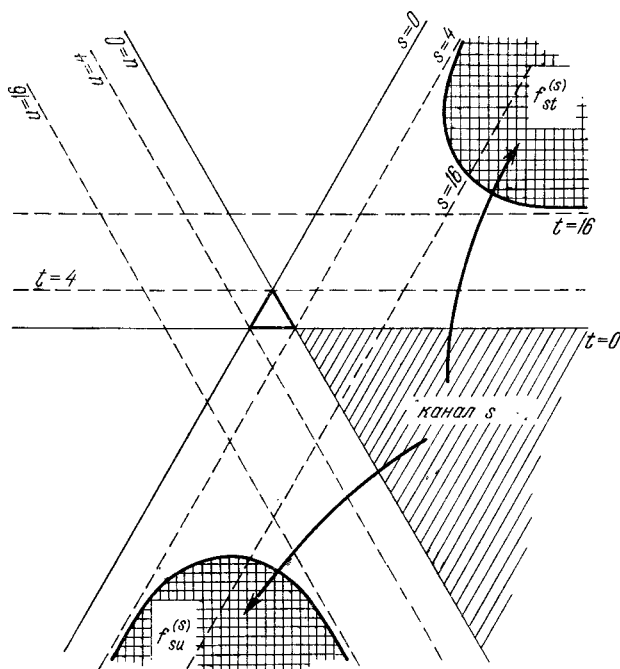


Рис. 17.

отлична от нуля, ограничена кривой, описываемой уравнением

$$K(s, t, 4, 4) = 0,$$

что дает гиперболу

$$(s - 4)(t - 16) = 64 \quad (8.12)$$

с асимптотами $s = 4$ и $t = 16$. Эта область изображена на рис. 17 как $f_{st}^{(s)}$.

Перейдем ко второй области, $z < z'z'' < -1$. Для нее получаем

$$\rho_-(s, z) = \frac{K(v)}{\pi} \iint \frac{dz_1 dz_2}{\sqrt{k(z, z_1, z_2)}} \times \\ \times [\alpha_t(s, z_1) \beta_t^*(s, z_2) + \alpha_t^*(s, z_2) \beta_t(s, z_1)].$$

Возвращаясь к инвариантным переменным и делая подстановку $t_i = 4 - s - u_i$ для членов с $z_i < -1$, а также $t = 4 - s - u$, находим

$$\rho_-(s, z) = f_{su}^{(s)}(s, u) = \\ = \frac{2}{\sqrt{s(s-4)}} \iint_4^\infty \frac{dt_1 du_2}{\sqrt{K(s, u, t_1, u_2)}} f_t(s, t_1) f_u^*(s, u_2) + \\ + \frac{2}{\sqrt{s(s-4)}} \iint_4^\infty \frac{du_1 dt_2}{\sqrt{K(s, u, u_1, t_2)}} f_u(s, u_1) f_t^*(s, t_2). \quad (8.13)$$

Не составляет труда убедиться в том, что это выражение определяет спектральную функцию $f_{su}(s, u)$ в области, ограниченной гиперболой

$$(s - 4)(u - 16) = 64.$$

Эта область на рис. 17 отмечена символом $f_{su}^{(s)}$. Полученная картина аналогична нерелятивистскому случаю, разобранному в главе 1.

Для системы соотношений, состоящих из (8.10), (8.13) и формулы

$$f_t(s, u, t) = f_t(t) + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{f_{st}(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_4^\infty \frac{f_{ut}(u', t)}{u' - u} du', \quad (8.14)$$

направляется итерационный способ решения, основанный на использовании низкоэнергетической спектральной плотности $f_t(x)$ в качестве первого приближения.

8.3. Несовместность двухчастичной унитарности и кроссинг-симметрии. Полученные соотношения, однако, не удовлетворяют условию кроссинг-симметрии, являющейся неотъемлемым атрибутом квантовополевого случая.

В самом деле, в простейшем нейтральном случае спектральные функции должны быть симметричными функциями своих аргументов:

$$f_{st}(x, y) = f_{su}(x, y) = \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

Выражения (8.10) и (8.13) этой симметрией, очевидно, не обладают.

Мы видим, таким образом, что д. с., следующие из представления Мандельстама, совместно с двухчастичным условием унитарности однозначно определяют спектральные функции. Однако последние при этом не удовлетворяют условию кроссинг-симметрии. Несимметрична даже область, в которой f_{st} отличны от нуля. Условия аналитичности, двухчастичной унитарности и кроссинг-симметрии оказываются несовместными.

Для того чтобы восстановить кроссинг-симметрию, следует учесть двухчастичную унитарность в кроссинг-каналах — «канале t » (где роль квадрата полной энергии вместо s играет переменная t) и «канале u ». Этим путем мы придем к картине, изображенной на рис. 18. Теперь, например, спектральная функция f_{st} состоит из двух слагаемых:

$$f_{st}(x, y) = f_{st}^{(s)}(x, y) + f_{st}^{(t)}(x, y), \quad (8.15)$$

первое из которых определяется выражением (8.10), а второе возникает из рассмотрения двухчастичной унитарности в «канале t ». Аналогичными суммами представляются спектральные функции f_{su} и f_{ut} . Полученные выражения обладают должными свойствами симметрии. Например, в нейтральной модели симметрия выражения (8.15) вытекает из соотношения

$$f_{st}^{(t)}(x, y) = f_{st}^{(s)}(y, x).$$

В этом случае ввиду симметрии всех абсорбтивных частей

$$f_t(x, y) = f_u(x, y) = f_s(x, y)$$

из (8.10) и (8.13) следует

$$\begin{aligned} f_{su}^{(s)}(x, y) = f_{st}^{(s)}(x, y) = \\ = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \int_4^{\infty} \int_4^{\infty} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{K(x, y, \tau_1, \tau_2)}} f_s(x, \tau_1) \dot{f}_s(x, \tau_2), \end{aligned} \quad (8.16)$$

что в свою очередь приводит к равенству $f_{st} = f_{su} = f_{ut}$. Для заряженных пионов соответствующие формулы имеют

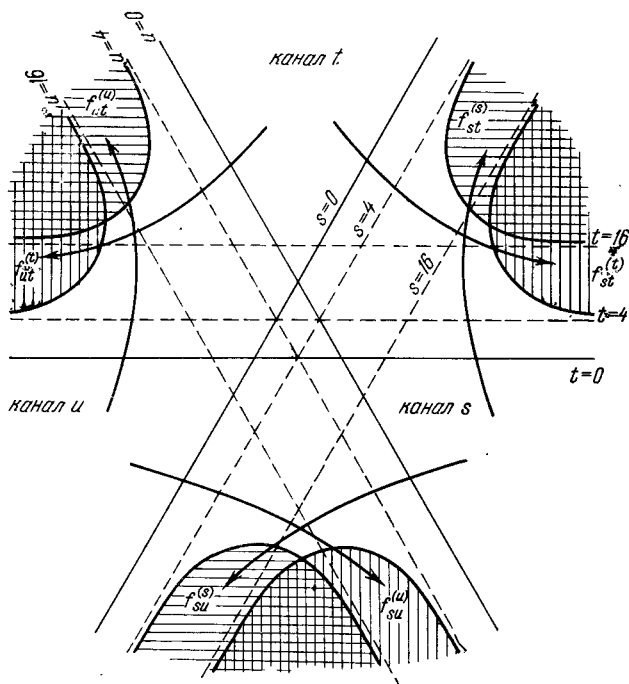


Рис. 18.

более сложный вид. Мы приведем без вывода выражения для спектральных функций в этом случае, представив их в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho(x, y) &= \rho_1(x, y) + \rho_2(y, x), \\ \rho_s(x, y) &= \rho_3(x, y) + \rho_3(y, x), \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_1(x, y) &= A_{st}^{(s)}(x, y), & \rho_2(y, x) &= B_{st}^{(s)}(y, x), \\ \rho_3(x, y) &= C_{st}^{(s)}(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

Абсорбтивные части в подынтегральных выражениях выразим через абсорбтивные части амплитуд с фиксиро-

ванном значении изотопического спина α_I так, чтобы аргумент τ , соответствующий полной энергии, всегда имел физическое значение $\tau > 4$, а второй аргумент x соответствовал передаче импульса. При этом в физической области при $x < 0$

$$\alpha_I [4(v+1), -2(1-c)] = \text{Im } A_I(v, c). \quad (8.19)$$

В таких обозначениях получаем [ср. Чу и Фраучи (1961)]

$$\begin{aligned} \rho_1(s, t) &= \frac{1}{6 \sqrt{s(s-4)}} \int_4^{\infty} \int_4^{\infty} \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{K(s, t, t_1, t_2)}} \{[\alpha_2(t_1, s) + \alpha_1(t_1, s)] \times \\ &\times [4\alpha_0^*(t_2, s) + 3\alpha_1^*(t_2, s) + 11\alpha_2^*(t_2, s)] + \text{компл. сопр.}\}; \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} \rho_2(s, t) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{s(s-4)}} \int_4^{\infty} \int_4^{\infty} \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{K(s, t, t_1, t_2)}} \{[\alpha_1(t_1, s) - \alpha_2(t_1, s)] \times \\ &\times [\alpha_1^*(t_2, s) - \alpha_2^*(t_2, s)] + \\ &+ \frac{4}{9} [\alpha_0(t_1, s) - \alpha_2(t_1, s)] [\alpha_0^*(t_2, s) - \alpha_2^*(t_2, s)]\}; \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} \rho_3(s, t) &= \frac{2}{3 \sqrt{s(s-4)}} \int_4^{\infty} \int_4^{\infty} \frac{dt_1 dt_2}{\sqrt{K(s, t, t_1, t_2)}} \times \\ &\times \{[\alpha_2(t_1, s) - \alpha_1(t_1, s)] [\alpha_0^*(t_2, s) - \alpha_2^*(t_2, s)] + \text{компл. сопр.}\}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

В свою очередь величины α_I выражаются через спектральные функции соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_0(s, t) &= \alpha_0(s) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int dt' \{3\rho(s, t') + \rho(t', s) + \rho_s(s, t')\} \left(\frac{1}{t'-t} + \frac{1}{t'-u} \right), \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\alpha_1(s, t) = \frac{1}{\pi} \int dt' \{\rho(t', s) - \rho_s(s, t')\} \left(\frac{1}{t'-t} - \frac{1}{t'-u} \right), \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2(s, t) &= \alpha_2(s) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int dt' \{\rho(t', s) + \rho_s(s, t')\} \left(\frac{1}{t'-t} + \frac{1}{t'-u} \right). \end{aligned} \quad (8.25)$$

Здесь $\alpha_I(s)$ — комбинации одномерных спектральных функций (ср. (8.2)):

$$\alpha_0(s) = 2a_1(s) + 3a_2(s), \quad \alpha_2(s) = 2a_1(s).$$

8.4. Физический смысл неупругих вкладов в спектральные функции. Рассмотрим физический смысл полученных спектральных функций, обладающих надлежащей симметрией. Первое слагаемое $f_{st}^{(s)}$ в (8.15) представляет собой двухчастичный упругий вклад с точки зрения унитарности в s -канале согласно выводу. Второе слагаемое $f_{st}^{(t)}$ обязано своим происхождением упругой унитарности в t -канале; оно соответствует высшим многочастичным состояниям в унитарности s -канала. Таким образом, кроссинг-симметрия спектральных функций восстановлена путем выхода за рамки двухчастичной унитарности. Это сделано обходным путем, за счет использования упругой унитарности в кроссинг-каналах.

Проиллюстрируем сказанное с помощью теории возмущений. Во втором порядке теории возмущений, основанной на лагранжиане нейтральной модели

$$L(x) = \frac{4\pi}{3} h\Phi^4(x), \quad (8.26)$$

одномерная абсорбтивная часть имеет вид

$$f_s(x) = h^2 \sqrt{\frac{s-4}{s}}. \quad (8.27)$$

Соответствующие диаграммы изображены на рис. 19, а. Спектральная функция $f_{st}^{(s)}$; вычисленная с помощью (8.27), соответствует диаграмме четвертого порядка теории возмущений типа «бочки», изображенной на рис. 19, б. Эта диаграмма несимметрична относительно замены $s \leftrightarrow t$. Симметрию f_{st} восстанавливает слагаемое $f_{st}^{(t)}$, соответствующее «бочке», изображенной на рис. 19, в. Эта диаграмма с точки зрения унитарности в s -канале соответствует промежуточному состоянию с четырьмя частицами.

В случае высших порядков теории возмущений функция $f_{st}^{(t)}$ содержит вклады от диаграмм, имеющих двухчастичное сечение в канале t (например, диаграммы типа рис. 19, г). Следует отметить при этом, что прямое

соответствие с теорией возмущений в высших порядках исчезает. Так, диаграмма рис. 19, *з* представлена в $f_{st}^{(t)}$ только своим двухчастичным сечением (рис. 19, *б*). Ее части, соответствующие четырехчастичному сечению по t (рис. 19, *е*), в $f_{st}^{(t)}$ не содержатся.

В общем случае можно сказать, что первое слагаемое в (8.15) соответствует упругой унитарности в канале s , а

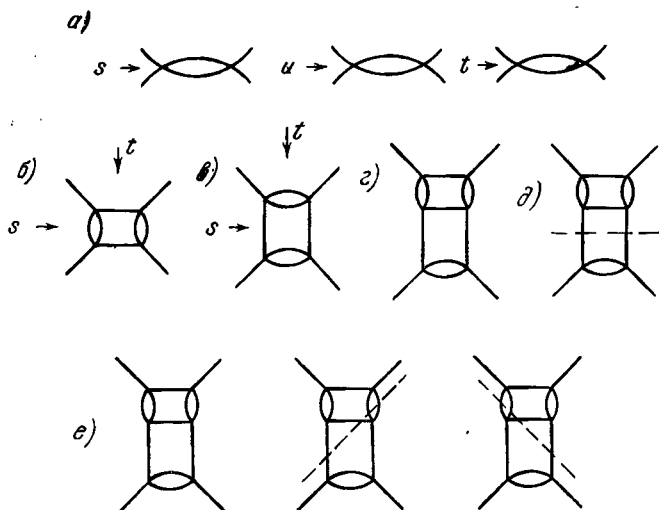


Рис. 19.

второе — неупругим поправкам. Поэтому иногда эту формулу записывают следующим образом:

$$f_{st}(x, y) = f_{st}^{s, \text{упр}}(x, y) + f_{st}^{s, \text{неупр}}(x, y), \quad (8.28)$$

причем

$$f_{st}^{s, \text{упр}} = f_{st}^{(s)}, \quad f_{st}^{s, \text{неупр}} = f_{st}^{(t)}. \quad (8.29)$$

8.5. Полосовое приближение (стрип-аппроксимация).

Полученные соотношения лежат в основе особой приближенной схемы, предназначенной для описания высокоэнергетического рассеяния. Схема основана на приближении, сделанном в духе «приближения эффективного радиуса» (§ 2.4). Предположим, что в интегралах типа

(8.23) — (8.25) существенны только области, ближайшие к физической области $4 < t' < 16$. Очевидно, что вклады именно от этих областей несут основную ответственность за быстро меняющиеся по t части функций $\alpha_I(s, t)$. Во всяком случае, вклад от более далеких областей может быть приближенно представлен полиномом по t , который

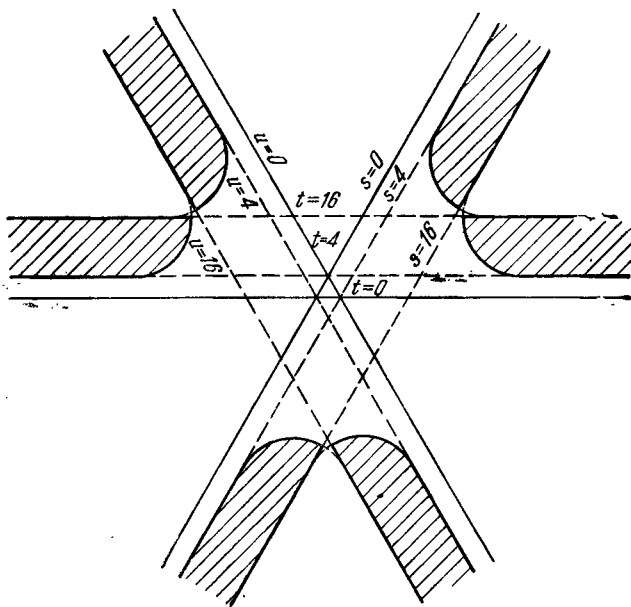


Рис. 20.

в случае необходимости вводится путем вычитания в правых частях этих уравнений. Если это так, то тогда достаточно знать спектральные функции в узких полосах $4 < t' < 16$, $4 < u' < 16$, $4 < s' < 16$, изображенных на рис. 20. Эти функции полностью определяются соответствующими двухчастичными вкладами из кроссинг-каналов. Такое приближение, введенное впервые Чу и Фраучи (1960), называется полосовым приближением (или стрип-аппроксимацией).

Уравнения (8.23) — (8.25) в стрип-аппроксимации получают вид (мы выписываем их не для изотопических амплитуд, а для структурных функций):

$$\left. \begin{aligned}
 A_s(s, t) &= a_2(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} \rho(s, t') + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{du'}{u'-u} \rho(s, u') \rightarrow \\
 &\rightarrow a_2(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{dt'}{t'-t} \rho_2(t', s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{du'}{u'-u} \rho_2(u', s), \\
 B_s(s, t) &= a_1(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} \rho(t', s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{du'}{u'-u} \rho_s(u', s) \rightarrow \\
 &\rightarrow a_1(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{dt'}{t'-t} \rho_1(t', s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{du'}{u'-u} \rho_3(u', s), \\
 C_s(s, t) &= a_1(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} \rho_s(s, t') + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{du'}{u'-u} \rho(u', s) \rightarrow \\
 &\rightarrow a_1(s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{dt'}{t'-t} \rho_3(t', s) + \frac{1}{\pi} \int_4^{16} \frac{du'}{u'-u} \rho_1(u', s).
 \end{aligned} \right\} (8.30)$$

Из этих уравнений видно также, что

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_1(y, x) &= B_{st}^{s, \text{неупр}}(x, y) = C_{su}^{s, \text{неупр}}(x, y), \\
 \rho_2(y, x) &= A_{st}^{s, \text{неупр}}(x, y) = A_{su}^{s, \text{неупр}}(x, y), \\
 \rho_3(y, x) &= C_{st}^{s, \text{неупр}}(x, y) = B_{su}^{s, \text{неупр}}(y, x).
 \end{aligned} \right\} (8.31)$$

Соотношения (8.31) находятся в соответствии с (8.4), (8.17) и (8.28).

Обсудим некоторые следствия полученных результатов. Мы видим прежде всего, что спектральная унитарность фактически связывает высокоэнергетические характеристики амплитуды рассеяния с низкоэнергетическими. В особенно простом виде эта связь выступает в стрип-аппроксимации. Так, мнимая часть амплитуды рассеяния при высоких энергиях, $s \gg 1$, выражается через интеграл от спектральной функции, соответствующей низкоэнергетической двухчастичной унитарности, $t < 16$, в перекрестном канале. Напротив, мнимая часть амплитуды рассея-

ния в области энергий ниже неупругого порога, при $s < 16$, выражается через интеграл от высокоэнергетической спектральной функции, при $t > 16$. Этот факт тесно связан с псевдоскалярностью рассматриваемых частиц, т. е. с отсутствием диаграмм, имеющих одновременно двухчастичные сечения по переменным s и t .

Последнее обстоятельство приводит также к тому, что в низкоэнергетической области при $s \leq 16$ мнимая часть амплитуды рассеяния в физической области является достаточно гладкой функцией от передачи импульса t , а следовательно, и от косинуса угла рассеяния $c = \cos \theta$. Вследствие этого она может быть аппроксимирована полиномом низкой степени по t , т. е. небольшим числом парциальных амплитуд рассеяния. Конкретная степень полинома, равная числу парциальных волн, может быть связана в духе «приближения эффективного радиуса» с асимптотическим поведением $\rho(s, t')$ при $t' \rightarrow \infty$ для мнимой части амплитуды и с поведением $f_t(s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ (или $f_s(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$) для действительной части амплитуды.

Оценка асимптотического поведения в общем случае является сложной задачей, однако в ряде частных случаев оно поддается исследованию. Так, отправляясь от представления Мандельстама и используя условие унитарности, можно получить так называемую верхнюю границу Фруассара (1960) (см. также Джин, Мартен (1962)) для модуля амплитуды рассеяния вперед:

$$|f(s, t = 0)| < cs \ln^2 s, \quad (8.32)$$

что с помощью оптической теоремы дает для полного сечения

$$\sigma_{\text{полн}}(s) < c_1 \ln^2 s, \quad c_1 = \frac{4\pi}{\mu^2}. \quad (8.33)$$

Оценка (8.32) приводит к выводу, что для сходимости спектрального интеграла от $f_t(t', 0)$ достаточно двух вычитаний. Этот вывод можно получить также для $f_t(t', s = 4)$. Делая весьма естественное допущение, что степень роста не сильно меняется при увеличении s от $s = 4$ до $s = 16$, приходим к заключению, что в низкоэнергетической области ($s \leq 16$) амплитуда рассеяния может быть достаточно хорошо аппроксимирована первыми тремя парциальными волнами с $l \leq 2$.

§ 9. Низкоэнергетические уравнения для парциальных волн

9.1. Упругая унитарность и низшие парциальные волны. Как было установлено в предыдущем параграфе, в области низких энергий при $s \ll 16$ пион-пионное рассеяние может быть приближенно описано небольшим числом низших парциальных волн. Именно в этой области двухчастичная унитарность является точной. Естественно поэтому положить в основу низкоэнергетической приближенной схемы два положения.

а) **Упругая унитарность:** в условии унитарности рассматривается вклад только от двухчастичного состояния. Вклады от промежуточных состояний с четырьмя и более частицами считаются пренебрежимо малыми.

б) **Ограничение низшими парциальными волнами:** считается, что амплитуда рассеяния в области низких энергий хорошо аппроксимируется малым числом низших парциальных волн f_l с $l \leq l_{\max}$. Вкладами остальных парциальных волн (с $l > l_{\max}$) полностью пренебрегается.

Эти положения совместно со свойствами аналитичности и кроссинг-симметрии амплитуды рассеяния позволяют получить систему приближенных уравнений для низших парциальных волн рассеяния.

Прежде чем приступить к выводу таких уравнений, сделаем некоторые замечания. Отметим сначала, что положение (а) является строгим лишь при $s < 16$. Мы, однако, будем считать, что оно приближенно справедливо в более широкой области $4 < s < s_{\max}$, $s_{\max} > 16$, предполагая, что в интервале $16 < s < s_{\max}$ вклады высших состояний, хотя и отличны от нуля, но численно малы. Предположим, далее, что ограничение малым числом низших парциальных волн также справедливо в области $4 < s < s_{\max}$. При этом не будем пока фиксировать значения s_{\max} , которое фактически будет играть роль верхней границы «области низких энергий». Предположим лишь, что s_{\max} достаточно велико для того, чтобы эта область включала ρ -мезон, т. е. резонансное состояние двух пионов с изотопическим спином $I=1$, угловым моментом $l=1$ и энергией 765 Мэв (что соответствует $s \approx 29$), представляю-

щий собой наиболее важное явление в пионной физике. Таким образом, во всяком случае $s_{\max} > 30$ и $l_{\max} \gg 1$.

9.2. Приближение Чини — Фубини. Положения (а) и (б), будучи применены непосредственно к представлению Мандельстама, приводят к приближенному спектральному представлению амплитуды рассеяния, предложенному Чини и Фубини (1958).

Воспользовавшись разбиением спектральных функций на два слагаемых (8.15), запишем представление (8.1) в виде

$$f(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\tilde{f}_s(s', u, t)}{s' - s} ds' + \\ + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\tilde{f}_u(s, u', t)}{u' - u} du' + \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\tilde{f}_t(s, u, t')}{t' - t} dt', \quad (9.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_s(s, u, t) &= f_s(s) + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{st}^{(s)}(s', t')}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{su}^{(s)}(s, u')}{u' - u} du', \\ \tilde{f}_t(s, u, t) &= f_t(t) + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{st}^{(t)}(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{ut}^{(t)}(u', t)}{u' - u} du', \\ \tilde{f}_u(s, u, t) &= f_u(u) + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{su}^{(u)}(s', u)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{16}^{\infty} \frac{f_{ut}^{(u)}(u, t')}{t' - t} dt'. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Рассмотрим теперь одну из функций (9.2), например \tilde{f}_s . Ясно, что в физической области s -канала ($t < 0, u < 0$) \tilde{f}_s совпадает с мнимой частью амплитуды рассеяния f_s , если $s < 16$, так как тогда второе и третье слагаемые в (9.1) не имеют особенностей по s . При этом согласно (9.2) f_s является медленно меняющейся функцией переменных t и u , поскольку интервалы интегрирования ($t' > 16, u' > 16$) лежат далеко от физической области. Воспользовавшись этим, разложим $f_s(s, u, t)$ в ряд по переменным t и u и ограничимся несколькими первыми членами:

$$f_s(s, u, t) = \sum_{k, m \leq n} u^k t^m \psi_s^{km}(s). \quad (9.3)$$

Это разложение эквивалентно разложению по парциальным волнам

$$f_s(s, u, t) = f_s[4(v+1), -2v(1+c), -2v(1-c)] = \sum_{l \leq n} (2l+1) P_l(c) \operatorname{Im} f_l(v). \quad (9.4)$$

Аналогичным образом можно представить f_t и f_u .

Формулы (9.1), (9.3), (9.4) и дают приближение Чини — Фубини. Оно является достаточно аккуратным для мнимых частей физических амплитуд в физических областях ниже неупругого порога, и, следовательно, можно надеяться, что оно дает разумное описание действительной части амплитуды в низкоэнергетической области в духе «теории эффективного радиуса».

Как видно, приближение Чини — Фубини фактически игнорирует спектральные функции, отражая их вклады в мнимые части амплитуд соответствующими полиномами. Можно, следовательно, сказать, что оно естественно в низкоэнергетической области, которая на плоскости Мандельстама соответствует треугольнику $s < 16$, $u < 16$, $t < 16$, свободному от спектральных функций.

9.3. Противоречивость низкоэнергетических положений. Как было установлено в § 8.3, условия аналитичности, двухчастичной унитарности и кроссинг-симметрии являются несовместными. Низкоэнергетическое положение (б) усугубляет ситуацию. Ограничение по числу парциальных волн приводит к противоречию с любым из двух наборов: 1) кроссинг-симметрия + унитарность, 2) кроссинг-симметрия + аналитичность.

Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что ограничение числа парциальных волн $l \leq l_{\max}$ приводит к тому, что амплитуда рассеяния f представляется полиномом степени l_{\max} по инвариантной переменной t . Кроссинг-симметрия требует теперь, чтобы f была полиномом степени l_{\max} также относительно переменной s (или, что эквивалентно, относительно u). Очевидно, что полиномиальная функция не обладает разрезами, а также не подчиняется условию унитарности. Таким образом, невозможно использовать положения (а) и (б) буквально; следует делать лишь приближения «в духе» этих положений, причем неудачные приближения могут привести к противоречиям.

Заметим, что представление Чини — Фубини использует положение (б) лишь по отношению к мнимым частям амплитуды рассеяния. Действительная часть, определяемая формулой (9.1), не является полиномом по s , u , t и, следовательно, содержит все парциальные волны. Этот факт лишний раз иллюстрирует то обстоятельство, что задача получения уравнений для парциальных волн, исходя из сформулированных низкоэнергетических положений, не является однозначной процедурой. Ее успешная реализация требует определенного искусства балансирования, чтобы избежать указанных противоречий.

9.4. Постановка задачи. Поскольку в области низких энергий амплитуда рассеяния сводится к небольшому числу парциальных волн, естественной математической формулировкой низкоэнергетического приближения является система спектральных представлений для парциальных волн, дополненных условиями унитарности и кроссинг-симметрии. В этой связи следует отметить, что изучение аналитических свойств парциальных амплитуд $f_l(v)$ в комплексной плоскости переменной v может быть проведено как с помощью представления Мандельстама, так и другими способами. Мы имеем здесь в виду параметрическое представление Наканиши (1961), доказанное для произвольных диаграмм теории возмущений. Для парциальных волн пион-пионного рассеяния спектральное представление имеет форму

$$f_l(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f_l(v')}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi_l(v')}{v' - v} dv' + P_l^n(v). \quad (9.5)$$

Здесь $\text{Im } f_l(v)$ — мнимая часть парциальной волны в физической области, которая в области низких энергий удовлетворяет условию унитарности (7.13), $\varphi_l(v)$ — мнимая часть в нефизической области на кроссинг-разрезе $-\infty < v < -1$, P_l^n — полином степени n , соответствующий возможности вычитания.

Таким образом, проблема математической формулировки низкоэнергетической теории сводится теперь к выражению функций φ_l и полиномов P_l^n , а также мнимых частей $\text{Im } f_l$ через амплитуды f_l во всем необходимом интервале значений аргументов. Мнимая часть $\text{Im } f_l$ определена

формулой (7.13), строго говоря, только ниже первого неупругого порога при $v < 3$ (т. е. $s < 16$). Обычно, однако, полагают

$$\text{Im } f_l(v) = K(v) |f_l(v)|^2 \text{ при } 0 < v < \infty, \quad (9.6)$$

считая, что в разумную низкоэнергетическую схему высокоэнергетическая часть области интегрирования не может вносить большого вклада, или, точнее, что эти обе области могут быть подавлены соответствующим числом вычитаний. Таким образом, будем считать, что в системе (9.1), (9.6) уже содержатся аналитичность и унитарность. Функции φ_l и P_l^n теперь должны быть определены с помощью кроссинг-симметрии, т. е. выражены через все парциальные волны $f_{l'}$ с $0 \leq l' \leq l_{\max}$ рассматриваемого приближения. Определение φ_l может быть проведено с помощью использования кроссинг-симметрии для мнимой части амплитуды рассеяния. Кроссинг-симметрия $\text{Re } f_l$ согласно (9.1) будет определяться одновременно интегралом от φ_l и полиномом P_l^n . Таким образом, уже при фиксированной кроссинг-симметрии $\text{Im } f_l$ мы можем «корректировать» еще кроссинг-симметрию действительной части $\text{Re } f_l$. Заметим еще, что введение полинома степени $n \geq 1$ может привести к линейному росту $\text{Re } f_l$ на бесконечности и, следовательно, к противоречию с унитарностью. С другой стороны, вычитания, вообще говоря, являются необходимыми для обеспечения правильного порогового поведения парциальных волн

$$f_l(v) \sim v^l = q^{2l} \text{ при } v \ll 1. \quad (9.7)$$

Таким образом, задача согласования порогового и высокоэнергетического поведения высших парциальных волн не является тривиальной.

Мы рассмотрим сейчас две различные схемы построения систем уравнений для низших парциальных волн. Это, во-первых, схема Чу — Мандельстама (1960), в которой положение (б) используется при аппроксимации мнимой части амплитуды рассеяния в нефизической области, охватывающей область спектральной функции. Мы увидим, что схеме Чу — Мандельстама присущи серьезные внутренние трудности, которые препятствуют получению физически интересных результатов,

Во второй схеме, предложенной в работе Ефремова и др. (1960) и известной под названием дифференциального приближения (ДП), положение (б) используется при аппроксимации действительной части амплитуды рассеяния. При этом условия кроссинг-симметрии также формулируются приближенно. Схема ДП не обладает внутренними математическими противоречиями. Ее ценность непосредственно связана с физическим смыслом использованных приближений и ограничена главным образом использованием низкоэнергетических приближений во всей области изменения переменных вплоть до $\nu \rightarrow \infty$, в первую очередь использованием условия упругой унитарности.

§ 10. Схема Чу — Мандельстама

10.1. Вычисление $\text{Im } f_l$ на кроссинг-разрезе. Программа получения системы уравнений для парциальных волн низкоэнергетического пион-пионного рассеяния была впервые реализована Чу и Мандельстамом (1960). Мы изложим сейчас их схему рассуждений на модельном примере рассеяния нейтральных псевдоскалярных бозонов, а затем приведем результат для заряженных пионов.

Используя представление Мандельстама (8.1), запишем прежде всего одномерное спектральное представление амплитуды рассеяния в s -канале по отношению к энергетической переменной $\nu = \frac{s}{4} - 1$ при фиксированном значении косинуса угла рассеяния $c = \cos \theta = \frac{t-u}{s-4}$ (т. е. при фиксированном отношении t/u). Оно имеет вид

$$f(\nu, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f(\nu', c)}{\nu' - \nu} d\nu' + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{2}{1-c}} \frac{\Phi_t(\nu', c)}{\nu' - \nu} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{2}{1+c}} \frac{\Phi_u(\nu', c)}{\nu' - \nu} d\nu'. \quad (10.1)$$

Линия фиксированного $c = (u-t)/(u+t)$ при $-1 < c < +1$ изображена на рис. 21 пунктиром.

Первый член в правой части (10.1) соответствует «прямому» знаменателю $(s' - s)$ в (8.1), тогда как остальные

соответствуют кроссинг-знаменателям $(t' - t)$ и $(u' - u)$. Поэтому первый интеграл в (10.1) соответствует физическому разрезу, проходящему через физическую область s -канала (отрезок $[0, +\infty)$ пунктирной прямой на рис. 21),

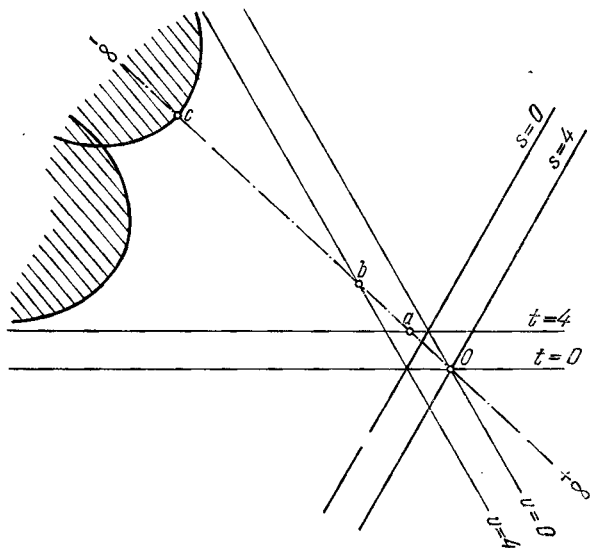


Рис. 21.

второй интеграл — нефизическому разрезу, начинающемуся от $t = 4$ (отрезок $[a, -\infty)$), и третий интеграл — нефизическому разрезу от u -канала (отрезок $[b, -\infty)$). При этом второй и третий разрезы проходят через область спектральной функции f_{ut} (отрезки $[c, -\infty)$). К последнему обстоятельству мы еще вернемся.

Из (10.1) следует, что

$$\operatorname{Im} f(v, c)|_{v < -1} = \varphi_t(v, c) + \varphi_u(v, c). \quad (10.2)$$

Из представления Мандельштама следует, что φ_t и φ_u являются абсорбтивными частями амплитуд f_t и f_u , выраженными в переменных s -канала:

$$\varphi_t(v, c) = \varphi_t\left(\frac{s-4}{4}, \frac{t-u}{s-4}\right) = -f_t(s, u, t),$$

$$\varphi_u(v, c) = \varphi_u\left(\frac{s-4}{4}, \frac{t-u}{s-4}\right) = -f_u(s, u, t).$$

Переходя в аргументах f_t к переменным t -канала

$$t = 4(v_t + 1), \quad s = -2v_t(1 - c_t), \quad u = -2v_t(1 + c_t), \quad (10.3)$$

и в аргументах f_u — к переменным u -канала

$$u = 4(v_u + 1), \quad s = -2v_u(1 + c_u), \quad t = -2v_u(1 - c_u), \quad (10.4)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t(v, c) &= -\operatorname{Im} f(v_t, c_t), \\ \varphi_u(v, c) &= -\operatorname{Im} f(v_u, c_u), \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

причем согласно (10.3) и (10.4)

$$\left. \begin{aligned} v_t &= \frac{t-4}{4} = -1 - \frac{v}{2}(1-c), & c_t &= 1 + \frac{2(v+1)}{v_t}, \\ v_u &= \frac{u-4}{4} = -1 - \frac{v}{2}(1+c), & c_u &= -1 - \frac{2(v+1)}{v_u}. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Интегрируя (10.2) по c с весом $\frac{1}{2} P_l(c)$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_l(v) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(c) \operatorname{Im} f(v, c) dc = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(c) \varphi_t(v, c) dc + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(c) \varphi_u(v, c) dc. \end{aligned}$$

Используя (10.5), (10.6) и переходя в первом интеграле к новой переменной интегрирования v_t , а во втором — к v_u , находим

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_l(v) &= \frac{1}{v} \int_0^{-v-1} dv_t P_l \left[1 + \frac{2}{v}(1 + v_t) \right] \operatorname{Im} f \left[v_t, 1 + \frac{2(v+1)}{v_t} \right] + \\ &+ \frac{1}{v} \int_0^{-1-v} dv_u P_l \left[-1 - \frac{2}{v}(1 + v_u) \right] \operatorname{Im} f \left[v_u, -1 - \frac{2(v+1)}{v_u} \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что соответствующие выражения для мнимых частей парциальных волн изотопических амплитуд пион-пионного рассеяния будут иметь вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A_l^I(\nu) &= \\ &= \frac{1}{\nu} \int_0^{-\nu-1} d\nu_t P_l \left[1 + 2 \frac{1+\nu_t}{\nu} \right] \sum_{I'} \alpha_{II'}^{st} \operatorname{Im} A^{I'} \left[\nu_t, 1 + 2 \frac{\nu+1}{\nu_t} \right] + \\ &+ \frac{1}{\nu} \int_0^{-1-\nu} d\nu_u P_l \left[-1 - 2 \frac{1+\nu_u}{\nu} \right] \sum_{I'} \alpha_{II'}^{su} \operatorname{Im} A^{I'} \left[\nu_u, -1 - 2 \frac{\nu+1}{\nu_u} \right], \end{aligned} \quad (10.8)$$

где α^{st} и α^{su} — матрицы кроссинг-симметрии для парциальных амплитуд, введенные выше (см. (7.41)).

Формулы (10.7), (10.8) представляют собой точные выражения для мнимых частей парциальных амплитуд на кроссинг-разрезах. При их выводе не было сделано никаких приближений. Из этих формул следует, что входящие под интегралы мнимые части амплитуд зависят от физических значений квадратов импульсов кроссинг-каналов ν_t, ν_u . Однако соответствующие косинусы лежат в нефизических областях $c_t < -1, c_u > +1$. Таким образом, величины (10.5) представляют собой аналитические продолжения мнимых частей амплитуд из t -канала и из u -канала в области $u > 0$ ($c_t < -1$) и $t > 0$ ($c_u > +1$) соответственно. Поскольку в области $u, t > 0$ лежит спектральная функция f_{ut} , то указанные продолжения представляют собой абсорбтивные части, принимающие комплексные значения. В интегралах (10.7) эти комплексные значения возникают для $\nu < -9$.

10.2. Ограничение низшими парциальными волнами. Теперь следует разложить входящие в (10.7) и (10.8) абсорбтивные части амплитуд рассеяния по парциальным волнам, т. е., например, для f_t :

$$\operatorname{Im} f(\nu_t, c_t) = \sum_{l'} (2l' + 1) P_{l'}(c_t) \operatorname{Im} f_{l'}(\nu_t), \quad (10.9)$$

и ограничиться несколькими первыми членами ряда. Подставляя разложение (10.9) в правую часть (10.7) и учитывая симметрию относительно косинуса угла рассеяния,

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_l(v) &= \frac{2}{v} \int_0^{-v-1} d\tilde{v} P_l \left(1 + 2 \frac{1 + \tilde{v}}{v} \right) \sum_{\text{четн. } l'} (2l' + 1) \operatorname{Im} f_{l'}(\tilde{v}) \times \\ &\times P_{l'} \left(1 + 2 \frac{1 + v}{\tilde{v}} \right) \text{ при четных } l, \\ \operatorname{Im} f_l(v) &= 0 \quad \text{при нечетных } l. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Соответствующая подстановка приводит (10.8) к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A_l^I(v) &= \frac{1}{v} \int_0^{-1-v} d\tilde{v} P_l \left(1 + 2 \frac{1 + \tilde{v}}{v} \right) \sum_{I'} \alpha_{II'} \sum_{l'} (2l' + 1) \times \\ &\times \operatorname{Im} A_{l'}^I(\tilde{v}) P_{l'} \left(1 + 2 \frac{1 + v}{\tilde{v}} \right). \end{aligned} \quad (10.11)$$

Здесь $\alpha_{II'} = 2\alpha_{II'}^{st}$ — кроссинг-матрица Чу — Мандельстама.

Отметим прежде всего, что выражения (10.10), (10.11) справедливы лишь при $v > -9$, т. е. в областях, не охватывающих спектральных функций. Только в этом случае мы находимся внутри эллипса сходимости Лемана для $\operatorname{Im} f(v_t, c_t)$ и $\operatorname{Im} f(v_u, c_u)$. Нам, однако, предстоит, в соответствии с положением (б), оборвать ряд по l' на $l' = l_{\max}$. Если l_{\max} мало, то оборванный ряд плохо аппроксимирует величины типа (10.9) и при $v > -9$, поскольку мы находимся в нефизической области, где $|c_{t,u}| > 1$. Для того чтобы получить представление о возможном масштабе погрешности, смоделируем близлежащий вклад в абсорбтивную часть амплитуды от спектральной функции (ср. (8.9)) выражением

$$\operatorname{Im} A(\bar{v}, \bar{c}) \sim \frac{R}{t' - t} = \frac{R}{t' + 2\bar{v}(1 - \bar{c})} = \frac{R/2\bar{v}}{z - \bar{c}}; \quad z = 1 + \frac{t'}{2\bar{v}},$$

где \bar{c} — кроссинг-косинус, соответствующий каналу u ; \bar{v} — импульс в канале u , а t' — инвариантная переменная из области спектральной функции.

Согласно известной теореме Гейне (см. Уиттекер и Ватсон (1963)) величина $(z - \bar{c})^{-1}$ может быть разложена в

ряд по полиномам Лежандра

$$\frac{1}{z-\bar{c}} = \sum_{l'} (2l' + 1) P_{l'}(\bar{c}) Q_{l'}(z), \quad (10.12)$$

где Q_l — функция Лежандра второго рода.

Положим $\bar{v} = 3$, что соответствует $u = 16$, т. е. энергии первого неупругого порога. Линия $u = 16$ пересекает границу спектральной функции в точке Γ ($t_r = 64/3$). Положим поэтому $t' = t_r = 64/3$. Вычисления проведем в двух точках: γ_0 ($t = 16$, $u = 16$) и γ_1 ($u = 16$, $t = 0$), что соответствует значениям

$$\gamma_0: c = 0, \quad \bar{c} = 11/3$$

$$\gamma_1: c = 1, \quad \bar{c} = 1.$$

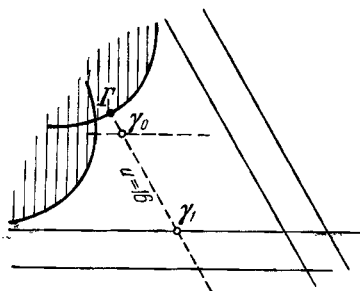


Рис. 22.

Результаты вычислений для $l_{\max} = 1$ приведены в табл. 1.

Таким образом, эта аппроксимация может приводить к большим ошибкам для косинусов прямого канала, близких к $c = 0$.

Таблица 1

Точка	$(z - \bar{c})^{-1}$	$Q_0(z) + 3\bar{c}Q_1(z)$	Ошибка
γ_1	0,281	0,273	3 % В три раза
γ_0	1,125	0,405	

Тем не менее в методе Чу — Мандельстама ряд, оборванный на $l_{\max} = 1$, используют для выражений вида (10.10), (10.11) при всех v в интервале $[-1, -\infty)$. Области $v \rightarrow -\infty$ приводят к новым, чисто математическим трудностям. Для того чтобы проиллюстрировать их, рассмотрим вклад члена с $l' = 1$ в одну из $\text{Im } A_l^I$, например в s -волну ($l = 0$).

Подставим этот вклад в кроссинг-интеграл спектрального представления парциальной волны (9.5)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } A_0(v')}{v' - v} dv' \rightarrow \frac{3}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dv'}{v' - v} \frac{1}{v'} \int_0^{-1-v'} \text{Im } A_1(\bar{v}) \left(1 + 2 \frac{1+v'}{\bar{v}}\right) d\bar{v}.$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$\frac{3}{\pi} \int_1^{\infty} d\bar{v} \text{Im } A_1(\bar{v}) \int_{-\infty}^{-1-\bar{v}} \frac{dv'}{v'(v'-v)} \left(1 + 2 \frac{1+v'}{\bar{v}}\right).$$

Интеграл по v' расходится логарифмически. Для того чтобы сделать этот интеграл сходящимся, необходимо провести вычитание в исходном спектральном представлении (9.5). Это вычитание связано не с индексом l прямого канала, а с индексом l' в кроссинг-канале. В общем случае рассмотрение волны с индексом $l' > 0$ в кроссинг-канале приводит к необходимости вычитаний для всех волн в прямом канале. Таким образом, в схеме Чу — Мандельстама введение каждой высшей волны требует полной перестройки уравнений для низших волн.

10.3. Система уравнений для s - и p -волн. Поскольку сейчас мы ограничимся s - и p -волнами, т. е. в соответствии с (7.36) всего тремя парциальными волнами, введем для них упрощенные обозначения

$$A_{l=0}^{I=0} \equiv A_0, \quad A_{l=1}^{I=1} \equiv A_1, \quad A_{l=0}^{I=2} \equiv A_2. \quad (10.13)$$

Из изложенного выше следует, что уравнения, включающие p -волну на кроссинг-разрезе, с необходимостью требуют одного вычитания. Для s -волн вычитание удобно выполнить в точке $v_0 = -2/3$. Дело в том, что параметры такого вычитания можно простым образом связать со значениями структурных амплитуд в точке максимальной симметрии на плоскости Мандельстама $s = u = t = 4/3$, в которой

$$A = B = C = \lambda.$$

Введенная таким образом «перенормированная константа взаимодействия» λ отличается знаком от константы λ Чу —

Мандельштама и соответствует эффективной константе в лагранжиане $\frac{4\pi}{3} \lambda (\varphi_\sigma \varphi_\sigma)^2$. Чтобы установить указанную связь, следует записать дисперсионное соотношение при фиксированном $c = \cos \theta$, явно выделив z -волну:

$$f(v, c) = f_0(v) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv' \operatorname{Im} f\left(v', 1 + 2 \frac{1+v}{v'}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{v' + 1 + \frac{v}{2}(1-c)} + \frac{1}{v' + 1 + \frac{v}{2}(1+c)} - \frac{2}{v} \ln \left(1 + \frac{v}{v'+1}\right) \right\}. \quad (10.14)$$

Здесь мы перешли к новым переменным согласно (10.5), (10.6), а также пренебрегли высшими волнами на физическом разрезе. Полагая затем в (10.14) $c = 0$ и $v = v_0 = -2/3$, получаем связи между $f_0(v_0)$ и λ . Эти связи для заряженного случая имеют вид

$$A_0(v_0) = 5\lambda + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv' \left\{ \frac{1}{v_0} \ln \left(1 + \frac{v_0}{1+v'}\right) - \frac{1}{v' + 1 + \frac{v_0}{2}} \right\} \psi_0\left(v', 1 + 2 \frac{v_0+1}{v'}\right), \quad (10.15)$$

$$A_2(v_0) = 2\lambda + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv' \left\{ \frac{1}{v_0} \ln \left(1 + \frac{v_0}{1+v'}\right) - \frac{1}{v' + 1 + \frac{v_0}{2}} \right\} \psi_2\left(v', 1 + 2 \frac{v_0+1}{v'}\right), \quad (10.16)$$

причем

$$\psi_i(v, c) = \alpha_{i0} \operatorname{Im} A_0(v) + 3\alpha_{i1} c \operatorname{Im} A_1(v) + \alpha_{i2} \operatorname{Im} A_2(v). \quad (10.17)$$

Уравнение для p -волны удобно вычесть в точке $v = 0$ и воспользоваться квантовомеханическим пороговым условием

$$A_1(0) = 0. \quad (10.18)$$

Уравнения для парциальных волн теперь принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A_{0,2}(\nu) &= A_s(\nu_0) + \frac{\nu - \nu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_s(\nu')}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu)} d\nu' + \\ &+ \frac{\nu - \nu_0}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\Phi_s(\nu') d\nu'}{(\nu' - \nu_0)(\nu' - \nu)}, \\ A_1(\nu) &= \frac{\nu}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} A_1(\nu')}{\nu'(\nu' - \nu)} d\nu' + \frac{\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\Phi_1(\nu') d\nu'}{\nu'(\nu' - \nu)}, \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

причем согласно (10.11) и (10.17)

$$\Phi_i(\nu) = \frac{1}{\nu} \int_0^{-1-\nu} P_{li} \left(1 + 2 \frac{1+\bar{\nu}}{\nu} \right) \psi_i \left(\bar{\nu}, 1 + 2 \frac{1+\nu}{\bar{\nu}} \right) d\bar{\nu}. \quad (10.20)$$

Уравнения (10.15), (10.16), (10.19) и (10.20) вместе с условием упругой унитарности

$$\operatorname{Im} A_i = K(\nu) |A(\nu)|^2 \quad (10.21)$$

образуют систему уравнений Чу — Мандельстама.

10.4. Некоторые свойства уравнений. Эта система была исследована качественно и затем решена численно (Чу, Мандельстам и Нойес (1960)) на электронной вычислительной машине. Численные решения обладают следующими общими свойствами. Они зависят от одного параметра λ и существуют для интервала значений

$$\lambda_{\min} \approx -0,34 \lesssim \lambda \lesssim \lambda_{\max} \approx 0,46.$$

При этом верхняя граница λ_{\max} связана с отсутствием реального связанного состояния в канале $I = 0$. Такое связанное состояние появляется при $\lambda > \lambda_{\max}$. При $\lambda < 0$ решения, строго говоря, не существует, точнее, на кроссинг-разрезе появляется «духовый полюс», противоречащий унитарности. Однако при $\lambda > \lambda_{\min}$ он лежит в высокоэнергетической части кроссинг-интеграла, $\nu_{\text{полюс}} < < -10$. Чу и Мандельстам полагали, что к решению в области $\nu < -10$, вследствие характера уже обсужденных приближений, нельзя относиться серьезно.

Во всех численных решениях s -волны не малы; особенно велика волна $l = 0$, $I = 0$. Эти решения получили название « s -доминантных». Длины рассеяния s -волн приближенно описываются формулами

$$a_0 = A_0(0) = \frac{5\lambda}{1-2\lambda}, \quad a_2 = A_2(0) = 2\lambda.$$

Характерные графики котангенсов s -фаз приведены на рис. 23. Ни в одной из парциальных волн не появляется резонанс. Волна $l = 1$, $I = 1$ всегда мала (порядка λ^2). Эта черта решений является наиболее существенной.

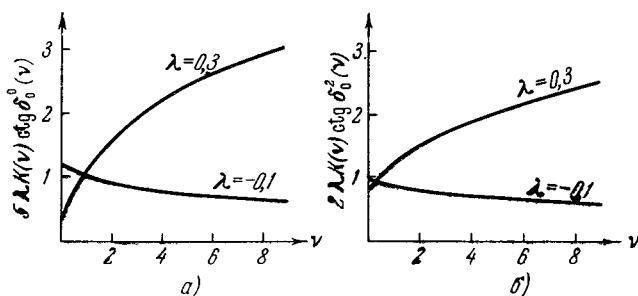


Рис. 23.

Она приводит к невозможности получения p -резона в рамках описанной схемы. Таким образом, можно сказать, что уравнения Чу — Мандельстама не удовлетворительны с физической точки зрения.

Как показал Лавлес (1962), трудность с p -волной в уравнениях Чу — Мандельстама имеет более глубокий характер. Итоги этого анализа могут быть резюмированы следующим образом. Уравнения Чу — Мандельстама не обладают решениями, кроме, может быть, случая, когда $\text{Im } A_1$ тождественно равна нулю, т. е., во всяком случае, не обладают решениями, содержащими p -резон и представляющими физический интерес. В свете этого строгого результата Лавлеса крайне любопытным оказывается положение с численными результатами решения на машине. Эти результаты не являются решениями в строгом смысле слова, они носят асимптотический характер. Если неограниченно увеличивать точность численного счета, то после

достаточно большого числа итераций в области высоких энергий накопится «возмущение», которое разрушит, казалось бы, уже установившееся решение в области низких энергий. Другими словами, итерации на вычислительной машине эквивалентны построению ряда по степеням λ , имеющего асимптотическую природу.

Эта ситуация имеет также эвристическую ценность. Прежде чем пускать в ход машину, необходимо провести тщательный качественный анализ задачи. В противном случае машина может «обмануть» и выдать решение, которого в общем-то и не существует.

Неудачи с получением феномена ρ -мезона побудили многих авторов к различным модификациям уравнений Чу — Мандельстама. Эти модификации в основном сводились к замене кроссинг-интегралов в уравнениях (10.19) рядом высокоэнергетических полюсов, положения и вычеты которых подбирались из дополнительных соображений. Такие операции, очевидно, находятся в противоречии с исходными низкоэнергетическими концепциями. Кроме того, как было показано в § 10.2, существенные ошибки в описанной процедуре начинают накапливаться уже в низкоэнергетической части кроссинг-интегралов при $\nu > -9$. Поэтому мы обратимся сейчас к другому способу получения уравнений для парциальных волн низкоэнергетического рассеяния, свободному от недостатков подобного рода.

§ 11. Дифференциальное приближение.

Нейтральная модель

11.1. Метод дифференциального приближения. Способ получения низкоэнергетических уравнений, свободных от недостатков уравнений Чу — Мандельстама, непосредственно вытекает из критического анализа последних.

Трудности, с которыми встречается вышеописанная схема, связаны с тем, что мы вынуждены использовать разложения $\text{Im } A$ по косинусам кроссинг-реакции $c_l = 1 + 2 \frac{\nu+1}{\nu}$ в той области, где этого разложения вообще не существует (вне эллипса сходимости Лемана). При этом даже в низкоэнергетической части интеграла по кроссинг-разрезу (кроссинг-интеграла) при $\nu > -9$, где разложение

производится в области его сходимости (в эллипсе Ле-мана), первые два члена ряда (содержащие s - и p -волны), которыми ограничивается вышеописанная схема, очень плохо представляют разлагаемую функцию из-за того, что в этой нефизической области косинусы кроссинг-реакций (в полиномах Лежандра, по которым ведется разложение) принимают нефизические значения, много большие единицы.

Итак, задача состоит в том, чтобы выразить кроссинг-интегралы в уравнениях вида (9.5) через низшие парциальные волны, не используя плохо сходящихся разложений. Такой способ получения уравнений низкоэнергетического пион-пионного рассеяния был предложен Ефремовым и др. (1960). Он использует тот хорошо известный факт, что если записать обычные д. с. не для парциальной волны, а для всей амплитуды рассеяния и положить угол рассеяния равным нулю, т. е. рассмотреть рассеяние вперед, то кроссинг-интеграл выразится через физические значения амплитуды кроссинг-реакции (косинусы углов рассеяния кроссинг-реакций $c_{\pm} = \pm 1$). Аналогично этому кроссинг-интегралы для производных по углу от амплитуд рассеяния вперед или назад также выражаются через кроссинг-амплитуды и их производные при $c_{\pm} = \pm 1$.

Здесь возникает возможность более широкой постановки задачи, выходящей за рамки низкоэнергетического приближения. Она основана на том, что в качестве основных объектов рассмотрения можно выбрать не парциальные волны, а амплитуды рассеяния вперед и назад (и их производные). На этом пути кроссинг-симметрия удовлетворяется точно, а те или иные приближения вводятся в условие унитарности. Ясно, что в околопороговой области, где амплитуда рассеяния сводится к низшей парциальной волне, можно использовать формулу типа (9.2)

$$\text{Im } f(v, 1) = K(v)|f(v, 1)|^2, \quad v \leq 1. \quad (11.1)$$

В общем случае задача представления $\text{Im } f(v, 1)$ через амплитуду $f(v, 1)$ является достаточно сложной, однако в асимптотической области высоких энергий для ее приближенного решения можно воспользоваться моделями дифракционного рассеяния. Получаемая этим путем параметризация высокоэнергетических вкладов в дисперсионные

уравнения открывает принципиальную возможность установления связей между параметрами решений низкоэнергетических моделей и характеристиками высокоэнергетического рассеяния, имеющими четкий физический смысл.

Если же объектом рассмотрения считать парциальные волны, то унитарность в форме (9.2) не содержит приближений (в упругой области), а кроссинг-симметрия, взятая из рассеяния вперед, является хорошим приближением лишь в области, где малы отброшенные высшие парциальные волны.

В соответствии с общим планом изложения займемся сейчас изучением свойств низкоэнергетической дифференциальной аппроксимации на примере нейтральной модели. Если выразить низшие парциальные волны через значения f и ее производных по c в точках $c = \pm 1$, что можно сделать, например, интегрируя выражение

$$f_l(v) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l(c) f(v, c) dc \quad (11.2)$$

по частям, а затем воспользоваться д. с. для амплитуд рассеяния вперед и назад и их производных по c , то мы получим спектральные представления для f_l , кроссинг-интегралы которых будут содержать только физические значения косинусов кроссинг-реакций $c = \pm 1$. Соответствующие разложения Лежандра хорошо сходятся, вследствие чего их аппроксимация первыми парциальными волнами не вносит больших погрешностей.

11.2. Уравнения для s - и d -волн нейтральной модели. В самом простом варианте нейтральной модели, когда мы учитываем только s -волну,

$$f(v, c) \approx f_0(v) \approx f(v, 1) \approx f(v, -1),$$

получается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} f_0(v) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f_0(v')}{v' - v} dv' - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } f_0(-1 - v')}{v' - v} dv' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f_0(v')}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f_0(v')}{v' + v + 1} dv', \quad (11.3) \end{aligned}$$

отражающее, очевидно, свойство кроссинг-симметрии амплитуды рассеяния вперед:

$$f_0(v) = f_0^*(-1-v). \quad (11.4)$$

В следующем приближении, учитывающем d -волну,

$$f(v, c) = f_0(v) + 5P_2(c)f_2(v),$$

имеем

$$f(v, 1) = f_0(v) + 5f_2(v), \quad f'(v, 1) = 15f_2(v), \quad (11.5)$$

$$f_0(v) = f(v, 1) - \frac{1}{3}f'(v, 1), \quad f_2(v) = \frac{1}{15}f'(v, 1). \quad (11.6)$$

Мы не используем здесь $f(v, -1)$ и $f'(v, -1)$ ввиду очевидной симметрии задачи относительно $c \rightarrow -c$. Поэтому нам достаточно рассмотреть окрестность точки $c = +1$. В этой окрестности второй интеграл в спектральном представлении (10.1) представляет собой высокоэнергетический вклад, который мы отбросим, имея в виду, что он может дать лишь члены, полиномиальные по v , с коэффициентами, имеющими высокоэнергетическое происхождение. Такие члены во всяком случае могут быть представлены входящим в (9.5) полиномом. Итак, представляя (10.1) в виде

$$f(v, c) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} f(v', c)}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im} f(v', c_u)}{1 + v' + \frac{v}{2}(1+c)} dv', \quad (11.7)$$

где согласно (10.7)

$$c_u = \frac{2 + 3v' - c(2 + v')}{v'(1+c)},$$

с учетом того, что $c_u(c=1) = +1$ и $\left. \frac{\partial c_u}{\partial c} \right|_{c=+1} = -\frac{1+v'}{v'}$,

имеем

$$f(v, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(v', 1)}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(v', 1)}{1 + v + v'} dv',$$

$$f'(v, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f'(v', 1)}{v' - v} dv' - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{v' + 1}{v'(1 + v + v')} \operatorname{Im} f'(v', 1) dv' - \frac{v}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(v', 1)}{(1 + v + v')^2} dv'.$$

Комбинируя эти выражения с формулами (11.5) — (11.6), приходим к системе уравнений для f_0 и f_2 :

$$f_0(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_0(v')}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv'}{1 + v + v'} \times \\ \times \left[1 + \frac{v}{6(1 + v + v')} \right] [\operatorname{Im} f_0(v') + 5\operatorname{Im} f_2(v')] + \\ + \frac{10}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + v'}{v'(1 + v + v')} \operatorname{Im} f_2(v') dv', \quad (11.8a)$$

$$f_2(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_2(v')}{v' - v} dv' - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + v'}{v'(1 + v + v')} \operatorname{Im} f_2(v') dv' - \\ - \frac{v}{30\pi} \int_0^{\infty} \frac{dv'}{(1 + v + v')^2} [\operatorname{Im} f_0(v') + 5\operatorname{Im} f_2(v')]. \quad (11.8б)$$

Мы получили как уравнения самого простого приближения (11.3) (только f_0 -волна), так и уравнения следующего приближения (11.8) (f_0 - и f_2 -волны). Рассмотрим основные свойства этих уравнений и сравним их между собой.

Нетрудно убедиться в том, что уравнение для s -волны (11.3) допускает падающую логарифмическую асимптотику:

$$\operatorname{Re} f_0(v) \rightarrow \frac{\pi}{2 \ln v}, \quad \operatorname{Im} f_0(v) \rightarrow \frac{\pi^2}{4 \ln^2 v} \quad (11.9)$$

(см. также аналитическое решение этого уравнения в § 11.3). Поэтому уравнение для s -волны, записанное без вычитания в форме (11.3), имеет смысл. Из (11.3) следует также, что $\text{Re } f_0$ является положительной вне разрезов (при $-1 < \nu < 0$). Поэтому положительными оказываются как длина рассеяния

$$f_0(0) = a_0 > 0, \quad (11.10)$$

так и «перенормированная константа связи», которую удобно определить следующим образом:

$$\lambda = F(s = 2, u = 2, t = 0). \quad (11.11)$$

Ясно, что в s -волновом приближении

$$\lambda = f_1\left(-\frac{1}{2}\right) > 0. \quad (11.12)$$

Обратимся к системе (11.8). Из уравнения (11.8б) видно, что асимптотика f_2 определяется кроссинг-интегралом, содержащим f_0 , и имеет вид

$$\text{Re } f_2(\nu) \approx -\frac{\pi}{120 \ln^2 \nu}, \quad \text{Im } f_2(\nu) \sim \frac{1}{\ln^4 \nu}. \quad (11.13)$$

Вследствие этого член, содержащий $\text{Im } f_2$ в кроссинг-интеграле (11.8), при больших ν ведет себя как $\ln^{-3} \nu$ и не меняет асимптотики s -волны (11.9). Из (11.8) видно также, что свойства (11.10), (11.12) при этом не нарушаются.

Обратимся к пороговому поведению d -волны. На пороге при $\nu \approx 0$ функция $f_2(\nu)$ должна обращаться в нуль, как ν^2 . Уравнение (11.8б) дает обращение в нуль, как ν . Поэтому для обеспечения порогового поведения необходимо удовлетворить еще одному соотношению:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1+2\nu'}{\nu'^2(1+\nu')} \text{Im } f_2(\nu') d\nu' - \\ & - \frac{1}{30\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\nu'}{(1+\nu')^2} [\text{Im } f_0(\nu') + 5\text{Im } f_2(\nu')] = 0. \quad (11.14) \end{aligned}$$

Это соотношение представляет собой своеобразное «правило сумм», характерное для низкоэнергетических схем ДП, учитывающих высшие волны.

Таким образом, мы убедились, что программа, основанная на ДП: 1) приводит к уравнениям для низших волн с убывающими асимптотиками; 2) дает возможность последовательного учета высших волн, который не меняет основные свойства первого приближения, причем в асимптотической и пороговой областях вклады от d -волн являются малыми поправками к членам, содержащим s -волну.

Прежде чем исследовать реальный случай рассеяния заряженных пионов, рассмотрим более подробно уравнение (11.3), которое может быть решено методом Кастильехо — Далитца — Дайсона (1953) — методом КДД.

11.3. Решение нейтральной модели s -волнового рассеяния*). Уравнение (11.3) запишем с одним вычитанием:

$$\operatorname{Re} f_0(v) = \lambda + \frac{v + 1/2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_0(v') dv'}{v' + 1/2} \left(\frac{1}{v' - v} - \frac{1}{v' + v + 1} \right), \quad (11.15)$$

проведенным согласно (11.12) в точке $v = -1/2$.

Из формулы (11.15) видно, что предположение

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \operatorname{Im} f(v) = c > 0$$

приводит к логарифмическому росту реальной части и, следовательно, к противоречию. Поэтому $f(\infty) = 0$, и мы можем написать уравнение для $f(v)$ без вычитания:

$$f_0(v) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} f_0(v') \left(\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{v' + v + 1} \right) dv'.$$

Как уже отмечалось, из (11.3) также следует

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_0(v')}{v' + 1/2} dv' > 0. \quad (11.16)$$

Таким образом, уравнение без вычитания (11.3) является математически эквивалентным уравнению с вычитанием (11.15). Отсюда вытекает, что произвол в решении, связанный с параметром λ , не является следствием вычитания.

*) Изложение этого раздела следует работе Ефремова и др. (1961).

Введем новую переменную

$$\omega = (2\nu + 1)^2, \quad f_0(\nu) = B(\omega).$$

Уравнение (11.3) и условие унитарности (9.2) примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} B(\omega) &= K(\omega) |B(\omega)|^2, \\ K(\omega) &= \left(\frac{\sqrt{\omega} - 1}{\sqrt{\omega} + 1} \right)^{1/2} = K(\nu) \end{aligned}$$

и

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Im} B(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (11.17)$$

Уравнение (11.17) решается методом Кастильехо — Далитца — Дайсона (1953). Рассмотрим для этого функцию $B(z)$ в комплексной плоскости $z = \omega + iy$. Она обладает следующими свойствами: 1) аналитична в плоскости z с разрезом $[1, \infty)$, причем

$$B^*(z) = B(z^*), \quad \operatorname{Im} B(\omega + i0) = K(\omega) |B(\omega + i0)|^2;$$

2) является обобщенной R -функцией, т. е.

$$\operatorname{Im} B(z) = \lambda(z) \operatorname{Im} z,$$

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} K(\omega') \frac{|B(\omega')|^2}{|\omega' - z|^2} d\omega' > 0,$$

поэтому $B(\omega)$ не имеет нулей нигде, за исключением действительной оси и бесконечно удаленной точки; 3) при $\omega \leq 1$ функция $B(\omega) > 0$; 4) $B(z)$ может иметь любое количество изолированных нулей на отрезке $[1, \infty)$.

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \frac{1}{B(z)}. \quad (11.18)$$

$H(z)$ обладает свойствами: 1) аналитична в комплексной плоскости с разрезом $[1, \infty)$, причем $H^*(z) = H(z^*)$ и на разрезе $\operatorname{Im} H(\omega + i0) = -K(\omega)$; 2) является обобщенной R -функцией и, следовательно, не имеет нулей при $\operatorname{Im} z \neq 0$; 3) не имеет нигде полюсов, за исключением луча $[1, \infty)$, где возможно любое количество изолированных полюсов первого порядка (это следует из (2)), так как полюсы выс-

шего порядка не обладают свойствами R -функции; 4) не имеет нулей на действительной оси.

Отсюда можно написать общее выражение для $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{\lambda} - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(\omega') d\omega'}{\omega'(\omega' - z)} - cz - zR(z), \quad (11.19)$$

где

$$R(z) = \sum_n \frac{R_n}{\omega_n(\omega_n - z)}; \quad 1 < \omega_n < \infty. \quad (11.20)$$

Проверим свойство (2). Имеем из (11.19)

$$\operatorname{Im} H(z) = -\operatorname{Im} z \left\{ \lambda'(z) + c + \sum_n \frac{R_n}{|\omega_n - z|^2} \right\},$$

где

$$\lambda'(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(\omega') d\omega'}{|\omega' - z|^2} > 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$R_n \geq 0, \quad c \geq 0. \quad (11.21)$$

Проверим теперь свойство (4). $H(\omega)$ при $\omega < 1$ — монотонно убывающая функция, и, следовательно, для отсутствия у нее нулей на этом интервале достаточно, чтобы

$$\frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\pi} I(1) + c + R(1), \quad (11.22)$$

где

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \omega \int_1^{\infty} \frac{k(\omega') d\omega'}{\omega'(\omega' - \omega)} = \\ &= \pi - 2\sqrt{x}Q_0(\sqrt{x}) - \frac{2}{\sqrt{x}}Q_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x = \frac{\nu}{1+\nu}, \end{aligned} \quad (11.23)$$

а $Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ — функция Лежандра второго рода.

В результате получаем решение уравнения (11.17) в виде

$$B(\omega) = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\pi} I(\omega) - \lambda c \omega - \lambda \omega R(\omega)}. \quad (11.24)$$

Здесь $R(\omega)$ определена формулой (11.20), а константы λ , c подчинены условиям (11.21), (11.22). Ограничение (11.16) является следствием этих условий.

Перейдем к анализу полученного решения. Оно зависит от бесконечного набора параметров λ , c , ω_1 , R_1 , ω_2 , R_2 , ..., ω_n , R_n , ... Поэтому интегральные уравнения, полученные из д. с., условий унитарности и перекрестной симметрии, не приводят к однозначному описанию процесса рассеяния. Этот факт имеет принципиальное значение, хотя, конечно, и не является неожиданным. Д. с. отражают лишь весьма общие свойства квантовой теории поля, такие как причинность, инвариантность, унитарность, и не детализируют конкретного механизма (динамики) взаимодействия. Естественно, что полученные решения не дают однозначного динамического описания процесса.

11.4. Свойства адиабатического решения. Наиболее простым является однопараметрическое решение (полученное из (11.24) при $c = 0$, $R_n = 0$)

$$f_0(v) = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{\pi} J(v)}; \quad J(v) = I[(2v+1)^2]. \quad (11.25)$$

Это решение, будучи разложено в ряд по параметру λ , весьма хорошо аппроксимирует ряд теории возмущений для S -матрицы с лагранжианом

$$L(x) = \frac{4\pi}{3} \lambda \phi^4(x). \quad (11.26)$$

При этом, например (детали см. в работе Ефремова и др. (1961б)), член второго порядка в разложении (11.25) не отличается около порога ($v = 0$) от члена того же порядка теории возмущений с лагранжианом (11.26), а на пороге первого неупругого процесса при $v = 3$ это отличие составляет всего лишь 6%. Этот факт говорит в пользу гипотезы о возможности замкнутого описания области малых энергий.

Условие (11.22) дает $0 < \lambda < \lambda_{\max} = 2,75$. Таким образом, мы получаем, что параметр λ , являющийся аналогом «перенормированной константы взаимодействия», во-первых, является положительным (что соответствует

притяжению), а во-вторых, он ограничен сверху значением $\lambda_{\max} = 2,75$.

При $\lambda > \lambda_{\max}$ формула (11.25) приводит к появлению полюса $f_0(\nu)$ в области $\nu < 0$, что соответствует возникновению связанного состояния и противоречит исходному

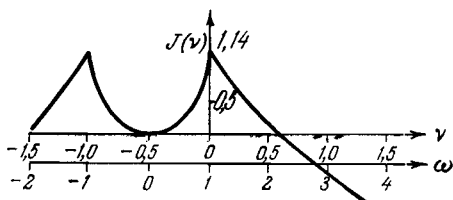


Рис. 24.

уравнению (11.3). Изменению параметра λ в интервале $(0, \lambda_{\max})$ соответствует изменение длины рассеяния $f_0(0) = a$ в интервале $0 < a < \infty$.

График функции $J(\nu)$ приведен на рис. 24.

Учитывая, что в области больших ν

$$I(\nu) \rightarrow -2 \ln \nu,$$

находим, что величина

$$K(\nu) \operatorname{ctg} \delta(\nu) = \operatorname{Re} \frac{1}{A(\nu)} = \frac{1}{\lambda} - \frac{I(\nu)}{\pi}$$

в физической области $\nu > 0$ не может обращаться в нуль, вследствие чего фаза $\delta(\nu)$ не может проходить через 90° . Однопараметрическое решение не содержит резонансов.

§ 12. Особенности КДД. Резонансы в нейтральной модели

Для того чтобы получить резонансное решение, необходимо функцию $c\omega + R(\omega)$ в (11.24) считать отличной от нуля. Поскольку эта функция зависит от бесконечного числа параметров R_n, ω_n , то в общем случае $B(\omega)$ имеет бесконечное число нулей и резонансов. Заметим, что такого рода неопределенности, которые мы будем называть КДД-неопределенностями, встречаются при решении

задачи, даже когда кроссинг-симметрия не столь проста (уравнение Чу — Манделъстама), а также когда условие унитарности усложнено путем включения неупругих членов (см., например, Фрай и Варнок (1963)). Общим для всех этих задач является тот факт, что на правом разрезе скачок функции пропорционален квадрату ее модуля. Возникает вопрос, нельзя ли с помощью каких-либо физических соображений уменьшить произвол, связанный с КДД-членами.

Для нерелятивистского случая ответ на этот вопрос был получен Дайсоном (1957).

12.1. Модель Дайсона. Физический смысл членов КДД. Дайсон рассмотрел следующий точно решаемый гамильтониан (одна из разновидностей модели Ли):

$$H = H_0 + H_1. \quad (12.1)$$

Гамильтониан H_0 диагонален относительно «свободных состояний» $|k\rangle$, которые описывают свободную рассеиваемую частицу с импульсом k и источник в основном состоянии:

$$H_0 |k\rangle = \omega_k |k\rangle, \quad \omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}. \quad (12.2)$$

Гамильтониан H_0 диагонален также и относительно заданного набора «связанных» состояний $|n\rangle$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ (т. е. набора возбужденных состояний рассеивателя):

$$H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (12.3)$$

Гамильтониан

$$H_1 = \int d^3r U(r) [Q A(r) + A^*(r) Q^*], \quad (12.4)$$

где $U(r)$ — сферически симметричная функция, описывающая положение и форму источника, Q — оператор, матричные элементы которого Q_n характеризуют вероятности перехода из основного состояния в связанное, $A(r)$ — оператор поглощения рассеиваемой частицы.

Решение модели Дайсона имеет вид

$$f(p) = e^{i\delta} \sin \delta = -p\omega_p u^2(p) [J(\omega_p + i\varepsilon) - R^{-1}(\omega_p)]^{-1}, \quad (12.5)$$

где $u(p)$ — фурье-образ $U(r)$,

$$J(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{k u^2(k) \omega_k d\omega_k}{\omega_k - \omega}, \quad (12.6)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \frac{|Q_n|^2}{E_n - \omega}. \quad (12.7)$$

Это решение удовлетворяет нелинейному сингулярному уравнению типа (11.17), если ω_n является нулем между полюсами $\frac{|Q_n|^2}{E_n - \omega}$ и $\frac{|Q_{n+1}|^2}{E_{n+1} - \omega}$. Положения резонансов E_r (или ω_r) следуют из решения уравнения

$$J(E_r) R(E_r) = 1, \quad E_r > \mu. \quad (12.8)$$

Если же $E_r < \mu$, то точка E_r соответствует полюсу в $f(p)$, или связанному состоянию в амплитуде рассеяния.

Таким образом, можно сделать вывод, что для любых R_n и ω_n можно придумать такую модель рассмотренного типа, что решение сингулярного уравнения с данной КДД-неопределенностью будет точным решением гамильтоновой задачи, и появление членов с s и $R_n \neq 0$ будет соответствовать введению возбужденного состояния источника. Это означает, что уравнения типа Чу — Лоу — дисперсионные уравнения рассеяния мезонов на фиксированном нуклоне — описывают только те свойства амплитуды рассеяния, которые не зависят от ряда свойств источника.

Такое толкование КДД-неопределенностей при рассеянии на фиксированном источнике является ключом к пониманию смысла КДД при релятивистском рассеянии (мезонов на мезонах). В этом случае можно представить, что существует непосредственное взаимодействие двух мезонов (π -мезонов с единичной массой) с третьим мезоном (σ -мезоном), имеющим неперенормированную массу μ_0 и константу связи g_0 . Тогда R_n и ω_n будут функциями μ_0 и g_0 . На примере релятивистского аналога модели Ли — модели Захариасена (1961) можно и в явном виде рассчитать эти

функции *). Положение резонанса $s_r = 2(\sqrt{\omega_r} + 1)$, определяемое решением уравнения

$$1 = \frac{\lambda}{\pi} I(\omega_r) + \frac{\lambda R_n}{\omega_n - \omega_r}, \quad (12.9)$$

дает квадрат массы σ -мезона, перенормированной прямым взаимодействием π -мезонов $\lambda\varphi^4$, а полуширина

$$\Gamma = \left\{ \frac{d}{dv} \left[\frac{1}{\pi} I(\omega) + \frac{R_i \omega}{\omega_i (\omega_i - \omega)} \right] \right\}^{-1} \Big|_{\omega=\omega_r} \quad (12.10)$$

есть квадрат константы связи g , перенормированной непосредственным λ -взаимодействием. Поскольку R_n и ω_n являются функциями μ_0 и g_0 , а затравочные массы и константы связи можно в широких пределах вводить произвольно, то и в этом случае в рамках дисперсионной теории мы не получаем критерия для выбора R_n и ω_n . При этом σ -мезон можно интерпретировать как нестабильную частицу, если $\omega_n > 1$. Нестабильная частица описывается полюсом на втором римановом листе, причем расстояние этого полюса от действительной оси характеризует время жизни этой частицы, а расстояние от мнимой оси — массу. Действительно, на втором римановом листе функция $H(z)$ имеет вид

$$H^{(2)} = H(z) + 2i \operatorname{Im} H(z). \quad (12.11)$$

Считая $z = x + iy$ и y малой величиной, получим

$$\operatorname{Re} H(z) = 0 \text{ в точке } \omega_r$$

и

$$\begin{aligned} y &= -K(\omega) \left[\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_r)^2} + c + \frac{R_n}{(\omega_n - \omega_r)^2} \right]^{-1} = \\ &= -4\omega_r K(\omega_r) \Gamma. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Между любыми двумя нулями функции $A(v)$ лежит резонанс, и так как $\Gamma_n > 0$ и $R_n > 0$, то $\delta(\infty) = n\pi$, где n — число КДД-нулей. Этот факт является отражением известной

*) См., например, работу Уипмена и Герстайна (1964).

теоремы Левинсона (1949), которая утверждает, что

$$\delta(\infty) = (n_1 - n_2)\pi,$$

где n_1 — число резонансов, n_2 — число связанных состояний.

12.2. Резонансные решения нейтральной модели. В заключение рассмотрим простейшее резонансное решение (11.24), когда $R_n = 0$, а $c \neq 0$. Это решение соответствует бесконечно удаленному нулю, $\omega_n \rightarrow \infty$, $R_n \rightarrow \infty$ и $R_n/\omega_n^2 \rightarrow c$:

$$A(v) = \lambda \left[1 - \frac{\lambda}{\pi} I(v) - \lambda c (2v + 1)^2 \right]^{-1}. \quad (12.13)$$

Решение (12.13) имеет резонанс в точке v_r , определяемой из уравнения

$$\frac{\lambda}{\pi} I(v_r) + \lambda c (2v_r + 1)^2 = 1;$$

эта точка всегда существует в силу положительности констант λ и c .

Рассмотрим случай малых λ . Выражая произведение λc через v_r и пренебрегая малыми по λ членами, получим

$$A(v) = \lambda \left[1 - \left(\frac{2v + 1}{2v_r + 1} \right)^2 - i\lambda K(v) \right]^{-1}. \quad (12.14)$$

В пределе $\lambda \rightarrow 0$ мнимая часть этого выражения аппроксимируется δ -функциями:

$$\text{Im } A(v) = \frac{\pi\lambda}{2} \left(v_r + \frac{1}{2} \right) \{ \delta(v - v_r) - \delta(v + v_r + 1) \}, \quad (12.15)$$

а действительная часть — полюсными членами:

$$\text{Re } A(v) = \frac{\lambda}{2} \left(v_r + \frac{1}{2} \right) \left\{ \frac{1}{v_r - v} + \frac{1}{v + v_r + 1} \right\}. \quad (12.16)$$

Таким образом, при фиксированном v_r ширина резонанса стремится к нулю пропорционально λ , и при $\lambda = 0$ мы получаем решение, отличное от нуля в одной точке $v = v_r$. В этой точке, положение которой является произ-

вольным, фаза рассеяния скачком переходит от 0 к π (рис. 25). Поэтому при выключенном взаимодействии, когда $\lambda \rightarrow 0$, решение оказывается вырожденным.

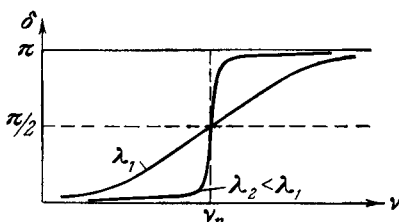


Рис. 25.

Как мы увидим ниже, все установленные сейчас существенные черты нейтральной модели оказываются присутствующими и реальному случаю заряженных мезонов.

РАССЕЯНИЕ ПИОНОВ*)

§ 13. Уравнения $\pi\pi$ -рассеяния. Общие свойства

13.1. Кроссинг-симметрия и уравнения. Поскольку амплитуда пион-пионного рассеяния имеет изотопическую структуру и в каждом канале рассеяния существуют три амплитуды с изотопическими спинами 0, 1 и 2, то мы в соответствии с нашей программой ограничимся s -волнами в амплитудах с изоспинами 0 и 2 и p -волной в амплитуде с изоспином 1:

$$\left. \begin{aligned} A_0(v) &\approx A^{(0)}(s, 4-s, 0) = A^{(0)}(s, 0, 4-s), \\ 3A_1(v) &\approx A^{(1)}(s, 4-s, 0) = -A^{(1)}(s, 0, 4-s), \\ A_2(v) &\approx A^{(2)}(s, 4-s, 0) = A^{(2)}(s, 0, 4-s). \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

Свойства кроссинг-симметрии для изотопических амплитуд рассеяния вперед могут быть получены из формул (7.40) и (7.41). Учитывая коэффициент 3 в определении $A_1(v)$, получаем из них

$$A_i(-1-v) = \sum_k b_{ik} A_k(v), \quad (13.2)$$

где матрица кроссинг-симметрии для парциальных волн

$$b_{ik} = \begin{pmatrix} 1/3 & -3 & 5/3 \\ -1/9 & 1/2 & 5/18 \\ 1/3 & 3/2 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

*) Изложение этой главы основано на работах: Ефремов и др. (1961 б) — §§ 13, 14; Серебряков, Ширков (1962 а, б) — § 15; Серебряков, Ширков (1962 в), Лукин, Серебряков (1964) — § 16; Ефремов, Ширков (1962) — § 17. См. также обзоры Серебряков, Ширков (1965), Ширков (1965).

может быть также представлена в виде

$$b_{ik} = \delta_{ik} + l_i n_k, \quad \left. \begin{aligned} l_0 &= -\frac{1}{3}, & l_1 &= -\frac{1}{18}, & l_2 &= \frac{1}{6}, \\ n_0 &= 2, & n_1 &= 9, & n_2 &= -5. \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

Знание свойств кроссинг-симметрии позволяет написать систему уравнений для парциальных волн. Ее удобно исследовать, используя симметричную переменную $z = 2v + 1$, введение которой дает

$$A_i(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_i(z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{f_i(z')}{z' - z} dz', \quad (13.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } A_i(z) &= K(z) |A_i(z)|^2, \\ K(z) &= \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \quad \text{при } z > 1, \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

а также

$$f_i(z) = - \sum_k b_{ik} \text{Im } A_i(-z). \quad (13.6)$$

Дополняя эти соотношения пороковым условием для p -волны

$$\begin{aligned} A_1(1) &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_1(z)}{z-1} dz - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{1}{9} \text{Im } A_0(z) - \frac{1}{2} \text{Im } A_1(z) - \frac{5}{18} \text{Im } A_2(z) \right] \frac{dz}{z+1} = 0, \end{aligned} \quad (13.7)$$

получаем полную формулировку задачи.

Система (13.4) — (13.7) представляет собой систему сингулярных нелинейных уравнений. Мы записали эту систему без вычитания и в дальнейшем покажем, что она допускает достаточно быстро убывающие на бесконечности решения. Однако для ее общего исследования удобно записать интегралы (13.4) в вычтенном виде. Согласно (13.5) функции $A_i(z)$ ограничены, поэтому достаточно сделать одно вычитание. Это вычитание для s -волн прове-

дем в точке $z = 0$ ($s = u = 2, t = 0$). Полагая $A(2, 2, 0) = C(2, 2, 0) = \lambda$, получим

$$A_s(z) = \gamma_s \lambda + 3A_1(0) + \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\text{Im } A_s(z')}{z' - z} - \sum_k b_{sk} \frac{\text{Im } A_k(z')}{z' + z} \right] \frac{dz'}{z'}, \quad (13.8)$$

$$s = 0; 2, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_2 = 2.$$

Параметр λ связан с перенормированной константой связи пион-пионного рассеяния. Вычитание для p -волны сделаем на пороге при $z = 1$. С учетом (13.7) получаем

$$A_1(z) = \frac{z-1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\text{Im } A_1(z')}{(z'-z)(z'-1)} - \sum_k b_{1k} \frac{\text{Im } A_k(z')}{(z'+z)(z'+1)} \right] dz'. \quad (13.8a)$$

13.2. Некоторые общие свойства решений. Из этих уравнений вытекает, что предположение $\text{Im } A_i(\infty) = c_i > 0$ приводит к логарифмическому росту $\text{Re } A_i$ при $z \rightarrow \infty$. Поэтому

$$A_i(\infty) = 0. \quad (13.9)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том что уравнения (13.4) или (13.8) допускают следующие виды асимптотик при $z \rightarrow \infty$:

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{d_i}{\ln z}, \\ \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{e_i}{z}, \\ \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{f_i}{z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.10a)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{e_i}{z}, \\ \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{f_i}{z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.10б)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } A_i(z) &\approx \frac{f_i}{z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13.10в)$$

Для того чтобы показать, что более сильное степенное убывание невозможно, представим (13.4) в виде

$$A_i(z) = G_i(z) + l_i \Phi(z);$$

здесь

$$G_i(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\text{Im } A_i(z')}{z'^2 - z^2} dz'^2$$

и

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \sum_k n_k \operatorname{Im} A_k(z') \frac{dz'}{z' + z}.$$

В пределе $z \rightarrow \infty$

$$G_i(z) \approx -\frac{g_i}{z^2}, \quad g_i > 0.$$

Для убывания более быстрого, чем z^{-2} , необходимо, чтобы

$$\Phi(z) \approx \frac{h}{z^2}$$

и чтобы $l_i \Phi$ компенсировали отрицательные вклады g_i во всех трех волнах. Это невозможно из-за того, что l_i разных знаков. Отсюда видно также, что асимптотика (в) может осуществляться лишь при дополнительном условии

$$\sum_k n_k \int \operatorname{Im} A_k(z') dz' = 0.$$

Подставляя асимптотику (а) в уравнения (13.4), с помощью условия унитарности (13.5) получаем для d_i систему уравнений

$$\pi d_i = 2d_i^2 + l_i \sum_k n_k d_k^2,$$

которая имеет единственное вещественное решение

$$d_0 = 2,13; \quad d_1 = -0,188; \quad d_2 = 0,640. \quad (13.11)$$

Коэффициенты e_i асимптотики (б) определяются из условия кроссинг-симметрии:

$$e_i = l_i c. \quad (13.12)$$

Если ограничиться решениями, имеющими асимптотику (13.10), то исследуемые уравнения (13.4) имеют смысл без вычитания, причем условие (13.7) дает

$$A_1(1) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} dz' \left\{ \frac{\operatorname{Im} A_1(z')}{z' - 1} + \sum_k b_{1k} \frac{\operatorname{Im} A_k(z')}{z' + 1} \right\} = 0. \quad (13.13)$$

В этом случае параметр λ выражается в явном виде через интегралы от мнимых частей парциальных амплитуд:

$$\lambda = \frac{1}{6\pi} \int_1^{\infty} \left[4 \operatorname{Im} A_0(z') - 4 \operatorname{Im} A_2(z') - \sum_k n_k \operatorname{Im} A_k(z') \right] \frac{dz'}{z'}. \quad (13.14)$$

Из (13.4) вытекает, что величины $A_2(1)$ и $A_0(1) + 3A_1(1)$ положительны. С учетом (13.13) это приводит к важному выводу о положительности длин рассеяния z -волн:

$$a_s = A_s(1) > 0. \quad (13.15)$$

Отметим, что этот факт, вообще говоря, не зависит от двухчастичного приближения и опирается лишь на предположение о справедливости невычтенных д. с. для рассеяния вперед.

Аналогичная оценка для «длины рассеяния» p -волны может быть сделана лишь при некоторых правдоподобных предположениях о характере решения. Так, считая, что кроссинг-интеграл для p -волны в окрестности порога может быть аппроксимирован выражением

$$\sum_k \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} b_{1k} \operatorname{Im} A_k(z') \frac{dz'}{z' + z} = - \frac{r_0}{z + z_0}, \quad r_0 > 0,$$

получаем

$$a_1 = 2 \left. \frac{dA_1(z')}{dz'} \right|_{z'=1} > 0. \quad (13.16)$$

Асимптотическое поведение решений (13.10), а также положительность длин рассеяния (13.15) и (13.16) позволяют сделать заключение о четности суммы нулей и резонансов для каждой из парциальных амплитуд (табл. 2).

В отличие от нейтральной модели, систему (13.4) — (13.7) не удастся решить точно в аналитическом виде. Однако ее можно исследовать различными приближенными методами. При этом оказывается, что аналогично нейтральному случаю существуют решения, зависящие от различного числа параметров. Простейшее решение зависит от одного параметра λ , введенного в (13.8).¹ Это

Таблица 2

Парциальная амплитуда	Асимптотическое поведение		
	(13.10a)	(13.10б)	
		$c > 0$	$c < 0$
A_0	четн.	нечетн.	четн.
A_1	нечетн.	нечетн.	четн.
A_2	четн.	четн.	нечетн.

решение, подобно тому как это имело место для нейтральной модели (§ 11.4), находится в близком соответствии с рядом теории возмущений, основанной на лагранжиане

$$L(x) = 4\pi\lambda : (\varphi_\sigma(x) \varphi_\sigma(x))^{2:}.$$

Поэтому в первую очередь мы исследуем именно его.

§ 14. Адиабатическая ветвь решения

14.1. Унитарное представление решений. Решить систему уравнений (13.4) — (13.7) — означает найти три функции комплексного переменного $A_0(z)$, $A_1(z)$, $A_2(z)$, обладающие следующими свойствами:

1) они аналитичны в комплексной плоскости z , разрезанной вдоль линий $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$;

2) значения этих функций на левом разрезе должны выражаться через линейную комбинацию их значений на правом разрезе с помощью условия кроссинг-симметрии, а именно:

$$A_i(-z - i0) = \sum_k b_{ik} A_k(z + i0); \quad (14.1)$$

3) они должны быть действительными функциями комплексного аргумента, т. е. $A_i^*(z) = A_i(z^*)$. Поэтому величины $2\text{Im} A_i(z)$ на действительной оси являются скачками функций $A_i(z)$ на разрезе. Краевая задача на разрезе $[1, \infty)$ ставится следующим образом (условие унитарности (13.5)):

$$\text{Im} A_i(z + i0) = K(z) |A_i(z)|^2 \quad \text{при } z \geq 1; \quad (14.2)$$

4) функция $A_1(z)$ удовлетворяет условию исчезновения p -волны на пороге (13.7).

Таким образом, в силу (3) мы имеем нелинейную краевую задачу. Очевидно, функции, удовлетворяющие условиям (1) — (4), автоматически будут являться решениями системы (13.4) — (13.7).

Представим функции $A_i(z)$ в следующем виде:

$$A_i(z) = \frac{1}{\Phi_i(z) - I(z) - I_i(z)}. \quad (14.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I(z) &= \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') dz'}{z'(z' - z - i\varepsilon)} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{4} - \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \ln \left[\sqrt{\frac{z-1}{2}} + \sqrt{\frac{z+1}{2}} \right] \right\} + \\ &\quad + iK(z) \quad \text{при } z \geq 1 \end{aligned} \quad (14.4)$$

имеет только правый разрез. Функции $I_i(z)$ имеют только левый разрез, а $\Phi_i(z)$ — мероморфная функция. Функция $I(z)$ выбрана так, чтобы автоматически обеспечить условие унитарности (14.2). Представления (14.3) мы будем называть унитарными представлениями решений $A_i(z)$. Задача теперь сводится к такому выбору функций $\Phi_i(z)$ и $I_i(z)$, чтобы выполнялось условие кроссинг-симметрии (2). Кроме того, Φ_i, I_i должны быть такими, чтобы функции $A_i(z)$ не имели никаких других особенностей, кроме разрезов, перечисленных в условии (1).

Мы будем искать $\Phi_i(z)$ и $I_i(z)$ в виде разложений по степеням параметра λ , определенного в (13.8):

$$\lambda = \frac{1}{3} [A_0(0) - A_2(0)]. \quad (14.5)$$

Разложения функций $\Phi_i(z)$ могут содержать и отрицательные степени λ . По аналогии с нейтральной моделью считаем, что амплитуды рассеяния $A_i(z)$ можно представить в виде

$$A_i(z) = \frac{\lambda}{\Phi_i(z, \lambda) - \lambda I(z) - \lambda I_i(\lambda, z)}. \quad (14.6)$$

Это выражение также является унитарным представлением для A_i . В каждом порядке по λ будем требовать удовлетворения условия кроссинг-симметрии (2) и порогового условия (4). Задание функционального вида $\Phi_i(z)$ будет фиксировать ту или иную ветвь решений.

14.2. Адиабатическая ветвь. Рассмотрим простейшую ветвь решений — адиабатические решения, когда $\Phi_i(z, \lambda)$ суть постоянные величины, не зависящие от z . Так как при $z \rightarrow \infty$ функция $I(z) \rightarrow -\ln z$ и, следовательно, становится больше любой константы, то мы сначала ограничимся областью $\lambda \ln z \ll 1$, т. е. $|\lambda I(z)| \ll \ll 1$. В этой области в первом порядке по λ , пользуясь условием (14.1), (14.5) и пороговым условием для p -волны, получим

$$A_0 = 5\lambda, \quad A_2 = 2\lambda, \quad A_1 = 0. \quad (14.7)$$

Ясно, что величину λ следует взять положительной, так как из (14.1) следует положительность длин рассеяния.

Перейдем к следующему порядку по λ и представим s -волны в виде

$$A_s = \frac{\lambda}{\frac{1}{\gamma_s} - \lambda\beta_s - \lambda I(z) - \lambda I_s(z)}, \quad (14.8)$$

$$s = 0; 2, \quad \gamma_0 = 5, \quad \gamma_2 = 2.$$

С p -волной дело обстоит несколько сложнее. Поскольку в первом порядке по λ амплитуда A_1 — тождественный нуль, то это означает, что в представлении (14.6) для A_1 функция $\Phi_1(z, \lambda)$ имеет полюс первого порядка по λ , а функция $I_1(z, \lambda)$ — полюс второго порядка по λ . Иными словами, при $\lambda \rightarrow 0$

$$\Phi_1 = \frac{\tilde{\Phi}}{\lambda}, \quad I_1(z, \lambda) = \frac{\tilde{I}_1(z)}{\lambda^2}.$$

Поэтому амплитуду A_1 можно представить в виде

$$A_1 = \frac{\lambda^2}{\tilde{\Phi}_1 - \tilde{I}_1(z) - \lambda^2 I(z)}.$$

В области $|\lambda I(z)| \ll 1$ во втором порядке по λ , делая переобозначение, получаем

$$A_1(z) = \lambda^2 [\beta_1 + h_1(z)], \quad (14.9)$$

где функция $h_1(z)$ имеет только правый разрез и обращается в нуль в точке $z = 0$. Постоянная β_1 определяется пороговым условием

$$\beta_1 = -h_1(1).$$

Во втором порядке по λ условия кроссинг-симметрии (14.1) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\gamma_0\beta_0 + 9\beta_1 - 5\gamma_2^2\beta_2 &= 0, \\ \gamma_2 I_2(-z) &= I(z) [\gamma_2^2 + l_2^2(2\gamma_0^2 - 5\gamma_2^2)], \\ h_1(-z) &= I(z) l_1(2\gamma_0^2 - 5\gamma_2^2), \end{aligned}$$

где l_i определены в (13.3). Условие (14.5) имеет вид

$$\beta_0\gamma_0^2 - \beta_2\gamma_2^2 - \frac{1}{2}(2\gamma_0^2\beta_0 + 9\beta_1 - 5\gamma_2^2\beta_2) = 0.$$

Решая эту алгебраическую систему, находим

$$\left. \begin{aligned} I_0(z) &= \frac{3}{5} I(-z), \\ I_2(z) &= \frac{9}{4} I(-z), \\ h_1(z) &= -\frac{5}{3} I(-z), \end{aligned} \right\} \quad (14.10)$$

$$\beta_2 = -\frac{3}{4}\beta_1, \quad \beta_0 = -\frac{3}{25}\beta_1, \quad \beta_1 = -0,215.$$

Функция $I(z)$ определена выражением (14.4).

Таким же способом можно получить члены разложения и в следующих порядках по λ . В области $\lambda \ln z \ll 1$ это решение численно близко к решению Чу — Мандельштама — Нойеса (1960). Здесь доминируют s -волны, p -волна мала ($\sim \lambda^2$).

Перейдем теперь к области больших z . Нетрудно понять, что в любом порядке разложения по λ фигурируют интегралы, имеющие только логарифмические асимптотики, причем подынтегральные выражения в $I_i(\lambda, z)$ при больших z разлагаются по целым степеням $\lambda \ln z$. Поэтому при $z \rightarrow \infty$

$$\text{Im } I_i(z, \lambda) \approx \lambda \pi \frac{dI_i(\lambda, z)}{d(\lambda \ln z)}.$$

Обозначая $\lambda \ln z = x$ и $L_i(x) = -\lambda I(z) - \lambda I_i(\lambda, z)$, получаем систему асимптотических дифференциальных уравнений для парциальных волн:

$$\frac{\lambda}{L_i(x) - i \left(\pi \frac{dL_i}{dx} - 1 \right) \lambda} = \frac{\lambda}{L_i(x) - i\lambda} + l_i \frac{n_k \lambda}{L_k(x) - i\lambda}, \quad (14.11)$$

где l_i и n_k определены в (13.3). Здесь мы воспользовались унитарным представлением (14.6) для всех парциальных волн и пренебрегли Φ_i в области $z \rightarrow \infty$. Система дифференциальных уравнений (14.11) имеет асимптотическое решение

$$L_i(x) \approx \frac{x}{d_i}, \quad (14.12)$$

где d_i определены в (13.11).

Таким образом, доказано, что адиабатическая ветвь решений имеет падающую асимптотику (13.10а), вследствие чего низкоэнергетические свойства решений практически не зависят от высокоэнергетического их поведения.

Интересно отметить, что асимптотики s -волн (14.8) численно не сильно отличаются от точных асимптотик (13.11). Поэтому для s -волн решению во втором порядке по λ можно верить в широких пределах изменения λ и z . Поскольку в s -волнах мы не предполагали связанных состояний, то величина λ не может быть сколь угодно велика. При больших положительных λ знаменатель функции $A_0(z)$ может обратиться в нуль в интервале $0 < z < 1$, что дает полюс в $A_0(z)$, т. е. связанное состояние.

Это связанное состояние возникает у порога в окрестности точки $z = 1$. Поэтому интервал значений λ , при которых этого не происходит, определяется из (14.8) в виде

$$\frac{1}{\lambda \gamma_0} > \beta_0 + I(1) + I_0(1).$$

Это дает

$$\lambda < \lambda_{\max} = \frac{\gamma_s}{\beta_s + I(1) + I_s(1)} \approx 0,4. \quad (14.13)$$

Из-за малости коэффициента β_0 и функции $I_0(z)$ s -волну с изоспином 0 в низкоэнергетической области

($\lambda < \lambda_{\max}$) в достаточно хорошем приближении можно описать формулой

$$A_0 \approx \frac{\lambda}{\frac{1}{5} - \lambda I(z)}. \quad (14.14)$$

Величина $K(z) \operatorname{ctg} \delta_0(z)$ является, так же как и в квантовомеханическом случае, аналитической функцией от z , в данном случае — в круге с центром в $z = 1$ и радиусом, равным 2. Действительно,

$$\begin{aligned} K(z) \operatorname{ctg} \delta_0(z) &= \frac{1}{5\lambda} - 0,5 - \frac{z-1}{\pi} \mathcal{P} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{z'-1}{z'+1}}}{(z'-1)(z'-z)} dz' = \\ &= \frac{1}{5\lambda} - 0,5 - \frac{z-1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{\frac{z'-1}{z'+1}} dz'}{(z'-1)(z'-z-i\epsilon)} + i \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}. \end{aligned}$$

Функция $f(z)$, равная $i \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}$ на верхнем берегу правого разреза, имеет спектральное представление

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{z'-1}{z'+1}} \frac{dz'}{(z'-1)(z'-z)} - \\ &\quad - \frac{z-1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \sqrt{\frac{1-z'}{-1-z'}} \frac{dz'}{(z'-1)(z'-z)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K(z) \operatorname{ctg} \delta_0(z) &\approx \frac{1}{5\lambda} - 0,5 - \\ &\quad - \frac{z-1}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{z'+1}{z'-1}} \frac{dz'}{(z'+1)(z'+z)}. \end{aligned}$$

Разлагая это выражение по степеням $z-1 = 2 \frac{q^2}{\mu^2}$, получим формулы «приближения эффективного радиуса»:

$$\left. \begin{aligned} K(z) \operatorname{ctg} \delta_0(z) &\approx \frac{1}{5\lambda} - 0,5 - \frac{2q^2}{\pi\mu^2}, \\ r_{\text{эфф}} &\approx \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (14.15)$$

14.3. Сравнение с теорией возмущений. В заключение сравним решение (14.9) с теорией возмущения для лагранжиана $\frac{4\pi}{3} \lambda(\varphi_\sigma\varphi_\sigma)^2$. Для этого следует просуммировать прямые диаграммы из s -канала, изображенные на рис. 26,

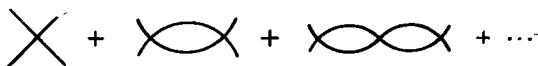


Рис. 26.

и кроссинг-диаграммы из t - и u -каналов, изображенные на рис. 27.

Выделив s - и p -фазы, получим (Окубо (1960))

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \operatorname{ctg} \delta_s^I &= \frac{1}{a_I} - \\ &- \frac{2}{\pi} \left\{ \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{\nu}{\nu+1}} \ln(\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu+1}) \right\} + \\ &+ \frac{1}{\pi} b_I \left\{ H(\nu) - \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$b_0 = \frac{12}{5}, \quad b_2 = 9, \quad a_0 = 5\lambda, \quad a_2 = 2\lambda,$$

$$H(\nu) = \frac{1}{2\nu} [\ln(\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu+1}) + \sqrt{\nu(\nu+1)}]^2 - \frac{1}{2}(\nu+2)$$

и

$$\sqrt{\frac{\nu^3}{\nu+1}} \operatorname{ctg} \delta_p = \frac{1}{a_1}, \quad a_1 = \frac{10}{9\pi} \lambda^2 M(\nu),$$

$$\begin{aligned} M(\nu) &= 9 \left[\frac{\nu-1}{2\nu^2} - \frac{2\nu+1}{2\nu^3} \ln^2(\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\nu(\nu+1)}}{\nu^3} \ln(\sqrt{\nu} + \sqrt{\nu+1}) \right]. \end{aligned}$$

При малых ν

$$\left. \begin{aligned} H(\nu) &= 1 + \frac{1}{6}\nu + O(\nu^2), \\ M(\nu) &= 1 - \frac{2}{5}\nu + O(\nu^2). \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

Если разложить по ν ($\nu = \frac{z-1}{2}$) решение (14.9), то с точностью до членов ν^2 и нормировки λ (здесь λ —значение амплитуды в симметричной точке $s = t = u = \frac{4}{3}$) получаются одинаковые члены разложения. Таким образом, низкоэнергетическая часть адиабатической ветви соответствует низкоэнергетической части решений с лагранжианом взаимодействия $\frac{4\pi}{3} \lambda (\varphi_c \varphi_c)^2$.

Напомним, что в наших исходных уравнениях использована приближенная кроссинг-симметрия, взятая из рассеяния вперед. Проведенное сравнение показывает, что нарушение кроссинг-симметрии в области низких энергий не приводит к заметным отклонениям от амплитуды рассеяния, вычисленной по теории возмущений, которая обладает точной кроссинг-симметрией. Этот результат является вполне естественным, поскольку ошибка связана лишь с высшими парциальными волнами, которые в рассматриваемом приближении являются малыми. Разумеется, полученное однопараметрическое адиабатическое решение не представляет интереса с физической точки зрения, поскольку оно не содержит резонанса в p -волне. Для получения последнего необходимо обратиться к более сложным решениям, содержащим большее число параметров.

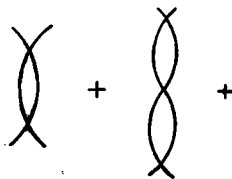


Рис. 27.

§ 15. p -резонансное решение при малых λ

15.1. Дельтаобразное приближение. Для рассмотрения других решений системы (13.4) — (13.7) следует по-иному выбрать вид мероморфных функций $\Phi_i(z)$ в унитарном представлении решений (14.3), т. е. ввести в них члены, соответствующие КДД-полюсам в решении нейтральной модели (11.24). Мы ограничимся случаем малых λ . Пусть при этом $\Phi_i(z, \lambda)$ для всех i имеют вид

$$\Phi_i(z, \lambda) \approx \frac{f_i(z)}{\lambda}. \quad (15.1)$$

Тогда при $z \geq 1$

$$A_i(z) \approx \frac{\lambda}{f_i(z) - i\lambda K(z)}, \quad (15.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} A_i(z) &\approx \frac{\lambda}{f_i(z)}, \\ \operatorname{Im} A_i(z) &\approx \frac{\lambda^2 K(z)}{f_i^2(z) + \lambda^2 K^2(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

В знаменателе (15.3) оставлен член $\lambda^2 K^2(z)$, поскольку он оказывается важным при интегрировании $\operatorname{Im} A_i$ в окрестности нулей z_i функции $f_i(z)$. Заметим, что резонансы в волнах A_i соответствуют простым нулям функций f_i .

Воспользовавшись известным представлением δ -функции:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2},$$

можно аппроксимировать мнимую часть (15.3) в окрестности резонансов z_i выражением

$$\operatorname{Im} A_i(z) \approx \pi |\lambda \alpha_i| \delta(z - z_i), \quad (15.4)$$

где

$$\alpha_i = + \frac{1}{|f'_i(z)|_{z=z_i}}.$$

Для того чтобы формулы (15.2) и (15.4) были совместны с аналитическими свойствами амплитуд $A_i(z)$, выражаемыми интегральными уравнениями (13.4), необходимо считать $\lambda \alpha_i > 0$. Это условие эквивалентно требованию положительности производной фазы по энергии

$$\left. \frac{d\delta_i(z)}{dz} \right|_{z=z_i} > 0$$

в окрестности резонанса, что соответствует притяжению. Если полуширину резонанса Γ определить формулой

$$A_i(v) = \frac{\Gamma_i}{v_i - v - i\Gamma_i K(v_i)}, \quad (15.5)$$

то величина $\lambda\alpha_i$ будет связана с Γ_i соотношением

$$\Gamma_i = \frac{\lambda\alpha_i}{2}.$$

Построение функций с заданным числом нулей может быть выполнено различными путями. Наиболее общим является построение действительных частей парциальных амплитуд по интегралам от мнимых частей с помощью интегральных уравнений. В рассматриваемом случае удобнее воспользоваться условиями кроссинг-симметрии для реальных частей (14.1).

Подчеркнем, что пренебрежение членами $\lambda I_i(z)$ по сравнению с $f_i(z)$ возможно лишь в случае степенной асимптотики, когда при больших z функции f_i возрастают по крайней мере линейно. При логарифмической асимптотике, когда f_i стремится к константе, а I_i — к логарифму, член λI_i оказывается в области больших z основным, и пренебречь им нельзя. Поэтому описанная процедура определения решений в пределе $\lambda \rightarrow 0$ предназначена исключительно для степенных ветвей, и ее применение к логарифмическим решениям требует соответствующей модификации.

Ограничимся рассмотрением случая, когда каждая из парциальных волн проходит не более чем через один резонанс. Наиболее общий вид $\text{Re } A_i$, удовлетворяющих условиям кроссинг-симметрии, в этом случае будет

$$\text{Re } A_i / \lambda = \frac{\alpha_i}{z_i - z} + \frac{\alpha_i}{z_i + z} + I_i \left(\frac{2\alpha_0}{z_0 + z} + \frac{9\alpha_1}{z_1 + z} - \frac{5\alpha_2}{z_2 + z} \right). \quad (15.6)$$

Формулы (15.6) содержат семь параметров z_i , α_i и λ . Эти параметры подчинены следующим условиям: во-первых, $z_i > 1$; во-вторых, благодаря пороговому условию для p -волны

$$\frac{A_1(1)}{\lambda} = \frac{2\alpha_1 z_1}{z_1^2 - 1} - \frac{1}{18} \left(\frac{2\alpha_0}{z_0 + 1} + \frac{9\alpha_1}{z_1 + 1} - \frac{5\alpha_2}{z_2 + 1} \right) = 0 \quad (15.7)$$

и условию определения λ (14.5)

$$\frac{2\alpha_0}{z_0} - \frac{9\alpha_1}{z_1} + \frac{\alpha_2}{z_2} = 6 \quad (15.8)$$

число независимых параметров оказывается равным пяти.

Из условия (15.7) видно, что не существует решений рассматриваемого типа с резонансом лишь в одной из волн (т. е. когда два из трех коэффициентов α_i обращаются в нуль). Из (15.7) следует также, что необходим резонанс в волне A_0 . Поэтому существуют две «двухрезонансные» ветви:

а) с резонансами в волнах A_0 и A_1 ,

б) с резонансами в волнах A_0 и A_2 .

15.2. «Двухрезонансное» решение с p -мезоном. Рассмотрим ветвь (а). Эта ветвь зависит от трех параметров λ , z_0 и z_1 . Ширины резонансов выражаются в виде

$$\frac{\Gamma_0}{\lambda} = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{3(1+z_0)(1+3z_1)}{T(z_0, z_1)}, \quad (15.9)$$

$$\frac{\Gamma_1}{\lambda} = \frac{\alpha_1}{2} = \frac{z_1^2 - 1}{3T(z_0, z_1)}, \quad (15.10)$$

где

$$z_0 z_1 T(z_0, z_1) = z_1 + 3z_1^2 + z_0(1 + z_1 + 2z_1^2).$$

Из этих формул видно, что Γ_i могут принимать только положительные значения. Длины рассеяния имеют вид

$$\frac{a_0}{\lambda} = \frac{2}{z_0 - 1} \frac{3z_0 + 4z_1 + 5z_0 z_1}{T(z_0, z_1)}, \quad (15.11)$$

$$\frac{a_2}{\lambda} = \frac{4z_1}{T(z_0, z_1)}. \quad (15.12)$$

Определяя длину рассеяния p -волны a_1 в виде

$$a_1 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{A_1(v)}{v},$$

получаем также

$$\frac{a_1}{\lambda} = \frac{2}{3} \frac{z_0(z_1^2 + 6z_1 + 1) + z_1(3 + 2z_1 + 3z_1^2)}{(z_1 + 1)(z_1^2 - 1)T(z_0, z_1)}. \quad (15.13)$$

Для численных оценок зафиксируем положение резонанса в p -волне.

Результаты вычисления величин α_0/λ , α_1/λ , α_2/λ , Γ_0/λ , Γ_1/λ по этим формулам слабо зависят от положения резонанса (табл. 3).

Таблица 3

z_0	z_1	$\frac{\alpha_0}{\lambda}$	$\frac{\alpha_1}{\lambda}$	$\frac{\alpha_2}{\lambda}$	$\frac{\Gamma_0}{\lambda}$	$\frac{\Gamma_0}{z_0\lambda}$	$\frac{\Gamma_1}{\lambda}$	$\frac{\Gamma_1}{z_1\lambda}$	$\frac{\Gamma_1}{v_1\lambda}$
6	13,9	5,46	0,140	1,54	12,45	2,08	1,78	0,128	0,278
10	13,9	5,22	0,107	1,67	21,3	2,13	1,93	0,139	0,299
13,9	13,9	5,16	0,090	1,74	29,8	2,14	2,00	0,144	0,310
20	13,9	5,11	0,075	1,79	43,4	2,17	2,07	0,149	0,311
∞	13,9	5,02	0,033	1,92	∞	2,21	2,22	0,159	0,344

Значение $z_1 = 13,9$ ($v_1 = 6,45$) соответствует массе ρ -мезона $m_\rho = 765$ Мэв. Энергетические зависимости фаз

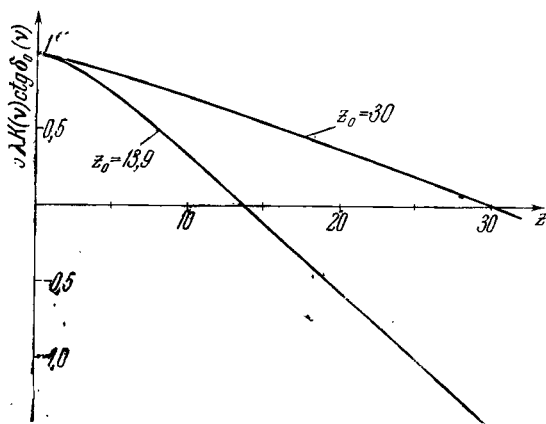


Рис. 28.

рассеяния для случаев $z_1 = 13,9$; $z_0 = 13,9$ и $z_0 = 30$ ($m_\sigma = 1100$ Мэв) приведены на рис. 28—30. На них изображены графики функций

$$\nu K(\nu) \operatorname{ctg} \delta_I^l(\nu) = f_I(z) = \lambda \operatorname{Re} \frac{1}{A_I(z)}.$$

Заметим еще, что переход от введенной в (15.5) полуширины Γ_i в «шкале ν » к полуширине $\tilde{\Gamma}_i$ в шкале полных энергий

$$W = \mu \sqrt{s} = 2\mu \sqrt{\nu + 1} = 278 \sqrt{\nu + 1} \text{ Мэв}$$

осуществляется по формуле

$$\tilde{\Gamma}_i = \frac{2\mu}{W_i} \Gamma_i,$$

вследствие чего, например, полная ширина ρ -мезона ($W_\rho = 765 \text{ Мэв}$) равна

$$\Gamma_{\text{полн}}^\rho = 2\tilde{\Gamma}_\rho = \frac{4(139)^2}{765} \Gamma_\rho \approx 100\Gamma_\rho \text{ Мэв.} \quad (15.14)$$

Из табл. 3 видно также, что отношения a_0/λ , a_2/λ , $\Gamma_0/z_0\lambda$, $\Gamma_1/z_1\lambda$ не сильно зависят от значений параметра z_0 .

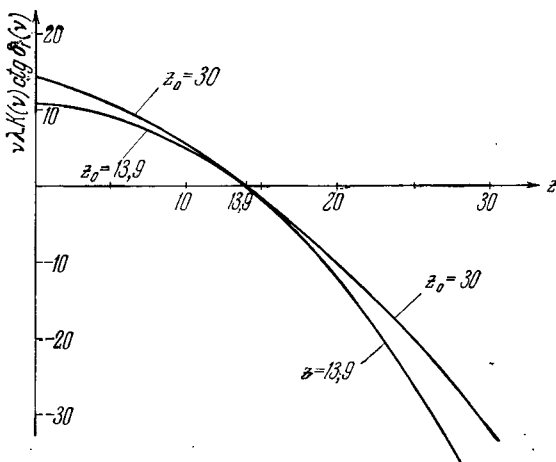


Рис. 29.

Поэтому можно сказать, что в рассматриваемом приближении основные характеристики определяются одним «масштабным» параметром λ . Численное значение этого параметра может быть фиксировано, исходя из сравнения с экспериментальными данными.

Однако не следует забывать о том, что формулы дельтаобразного приближения справедливы лишь при малых λ . Поэтому прежде всего необходимо оценить области их применимости. Можно показать, что они достаточно аккуратны вплоть до $\lambda \sim 0,2$. Из табл. 3 видно, что $\lambda \lesssim 0,2$ соответствуют значения $a_0 \lesssim 1$, $\Gamma_{\text{полн}}^p \approx 40 \text{ Мэв}$.

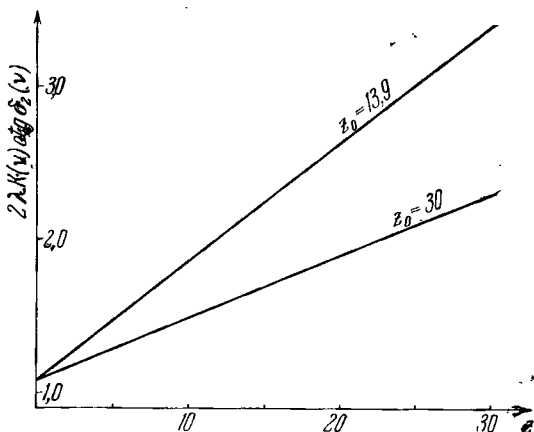


Рис. 30.

Последнее значение слишком мало по сравнению с экспериментальными оценками $\Gamma_{\text{полн}}^p \sim 100 \text{ Мэв}$. Ввиду этого мы должны перейти к большим значениям параметра λ , т. е. выйти за рамки дельтаобразного приближения. Этот выход может быть сделан с помощью расчетов на электронной машине (см. § 16.3). Мы увидим, что основные свойства полученного решения при этом сохраняются.

Среди этих свойств весьма важным является большая волна A_0 , необходимая для существования резонанса в p -волне. Из данных табл. 3 видно, что «приведенная ширина» $\frac{\Gamma_0}{z_0}$ σ -мезона, т. е. резонанса в волне A_0 , примерно в 15 раз больше приведенной ширины p -мезона. Можно сказать, что резонанс в канале $l = 1, l = 1$ обязан силам

притяжения, возникающим из-за большой волны A_0 в кроссинг-канале. Большое отношение между приведенными ширинами Γ_0/z_0 и Γ_1/z_1 может быть получено из условия компенсации вкладов на пороге p -волны (15.7). Переходя в этом выражении от α_i к Γ_i , пренебрегая волной A_2 и считая $z_i \gg 1$, получаем

$$\frac{\Gamma_1}{z_1} \approx \frac{2}{27} \frac{\Gamma_0}{z_0},$$

что хорошо согласуется с данными табл. 3.

Заканчивая обсуждение «двухрезонансной» ветви, отметим, что она, по-видимому, представляет наибольший физический интерес. Дело в том, что отношение Γ_1/a_0 в этой ветви больше, чем в ветвях, содержащих большее число резонансов. Действительно, например, из (15.7) видно, что введение резонанса в волну A_2 приводит к уменьшению Γ_1 при неизменной Γ_0 .

15.3. Другие резонансные ветви. «Двухрезонансная» ветвь (б) с резонансами в парциальных волнах A_0 и A_2 физического интереса не представляет, так как не содержит p -мезона. Заметим, что в этом случае, если совпадают резонансы в A_0 и A_2 , система (13.4) факторизуется и каждая из s -волн описывается уравнением, аналогичным уравнению для нейтральной модели. При этом надо считать, что $A_0(z)/A_2(z) = 5/2$.

Из «трехрезонансных» ветвей, которые имеет смысл рассматривать, если только экспериментально обнаружится резонанс в волне A_2 , приведем формулы для простейшего случая $z_0 = z_1 = z_2 = z_r$. В этом классе решений волна A_2 имеет нуль в точке x_0 . Из явного вида волны

$$\frac{A_2}{\lambda} = \frac{2\alpha_2 z_r}{z_r^2 - z^2} + \frac{2\alpha_0 + 9\alpha_1 - 5\alpha_2}{6(z_r + z)}$$

следует, что $x_0 > z_r$. Такое взаимное положение нуля и резонанса не зависит от малости λ и отражает тот простой факт, что $zA_2(z)$ является R -функцией в смысле Вигнера (см. § 11.3).

Выберем в качестве независимых параметров λ , z_r и x_0 . Тогда ширины резонансов и длины рассеяния примут

ВИД

$$\frac{\Gamma_0}{\lambda} = \frac{z_r(3 + 5x_0 + 4z_r)}{4(1 + x_0)},$$

$$\frac{\Gamma_1}{\lambda} = \frac{z_r(z_r - 1)}{6(1 + x_0)}, \quad \frac{\Gamma_2}{\lambda} = \frac{z_r(x_0 - z_r)}{2(1 + x_0)},$$

$$a_0 = \frac{\lambda z_r^2}{z_r^2 - 1} \frac{7 + 5x_0}{1 + x_0}, \quad a_2 = 2\lambda \frac{z_r^2}{z_r^2 - 1}.$$

Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых s -волнах A_0 в рассмотренной в § 15.2 «двухрезонансной» ветви p -волна больше, чем в «трехрезонансной».

15.4. Связь между логарифмической и степенными ветвями. Установим теперь связь между логарифмической и степенными ветвями. В нейтральной модели степенная ветвь представляет собой частный случай логарифмической ветви с R -членом, соответствующий выходу КДД-нуля на бесконечность. Мы покажем сейчас, что подобное соответствие можно установить между резонансными степенными ветвями и логарифмической ветвью, рассмотренной в § 14.

По аналогии с нейтральной моделью мы предположим, что логарифмическое решение с R -членом может быть описано выражениями (14.6), где дробно-линейные функции $\Phi(z, \lambda)$ при $z \rightarrow \infty$ стремятся к постоянным пределам. Ограничиваясь малыми λ , рассмотрим выражения (15.2), (15.3). При этом будем иметь в виду, что в силу малости λ эти выражения хорошо аппроксимируют решение в области, где $\lambda \ln z \ll 1$ и интегральные члены λI_i пренебрежимо малы.

Ограничимся для простоты случаем, когда все три волны имеют резонанс в одной и той же фиксированной точке z_r . Функции f_i представим в виде

$$f_i(z) = \frac{z_r^2 - z^2}{z_r^2 Q_i(z)}, \quad (15.15)$$

где Q_i — полиномы второй степени,

$$Q_i(z) = b_i z^2 + c_i z + d_i, \quad c_i = -d_i - b_i. \quad (15.16)$$

Условия кроссинг-симметрии и условие (14.5) в точке $\nu = -1/2$ приводят к тому, что из коэффициентов b_i , c_i и d_i независимы только три. Предельный переход к степенной ветви может быть осуществлен одновременным стремлением коэффициентов b_i к нулю. Проведем этот переход, полагая, что все b_i пропорциональны малому параметру ε , и учитывая, что они связаны соотношением кроссинг-симметрии

$$2b_0 + 9b_1 - 5b_2 = 0, \quad (15.17)$$

а также, что $b_2 < 0$ в силу того, что $zA_2(z)$ является обобщенной R -функцией. Эти соображения ограничивают сочетания знаков b_0 и b_1 тремя возможностями:

$$\text{а) } b_1 > 0, \quad b_0 < 0, \quad b_2 < 0,$$

$$\text{б) } b_1 < 0, \quad b_0 > 0, \quad b_2 < 0,$$

$$\text{в) } b_1 < 0, \quad b_0 < 0, \quad b_2 < 0.$$

Во всех трех случаях волна A_2 имеет резонанс в точке z_r и нуль в точке x_0 , положение которых не зависит от параметра λ и может быть фиксировано. В волнах A_k ($k = 0, 1$) при отрицательном знаке соответствующего b_k , кроме резонансов в точке z_r , имеется нуль, положение которого при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к бесконечности как $1/\varepsilon$. Кроме того, в волнах A_0 и A_2 , в зависимости от знака логарифмической асимптотики, в соответствующих случаях имеются высокоэнергетические резонансы $z_r^{(\varepsilon)} \sim \exp(1/\lambda\varepsilon)$. Схематическое поведение фаз рассеяния для всех трех случаев изображено на рис. 31.

Из рис. 31 видно, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем трехпараметрическую ветвь с совпадающими резонансами, рассмотренную нами ранее (§ 15.3). Тем самым установлено, что степенная ветвь решения является частным случаем логарифмической ветви, подобно тому как это имеет место в нейтральной модели.

Ясно также, что при достаточно малых ε рассмотренные логарифмические ветви практически не будут отличаться от предельной степенной ветви в области не очень больших ν . Другими словами, для каждого из степенных решений, рассмотренных в предыдущих разделах, существует весьма близкое к нему в интересующей нас обла-

сти энергий решение с логарифмической асимптотикой и далеким КДД-полюсом. Поэтому нет никаких оснований откидывать эти решения как находящиеся в полном противоречии с экспериментом в области больших энергий.

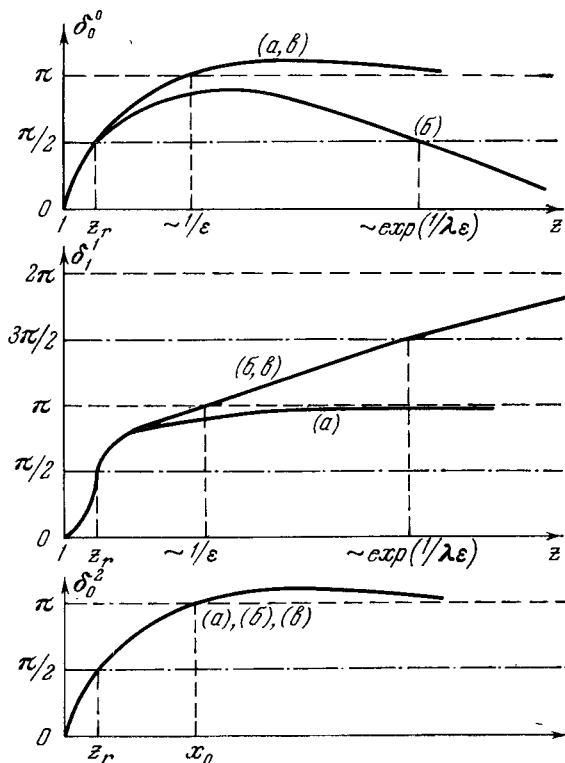


Рис. 31.

Эти решения представляются весьма важными, поскольку, как было показано, они дают единственную пока возможность качественного анализа многопараметрических решений, что связано с их быстрым убыванием в области больших энергий.

§ 16. p -резонансное решение в общем случае

Рассмотренная в предыдущем параграфе дельтаобразная аппроксимация позволяет изучать свойства резонансных решений при $\lambda \ll 1$. Для того чтобы перейти к физически интересному решению, следует рассмотреть случай не малых λ .

Заметим сразу же, что, как было установлено в адиабатической ветви (§ 14), интервал допустимых значений λ ограничен сверху величиной $\lambda_{\max} \sim 0,4$ (см. формулу (14.13)); это связано с отсутствием физического связанного состояния в канале $l = 0$, $l = 0$. В нейтральной модели (§ 11) это обстоятельство по той же причине не является привилегией адиабатической ветви решения. Поэтому естественно ожидать, что и в резонансных решениях рассматриваемой заряженной модели существует $\lambda_{\max} \approx 0,5$. (Мы увидим ниже, что такое положение действительно имеет место.) Основываясь на этом обстоятельстве, можно полагать, что в разложении по степеням λ функций $\Phi_i(z, \lambda)$ и $I_i(z, \lambda)$ в унитарном представлении (14.6) в допустимом интервале $0 < \lambda < \lambda_{\max}$ достаточно рассмотреть несколько первых членов.

Сейчас мы изложим метод регулярного построения членов разложения по степеням λ в знаменателях унитарного представления, уточнив таким образом дельтаобразную аппроксимацию (§ 16.1), а затем сравним (§ 16.3) результаты с данными численного решения исходных уравнений, представленных с помощью так называемого « N/D -метода» (§ 16.2) в виде системы уравнений Фредгольма.

16.1. Теория возмущений для унитарного представления. Будем исходить из унитарного представления для амплитуд рассеяния (14.6). Учтем следующий порядок по λ при разложении мероморфных функций $\Phi_i(z, \lambda)$ и функций, имеющих только левый разрез, $\lambda I_i(z, \lambda)$. Тогда амплитуды примут вид

$$A_i(z) = \frac{\lambda}{f_i(z) - \lambda \varphi_i(z) - \lambda I_i(z) - \lambda I_i(z)}. \quad (16.1)$$

Рассмотрим случай, когда в волне $A_2(z)$ нет резонанса. Функции $f_i(z)$, дающие дельтаобразное приближение

(см. § 15.2), удобно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} f_0(z) &= \frac{(z_1^2 - z^2)(z_0^2 - z^2)}{(z_1 - z)P_2^0(z)}, \\ f_1(z) &= \frac{(z_1^2 - z^2)(z_0^2 - z^2)}{(z_0 - z)(z - 1)P_1^1(z)}, \\ f_2(z) &= \frac{(z_1^2 - z^2)(z_0^2 - z^2)}{(z_0 - z)(z_1 - z)P_1^2(z)}. \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

Полиномы P_2^0 , P_1^1 , P_1^2 не имеют нулей в физической области; верхний индекс полинома характеризует изотопический канал рассеяния, нижний — степень полинома.

В каждом порядке по λ должны выполняться свойства кроссинг-симметрии. В рассматриваемом приближении для функций I_i получаем

$$I_i(z) = I(-z) \sum_{\mathbf{k}} b_{i\mathbf{k}} \frac{f_i^{\mathbf{k}}(z)}{f_{\mathbf{k}}^2(-z)}. \quad (16.3)$$

При $z > 0$ функция $I_0(z)$ имеет полюс второго порядка в точке $z = 1$, функция $I_1(z)$ — полюсы второго порядка в точках $z = 1$, $z = z_0$, функция $I_2(z)$ — полюсы второго порядка в точках $z = 1$, $z = z_2$. Этот факт определяет форму мероморфных функций $\varphi_i(z)$:

$$\varphi_i(z) = \frac{P_7^i(z) f_i^2(z)}{(z_1^2 - z^2)(z_0^2 - z^2)}, \quad (16.4)$$

$P_7^i(z)$ — полиномы 7-й степени: $P_7^i(z) = \sum_{j=0}^7 \alpha_j^i z^j$, α_j^i —

действительные коэффициенты, так как $A_i^*(z) = A_i(z^*)$. Покажем, что они определяются однозначно. Для этого необходимо потребовать выполнения следующих условий:

- а) кроссинг-симметрии во втором порядке по λ ,
- б) сохранения положений резонансов в волнах $A_0(z)$ и $A_1(z)$ соответственно в точках z_0 и z_1 ,
- в) определения λ (14.5),
- г) порогового условия для p -волны,

д) отсутствия нулей при $z > 1$ во всех волнах. Условие (д) следует из табл. 2 (стр. 120), когда $e > 0$.

Условия кроссинг-симметрии дают

$$P_7^i(-z) = \sum_k b_{ik} P_7^k(z). \quad (16.5)$$

Как нетрудно убедиться, с учетом свойства $\det |b_{ik} + \delta_{ik}| = 0$ уравнения (16.5) приводят к 12 соотношениям между α_j^i ; условия (б) дают 2 уравнения:

$$\varphi_i(z_i) + \lambda I_i(z_i) + \lambda I(z_i) = 0.$$

Условие (в) дает одно уравнение:

$$\varphi_0(0) = \varphi_2(0).$$

Условие (г) дает (см. (16.2), (16.3))

$$\frac{P_7^1(1)}{(z_0 - 1)^2 [P_1^1(1)]^2} + \frac{\lambda I(-1)}{(z_0 - 1)^2 [P_1^1(1)]^2} \sum_k b_{ik} \frac{(z_1^2 - 1)^2 (z_0^2 - 1)^2}{f_k^2(-1)} = 0.$$

Наконец, (д) дает для волн $A_0(z)$ и $A_1(z)$ по 2 условия компенсации полюсов второго порядка в функциях $\varphi_i + I_i$ в точках z_0 и z_1 . Для волны A_2 это условие дает 4 уравнения, так как сумма $\varphi_2 + I_2$ не должна иметь полюсов как в точке z_0 , так и в точке z_1 .

Всего мы получаем 24 алгебраических уравнения для 24 неизвестных α_j^i . В общем случае, когда и волна A_2 имеет резонанс (и нуль, если $e > 0$, см. табл. 2), эти условия однозначно определяют коэффициенты мероморфных функций, если, кроме того, потребовать, чтобы резонанс z_2 и нуль x_0 в волне A_2 не сдвигались при учете высших порядков разложения по λ .

Мы видим, таким образом, что изучение свойств членов разложения в теории возмущений для унитарного представления позволяет сделать следующее заключение. Решения исходной системы интегральных уравнений (13.4)—(13.7) являются однозначными функциями λ и z , если при $\lambda \rightarrow 0$ зафиксированы положения резонансов и нулей функций $A_i(z)$.

При $z \sim 1$ функции $\varphi_s(z)$ ($s = 0; 2$) малы, если резонансы лежат достаточно далеко от порога ($z_i \geq 10$).

Поэтому в области $z \sim 1$

$$A_0(z) \approx \frac{\lambda}{f_0(z) - \lambda I(z) - \frac{3\lambda}{5} I(-z)}. \quad (16.6)$$

Здесь мы воспользовались формулами (15.11) — (15.13) для оценки $f_i(z)$ в окрестности $z \sim 1$ и при $z_i \geq 10$.

Мы видим, что это выражение совпадает с выражением для s -волны в адиабатическом приближении (14.8), (14.10).

Отсюда следует оценка для λ_{\max} :

$$\lambda_{\max} \approx \frac{\lambda}{a_0 \left[I(1) + \frac{3}{5} I(-1) \right]} \approx 2,4 \left(\frac{\lambda}{a_0} \right) < 0,5,$$

где $a_0/\lambda \sim 5$ — длина рассеяния в дельтаобразном приближении, заимствованная из табл. 3. Поскольку λ может меняться в пределах $0 < \lambda < 0,5$, то следует ожидать, что учет второго порядка по λ будет достаточно хорошо описывать решение. Сравнив эти формулы с данными численного решения, мы убедимся в том, что это действительно так.

Для этого сведем систему сингулярных уравнений к системе интегральных уравнений типа Фредгольма, которую можно решать численно на электронной машине. Это делается при помощи « N/D -метода», предложенного впервые Чу и Мандельштамом (1960).

16.2. N/D -метод. Представим функции $A_i(z)$ в виде (ср. § 2.4)

$$A_i(z) = \frac{N_i(z)}{D_i(z)}, \quad (16.7)$$

где

$$D_i(z) = \exp \left\{ - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\delta_i(z') dz'}{z'(z' - z)} \right\} \quad (16.8)$$

и, очевидно, обладает только правым разрезом. Мы предполагаем, что фазы $\delta_i(z)$ при $z \rightarrow \infty$ стремятся к конечному пределу, т. е. что парциальные волны имеют конечное число нулей и резонансов. Асимптотическое поведение фаз определяет ветвь интересующих нас решений. Например, если рассматривать решения с резонансами в

парциальных волнах $A_1(z)$ и $A_0(z)$, то $\delta_1(\infty) = \delta_0(\infty) = \pi$, а $\delta_2(\infty) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что в этом случае $D_1(z)$ и $D_0(z)$ на бесконечности растут как z , а $D_2(z)$ при больших z меньше, чем z^ε , где ε — произвольное малое положительное число. Функции $D_i(z)$ в плоскости z не имеют ни нулей, ни полюсов (за исключением бесконечно удаленной точки). Можно, однако, рассматривать и другое разбиение $A_i(z)$ на числитель и знаменатель:

$$A_i(z) = \frac{\bar{N}_i(z)}{\bar{D}_i(z)}, \quad (16.9)$$

где

$$\bar{D}_i(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)} D_i(z)$$

и

$$\bar{N}_i(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)} N_i(z),$$

а $P_n(z)$ и $P_m(z)$ — полиномы n -й и m -й степеней по z с действительными коэффициентами. Очевидно, что в этом случае функции $\bar{D}_i(z)$ и $\bar{N}_i(z)$ могут иметь и нули и полюсы. Докажем, что функции $N_i(z)$ и $\bar{N}_i(z)$ не обладают правым разрезом.

Для этого согласно упругому условию унитарности (13.5) при $z \geq 1$ представим $A_i(z + i\varepsilon)$ в виде

$$A_i(z + i\varepsilon) = \frac{e^{2i\delta_i(z)} - 1}{2iK(z)} = \frac{N_i(z + i\varepsilon)}{D_i(z + i\varepsilon)}.$$

Из (16.8) следует, что

$$e^{2i\delta_i(z)} = \frac{D_i(z - i\varepsilon)}{D_i(z + i\varepsilon)} = \frac{D_i^*(z + i\varepsilon)}{D_i(z + i\varepsilon)}.$$

Тогда

$$N_i(z + i\varepsilon) = \frac{D_i^*(z + i\varepsilon) - D_i(z + i\varepsilon)}{2iK(z)}. \quad (16.10)$$

Из (16.10) видно, что функция $N_i(z + i\varepsilon)$ при $z \geq 1$ действительна. Но из свойств амплитуды $A_i^*(z) = A_i(z^*)$, $D_i^*(z) = D_i(z^*)$ следует, что $N_i^*(z) = N_i(z^*)$. Поэтому,

если бы функция $N_i(z)$ имела правый разрез, то при $z \geq 1$ она была бы комплексной (удвоенная мнимая часть ее равнялась бы скачку на правом разрезе). Отсюда следует, что функция $N_i(z)$ не имеет правого разреза. Совершенно ясно, что функция $\bar{N}_i(z)$ обладает тем же свойством, так как она отличается от $N_i(z)$ только отношением полиномов с действительными коэффициентами. Используя условия унитарности и действительности $N_i(z)$ при $z \geq 1$, можно написать

$$\operatorname{Im} D_i(z) = -K(z) N_i(z), \quad \operatorname{Im} \bar{D}_i(z) = -K(z) \bar{N}_i(z). \quad (16.11)$$

Для того чтобы построить функцию $D_i(z)$ по $\operatorname{Im} D_i(z)$, нужно знать, какое количество вычитаний необходимо сделать и какой степени полином следует добавить. При этом решающую роль играет гипотеза о поведении фазы на бесконечности. Для «двухрезонансной» ветви (резонансы в волнах $A_1(z)$ и $A_0(z)$)

$$D_i(z) = 1 - zg_i - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') N_i(z')}{z'(z' - z)} dz', \quad (16.12)$$

$$N_i(z) = A_i(0) + \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} A_i(z') D_i(z')}{z'(z' - z)} dz' \quad (16.13)$$

($i = 0; 1$). Пороговое условие для p -волны дает

$$A_1(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} A_1(z') D_1(z')}{z'(z' - 1)} dz'. \quad (16.14)$$

Для волны $A_2(z)$ аналогичное представление удобно писать для функций $\bar{D}_2(z)$ и $\bar{N}_2(z)$:

$$\bar{D}_2(z) = (z - z_0) D_2(z), \quad \bar{N}_2(z) = (z - z_0) N_2(z), \quad (16.15)$$

$$\bar{D}_2(z) = 1 - zg_2 - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') \bar{N}_2(z')}{z'(z' - z)} dz', \quad (16.16)$$

$$\bar{N}_2(z) = A_2(0) + \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{Im} A_0(z') \bar{D}_2(z')}{z'(z' - z)} dz'. \quad (16.17)$$

Подставляя (16.13) в (16.12) и (16.17) в (16.16), получим для функций

$$d_k(z) = D_k(-z), \quad k = 0; 1 \quad \text{и} \quad d_2(z) = \bar{D}_2(-z)$$

систему уравнений Фредгольма

$$d_i(z) = 1 + z g_i + z A_i(0) K(z, 0) + \\ + \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dz'}{z'} K(z, z') \varphi_i(z') d_i(z'). \quad (16.18)$$

Здесь

$$\varphi_i(z) = \text{Im} A_i(-z) = - \sum_k b_{ik} \text{Im} A_k(z),$$

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') dz'}{(z' + x)(z' + y)}, \quad K(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}.$$

Коэффициенты $g_{1;0}$ фиксируются условиями сохранения положения резонансов в $A_1(z)$ и $A_0(z)$:

$$d_k(-z_k) = 0.$$

Коэффициент g_2 можно зафиксировать из асимптотического условия в (13.10). Постоянные $A_{0;2}$ определяются из (13.8) при $z = 0$.

Решение задачи на ЭВМ носит итерационный характер. Сначала задаются функции $\varphi_i(z)$, например, из дельтаобразного приближения при фиксированном λ . Затем решается система (16.18). Из полученных решений строится ядро $\varphi_i(z)$ для следующей итерации, и так до тех пор, пока построенная после n -й итерации функция $\varphi_i(z)$ не окажется достаточно близкой к функции $\varphi_i(z)$, полученной после $(n-1)$ -й итерации. Аналогично можно получить уравнения Фредгольма для случая, когда волна $A_2(z)$ имеет резонанс. Так как мы знаем, что в этом случае нужно фиксировать и x_0 (нуль в волне A_2), то удобно в функцию $D_2(z)$ ввести полюс $\frac{1}{z-x_0}$. Тогда функция $N_2(z)$ не будет иметь нуля в точке x_0 . Коэффициент g_2 естественно фиксируется требованием сохранения положения

резонанса

$$d_2(-z_2) = 0.$$

Заметим, что « N/D -методом» можно свести задачу к уравнениям Фредгольма и в том случае, когда в каждой волне явно задана неупругость, т. е. заданы функции $\eta_i(z)$:

$$A_i(z) = \frac{\eta_i(z) e^{2i \operatorname{Re} \delta_i(z)} - 1}{2iK(z)}, \quad \eta_i(z) = e^{-2\operatorname{Im} \delta_i(z)}.$$

Функцию $D_i(z)$ при этом следует определить в виде

$$D_i(z) = \exp \left\{ -\frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \delta_i(z')}{z'(z'-z)} dz' \right\}. \quad (16.19)$$

Тогда функции $N_i(z)$ имеют не только левый, но и правый разрез, начинающийся с порога неупругого процесса. Конечные уравнения типа (16.18) имеют тот же фредгольмовский вид, только их ядра сложнее и явно зависят от функций $\eta_i(z)$.

16.3. Общие свойства решений. Наиболее важным свойством численных решений является существование максимального значения λ_{\max} . При $\lambda \rightarrow \lambda_{\max}$ длина рассеяния волны с $l = 0$, $l = 0$ стремится к бесконечности, а значения $\lambda > \lambda_{\max}$ соответствуют наличию связанного состояния в этой волне. Любопытным является тот факт, что найденные численные значения λ_{\max} незначительно отличаются от приближенных оценок, сделанных в § 16.1.

Этим путем, учитывая интеграл по физическому разрезу в знаменателе волны A_0^0 (в функции D_0), мы приходим к следующей модификации дельтаобразного приближения для волны A_0 :

$$\lambda \sqrt{\frac{v}{v+1}} \operatorname{ctg} \delta_0(v) = f_0^*(v) = f_0(v, \eta_0(z)). \quad (16.20)$$

Здесь функция f_0 описывается формулами (15.3), (15.6), а η_0 — поправочный множитель вида

$$\eta_0(z) = 1 - 4\lambda \frac{\kappa(z) - \frac{z}{z_0} \kappa_0(z_0)}{1 - \frac{z}{z_0}}, \quad (16.21)$$

где

$$\kappa(z) = zK(0, -z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{z-1}{z+1}} \ln \left(\sqrt{\frac{z-1}{2}} + \sqrt{\frac{z+1}{2}} \right). \quad (16.22)$$

Из формул (16.20) — (16.22) получаем выражение для длины рассеяния:

$$a_1 = \frac{a_0^0}{1 - \lambda/\lambda_{\max}}, \quad \lambda_{\max} = \frac{z_0 - 1}{2(z_0 - 2\kappa(z_0))}. \quad (16.23)$$

Здесь a_0^0 — выражение длины рассеяния из дельтаобразной аппроксимации, линейно зависящее от λ . При $\nu_0 = 6,25$ $\lambda_{\max} = 0,43$, при $\nu_0 = 1$ $\lambda_{\max} = 0,36$. Поэтому формулы указанного приближения дают заметную ошибку уже при $\lambda \sim 0,1$. Модифицированная формула (16.20) описывает котангенс фазы с точностью до 15—20% в широком интервале параметров λ и $z_0 = 2\nu_0 + 1$, а формула (16.23) дает длину рассеяния a_0 с точностью до 5%.

Отличия от дельтаобразной аппроксимации для волн A_1 и A_2 могут быть приближенно учтены введением поправочных множителей:

$$f_i \rightarrow f_i^* = f_i \eta_i, \quad (16.24)$$

$$\eta_1 = 1 + \frac{5,6 \lambda}{2 + \frac{13,5}{z_0}}, \quad \eta_2 = 1 + \frac{5,6 \lambda}{1 + \frac{13,5}{z_0}}. \quad (16.25)$$

Учет этих множителей позволяет описать расчетные данные до 10%. Ширина p -резонанса вычисляется теперь по формуле

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1^* = \frac{\Gamma_1}{\eta_1}. \quad (16.26)$$

Поэтому она имеет верхний предел, соответствующий $\lambda = \lambda_{\max}$. На рис. 32 изображена зависимость полной ширины p -резонанса ($m_{\text{рез}} = 765 \text{ Мэв}$) от a_0 и z_0 . Проведенные кривые вычислены с помощью формул (16.23) — (16.26). Рассчитанные на машине «двухрезонансные» решения ложатся на эти кривые с точностью до 10%. «Трехрезонансные» решения (с резонансом в A_2) дают кривые, лежащие ниже соответствующих кривых рис. 32.

Из рис. 32 видно, что полная ширина p -резонанса имеет естественную верхнюю границу порядка 40 Мэв . При разумных значениях длины рассеяния $a_0 < 2,5$ полная ширина бипиона в наших решениях не может превышать 30 Мэв . Этот максимум достигается при отсутствии резонанса в A_2 и при увеличении энергии резонанса в A_0 .

Из формул (16.24) и (16.25) видно, что поправочные множители являются полиномами первой степени по λ . Этот факт не является случайным. В самом деле, если провести вычисления нескольких первых порядков в описанной в § 16.2 теории возмущений для унитарного представления, то можно убедиться в том, что

первая поправка к дельтаобразному приближению численно весьма близка к формулам (16.24), (16.25). Следующие поправки оказываются малыми из-за того, что в каждом новом порядке по λ появляются множители типа $1/z_i \ll 1$.

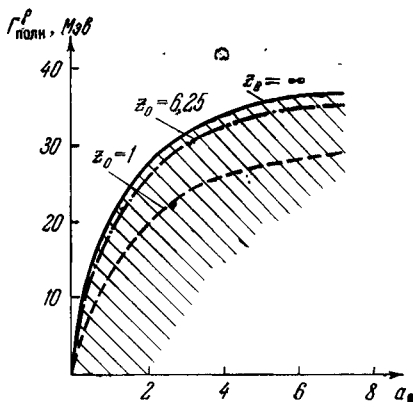


Рис. 32.

§ 17. Высшие парциальные волны

Проведенное рассмотрение $\pi\pi$ -рассеяния в приближении s - и p -волн показывает, что может быть достигнуто разумное качественное соответствие с экспериментом. Важным вопросом поэтому представляется проблема физической замкнутости использованного приближения. В этом параграфе, следуя в основном работе Ефремова и Ширкова (1961), мы рассмотрим вопросы учета высших парциальных волн, которыми до сих пор мы пренебрегали.

17.1. Высшие волны в нейтральной модели. Выпишем сперва формулы, выражающие парциальные волны f_l через значение амплитуды $f(c)$ и ее производных в точках $c = \pm 1$. Эти формулы имеют различный вид,

в зависимости от числа парциальных волн, аппроксимирующих $f(c)$.

В низшем приближении, ограничиваясь s - и p -волнами

$$f(c) = f_0 + 3cf_1,$$

имеем

$$f_0 = \frac{f(1) + f(-1)}{2}, \quad f_1 = \frac{f(1) - f(-1)}{6}. \quad (17.1)$$

В следующем приближении, учитывая также d - и f -волны

$$f(c) = f_0 + 3cf_1 + \frac{5}{2}(3c^2 - 1)f_2 + \frac{7}{2}(5c^3 - 3c)f_3,$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \frac{f(1) + f(-1)}{2} - \frac{f'(1) - f'(-1)}{6}, \\ f_1 &= \frac{f(1) - f(-1)}{5} - \frac{f'(1) + f'(-1)}{30}, \\ f_2 &= \frac{f'(1) - f'(-1)}{30}, \\ f_3 &= \frac{f(1) - f(-1)}{70} + \frac{f'(1) - f'(-1)}{70}. \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Наконец, предельному случаю

$$f(c) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(c) f_n$$

соответствуют формулы:

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(-1) + (-1)^n f^{(n)}(1)}{2(n+1)!}, \\ f_1 &= \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(-1) - (-1)^n f^{(n)}(1)}{2(n+2)!}, \\ f_2 &= - \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+5)}{4(n+3)!} [f^{(n)}(-1) - (-1)^n f^{(n)}(1)], \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

выражающие парциальные волны f_n через бесконечный набор производных в точках $c = \pm 1$.

Выражения (17.3) могут быть получены чисто формально, путем последовательного взятия по частям интегралов.

определяющих парциальные амплитуды, которые удобно при этом представлять в виде сумм

$$f_l = \frac{1}{2} \int_0^1 P_l(c) f(c) dc + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 P_l(c) f(c) dc. \quad (17.4)$$

Разлагая в первом из интегралов $f(c)$ в ряд Тейлора около точки $c = +1$, а во втором — около точки $c = -1$ и вычисляя интегралы

$$\int_0^1 P_l(c) \frac{(c-1)^n}{n!} dc, \quad \int_{-1}^0 P_l(c) \frac{(c+1)^n}{n!} dc,$$

приходим к формулам (17.3). При таком способе рассуждений видно, что сходимость рядов в правых частях (17.3) определяется сходимостью рядов Тейлора на интервалах $(0; 1)$ и $(-1; 0)$ соответственно.

Для случая нейтральной модели формулы (17.2) сводятся к (11.6), а соответствующие уравнения для s - и d -волн имеют вид (11.8). Второе из этих уравнений находится в противоречии с условием порогового поведения для d -волны:

$$A_2(v) \sim v^2 \quad \text{при } v \ll 1, \quad (17.5)$$

для выполнения которого необходимо потребовать выполнения «правила сумм» (11.14).

С помощью (11.14) уравнения (11.8) могут быть преобразованы к виду:

$$\left. \begin{aligned} f_1(v) + 5f_2(v) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dv' \left(\frac{1}{v'-v} + \frac{1}{v'+v+1} \right) (\text{Im } f_1(v') + 5 \text{Im } f_2(v')), \\ f_2(v) &= \frac{v^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv'}{v'^2} \frac{\text{Im } f_2(v')}{v'-v} - \frac{v^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dv'}{v'+v+1} \frac{\text{Im } f_2(v')}{v'+v+1} + \\ &+ \frac{v^2}{30\pi} \int_0^\infty \frac{dv'}{(1+v')^2} \frac{2+2v'+v}{(1+v+v')^2} (\text{Im } f_1(v') + 5 \text{Im } f_2(v')). \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

Эти уравнения находятся в соответствии с (17.5). Можно также показать (Орлов, Парфенов (1967)), что если провести сравнение разложений этих уравнений по параметру λ с разложениями обычной теории возмущений (подобно тому как это было описано в § 11.4), то в порядке λ^2 мы получим точное соответствие вплоть до членов порядка ν^3 как в f_0 , так и в f_2 . Таким образом, по сравнению с уравнением (11.15) мы получаем для f_0 улучшение на два следующих члена разложения по ν и соответственно два правильных члена разложения для f_2 .

Рассмотрим асимптотические свойства уравнений (17.6). Не составляет труда убедиться в том, что совместное с условием унитарности убывание $\text{Re } f_2(\nu)$ при $\nu \rightarrow \infty$ во втором из уравнений (17.6) обеспечивается «правилом сумм» (11.14). Таким образом, мы имеем две совершенно эквивалентные формулировки задачи для s - и d -волн. Первая из них, представляемая системой (11.8), (11.14), является удобной для исследования асимптотического поведения парциальных волн. Вторая формулировка, представляемая совокупностью (17.6), (11.14), более удобна для изучения низкоэнергетического поведения и сравнения с теорией возмущений.

Если сделать следующий шаг и с помощью вторых производных $f''(\pm 1)$ учесть волну f_4 , то мы получим систему трех уравнений для f_0 , f_2 и f_4 . Эти уравнения в форме, аналогичной (11.8), удовлетворят квантовомеханическим пороговым условиям, а члены порядка λ^3 будут находиться в соответствии с теорией возмущений; они будут на два порядка по ν лучше, чем у уравнений (11.8), т. е., например, в волне d правильно будут передаваться члены вплоть до ν^5 . Асимптотическое поведение волн f_2 , f_4 будет обеспечиваться «правилами сумм» типа (11.14). При этом f_0 по-прежнему будет иметь асимптотику (11.9), а волны f_2 и f_4 — асимптотику типа (11.13).

Разумеется, учет большого числа высших парциальных волн в низкоэнергетических уравнениях не оправдан с физической точки зрения. Эксперимент показывает, что d - и f -волны становятся заметными в области энергий лишь существенно выше порога неупругих процессов. В пион-пионном рассеянии, например, d -волна в канале $I = 0$ имеет резонанс (f_0 -мезон) при энергии $E_{f_0} = 1250 \text{ Мэв}$

с полной шириной $\Gamma_{\text{полн}}^{f_0} \approx 120 \text{ Мэв}$. В области энергий ниже 1 Гэв все d - и f -волны, по-видимому, пренебрежимо малы. Поэтому в задаче рассеяния реальных пионов мы ограничимся лишь исследованием влияния f_0 -мезона на низкоэнергетическое поведение s - и p -волн и не будем рассматривать уравнений для высших волн.

17.2. Влияние f_0 -мезона на низшие волны пион-пионного рассеяния. Рассмотрим s - и p -волны пионного рассеяния в приближении, учитывающем реальные части d - и f -волн, а также $\text{Im } A_2^0$. С помощью (17.2) находим (ср. Ефремов, Ширков (1961))

$$\left. \begin{aligned} A_0(v) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_0(v')}{v' - v} dv' - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_0(v')}{1 + v + v'} \left[1 + \frac{v}{6(1 + v + v')} \right] dv' - \frac{2}{3} I_1(v), \\ A_1(v) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_1(v')}{v' - v} dv' - \\ &- \frac{6}{5\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_1(v')}{1 + v + v'} \left[1 + \frac{v}{12(1 + v + v')} \right] dv' + \frac{1}{15} I_1(v), \\ A_2(v) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A_2(v')}{v' - v} dv' - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi_2(v')}{1 + v + v'} \left[1 + \frac{v}{6(1 + v + v')} \right] dv' + \frac{1}{3} I_1(v), \end{aligned} \right\} (17.7)$$

где

$$I_1(v) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + v'}{v'(1 + v + v')} \text{Im } A_1(v') dv',$$

а Φ_i отличаются от функций f_i из § 13 только членом,

содержащим $\text{Im } A_2^0$:

$$\varphi_i(\nu) = \sum_{k=0}^2 b_{ik} \text{Im } A_k(\nu) + 10 L_i \text{Im } A_2^0. \quad (17.8)$$

«Правило сумм», обеспечивающее пороговое исчезновение p -волны, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{11}{40\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \text{Im } A_1(\nu) - \\ & - \frac{6}{5\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{1+\nu} \left(\frac{\text{Im } A_0 + 5\text{Im } A_2^0}{9} - \frac{\text{Im } A_1}{2} - \frac{5\text{Im } A_2}{18} \right) = 0, \quad (17.9) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{17\nu + 11}{\nu(1+\nu)} \text{Im } A_1(\nu) d\nu = \\ & = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{1+\nu} \left(\text{Im } A_0 + 5\text{Im } A_2^0 - \frac{5}{2} \text{Im } A_2 \right). \quad (17.10) \end{aligned}$$

Уравнение (17.9) отличается от (13.7) не только наличием под интегралом члена $\text{Im } A_2^0$, но также и численными коэффициентами $11/10$ и $6/5$, отвечающими учету $\text{Re } A_3^1$.

Если рассмотреть систему уравнений типа (17.7), дополненную уравнениями для высших парциальных волн A_2^0 , A_3^1 , A_2^2 , то можно показать, что, подобно нейтральному случаю, для низших парциальных волн $A_0^0 = A_0$, $A_1^1 = A_1$, $A_0^2 = A_2$ сохраняется возможность иметь асимптотику $1/\ln \nu$. В то же время уравнения типа (17.7) улучшают соответствие с членом λ^2 теории возмущений на два порядка по степеням ν по сравнению с уравнениями для s - и p -волн из § 13.1.

Оценим теперь влияние f_0 -мезона на ширину p -мезона (Орлов, Парфенов (1966)). Для этой цели воспользуемся методом дельтаобразной аппроксимации. Положим в

правой части (17.10)

$$\text{Im } A_2^0(\nu) \approx \pi \Gamma_f \delta(\nu - \nu_f),$$

где в соответствии с экспериментальными данными $\nu_f \approx \approx 19,5$, $\Gamma_f = 1,9$. В левую часть (17.10) подставим

$$\text{Im } A_1(\nu) = \pi \Gamma_\rho \delta(\nu - \nu_\rho),$$

где $\nu_\rho = 6,45$. Вычисляя вклад $\Delta \Gamma_\rho$ в Γ_ρ от f_0 -мезона, получаем

$$\Delta \Gamma_\rho = \frac{20\nu_\rho(1 + \nu_\rho)\Gamma_f}{3(17\nu_\rho + 11)(1 + \nu_f)} \approx 0,25,$$

что соответствует приращению полной ширины ρ -мезона на

$$\Delta \Gamma_{\text{полн}}^\rho \approx 25 \text{ Мэв.}$$

Таким образом, максимальная верхняя граница для полной ширины ρ -мезона теперь будет уже не 40 Мэв (§ 16.3), а

$$(\Gamma_{\text{полн}}^\rho)_{\text{max}} \sim 65 \text{ Мэв.}$$

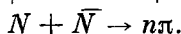
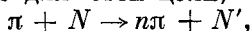
Разумеется, эта оценка сделана довольно грубо. Она дает лишь ориентировку в возможном влиянии f_0 -мезона на ширину ρ -мезона. f_0 -мезон также вносит изменения в волну A_0 , что в свою очередь может привести к изменению Γ_ρ . Этот вопрос требует более внимательного изучения, которое, однако, осложняется тем обстоятельством, что последовательное рассмотрение области энергий выше 1 Гэв одновременно с учетом высших парциальных волн требует учета неупругих эффектов.

§ 18. Сравнение теории с экспериментом

18.1. Способы получения сведений о $\pi\pi$ -взаимодействии. Ввиду того, что рассеяние пионных пучков друг на друге является пока еще неосуществимым экспериментом, данные о $\pi\pi$ -рассеянии извлекаются косвенным путем. Они носят характер выводов о вкладе пион-пионного рассеяния в другие экспериментально изучаемые реакции.

Для определения положения резонансов и грубой оценки их ширины обычно рассматривают распределение

событий по энергии в с. ц. м. выделенного числа пионов (спектр масс) в реакциях, где в конечном состоянии рождается несколько π -мезонов. Наиболее характерные реакции, используемые для этой цели,



Поясним этот метод на простой качественной модели. Допустим, что существует нестабильная частица A с массой m_A , распадающаяся с относительно большим временем жизни $\tau_A = 1/\Gamma_A$, $\Gamma_A \ll m_A$, на n пионов. Такая частица на диаграмме Фейнмана может быть описана модифицированным пропагатором (формулой Брейта — Вигнера), который в окрестности узкого резонанса имеет вид

$$\varphi_A(\omega) \sim \frac{1}{m_A - \omega - i\Gamma_A}. \quad (18.1)$$

Здесь ω — полная энергия рассматриваемых пионов в их с.ц.м. Тогда процесс, в котором образование конечных пионов идет только через частицу A , может быть представлен диаграммой, изображенной на рис. 33. Матричный элемент процесса имеет вид

$$M = \Psi(\omega, \omega_1, \dots, \omega_k) \varphi_A(\omega), \quad (18.2)$$

где $\omega_1, \dots, \omega_k$ — остальные независимые кинематические переменные. Предполагая, что функция Ψ слабо зависит от аргумента ω в окрестности $\omega \approx m_A$, получаем, что основная зависимость от ω в вероятности процесса передается множителем

$$dw \sim |\varphi_A(\omega)|^2 = \frac{1}{(m_A - \omega)^2 + \Gamma_A^2}. \quad (18.3)$$

В случае, когда A распадается на два пиона, выражение (18.3) пропорционально (ср., например, с (15.5)) резонансному сечению рассеяния этих пионов. Ясно теперь,

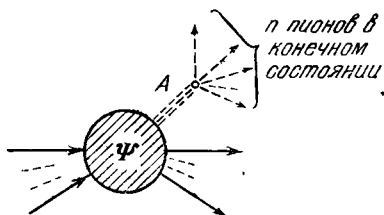


Рис. 33.

что если анализировать пионы конечного состояния по переменной их полной энергии в с. ц. м. (т. е. по переменной ω), то узкий максимум в распределении по ω около значения $\omega = m_A$ укажет на наличие резонанса с энергией m_A , а ширина этого максимума позволит оценить ширину соответствующего резонанса Γ_A .

Поскольку мы изучаем взаимодействие двух пионов, то в дальнейшем ограничимся двухпионными спектрами масс. Для двухпионного распада формула (18.3) совпадает с известной формулой Ватсона (1952)

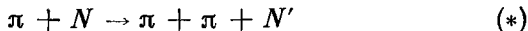
$$dw \sim \left| e^{i\delta_I^l(\omega)} \sin \delta_I^l(\omega) \right|^2, \quad (18.4)$$

учитывающей притяжение двух пионов, образованных в конечном состоянии с полным угловым моментом l и полным изотопическим спином I .

Множители пропорциональности в (18.3), (18.4) представляются интегралами от $|\Psi(\omega, \omega_1, \dots, \omega_k)|^2$ по всей кинематически допустимой области Ω изменения независимых переменных $\omega_1, \dots, \omega_k$. Эта область называется фазовым объемом и зависит от ω , а также от полной энергии системы E . Поэтому, даже если аппроксимировать функцию Ψ постоянной, множитель пропорциональности будет зависеть от ω через фазовый объем

$$dw = c \Omega(\omega) |\varphi_A(\omega)|^2 d\omega. \quad (18.5)$$

Поэтому для изучения какого-либо интервала $\omega_1 < \omega < \omega_2$ следует так подобрать условия эксперимента (в том числе полную энергию E), чтобы на этом интервале фазовый объем $\Omega(\omega)$ не вносил существенных искажений. Так, при изучении двухпионных резонансов в реакциях



нужно пользоваться пионным пучком достаточно большой энергии (например, для изучения ρ -мезона энергия налетающего пиона должна быть не меньше 1,2 Гэв).

Изложенные соображения, однако, не позволяют изучать $\pi\pi$ -взаимодействия в нерезонансной области. Для этой цели необходимо использовать дополнительные модельные построения.

18.2. Метод Чу — Лоу и формула Селлери. Одной из наиболее употребительных моделей является схема Чу — Лоу (1956) изучения реакции, основанная на приближении однопионного обмена. В этом методе процесс (*) при малых инвариантных передачах импульса нуклона

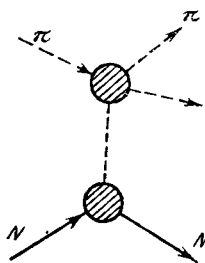


Рис. 34.

$$\pi (\Delta p)^2 = -t \equiv$$

$$\equiv -(p_N - p_{N'})^2 < (\Delta p)_{\max}^2 \sim 9\mu^2$$

описывается диаграммой рис. 34, т. е. благодаря наличию особенности

$$[(\Delta p)^2 + \mu^2]^{-1},$$

связанной с пропагатором обменного пиона, вклад от диаграммы рис. 34 доминирует над вкладом всех остальных диаграмм.

Очевидно, в районе полюса при $(\Delta p)^2 \rightarrow -\mu^2$

$$[(\Delta p)^2 + \mu^2]^2 \frac{d^2 \sigma_{\pi p}}{d(\Delta p)^2 d\omega^2} \rightarrow \frac{(\Delta p)^2 f^2}{2\pi \mu^2 p_{\text{нач}}^2} \omega \sqrt{\frac{\omega^2}{4} - \mu^2} \sigma_{\pi\pi}(\omega^2), \quad (18.6)$$

где $p_{\text{нач}}$ — импульс начального π -мезона, ω — энергия бипиона, f — константа πN -взаимодействия ($f^2 = 0,08$, если обменный пион нейтральный, и $f^2 = 0,16$, если пион заряженный).

Так как $[(\Delta p)^2 + \mu^2]^2 \frac{d^2 \sigma}{d(\Delta p)^2 d\omega^2}$ является аналитической функцией $(\Delta p)^2$ в круге радиуса $8\mu^2$, то данные из физической области при фиксированном ω можно экстраполировать по переменной $(\Delta p)^2$ в точку $(\Delta p)^2 = -\mu^2$ и в результате получить сечение $\sigma_{\pi\pi}(\omega^2)$. Определение пион-пионного сечения с помощью (18.6) и называется методом Чу — Лоу.

Способ определения фаз пион-пионного рассеяния из данных реакции (*), не использующий экстраполяции, был предложен в работах Феррари и Селлери (1961) и Селлери (1965). Эти авторы явно учли тот факт, что заштрихованные вершины на рис. 34 не находятся на массовой поверх-

ности обменного пиона. Формула, предложенная ими, имеет вид

$$\frac{d\sigma_{\pi_1 N \rightarrow 2\pi+N}}{dt d\omega d(\cos \theta)} = \frac{j^2 m_N^2(-t)}{\pi p^2 s \mu^2} \frac{F^2(t)}{(\mu^2 - t)^2} \omega^2 q^{\text{off}} \frac{d\sigma_{\pi\pi}(\omega, t, \cos \theta)}{d(\cos \theta)}. \quad (18.7)$$

Здесь s — квадрат полной энергии в с.ц.м. всех частиц, p — импульс начального нуклона в этой системе, $q^{\text{off}} = \left[\left(\frac{\omega^2 + \mu^2 - t}{2\omega} \right)^2 - \mu^2 \right]^{1/2}$ — импульс обменного пиона в с.ц.м. разлетающихся пионов, $F(t)$ — множитель, учитывающий виртуальность обменного мезона, имеющий вид

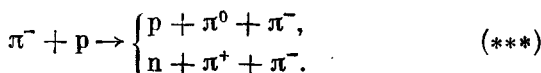
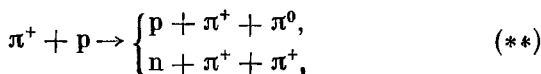
$$F(t) = 0,28 + \frac{0,72}{1 + \frac{\mu^2 - t}{4,73 \mu^2}},$$

$\frac{d\sigma_{\pi\pi}(\omega, t, \cos \theta)}{d(\cos \theta)}$ — дифференциальное сечение $\pi\pi$ -рассеяния вне массовой поверхности,

$$q^{\text{off}} \frac{d\sigma_{\pi\pi}}{d(\cos \theta)} = 8\pi q \left| \sum_I \dots \sum_l (2l+1) \frac{e^{i\delta_I^l} \sin \delta_I^l}{q} \left(\frac{q^{\text{off}}}{q} \right)^l P_l(\cos \theta) \right|^2. \quad (18.8)$$

Напомним, что эти формулы опираются на предположение о доминирующей роли однопионной диаграммы. В каждом конкретном случае эта гипотеза может быть проверена с помощью критерия Янга — Тримана (1962). Эти авторы заметили, что в том случае, если реакция идет через однопионный обмен, все сечения не зависят от угла α между плоскостями, первая из которых образована векторами импульса налетающего пиона и первоначального нуклона, а вторая — векторами импульса налетающего пиона и одного из конечных пионов. При этом все векторы берутся в с.ц.м. разлетающихся пионов. Отклонение от критерия Янга — Тримана позволяет судить о вкладах диаграмм, конкурирующих с диаграммой одномезонного обмена.

18.3. Экспериментальные данные. Описанными методами обычно обрабатываются следующие реакции:



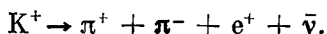
Этих реакций вполне достаточно, чтобы получить информацию обо всех трех изотопических волнах [см. изотопическую структуру (7.30)]. Мы не будем здесь давать подробный обзор экспериментальных данных. Приведем лишь те из них, которые с нашей точки зрения являются наиболее надежными и наименее противоречат друг другу.

a) ρ -волна (ρ -мезон). Резонанс в состоянии $l = 1$, $I = 1$ был предсказан теоретически Фрэзером и Фулко (1960) при интерпретации экспериментальных данных по нуклонному формфактору (см. § 28.2). Затем он был обнаружен при изучении пионного спектра масс в протон-антипротонной аннигиляции и более детально изучен с помощью реакций (**), (***) . К настоящему времени его положение установлено вполне надежно: $m_\rho = 765 \pm \pm 3 \text{ Мэв}$ (см. Розенфельд и др. (1967)).

Определение ширины резонанса является более деликатной задачей, поскольку здесь становится важной форма резонансной кривой, которая зависит от многих факторов. Большое влияние на нее оказывает вклад диаграмм, конкурирующих с диаграммой однопионного обмена, образующий своеобразный фон. Оценка роли этого фона при помощи критерия Янга — Тримана показывает, что во многих экспериментах он не мал. Кроме того, эксперименты по угловому распределению в районе ρ -мезона указывают на то, что s -волна с изоспином $I = 0$ также не мала. Оба эти эффекта приводят к эффективному уширению резонансной кривой. Интуитивно ясно, что если конечные пионы удаляются от нуклона достаточно быстро, вероятность их вторичного взаимодействия с нуклоном уменьшается. Это эквивалентно подавлению роли диаграмм, дающих вклад в фон. Осуществлению таких условий благоприятствует повышение энергии налетаю-

щего пиона. Поэтому более надежными являются эксперименты, использующие начальные пучки с энергией начального мезона выше $1,5 \text{ Гэв}$. Эти эксперименты дают величину полной ширины ρ -мезона, меньшую 100 Мэв (см., например, Колдуэл и др. (1962); Кармони и др. (1964)). Вдали от резонансной области ρ -волна, по-видимому, всюду является пренебрежимо малой.

б) s -волны. Обе волны, по всей видимости, не имеют узких резонансов в низкоэнергетической области (до 1 Гэв). Поэтому получить информацию о них еще труднее, чем о ρ -волне. В принципе изучать s -волны можно с помощью различных экспериментов. Так, данные об s -волнах получают из изучения реакций (*), обрабатывая экспериментальные данные методами Чу — Лоу и Селлери. При этом в хорошо исследованной области энергий вблизи ρ -мезона оказывается, что s -волна с изоспином $I = 0$ не мала (большой параметр асимметрии вперед-назад в угловых распределениях в окрестности ρ -мезона). Реакция (*) используется также для определения длин рассеяния s -волн, если ее обрабатывать методом выделения околопороговой особенности по энергии рождения двух мезонов (Ансельм, Грибов (1959), а также Батусов и др. (1960)). Очень ценным для определения s -волн может оказаться изучение угловых корреляций спектра масс пионов в K_e4 -распаде:



В этом случае наиболее обоснованно можно применять теорию взаимодействия в конечном состоянии, так как в нем сильно взаимодействуют только π^+ и π^- . Об s -волнах $\pi\pi$ -рассеяния можно судить также, изучая s -фазы πN -рассеяния. Согласованных данных об s -волнах по всем реакциям пока нет. Можно, однако, сделать вывод, что s -волна с изоспином $I = 0$ в интервале энергий до 1 Гэв не мала. Ее длины рассеяния порядка $0,5 \div 2,5$ комптоновских длин пиона, и она также не мала в интервале $700\text{—}800 \text{ Мэв}$. В последнее время появился также ряд указаний на возможность прохождения этой волны через резонанс в интервале энергий $400\text{—}700 \text{ Мэв}$ (Лавлес и др. (1966)). s -волна с изоспином $I = 2$, по-видимому, мала во всем этом интервале энергий (до 1 Гэв).

в) *Высшие волны.* Высшие волны в области энергий ниже 1 Гэв с большой вероятностью пренебрежимо малы. В области выше 1 Гэв надежно установленным является резонанс в канале $I = 0, l = 2$ (Селов и др. (1962), Розенфельд и др. (1967)). Он называется f_0 -мезоном и имеет следующие параметры:

$$m_{f_0} = 1253 \pm 20 \text{ Мэв}, \quad \Gamma_{\text{полн}}^{f_0} \approx 120 \text{ Мэв}.$$

Итак, экспериментальные данные о $\pi\pi$ -взаимодействии в области низких энергий сводятся сейчас к следующим фактам:

- а) имеется узкий резонанс в p -волне канала $I = 1$ (ρ -мезон),
- б) существует большая s -волна в канале $I = 0$,
- в) все остальные волны в интервале $\omega < 1 \text{ Гэв}$ малы,
- г) d -волна в канале $I = 0$ проходит через узкий резонанс при энергии выше 1 Гэв (f_0 -мезон).

Эти факты должны быть объяснены теорией.

18.4. Сравнение с экспериментом. Мы видели, что развитая в этой главе теория не способна предсказывать положения резонансов ν_i . Они выступают как независимые параметры (КДД-члены), и их нужно фиксировать, исходя из экспериментальных данных. После этого в наиболее простых решениях остается зависимость еще от одного параметра — «перенормированной константы» пион-пионного взаимодействия λ . Все основные физические характеристики, например длины рассеяния a_i и ширины резонансов Γ_i , являются функциями параметров ν_i и λ . При этом между a_i и Γ_i существуют довольно жесткие корреляции. Во-первых, длины рассеяния s -волн положительны и s -волна с изоспином $I = 0$ значительно больше s -волны с $I = 2$. Во-вторых, ширина ρ -мезона пропорциональна интегралу от сечения в изотопическом канале $I = 0$, поскольку в эффективном потенциале для p -волны s -волна с $I = 0$ обеспечивает центробежный барьер. Коэффициент пропорциональности мал, поэтому для получения не очень малой волны необходимо иметь достаточно большую s -волну в канале $I = 0$. Эта s -волна, однако, ограничена унитарностью, а также тем фактом, что притяжение в s -волне (т. е. величина λ) не может быть сколь угодно большим, так как такое притяжение дало

бы реальное связанное состояние. Это приводит к тому, что константа связи ограничена сверху: $\lambda < \lambda_{\max} \approx 0,4$. Поэтому ширина ρ -мезона тоже имеет верхнюю границу $(\Gamma_{\text{полн}}^{\rho})_{\max} \approx 40$ Мэв. Таким образом, развитая выше теория качественно объясняет экспериментальные данные по низкоэнергетическому $\pi\pi$ -рассеянию, т. е. с необходимостью приводит к большой s -волне в канале $I = 0$ и узкому ρ -мезону. Экспериментальное значение ширины ρ -мезона по крайней мере в два раза превышает возможные теоретические значения. Как было показано в § 17, включение в рассмотренную схему f_0 -мезона позволяет повысить теоретическую границу ширины ρ -мезона не более чем на 20 Мэв. Можно, однако, показать, что правильное количественное описание низкоэнергетического $\pi\pi$ -рассеяния может быть получено при учете неупругих вкладов из области высоких энергий. Эти коротковолновые вклады, имеющие характер отталкивания, приводят к достаточно широкому ρ -мезону при значениях $a_0 \sim 1$ (Серебряков, Ширков (1967)). Этот факт свидетельствует о том, что область низких энергий (условная верхняя граница равна 1 Гэв) не является физически замкнутой.

ГЛАВА 4

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПИОНОВ

§ 19. Электромагнитный формфактор π -мезонов

Рассмотренные выше решения уравнений для $\pi\pi$ -рассеяния позволяют сделать следующий шаг по иерархической лестнице (см. рис. 2) и изучить процессы $\pi K \rightarrow \pi K$ (Исаев, Сэвэрыньский (1961)), $\gamma\pi \rightarrow 2\pi$ и вершину $\gamma\pi\pi$. Последние два процесса описываются сходными линейными интегральными уравнениями. Методы их решения разработаны и позволяют получать ответ в квадратурах. Решение задачи фоторождения π -мезона на π -мезоне и электромагнитного формфактора мезона интересно еще и потому, что с их помощью можно анализировать имеющиеся экспериментальные данные по электромагнитной структуре нуклонов и тормозному излучению жестких γ -квантов в процессе πN -рассеяния.

19.1. Определение электромагнитного формфактора пионов. Вершина $\gamma\pi\pi$ входит непосредственно в первый не исчезающий по e порядок процессов

$$e\pi \rightarrow e\pi \quad \text{и} \quad e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- \quad (*)$$

(рис. 35). При учете только электромагнитных взаимодействий π -мезонов и электронов матричные элементы этих процессов вычисляются по обычным правилам Фейнмана (Боголюбов, Ширков (1957), гл. III) и имеют вид

$$M_{1,2} = -i(2\pi)^2 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) e^2 \epsilon_{3ij} \times \\ \times \frac{m}{(p_1^0 q_2^0)^{1/2}} \frac{1}{(4q_1^0 q_2^0)^{1/2}} \frac{\bar{u}^{s\pm}(p_2)(\hat{q}_1 \pm \hat{q}_2) u^{s\mp}(p_1)}{(q_1 \mp q_2)^2 - i\epsilon}. \quad (19.1)$$

Однако π -мезоны сильно взаимодействуют как друг с другом, так, например, и с нуклонами. Поэтому выражения

(19.1), строго говоря, неверны и должны содержать в вершинах γ -функции, учитывающие эти взаимодействия. Эти функции определяются следующими выражениями:

$$\langle \pi_i | j_\mu(0) | \pi_j \rangle = - \frac{ie e_{3ij}}{\sqrt{4q_i^0 q_j^0}} (q_i + q_j)_\mu F_\pi [(q_i - q_j)^2], \quad (19.2)$$

$$\langle \pi_i \pi_j | j_\mu(0) | 0 \rangle = - \frac{ie e_{3ij}}{\sqrt{4q_j^0 q_i^0}} (q_i - q_j)_\mu F_\pi [(q_i + q_j)^2], \quad (19.3)$$

где $j_\mu(0)$ — оператор электромагнитного тока, i, j — индексы изотопического состояния π -мезонов, а F_π —

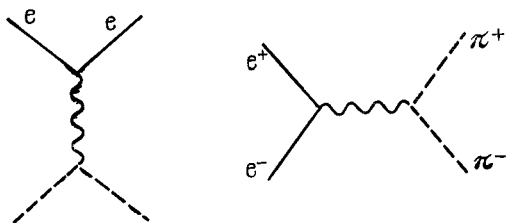


Рис. 35.

так называемый электромагнитный формфактор π -мезона (Дрелл, Захариасен (1962)). Общий вид матричных элементов (19.2), (19.3) определяется лоренц-инвариантностью, законом сохранения электромагнитного тока и изотопической инвариантностью сильных взаимодействий. Нормировочные множители подобраны так, что $F_\pi(0) = 1$. Предположение об отсутствии у π -мезонов сильных взаимодействий приводит к обычной квантовой электродинамике. В этом случае электромагнитный формфактор π -мезона тождественно обращается в единицу. Последнее можно рассматривать как следствие выключения всех сильных взаимодействий π -мезонов.

Процессы (*) можно использовать для экспериментального определения величины $|F_\pi|^2$, которая войдет в дифференциальное сечение множителем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 |F_\pi(t)|^2.$$

Здесь $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ обозначает сечение без учета формфакторов; оно вычисляется с помощью матричных элементов $M_{1,2}$ (см. (19.1)).

Сечения процессов (*) содержат значения электромагнитного формфактора $F_\pi(t)$ мезона в различных физических областях передачи импульса $t = (q_i - q_j)^2 < 0$ и $t > 4\mu^2$ соответственно. Исходя из определения (19.2) и

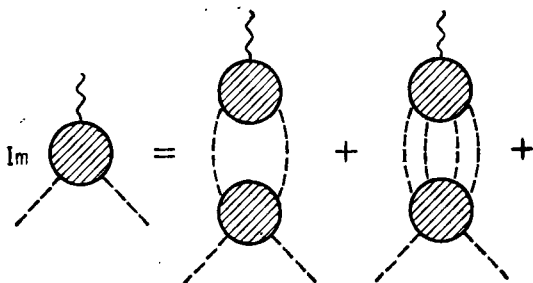


Рис. 36.

инвариантности взаимодействия относительно обращения времени, можно показать, что формфактор $F_\pi(t)$ действителен при $t < 0$. В области $t > 0$ формфактор $F_\pi(t)$, вообще говоря, комплексный. Поэтому может показаться, что в определениях (19.2) и (19.3) использован один символ для двух различных величин. Однако принятое обозначение не случайно, ибо в формулах (19.2) и (19.3) фигурируют граничные значения единой аналитической функции $F_\pi(t)$ комплексного переменного t , но в различных областях.

19.2. Аналитические свойства электромагнитного формфактора пиона. Эти свойства $F_\pi(t)$ по переменной t устанавливаются стандартными методами, которые подробно изложены в книге Боголюбова, Медведева и Поливанова (1958). Наличие у формфактора π -мезона разреза по переменной t при $t > 4\mu^2$ и мнимая часть его на разрезе определяются условиями унитарности. Графическое изображение условия унитарности имеет вид, показанный на рис. 36. Полный набор состояний в этом случае совпадает с таковым для $\pi\pi$ -рассеяния.

В двухчастичном приближении мнимая часть $F_\pi(t)$ выражается через сам формфактор $F_\pi(t)$ и амплитуду $\pi\pi$ -рассеяния. Воспользовавшись определениями формфактора (19.3) и амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния (7.26), можно получить из условия унитарности (7.5) (Федербуш и др. (1958))

$$\text{Im } F_\pi(t) = F_\pi(t) e^{-i\delta_1^1(t)} \sin \delta_1^1(t), \quad (19.4)$$

где $\delta_1^1(t)$ — фаза $\pi\pi$ -рассеяния в состоянии с $T = J = 1$. Строго говоря, соотношение (19.4) верно лишь в области $t < 16\mu^2$, где процессы рождения π -мезонов $2\pi \rightarrow 4\pi$ не дают вклада. Однако его считают справедливым всюду, предполагая, что вклад больших энергий мало влияет на вид формфактора в низкоэнергетической области. Далее, применяя теорему Коши к функции $F_\pi(t)$ при интегрировании по контуру C (рис. 37), получаем уравнение

$$F_\pi(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_\pi(t')}{t' - t} dt', \quad (19.5)$$

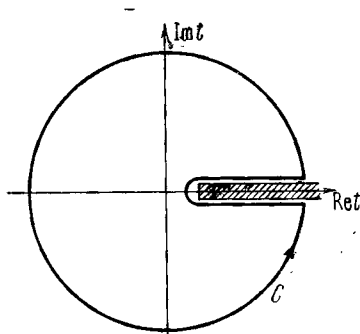


Рис. 37.

причем $F_\pi(0) = 1$.

При выводе (19.5) принимается, что $|F_\pi(t)| \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Требование к характеру убывания $F_\pi(t)$ можно ослабить, рассмотрев уравнение (19.5) с вычитанием,

$$F_\pi(t) = 1 + \frac{t}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_\pi(t')}{t'(t' - t)} dt, \quad (19.6)$$

которое автоматически учитывает нормировку. Очевидно, что для убывающих формфакторов уравнения (19.5) и (19.6) эквивалентны, поэтому для простоты рассмотрим решения первого из них.

19.3. Решение уравнения для формфактора и единственность решения. Определим граничные значения аналитической функции

$$F_{\pi}^{(\pm)}(t) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ t > 4\mu^2}} F_{\pi}(t \pm i\varepsilon). \quad (19.7)$$

Тогда из условия унитарности (19.4) следует, что граничные значения связаны соотношением

$$F_{\pi}^{(+)}(t) = e^{2i\delta_1^+(t)} F_{\pi}^{(-)}(t), \quad (19.8)$$

т. е. функции $F_{\pi}^{(\pm)}(t)$ имеют аргументы

$$\arg F_{\pi}^{(\pm)}(t) = \pm \delta_1^+(t).$$

Нижеследующий прием является стандартным в теории краевых задач (Гахов (1963)). Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(t) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\delta_1^+(t')}{t' - t} dt' \right\}.$$

Очевидно, что интеграл существует, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1^+(t) = \delta_1^+(\infty) = 0.$$

Это ограничение несущественно, и его можно избежать, если наряду с $\tilde{u}(t)$ определить функцию

$$u(t) = \exp \left\{ \frac{t}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{\delta_1^+(t')}{t'(t' - t)} dt' \right\},$$

которая существует и для $\delta_1^+(\infty) \neq 0$. Вычислим теперь разность граничных значений функции $F_{\pi}(t)/u(t)$ на верхнем и нижнем берегах разреза $t > 4\mu^2$. Видно, что

$$\frac{F_{\pi}(t)}{u(t)} \Big|_{-}^{+} = \left[\frac{F_{\pi}(t)}{u(t)} \right]_{-}^{+} - \left[\frac{F_{\pi}(t)}{u(t)} \right]_{-}^{-} = 0. \quad (19.9)$$

Отсюда следует, что функция $F_{\pi}(t)/u(t)$ вообще не имеет разрывов, т. е. является целой функцией комплексного переменного t :

$$F_{\pi}(t) = P(t) u(t),$$

где $P(t)$ — целая функция t . Из определения $u(t)$ следует, что

$$|u(t)| \underset{|t| \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{1}{t} \right|^{\delta(\infty)/\pi}.$$

Поэтому требование убывания $|F_\pi(t)|$ на бесконечности автоматически приводит к тому, что $P(t)$ — полином степени не выше наибольшего целого числа, меньшего $\delta(\infty)/\pi$. В уравнении (19.6) ограничение на степень полинома ослабляется, и она может быть на единицу выше степени полинома в решении уравнения (19.5).

Таким образом, общее выражение для электромагнитного формфактора π -мезона в приближении двухчастичной унитарности имеет вид

$$F_\pi(t) = P_n(t) \exp \left\{ \frac{t}{\pi} \int_4^\infty \frac{\delta_1^1(t') dt'}{t'(t'-t)} \right\}, \quad (19.10)$$

$$P_n(t)|_{t=0} = 1.$$

Произвол в определении $F_\pi(t)$ отсутствует только для фаз, у которых $\delta(\infty) = 0$. В остальных случаях условие нормировки $F_\pi(0) = 1$ определяет только свободный член полинома $P_n(t)$. Попытки устранить эту неоднозначность не привели к успеху (Грашин (1962)). Прежде чем обсуждать их, сделаем замечания относительно вида общего решения. Для широкого класса фаз рассеяния, определенного формулой

$$\operatorname{tg} \delta_l(t) = (t - 4\mu^2)^{\frac{2l+1}{2}} R(t), \quad (19.11)$$

где $R(t)$ — рациональная функция t , интеграл в (19.10) может быть вычислен аналитически с помощью теории вычетов, и формфактор $F_\pi(t)$ равен (Исаев и др. (1963))

$$F_\pi(t) = P_n(t) \prod_{r,s} \frac{i \sqrt{1 - t/4\mu^2} - k_r}{i \sqrt{1 - t/4\mu^2} + k_s} \frac{i + k_s}{i - k_r}, \quad (19.12)$$

где $(1 - t/4\mu^2)^{1/2} > 0$ для $t < 0$, $k_{s,r}$ — корни уравнения $1 + i \operatorname{tg} \delta_l [4(k^2 + \mu^2)] = 0$, такие, что

$$\operatorname{Im} k_s > 0, \quad \operatorname{Im} k_r < 0,$$

и k — импульс π -мезона в с.ц.м. $\pi\pi$ -системы.

Общее выражение (19.10) удобно для расчетов, однако важно получить и качественное представление о виде $F_\pi(t)$. Для этого рассмотрим простой случай брейт-вигнеровского резонанса в p -волне ($l = 1$), когда

$$\operatorname{tg} \delta_1^i(t) = \frac{\gamma(t - 4\mu^2)^{3/2}}{t_r - t},$$

$$h(t) = \frac{e^{i\delta_1^i(t)} \sin \delta_1^i(t)}{(t - 4\mu^2)^{3/2}} = \frac{\gamma}{t_r - t - i\gamma(t - 4\mu^2)^{3/2}}.$$

Параметры t_r и γ определяют положение и ширину резонанса (ρ -мезона). Легко видеть, что функция $h(t)$ имеет на разрезе $t > 4\mu^2$ фазу, совпадающую с фазой $u(t)$. При малых значениях γ она обладает далеким полюсом в точке $t \approx 4 - \frac{2}{\gamma}$. Поскольку он расположен далеко от интересующей нас области малых энергий ($t \sim 4\mu^2$), то, очевидно, влияние его на $F_\pi(t)$ будет несущественным.

Тогда, повторяя все рассуждения, начиная с формулы (19.7) и до (19.10), с функцией $h(t)$ вместо $u(t)$, получим

$$F_\pi(t) = \frac{c}{t_r - t - i\gamma(t - 4\mu^2)^{3/2}}, \quad (19.13)$$

где c — нормировочная константа. Строго говоря, она является функцией t и имеет вид $c = c_0 \frac{\gamma^{-1}}{t + \gamma^{-1}}$. Однако при $|t| < 1/\gamma$ зависимость от t несущественна. Конечно, выражение (19.13) можно получить и из общей формулы (19.12); указанный здесь способ его получения типичен для многих приложений дисперсионного метода.

Теперь можно составить представление о виде формфактора для случая резонансного поведения фазы. При малой ширине резонанса (ρ -мезон) функция $F_\pi(t)$ для отрицательных значений t хорошо аппроксимируется простым полюсом:

$$F_\pi(t) \approx \frac{c}{t_r - t}. \quad (19.14)$$

Именно это свойство формфактора $F_\pi(t)$ может вызывать физическое возражение. Поскольку ширина γ пропорцио-

нальна константе связи ρ -мезона с π -мезонами, то при выключении $\pi\pi$ -взаимодействия естественно требовать

$$F_{\pi}(t) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \gamma \rightarrow 0. \quad (19.15)$$

Условие (19.15) можно рассматривать как дополнительное требование к выбору полинома $P_n(t)$ в общем выражении для формфактора (формула (19.12)). Однако оно оказывается недостаточным для однозначного выбора $P_n(t)$. Более того, именно остающийся при этом произвол позволяет описать данные опыта. Так, вместо формулы (19.13), исходя из (19.6), можно получить

$$F_{\pi}(t) = \frac{t_r - t + \alpha\gamma}{t_r - t - i\gamma(t - 4\mu^2)^{3/2}} \frac{t_r + i\gamma(4\mu^2)^{3/2}}{t_r + \alpha\gamma}. \quad (19.16)$$

Очевидно, что выражение (19.16) удовлетворяет требованию (19.15). Фактически оно приводит к тому, что за счет произвольности параметра α можно добиться резкого возрастания $|F_{\pi}(t)|$ в области резонанса. Тем самым возможное различие выражений (19.16) и (19.13) в области резонанса несущественно, если не считать дополнительного параметра α в формуле (19.16).

Условие обращения формфактора $F_{\pi}(t)$ в единицу при выключении $\pi\pi$ -взаимодействия ($\gamma \rightarrow 0$) выполняется для всех формфакторов, у которых полином $P_n(t)$ содержит нуль, стремящийся к t_r при $\gamma \rightarrow 0$. Очевидно, при этом все еще остается значительный произвол. Он связан с тем, что нулям не придается физической интерпретации. Поясним это на примере нерелятивистского упругого рассеяния. Нули матричных элементов S -матрицы, т. е. функций $\exp\{2i\delta(E)\}$, соответствуют полюсам на втором листе римановой поверхности E . Полюс, близко расположенный к действительной оси, вызывает резкое возрастание сечения и может трактоваться как связанное состояние сталкивающихся частиц с конечным временем жизни. Аналогичной интерпретации нулей формфактора $F_{\pi}(t)$ не существует. Поэтому вопрос о наличии нулей формфактора $F_{\pi}(t)$ решается путем сравнения исходных предположений с опытом. Так, в процессе $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ присутствие нуля в $F_{\pi}(t)$ вблизи резонанса не приведет к резкому возрастанию сечения, которого можно было бы ожидать при

справедливости формулы (19.13). Однако этот процесс сейчас еще не доступен прямому экспериментальному изучению, и для определения $F_\pi(t)$ приходится прибегать к менее чувствительным реакциям. Характерное резкое

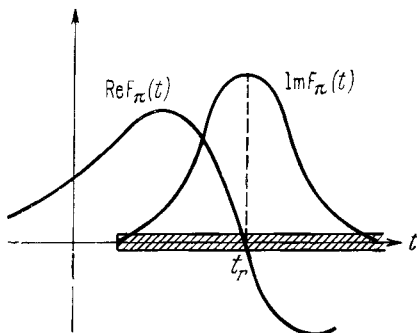


Рис. 38.

возрастание $|F_\pi(t)|$ в области резонанса (рис. 38) (отсутствие нуля) было впервые использовано в работе Фрэзера и Фулко (1960) по объяснению электромагнитной структуры нуклона (§ 28).

§ 20. Фоторождение пионов на пионах

Как отмечалось в начале § 19, процесс фоторождения пионов на пионах может быть точно решен в рамках двухчастичной унитарности. Как и в случае электромагнитного формфактора пиона, решение содержит произвол. Обсуждение следствий этого произвола, а также возможных путей его устранения весьма важно для дисперсионного подхода. Отметим также, что процесс $\gamma + \pi \rightarrow \pi + \pi$ входит в полюсные диаграммы реакций $\gamma + N \rightarrow N + 2\pi$ и $\pi + N \rightarrow \pi + N + \gamma$ (рис. 39). Поэтому выводы теории могут быть проверены на эксперименте (Неменов (1962)). Конечно, надежность такой проверки зависит еще и от того, насколько важны другие диаграммы в этих процессах. Так, для процесса тормозного излучения пионов на нуклонах было показано (Мещеряков и др. (1965)), что полюсная диаграмма дает доминирующий вклад в жесткой ча-

сти спектра γ -квантов. Этот факт является обнадеживающим обстоятельством для определения характеристик фоторождения пионов на пионах.

20.1. Кинематика и структура матричного элемента. Обозначим импульсы пионов через q_1, q_2, q_3 , а импульс фотона через k . Будем считать все частицы входящими (рис. 40), т. е. что закон сохранения энергии-импульса имеет вид

$$k + q_1 + q_2 + q_3 = 0. \quad (20.1)$$

Как обычно, введем инвариантные переменные

$$\begin{aligned} s &= (k + q_1)^2, \quad u = (q_3 + q_1)^2, \\ t &= (q_1 + q_2)^2, \end{aligned} \quad (20.2)$$

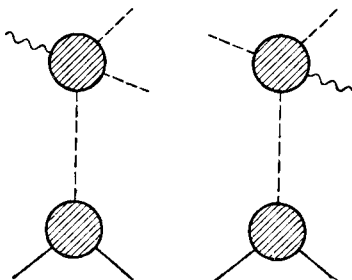


Рис. 39.

которые на массовой поверхности связаны соотношением

$$s + u + t = 3\mu^2. \quad (20.3)$$

В качестве первого процесса выберем

$$\gamma + \pi_1(q_1) \rightarrow \pi_2(q_2) + \pi_3(q_3).$$

Тогда в с.ц.м. получим

$$\left. \begin{aligned} s &= (k + \omega_q)^2 = 4\omega_q^2, \\ u &= \mu^2 - 2k\omega_q - 2kq \cos \theta, \\ t &= \mu^2 - 2k\omega_q + 2kq \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (20.4)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $\omega_q = \sqrt{\mu^2 + q^2}$, $\cos \theta = (\mathbf{k}\mathbf{q}) / kq$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_3$. Несмотря на то, что $k^2 = 0$, а $q_i^2 = \mu^2$, процесс фоторождения пионов обладает большой симметрией, так как процессы II и III (§ 5) также являются процессами фоторождения пионов на пионах.

Перейдем к анализу изотопической и спиновой структуры матричного элемента этого процесса. При анализе спиновой структуры будем исходить из лоренц-инвариантности и градиентной инвариантности. Последняя означает, что если в матричном элементе произвести формальную замену поляризации фотона ε на его импульс k , то он

обратится в нуль. Итак, матричный элемент записывается в виде (Гурдэн, Мартэн (1960))

$$\begin{aligned} \langle \pi_2 \pi_3 | S | \pi_1 \gamma \rangle = \\ = (2\pi)^4 \delta(k + q_1 + q_2 + q_3) \times \frac{\varepsilon_{mnr_s} (q_1)_m (q_2)_n (q_3)_r \varepsilon_s}{4 (q_1^0 q_2^0 q_3^0 k)^{1/2}} \tilde{F}(s, u, t). \end{aligned} \quad (20.5)$$

Функция $\tilde{F}(s, u, t)$ имеет еще изоспиновую структуру. Для выяснения ее

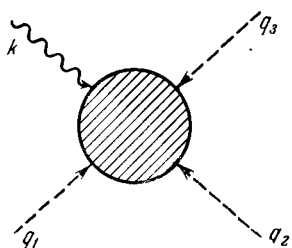


Рис. 40.

заметим, что G -инвариантность матричного элемента приводит к тому, что в процессе фоторождения пионов на пионах участвуют только изоскалярные фотоны. Обозначим через α , β и γ изотопические переменные мезонов 1, 2 и 3 соответственно. Можно показать, что трехмезонное состояние с нулевым значением полного изотопического спина антисимметрично относительно перестановки двух любых пионов (Боголюбов (1966)). Поэтому окончательный вид матричного элемента (20.5) дается формулой

$$\begin{aligned} \langle \pi_2 \pi_3 | S | \pi_1 \gamma \rangle = \\ = (2\pi)^4 \delta(k + q_1 + q_2 + q_3) \times \frac{\varepsilon_{mnr_s} (q_1)_m (q_2)_n (q_3)_r \varepsilon_s}{4 (q_1^0 q_2^0 q_3^0 k)^{1/2}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F(s, u, t), \end{aligned} \quad (20.6)$$

где $F(s, u, t)$ — скалярная функция. В с.д.м. первого процесса он принимает вид

$$\langle \pi\pi | S | \pi\gamma \rangle = (2\pi)^4 \delta(k + q_1 + q_2 + q_3) \frac{\varepsilon_\nu [qk]}{4 \sqrt{\omega_k} k} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F(s, u, t),$$

где ν — индекс поляризации фотона, и дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} k q^3 \sin \theta \left| \frac{F}{8\pi} \right|^2. \quad (20.7)$$

Поскольку пионы являются бозонами, функция $F(s, u, t)$ в (20.6) полностью симметрична по своим аргументам и разложение по парциальным волнам первого процесса

$$F(s, u, t) = \sum_{\text{неч. } l} f_l(s) P'_l(\cos \theta) \quad (20.8)$$

содержит только нечетные l , так как пионы в конечном состоянии имеют полный изотопический спин 1. В условии унитарности полная система функций $|n\rangle$ образует такой же набор состояний, как и для пп-рассеяния. В двухчастичном приближении условие унитарности приводит к уравнению

$$\text{Im } f_l(s) = f_l(s) e^{-i\delta_l^1(s)} \sin \delta_l^1(s), \quad (20.9)$$

где δ_l^1 — фаза пп-рассеяния в состоянии с $I = 1$ и орбитальным моментом l .

20.2. Представление Мандельстама. Для функции $F(s, u, t)$ оно имеет простой вид. Как и в процессе пп-рассеяния, функция $F(s, u, t)$ не имеет полюсного члена, ибо полная система $|n\rangle$ не содержит одночастичных состояний. Ввиду большой симметрии процесса фоторождения пионов на пионах (функция $F(s, u, t)$ полностью симметрична) представление Мандельстама содержит единственную спектральную функцию. Его удобно записать следующим образом:

$$F(s, u, t) = f(s, u) + f(s, t) + f(u, t),$$

где, например,

$$f(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{(2\mu)^2}^{\infty} \int_{(2\mu)^2}^{\infty} \frac{\rho(x, y) dx dy}{(x-s)(y-t)}. \quad (20.10)$$

Точная граница области определения спектральной функции $\rho(x, y)$ задается условием унитарности. Способ ее получения был подробно разобран на примере пп-рассеяния (§ 8.2). Поэтому не будем повторять всех вычислений, а воспользуемся интерпретацией результатов на языке теории возмущений, введенной в § 8.4. Согласно этой интерпретации граница области задания функции $\rho(x, y)$ определяется границами спектральных функций

диаграмм рис. 41. Уравнения границ имеют вид

$$\left(\frac{s}{4} - \mu^2\right)(4\mu^2 - t)^2 + 2\mu^2 [s\mu^2(2\mu^2 - t) - s(t + 2\mu^2)] = 0$$

$$(s_a = 4\mu^2, \quad t_a = 16\mu^2),$$

$$\left(\frac{t}{4} - \mu^2\right)(4\mu^2 - s)^2 + 2\mu^2 [t\mu^2(2\mu^2 - s) - t(s + 2\mu^2)] = 0$$

$$(s_a = 16\mu^2, \quad t_a = 4\mu^2).$$

Из представления (20.10) обычным способом (§ 5.3) легко получить дисперсионное соотношение для фиксированного значения t :

$$F(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', u)}{s' - u} ds'. \quad (20.11)$$

Дисперсионное соотношение (20.11), вообще говоря, содержит ненаблюдаемую область. Действительно, при малых

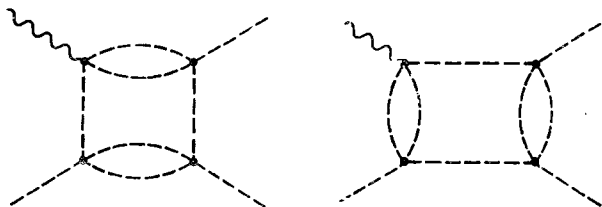


Рис. 41.

значениях q (на пороге реакции $k = \frac{3}{4}\mu$) величина $\cos \theta$ выходит за пределы интервала $[-1, +1]$:

$$\cos \theta = \frac{\mu^2 - t - 2k\omega_a}{2kq}.$$

Нефизических значений $\cos \theta$ легко избежать, если рассматривать дисперсионное соотношение при $t = -\mu^2/2$.

Выражения (20.10) и (20.11) записаны в виде, соответствующем убыванию амплитуды $F(s, u, t)$ на бесконечности. Вообще говоря, достаточно веских аргументов в пользу невычтенных соотношений (20.11) не существует. Однако можно утверждать, что если сечения фоторождения и рассеяния ведут себя одинаковым образом на бес-

конечности, то инвариантная функция фоторождения $F(s, u, t)$ убывает быстрее, чем амплитуды рассеяния. Разница в степени роста обусловлена требованием градиентной инвариантности, которое приводит к появлению кинематического множителя в соотношении между матричным элементом и функцией $F(s, u, t)$ (20.6). Поэтому, если предполагать справедливыми д. с. без вычитания для $\pi\pi$ -рассеяния, то такое же утверждение заведомо верно для фоторождения пионов на пионах.

В пользу убывания функции $F(s, u, t)$ приводят еще и такое соображение (Соловьев (1961)). Известно, что последовательное рассмотрение пион-нуклонного взаимодействия в рамках идей перенормировок требует введения пион-пионного взаимодействия с неизвестным значением константы связи. С другой стороны, включение взаимодействия с электромагнитным полем не приводит к появлению новых констант, если считать константу электромагнитного взаимодействия известной (принцип минимальности электромагнитного взаимодействия). Следовательно, появление неизвестных констант вычитания в дисперсионном методе не желательно, что и определяет степень роста. Ниже будет показано, что такая точка зрения не обязательно предполагает отсутствие неизвестных констант.

20.3. Уравнения для парциальных волн. Интегральное уравнение для функции $f_l(s)$ легко получить дифференциальным методом. Ограничимся при малых энергиях в разложении (20.8) первым членом. Второй член имеет $l = 3$, и, по-видимому, им можно пренебречь. Тогда имеем

$$F(s, u, t) = f_1(s) \equiv f(s),$$

и дисперсионное соотношение (20.11) совместно с условием унитарности (20.9) приводит к однородному, линейному по $f(s)$, сингулярному интегральному уравнению. Такое уравнение допускает нулевое решение. Если считать это недостатком теории, то его легко исправить. Для этого учтем более высокие по массе члены в условии унитарности (3.9). Наиболее важным, но не первым вслед за двухпионным состоянием будет NN -состояние. Этот дополнительный член при малых энергиях ($s \ll 4M^2$) мало меняется и хорошо аппроксимируется константой. Окончательное

уравнение имеет вид

$$f(v) = \Lambda + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im } f(v') \left[\frac{1}{v' - v - i\varepsilon} + \frac{1}{v' + v + i/s} \right] dv', \quad (20.12)$$

где $v = q^2/\mu^2$ и

$$\Lambda = \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{dv'}{v'} F(s', 1).$$

Строго говоря, вместо одной константы Λ должен присутствовать ряд по v , в котором учтен только один член:

$$\frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', 1)}{v' - v} dv' = \Lambda + \frac{v}{\pi} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F(s', 1)}{v'^2} dv' + \dots$$

Постоянной Λ можно придать и другой смысл, точнее, получить для нее другое аналитическое выражение. Воспользуемся представлением Чини — Фубини, т. е. вместо (20.10) будем исходить из следующего выражения:

$$F(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \text{Im } f(s') \left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - u} + \frac{1}{s' - t} \right) ds'. \quad (20.13)$$

В формуле (20.13), как и в (20.12), должен присутствовать полином, симметричный по s, u, t . Если им пренебречь, то, полагая, как и выше, $t = -\mu^2/2$, получим

$$\Lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im } f(v') \frac{dv'}{v' + i/s}. \quad (20.14)$$

Результат, содержащийся в формуле (20.14), можно сформулировать следующим образом: неупругие процессы в каналах I и II (§ 5) приводят в дисперсионных соотношениях к величинам, которые выражаются через упругую амплитуду третьего процесса.

20.4. Решение уравнения для парциальной волны и единственность решения. Метод решения уравнения (20.12) аналогичен методу, применявшемуся при изучении элект-

ромагнитного фактора пиона. Усложнения связаны с наличием у функции $f(v)$ двух разрезов, а также с присутствием постоянной Λ . Как и следует ожидать, общее решение линейного сингулярного уравнения (20.12) равно сумме какого-либо частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Не будем вдаваться в детали решения и остановимся на результате, который имеет вид (Соловьев (1961))

$$\left. \begin{aligned} f(v) &= [\Lambda A^{-1} (v + 9/16)^2 + C] \exp \{ \Delta(v) \}, \\ \Delta(v) &= \frac{v + 9/16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\delta(v')}{v' + 9/16} \left(\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{v' + v + 9/8} \right) dv'. \end{aligned} \right\} \quad (20.15)$$

Здесь A — коэффициент при $1/v^2$ в разложении $\exp \{ \Delta(v) \}$ по обратным степеням v , C — любое действительное число. Функция $\Delta(v)$ без труда вычисляется с помощью теории вычетов точно так же, как это было сделано при выводе общей формулы (19.10).

Формула (20.15) записана в предположении

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \delta(v) = \pi.$$

Она определяет наиболее общий вид функции, которая обладает следующими свойствами:

а) перекрестной симметрией (симметрична при замене $v \rightarrow -v - 9/16$),

б) $\lim_{v \rightarrow \infty} f(v) = \Lambda$,

в) фаза $f(v)$ равна $\delta(v)$.

Функция $f(v)$ содержит произвольную постоянную C . Постоянная Λ в принципе выражается через известные значения констант взаимодействия с помощью соотношения (20.12). Если воспользоваться теорией возмущений, то из диаграммы рис. 42 получаем $\Lambda = 32 f^3 \sqrt{\alpha}$. Относительно величины C нельзя априори сделать аналогичного утверждения, хотя принцип минимальности электромагнитного взаимодействия и указывает на существование связи между Λ и C . Решение (20.15) допускает любой вид зависимости Λ от C , лишь бы действительным Λ

соответствовали действительные C . Таким образом, решение дисперсионных уравнений не противоречит принципу

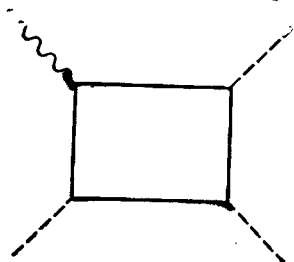


Рис. 42.

минимальности электромагнитного взаимодействия. Для установления конкретного вида функции $\Lambda(C)$ необходимы дополнительные условия. Их можно сформулировать несколькими способами. Так, например, можно потребовать, чтобы решение неоднородного уравнения (20.12) на бесконечности стремилось к нулю быстрее, чем убывает

общее решение однородного уравнения. Иначе, это условие записывается в виде равенства

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{[\Lambda A^{-1}(v + \frac{1}{2})^2 + C] \exp\{\Delta(v)\} - \Lambda}{\exp\{\Delta(v)\}} = 0. \quad (20.16)$$

Удовлетворить условию (20.16) не легко. Во всяком случае для этого необходимо, чтобы фаза при больших v имела вид $\delta(v) = \pi - \frac{\varepsilon}{v^\beta}$ и $\beta \geq 3$. Простейшая формула Брейта — Вигнера

$$\operatorname{tg} \delta(v) = \gamma \frac{V\bar{v}}{v_r - v} \quad (20.17)$$

этому условию не удовлетворяет. Поэтому для фазы (20.17) вместо (20.16) можно потребовать отсутствие члена $1/v^2$ в разложении общего решения по $1/v$. В такой формулировке произвол в установлении связи $\Lambda(C)$ наиболее очевиден.

Второй способ установления вида функции $\Lambda(C)$ непосредственно следует из (20.14), если для $f(v)$ использовать общее решение (20.15). Уравнение (20.14) определит тогда, при заданной фазе $\delta(v)$, величину Λ/C . Не удивительно, что оба правила вычисления приводят к разным результатам. Прямую экспериментальную проверку (20.15) провести очень трудно. Однако практически осуществима следующая последовательность сравнения (20.15) и (20.14) или (20.16) с результатами опыта. Во-первых, из экспе-

римента по тормозному излучению пионов на нуклонах определяется значение C , затем из (20.14) или (20.16) находится Λ . Далее примем, как обычно, существование ρ -мезона (резонанс в фазе с $I = J = 1$). Тогда в решении (20.15) можно выделить полюсной член. Положение полюса определяется массой ρ -мезона. Вычет в полюсе равен произведению констант взаимодействия $g_{\rho\pi\gamma}$ и $g_{\rho\pi\pi}$. Эти утверждения уже использовались нами (см. § 4). Константы $g_{\rho\pi\gamma}$ и $g_{\rho\pi\pi}$ известным образом связаны с ширинами мезона по отно-

шению к распадам $\rho \begin{matrix} \nearrow \pi + \gamma \\ \searrow \pi + \pi \end{matrix}$. Величина $g_{\rho\pi\pi}$ определяется

из $\pi\pi$ -рассеяния. Поэтому далее на основе (20.15) вычисляется ширина $\Gamma_{\rho\pi\gamma}$, которую уже можно сравнивать со значениями, полученными из других источников. После подробного описания хода рассуждений по сравнению (20.15) с опытом приведем результат (Мещеряков и др. (1965)). Было получено, что ширина $\Gamma_{\rho\pi\gamma}$ очень чувствительна к величине отношения Λ/C . Ни одно из условий (20.14) и (20.16) не определяет его с достаточной точностью. Следовательно, более разумно рассматривать Λ и C как независимые параметры.

Выводы главы можно сформулировать следующим образом: рассмотрение электромагнитной структуры пиона и фоторождения пионов на пионах в рамках дисперсионного подхода дает возможность указать, как нужно вводить параметры в амплитуды этих процессов, если предполагать определенную картину взаимодействия пионов в состоянии с $I = J = 1$; динамического описания в дисперсионном подходе получить не удается.

ГЛАВА 5

ПИОН-НУКЛОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

§ 21. Амплитуда пион-нуклонной вершины

Упругое πN -рассеяние стоит непосредственно за $\pi\pi$ -взаимодействием в последовательности сильных взаимодействий иерархической лестницы (см. рис. 2). Этот процесс соответствует диаграмме, изображенной на рис. 12. Диаграмма описывает также процесс аннигиляции $\pi\pi \rightarrow \rightarrow N\bar{N}$. Поэтому наряду с πN -рассеянием нам придется исследовать процесс $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Рассмотрим сперва структуру амплитуды пион-нуклонного рассеяния.

21.1. Амплитуда пион-нуклонного рассеяния (Голдбергер, Ватсон (1965)). О ней говорилось в § 4 при проверке дисперсионных соотношений πN -рассеяния вперед. При этом использовались экспериментальные данные по полным сечениям и действительной части амплитуды рассеяния под нулевым углом. Однако сейчас имеются детальные экспериментальные данные по угловым распределениям в широком интервале энергий. Интерпретация этих данных основана на анализе изотопической и спиновой структуры амплитуды перехода T , которая определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle p_2 s_2 t_2, q_2 \beta | S-1 | p_1 s_1 t_1, q_1 \alpha \rangle = & i (2\pi)^4 \delta(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) \times \\ & \times \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{M}{(4p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0)^{1/2}} \bar{u}^{s_2(+)}(p_2) T_{\beta t_1, \alpha t_1}(p_2 q_2, p_1 q_1) u^{s_1(-)}(p_1), \end{aligned} \quad (21.1)$$

где $p_{1,2}$ — импульсы нуклонов, $q_{1,2}$ — импульсы мезонов, t, α, β — изотопические индексы нуклонов и мезонов, \bar{u}, u — нормированные спинорные функции нуклонов.

При рассмотрении изотопической структуры амплитуды T будем пренебрегать слабыми и электромагнитными взаимодействиями (что фактически уже предполагалось при установлении ее аналитических свойств) и, так же как в случае $\pi\pi$ -рассеяния, считать, что T инвариантна относительно вращений в изотопическом пространстве. Из двух изотопических векторов ω (изотопический спин мезонов) и τ (изотопический спин нуклонов) можно построить только две величины, инвариантные относительно вращений в изотопическом пространстве, а именно: 1 и $(\omega\tau)$. Тогда для амплитуды T получаем

$$T_{\beta t_2, \alpha t_1} = \delta_{\beta\alpha} \delta_{t_1 t_2} T^{(+)} - (\omega_{\beta\alpha} \tau_{t_2 t_1}) T^{(-)}. \quad (21.2)$$

Величины $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ являются скалярными функциями в изотопическом пространстве и матрицами в спиновом пространстве. Замечая, что $\omega_{i\beta\alpha} = -i\varepsilon_{i\beta\alpha}$, где $\varepsilon_{i\beta\alpha}$ — единичный антисимметричный тензор, можем представить формулу (21.2) в виде

$$T_{\beta t_2, \alpha t_1} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{t_1 t_2} T^{(+)} + \frac{1}{2} [\tau_{\beta} \tau_{\alpha}]_{t_2 t_1} T^{(-)}. \quad (21.3)$$

Инвариантность T относительно вращений в изотопическом пространстве (изотопическая инвариантность) приводит к тому, что она зависит только от величины полного изотопического спина

$$I = \omega + \frac{\tau}{2}. \quad (21.4)$$

Поэтому удобно выразить T через проекционные операторы на состояния с $I = 3/2, 1/2$. Из (21.4) легко видеть, что ими будут

$$\left. \begin{aligned} P_{3/2} &= \frac{2 + (\omega\tau)}{3}; & (P_{3/2})_{\beta\alpha, t_2 t_1} &= \frac{2\delta_{\alpha\beta} \delta_{t_2 t_1} - \frac{1}{2} [\tau_{\beta} \tau_{\alpha}]_{t_2 t_1}}{3}; \\ P_{1/2} &= \frac{1 - (\omega\tau)}{3}; & (P_{1/2})_{\beta\alpha, t_2 t_1} &= \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta_{t_2 t_1} + \frac{1}{2} [\tau_{\beta} \tau_{\alpha}]_{t_2 t_1}}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (21.5)$$

Так как $P_{3/2} P_{1/2} = 0$, то ясно, что высшие степени $(\omega\tau)$ сводятся к матрицам формулы (21.2), которая в операторной

форме имеет вид

$$T = (T^{(+)} - T^{(-)}) P_{3/2} + (T^{(+)} + 2T^{(-)}) P_{1/2}. \quad (21.6)$$

Величины $T^{(+)}$, $T^{(-)}$ можно выразить через две амплитуды любых физических процессов. В качестве таковых выберем амплитуды процессов (см. § 4)

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p \sim T_{++}, \\ \pi^- + p &\rightarrow \pi^- + p \sim T_{--}. \end{aligned}$$

Тогда, используя разложение волновых функций систем $\pi^\pm p$ по состояниям с заданным значением полного изотопического спина I (Нишиджима (1965)), легко получить

$$T_{++} = T_{3/2}, \quad T_{--} = \frac{1}{3} T_{3/2} + \frac{2}{3} T_{1/2}, \quad (21.7)$$

$$T^{(+)} = \frac{1}{2} (T_{++} + T_{--}), \quad T^{(-)} = \frac{1}{2} (T_{--} - T_{++}). \quad (21.8)$$

Амплитуда третьего наблюдаемого процесса $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ имеет вид

$$T_{-0} = \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}). \quad (21.9)$$

Остальные процессы непосредственно не наблюдаемы, хотя их амплитуды также можно выразить через $T_{3/2}$ и $T_{1/2}$:

$$\left. \begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{3} (2T_{3/2} + T_{1/2}); & T_{0-} &= \frac{\sqrt{2}}{3} (T_{3/2} - T_{1/2}); \\ T_{0+} &= \frac{\sqrt{2}}{3} (-T_{3/2} + T_{1/2}). \end{aligned} \right\} \quad (21.10)$$

Амплитуды зарядово-симметричных процессов могут отличаться от написанных только знаком.

Спиноры \bar{u} , u в формуле (21.1) подчиняются уравнениям

$$(\hat{p} \pm M) u^{s(\pm)}(p) = 0, \quad \bar{u}^{s(\pm)}(p) (\hat{p} \mp M) = 0, \quad (21.9a)$$

которые необходимо учитывать при анализе спиновой структуры T^* .

*) Здесь под \hat{p} подразумевается $\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} p$. Билинейная формула $\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ преобразуется как 4-вектор.

В нашем распоряжении имеются следующие векторы:

$$P = p_1 + q_1, \quad Q = \frac{q_1 + q_2}{2}, \quad R = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad QR = 0. \quad (21.10a)$$

Из них можно составить ряд скалярных произведений, однако с учетом уравнений (21.9a) они сведутся к двум величинам: 1 и \hat{Q} . Таким образом, каждая из матриц $T^{(\pm)}$ представима в виде

$$T^{(\pm)} = A^{(\pm)} + \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} B^{(\pm)}. \quad (21.11)$$

В формулу (21.11) величины q_1 и q_2 входят симметрично. Легко получить, однако, что

$$\begin{aligned} \bar{u}^{s_2(+)}(+p_2) \frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{2} u^{s_1(-)}(p_1) &= \bar{u}^{s_2(+)}(+p_2) \hat{q}_1 u^{s_1(-)}(p_1) = \\ &= \bar{u}^{s_2(+)}(+p_2) \hat{q}_2 u^{s_1(-)}(p_1). \end{aligned}$$

Функции $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$ являются обычными скалярными функциями двух независимых переменных, в качестве которых можно выбрать любые из введенных ранее (§ 5) инвариантов:

$$\left. \begin{aligned} s &= P^2 = (p_1 + q_1)^2, & u &= P - 2Q^2 = (p_1 - q_2)^2, \\ t &= 4R^2 = (p_1 - p_2)^2, & s + u + t &= 2(M^2 + \mu^2). \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

В с. ц. м. они выражаются через импульс q и угол рассеяния θ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} s &= M^2 + \mu^2 + 2q^2 + 2p^0 q^0, \\ u &= M^2 + \mu^2 - 2q^2 c - 2p^0 q^0, \\ t &= -2q^2(1 - \cos \theta), \quad c = \cos \theta = \frac{(p_1 p_2)}{|p_1| |p_2|}. \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

Амплитуда $T_{\beta t_2, \alpha t_1}(p_2, q_2; p_1, q_1)$ удовлетворяет условию кроссинг-симметрии:

$$T_{\beta t_2, \alpha t_1}(p_2, q_2; p_1, q_1) = T_{\alpha t_2, \beta t_1}(p_2, -q_1; p_1, -q_2), \quad (21.14)$$

которое является следствием того, что π -мезоны суть бозоны. Замена $q_1, q_2 \rightarrow -q_2, -q_1$ эквивалентна перестановке

$s \leftrightarrow u$ и в л. с. к. для случая рассеяния вперед есть просто $E \rightarrow -E$. При этом из (21.2) и (21.11) вытекают условия симметрии для функций $A(\pm)$, $B(\pm)$:

$$A(\pm)(s, u) = \pm A(\pm)(u, s), \quad B(\pm)(s, u) = \mp B(\pm)(u, s). \quad (21.15)$$

Как уже отмечалось, условия кроссинг-симметрии приобретают четкий смысл лишь после доказательства существования аналитического продолжения амплитуды упругого рассеяния в комплексной плоскости E (или s). Тогда они отвечают на вопрос о том, какой смысл имеют граничные значения T на левом разрезе по переменной E .

21.2. Связь с наблюдаемыми сечениями, парциальные волны πN -рассеяния. Дифференциальное сечение в с. ц. м. определяется соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum' \left| \frac{M}{4\pi W} \bar{u}^{s_2(+)} T u^{s_1(-)} \right|^2, \quad (21.16)$$

где Σ' означает усреднение по начальным и суммирование по конечным значениям спиновой переменной нуклона, а $W = p_1^0 + q_1^0$ — полная энергия. Вместо амплитуды T удобно ввести новую величину

$$\tilde{M} = \frac{M}{4\pi W} T. \quad (21.17)$$

Из условия унитарности S -матрицы следует (оптическая теорема), что в с. ц. м.

$$\text{Im} \tilde{M}_{s_1 s_1}(s, 0) = \text{Im} \bar{u}^{s_1(+)}(p) \tilde{M}(s, 0) u^{s_1(-)}(p) = \frac{q}{4\pi} \sigma_{\text{полн}}(s). \quad (21.18)$$

Поскольку полное сечение $\sigma_{\text{полн}}$ инвариантно относительно преобразования Лоренца, то справедливо равенство

$$\frac{\tilde{M}_{s_1 s_1}(s, 0)}{q} = \left(\frac{\tilde{M}_{s_1 s_1}(s, 0)}{q} \right)_{\text{л. с. к.}} \quad (21.19)$$

и

$$\frac{q_{\text{л.с.к.}}}{q} = \frac{W}{M}.$$

В двухкомпонентной форме записи матрица \tilde{M} выражается через амплитуды f_1 , f_2 (амплитуды с заданной

спиральностью, введенные Жакобом и Виком (1959)):

$$\widetilde{M} = f_1(s, \theta) + \frac{(\sigma q_1)(\sigma q_2)}{q_1 q_2} f_2(s, \theta). \quad (21.20)$$

В этой записи

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_i \left| \langle f | f_1 + \frac{(\sigma q_1)(\sigma q_2)}{q_1 q_2} f_2 | i \rangle \right|^2, \quad (21.21)$$

где i и f — двухрядные паулевские спиноры начального и конечного состояний нуклонов. Разложения $f_{1,2}$ по парциальным волнам имеют вид

$$\left. \begin{aligned} f_1(s, \theta) &= \sum_l (f_{l,+} P'_{l+1}(c) - f_{l,-} P'_{l-1}(c)), \\ f_2(s, \theta) &= \sum_l (f_{l,-} - f_{l,+}) P'_l(c), \end{aligned} \right\} \quad (21.22)$$

где $c = \cos \theta$ и $f_{l,\pm} = (e^{2i\delta_{l,\pm}} - 1)/2iq$. Индекс \pm означает, что полный момент количества движения $J = l \pm 1/2$. Изотопические индексы здесь опущены, но предполагается, что $I = 3/2; 1/2$. Тогда амплитуды π^\pm -упругого рассеяния вычисляются с помощью формул (21.7), (21.8). Фазы рассеяния $\delta_{l,\pm}$ зависят от энергии и действительны в интервале $(M + \mu)^2 < s < (M + 2\mu)^2$. Так же как и в случае $\pi\pi$ -рассеяния, мы будем пренебрегать неупругими процессами и считать, что фазы действительны для всех $s > (M + \mu)^2$. Используя соотношения (21.11), (21.17) и (21.20), можно установить связи

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{p^0 + M}{8\pi W} [A + (W - M) B], \\ f_2 &= \frac{p^0 - M}{8\pi W} [-A + (W + M) B] \end{aligned} \right\} \quad (21.23)$$

и, наоборот,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} A &= \frac{W + M}{p^0 + M} f_1 - \frac{W - M}{p^0 - M} f_2, \\ \frac{1}{4\pi} B &= \frac{1}{p^0 + M} f_1 + \frac{1}{p^0 - M} f_2. \end{aligned} \right\} \quad (21.24)$$

21.3. Амплитуда процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ (Фрэзер, Фулко (1960)). Обратимся теперь к процессу $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Кине-

математические переменные s , u , t в с. ц. м. для этого процесса имеют вид

$$\left. \begin{aligned} s &= M^2 - \mu^2 - 2q_3^2 + 2p_3q_3c_3, \\ u &= M^2 - \mu^2 - 2q_3^2 - 2p_3q_3c_3, \\ t &= 4(M^2 + p_3^2) = 4(\mu^2 + q_3^2), \end{aligned} \right\} \quad (21.25)$$

где p_3 и q_3 — импульсы в с. ц. м. и $c_3 = \frac{(p_3q_3)}{p_3q_3}$.

Изотопическая и спиновая структуры амплитуды процесса $\pi N \rightarrow N\bar{N}$ совпадают со структурами T -матрицы πN -рассеяния, так как для построения этой амплитуды используются те же векторы. При этом надо иметь в виду, что $-p_1$, $-p_2$ — импульсы нуклона и антинуклона. Дифференциальное сечение процесса в с. ц. м. равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p}{q} \sum \left| \frac{M}{8\pi p^0} \tau^\pm \right|^2, \quad (21.26)$$

где

$$\tau^\pm = \Psi_N^+ \{h_1^{(\pm)}(\sigma p) + h_2^{(\pm)}(\sigma q)\} \Psi_{\bar{N}},$$

Ψ — паулевские двухрядные спиноры, а $h_i^{(\pm)}$ выражаются через $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$:

$$h_1^{(\pm)} = -\frac{1}{M} \left[A^{(\pm)} + \frac{(p_3q_3)}{p_3^0 + M} B^{(\pm)} \right], \quad h_2^{(\pm)} = \frac{p_3^0}{M} B^{(\pm)}. \quad (21.27)$$

Разложение на парциальные волны удобно провести для спиральных состояний, введенных Жакобом и Вико (1959). Если выбрать ось квантования вдоль вектора p , то спиральные состояния выражаются через инвариантные амплитуды следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} J_{++} = J_{--} &= \frac{1}{8\pi} \left(-\frac{p_3 A}{p_3^0} + \frac{q_3 M}{p_3^0} c_3 B \right), \\ J_{+-} = -J_{-+} &= \frac{q_3 \sqrt{1 - c_3^2}}{8\pi} B, \end{aligned} \right\} \quad (21.28)$$

где p_3 , q_3 — импульсы нуклона и π -мезона, участвующие в процессе, а

$$c_3 = \frac{s - u}{\sqrt{(t - 4M^2)(t - 4\mu^2)}}.$$

Для функций J_{++} , J_{+-} справедливы разложения:

$$\left. \begin{aligned} J_{++} &= \frac{1}{F_3 p_3^0} \sum_l (l + 1/2) (q_3 p_3)^l f_{(+)}^l P_l(c_3), \\ J_{+-} &= q_3 \sum_l \frac{l + 1/2}{\sqrt{l(l+1)}} (p_3 q_3)^{l-1} f_{(-)}^l \sqrt{1 - c_3^2} P_l(c_3) \end{aligned} \right\} (21.29)$$

с четными l для изотопического индекса (+) и нечетными l для (-). Такой выбор четных и нечетных l есть следствие принципа Паули и того, что $A^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{6}} A^{(+)}$, $A^{(1)} = 2A^{(-)}$ (аналогично для $B^{(\pm)}$).

Выпишем изотопические индексы нуклонов t_i и мезонов α, β , т. е. в (21.28), (21.29) $J_{\lambda\lambda'} \rightarrow J_{\lambda\lambda'}^{t t' \alpha \beta}$, где λ — индекс спиральности (знак проекции спина на импульс нуклона). Тогда условие унитарности процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ имеет вид

$$\text{Im } J_{\lambda\lambda'}^{t t' \alpha \beta} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{q_3}{q_3^0} \int d\Omega_{q'} J_{\lambda\lambda'}^{t t' \alpha \beta}(\mathbf{p}, \mathbf{q}') \prod^{*(0;1)}(\mathbf{q}', \mathbf{q}), \quad (21.30)$$

где $\Pi^I = 32\pi A_I$ и A_I определено в (7.29); интегрирование в (21.30) ведется по угловым переменным мезонов α', β' .

С учетом условия двухчастичной унитарности для $\pi\alpha'\beta', \alpha\beta(\mathbf{q}', \mathbf{q})$ из (21.30) следует

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } f_{(\pm)}^{J(+)} &= f_{(\pm)}^{J(+)} e^{-i\delta_J^{(0)}} \sin \delta_J^{(0)}, \\ \text{Im } f_{(\pm)}^{J(-)} &= f_{(\pm)}^{J(-)} e^{-i\delta_J^{(1)}} \sin \delta_J^{(1)}, \end{aligned} \right\} (21.31)$$

где $\delta_J^{(1;0)}$ — фазы $\pi\pi$ -рассеяния с полным моментом J и изотопическим спином 1; 0 (см. (21.29)).

§ 22. Статическая модель p -волнового πN -рассеяния

22.1. Физические основы модели. Приведенный выше краткий обзор изотопической и спиновой структур амплитуды перехода πN -рассеяния показывает, что вся экспериментальная информация может быть выражена на языке фаз рассеяния $\delta_{I, l \pm}(q)$. В настоящее время значения

фаз $\delta_{l, l \pm}(q)$ известны в широком интервале энергий до ~ 600 Мэв в л. с. к. При этом до энергий ~ 300 Мэв главными являются низшие s - и p -волны, и лишь выше начинают сказываться d - и f -волны. Такая зависимость фаз рассеяния от энергии и момента количества движения характерна для короткодействующих сил (Ферми (1956)).

Ограничиваясь при малых энергиях низшими s - и p -волнами, имеем всего шесть фазовых сдвигов. Экспериментально установлено, что наиболее значительной является p -волна с квантовыми числами $l = j = 3/2$ (Ферми (1956)) или, как обычно записывают, фаза $\delta_{33}(q)^*$. При энергии 195 Мэв в л. с. к. фаза $\delta_{33}(q)$ проходит через $\pi/2$, а соответствующее парциальное сечение достигает геометрического предела. Поэтому выяснение вида зависимости s - и p -фазовых сдвигов от энергии представляет одну из первых задач низкоэнергетического рассеяния.

Рассмотрим ее на основе д. с. для рассеяния вперед. В области небольших энергий имеется малый параметр, на основе которого можно развить приближенную схему. Для импульсов $q \lesssim \mu$ отношение скоростей нуклонов и мезонов в процессе рассеяния мало и $v_N/v_\pi \sim 1/M$ ($M = 6,72 \mu$). При энергии 300 Мэв в л. с. к. оно достигает значения $\sim 0,3$. Представляется разумным пренебречь в первом приближении движением нуклонов, т.е. рассмотреть статическую задачу.

Неподвижный нуклон может излучать и поглощать π -мезоны только в состоянии с $l = 1$. Действительно, система из покоящегося нуклона N со спином $1/2$ и π -мезона с орбитальным моментом l может иметь полный момент количества движения $l \pm 1/2$. Тогда закон сохранения полного момента количества движения приводит к тому, что l принимает лишь значения 0; 1. Если учесть, что π -мезон является псевдоскаляром по отношению к инверсии пространственных координат, то из закона сохранения четности следует, что $l = 1$. Таким образом, p -волновые фазы рассеяния связаны с механизмом взаимодействия вида $N \leftrightarrow N + \pi$.

*) Ниже мы будем придерживаться общепринятых обозначений, согласно которым фазы записываются $\delta_{2l, 2J}$. У s -фаз индекс полного момента опускается, так что имеем две фазы δ_1 и δ_3 .

Радиус действия сил этого взаимодействия можно оценить из соотношения неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$. Очевидно, что $\Delta E \sim \mu c^2$. Тогда, двигаясь с максимальной скоростью, мезон пройдет расстояние, равное комптоновской длине волны, $a \sim c \Delta t \sim \hbar / \mu c$.

Для получения в статической модели s - и других фаз рассеяния необходимо предположить, что существуют взаимодействия с множественным рождением мезонов, например, $N \leftrightarrow N + \pi + \pi$. Радиус действия для них по крайней мере вдвое меньше комптоновской длины волны π -мезона и при той же силе, что и в p -волновом взаимодействии, приведет к меньшим значениям фаз.

22.2. Вывод системы уравнений. Отбрасывая все волны, кроме p , мы значительно упростим задачу. Теперь четыре фазовых сдвига p -волны должны подчиняться д. с. для рассеяния вперед. Два из них выше уже сравнивались с опытом (§ 4). Они связаны с процессами без изменения направления спина нуклона. Из формулы (21.20) видно, что для рассеяния вперед ($q_1 = q_2$) сечение зависит только от комбинации $f_1 + f_2$ и не содержит f_2 . Если рассматривать д. с. для рассеяния вперед как предел рассеяния на малый угол, то будем иметь четыре д. с. Мы приведем их для амплитуд процессов $\pi^\pm p$ -рассеяния (Боголюбов и др. (1958)):

$$\left. \begin{aligned}
 \text{а) } D_+^{(0)}(E) + D_-^{(0)}(E) &= D_+^{(0)}(\mu) + D_-^{(0)}(\mu) + \\
 &+ \frac{2k^2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dE' E' \frac{A_+^{(0)}(E') + A_-^{(0)}(E')}{k'^2(E'^2 - E^2)} + \\
 &+ 2g^2 \frac{1}{M} \frac{k^2 E_p^2}{(E^2 - E_p^2)(\mu^2 - E_p^2)}, \\
 \text{б) } D_+^{(0)}(E) - D_-^{(0)}(E) &= \frac{E}{\mu} [D_+^{(0)}(\mu) - D_-^{(0)}(\mu)] + \\
 &+ \frac{2k^2 E}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dE' \frac{A_+^{(0)}(E') - A_-^{(0)}(E')}{k'^2(E'^2 - E^2)} + \\
 &+ 2g^2 \frac{1}{M} \frac{k^2 E E_p}{(E^2 - E_p^2)(\mu^2 - E_p^2)},
 \end{aligned} \right\} (22.1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{в) } D_+^{(1)}(E) + D_-^{(1)}(E) &= \frac{E}{\mu} [D_+^{(1)}(\mu) + D_-^{(1)}(\mu)] + \\
 &+ \frac{2k^2 E}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dE' \frac{A_+^{(1)}(E') + A_-^{(1)}(E')}{k'^2 (E'^2 - E^2)} + \\
 &+ 2g^2 \frac{1}{M^2} \frac{k^2 E}{(E^2 - E_p^2)(\mu^2 - E_p^2)}, \quad (22.1) \\
 \text{г) } D_+^{(1)}(E) - D_-^{(1)}(E) &= D_+^{(1)}(\mu) - D_-^{(1)}(\mu) + \\
 &+ \frac{2k^2}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dE' E' \frac{A_+^{(1)}(E') - A_-^{(1)}(E')}{k'^2 (E'^2 - E^2)} + \\
 &+ 2g^2 \frac{1}{M^2} \frac{k^2 E}{(E^2 - E_p^2)(\mu^2 - E_p^2)}, \quad)
 \end{aligned}$$

где $E_p = \mu^2/2M$, $D_{\pm}^{(0)}$ и $A_{\pm}^{(0)}$ — соответственно мнимая и действительная части амплитуды $\pi^{\pm}p$ -рассеяния без изменения направления спина, а $D_{\pm}^{(1)}$, $A_{\pm}^{(1)}$ имеют тот же смысл для процессов с переворачиванием спина. Теперь, используя формулы (21.20) и (21.22), легко получить в с. ц. м. выражения для этих амплитуд через фазы рассеяния:

$$\begin{aligned}
 T_{2I}^{(0)}(q) &= \sum_l \{ (l+1) f_{2I, 2J_+}(q) + l f_{2I, 2J_-}(q) \}, \\
 T_{2I}^{(1)}(q) &= \sum_l \frac{l(l+1)}{2} \{ f_{2I, 2J_+}(q) - f_{2I, 2J_-}(q) \},
 \end{aligned} \quad (22.2)$$

где

$$f_{2I, 2J_{\pm}} = \frac{1}{q} e^{i\delta_{2I, 2J_{\pm}}(q)} \sin \delta_{2I, 2J_{\pm}}(q).$$

Дисперсионные соотношения (22.1) записаны в л. с. к. Переход к с. ц. м. выполняется с помощью соотношений (21.19). Смысл констант вычитания в формулах (22.1) очевиден из формул (22.2) и из того факта, что фазовые сдвиги, как известно, ведут себя при малых q следующим образом:

$$\delta_{2I, 2J_{\pm}} = a_{2I, 2J_{\pm}} q^{2I+1}. \quad (22.3)$$

Отсюда ясно, что $D_{\pm}^{(0;1)}(\mu)$ выразятся через длины рассеяния s -волн a_1 и a_3 . Теперь легко получить уравнение для

p -волн. Для этого, во-первых, в д. с. (22.1) учтем только p -волны, т. е. в формулах (22.2) члены с $l \geq 1$ положим равными нулю; во-вторых, пренебрежем всеми неупругими процессами; в-третьих, осуществим переход к статическому пределу ($1/M \rightarrow 0$). В статическом пределе л. с. к. и с. ц. м. совпадают ($q_{\text{л.с.к.}}/q = 1$). Рассматривая полусуммы и полуразности д. с. (22.1), получаем

$$\begin{aligned}
 & (в + а) \operatorname{Re} [f_{33}(\omega) - f_{31}(\omega)] = \\
 & = 2f^2 \frac{q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [f_{33}(\omega') - f_{31}(\omega')]}{\omega' - \omega} - \right. \\
 & \left. - \frac{\operatorname{Im} [f_{33}(\omega') - f_{31}(\omega') + 2f_{13}(\omega') - 2f_{11}(\omega')]}{3(\omega' + \omega)} \right\} \frac{d\omega'}{q'^2}, \\
 & (в - г) \frac{1}{3} \operatorname{Re} [f_{33}(\omega) - f_{31}(\omega) + 2f_{13}(\omega) - 2f_{11}(\omega)] = \\
 & = 2f^2 \frac{q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [f_{33}(\omega') - f_{31}(\omega') + 2f_{13}(\omega') - 2f_{11}(\omega')]}{3(\omega' - \omega)} - \right. \\
 & \left. - \frac{\operatorname{Im} [f_{33}(\omega') - f_{31}(\omega')]}{\omega' + \omega} \right\} \frac{d\omega'}{q'^2}, \\
 & (а + б) \operatorname{Re} [2f_{33}(\omega) + f_{31}(\omega)] = \\
 & = 2f^2 \frac{q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [2f_{33}(\omega') + f_{31}(\omega')]}{\omega' - \omega} + \right. \\
 & \left. + \frac{\operatorname{Im} [2f_{33}(\omega') + f_{31}(\omega') + 4f_{13}(\omega') + 2f_{11}(\omega')]}{3(\omega' + \omega)} \right\} \frac{d\omega'}{q'^2}, \\
 & (а - б) \frac{1}{3} \operatorname{Re} [2f_{33}(\omega) + f_{31}(\omega) + 4f_{13}(\omega) + 2f_{11}(\omega)] = \\
 & = -2f^2 \frac{q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{Im} [2f_{33}(\omega') + f_{31}(\omega') + 4f_{13}(\omega') + 2f_{11}(\omega')]}{3(\omega' - \omega)} + \right. \\
 & \left. + \frac{\operatorname{Im} [2f_{33}(\omega') + f_{31}(\omega')]}{\omega' + \omega} \right\} \frac{d\omega'}{q'^2}.
 \end{aligned} \tag{22.4}$$

Здесь через ω обозначена полная энергия мезона в с. ц. м. и $f = g/2\sqrt{4\pi M}$.

Путем простых алгебраических операций система уравнений (22.4) приводится к стандартному виду:

$$\operatorname{Re} f_i(\omega) = \frac{\lambda_i q^2}{\omega} + \frac{q^2}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\operatorname{Im} f_i(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{A_{ij} \operatorname{Im} f_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right] \frac{d\omega'}{\omega'^2 - 1}, \quad (22.5)$$

где λ_i и матрица кроссинг-симметрии A_{ij} имеют вид

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 & 16 \\ -2 & -1 & 8 & 4 \\ -2 & 8 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{f}{\mu} \right)^2,$$

а индексы i , очевидно, $i = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$.

Числа λ_i образуют собственный вектор матрицы A : $A\lambda = -\lambda$.

Подчеркнем, что для вывода уравнений (22.5) существенны все три предположения. Если отказаться от второго из них, то выражения (22.5) не будут уравнениями, так как тогда не справедливо двухчастичное условие унитарности

$$\operatorname{Im} f_i(\omega) = q(\omega) |f_i(\omega)|^2$$

и восемь неизвестных функций [действительные и мнимые части $f_i(\omega)$] будут связаны всего лишь четырьмя соотношениями (22.5).

Уравнения (22.5) были получены на основе д. с. для рассеяния вперед без привлечения конкретного вида взаимодействия π -мезонов и нуклонов. Заметим, что в условии для $f_i(\omega)$ кинематический множитель $q(\omega)$ представляет сложную функцию ω (ср. (3.5)), которая только в статическом пределе ($1/M \rightarrow 0$, $\omega/M \rightarrow 0$) принимает простой вид $q(\omega) = \sqrt{\omega^2 - 1}$. Поэтому условие унитарности в виде

$$\operatorname{Im} f_i(\omega) = \sqrt{\omega^2 - 1} |f_i(\omega)|^2$$

справедливо лишь в области $\omega \ll M$. Таким образом, рассмотрение области $\omega \sim M$ требует согласованного изменения условия унитарности и уравнений (22.5). Это изменение уравнений может быть выполнено весьма простым образом в рамках известной статической модели Чу —

Лоу (1956) (см. также Хенли, Тирринг (1963) и Вик (1955)).

22.3. Модель Чу — Лоу. Эта модель основывается на том факте, что при низких энергиях нуклонное поле можно рассматривать как классическое поле, в котором рассеиваются и рождаются π -мезоны. Гамильтониан взаимодействия квантованного мезонного поля $\varphi_i(x)$ с классическим заданным полем $u(x)$ имеет вид

$$H_{\text{вз}} = \frac{f}{\mu} \sum_{i=1}^3 \int u(x) (\sigma \nabla) \tau_i \varphi_i(x) dx. \quad (22.6)$$

Гамильтониан (22.6) содержит всю информацию о взаимодействии π -мезонов и нуклонов, о которой мы говорили выше. Он инвариантен относительно вращений в обычном и изотопических пространствах. Функция $u(x)$ учитывает пространственное распределение фиксированного нуклона. Как функцию плотности ее удобно считать нормированной:

$$\int u(x) dx = 1.$$

Фурье-образ функции источника равен

$$v(q) = \int e^{iqx} u(x) dx.$$

Предположим, что функция источника сферически симметрична и имеет конечный размер R . Тогда для $q \geq 1/R$ функция $v(q^2)$ будет мала. Величина $q_{\text{max}} = 1/R$ характеризует максимальный импульс π -мезонов, эффективно участвующих во взаимодействии вида (22.6).

Гамильтониан (22.6) обладает одной особенностью. Изотопические и спиновые переменные входят в него симметрично. Поэтому взаимодействия в состояниях (1,3) и (3,1) одинаковы.

В рамках этой модели было показано, что функции $f_i(\omega)/v^2(q^2)$ обладают аналитическими свойствами, которые могут быть записаны с помощью уравнения (22.5). Ввиду отмеченного выше равенства взаимодействий в состояниях (1,3) и (3,1) имеем дополнительное условие $f_2 = f_3$. Учитывая его, получаем вместо (22.5) уравнения

Чу—Лоу (1956):

$$\operatorname{Re} h_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\operatorname{Im} h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + A_{ij} \frac{\operatorname{Im} h_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right] d\omega', \quad (22.7)$$

где

$$h_j(\omega) = \frac{f_j(\omega)}{q^2 v^2(q^2)} = \frac{e^{i\delta_j'(\omega)} \sin \delta_j(\omega)}{q^2 v^2(q^2)};$$

матрица кроссинг-симметрии A_{ij} и числа λ_i заданы формулами

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 16 \\ -2 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{f}{\mu} \right)^2.$$

Условие унитарности теперь имеет вид

$$\operatorname{Im} h_i(\omega) = q^2 v^2(q^2) |h_i(\omega)|^2.$$

Уравнения Чу — Лоу содержат функцию $v(q)$. Происхождение этого множителя можно понять на основе теории возмущений. Первый член в уравнениях (22.7) есть

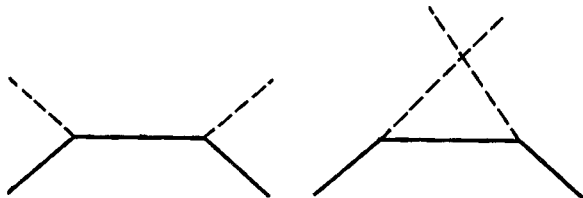


Рис. 43.

не что иное, как борновское приближение для парциальных волн. На языке теории возмущений он описывается двумя диаграммами Фейнмана (рис. 43), каждая из которых пропорциональна $v^2(q^2)$. Поэтому именно $f_i(\omega)/v^2(q^2)$ имеет простой полюс при $\omega = 0$.

Таким образом, мы имеем уравнения (22.7) того же вида, что и уравнения (22.5), но с модифицированным условием унитарности. Ниже рассматриваются именно эти уравнения.

22.4. Основные свойства решения. Переформулируем задачу (22.7) в терминах комплексной переменной z и путем анализа свойств функции $h_i(z)$ установим основные черты решения, содержащего резонанс в состоянии (3,3).

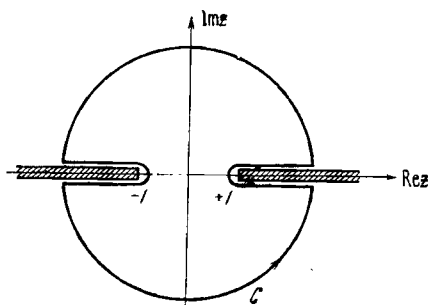


Рис. 44.

Уравнения (22.7) определяют функции $h_i(z)$ в комплексной плоскости z , имеющие следующие свойства:

а) $h_i(z)$ — аналитические функции в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, \infty)$,

б) $h_i^*(z) = h_i(z^*)$,

в) $h_i(z)$ имеет в нуле полюс первого порядка с вычетом $\text{Res } h_i(z)|_{z=0} = \lambda_i$,

г) $|h_i(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ и $\text{Im } z \neq 0$,

д) $\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ z > 1}} h_i(z + i\epsilon) = h_i(\omega)$ и $\text{Im } h_i(\omega) = q^3 v^2 (q^2) |h_i(\omega)|^2$,

е) $h_i(-z) = A_{ij} h_i(z)$.

Применяя теорему Коши к функции $h_i(z)$ по контуру C (рис. 44), можно показать, что свойства (а) — (е) функций $h_i(z)$ эквивалентны исходным уравнениям (22.7). Удобство такой формулировки состоит в том, что для ряда случаев удается построить функции, удовлетворяющие этим свойствам, т. е. исходным уравнениям.

Возникающие при этом решения неоднозначны. Причина неоднозначности кроется в том, что в указанных свойствах не конкретизируется вид взаимодействия. Различные виды взаимодействия приводят к одним и тем же свойствам (а) — (е) или уравнениям вида (22.7). Мы не будем

подробно обсуждать характер этой неоднозначности, а попытаемся на основе уравнений (22.7) получить грубое представление о характере фаз рассеяния. Для этого вместо функций $h_i(z)$ введем функции $g_i(z)$ такие, что

$$g_i(z) = \frac{1}{h_i(\omega)} \frac{\lambda_i}{\omega}. \quad (22.8)$$

Условия (а) — (е) легко перенести на функции $g_i(z)$. Остановимся подробнее на свойствах (д) и (е). Для функции $g_i(z)$ можно явно вычислить мнимую часть при $z > 1$. Действительно,

$$\operatorname{Im} g_i(\omega) = \frac{1}{2i} [g_i(\omega + i0) - g_i(\omega - i0)] = -\frac{\lambda_i}{\omega} q^3 v^2 (q^2). \quad (22.9)$$

Условие кроссинг-симметрии (е) для функций $g_i(z)$ выглядит так:

$$\frac{1}{g_i(-z)} = B_{ij} \frac{1}{g_j(z)}, \quad (22.10)$$

где $B_{ij} = -\frac{\lambda_j}{\lambda_i} A_{ij}$. Так как в уравнение (22.10) входят $g_i^{-1}(z)$, то для вычисления $\operatorname{Im} g_i(-\omega)$ (где $\omega > 1$) нужно знать не только $\operatorname{Im} g_i(\omega)$, но и $\operatorname{Re} g_i(\omega)$. Из определения функций $g_i(z)$ (22.8) и условия унитарности (д) видно, что явное выражение для $\operatorname{Re} g_i(\omega)$ найти не удастся. Поэтому, используя теорему Коши для функций $g_i(z)$ по контуру C (рис. 44), получаем*)

$$g_i(z) = 1 + \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \left[-\frac{\lambda_i q'^3 v^2(q')}{\omega'(\omega' - z)} + \frac{G_i(\omega')}{\omega' + z} \right] d\omega'. \quad (22.11)$$

Здесь $G_i(\omega)$ — неизвестные функции, подобранные так, чтобы выполнялось условие кроссинг-симметрии (22.10) для функций $g_i(z)$. Вид функций $g_i(z)$ на интересующем нас физическом разрезе легко установить:

$$g_i(\omega) = \frac{\lambda_i}{\omega} q^3 v^2(q) [\operatorname{ctg} \delta_i(\omega) - i]. \quad (22.12)$$

*) Строго говоря, в формуле (22.11) должны присутствовать полюсные члены, соответствующие нулям $h_i(z)$. В приведенной форме предполагается, что у функций $h_i(z)$ нулей нет.

Теперь из уравнений (22.11) и (22.12) следует

$$\frac{\lambda_i}{\omega} q^3 v^2(q) \operatorname{ctg} \delta_i(\omega) = 1 - \frac{\lambda_i \omega}{\pi} \mathcal{P} \int_1^{\infty} \left[\frac{q'^3 v^2(q')}{\omega'(\omega' - \omega)} + \frac{G_i(\omega')}{\omega' + \omega} \right] d\omega'. \quad (22.13)$$

Хотя в формуле (22.13) и содержатся неизвестные функции $G_i(\omega)$, эти соотношения весьма полезны. Если положить $v^2(q) = 1$, то первый интеграл в (22.11) и (22.13) расходится линейно. Это значит, что он в основном определяется значением $\omega_{\max} = \sqrt{1 + k_{\max}^2}$ и в области $\omega < \omega_{\max}$ будет слабо меняющейся функцией. В силу условия кроссинг-симметрии интеграл от неизвестной функции также будет определяться значением ω_{\max} . Таким образом, окончательно получаем

$$\lambda_i \frac{q^3 v^2(q)}{\omega} \operatorname{ctg} \delta_i(\omega) = 1 - \omega r_i. \quad (22.14)$$

Формулы (22.14) обычно называют «приближением эффективного радиуса», по аналогии с теорией эффективного радиуса в квантовой механике (§ 2.4). Однако следует заметить, что r_i , строго говоря, являются функциями ω и могут быть разложены в ряды по ω только при $|\omega| < 1$, т. е. в нефизической области. Поэтому дальнейшее уточнение выражений (22.14) не сводится к простому учету следующих членов разложения по ω . Грубое представление о величинах r_i можно получить, пренебрегая мнимыми частями $g_i(\omega)$ и $h_i(\omega)$. Разлагая интегралы в уравнениях (22.7) в ряды по степеням ω , имеем для r_i :

$$\lambda_i r_i = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'} [\operatorname{Im} h_i(\omega') + A_{ij} \operatorname{Im} h_j(\omega')]. \quad (22.15)$$

В силу положительности величин λ_3 , A_{3j} можно определенно сказать, что $r_3 > 0$. Это означает, что при энергии $\omega = 1/r_3$ фаза $\delta_{33}(\omega)$ проходит через $\pi/2$, т. е. в канале (3,3) имеется резонанс. Если на основании этого факта в (22.15) отбросить все парциальные амплитуды, кроме третьей, то r_1 и r_2 отрицательны.

Таким образом, рассмотрение πN -рассеяния в рамках статического приближения указывает на наличие

резонанса в состоянии с $I=J=3/2$. Остальные фазы должны быть малы и отрицательны. Заключение о малых фазах, конечно, не надежно, поскольку отброшенные при выводе уравнений Чу — Лоу величины могут оказаться того же порядка, что и найденные значения фаз. Что же

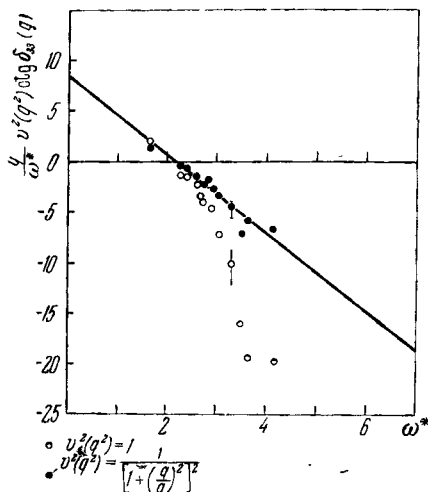


Рис. 45.

касается парциальной волны $f_{33}(\omega)$, то она прекрасно согласуется с экспериментальными данными в широком интервале энергий вплоть до 600 Мэв (рис. 45) при следующих значениях параметров, входящих в формулы (22.14) (Лайсон (1961)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3} f^2 v^2(q) \frac{q^3}{\omega} \operatorname{ctg} \delta_{33}(\omega) &= 1 - \frac{\omega^*}{\omega_r}, \\ f^2 &= 0,087; \quad \omega_r = 2,17; \\ \omega^* &= W - M \approx \sqrt{1 + q^2} + \frac{q^2}{2M}, \\ v(q) &= \left(1 + \left(\frac{q}{a}\right)^2\right)^{-1}, \\ a^{-1} &= 0,27 \frac{\hbar}{\mu c} = 1,8 \frac{\hbar}{Mc}. \end{aligned} \right\} \quad (22.16)$$

22.5. Кроссинг-симметрия и анализ s -волн. Описанный выше подход позволил получить важные результаты о p -волнах πN -рассеяния, но ничего не говорит о s -волнах. Его можно развить, включив в рассмотрение д.с. для производных амплитуд рассеяния по передаче импульса t . Таким путем оценивается влияние $p(3,3)$ -резонанса на s -, d - и другие волны πN -рассеяния. Однако полученные при этом результаты (формулы, аналогичные формулам (22.14)) в основном определяются статическим пределом условий кроссинг-симметрии для парциальных волн. Поэтому целесообразно остановиться на этих условиях.

Выше (см. (21.15)) мы уже установили вид условий кроссинг-симметрии для инвариантных амплитуд $A^{(\pm)}(s, u, t)$, $B^{(\pm)}(s, u, t)$. Теперь эти условия нужно перенести на парциальные волны $f_{2T, 2J}(\omega)$. Фактически они уже фигурировали в уравнениях (22.5) и (22.7) и были явно выписаны для p -волн πN -рассеяния (условие (e)). Выясним условия кроссинг-симметрии для любых парциальных волн. Для этого сначала определим, что означает замена $s, u, t \rightarrow u, s, t$ на языке переменных ω и z — полной энергии пиона и косинуса угла рассеяния в с. ц. м., т. е. разрешим уравнения;

$$s(\omega, z) = u(\omega_1, z_1), \quad t(\omega, z) = t(\omega_1, z_1). \quad (22.17)$$

Используя формулы (21.12), (21.13) и проводя разложение по степеням $1/M$, получим из (22.17)

$$\omega_1 = -\omega - \frac{\omega^2 - 1}{M}(1 + z), \quad z_1 = z + 2\frac{1 - z^2}{M}. \quad (22.18)$$

Сохраним в этих формулах члены до порядка $1/M$. Они показывают, что условия кроссинг-симметрии перепутывают амплитуды с разными значениями l и включают производные амплитуд рассеяния. В статическом пределе ($1/M \rightarrow 0$) эти условия для амплитуд $f_{2T, 2J}$ с разными значениями l расщепляются (Эдвардс, Метьюз (1957)). Представляя амплитуду M (формула (21.20)) в виде

$$\widetilde{M} = f_1(z, s) + zf_2(s, z) + i\sigma \frac{[q_1 q_2]}{|q_1| |q_2|} f_2(s, z),$$

легко получить, что амплитуда рассеяния без изменения направления спина симметрична, а с переворачиванием спина — антисимметрична относительно замены $\omega, c \rightarrow -\omega, c$, т. е. (см. (22.2))

$$(l+1)f_{2J+}(\omega) + lf_{2J-}(\omega) = (l+1)f_{2J+}(-\omega) + lf_{2J-}(-\omega),$$

$$f_{2J+}(\omega) - f_{2J-}(\omega) = -[f_{2J+}(-\omega) - f_{2J-}(-\omega)],$$

или, в матричной записи,

$$\begin{pmatrix} f_{2J-}(-\omega) \\ f_{2J+}(-\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2l+1} \begin{pmatrix} -1 & 2l+2 \\ 2l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2J-}(\omega) \\ f_{2J+}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (22.19)$$

Каждая из парциальных волн $f_{2J\pm}(\omega)$ имеет изотопическую структуру. Комбинации парциальных волн с изотопическими индексами (\pm) симметричны (+) и антисимметричны (−) при операции кроссинг-симметрии. Используя формулы (21.7) и (21.8), получаем

$$f_{3,2J}(\omega) - f_{1,2J}(\omega) = -[f_{3,2J}(-\omega) - f_{1,2J}(-\omega)],$$

$$2f_{3,2J}(\omega) + f_{1,2J}(\omega) = 2f_{3,2J}(-\omega) + f_{1,2J}(\omega),$$

или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} f_{1,2J}(-\omega) \\ f_{3,2J}(-\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,2J}(\omega) \\ f_{3,2J}(\omega) \end{pmatrix}. \quad (22.20)$$

Собирая результаты (22.19), (22.20), получаем, что матрица кроссинг-симметрии имеет ранг 4 и представляет собой прямое произведение матриц (22.19), (22.20). Исключение составляет s -волна, для которой $f_{2J+} = f_{2J-}$ и условие кроссинг-симметрии сводится к формуле (22.20).

Применим эти соотношения для выяснения вида энергетической зависимости s -волн (Метьюз (1959)). Пренебрежем в (22.20) мнимыми частями парциальных волн. Такое приближение уже применялось при выводе формул в «приближении эффективного радиуса». Очевидно:

$$\operatorname{Re} f_s^{(-)}(\omega) = a^{(-)}, \quad \operatorname{Re} f_s^{(+)}(\omega) = a^{(+)}, \quad (22.21)$$

где

$$a^{(-)} = \frac{1}{3}(a_1 - a_3), \quad a^{(+)} = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_3).$$

Вообще говоря, величины $a^{(\pm)}$ зависят от энергии и должны быть четными функциями ω . Формулы (22.21) и отражают результат, к которому приводят релятивистские д. с. в статическом пределе (Чу, Голдбергер, Лоу, Намбу—ЧГЛН (1957)).

Если обратиться к экспериментальным данным (Гамильтон, Вулкок (1963)), то для длины рассеяния имеем

$$a_1 - a_3 = 0,259, \quad a_1 + 2a_3 \approx -0,005 \pm 0,0065.$$

В приближении длины рассеяния $\text{Re } f_s^{(+)}(\omega) \approx 0$, а экспериментальные данные указывают на рост $\text{Re } f_s^{(+)}(\omega)$ с энергией. Далее, из опыта следует, что величина $\text{Re } f_s^{(-)}(\omega)$ постоянна в широком интервале энергий, в то время как формула (22.21) приводит к росту $\text{Re } f_s^{(-)}(\omega)$. Это означает, что в выражениях для $\text{Re } f_s^{(\pm)}(\omega)$ должны присутствовать члены, компенсирующие, с одной стороны, рост $\text{Re } f_s^{(-)}(\omega)$ и, с другой стороны, обеспечивающие рост $\text{Re } f_s^{(+)}(\omega)$.

Столь существенная зависимость s -волнового взаимодействия от изотопического спина необъяснима не только в теориях с неподвижным источником. Эта трудность характерна для любых моделей с взаимодействием, содержащим только мезон-нуклонные члены типа (22.6) *).

Возникшую ситуацию можно сформулировать иначе: мезон-нуклонное рассеяние в области малых энергий определяется не только рассмотренным выше видом взаимодействия (22.6); неизвестное взаимодействие будет сильно сказываться на s -волнах и, может быть, на малых p -волнах; его влияние на (3,3)-волну должно быть незначительным.

Ранее при обсуждении последовательности сильно взаимодействующих частиц (гл. 1) было установлено, что таким взаимодействием является $\pi\pi$ -взаимодействие. Его проявление в процессах πN -рассеяния можно изучить с помощью представления Мандельстама.

*) Подробный анализ s -волн на основе аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии изложен в § 29.

§ 23. Представление Мандельштама

23.1. Кроссинг-симметрия и полюсные члены. Выше (§ 5) мы уже обсудили общий вид представления Мандельштама и теперь приведем его для конкретного случая πN -рассеяния (Мандельштам (1958)). Наличие у нуклонов и мезонов изотопического и обычного спинов приводит к появлению четырех скалярных функций $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$, для каждой из которых считаем справедливым следующие двойные спектральные представления:

$$\begin{aligned}
 A^{(\pm)}(s, u, t) = & \frac{1}{\pi^2} \iint_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{A_{12}^{(\pm)}(s', u')}{(s'-s)(u'-u)} ds' du' + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{A_{13}^{(\pm)}(s', t')}{(s'-s)(t'-t)} dt' + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{A_{23}^{(\pm)}(u', t')}{(u'-u)(t'-t)} dt', \\
 B^{(\pm)}(s, u, t) = & g^2 \left[\frac{1}{M^2-s} \mp \frac{1}{M^2-u} \right] + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{B_{12}^{(\pm)}(s', u')}{(s'-s)(u'-u)} du' + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{B_{13}^{(\pm)}(s', t')}{(s'-s)(t'-t)} dt' + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{B_{23}^{(\pm)}(u', t')}{(u'-u)(t'-t)} dt'.
 \end{aligned} \tag{23.1}$$

Эти представления одновременно описывают три процесса с двумя π -мезонами и нуклонами. Перечислим их в порядке, соответствующем выбору в качестве квадратов

полных энергий переменных s , u и t :

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } \pi + N &\rightarrow \pi' + N' (s), \\ \text{II. } \bar{\pi}' + N &\rightarrow \bar{\pi} + N' (u), \\ \text{III. } \pi + \bar{\pi}' &\rightarrow \bar{N} + N' (t), \\ s &= (q_1 + p_1)^2, & p_1 + p_2 + q_1 + q_2 &= 0, \\ u &= (q_2 + p_1)^2, & s + u + t &= 2(M^2 + \mu^2), \\ t &= (p_1 + p_2)^2, \end{aligned} \right\} (23.2)$$

Присутствие полюсных членов только у функций $B^{(\pm)}(s, u, t)$ объясняется псевдоскалярностью π -мезонов. Этот факт легко получить, вычислив второй порядок теории возмущений для процессов I и II, если принять обычное взаимодействие вида $g\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau_i\psi(x)\varphi_i(x)$ (см. рис. 43).

В с. ц. м. инвариантные переменные s , u , t выражаются через импульсы и углы рассеяния соответствующих процессов. Так, для первого из них имеем формулы (21.13). Аналогичные соотношения имеют место и для процесса II. Они получаются из формулы (21.13) заменой

$$s \rightarrow u, \quad u \rightarrow s, \quad t \rightarrow t, \quad q \rightarrow q_2, \quad c \rightarrow c_2. \quad (23.3)$$

В процессе III импульсы начального q_3 и конечного p_3 состояний не равны друг другу. Поэтому формулы для s , u , t отличаются от (21.13) и (23.3): ими будут формулы (21.25).

Рассмотрим физические области процессов I—III на плоскости s , u (рис. 46). Они определяются условиями $q_i^* = q_i$, $p_3^* = p_3$, $q_i > 0$, $p_3 > 0$ и $-1 \leq c_i \leq +1$. Поэтому для двух первых процессов всегда $t \leq 0$. Линия $t = 0$ соответствует рассеянию на нулевой угол. В физической области первого процесса $q^2 > 0$, а следовательно, $s \geq (M + \mu)^2$. При любом фиксированном $s > (M + \mu)^2$ значения t ограничены снизу, так как $t \geq -4q^2(s)$. Аналогично для второго процесса $q_2^2 > 0$, вследствие чего $u \geq (M + \mu)^2$. Величина переменной t также ограничена снизу, ибо $t \geq -q_2^2(u)$. Точки $-4q^2(s)$, $-4q_2^2(u)$ лежат на гиперболе, уравнение которой имеет вид

$$su = (M^2 - \mu^2)^2. \quad (23.4)$$

Таким образом, физические области процессов I и II

ограничены линией $t = 0$ и гиперболой (23.4) (рис. 46). Физическая область процесса III расположена, очевидно, в полуплоскости $t \geq 4M^2$, так как в ней $p_3^2 > 0$. При любом фиксированном значении t точки физической

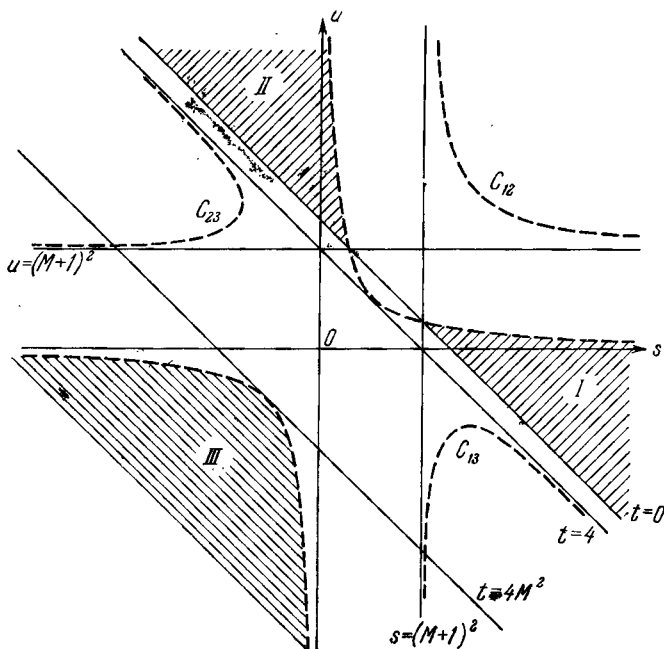


Рис. 46.

области этого процесса заполняют отрезок прямой $t = \text{const} > 4M^2$. С помощью формул (21.25) легко убедиться в том, что граничные точки этого отрезка расположены на отрицательной ветви гиперболы (23.4).

23.2. Границы спектральных функций. Спектральные функции представления Мандельштама (23.1) действительны и в силу условия кроссинг-симметрии (21.15) подчиняются равенствам

$$\left. \begin{aligned} A_{12}^{(\pm)}(s, u) &= \pm A_{12}^{(\pm)}(u, s), & B_{12}^{(\pm)}(s, u) &= \mp B_{12}^{(\pm)}(u, s), \\ A_{13}^{(\pm)}(s, t) &= \pm A_{23}^{(\pm)}(u, t), & B_{13}^{(\pm)}(s, t) &= \mp B_{23}^{(\pm)}(u, t). \end{aligned} \right\} (23.5)$$

Нижние пределы интегрирования в представлениях (23.1) соответствуют пороговым значениям переменных s , u . Что касается переменной t , то по ней интегрирование начинается со значений, меньших порогового $4M^2$ (см. § 5.2). Ниже мы остановимся на этом свойстве подробнее. Точная форма областей, в которых заданы спектральные функции, определяется условием унитарности. Окончательный результат не зависит от изотопической и спиновой структуры T -матрицы и определяется массами сталкивающихся частиц. Поэтому в формулах (23.1) вместо четырех функций $A(\pm)$, $B(\pm)$ можно рассмотреть только одну скалярную функцию, например, содержащую полюсные члены $B^{(-)}$, которую обозначим через $f(s, u, t)$, т. е.

$$\langle -p_2, -q_2 | S - 1 | p_1, q_1 \rangle = \frac{i\delta(p_1 + q_1 + p_2 + q_2)M}{(2\pi)^2 (4p_1^0 p_2^0 q_1^0 q_2^0)^{1/2}} f(s, u, t). \quad (23.6)$$

В определении (23.6) сохранены факторы нормировки, соответствующие нуклонам, $(M/p^{(0)})^{1/2}$, и π -мезонам, $(2q^0)^{-1/2}$.

Прежде чем использовать условие унитарности, напомним, что спектр масс состояний полной системы $|n\rangle$ определяется законами сохранения, действующими в системе сталкивающихся частиц. Предполагая, что в процессе πN -взаимодействия сохраняются барионное число, странность и четность, в качестве полной системы возьмем такую последовательность состояний:

$$|N\rangle, |N, \pi\rangle, |N, 2\pi\rangle, \dots, |N, \bar{K}, K\rangle, \dots$$

Рассмотрим условие унитарности в первом канале в двухчастичном (одномезонном) приближении, т. е. из всей совокупности состояний $|n\rangle$ учтем только одно $|N, \pi\rangle$. Вклад от однонуклонного состояния связан с матричным элементом $\langle N, \pi | T | N \rangle$ и отличен от нуля только в нефизической области. Тогда, используя определение (23.6) и условие унитарности $S^+ S = 1$, имеем в с. ц. м.

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } f(s, c_1) &= \frac{Mq}{16\pi^2 W} \int d\varphi_2 \sin \theta_2 d\theta_2^* f(s, c_2) f(s, c), \\ c &= c_1 c_2 + \sqrt{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad c_i = \cos \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (23.7)$$

Здесь W , q — полная энергия и импульс в с. ц. м. Они выражаются через s следующими соотношениями:

$$W = \sqrt{s}, \quad q^2 = \frac{1}{4s} [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2]. \quad (23.8)$$

Двухчастичное условие унитарности во втором канале задается теми же уравнениями, что и в первом. Отличие состоит в том, что в формулах (23.7), (23.8) необходимо сделать замену (23.3).

Условие унитарности (23.7) справедливо в физической области $s > (M + \mu)^2$, $-1 \leq c \leq +1$. Определение границ спектральных функций требует продолжения по c на нефизические значения $|c| > 1$. Для этого подставим в (23.7) д. с. для t при фиксированном s . Удобно вместо t использовать переменную c . Тогда

$$\left. \begin{aligned} A(s, c) &= \frac{1}{\pi} \int dz' \frac{A_2(s, z') + A_3(s, z')}{z' - c}, \\ A^*(s, c) &= \frac{1}{\pi} \int dz' \frac{A_2^*(s, z') + A_3^*(s, z')}{z' - c}, \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

где для удобства антиэрмитовы части A_2 и A_3 записаны под знаком одного интеграла, хотя они отличны от нуля в различных областях переменного z' . Кроме того, $A_2(s, z)$ содержит вклад от полюсного члена по u .

Далее рассуждения совершенно аналогичны тем, которые проводились при выводе спектральной унитарности в задаче о пп-рассеянии. Подставляя формулу (23.9) в (23.7) и повторяя выкладки (8.7) — (8.13), получим следующие выражения для спектральных функций:

$$\left. \begin{aligned} A_{13}(s, z_1) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{Mq}{W} \int dz_2 \int dz_3 K_1(z_1, z_2, z_3) \times \\ &\quad \times \{A_3^*(s, z_2) A_3(s, z_3) + A_2^*(s, z_2) A_2(s, z_3)\}, \\ A_{12}(s, z_1) &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{Mq}{W} \int dz_2 \int dz_3 K_2(z_1, z_2, z_3) \times \\ &\quad \times \{A_2^*(s, z_2) A_3(s, z_3) + A_3^*(s, z_3) A_2(s, z_2)\}, \end{aligned} \right\} \quad (23.10)$$

$$\begin{aligned}
 K_1(z_1, z_2, z_3) &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ при } z_1 > z_2 z_3 + \sqrt{(z_2^2 - 1)(z_3^2 - 1)}, \\ 0 \text{ при } z_1 < z_2 z_3 + \sqrt{(z_2^2 - 1)(z_3^2 - 1)}, \end{array} \right. \\
 K_2(z_1, z_2, z_3) &= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ при } z_1 < z_2 z_3 - \sqrt{(z_2^2 - 1)(z_3^2 - 1)}, \\ 0 \text{ при } z_1 > z_2 z_3 - \sqrt{(z_2^2 - 1)(z_3^2 - 1)}. \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{23.11}$$

Границы задания спектральных функций (23.11) можно выразить на языке переменных s, u, t . Для этого нужно представить z_i как функции s, u, t , что связано с конкретными значениями масс промежуточных состояний. Вычислим, например, границу спектральной функции A_{13} , соответствующую полукосному члену в $A_2(s, z)$. Она возникает от вклада второго слагаемого в подынтегральном выражении для $A_{13}(s, z)$ (23.10). В этом случае

$$z_1 = \frac{t}{2q^2} + 1, \quad z_2 = z_3 = \frac{M^2}{2q^2} + 1,$$

и из (23.11) следует, что уравнение границы имеет вид

$$(t - 4M^2)[s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2] - 4M^4 s = 0. \tag{23.12}$$

Линия, определяемая уравнением (23.12), имеет асимптоты

$$s_{ac} = (M + \mu)^2, \quad t_{ac} = 4M^2.$$

Далее, установим границу спектральной функции A_{13} , соответствующую вкладу от антиэрмитовой части процесса III. Как отмечалось выше (§ 5.2), функция $A_3(s, z)$ отлична от нуля уже при $t > 4\mu^2$, т. е. в нефизической области процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Поэтому $A_3(s, z)$ следует определять с помощью аналитического продолжения условия унитарности третьего канала на нефизические значения энергетической переменной t . Возможность такого продолжения для каждой из парциальных волн доказывается в Приложении 2 (Мандельстам (1960)). Итак, для вычисления этой границы имеем $z_2 = z_3 = \frac{(2\mu)^2}{2q^2} + 1$

и, снова используя (23.11), получаем уравнение

$$(t - 16\mu^2)[s - (M + \mu)^2][s - (M - \mu)^2] - 64\mu^4 s = 0, \quad (23.13)$$

$$t_{ac} = 16\mu^2, \quad s_{ac} = (M + \mu)^2.$$

Аналогичным образом можно найти границу спектральной функции A_{12} , если использовать вторую из формул (23.10). Однако сначала укажем, что определяемые из двухчастичного условия унитарности в первом канале спектральные функции A_{13} и A_{23} не удовлетворяют условию

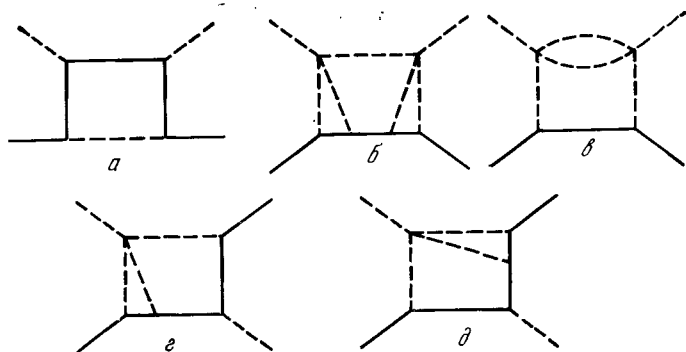


Рис. 47.

кроссинг-симметрии (21.15). Действительно, в этом приближении $A_{23} = 0$. Возникшая ситуация полностью напоминает картину вычисления спектральных функций задачи $\pi\pi$ -рассеяния на основе двухчастичного условия унитарности в одном из каналов. Так же как и в задаче $\pi\pi$ -рассеяния, можно получить ответ, удовлетворяющий требованию перекрестной симметрии, если рассмотреть двухчастичное условие унитарности в каждом из каналов I, II, III. При этом удобно воспользоваться установленным в § 8.4 соответствием границ спектральных функций и диаграмм Фейнмана (Мандельштам (1959)). Тогда границы (23.12) и (23.13) спектральной функции A_{13} соответствуют диаграммам *a*, *б* рис. 47. Диаграмма *б* входит в двухчастичное условие унитарности канала s . Она определяет асимптоту $t = 4\mu^2$ спектральной функ-

ции A_{13} . Однако с точки зрения третьего канала она является четырехчастичной и, следовательно, не входит в двухчастичное условие унитарности. Легко видеть, что

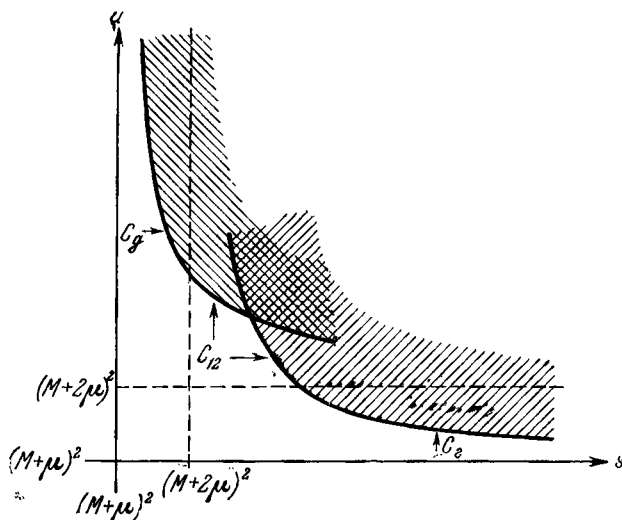


Рис. 48.

такие же замечания справедливы относительно диаграмм ϵ , ζ , δ . Приведем определяемые ими границы и асимптоты:

$$\begin{aligned} \epsilon) \quad & (t - 4\mu^2) [s - (M + 2\mu)^2] [s - (M - 2\mu)^2] - \\ & - 16\mu^2 (s + 3M^2 - 3\mu^2) = 0; \\ & s_{ac} = (M + 2\mu)^2, \quad t_{ac} = 4\mu^2; \end{aligned} \quad (23.14)$$

$$\begin{aligned} \zeta) \quad & [u - (M + 2\mu)^2] [u - (M - 2\mu)^2] [s - (M + \mu)^2] \times \\ & \times [s - (M - \mu)^2] - 16M^2\mu^2 su = 0; \\ & s_{ac} = (M + \mu)^2, \quad u_{ac} = (M + 2\mu)^2; \end{aligned} \quad (23.15)$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & [s - (M + 2\mu)^2] [s - (M - 2\mu)^2] [u - (M + \mu)^2] \times \\ & \times [u - (M - \mu)^2] - 16M^2\mu^2 su = 0; \\ & s_{ac} = (M + 2\mu)^2, \quad u_{ac} = (M + \mu)^2. \end{aligned} \quad (23.16)$$

Остановимся на границе C_{12} спектральной функции A_{12} (рис. 48). Она состоит из двух кривых C_s и C_t , заданных

уравнениями (23.15), (23.16). Асимптоты линии C_{12} совпадают с порогами реакций I и II. Условие унитарности приводит к тому, что обе переменные s и u не могут одновременно достигать наименьших значений $(M + \mu)^2$. Асимптота $t = 4\mu^2$ границы C_0 спектральной функции A_{12} определяется наличием $\pi\pi$ -взаимодействия, что видно и из диаграммы б рис. 47. Как уже указывалось, $\pi\pi$ -взаимодействие должно играть важную роль в понимании πN -рассеяния (§ 22.5).

Представление Мандельстама не доказано до настоящего времени, хотя следствия из него широко применяются при анализе различных процессов. Ниже мы будем постулировать его справедливость, хотя существенно будут использоваться только свойства аналитичности $A(s, u, t)$. Напомним, что свойства аналитичности можно получить, исходя из теории возмущений для всех ее порядков, что было сделано Логуновым и др. (1963). Поэтому фактически используемые аналитические свойства могут быть обоснованы лучше, чем это кажется вначале.

§ 24. Различные варианты использования представления Мандельстама

Представление Мандельстама открыло широкие возможности для анализа различных процессов с участием сильно взаимодействующих частиц (см. рис. 2). Большой интерес к $\pi\pi$ -рассеянию определяется его исключительным положением в дисперсионном методе и относительной простотой и замкнутостью уравнений для него. Интерес к πN -рассеянию связан, очевидно, с накопленным к настоящему времени богатым экспериментальным материалом, который позволяет детально проверять выводы теории. Сами же теоретические построения не столь прозрачны, как в случае $\pi\pi$ -рассеяния. Рассеяние π -мезонов на нуклонах связано с процессами $\pi\pi$ -рассеяния и $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Поэтому уравнения πN -рассеяния неизмеримо более сложны, чем уравнения $\pi\pi$ -рассеяния, включая последние как свою часть. В такой ситуации ясна неизбежность приближений, которые и отличают различные подходы к πN -проблеме. Преимущества той или иной совокупности приближений, как правило, нелегко выявить.

24.1. Применение приближения Чини — Фубини. Представление Мандельстама можно использовать для получения уравнений для спектральных функций (Гер-Мартиросян (1960)), после вычисления которых амплитуда рассеяния восстанавливается по формулам (23.1). На таком пути не было получено ни одного результата, допускающего сравнение с экспериментом. Работы, доведенные до сравнения с экспериментальными данными, используют представление Мандельстама как источник информации об аналитических свойствах парциальных волн в комплексной плоскости энергетической переменной. Для этих целей фактически достаточно одномерных представлений Чини — Фубини (§ 9.2). Спектральные функции одномерных представлений Чини — Фубини можно выразить через мнимые части амплитуд процессов I — III (23.2). Если затем учесть наличие (3,3)-резонанса в каналах I, II и предположить существование ρ -мезона, то можно выразить амплитуды $A^{(-)}$ и $B^{(-)}$ через параметры ρ -мезона и (3,3)-резонанса. Далее, путем интегрирования из амплитуд $A^{(-)}$ и $B^{(-)}$ выделяются парциальные волны πN -рассеяния. Однако в этом месте приходится использовать разложение по полиномам Лежандра для значений s , лежащих вне эллипса Лемана. Аналогичные трудности уже встречались нам при выводе уравнений для парциальных волн πN -рассеяния (§ 10). В случае πN -рассеяния они могут привести к тому, что вычисление таким путем влияния πN -взаимодействия на πN -рассеяние может оказаться неверным. Однако именно на этом пути впервые была получена формула для s -волн πN -рассеяния (Боукок и др. (1960)), явно содержащая эффект ρ -мезона:

$$\operatorname{Re}(f_{1/2} - f_{3/2}) = -\frac{9}{2} \frac{M}{W} \frac{\omega}{2q^2} c_1 \ln \left(1 + \frac{4q^2}{t_r} \right) + b\omega, \quad (24.1)$$

где ω и q — энергия и импульс мезона, $\omega = \sqrt{q^2 + 1}$, W — полная энергия πN -системы, b — постоянная, зависящая от вклада высших состояний в условии унитарности. Параметры t_r и c_1 связаны с характеристиками ρ -мезона: t_r — положение ρ -мезонного резонанса, а c_1 пропорционально ширине этого резонанса.

Соотношение (24.1) качественно удовлетворяет всем тем требованиям, о которых говорилось в конце § 22. Действительно, разлагая правую часть (24.1) в ряд по q^2 , получим

$$\operatorname{Re}(f_{1/2} - f_{3/2}) = -\frac{9}{2} \frac{M}{W} \omega c_1 \left[\frac{2}{t_r} - \frac{8q^2}{t_r^2} + \dots \right] + b\omega.$$

Первый член имеет вид, удовлетворяющий требованию кроссинг-симметрии (пропорциональность ω). Знак перед вторым членом отрицательный, что и приводит к компенсации роста функции $\operatorname{Re}(f_{1/2} - f_{3/2})$, вызванного множителем ω . Эффективность компенсации определяется положением ρ -мезона. Отметим, что константа c_1 входит также в параметры электромагнитной структуры нуклона. Возможность одновременного описания πN -рассеяния и электромагнитной структуры нуклона одним и тем же значением c_1 значительно повышает уверенность в справедливости выражения (24.1).

24.2. Метод Гамильтона (1963). Представление Мандельштама можно использовать и как источник информации об аналитических свойствах парциальных волн в функции комплексной переменной, например, s . Для этого нужно выразить u и t через s и c с помощью формул (21.13), (23.8). Далее, используя формулы, обратные (21.22), получаем из представления Мандельштама следующие особенности парциальных волн:

а) полюс в точке $s = M^2$,

б) разрезы

$$-\infty \leq s \leq M^2 + 2\mu^2 \quad \text{и} \quad \left(M - \frac{\mu^2}{M}\right)^2 < s < M^2 - \mu^2$$

от полюса по переменной u ,

в) разрез от первого канала $s \geq (M + \mu)^2$,

г) разрез от второго (перекрестного) канала

$$-\infty \leq s \leq (M - \mu)^2,$$

д) разрезы от третьего канала на линии $s < 0$ и вдоль круга $|s| = M^2 - \mu^2$.

Полюс в точке $s = M^2$, происходящий от однонуклонного члена в условии унитарности, имеет только одна

волна. Это — волна $f_{1,1}(s)$, квантовые числа которой совпадают с таковыми для свободного нуклона ($I = J = 1/2$). Влияние разрезов (б) вычисляется явно, так как они возникают от известной функции $g^2/(M^2 - u)$.

Используя аналитические свойства (а) — (д), можно написать, например, для s -волны такие д. с.:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_s^{(\pm)}(s) = & P^{(\pm)}(s) + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_s^{(\pm)}(s')}{s' - s} ds' + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{(M-\mu)^2} \frac{\operatorname{Im} f_s^{(\pm)}(s')}{s' - s} ds' + \Delta_0^{(\pm)}(s). \end{aligned} \quad (24.2)$$

Эта формула отражает структуру разрезов в плоскости комплексного переменного s , изображенную на рис. 49.

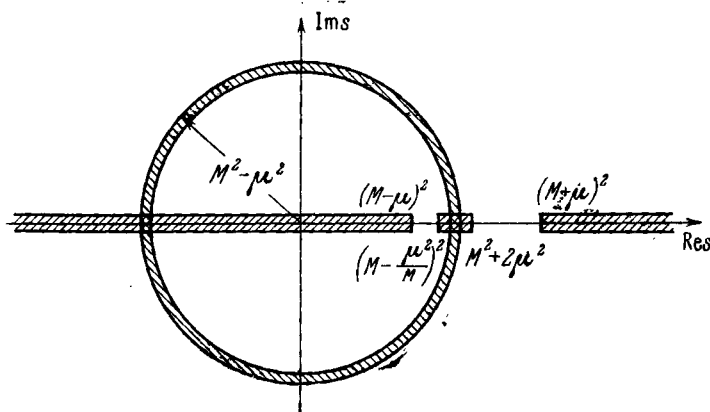


Рис. 49.

Здесь $P^{(\pm)}(s)$ — вклад от разрезов (б), возникающих при интегрировании полюсных членов. Интегральные члены вычисляются, если известны фазы рассеяния как функции энергии. В первом интеграле

$$\operatorname{Im} f_s^{(\pm)}(s) = \operatorname{Im} \frac{1}{3} \left(f_{1/2} + 2f_{3/2} \right)$$

и зависит только от s -фаз πN -рассеяния. Подынтегральная

функция второго интеграла в (24.2) является значением $\text{Im } f_s^{(\pm)}(s)$ для нефизических с точки зрения канала s значений аргумента $0 < s < (M - \mu)^2$. С помощью условия кроссинг-симметрии (21.15) она может быть выражена через физические значения амплитуды в перекрестном канале. Во второй интеграл дадут вклад все парциальные волны. Функция $\Delta_0^{(\pm)}(s)$ представляет сумму интегралов вдоль разреза по кругу $|s| = M^2 - \mu^2$ и разреза $s < 0$, которые содержат вклад от неизвестного процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, а также и от перекрестного процесса πN -рассеяния. Последний не может быть вычислен, даже если фазы δ_{ij} известны, из-за расходимости рядов по полиномам Лежандра в этой области. Однако значения функции $\Delta_0^{(\pm)}(s)$ в областях $0 < s < (M - \mu)^2$ и $(M + \mu)^2 \leq s < \infty$ можно вычислить, если использовать в качестве определения $\Delta_0^{(\pm)}$ не ее спектральное представление через разрезы, а формулу (24.2). При этом данные фазового анализа используются для вычисления $\text{Re} f_s$ в указанных областях. Далее, можно попытаться выделить вклад от ближайшей части окружности $|s| = M^2 - \mu^2$, если учесть, что он дает быстро меняющуюся часть функции $\Delta_0^{(\pm)}(s)$. Далекие особенности приводят к медленно меняющимся вкладом в $\Delta_0^{(\pm)}(s)$. На основании соотношения неопределенностей ясно, что быстро меняющаяся часть функции $\Delta_0^{(\pm)}(s)$ обязана взаимодействию с большим радиусом действия, а медленно меняющаяся часть — взаимодействию на малых расстояниях.

Такое разбиение функции $\Delta_0^{(\pm)}$ на быстро и медленно меняющиеся части до некоторой степени условно и может привести к неоднозначным выводам.

Совместный анализ разностных функций $\Delta(s)$ для s - и p -волн позволяет сделать ряд выводов о характере $\pi\pi$ -взаимодействия и его влиянии на πN -рассеяние. В целом же такой подход не приводит к формулам со столь ясным физическим содержанием, как это было получено с использованием представления Чини — Фубини. К числу недостатков такого метода нужно причислить также обилие параметров, учитывающих влияние высоких энергий. Положительной его чертой является возможность

использовать различные предположения о виде $\pi\pi$ -взаимодействия при анализе функций $\Delta(s)$.

Даже беглый обзор различных способов использования представления Мандельстама позволяет выделить два различных подхода. В первом из них окончательным считается выражение для амплитуды рассеяния, содержащее ряд параметров с четким физическим смыслом: константы связи (Боукок и др. (1960)), положения резонансов и т. п. С помощью таких формул можно пытаться понять как само πN -рассеяние, так и связанные с ним характеристики нуклона (нуклонные формфакторы). Второй подход направлен на возможно более точное вычисление некоторых функций ($\Delta^{(\pm)}(s)$) с помощью аналитических свойств, установленных на основе представления Мандельстама (Гамильтон (1963)).

Последующий анализ этих функций позволяет выделить влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на πN -рассеяние. Однако он с неизбежностью требует введения большого числа чисто феноменологических параметров. Значения величин, имеющих ясный физический смысл, полученные с помощью этих подходов, удается согласовать между собой.

24.3. Наша программа. Ниже πN -рассеяние будет анализироваться методом, относящимся к первому направлению. Остановимся на идейной стороне вычислений следующих параграфов. Представление Мандельстама дает возможность изучить аналитические свойства функций $A^{(\pm)}$ и $B^{(\pm)}$ по переменной ν при фиксированном значении s . Такой анализ кинематики разрезов позволит установить, что не все значения s одинаково хороши для выяснения влияния $\pi\pi$ -взаимодействия на πN -рассеяние. Наиболее благоприятным в этом смысле является рассеяние назад ($s = -1$). Так же как и в задаче $\pi\pi$ -рассеяния, выделение парциальных волн из функций $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ будет проведено с помощью дифференциальной методики путем комбинирования д. с. для рассеяния вперед и назад. Центральными здесь являются д. с. рассеяния назад. Они содержат вклады $\pi\pi$ -взаимодействия, наиболее сильно меняющиеся с энергией в физической области πN -рассеяния. Поэтому эти соотношения должны быть получены как можно более аккуратно. Для этого детально разбирается

вид функций $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ на разрезе от процесса $\pi N \rightarrow N\bar{N}$. С помощью условия унитарности этого процесса изучаются ограничения, налагаемые на граничные значения $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$. Именно в этом месте выявляется роль πN -взаимодействия в πN -рассеянии. При учете πN -взаимодействия мы не будем предполагать какого-либо конкретного вида фаз рассеяния. Это позволит получить для $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ выражения, справедливые в некоторой области комплексного переменного v , включающей как процесс $\pi N \rightarrow N\bar{N}$, так и πN -рассеяние. Используя экспериментальные данные, мы можем определить параметры в $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ и выбрать вид πN -взаимодействия так, чтобы наиболее точно описать данные фазового анализа πN -рассеяния.

Полученные таким образом функции $A^{(\pm)}$, $B^{(\pm)}$ можно использовать и при значениях переменных, соответствующих процессу $\pi N \rightarrow N\bar{N}$. Последний существен для вычисления электромагнитных формфакторов нуклонов.

Таким образом, окончательные выражения для амплитуды πN -рассеяния T осуществляют аналитическое продолжение ее в область процесса $\pi N \rightarrow N\bar{N}$. Это позволяет одновременно описать как πN -рассеяние, так и электромагнитный формфактор нуклона. Избранный способ действий свободен от недостатков наподобие использования рядов вне области их сходимости, а также содержит достоинства второго из перечисленных выше направлений — отсутствие априорных предположений о виде πN -взаимодействия.

§ 25. Способ получения уравнений для парциальных волн

25.1. Выбор переменных и функций для аналитического продолжения. Приведенные выше примеры применения представления Мандельштама к πN -рассеянию показывают, что выбор переменных для изучения аналитических свойств амплитуды рассеяния может быть сделан различными способами. Ниже в качестве таковых используются квадрат импульса и косинус угла рассеяния в системе центра масс $v = q^2$ и $z = \cos \theta$. Рассмотрим аналитические свойства функций $A^{(\pm)}(s, u, t)$ и $B^{(\pm)}(s, u, t)$ по перемен-

ной v при фиксированном значении z из физической области $-1 \leq z \leq +1$ (Ефремов и др. (1960)). Для дальнейшего удобно учесть свойства симметрии функций $A^{(\pm)}(s, u, t)$, $B^{(\pm)}(s, u, t)$ по отношению к перестановке $s, u \rightarrow u, s$, т. е. кроссинг-симметрию. Вместо $A^{(\pm)}(s, u, t)$, $B^{(\pm)}(s, u, t)$ будем рассматривать функции

$$\Phi(s, u, t) = \left\{ A^{(+)}(s, u, t); \alpha = \frac{A^{(-)}(s, u, t)}{s-u}; \right. \\ \left. \beta = \frac{B^{(+)}(s, u, t)}{s-u}; B^{(-)}(s, u, t) \right\},$$

каждая из которых симметрична при замене $s \leftrightarrow u$, т. е.

$$\Phi(s, u, t) = \Phi(u, s, t).$$

Воспользовавшись формулами (21.13) и представлением Мандельстама (23.1), можно установить, что функции $\Phi(v, z)$ обладают следующими особенностями:

- 1) разрезом $0 < v < \infty$ от первого канала,
- 2) разрезом $-\infty < v < -a(z)$ от второго канала, где

$$a(z) = \begin{cases} M^2 & \text{при } z \geq 1/M \quad (a_1), \\ \frac{M^2 + 1 - 2Mz}{1-z} & \text{при } z < 1/M \quad (a_2), \end{cases}$$

3) разрезом $-\infty < v < -\frac{2}{1-z} = -a_3$ от третьего канала,

- 4) кинематическим разрезом $-M^2 \leq v \leq -\mu^2$.

Кроме того, функции β , $B^{(-)}$ будут обладать полюсами от полюсных членов представления Мандельстама, которые полностью известны. Кинематический разрез возникает из-за разности масс мезона μ и нуклона M . При переходе к плоскости s он превращается в окружность $|s| = M^2 - \mu^2$ (см. рис. 49). От кинематического разреза можно избавиться, если выделить явно зависимость от $K(v) = \sqrt{(M^2 + v)(\mu^2 + v)}$ в каждой из функций $\Phi(v, z)$, т. е.

$$\Phi(v, z) = \Phi_1(v, z) + K(v) \Phi_2(v, z).$$

Запишем явно для каждой функции $\Phi(v, z)$ зависимость от

$K(v)$; тогда для $\Phi_{1,2}(v, z)$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(v, z) &= \frac{1}{2} [\Phi(v, K(v), z) + \Phi(v, -K(v), z)], \\ \Phi_2(v, z) &= \frac{1}{2K(v)} [\Phi(v, K(v), z) - \Phi(v, -K(v), z)]. \end{aligned} \right\} (25.1)$$

Функции $\Phi_{1,2}(v, z)$ кинематического разреза не содержат. Однако их определение является формальным, поскольку неясен смысл выражения $\Phi(v, -K(v), z)$. Заметим, что замена $K(v) \rightarrow -K(v)$ может быть интерпретирована как изменение знака четвертой компоненты мезонного импульса, т. е. $q^0 \rightarrow -q^0$ (см. (21.13)). Поэтому функции $\Phi(v, -K(v), z)$ выражаются через значения амплитуды рассеяния в перекрестном (втором) канале. Для этого перепишем аргументы функций $\Phi(v, -K(v), z)$ в виде

$$\left. \begin{aligned} s^* &= M^2 + \mu^2 + 2v - 2K(v), \\ u^* &= M^2 + \mu^2 - 2vz + 2K(v), \\ t &= -2v(1 - z). \end{aligned} \right\} (25.2)$$

Справедливо следующее утверждение. Если точка $v, z(s, u, t)$ лежит в физической области реакции I, то точка s^*, u^*, t расположена в физической области реакции II. Связь между переменными этих реакций определяется формулами

$$v_2 = v \frac{M^2 + \mu^2 + v(1 + z^2) - 2zK(v)}{M^2 + \mu^2 - 2vz + 2K(v)}, \quad c_2 = 1 - \frac{v}{v_2}(1 - z). \quad (25.3)$$

Геометрическая интерпретация формул (25.3) изложена в Приложении 4. Аналитические свойства амплитуд $\Phi(v, -K(v), z)$ по переменной v при фиксированном значении z также следуют из представления Мандельштама:

- 1) разрез $0 < v < \infty$ от канала II,
- 2) разрез $a_2(z) < v < -M^2$ от канала II для $z \geq \mu/M$,
- 3) разрез $-\infty < v < -\frac{2\mu^2}{1-z}$ от канала III,

4) кинематический разрез $-M^2 < v < -\mu^2$. Кроме того, функции $\beta, B^{(-)}$ имеют полюсы. Графический способ получения соотношений (1) — (3) см. в Приложении 5,

Функции $\Phi_1(v, z)$ и $\Phi_2(v, z)$ обладают, очевидно, всеми особенностями функций $\Phi(v, K(v), z)$, $\Phi(v, -K(v), z)$, за исключением кинематических разрезов (рис. 50). Из рисунка видно, что для рассеяния вперед ($z = 1$) начало разреза от третьего канала (процесс $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$) уходит на

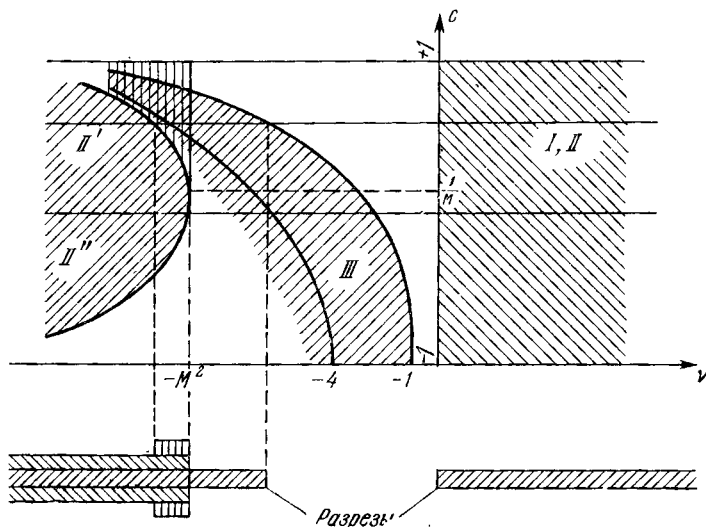


Рис. 50.

$-\infty$. Поэтому вклад этого разреза в д. с. для рассеяния вперед равен нулю или входит в константу вычитания. Физическая точка перекрестного процесса с координатами s^* , u^* , t также соответствует рассеянию вперед, что следует из формул (25.3). Д. с. для рассеяния вперед по переменной v совпадают с хорошо известными д. с. по переменной E — энергии в л.с.к. (Боголюбов, Медведев, Поливанов (1958)). Соответствие областей интегрирования показано в табл. 4.

Рассеяние назад обладает интересной особенностью. В этом случае на $-\infty$ уходит разрез от перекрестной реакции (канал II), а разрез от канала III максимально приближается к физическому разрезу $[0, \infty)$.

Таблица 4

Канал	Область переменной ν	Область переменной E
I	$0, \infty$	μ, ∞
II	$0, \infty$	$-\frac{M^2 + \mu^2}{2M}, -\mu$
II'	$-\infty, -M^2$	$-M, -\frac{M^2 + \mu^2}{2M}$
II''	$-\infty, -M^2$	$-\infty, -M$

Отсутствие вклада канала II для рассеяния назад является характерной особенностью переменной ν . Если вместо переменной ν использовать переменную s , то для рассеяния назад наряду с разрезом от канала III будет присутствовать разрез и от канала II.

25.2. Дисперсионные соотношения для фиксированного угла рассеяния. Аналитические свойства функций $\Phi_{1,2}(\nu, z)$ позволяют применить к ним теорему Коши вдоль контура, охватывающего разрезы, изображенные на рис. 50. Возвращаясь к исходной функции $\Phi(\nu, K(\nu), z)$, имеем для нее д. с.

$$\begin{aligned}
 \pi\Phi(\nu, K(\nu), z) = & \int_0^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \{ \text{Im} \Phi(\nu', K(\nu'), z) \kappa_+(\nu, \nu') + \\
 & + \text{Im} \Phi(\nu', -K(\nu'), z) \kappa_-(\nu', \nu) \} + \\
 & + \int_{-\infty}^{-a_3(z)} \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \{ \text{Im} \Phi(\nu', K(\nu'), z) \kappa_+(\nu, \nu') + \\
 & + \text{Im} \Phi(\nu', -K(\nu'), z) \kappa_-(\nu, \nu') \} + \\
 & + \int_{-\infty}^{a(z)} \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \text{Im} \Phi(\nu', K(\nu'), z) \kappa_+(\nu', \nu) + \\
 & + \Theta\left(z - \frac{\mu}{M}\right) \int_{-a_2(z)}^{-M^2} \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} \text{Im} \Phi(\nu', -K(\nu'), z) \kappa_-(\nu, \nu') + \\
 & + \text{полюсные члены для } \beta \text{ и } B^{(-)}; \quad (25.4)
 \end{aligned}$$

здесь

$$\kappa_{\pm}(v, v') = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{K(v)}{K(v')} \right),$$

Θ — ступенчатая функция.

Пользуясь разложением амплитуд процессов πN -рассеяния и $\pi + \pi \rightarrow N + \bar{N}$ на парциальные волны, можно вычислить мнимые части функций $\Phi(v, K(v), z)$ на разрезах. Переход к парциальным волнам связан с выделением парциальных амплитуд из уравнений при любом z . Возникающие при этом проблемы аналогичны подробно обсуждавшимся для $\pi\pi$ -рассеяния. Выделение парциальных волн путем интегрирования осуществляется с помощью формул, обратных (21.20). При этом на разрезах от перекрестных реакций косинусы соответствующих углов рассеяния выходят за пределы физических областей $-1 \leq z_1 \leq +1$ и эллипса Лемана. Для процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ косинус угла рассеяния на интервале $-M^2 < v < -\mu^2$ принимает комплексные значения, т. е.

$$z_3 = \frac{s - u}{2i \sqrt{(v + M^2)(v + \mu^2)}}.$$

Каждое из разложений на парциальные волны сходится внутри эллипса с фокусами в точках $z_i = \pm 1$, проходящего через ближайшую особенность по z . Для разложения действительной части амплитуды такие особенности определяются пороговым значением соответствующей переменной, а для разложения мнимой части амплитуды они зависят от вида спектральной функции. Поскольку в дальнейшем нам не потребуется детального значения этих областей, ограничимся их графическим изображением (рис. 51) для процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$.

Ниже выделение парциальных волн πN -рассеяния из д. с. для любого z будет проведено путем комбинирования д. с. (25.4) для рассеяния вперед и назад. Достоинства такого способа выделения парциальных волн обсуждались выше (§ 14). Подчеркнем здесь практически важную сторону дифференциального приближения. Для этого удобно воспользоваться представлением Чини — Фубини (§ 9.2). Вклад от канала III, т. е. влияние $\pi\pi$ -взаимо-

действия на πN -рассеяние, определяется выражением

$$G_{\pi\pi} = \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{c(t', s, u)}{t' - t} dt',$$

которое переходит в постоянную для рассеяния вперед ($t = 0$). Если в д. с. провести вычитание, то эту константу невозможно отличить от вкладов других интегральных членов. Поэтому о величине влияния $\pi\pi$ -взаимодействия на πN -рассеяние можно судить только по

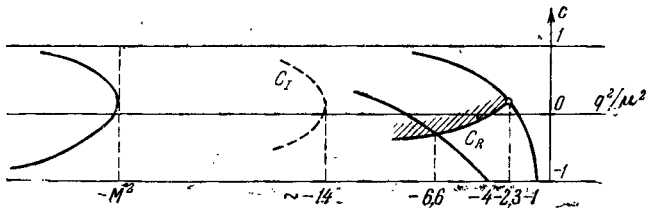


Рис. 51.

изменению $\pi\pi$ -вклада $G_{\pi\pi}$ с энергией, которое определяется производной по ν , т. е.

$$\frac{\partial G_{\pi\pi}(\nu, z)}{\partial \nu} = -4(1-z) \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{c(t', s, u)}{t' + 4\nu(1-z)} dt'.$$

Из последнего выражения видно, что $\frac{\partial G_{\pi\pi}(\nu, z)}{\partial \nu}$ достигает наибольшей величины для рассеяния назад [$(z = -1)$]. В этом случае влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на энергетический ход амплитуды πN -рассеяния максимально. Если выделять парциальные волны путем интегрирования, то, очевидно, влияние $\pi\pi$ -взаимодействия уменьшится.

25.3. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед. Полагая в формуле (25.4) $z = +1$, легко получить д. с. по переменной ν . Однако, как отмечалось, структура интегралов от перекрестной реакции сложна. Поэтому удобно воспользоваться вместо ν обычной переменной s .

Д. с. по s для рассеяния вперед имеют вид

$$\Phi(s, +1) = \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \text{Im} \Phi(s', +1) \left(\frac{1}{s'-s} + \frac{1}{s'-u} \right) ds' +$$

+ полюсные члены для β и $B^{(-)}$. (25.5)

В соотношениях (25.5) предполагается, что функции Φ убывают на бесконечности. Для определения числа необходимых вычитаний будем исходить из предположения о равенстве пределов полных сечений реакций $\pi^{\pm p}$ при больших энергиях. По теореме Померанчука (1958) $\sigma_{+}(\infty) = \sigma_{-}(\infty)$. Вспоминая связь амплитуд $T^{(\pm)}$ с амплитудами T_{\pm} (формула (21.8)) и оптическую теорему (21.18), заключаем, что амплитуда ведет себя на бесконечности, вообще говоря, как константа. Отсюда при учете свойств кроссинг-симметрии (21.15) следует, что функции $A^{(-)}, B^{(-)}$ убывают на бесконечности. Этим объясняется тот факт, что д. с. для $A^{(-)}, B^{(-)}$ без вычитания согласуются с экспериментальными данными. Амплитуда $T^{(+)}$, вообще говоря, растет линейно с энергией, что приводит к необходимости двух вычитаний. Учитывая свойства симметрии $A^{(+)}$ и $B^{(+)}$, видим, что для функции $\beta = \frac{B^{(+)}}{s-u}$ вообще не требуется вычитания, а в д. с. для $A^{(+)}$ необходимо провести два вычитания. Поскольку, далее, в выражениях для $\text{Im} \Phi(s, +1)$ мы будем ограничиваться конечным числом парциальных волн, то уже одно вычитание обеспечит хорошую сходимость интегралов (25.5). Поэтому второе вычитание в этом приближении излишне, а в силу симметрии $A^{(+)}$ оно не даст дополнительной константы.

Таким образом, для $\frac{A^{(-)}}{s-u}, B^{(-)}, \beta = \frac{B^{(+)}}{s-u}$ будем считать справедливым д. с. (25.5) без вычитания, а для $A^{(+)}$ — с одним вычитанием.

25.4. Дисперсионные соотношения для рассеяния назад. Дисперсионные соотношения для рассеяния назад получаются из формулы (25.4) при $z = -1$. Необходимо учесть, что переменные перекрестной реакции s^*, u^*, t совпадают с таковыми для прямой реакции (21.13), т. е. $z_2 = -1, v_2 = v$. Воспользовавшись этим, из (25.4) легко

получить

$$\Phi(v, -1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \Phi(v', -1)}{v' - v} dv' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } \Phi(v', -1)}{v' - v} dv' +$$

+ полюсные члены для β , $B^{(-)}$. (25.6)

В интеграле по отрицательным v заключена вся информация о влиянии $\pi\pi$ -взаимодействия на πN -рассеяние. Для ее получения необходимо выразить функцию $\text{Im } \Phi(v', -1)$ через парциальные волны процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Заметим, что из формул (21.13) и (21.25) следуют равенства

$$z_3 = -1, \quad q_3^2 = v - \mu^2. \quad (25.7)$$

Поэтому интервал $-M^2 < v < -\mu^2$ является нефизическим по энергии для процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. На нем можно пользоваться разложением (21.29) амплитуды на парциальные волны, но условие унитарности (21.30), строго говоря, несправедливо. Однако было показано, что условие унитарности продолжается на интервал $-M^2 < v < -1$ (см. Приложение 2) (Мандельштам (1960)). Тогда справедливы и его следствия — формулы (21.31). Из них легко заключить, что каждая парциальная волна $f_{\pm}^{J(\pm)}$ имеет вид

$$f_{\pm}^{J(\pm)} = \rho_{\pm}^{J(\pm)} e^{i\delta_J^{(0;1)}}, \quad (25.8)$$

где $\rho_{\pm}^{J(\pm)}$ — действительные функции, а $\delta_J^{(0;1)}$ — фазы $\pi\pi$ -рассеяния. Соотношения (25.8) верны в интервале $-4\mu^2 < v < -\mu^2$. Действительно, этот интервал соответствует значениям $4\mu^2 < t < 16\mu^2$. Верхний предел — порог неупругих процессов $\pi\pi$ -рассеяния, начиная с которого фазы δ_J^I комплексны и формула (25.8) неверна. При анализе $\pi\pi$ -рассеяния предполагалось, что фазы δ_J^I действительны для $t > 4\mu^2$. Поэтому будем считать, что парциальные волны процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ имеют форму (25.8) для всех импульсов $v < -\mu^2$. Поскольку в д. с. (25.6) наиболее важными являются ближайшие особенности, т. е. небольшие значения t , то можно сделать следующее приближение:

$$\delta_l^I = 0, \quad l > 1.$$

Тогда соответствующие функции $f_{\pm}^{J(\pm)}$ будут чисто действительными, а функции $\Phi(\nu, -1)$ на разрезе $\nu < -\mu^2$ примут вид

$$\Phi(\nu, -1) = \rho(\nu) e^{i\delta(\nu)} + \varphi(\nu), \quad (25.9)$$

где $\rho(\nu)$, $\varphi(\nu)$ — неизвестные действительные функции. Величина $\varphi(\nu)$ имеет четкий смысл суммы всех высших парциальных волн. Ее можно приближенно оценить, предположив, что высшие парциальные волны определяются полюсными членами амплитуды рассеяния (Окунь, Померанчук (1959)). Такие предположения применялись при фазовом анализе для учета высших фаз lN -рассеяния. Формально это приводит к тому, что в ряды по парциальным волнам раскладываются функции J_{+-} (21.28) без полюсных членов. Полюсные члены J_{+-} дают вклад и в первые парциальные волны $f_{\pm}^{0;1(\pm)}$. Чтобы учесть это, необходимо из функций J_{+-} вычитать полюсные члены без первых гармоник $l \leq 1$.

Воспользовавшись таким приемом, получаем из формул (21.28) и (21.29) следующие выражения для функций $\Phi(\nu, -1)$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \tilde{\rho} e^{i\delta_1^1} + \frac{1}{4p_3^2} (\Delta + \Delta_1), \quad B^{(-)} = \rho e^{i\delta_1^1} + (\Delta - \Delta_0) \\ \left(\Delta_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Delta d \cos \theta_3, \quad \Delta_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} z_3^2 \Delta dz_3 \right); \\ A^{(+)} &= 4M q_3^2 z_3^2 + \gamma e^{i\delta_0^0} - 4M q_3^2 z_3^2 \Delta_\beta + 2M q_3^2 (\Delta_\beta)_1 \\ \left(\beta &= \beta_1 e^{i\delta_0^0} + \sqrt{\frac{3}{2}} \left\{ \Delta_\beta - \frac{1}{5\pi} [(\Delta_\beta)_1 - (\Delta_\beta)_3] \right\}, \right. \\ &\quad \left. (\Delta_\beta)_l = \int_{-1}^{+1} z \Delta_\beta(z) P_l(z) dz \right), \end{aligned} \right\} (25.10)$$

где

$$\Delta = g^2 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right), \quad \Delta_\beta = \frac{g^2}{(M^2 - s)(M^2 - u)}$$

— полюсные члены $B^{(-)}$ и β , а ρ , $\tilde{\rho}$, β , γ — неизвестные действительные функции.

Формулы (25.10) справедливы на нижнем берегу разреза $\nu \leq -\mu^2$, ибо амплитуда процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ определяется как $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} T(t + i\epsilon)$ и $t = -4\nu$. На верхнем берегу разреза $\nu \leq -\mu^2$ они сохраняют свой вид с тем отличием, что знаки перед фазами изменяются на обратные. Это легко понять, вспомнив, что точка $\nu = -1$ является для парциальных амплитуд $\pi\pi$ -рассеяния точкой ветвления первого порядка.

Из формул (25.10) следует, что $\pi\pi$ -взаимодействие не влияет на функцию β , так как в силу предположения о фазах $\pi\pi$ -рассеяния $\text{Im} \beta = 0$. Функции α и $B^{(-)}$ имеют одинаковую структуру: величина $\varphi(\nu)$ в формуле (25.9) известна. Функция $\varphi(\nu)$, соответствующая $A^{(+)}(\nu, -1)$, содержит неизвестный действительный вклад β . От него легко избавиться, если вместо $A^{(+)}$ рассматривать функцию $-\frac{8\pi p_3^0}{p_3} J_{++} = A^{(+)} - 4Mq_3^2\beta$, которая на разрезе $\nu \leq -\mu^2$ имеет ту же структуру, что и функции α , $B^{(-)}$. Учет $\pi\pi$ -взаимодействия для функций α , $B^{(-)}$, $A^{(+)} - 4Mq_3^2\beta$ может быть произведен одним и тем же способом.

25.5. Связь с пионным формфактором. Чтобы пояснить способ учета $\pi\pi$ -взаимодействия, предположим сначала, что влиянием высших парциальных волн можно пренебречь. Тогда, обозначая через $\Phi^{(\pm)}$ значения функций α , $B^{(-)}$, $A^{(+)} - 4Mq_3^2\beta$ на верхнем и нижнем берегах разреза $\nu \leq -\mu^2$ соответственно, получаем из (25.9) соотношение

$$\Phi^{(+)}(\nu, -1) = e^{2i\delta(\nu)} \Phi^{(-)}(\nu, -1). \quad (25.11)$$

Если считать фазы $\pi\pi$ -рассеяния известными, то формулы (25.11) определяют линейную краевую задачу. Методы решения таких задач хорошо известны (Гахов (1963)) и обсуждались выше (§ 19). Возникающая при этом неоднозначность полиномиального характера требует дополнительных физических соображений для своего устранения. Поэтому вместо стандартного решения воспользуемся приемом, который уже применялся при получении при-

ближенного вида электромагнитного формфактора π -мезона $F_\pi(t)$. Уравнение (25.11) совпадает с уравнением (19.8) для электромагнитного формфактора $F_\pi(t)$. Различие между ними состоит в том, что функция $\Phi(v, -1)$ имеет еще разрез при $v > 0$. Следовательно, функция $\Phi(v, -1)/F_\pi(v)$ будет иметь только разрез при $v > 0$, ибо

$$\frac{\Phi(v, -1)}{F_\pi(v)} \Big|_{(-)}^{(+)} = 0, \quad v \leq -\mu^2.$$

Если затем учесть, что выражение для $\Phi(v, -1)$ на левом разрезе содержит функцию $\varphi(v)$, то для $\Phi(v, -1)/F_\pi(v)$ можно записать д. с.

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(v)}{F_\pi(v)} = & \sum_{n=0}^N a_n (v - v_0)^n + (v - v_0)^N \left\{ \sum_m \frac{\text{Res} \left[\frac{\Phi(v)}{F_\pi(v)} \right] \Big|_{v_m}}{v - v_m} + \right. \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im} \Phi(v')}{(v' - v_0)^N (v' - v)} \frac{dv'}{F_\pi(v')} - \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im} F(v') \varphi(v')}{(v' - v_0)^N (v' - v)} \frac{dv'}{|F(v')|^2} \right\}. \quad (25.12) \end{aligned}$$

Количество вычитаний в д.с. (25.12) зависит от поведения формфактора $F_\pi(v)$ на бесконечности. Сумма по полюсам, помимо известных полюсных членов функций β , $B^{(-)}$, содержит полюсы, соответствующие нулям формфактора $F_\pi(v)$.

Ранее (§ 19) было показано, что неоднозначность в определении формфактора $F_\pi(v)$ связана с числом и положением нулей $F_\pi(v)$ в комплексной плоскости v . Таким образом, неоднозначность решения линейной на разрезе $v \leq -\mu^2$ краевой задачи πN -рассеяния сводится к неоднозначности в определении электромагнитного формфактора π -мезона.

Ниже мы будем использовать различные модели фаз π -рассеяния, а значит, и формфактора $F_\pi(v)$. Однако для всех них справедлива оценка

$$|F_i(v)| \Big|_{|v| \rightarrow \infty} \leq \left| \frac{1}{v} \right|.$$

Поэтому д. с. для рассеяния назад имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(v, -1) = & (\alpha, B^{(-)}), \quad \Phi(v, -1) = \Phi(0, -1) F_{\pi}(v) + \\ & + \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \Phi(v', -1)}{v'(v'-v)} \frac{F_{\pi}(v)}{F_{\pi}(v')} dv' + \\ & + \frac{v F_{\pi}(v)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-1} \Phi(v') \left[\frac{1}{F_{\pi}^{(+)}(v')} - \frac{1}{F_{\pi}^{(-)}(v')} \right] \frac{dv'}{v'(v'-v)} + \\ & + \text{ПОЛЮСНЫЙ ЧЛЕН } \Phi(v); \quad (25.13a) \end{aligned}$$

$$\Phi(v') = \begin{cases} (\Delta - \Delta_1) & \text{для } B^{(-)}, \\ -(\Delta_0 + \Delta_1) \frac{M}{M^2 + v} & \text{для } \alpha, \end{cases}$$

$$B^{(-)} = -g^2 \frac{2-1/M^2}{4M^2} \frac{1}{v-v_0}, \quad v_0 = -1 + \frac{1}{4M^2};$$

$$\frac{\alpha(0, -1)}{4\pi} = \frac{1}{4M} \left[\frac{2M+1}{2M} a^{(-)} - 2M (\alpha_1^{(-)} - \alpha_3^{(-)}) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{B^{(-)}(0, -1)}{4\pi} = & \frac{a^{(-)}}{2M} + 2M (a_1^{(-)} - a_3^{(-)}), \quad A^{(+)}(v, -1) = \\ = & A^{(+)}(0, -1) F_0(v) + 4M\beta(0, -1) [F_0(v) - 1] + \\ + & \frac{v}{v_0(v-v_0)} \left[1 - \frac{F_0(v)}{F_0(v_0)} \right] \text{Res} [4M\omega^2 \Delta_{\beta}] \Big|_{v_0=-1+\frac{1}{4M^2}} + \\ + & \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } A^{(+)}(v', -1)}{v'(v'-v)} dv' + \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} [\text{Im } A^{(+)}(v', -1) + \\ + & 4M\omega^2 \beta(v', -1)] \left[\frac{F_0(v)}{F_0(v')} - 1 \right] \frac{dv'}{v'(v'-v)}; \quad (25.13б) \end{aligned}$$

$$\beta(v, -1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \beta(v', -1)}{v'-v} dv' + \Delta_{\beta}; \quad (25.13в)$$

$$\frac{A^{(+)}(0, -1)}{4\pi} = \frac{2M+1}{2M} a^{(+)} - 2M (a_1^{(+)} - a_3^{(+)}),$$

$$F_0(v) = \exp \left\{ \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\delta_0^0(k) dk^2}{(k^2+1)(k^2+1-v)} \right\}.$$

§ 26. Уравнения для s - и p -волн πN -рассеяния

26.1. Релятивистская форма уравнений. Д. с. для рассеяния вперед (25.5) и назад (25.13), которым должны подчиняться функции $\alpha(v, z)$, $A^{(+)}(v, z)$, $\beta(v, z)$, $B^{(-)}(v, z)$, достаточны для получения шести уравнений для s - и p -волн. Они дают возможность получить уравнения и для некоторых d -волн, так как дисперсионных соотношений всего восемь. В процессе вывода уравнений был сделан ряд приближений. Поэтому целесообразно предпослать самим уравнениям перечисление этих приближений:

1) во всех рассматриваемых процессах справедлива двухчастичная унитарность,

2) во всех рассматриваемых процессах в области малых энергий доминирующими являются s - и p -волны.

Второе из приближений в применении к πN -рассеянию приводит к следующим выражениям для s - и p -волн:

$$\left. \begin{aligned} f_s^{(\pm)}(v) &= \frac{1}{2} [f_1^{(\pm)}(v, +1) + f_1^{(\pm)}(v, -1)], \\ f_{p^{3/2}}^{(\pm)}(v) &= \frac{1}{6} [f_1^{(\pm)}(v, +1) - f_1^{(\pm)}(v, -1)], \\ f_{p^{1/2}}^{(\pm)}(v) - f_{p^{3/2}}^{(\pm)}(v) &= \frac{1}{2} [f_2^{(\pm)}(v, +1) + f_2^{(\pm)}(v, -1)], \end{aligned} \right\} \quad (26.1)$$

где f_1 и f_2 выражаются через функции Φ (§ 25.1):

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(+)} &= \frac{p^0 + M}{8\pi W} \{ A^{(+)}(v, z) + 2(W - M)\beta(v, z) \times \\ &\quad \times [2p^0 q^0 + v(1 + z)] \}, \\ f_2^{(+)} &= \frac{p^0 - M}{8\pi W} \{ -A^{(+)}(v, z) + 2(W + M) \times \\ &\quad \times \beta(v, z) [2p^0 q^0 + v(1 + z)] \}, \\ f_1^{(-)} &= \frac{p^0 + M}{8\pi W} \{ 2[2p^0 q^0 + v(1 + z)]\alpha(v, z) + \\ &\quad + (W - M)B^{(-)}(v, z) \}, \\ f_2^{(-)} &= \frac{p^0 - M}{8\pi W} \{ -2[2p^0 q^0 + v(1 + z)]\alpha(v, z) + \\ &\quad + (W + M)B^{(-)}(v, z) \}. \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

Обратные соотношения имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \alpha(\nu, c) &= \frac{1}{4K(\nu) + 2(1+c)\nu} \times \\
 &\times \left[\frac{W+M}{p^0+M} f_1^{(-)}(\nu, c) - \frac{W-M}{p^0-M} f_2^{(-)}(\nu, c) \right], \\
 \frac{1}{4\pi} B^{(-)}(\nu, c) &= \frac{1}{p^0+M} f_1^{(-)}(\nu, c) + \frac{1}{p^0-M} f_2^{(-)}(\nu, c), \\
 \frac{1}{4\pi} A^{(+)}(\nu, c) &= \frac{W+M}{p^0+M} f_1^{(+)}(\nu, c) - \frac{W-M}{p^0-M} f_2^{(+)}(\nu, c), \\
 \frac{1}{4\pi} \beta(\nu, c) &= \frac{1}{4K(\nu) + 2(1+c)\nu} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{p^0+M} f_1^{(+)}(\nu, c) + \frac{1}{p^0-M} f_2^{(+)}(\nu, c) \right].
 \end{aligned} \right\} (26.3)$$

Вычисление функций f_1 и f_2 через фазы рассеяния проводится по формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 f_1(\nu, z) &= f_s(\nu) + 3zf_{p^{3/2}}(\nu) + d\text{-волны} + \dots, \\
 f_2(\nu, z) &= f_{p^{3/2}}(\nu) - f_{p^{3/2}}(\nu) + d\text{-волны} + \dots
 \end{aligned} \right\} (26.4)$$

Соотношения (25.13), (26.1) — (26.3) (обозначаемые в сумме (26.5)) и двухчастичное условие унитарности образуют систему уравнений для s - и p -волн πN -рассеяния, если считать известными константу вычитания $a^{(+)}$ и фазы $\pi\pi$ -рассеяния (или функции $F_i(\nu)$). Поэтому и припишем этим соотношениям свой номер (26.5). Система уравнений (26.5) сложна из-за неравенства масс π -мезонов и нуклонов и наличия у амплитуды рассеяния T изотопических и спиновых переменных. Принципиально она допускает численное решение. Однако заложенная в них физическая картина πN -рассеяния будет совершенно скрыта за лесом численных результатов.

26.2. Статический предел. Ранее (§ 22) было показано, что обычные д. с. для рассеяния вперед приводят в статическом пределе к уравнениям Чу — Лоу. Для уяснения отличия системы (26.5) от этих уравнений совершим всюду в (26.5) разложение по степеням $1/M$ и сохраним в подынтегральных функциях наибольшую из парци-

АЛЬНЫХ ВОЛН — (3,3)-ВОЛНУ (Исаев и др. (1962)):

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{Re} f_s^{(-)}(\nu) &= a^{(-)} \omega F_1(\nu), \\
 \operatorname{Re}(f_{p^{1/2}}^{(-)}(\nu) - f_{p^{3/2}}^{(-)}(\nu)) &= \frac{\nu(a_1 - a_3)}{2} - \\
 &\quad - \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\nu' + \nu}{\nu' - \nu} \operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(-)}(\nu') \frac{d\nu'}{\nu'^2}, \\
 \operatorname{Re}(f_{p^{1/2}}^{(-)}(\nu) + 2f_{p^{3/2}}^{(-)}(\nu)) &= -2 \frac{\nu}{\omega} f^2 + \\
 &\quad + a^{(-)} \omega [1 - F_1(\nu)] + \frac{2\nu\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(-)}(\nu')}{\nu' \omega' (\nu' - \nu)} d\nu', \\
 F_1(\nu) &= \frac{k_r^2 + 1}{k_r^2 + 1 + \nu}, \quad a^{(-)} = 2f^2 - \frac{2}{3\pi} \int_0^\infty \frac{d\nu'}{\nu' \omega'} \operatorname{Im} f_{33}(\nu')
 \end{aligned} \right\} (26.6)$$

(вид фактора $F_1(\nu)$ детально обсуждался в § 19);

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{Re} f_s^{(+)}(\nu) &= \frac{a^{(+)}}{2} [1 + F_0(\nu)] - \\
 &\quad - \frac{\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu')}{\nu' (\nu' - \nu)} \left[\frac{F_0(\nu)}{F_0(\nu')} - 1 \right] d\nu', \\
 \operatorname{Re}(f_{p^{1/2}}^{(+)}(\nu) - f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu)) &= -\frac{2\nu}{\omega} f^2 - \\
 &\quad - \frac{\nu\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu')}{\nu' \omega' (\nu' - \nu)} d\nu', \\
 \operatorname{Re}(f_{p^{1/2}}^{(+)}(\nu) + 2f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu)) &= \frac{a^{(+)}}{2} [1 - F_0(\nu)] + \\
 &\quad + \frac{2\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu')}{\nu' (\nu' - \nu)} d\nu' + \\
 &\quad + \frac{\nu}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(+)}(\nu')}{\nu' (\nu' - \nu)} \left[\frac{F_0(\nu)}{F_0(\nu')} - 1 \right] d\nu'.
 \end{aligned} \right\} (26.7)$$

Здесь в $F_0(\nu)$ не предполагается какого-либо конкретного вида фазы $\delta_0^0(\nu)$ $\pi\pi$ -рассеяния. Величина $a^{(\pm)}$ является параметром теории.

Переходя в уравнениях (26.6) и (26.7) к пределу $\lim F_i(\nu) = 1$, что соответствует выключению $\pi\pi$ -взаимодействия, легко получить уравнения Чу — Лоу (22.7), в которых под интегралами оставлены только наибольшая парциальная волна (3,3) и проведены соответствующие вычитания. Интересной особенностью уравнений (26.6) и (26.7) является отсутствие в выражениях для $\text{Re}(f_{p^{1/2}}^{(\pm)} - f_{p^{3/2}}^{(\pm)})$ $\pi\pi$ -членов. Отмеченное свойство является проявлением определенной симметрии вклада от $\pi\pi$ -взаимодействия в πN -рассеяние.

26.3. Свойства симметрии $\pi\pi$ -вкладов. Обозначим через $G_{i,j}^{(\pm)}(W)$ вклад $\pi\pi$ -взаимодействия в парциальную волну $f_{i,j}^{(\pm)}$. Очевидно, что при выключении $\pi\pi$ -взаимодействия ($F_i \rightarrow 1$) функция $G_{i,j}^{(\pm)}(W)$ обращается в нуль. Введем статический предел этой функции:

$$g_{i,j}^{(\pm)}(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} G_{i,j}^{(\pm)}(W). \quad (26.8)$$

Поскольку $\pi\pi$ -взаимодействие дает вклад только в д. с. для рассеяния назад, то из формул (26.1) следует

$$G_s^{(\pm)}(W) = -3G_{p^{3/2}}^{(\pm)}(W). \quad (26.9)$$

Соотношение (26.9) верно в s - и p -приближении, т. е. в области малых энергий.

Наконец, заметим, что функции $G_{i,j}^{(\pm)}(W)$ и их статические пределы $g_{i,j}^{(\pm)}(\omega)$ сами удовлетворяют условиям кроссинг-симметрии. Действительно, в представлении Чини — Фубини (§ 9.2) $\pi\pi$ - и πN -члены порознь удовлетворяют этим условиям. Поэтому $\pi\pi$ -члены $g_{i,j}^{(\pm)}(\omega)$ должны подчиняться условиям:

$$\left. \begin{aligned} g_s^{(\pm)}(\omega) &= \pm g_s^{(\pm)}(-\omega), \\ g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(\omega) - g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(\omega) &= \mp [g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(-\omega) - g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(-\omega)], \\ g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(\omega) + 2g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(\omega) &= \pm [g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(-\omega) + 2g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(-\omega)]. \end{aligned} \right\} (26.10)$$

Из уравнений (26.10) и статического предела равенства (26.9) следует, что функция $g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(\omega) - g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(\omega)$ должна быть одновременно симметричной и антисимметричной функцией ω . Поэтому она тождественно равна нулю, т. е.

$$g_{p^{1/2}}^{(\pm)}(\omega) = g_{p^{3/2}}^{(\pm)}(\omega). \quad (26.11)$$

Уравнения (26.6) и (26.7) удовлетворяют условиям (26.10) и (26.11), чем и объясняется отсутствие π -членов в выражениях для $\text{Re}(f_{p^{1/2}}^{(\pm)} - f_{p^{3/2}}^{(\pm)})$.

Соотношение (26.11), как указывалось, получено в статическом пределе. Рассмотрим, какие дополнительные, кроме (26.9), соотношения имеют место в релятивистском случае. Ограничение низшими парциальными волнами в процессе $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ приводит к тому, что π -вклад в функцию β равен нулю. Из формул (25.10) также следует, что

$$A_{\pi\pi}^{(+)}(v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\gamma \sin \delta_0^0(v')}{v' - v} dv', \quad \beta_{\pi\pi}(v) = 0. \quad (26.12)$$

Для рассеяния назад (21.13) замена $s \rightarrow u$ означает переход от переменной $W = p^0 + \omega$ к переменной $W' = p^0 - \omega$, так что

$$WW' = M^2 - \mu^2. \quad (26.13)$$

При этом легко проверить, что $v(W) = v(W')$, а поэтому $A^{(+)}[v(W)] = A^{(+)}[v(W')]$. Тогда из формул (26.1), (26.2) следует соотношение

$$G_{p^{1/2}}^{(+)}(W) - G_{p^{3/2}}^{(+)}(W) = \frac{p^0 - M}{p^0 + M} G_s^{(+)}(W). \quad (26.14)$$

Кроме того, из них же легко получить свойства симметрии π -вкладов:

$$\left. \begin{aligned} W [G_s^{(+)}(W) - 3G_{p^{3/2}}^{(+)}(W)] &= \\ &= W' [G_s^{(+)}(W') - 3G_{p^{3/2}}^{(+)}(W')], \\ W [G_{p^{1/2}}^{(+)}(W) - G_{p^{3/2}}^{(+)}(W)] &= \\ &= W' [G_{p^{1/2}}^{(+)}(W') - G_{p^{3/2}}^{(+)}(W')]. \end{aligned} \right\} \quad (26.15)$$

Комбинируя уравнения (26.9) и (26.15), получаем

$$\left. \begin{aligned} WG_s^{(+)}(W) &= W'G_s^{(+)}(W'), \\ WG_{p^{1/2}}^{(+)}(W) &= W'G_{p^{1/2}}^{(+)}(W'), \\ WG_{p^{3/2}}^{(+)}(W) &= W'G_{p^{3/2}}^{(+)}(W'). \end{aligned} \right\} (26.16)$$

Свойства симметрии (26.16) впервые были установлены Лавлесом (Гамильтон (1963)). Они непосредственно следуют из свойств кроссинг-симметрии и второго из равенств (26.12). Аналогичные соотношения для функций α , $B^{(-)}$ значительно сложнее, так как в этом случае $\alpha_{\pi\pi}$ и $B_{\pi\pi}^{(-)}$ отличны от нуля. Они отражают лишь свойства кроссинг-симметрии этих функций. Релятивистские соотношения симметрии (26.16) и их статический предел (26.11) вместе с равенством (26.9) удобны для проверки совместности $\pi\pi$ -вкладов в различные парциальные волны, если последние вычисляются независимо (Исаев и др. (1964) *).

26.4. Интерпретация $\pi\pi$ -вкладов в πN -рассеяние. Соотношения (26.6) и (26.7) были получены из представления Мандельстама в результате ряда громоздких вычислений, которые позволили учесть влияние $\pi\pi$ -взаимодействия. Окончательные выражения для $\pi\pi$ -членов допускают простую физическую интерпретацию. Так, в соотношениях (26.6) формфактор π -мезона $F_{\pi}(v)$ при узком резонансе в состоянии $I = J = 1$ (ρ -мезон) для положительных значений v хорошо аппроксимируется простым полюсом. На языке диаграмм Фейнмана полюс в амплитуде рассеяния соответствует одночастичному состоянию. Поэтому, если ρ -мезону приписать собственное поле, то можно выписать лагранжианы взаимодействия

*) Так, например, в методе Гамильтона $\pi\pi$ -вклады («long range»), выделенные из разностей $\Delta_{l,\pm}^{(\pm)}(s)$, должны подчиняться условиям (26.9) и (26.11). Если воспользоваться анализом, выполненным Гамильтоном и др. (1962), то легко убедиться в том, что эти условия не выполняются в области кинетических энергий пионов меньше $100 M\pi c$ в л. с. к., где несущественны как d -волны, так и поправки вида $1/M$. Поэтому $\pi\pi$ -вклады, найденные в этой работе, следует считать ошибочными.

ρ -мезона с нуклонами и π -мезонами. Они имеют вид

$$L_{\rho\pi\pi}(x) = \frac{1}{2} g_{\rho\pi\pi} \mu^{-1} \rho_{\mu}(x) \left(\varphi(x) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right),$$

$$I_{\rho NN}(x) = \frac{1}{2} g_{\rho NN}^{(1)} m_{\rho}^{-1} \left\{ \bar{\psi}(x) \tau \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\mu}} \rho_{\mu}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \tau \psi(x) \rho_{\mu}(x) \right\} + g_{\rho NN}^{(2)} \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \tau \psi(x) \rho_{\mu}(x).$$

Здесь $\psi(x)$ — нуклонное поле, $\varphi(x)$ — мезонное поле, представляющее собой вектор в изотопическом пространстве, $\rho_{\mu}(x)$ — поле ρ -мезона, а $g_{\rho\pi\pi}$, $g_{\rho NN}^{(i)}$ — константы связи. Далее, если провести вычисления во втором порядке теории возмущений, а затем интегрированием выделить s -волну πN -рассеяния, то получим

$$(\text{Re } f_s^{(-)})_{\pi\pi} = A \frac{\omega}{q^2} \ln \left(1 + \frac{4q^2}{t_r} \right). \quad (26.17)$$

Формула (26.17) была впервые выведена на основе приближения Чини—Фубини (§ 9.2). В ней $t_r = m_{\rho}^2$ — квадрат массы ρ -мезона, а постоянная A пропорциональна константе взаимодействия $g_{\rho\pi\pi}$, т. е. связана с шириной ρ -мезона (рис. 52). Первое из соотношений (26.6) весьма похоже на (26.17). Различие между ними состоит в различном характере особенностей в точке $v_r = -t_r/4$: в формуле (26.6) — это полюс, а в формуле (26.17) — логарифмическая точка ветвления. Это различие вызвано разными способами выделения парциальных волн из амплитуды рассеяния. Более важно, что полу-

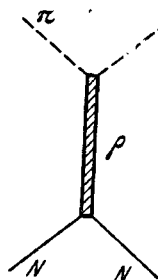


Рис. 52.

ченное выше выражение для $\text{Re } f_s^{(-)}$ содержит вместо неизвестного параметра A экспериментально наблюдаемую величину $a^{(-)}$ (26.6). Ниже мы используем это обстоятельство. Аналогичная интерпретация может быть дана и основным вкладом $\pi\pi$ -взаимодействия в соотношениях (26.6).

Естественное распространение изложенных выше соображений состоит в том, что каждому резонансу, в том

числе и (3,3)-резонансу, приписывается поле с соответствующими спином и изотопическим спином. После этого стандартными методами теории поля рассматривается взаимодействие этих полей (Соловьев, Чен Цун-мо (1962)). Такой подход дает возможность обозреть большой круг процессов (Амати, Фубини (1962)). Однако, несмотря на физическую ясность картины, с его помощью не достигается количественное описание многих известных экспериментальных явлений.

§ 27. Сравнение уравнений для s - и p -волн с экспериментом

При сравнении соотношений (26.6) и (26.7) с данными опыта будем считать известными результаты фазового анализа, т. е. величины фазовых сдвигов δ_{ij} как функции импульса $q = \sqrt{v}$. К настоящему времени фазовый анализ проведен до энергий ~ 1 Гэв в л. с. к. Поскольку при энергии ≥ 500 Мэв существенную роль играют неупругие процессы, то фазы становятся комплексными. Известно также, что с ростом энергии увеличивается число самих парциальных волн, необходимых для описания эксперимента. Большое число параметров, которые нужно определить из опыта, приводит к неоднозначности, т. е. к нескольким наборам фаз. Фазы различаются, главным образом, в области больших энергий. Нам будет необходимо аппроксимировать вплоть до больших энергий только одну фазу δ_{33} , которая входит в подынтегральные функции соотношений (26.6) и (26.7). Остальные фазы позволяют вычислить действительные части парциальных волн и их комбинации, входящие в (26.6) и (26.7). За счет выбора свободных параметров мы будем стремиться удовлетворить экспериментальным данным.

27.1. Длины рассеяния. В соотношениях (26.6) и (26.7) они не являются произвольными. Остановимся подробнее на величине $a^{(-)}$, которая равна

$$a^{(-)} = 2f^2 - \frac{2}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \delta_{33}(v')}{v'^{3/2} \omega'} dv'. \quad (27.1)$$

Сначала вычислим интеграл приближенно. Для этого воспользуемся формулой Лайсона для фазы δ_{33} (22.16), которая, как уже известно, хорошо описывает эксперимент приблизительно до 600 Мэв. Из (22.16) следует

$$\sin^2 \delta_{33} = \frac{\left[\frac{4f^2 v^{3/2}}{3 \omega^*} u^2(v) \right]^2}{\left(1 - \frac{\omega^*}{\omega_0} \right)^2 + \left[\frac{4f^2 v^{3/2}}{3 \omega^*} u^2(v) \right]^2}. \quad (27.2)$$

При малых значениях f^2 функция (27.2) в подынтегральном выражении хорошо аппроксимируется δ -функцией:

$$\sin^2 \delta_{33} = \frac{4}{3} \pi f^2 u^2(v) v^{3/2} \frac{\delta(\omega - \omega_0)}{1 + \omega / \sqrt{M^2 - 1} + \omega^2}, \quad (27.3)$$

так как, по определению,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x).$$

Тогда для $a^{(-)}$ получим

$$a^{(-)} \approx f^2. \quad (27.4)$$

Учитывая ошибки в определении $a^{(-)}$, можно считать, что это равенство хорошо выполняется. Действительно, $a^{(-)} \approx 0,086$ и $f^2 = 0,082$ (Гамильтон, Буллок (1963)). Численное интегрирование (27.1) с помощью формулы (27.2) дает $a^{(-)} = 0,11$. Учет поправок вида $1/M$ понижает это значение до $a^{(-)} = 0,092$. Если использовать для $\sin^2 \delta_{33}$ другие аппроксимации, то численное значение величины $a^{(-)}$ мало меняется. Это указывает на то, что неоднозначности фазового анализа при больших энергиях мало сказываются на области малых энергий. Тем не менее хорошему выполнению равенства (27.4) не следует придавать большого значения, так как оно получено в результате многих приближений. Его следует скорее расценивать как справедливость утверждения о том, что функциональная зависимость $\text{Re } f_s^{(-)}$ от величины $a^{(-)}$ верна. Поэтому ниже длина рассеяния $a^{(-)}$ будет рассматриваться как параметр.

Второе и третье из соотношений (26.6) дают при $v = 0$ следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(-)} - a_3^{(-)} &= \frac{1}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \delta_{33}(v')}{v'^{3/2}} dv', \\ a_1^{(-)} + 2a_3^{(-)} &= -2f^2 + a^{(-)} \frac{dF_{\pi}}{dv} \Big|_{v=0} - \frac{2}{3\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \delta_{33}(v')}{v'^{3/2} \omega'} dv'. \end{aligned} \right\} (27.5)$$

Из первого соотношения путем численного интегрирования получаем $a_1^{(-)} - a_3^{(-)} = 0,025$; эксперимент (Гамильтон, Вуллок (1963)) дает $-0,02$. Для величины $a_1^{(-)} + 2a_3^{(-)}$ также не удастся добиться согласия теоретических и экспериментальных значений. Что касается соотношений (26.7), то в них $a^{(+)}$ — параметр, так как они были получены из д. с. с вычитанием. Теоретические и экспериментальные значения для $a_{1,3}^{(+)}$ также не согласуются между собой. Поэтому рассмотрение длин рассеяния приводит к выводу о том, что сделанные выше приближения слишком грубы для малых p -волн. Целесообразно провести в уравнениях для p -волн вычитание и рассматривать длины рассеяния как параметры.

27.2. Энергетическая зависимость $s^{(-)}$ - и $p^{(-)}$ -волн. Проводя вычитание во втором и третьем уравнениях (26.6), получим окончательную систему уравнений, которая будет сравниваться с экспериментом:

$$\operatorname{Re} f_s^{(-)} = a^{(-)} \omega F_{\pi}(\omega^2), \quad (27.6)$$

$$\begin{aligned} 3\operatorname{Re} f_{p^{3/2}}^{(-)} &= v \left\{ a_1^{(-)} [\omega + 1 + F_{\pi}(\omega^2)] + \right. \\ &+ a_3^{(-)} \left[\frac{2v}{\omega + 1} + 1 - F_{\pi}(\omega^2) \right] + \frac{2v}{\omega} f^2 + a^{(-)} \frac{\omega}{v} [1 - F_{\pi}(\omega^2) + \\ &+ v F'_{\pi}(\omega^2)_{\omega=1}] - \frac{2v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(-)}(v')}{v'^2 \omega' (\omega' + \omega)} dv' - \\ &\left. - \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(-)}(v')}{v'^2 (v' - v)} \left[\frac{F_{\pi}(\omega^2)}{F_{\pi}(\omega'^2)} - 1 \right] dv' \right\}, \quad (27.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\operatorname{Re} f_{p^{1/2}}^{(-)} = & v \left\{ a_3^{(-)} \left[2\omega + \frac{1 + F_\pi(\omega^2)}{2} \right] + \right. \\
& + a_1^{(-)} \left[\frac{v}{\omega + 1} - \frac{1 - F_\pi(\omega^2)}{2} \right] + \frac{2v}{\omega} f^2 + a^{(-)} \frac{\omega}{v} [1 - F_\pi(\omega^2) + \\
& + v F'_\pi(\omega^2)_{\omega=1}] + \frac{v}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{1/2}}^{(-)}(v')}{v'^2 (v' - v)} \left[1 + \frac{2\omega}{\omega'} \right] dv' + \\
& \left. + \frac{v}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{Im} f_{p^{1/2}}^{(-)}(v')}{v' (v' - v)} \left[\frac{F_\pi(\omega^2)}{F_\pi(\omega'^2)} - 1 \right] dv' \right\}. \quad (27.8)
\end{aligned}$$

Здесь $F'_\pi(\omega^2) = \frac{dF_\pi(\omega^2)}{d\omega}$, а выражения в фигурных скобках определяют $3a_1^{(-)}(v)$ и $3a_3^{(-)}(v)$ соответственно. Отметим, что в формуле для $\operatorname{Re} f_{p^{1/2}}^{(-)}$ отсутствует интеграл в смысле главного значения. Это связано с тем, что в подынтегральных функциях всюду $\operatorname{Im} f_{p^{1/2}}^{(-)} = 0$.

Положение π -резонанса определим из соотношения (27.6). Удовлетворительное описание энергетической зависимости $s^{(-)}$ -комбинации парциальных волн получаем при $a^{(-)} = 0,08$ и $t_r = 22$ (в единицах $\mu\text{с}^2$, рис. 53). Для уверенного определения значения t_r важна точность экспериментальных данных. Действительно, величина

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f_s^{(-)}}{\partial t_r} \bigg/ \operatorname{Re} f_s^{(-)} = \frac{4v}{t_r^2} \frac{1}{1 + \frac{4v}{t_r}}$$

мала при низких энергиях, а значит, небольшие изменения t_r не влияют на вид кривой. Длина рассеяния $a^{(-)}$ определяется более уверенно, так как

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f_s^{(-)}}{\partial a^{(-)}} \bigg/ \operatorname{Re} f_s^{(-)} = \frac{1}{a^{(-)}} \approx 12.$$

Если принять для t_r известное в настоящее время значение $t_r \approx 30$, то теоретическая кривая пройдет выше экспериментальных точек в области $q \gtrsim 1,5$. Это расхождение не является серьезным, поскольку при таких значениях q могут быть важны члены, пропорциональные $v = q^2$.

Члены такого типа обуславливаются как релятивистскими поправками, так и не учтенными нами d -волнами в формуле (26.1). Если учесть последние, то формула (27.6) для s -волны будет иметь вид:

$$\operatorname{Re} f_s^{(-)} = \omega [a^{(-)} F_\pi(\omega^2) + bv]. \quad (27.8a)$$

При $a^{(-)} = 0,08$, $t_r \approx 30$ и $b \approx -0,002$ получаем кривую, изображенную на рис. 53. Ниже будет показана

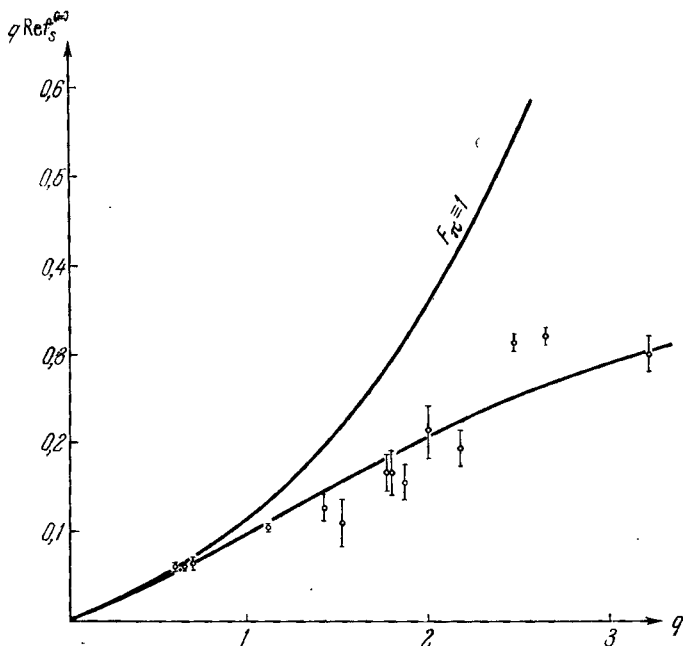


Рис. 53.

малость релятивистских поправок. Численное значение параметра b получается от d -волнового резонанса δ_{13} . Для сравнения на рис. 53 приведена кривая без учета л-взаимодействия ($F_\pi(\omega^2) \equiv 1$).

Выражение для $\operatorname{Re} f_{p^{1/2}}^{(-)}$, помимо параметров $a^{(-)}$, t_r , содержит еще $a_1^{(-)}$ и $a_3^{(-)}$. Появление функций, стоящих

множителями перед $a_1^{(-)}$ и $a_3^{(-)}$, является следствием учета кроссинг-симметрии парциальных волн. Эти функции быстро растут с энергией, поэтому небольшие изменения значений $a_1^{(-)}$ и $a_3^{(-)}$ сильно сказываются на поведении

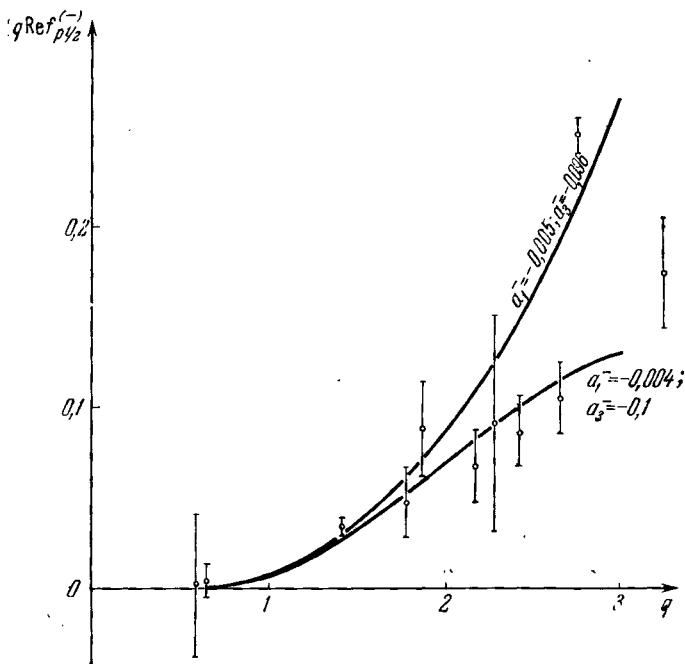


Рис. 54.

$\text{Re } f_{p^{1/2}}^{(-)}$ при $q \approx 2$. Теперь легко понять, почему в уравнениях без вычитания трудно добиться хорошего соответствия с экспериментом: малые неточности при вычислении $a_1^{(-)}$ и $a_3^{(-)}$ сильно сказываются на поведении теоретических кривых. Зависимость $\text{Re } f_{p^{1/2}}^{(-)}$ от энергии требует, чтобы величина $a_1^{(-)}$ была отрицательной (рис. 54). Численные значения $a_1^{(-)}$ и $a_3^{(-)}$ хорошо согласуются со значениями, полученными Маккинли (1963) иным методом, именно $a_1^{(-)} \approx -0,0038$, $a_3^{(-)} \approx -0,123$.

Спецификой соотношения (27.8) является присутствие интеграла в смысле главного значения от $\sin^2 \delta_{33}$. Добавочное вычитание значительно повышает требования к форме кривой, так как интеграл зависит от производной

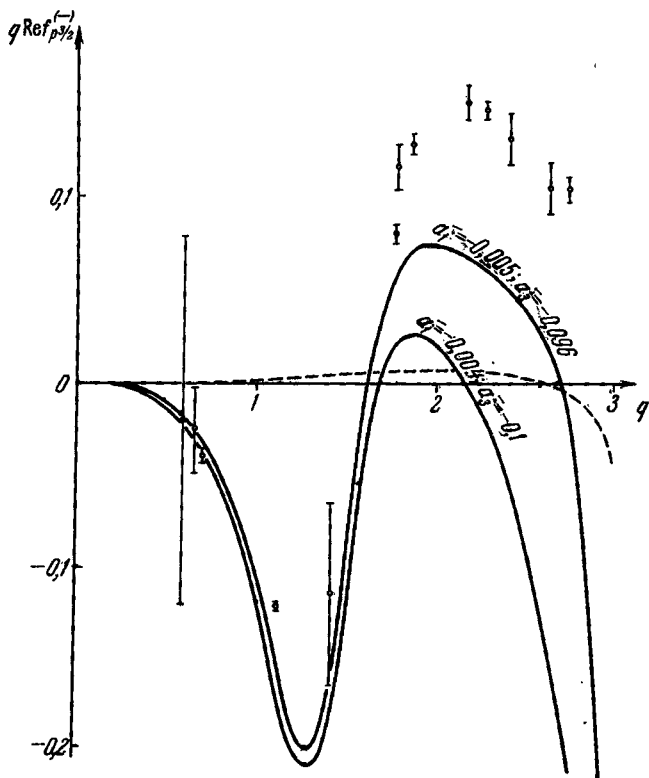


Рис. 55.

подынтегральной функции по v . До значений $q \leq 1,1$ теоретические кривые удовлетворительно описывают эксперимент (рис. 55). В окрестности резонанса $\operatorname{Re} f_{p^{3/2}}^{(-)}$ меняет знак. Однако при $q \gtrsim 1,7$ экспериментальные точки лежат выше теоретической кривой. Это происходит потому, что в области резонанса $q \operatorname{Im} f_{p^{3/2}}^{(-)} \sim \cos^2 \delta_{13}$, т. е.

форма кривой определяется неучтенной малой фазой. Важно отметить, что влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на $\text{Re } f_{p^2}^{(-)}$ мало до резонанса и начинает сказываться при более высоких энергиях (выше резонанса). Такой характер $\pi\pi$ -вклада качественно согласуется с тем фактом, что формула Чу — Лоу хорошо описывает поведение фазы до резонанса, а далее наблюдается отклонение от предсказываемой линейной зависимости (см. рис. 45).

27.3. Энергетическая зависимость $s^{(+)}$ - и $p^{(+)}$ -волн. Сравнение соотношений (27.6) — (27.8) с опытом производилось последовательно. Из первого уравнения были определены $a^{(-)}$ и t_r , а затем из второго и третьего уравнений — длины рассеяния $a_1^{(-)}$, $a_3^{(-)}$. Такая очередность в определении $a^{(-)}$, $a_i^{(-)}$ и t_r связана с неодинаковой чувствительностью формул (27.6) — (27.8) к изменению перечисленных параметров.

Аналогичный способ действия применим и для комбинаций парциальных волн с изотопическим индексом (+). Поэтому ниже мы ограничимся разбором энергетической зависимости $s^{(+)}$ -волны (Исаев и др. (1963)):

$$\text{Re } f_s^{(+)} = \frac{a^{(+)}}{2} [1 + F_0(v)] - \frac{v}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } f_{p^{3/2}}^{(+)}}{v'(v' - v)} \left[\frac{F_0(v)}{F_0(v')} - 1 \right] dv'. \quad (27.9)$$

Численное значение параметра $a^{(+)}$ мало ($a^{(+)} = -0,005$, см. Гамильтон и Вуллок (1963)), так что можно положить $a^{(+)} = 0$. Тогда весь энергетический ход $\text{Re } f_s^{(+)}$ объясняется только вторым членом в (27.9). Поскольку ситуация со взаимодействием π -мезонов в состоянии с $I = J = 0$ менее ясна, чем в случае $I = J = 1$ (ρ -мезон), рассмотрим различные предположения относительно функционального вида фазы δ_0^0 :

$$\begin{aligned} \text{а) } \text{tg } \delta_0^0 &= a_0 k; & \text{б) } \text{tg } \delta_0^0 &= \frac{a_0 k}{1 + k^2/3}; \\ & & \text{в) } \text{tg } \delta_0^0 &= \frac{a_0 k}{(1 + k^2/3)(1 - b_0 k^2)}. \end{aligned}$$

Здесь k — импульс мезонов в их с.ц.м. Приведенные зависимости $\text{tg } \delta_0^0$ от энергии расположены в порядке

возрастания сложности. Первые две носят в основном иллюстративный характер. Последняя даст возможность обсудить решения уравнений пп-рассеяния (гл. 3). Функции $F_0(\nu)$ вычисляются по формулам (19.10). Варианты (а) и (б) отличаются значением фазы δ_0^0 на бесконечности, равным $\pi/2$ и 0 соответственно. Расчет показывает, что для значений $1 < a_0 < 3$ и $0 < \nu < 8$ отношение F_0^a/F_0^b лежит в интервале $0,75 < F_0^a/F_0^b < 1$. То же можно сказать и о пп-вкладе в области малых энергий: при $\nu < 8$ ($\omega = \sqrt{1 + \nu}$) он меняется лишь на 20%. Таким образом, предположение о поведении фазы δ_0^0 при больших энергиях мало сказывается на области малых энергий $\nu < 8$.

В варианте (а) легко провести вычисления до конца. Для функции $F_0(\nu)$ получим

$$F_0(\nu) = \left[\frac{1 + |a_0|}{1 + |a_0| \sqrt{1 + \nu}} \right]^{\varepsilon(a_0)},$$

где

$$\varepsilon(a_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_0 > 0, \\ -1 & \text{при } a_0 < 0. \end{cases}$$

С помощью соотношений (26.7) из этого выражения для $F_0(\nu)$ следует, что в случае отрицательных значений a_0 величина $\text{Re } f_s^{(+)}(\nu) > 0$, что противоречит экспериментальным данным (рис. 56). Поэтому можно сделать определенное заключение о знаке a_0 , а именно, $a_0 > 0$. Вариант (б) является более реалистическим, чем вариант (а). Строго говоря, «приближение длины рассеяния» для пп-рассеяния означает, что

$$\text{tg } \delta_0^0 = a_0 \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Однако наличие корня ($\sqrt{1 + k^2}$) затрудняет аналитическое вычисление $F_0(\nu)$. Он аппроксимируется функцией $1 + k^2/3$ при $k^2 \leq 10$. Для объяснения энергетического хода $\text{Re } f_s^{(+)}$ необходимо, чтобы в варианте (б) $a_0 \geq 3$. Столь большие значения длины рассеяния маловероятны, так как противоречат данным, полученным из других экспериментов. Вариант (в) является наиболее сложным из

предложенных зависимостей. При $b_0 < 0$ он мало отличается от варианта (б); главное отличие состоит в скорости стремления фазы к нулю при $k^2 \rightarrow \infty$. Для больших значений k , очевидно, $\delta_0^0 \approx \frac{a_0}{b_0} \frac{1}{k^3}$ в варианте (в) и $\delta_0^0 \approx \frac{a_0}{k}$ в

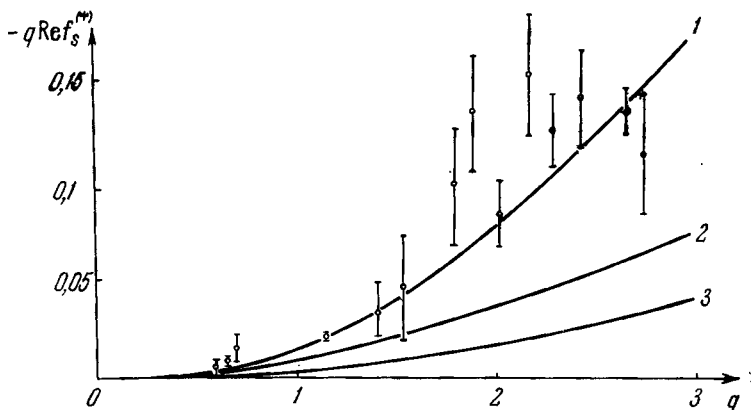


Рис. 56.

варианте (б). Однако при $b_0 > 0$ в точке $k_r = \sqrt{1/b_0}$ фаза δ_0^0 проходит через $\pi/2$, т. е. имеется резонанс. При $b_0 = 0$ вариант (в) совпадает с вариантом (б). Таким образом, мы видим, что вариант (в) позволяет рассмотреть различные типы изменения фазы δ_0^0 с энергией.

Из сравнения решений уравнений лл-рассеяния (гл. 3) с экспериментальными данными следует, что параметры a_0 и b_0 лежат в интервалах $0,5 \leq a_0 \leq 1$ и $0,05 \leq b_0$. Определим величину b_0 для граничных значений a_0 :

$$a_0 = 0,5, \quad 0,04 < b_0 < 0,05 \quad (1300 \text{ Мэв} < t_r^{1/2} < 1430 \text{ Мэв}),$$

$$a_0 = 1, \quad 0,07 < b_0 < 0,11 \quad (890 \text{ Мэв} < t_r^{1/2} < 1095 \text{ Мэв}).$$

Наилучшими следует признать значения $a_0 = 1$ и $b_0 = 0,05$ (рис. 56, кривая 1). Резонанс при этом имеет место для $t_r^{1/2} \approx 1300 \text{ Мэв}$. Столь далекое положение резонанса, по-видимому, лежит за рамками применимости низкоэнергетических уравнений лN-рассеяния. Поэтому его следует

интерпретировать как сильное взаимодействие притяжения в состоянии $I = J = 0^*$).

Интересно проанализировать s -доминантное решение Чу, Манделштама и Нойеса (1960) с точки зрения соответствия его экспериментальным данным по πN -рассеянию. До значений $k^2 \approx 9$ фазу δ_0^0 с высокой точностью можно аппроксимировать выражениями

$$\operatorname{tg} \delta_0^0 = \frac{0,63 k}{1 + 0,7 k^2} \quad (\lambda = -0,1),$$

$$\operatorname{tg} \delta_0^0 = \frac{4,2 k}{1 + 3,08 k^2} \quad (\lambda = -0,3).$$

Соответствующие кривые для $\operatorname{Re} f_s^{(+)}$ (2, 3 на рис. 56) лежат ниже всех экспериментальных точек. Заметим,

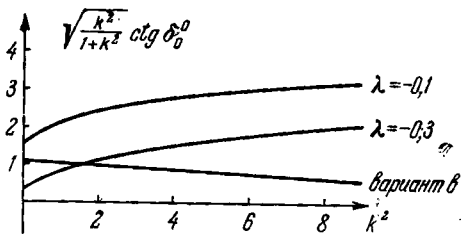


Рис. 57.

что после предположения $a^{(+)} = 0$ величина $\operatorname{Re} f_s^{(+)}$ определяется только $\pi\pi$ -вкладом. Поэтому $s^{(+)}$ -волна наиболее чувствительна к параметрам $\pi\pi$ -взаимодействия.

Все перечисленные выше варианты, которые обеспечивают отрицательность $\operatorname{Re} f_s^{(+)}$, соответствуют притяжению в системе двух пионов, находящихся в состоянии $I = J = 0$. Для того чтобы установить количественную меру силы притяжения, необходимого для объяснения эксперимента, рассмотрим (рис. 57) зависимость величины $(k/\sqrt{1+k^2}) \operatorname{ctg} \delta_0^0$ от k^2 . Тогда можно утверждать, что

*) Заключение о параметрах резонанса сильно зависит от экспериментальных данных. Если использовать результаты новейших фазовых анализов, то значения параметров приближаются к таковым для σ -мезона, существование которого сейчас обсуждается в литературе (Лавлес (1966)).

согласие с экспериментом требует уменьшения этой величины с ростом импульса. Зависимость именно такого характера возникает при решении уравнений лл-рассеяния (см. § 18.4). Случай постоянства этой величины приводит к слишком большим значениям длины рассеяния, $a_0 \approx 3$.

Экспериментальные данные для волны $p_{1/2}^{(+)}$ известны с большими ошибками. Рассмотрение ее не добавляет новых

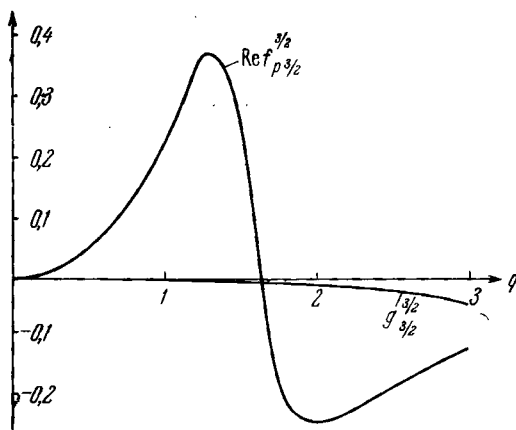


Рис. 58.

сведений о параметрах a_0 и b_0 , хотя и указывает на согласие с экспериментом в области низких энергий. Поведение волны $p_{3/2}^{(+)}$ в основном объясняется резонансной волной $f_{3,3}$; роль лл-членов мала. Таким образом, поведение фазы δ_0^0 с энергией, вытекающее из решения уравнений лл-рассеяния, совпадает с тем, что необходимо для понимания лл-рассеяния в состоянии с изотопическим индексом (+). После того как установлен вид кривых $\text{Re } f_s^{(+)}$, можно дать пример учета свойств симметрии лл-вкладов в лл-рассеяние. Из соотношений (27.8) и (26.7) определяются функции $g_s^{(\pm)}(\omega)$. Зная их, легко вычислить вклад лл-взаимодействия в (3,3)-волну. Он оказывается заметным лишь при больших энергиях (рис. 58), где формула Чу — Лоу плохо описывает эксперимент.

Сравнение выводов теории с экспериментальными данными мы закончим графическим изображением функций $2q \operatorname{Re} f_{s,i} = \sin 2\delta_i$ (рис. 59).

27.4. Релятивистские поправки (эффект отдачи) к s -волнам. При сравнении длин рассеяния с экспериментальными данными мы уже встречались с релятивистскими

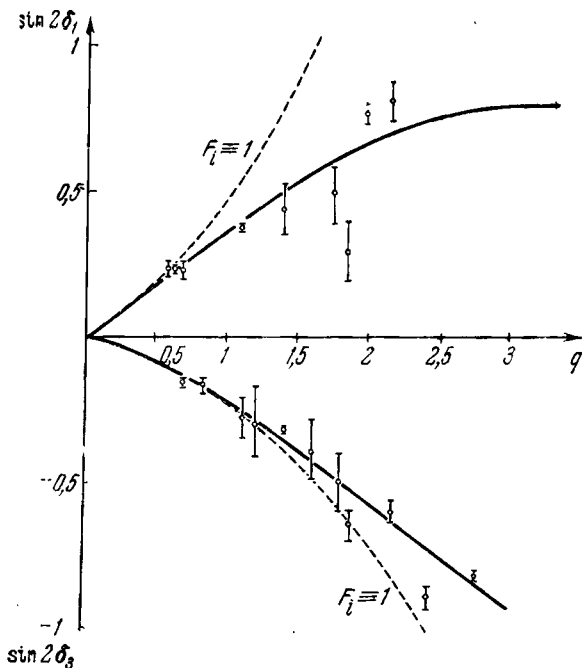


Рис. 59.

поправками, т. е. членами вида const/M . Они привели к тому, что значение $a^{(-)} = 0,11$, вычисленное на основе статического приближения, изменилось на 18% ($a^{(-)} = 0,092$). Если принять это изменение в качестве возможной ошибки, то кривая $\operatorname{Re} f_s^{(-)}$ будет лежать в широком коридоре, захватывающем экспериментальные точки. Еще более существенной окажется неточность такого же порядка в вычислении величины коэффициента b (27.8а),

так как перед ним стоит множитель ωq^2 , быстро растущий с увеличением импульса (рис. 60). Поэтому можно сделать вывод о большом значении релятивистских поправок. Однако в связи с принятым нами подходом (см. § 24.3)

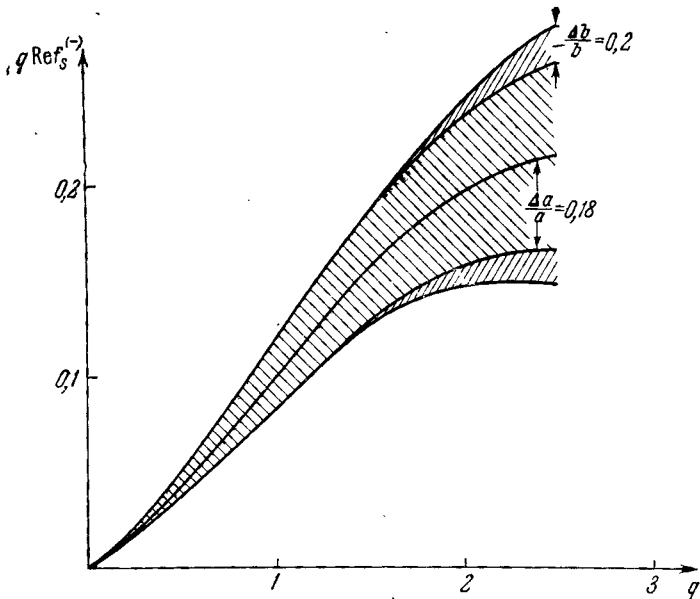


Рис. 60.

важно выяснить, насколько правильно формулы для $\text{Re } f_s^{(\pm)}$ зависят от параметров $a_i^{(\pm)}$, t_r и т. д. Например, в случае $s^{(-)}$ -волны было установлено, что в статическом пределе

$$\text{Re } f_s^{(-)} = a^{(-)} \omega F_\pi(\omega^2).$$

В качестве иллюстрации допустим, что выражение для $\text{Re } f_s^{(-)}$ получено в результате разложения по степеням $1/M$ функции

$$a^{(-)}(\omega) = \frac{a^{(-)}}{1 + \varepsilon \frac{q^2 a^{(-)}}{M}},$$

которая входит в формулу (27.6) с учетом релятивистских поправок вместо длины рассеяния $a^{(-)}$. При любом значении ε это выражение передает линейную зависимость $\text{Re } f_s^{(-)}$ от $a^{(-)}$ в статическом пределе, но если $\varepsilon \sim 5-10$, то релятивистские поправки, конечно, важны.

Конкретные вычисления с учетом всех членов вида $1/M$ очень громоздки. Приведем только окончательные результаты. С учетом релятивистских поправок формула (27.6) для $\text{Re } f_s^{(-)}$ принимает вид (Исаев и др. (1964б)):

$$\text{Re } f_s^{(-)} = \frac{E+M}{2M} \frac{M+1}{W} (W-M) a^{(-)} F_\pi(\omega^2) + O(v), \quad (27.10)$$

где W — полная энергия, а E — энергия нуклона в с. ц. м. Функция $O(v)$ мала в рассматриваемой области и при $v = q^2 = 9$ составляет приблизительно 1% от первого члена в (27.10).

Таким образом, учет релятивистских поправок не меняет вида функциональной зависимости $\text{Re } f_s^{(-)}(v)$ от параметров $a^{(-)}$, t_r и сводится к появлению некоторого кинематического множителя. Смысл этого множителя можно сделать еще более прозрачным, если воспользоваться переменной ω^* (см. (22.16)):

$$\omega^* = W - M = \omega + \frac{\omega^2 - 1}{2M} + O\left(\frac{1}{M^2}\right).$$

Тогда формула (27.10) запишется в виде

$$\text{Re } f_s^{(-)} = \frac{1 + \frac{1}{M}}{1 + \frac{\omega^*}{M}} \omega^* a^{(-)} F_\pi(\omega^2). \quad (27.11)$$

Появление множителя $\left(1 + \frac{\omega^*}{M}\right)^{-1}$ связано с заменой $\omega \rightarrow \omega^*$, так как

$$\frac{d\omega^*}{d\omega} = 1 + \frac{\omega}{M} \approx 1 + \frac{\omega^*}{M}.$$

При выводе формулы для дифференциального сечения интегрируется функция $\delta(\omega - \omega_0)$, что и приводит к фактору $\left(1 + \frac{\omega^*}{M}\right)^{-1}$.

Рассмотрение релятивистских поправок позволяет утверждать, что они в основном сводятся к учету отдачи нуклона путем замены $\omega \rightarrow \omega + \frac{q^2}{2M}$. Поэтому их можно назвать поправками на отдачу нуклона. Очевидно, что и для других волн они носят такой же характер и связаны с использованием более правильной кинематики.

27.5. Высшие парциальные волны. Изучение πN -рассеяния при низких энергиях ограничивалось рассмотрением s - и p -волн. Привлечение d -, f - и высших волн требует изменения лишь формулы (26.1) и использования д. с. для производных по c от функций $\Phi(v, c) = \{A^{(+)}, \beta, \alpha, B^{(-)}\}$. Поэтому принципиально учет волн может быть проведен, хотя и связан с громоздкими вычислениями. Если бы при низких энергиях была необходимость в учете всех парциальных волн, то возник бы вопрос о сходимости разложений (21.22) по парциальным волнам. Исходя из представления Мандельштама (23.1), можно установить область сходимости этих разложений (Гамильтон (1963)). Так возникает ограничение на v : $v < 1$. При $v > 1$ разложения расходятся. Однако практически более важно то, что фазовые сдвиги d - и f -волн малы для энергий мезонов меньше $500 Mэв$ в л.с.к. Выше мы уже видели ((27.1), (27.2)), что вычисление малых фаз ненадежно и может привести к большим ошибкам. Все же вычисленные значения фаз можно попытаться использовать как исходные для фазового анализа при энергиях $\geq 500 Mэв$. При этом выясняется, что некоторые d - и f -фазы не согласуются с экспериментальными данными (Овил и др. (1964)). Отсюда ясно, что предсказания, следующие из таких расчетов, ненадежны.

§ 28. Электромагнитные формфакторы нуклона

После анализа вершины с двумя мезонами и двумя нуклонами можно продвинуться еще на один шаг вверх по иерархической лестнице (рис. 2) и рассмотреть NN -рассеяние, а также вершину γNN , т. е. электромагнитные формфакторы нуклонов. Последняя задача неизмеримо проще, чем нуклон-нуклонное рассеяние. Остановимся на ней подробнее. Нижеследующее изложение носит в основ-

ном описательный характер, так как вопросы, относящиеся к электромагнитным формфакторам нуклонов, детально разобраны в ряде других работ (например, Дрелл и Захариасен (1961)). Наша цель состоит в том, чтобы показать возможность применения анализа узла πN к электромагнитной структуре нуклона и извлечь из него наиболее простые следствия.

28.1. Определение электромагнитных формфакторов. Экспериментально электромагнитные формфакторы нуклонов определяются в процессе упругого электрон-нуклонного рассеяния. Во втором порядке теории возмущений этот процесс описывается диаграммой Фейнмана (рис. 61). Соответствующее ей сечение имеет вид

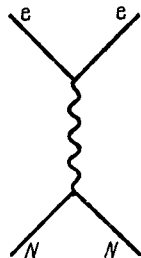


Рис. 61.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{4(4\pi)^2 E_0^2} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (28.1)$$

Здесь E_0 и θ — начальная энергия и угол рассеяния электрона в л.с.к., причем массой электрона по сравнению с массой нуклона пренебрегается.

При выводе формулы (28.1) предполагалось, что спиновые поля, описывающие электроны и нуклоны, подчиняются уравнениям Дирака. Однако нуклон заведомо не является дираковской частицей, так как магнитный момент протона не равен магнетону $e/2M$, а магнитный момент нейтрона равен нулю. Это значит, что электромагнитный ток нуклона не сводится к обычному в квантовой электродинамике выражению

$$j_\mu(x) = e\bar{\Psi}_N(x)\gamma_\mu\Psi(x), \quad (28.2)$$

которое предполагает точечность (локальность) взаимодействия. Нелокальность взаимодействия нуклона с электромагнитным полем можно учесть, если рассмотреть наиболее общий вид матричного элемента тока $j_\mu(x)$ между однонуклонными состояниями. Именно этот матричный элемент войдет в выражения для сечения процесса eN -рассеяния в качестве вершины γNN (рис. 61).

Анализ его проводится на основе требований градиентной и лоренцевской инвариантности. Трансляционная инвариантность приводит к тому, что матричный элемент $\langle p_2 | j_\mu(x) | p_1 \rangle$ сводится к $\langle p_2 | j_\mu(0) | p_1 \rangle$, для которого имеем

$$\langle p_2 | j_\mu(0) | p_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4p_1^0 p_2^0}} (\bar{u}(p_2) | F_1(t) + iF_2(t) \sigma_{\mu\nu} q_\nu | u(p_1)), \quad (28.3)$$

где $q = p_1 - p_2$, а $F_{1,2}(t)$ — две неизвестные функции инвариантной переменной t . В процессе eN -рассеяния переменная $t = q^2 = 2M^2 - p_1 p_2 < 0$. Для этих значений t можно показать, что $F_{1,2}(t)$ — действительные функции. В области $t > 0$ функции $F_{1,2}(t)$ комплексны и могут быть определены из процесса $e^+ + e^- \rightarrow N + \bar{N}$. Мы не будем выписывать определения $F_i(t)$ в этом случае, так как оно аналогично (28.3) и проводится так же, как и для пионного формфактора в § 19.

Электромагнитные формфакторы нуклона были введены на основе общих принципов для учета структуры нуклона. Их происхождение можно пояснить с точки зрения пион-нуклонного взаимодействия. Как было показано выше (§ 22.1), пион-нуклонное взаимодействие характеризуется конечным размером области взаимодействия. Во всей этой области осуществляется взаимодействие пионов с электромагнитным полем. Поэтому вследствие сильных взаимодействий (например, πN -взаимодействия) нуклон приобретает размеры. Функция $F_1(t)$ описывает распределение заряда нуклона — это электрический формфактор. Функция $F_2(t)$ описывает распределение магнитного момента нуклона — это магнитный формфактор. Объяснение термина «магнитный формфактор» состоит в том, что член $\sigma_{\mu\nu} q_\nu$ является импульсным представлением взаимодействия магнитного момента с электромагнитным полем, т. е. так называемого паулевского члена $\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Функции $F_i(t)$ заданы в импульсном представлении. Переход от них к координатному представлению, т. е. вычисление пространственной плотности электрического заряда и магнитного момента, зависит от системы отсчета. Для значений $t < 0$ можно выбрать систему

отсчета, в которой $p_1^0 = p_2^0$. В такой системе отсчета легко ввести величины

$$\rho_i(\mathbf{r}) = \int \frac{dq}{(2\pi)^3} F_i(-q^2) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}. \quad (28.4)$$

Однако понимать, например, $\rho_i(\mathbf{r})$ как реальное размазывание нуклона не следует. В самом деле, формулы (28.4) справедливы в выделенной системе отсчета, в которой нуклон движется. Тем не менее полезно определить понятие среднеквадратичного радиуса

$$\langle r_i^2 \rangle = \frac{\int \rho_i(\mathbf{r}) r^2 d\mathbf{r}}{\int \rho_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}} = \frac{6F_i'(-q^2)|_{q^2=0}}{F_i(q^2)},$$

которому можно придать и ковариантную форму

$$F_i(t) = F_i(0) \left(1 + \frac{1}{6} \langle r_i^2 \rangle t + \dots \right).$$

С учетом (28.3) формула (28.1) для дифференциального сечения принимает вид (формула Розенблюта)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{e^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \left\{ F_1^2 - \frac{t}{2M} \left[2(F_1 + 2MF_2)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + (2MF_2)^2 \right] \right\}, \quad (28.5)$$

где

$$t = \frac{\left(2E_0 \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}{1 + \frac{2E_0}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

В выражениях (28.3) — (28.5) фигурируют формфакторы $F_i(t)$, относящиеся либо к протону, либо к нейтрону. Поэтому фактически вершина γNN характеризуется четырьмя функциями $F_i(t)$. Если предполагать, как обычно, что сильные взаимодействия обладают изотопической инвариантностью, то формфакторы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ в (28.3) имеют изотопическую структуру и

$$\left. \begin{aligned} F_1(t) &= F_1^{(s)}(t) + \tau_3 F_1^{(v)}(t), \\ F_2(t) &= F_2^{(s)}(t) + \tau_3 F_2^{(v)}(t). \end{aligned} \right\} \quad (28.6)$$

Отсюда легко получить

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(p)}(t) &= F_1^{(s)}(t) + F_1^{(v)}(t), \\ F_1^{(n)}(t) &= F_1^{(s)}(t) - F_1^{(v)}(t). \end{aligned} \right\} \quad (28.7)$$

Аналогичные формулы имеют место для $F_2(t)$. Функции F_i^s являются изотопически скалярными, а F_i^v — изотопически векторными частями формфакторов $F_i(t)$. При $t = 0$ формфакторы принимают значения

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(p)}(0) &= e, & F_1^{(n)}(0) &= 0, \\ F_2^{(p)}(0) &= \mu_p = 1,79 \frac{e}{2M}, & F_2^{(n)}(0) &= \mu_n = -1,91 \frac{e}{2M}. \end{aligned} \right\} \quad (28.8)$$

28.2. Дисперсионные соотношения для формфакторов.

Скалярные функции $F_i^{(s,v)}(t)$ удовлетворяют д. с., которые являются следствием аналитических свойств $F_i^{(s,v)}(t)$ как функций комплексного переменного t . С д. с. такого рода мы уже встречались при рассмотрении электромагнитного формфактора π -мезона (§ 25.3). Для электромагнитных формфакторов нуклона не существует строгого доказательства аналитичности функций $F_i^{(s,v)}(t)$ по переменной t . Однако можно показать, что в любом порядке теории возмущений функции $F_i^{(s,v)}(t)$ являются аналитическими в комплексной плоскости t с разрезом $[z_i, +\infty)$, где значения z_i определены ниже. Отсюда стандартным методом с помощью теоремы Коши (§ 25.3) получаем

$$F_i^{(s,v)}(t) = F_i^{(s,v)}(0) + \frac{t}{\pi} \int_{z_i}^{\infty} \frac{g_i^{(s,v)}(t')}{t'(t'-t)} dt'. \quad (28.9)$$

При выводе (28.9) предположено, что $\left| \frac{F_i(t)}{t} \right| \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Не существует каких-либо строгих результатов относительно поведения $F_i^{(s,v)}(t)$ при больших t . Но если принять, что справедливы результаты теории возмущений, то для $F_2(t)$ можно использовать д. с. без вычитания:

$$F_2(t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_2}^{\infty} \frac{g_2(t')}{t'-t} dt'. \quad (28.10)$$

Далее, используя тот факт, что при $t < 0$ формфакторы $F_i^{(s, v)}(t)$ действительны, легко установить действительность спектральных функций $g_i^{(s, v)}(t)$. Из соотношения (28.9) следует

$$g_i(t) = \frac{F_i^{(+)}(t) - F_i^{(-)}(t)}{2i} = \text{Im } F_i(t). \quad (28.11)$$

Поэтому для практического использования (28.9) нужно указать способ вычисления $\text{Im } F_i(t)$.

Условие унитарности позволяет найти выражения для $\text{Im } F_i^{(s, v)}(t)$. Детальные вычисления громоздки из-за

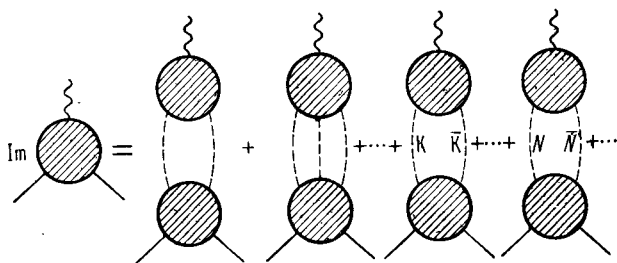


Рис. 62.

наличия у нуклонного формфактора изотопической и спиновой структур. Однако схема рассуждений проста. Из условий унитарности и инвариантности взаимодействия относительно обращения времени следует, что

$$\text{Im} \langle 0 | j_\mu | N\bar{N} \rangle = \sum_n \langle 0 | j_\mu | n \rangle \langle n | T^+ | N\bar{N} \rangle, \quad (28.12)$$

где суммирование распространяется по полной системе промежуточных состояний сильно взаимодействующих частиц. В данном случае под совокупностью $|n\rangle$ понимается

$$|n\rangle = |2\pi\rangle; |3\pi\rangle; \dots; |K\bar{K}\rangle; \dots; |N\bar{N}\rangle; \dots \quad (28.13)$$

Графическое изображение условия унитарности (28.12) весьма наглядно (рис. 62). Первое слагаемое содержит уже

известный формфактор π -мезона и амплитуду процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Последний становится наблюдаемым при $t \geq 4M^2$. Вместе с тем вклад от первого члена в (28.12) отличен от нуля уже при $t \geq 4\mu^2$. Поэтому условие унитарности (28.12) для значений t в интервале $[4\mu^2, 4M^2]$ содержит амплитуду процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ в нефизической области $4\mu^2 \leq t \leq 4M^2$. Возможность рассматривать ее в этой области как аналитическое продолжение из физической области $t \geq 4M^2$ может быть обоснована на основе представления Мандельштама. Фактически это было установлено выше и использовалось нами при анализе амплитуды πN -рассеяния в области значений переменных, соответствующих процессу $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ (§ 25.4). Отметим, далее, что двухмезонные и трехмезонные промежуточные состояния дают вклад в различные части нуклонного формфактора. Это связано с тем, что π -мезоны являются G -нечетными частицами. Электромагнитный ток $j(x)$ разбивается на G -четную и G -нечетную части:

$$\left. \begin{aligned} j^{(s)}(x) &— G\text{-нечетная часть } j(x), \\ j^{(v)}(x) &— G\text{-четная часть } j(x). \end{aligned} \right\} \quad (28.14)$$

Вследствие (28.14) двухчастичные состояния $|2\pi\rangle$ определяют $\text{Im } F_1^{(v)}(t)$, а трехчастичные — $\text{Im } F_1^{(s)}(t)$.

В главе о πN -рассеянии мы изучили амплитуду $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, которая дает возможность подробно исследовать изовекторные части нуклонных формфакторов. Условие унитарности (28.12) связывает формфакторы $F_1^{(v)}(t)$ со многими неупругими процессами. Как обычно, мы будем ограничиваться лишь первым, наилегчайшим по массе, членом в условии унитарности. Тогда для формфакторов $F_1^{(v)}(t)$ имеем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(v)}(t) &= \frac{e}{2} + \frac{t}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_1^{(v)}(t')}{t'(t'-t)} dt', \\ F_2^{(v)}(t) &= \frac{ge}{2M} + \frac{t}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\text{Im } F_2^{(v)}(t')}{t'(t'-t)} dt'. \end{aligned} \right\} \quad (28.15)$$

Мнимые части $\text{Im } F_i^{(v)}(t)$ с учетом изотопической и спиновой структур равны (Фрэзер, Фулко (1960)):

$$\text{Im } F_i^{(v)}(t) = -\frac{eF_\pi^*(t)q_3^3}{2p_3^0} \Gamma_i(t), \quad (28.16)$$

где

$$\Gamma_1(t) = \frac{M}{p_3^2} \left[-\frac{(p_3^0)^2}{M\sqrt{2}} f_-^{(-)1}(t) + f_+^{(-)1}(t) \right],$$

$$\Gamma_2(t) = \frac{1}{2p_3^2} \left[\frac{M}{\sqrt{2}} f_-^{(-)1}(t) - f_+^{(-)1}(t) \right].$$

Здесь $F_\pi(t)$ — электромагнитный формфактор π -мезонов, а $f_\pm^{(-)1}$ — парциальные волны процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Мы уже обсуждали возможные выражения для $F_\pi(t)$, а при анализе экспериментальных данных по πN -рассеянию использовали формфактор, соответствующий резонансному характеру взаимодействия π -мезонов в состоянии $I = J = 1$.

Для практического использования формул (28.15), (28.16) необходимо найти функции $\Gamma_i(t)$. Это можно сделать, выразив их через инвариантные скалярные функции Φ , введенные при анализе πN -рассеяния (§ 25.1). Если ограничиться низшими парциальными волнами в процессе $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, то с помощью формул (21.28), (21.29) можно выразить $f_\pm^{(-)1}$ через Φ , что приводит к следующим формулам для $\Gamma_i(t)$:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1(t) &= -\frac{M}{12\pi} \left[4\alpha(t, -1) + \frac{1}{M} B^{(-)}(t, -1) \right], \\ \Gamma_2(t) &= \frac{1}{6\pi} \alpha(t, -1). \end{aligned} \right\} (28.17)$$

Здесь $t = -4\nu$. Смысл формул (28.17) становится ясным, если вспомнить результаты рассмотрения аналитических свойств функций Φ и рис. 50. Рассеяние назад в канале I (πN -рассеяние) соответствует рассеянию назад в перекрестном канале, которым является канал $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Это означает, что при $t < 0$ функции $\Phi(t - i\varepsilon, -1)$ (или $\Phi(\nu + i\varepsilon, -1)$) определяют амплитуду πN -рассеяния в наблюдаемой точке $\nu = -t/4$, $\cos\theta_1 = -1$

плоскости s, u . Те же функции $\Phi(t + i\epsilon, -1)$ при $4\mu^2 \leq t \leq 4M^2$ определяют амплитуду процесса $\pi N \rightarrow N\bar{N}$ в наблюдаемой по угловой переменной ($\cos \theta_3 = -1$) и ненаблюдаемой по энергии ($t < 4M^2$) точке плоскости s, u . Такое аналитическое продолжение из физической области πN -рассеяния в область процесса $\pi N \rightarrow N\bar{N}$ можно осуществить с помощью д. с. для рассеяния назад (25.13), которые мы перепишем в удобной для дальнейшего форме:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(v, -1) &= F_\pi(v) \left[\frac{\pi a^{(-)}}{M} - 2\pi(a_1^{(-)} - a_3^{(-)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2v}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_{p^{3/2}}^{(-)}(v')}{v'^2(v'-v)} dv' - \frac{2v}{M} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_{p^{3/2}}^{(-)}(v')}{v'\omega'(v'-v)} dv' \right], \\ 4\alpha(v, -1) + \frac{1}{M} B^{(-)}(v, -1) &= \\ &= \frac{4\pi}{M} F_\pi(v) \left[a^{(-)} + \frac{2f^2 v}{\omega^2} \frac{1}{F_\pi(-1)} - \frac{2v}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_{p^{3/2}}^{(-)}(v')}{v'\omega'(v'-v)} \frac{dv'}{F_\pi(v')} \right]. \end{aligned} \right\} (28.18)$$

Формулы (28.18) получены в результате решения линейной краевой задачи. Поэтому они справедливы в некоторой области комплексного переменного v ($t = -4v$). Размеры этой области вдоль действительной оси, строго говоря, определяются границами интервала, на котором справедливо двухчастичное условие унитарности. Это приводит к ограничению $v \geq -4$. Однако, как всегда, существует убеждение в том, что многочастичные процессы начинают играть заметную роль в условии унитарности выше своих порогов. Следовательно, выражениям (28.18) можно верить и при $v < -4$.

Формулы для функций

$$\alpha(v, -1), \quad 4\alpha(v, -1) + \frac{1}{M} B^{(-)}(v, -1)$$

обладают одним общим свойством: согласно (28.18) обе функции пропорциональны электромагнитному формфактору π -мезона $F_\pi(v)$. Поведение $F_\pi(v)$ в зависимости от v или t при наличии узкого резонанса (ρ -мезона) детально обсуждалось выше (§ 19). Выражения в квадратных

скобках (28.18) при отрицательных ν представляют собой плавно меняющиеся функции. Следовательно, согласно (28.16) и (28.17) поведение $\text{Im } F_i^{(\nu)}(t)$ будет в основном определяться $|F_\pi(t)|^2$. Тогда, воспользовавшись полученным ранее выражением для $F_\pi(t)$ (19.11), устанавливаем, что

$$|F_\pi(t)|^2 = \frac{t_r^2}{(t_r - t)^2 + (\gamma q_3^2)^2} \approx \frac{t_r^2}{\gamma q_3^2} \pi \delta(t - t_r). \quad (28.19)$$

Здесь мы применили уже известную δ -аппроксимацию (27.3). Такой прием, конечно, является приближенным, но он избавляет от ряда трудностей. Во-первых, формулам (28.18) нельзя верить на всем интервале интегрирования $[4\mu^2, \infty)$. Поэтому в д. с. необходимо обрезать интеграл на каком-то значении $t < t_{\text{max}}$. Во-вторых, возникает вопрос о зависимости формфакторов $F_i(t)$ от параметра t_{max} . Оценка (28.19) указывает на то, что зависимость от t_{max} слаба. Собирая формулы (28.16) — (28.19), легко прийти к выражениям для мнимых частей формфакторов $F_i^{(\nu)}(t)$, в терминах которых обычно проводится сравнение с экспериментальными данными, а именно:

$$\text{Im } F_i^{(\nu)}(t) = -\pi \frac{c_i t_r^{\nu/2}}{\gamma} \delta(t - t_r). \quad (28.20)$$

Таким образом, в случае резонансного взаимодействия двух пионов вклад от двухчастичного состояния в условие унитарности хорошо аппроксимируется функцией $\delta(t - t_r)$. Если использовать это утверждение как эвристическое соображение о возможном виде $\text{Im } F_i^{(s, \nu)}(t)$ в том случае, когда несколько мезонов образуют резонанс, то мы придем к резонансной модели формфакторов. Такая модель была предложена впервые Клементелем и Вилли (1958). Электромагнитные формфакторы при этом имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} F_1^{(s)}(t) &= \frac{e}{2} \left[\frac{c_{1, \phi}^{(s)}}{1 - \frac{t}{m_\phi^2}} + \frac{c_{1, \omega}^{(s)}}{1 - \frac{t}{m_\omega^2}} + 1 - c_{1, \phi}^{(s)} - c_{1, \omega}^{(s)} \right], \\ F_1^{(v)}(t) &= \frac{e}{2} \left[\frac{c_{1, \rho}^{(v)}}{1 - \frac{t}{m_\rho^2}} + 1 - c_{1, \rho}^{(v)} \right], \end{aligned} \right\} (28.21)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_2^{(s)}(t) &= \frac{e}{2} \frac{g_s}{M} \left[\frac{c_{2,\varphi}^{(s)}}{1 - \frac{t}{m_\varphi^2}} + \frac{c_{2,\omega}^{(s)}}{1 - \frac{t}{m_\omega^2}} + 1 - c_{2,\varphi}^{(s)} - c_{2,\omega}^{(s)} \right], \\
 F_2^{(v)}(t) &= \frac{e}{2} \frac{g_v}{M} \left[\frac{c_{2,\rho}^{(v)}}{1 - \frac{t}{m_\rho^2}} + 1 - c_{2,\rho}^{(v)} \right].
 \end{aligned} \right\} (28.22)$$

Здесь учтены два трехпионных резонанса ω и φ с квантовыми числами $I = 0$, $J = 1$ и двухпионный ρ -мезон. Клементель и Вилли рассмотрели только изовекторные части формфакторов $F_i(t)$ и нашли, что экспериментальные данные хорошо описываются, если положить

$$c_{1,\rho}^{(s)} = c_{2,\rho}^{(s)} = 1,2; \quad m_\rho^2 = 22.$$

Константы c_i , введенные в (28.21), (28.22), находятся в отношении

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{g_v}{M}.$$

Сама величина c_1 , например, не может быть найдена из $c_{1,\rho}^{(v)}$, если не привлекать дополнительных сведений относительно ширины ρ -мезона γ . Однако формулы (28.18) позволяют выразить c_1 через параметры πN -рассеяния. С их помощью легко получить (Лендель и др. (1966))

$$\left. \begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{2}{3} a^{(-)} t_r, \\
 c_2 &= -\frac{1}{3} t_r \left[a_1^{(-)} - a_3^{(-)} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } f_{\rho/2}^{(-)}(v')}{v'^2} dv' + O\left(\frac{1}{M}\right) \right].
 \end{aligned} \right\} (28.23)$$

Согласно соотношению (27.5) сумма двух первых членов в квадратных скобках выражения для c_2 равна нулю. Тогда значение c_2 определяется малыми членами, величину которых мы не можем вычислять надежно. Но, как было показано в § 27.1, равенство (27.5) выполняется плохо. Поэтому, если использовать экспериментальные данные

по $a_1^{(-)}$ и фазе δ_{33} , то для отношения c_2/c_1 получаем

$$\frac{c_2}{c_1} = 0,25 \approx 0,272 = \frac{g_v}{M}.$$

К численному согласию не следует относиться всерьез ввиду большого количества использованных приближений. Тем не менее формулы для c_i приводят к разумным величинам. Так, при $a^{(-)} \approx 0,08$ и $t_r = 30$ для c_1 имеем $c_1 = -1,6$. Обычно считают, что $c_1 \approx -1$ (Гамильтон (1963)). Разница между этими двумя значениями не велика, если учесть способ определения c_i : величина c_i определяется из данных по πN -рассеянию и при $q < 2$ значения $c_1 = -1$ и $-1,6$ дают очень близкие результаты (Боукок и др. (1960)).

Таким образом, электромагнитная структура нуклонов (изовекторная часть) может быть рассмотрена в рамках тех же приближений и предположений, что и упругое πN -рассеяние. Что касается количественного описания, то, по-видимому, резонансная модель слишком груба. С ее помощью из экспериментальных данных по изовекторной части нуклонных формфакторов получается значение $m_\rho^2 = 19$. Это значение ниже того, которое находят из опытов по рождению ρ -мезонов в πN -столкновениях.

Для устранения этого противоречия вводят в рассмотрение гипотетический ρ' -мезон, за счет параметров которого получают $m_\rho^2 \approx 30$ (Деврие и др. (1964)). Кроме того, предпринимаются попытки анализа экспериментальных данных на основе δ -аппроксимаций (28.21) в уравнениях (28.10), что несколько улучшает согласие с опытом (Чен и др. (1966)). Ясно, что для удовлетворительного описания электромагнитных формфакторов требуется дальнейшее развитие резонансной модели.

§ 29. Количественная теория s -волн πN -рассеяния

Применение представления Мандельштама к узлу πN -взаимодействия хорошо продемонстрировало его положительные и отрицательные стороны. К числу положительных черт следует отнести общую качественную картину πN -рассеяния и электромагнитных формфакторов нуклонов. Однако построение даже такой картины потребовало

использования ряда приближений, уточнение которых встречает большие трудности. Окончательные формулы для парциальных волн πN -рассеяния, как правило, громоздки, так что сравнение результатов, полученных в рамках различных подходов, весьма затруднительно. Эти недостатки составляют отрицательную черту работ, использующих представление Мандельстама. Поэтому целесообразно сформулировать приближенную задачу, допускающую точное решение. Примером такой задачи могут служить уравнения Чу — Лоу для p -волнового взаимодействия π -мезонов с фиксированным источником. Простота их состоит в том, что они включают только p -волны и не связаны с низшими и высшими парциальными амплитудами (Эдвардс, Мэтьюз (1957)). Эта черта, присущая статическим уравнениям, сильно упрощает задачу о решении уравнений Чу — Лоу.

29.1. Статические уравнения Чу — Лоу для s -волн πN -рассеяния. Эти уравнения были найдены сразу же вслед за аналогичными уравнениями для p -волн. Они имеют вид (Оме (1956)):

$$\left. \begin{aligned} h_1(\omega) &= \frac{1}{3}(1 + 2\omega)a_1 + \frac{2}{3}(1 - \omega)a_3 + \\ &+ \frac{q^2}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\text{Im } h_1(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{1}{3} \frac{-\text{Im } h_1(\omega') + 4h_3(\omega')}{\omega' + \omega} \right] \frac{d\omega'}{q'^2}, \\ h_3(\omega) &= \frac{1}{3}(2 + \omega)a_3 + \frac{1}{3}(1 - \omega)a_1 + \\ &+ \frac{q^2}{\pi} \int_1^\infty \left[\frac{\text{Im } h_3(\omega)}{\omega' - \omega} + \frac{1}{3} \frac{2 \text{Im } h_1(\omega') + \text{Im } h_3(\omega')}{\omega' + \omega} \right] \frac{d\omega'}{q'^2}. \end{aligned} \right\} (29.1)$$

Здесь $h_j(\omega) = \frac{e^{i\delta_j(\omega)} \sin \delta_j(\omega)}{u^2(q^2)q}$, $\delta_j(\omega)$ — действительная фаза рассеяния в состоянии со значением полного изотопического спина $j/2$, а $u(q^2)$ — фурье-образ функции источника.

Из уравнений (29.1) следует, что функций $h_j(\omega)$ могут расти на бесконечности, но так, чтобы $\lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \text{Im } \omega \neq 0}} h_j(\omega) / q^2 = 0$.

Если предположить, что сами функции $h_j(\omega)$ убывают на бесконечности, то уравнениям (29.1) можно придать другую форму, а именно:

$$h_i(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\text{Im } h_i(\omega')}{\omega' - \omega} + A_{ij} \frac{\text{Im } h_j(\omega')}{\omega' + \omega} \right] d\omega', \quad (29.2)$$

где

$$A_{ij} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (29.2) легко получить неравенства

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \lim_{\omega \rightarrow 1} h_1(\omega) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{\omega' + 1} \right) \frac{\text{Im } h_1(\omega')}{\omega' - 1} + \frac{4}{3} \frac{\text{Im } h_3(\omega')}{\omega' + 1} \right] d\omega' > 0, \\ a_3 &= \lim_{\omega \rightarrow 1} h_3(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \left[\frac{\text{Im } h_3(\omega')}{\omega' - 1} + A_{3j} \frac{\text{Im } h_j(\omega')}{\omega' + 1} \right] d\omega' > 0. \end{aligned} \right\} \quad (29.3)$$

Сравнивая уравнения (29.1) и (29.2), мы видим, что в последних значения длин рассеяния положительны, в то время как в (29.1) они произвольны, будучи константами вычитания. Следовательно, предположение о степени роста функций $h_j(\omega)$ на бесконечности вместе с условием двухчастичной унитарности (действительность фаз $\delta_j(\omega)$) во многом определяет поведение функций $h_j(\omega)$ при малых энергиях. Если вспомнить экспериментальные данные по длинам рассеяния (§ 22.5), то знаки a_1 и a_3 ($a_1 > 0$) указывают на необходимость рассматривать уравнения (29.1), т. е. уравнения с вычитанием. Это позволяет в свою очередь сделать некоторые заключения об асимптотическом поведении $u(q^2)$.

Двухчастичное условие унитарности для функций $h_j(\omega)$:

$$\text{Im } h_j(\omega) = qu^2(q^2) |h_j(\omega)|^2 \quad (29.4)$$

явно содержит неизвестную и непосредственно экспе-

риментально не наблюдаемую функцию $u(q^2)$. Если $\lim_{q \rightarrow \infty} qu^2(q^2) = 1$, то из условия унитарности (29.4) следует, что функции $h_j(\omega)$ на бесконечности убывают или стремятся к постоянным. Поэтому очевидно, что уравнение (29.1) допускает и более сильное убывание функции $u(q^2)$, т. е. рост самих функций $h_j(\omega)$. Ввиду отсутствия достаточно обоснованных априорных соображений о виде $u(q^2)$ целесообразно перейти к такой формулировке задачи, в которой функция $u(q^2)$ играла бы меньшую роль. Для этого запишем уравнения (29.1) на языке аналитических свойств функций $h_j(\omega)$, как это было сделано при изучении p -волновых уравнений Чу — Лоу (§ 22.4):

1) $h_j(z)$ — аналитические функции комплексного переменного в плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$,

$$2) h_j^*(z) = h_j(z^*),$$

$$3) \operatorname{Im} h_j(\omega + i0) = qu^2(q^2) |h_j(\omega + i0)|^2, \text{ где}$$

$$h_j(\omega + i0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ z > 1}} h_j(z + i\varepsilon),$$

$$4) h_i(-z) = A_{ij} h_j(z),$$

$$5) \lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z \neq 0}} h_j(z) / z^2 = 0.$$

Свойства функций $h_j(z)$, подчиняющихся уравнению (29.2), совпадают с таковыми для функций, удовлетворяющих уравнениям (29.1). Единственное отличие состоит в том, что условие (5) должно быть заменено следующим:

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z \neq 0}} h_j(z) = 0.$$

Ясно, что общими для уравнений (29.1), (29.2) нужно признать свойства (1) — (4). Совокупность свойств (1) — (4) можно небольшим видоизменением обобщить так, чтобы им соответствовал еще ряд задач, помимо s -волнового πN -рассеяния. Для этого ограничимся в свойстве (1) требованием мероморфности функций $h_j(z)$. Тогда можно привести два примера лагранжианов, для которых уравнения Чу — Лоу могут быть сформулированы в виде условий (1) — (4). Ими являются лагранжианы, описывающие

рассеяние нейтральных псевдоскалярных мезонов на источнике со спином $1/2$:

$$H_{\text{int}} = \sqrt{4\pi} \frac{g}{\mu} \int v(\mathbf{r}) (\nabla \sigma) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

и рассеяние заряженных скалярных мезонов на источнике с изотопическим спином $1/2$ (нуклон)

$$H_{\text{int}} = \sqrt{4\pi} g \int v(\mathbf{r}) \tau_i \varphi_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Оба эти лагранжиана линейны по мезонному полю φ , а поэтому соответствующие им уравнения Чу — Лоу содержат полюсные члены. Возможность их появления учтена в измененном свойстве (1).

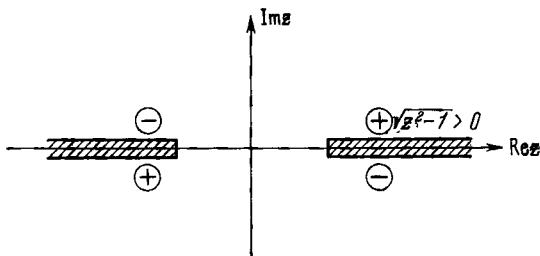


Рис. 63.

Условия (1) — (4) допускают еще одно обобщение, в результате которого функция $u(q^2)$ не будет явно входить в формулировку задачи. Предварительно введем функцию от z , равную $\sqrt{z^2 - 1}$, так чтобы на верхнем берегу правого разреза она была положительна. Расположение знаков на остальных частях разрезов показано на рис. 63. Определенная так ветвь двухзначной функции будет чисто мнимой на отрезке $[-1, +1]$:

$$\text{Im}(\sqrt{z^2 - 1}) > 0 \text{ при } z \in [-1, +1].$$

Отсюда легко установить, что для функции $i\sqrt{z^2 - 1}$ выполняются условия

$$(i\sqrt{z^2 - 1})^* = i\sqrt{z^{*2} - 1}, \quad i\sqrt{z^2 - 1} = i\sqrt{(-z)^2 - 1}, \quad (29.5)$$

так что $i\sqrt{z^2 - 1}$ действительна на интервале $[-1, +1]$. Очевидно, что $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ z > 1}} \sqrt{(z + i\varepsilon)^2 - 1} = q(z)$; поэтому

ниже обозначим $q(z) = \sqrt{z^2 - 1}$. Предположим, далее, что $u^2(q^2)$ — мероморфная функция комплексного переменного z . Определим новую функцию комплексного переменного z равенством

$$S_j(z) = 1 + 2iq(z)u^2(q^2)h_j(z), \quad (29.6)$$

где $q(z)$ — выбранная выше ветвь $\sqrt{z^2 - 1}$. Введенная так функция $S_j(z)$ на верхнем берегу правого разреза совпадает с матричным элементом S -матрицы и равна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S_j(\omega + i\varepsilon) = e^{2i\delta_j(\omega)} \text{ при } \omega > 1. \quad (29.7)$$

Пользуясь равенствами (29.5) и предположением о мероморфности $u^2(q^2)$, перенесем свойства функций $h_j(z)$ на функции $S_j(z)$:

1) $S_j(z)$ — мероморфные функции z в плоскости с разрезами $(-\infty, -1]$, $[+1, +\infty)$,

2) $S_j^*(z) = S_j(z^*)$,

3) $|S_j(\omega + i0)|^2 = 1$, где $S_j(\omega + i0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow +0 \\ \omega > 1}} S_j(\omega + i\varepsilon)$,

4) $S_i(-z) = A_{ij}S_j(z)$.

Условие (4) имеет одинаковый вид для функций $h_j(z)$ и $S_j(z)$ по двум причинам. Во-первых, матрица кроссинг-симметрии A_{ij} подчиняется уравнению

$$\sum_j A_{ij} = 1. \quad (29.8)$$

В справедливости (29.8) для уравнения (29.2) легко убедиться прямым вычислением. Уравнение (29.8) имеет и общее обоснование на основе определения матрицы A_{ij} . Во-вторых, функция $2iq(z)u^2(q^2)$ четна по z .

Обсудим свойства функций $S_j(z)$. Первое из них является следствием принципа причинности, который позволяет доказать аналитичность амплитуды рассеяния в комплексной плоскости z . Требование мероморфности $S_j(z)$ не вытекает из принципа причинности. Оно возникло при

переходе от $h_j(z)$ к $S_j(z)$ и состоит в том, что $u^2(q^2)$ — граничное значение некоторой мероморфной функции. Это ограничение на $u^2(q^2)$ не очень жестко, так как каждая непрерывная функция может быть с любой точностью приближена рациональными функциями. Второе свойство $S_j(z)$ означает, что $S_j(z)$ действительны на интервале $[-1, +1]$. Оно отражает хорошо известный из квантовой механики факт нечетности фазы рассеяния $\delta_j(\omega)$ как функций импульса q .

Двухчастичное условие унитарности (свойство 3)) предполагается справедливым всюду при $\omega > 1$. Строго говоря, такое предположение неверно уже при кинетической энергии пионов 200 Мэв (в л.с.к.), так как порог рождения дополнительного пиона соответствует энергии $\sim 173 \text{ Мэв}$. Однако из данных по фазовому анализу следует, что эта неупругость начинает сказываться только при энергии $\sim 500 \text{ Мэв}$, т. е. при $\omega \approx 3$ (Овил и др. (1964)). Поэтому, предполагая, что двухчастичное условие унитарности верно всюду, нужно иметь в виду наличие верхней границы применимости теории.

Наконец, последнее свойство (условие кроссинг-симметрии) уже неоднократно использовалось при изучении различных процессов. Для конкретного его применения, однако, необходимо, чтобы одна из амплитуд была известна как аналитическая функция комплексных переменных. Тогда, совершая аналитическое продолжение по этим переменным, можно получить вторую из амплитуд. Отсутствие теории сильных взаимодействий не дает возможности непосредственно проверить справедливость принципа кроссинг-симметрии. Косвенным подтверждением этому является выполнение д.с. для пион-нуклонного рассеяния вперед (§ 4). Условия кроссинг-симметрии не требуют для своей формулировки какого-либо конкретного вида взаимодействия, они непосредственно записываются на языке реакций (§§ 3, 8, 22) или свойств симметрии скалярных функций (§§ 8, 22), определяющих амплитуды процессов. Существует мнение о том, что они справедливы для всех видов взаимодействий (Вигнер (1964)).

В рассматриваемой задаче условие кроссинг-симметрии используется как способ аналитического продолжения

функций $S_j(z)$. Условие унитарности ограничивает вид функций на правом разрезе. Условие кроссинг-симметрии переносит эти ограничения на левый разрез. Конкретный вид матрицы кроссинг-симметрии A_{ij} определяется квантовыми числами сталкивающихся частиц. В уравнениях (29.1), (29.2) двухрядная матрица A_{ij} соответствует изотопическому спину пионов ($I = 1$) и нуклонов ($I = 1/2$).

Условия (1) — (4) были записаны в виде, который не зависит от числа функций $S_j(z)$. Поэтому, коль скоро задана матрица A_{ij} , можно ставить вопрос о нахождении соответствующих функций $S_j(z)$. Например, уравнения Чу — Лоу для p -волн πN -рассеяния (§ 22) также могут быть сведены к условиям (1) — (4) с трехрядной или четырехрядной матрицами A_{ij} . Таким образом, условия (1) — (4) более общи, чем задача о s -волнах πN -рассеяния. Способ нахождения функций $S_j(z)$ изложен в приложении 6.

Возвращаясь к нашей задаче, отметим, что условие (4) приближенно. При энергии пионов $300 Mэв$ в л.с.к. поправки к правой части равенства за счет p -волн достигают 30%. Следовательно, предел применимости теории определяется не только энергией, при которой еще справедливо условие унитарности, но зависит от точности выполнения условия кроссинг-симметрии (4).

29.2. Решение задачи об s -волнах. Начнем его с выяснения тех ограничений, которые налагают на $S_j(z)$ условия кроссинг-симметрии. Представим $S_1(z)$ и $S_3(z)$ в виде столбца (Вандерс (1962)):

$$S(z) = \begin{pmatrix} S_1(z) \\ S_3(z) \end{pmatrix}. \quad (29.9)$$

Тогда условие (4) запишется в матричной форме

$$AS(z) = S(-z). \quad (29.10)$$

Разобьем $S(z)$ на четную $S_s(z)$ и нечетную $S_a(z)$ части. Каждая из них в отдельности удовлетворяет уравнениям

$$AS_s(z) = S_s(z); \quad AS_a(z) = -S_a(z). \quad (29.11)$$

Разрешая уравнения (29.11), получим

$$S_s(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s(z); \quad S_a(z) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} a(z); \quad S(z) = \begin{pmatrix} s(z) - 2a(z) \\ s(z) + a(z) \end{pmatrix}. \quad (29.12)$$

Формулы (29.12) определяют наиболее общий вид столбца $S(z)$, удовлетворяющего уравнению (29.10). Из них, в частности, следует, что если положить $a(z)=0$, то

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s(z). \quad (29.13)$$

Здесь симметричная функция $s(z)$ подчиняется условиям (1) — (3). Построить функцию с такими свойствами нетрудно. Для этого заметим, что в силу симметрии $s(z)$ условие унитарности (3) справедливо и на левом разрезе. Поэтому совершим конформное преобразование плоскости z во внутренность единичного круга плоскости ζ так, чтобы точки $(-1, 0, +1)_z$ перешли в точки $(-1, 0, +1)_\zeta$ соответственно. Такое преобразование имеет вид

$$\zeta(z) = \frac{1 + i\sqrt{z^2 - 1}}{z}. \quad (29.14)$$

Рассматривая $s(z)$ как функцию ζ , легко убедиться в том, что $s[z(\zeta)]$ подчиняется уравнениям

$$|s[z(\zeta)]|^2 = 1 \quad \text{при} \quad |\zeta| = 1. \quad (29.15)$$

Сама функция $\zeta(z)$, в частности, удовлетворяет условию (29.15). Однако она не является наиболее общей функцией, имеющей такое свойство. Последней будет так называемая функция Бляшке (Маркушевич (1950)), которая для единичной окружности имеет вид:

$$b(\zeta) = \zeta^\lambda \prod_n \frac{|\zeta_n| \zeta_n - \zeta}{\zeta_n (1 - \zeta_n^* \zeta)}. \quad (29.16)$$

Здесь λ — порядок особенности в нуле, а ζ_n — нули функции Бляшке. Из условия (2) следует, что множество нулей $b(\zeta)$ симметрично относительно оси $\text{Im } \zeta = 0$. Симметрия функций $s(z)$ приводит к симметрии нулей в плоскости ζ относительно точки $\zeta = 0$. Отсюда уже просто установить, что множество нулей $b(\zeta)$ симметрично относительно осей $\text{Im } \zeta = 0$, $\text{Re } \zeta = 0$. Пример такого множества изображен на рис. 64.

Представление (29.16) удобно тем, что в нем независимые параметры непосредственно связаны с такими физическими характеристиками системы сталкивающихся ча-

стиц, как положения и ширины резонансов или массы связанных состояний. Число особенностей может быть и бесконечным. Возникающие при этом ограничения на ζ_n хорошо изучены (Маркушевич (1950)). Окончательно получаем частное решение задачи в виде

$$S(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} b[\zeta(z)]. \quad (29.17)$$

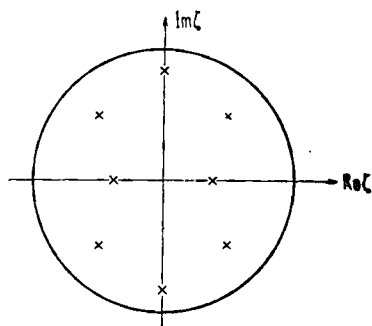


Рис. 64.

Риманова поверхность этой функции двулистка, что очевидно из формулы (29.14).

Общий вид столбца $S(z)$ определяется двумя функциями. Ввиду линейности соотношений (29.12) эти функции обладают свойствами

$$s^*(z) = s(z^*); \quad a^*(z) = a(z^*). \quad (29.18)$$

Условие унитарности приводит к тому, что имеют место равенства

$$|s(\omega) - 2a(\omega)|^2 = |s(\omega) + a(\omega)|^2 = 1. \quad (29.19)$$

Предположим, что решение (29.19) существует. Тогда уравнение (29.19) определяет две единичные окружности с центрами в точках $2a(\omega)$, $-a(\omega)$. Очевидно, что окружности пересекаются, т. е. уравнения (29.19) совместны, не при любом отношении $s(\omega)/a(\omega)$. Из (29.19) имеем

$$\left| \frac{s}{a} - 2 \right|^2 = \left| \frac{s}{a} + 1 \right|^2, \quad (29.20)$$

$$|s + a|^2 = 1. \quad (29.21)$$

В плоскости $s(\omega)/a(\omega)$ (29.20) есть уравнения двух окружностей (рис. 65) одинакового радиуса, точки пересечения которых определяются условием

$$\frac{s}{a} + \left(\frac{s}{a} \right)^* = 1. \quad (29.22)$$

Это условие может быть получено из (29.20) и чисто алгеб-

раически. Оно справедливо для $\omega > 1$. В силу нечетности функции $s(\omega)/a(\omega)$ правая часть (29.22) меняет знак при $\omega < -1$. Введем обозначение

$$\Phi(z) = \frac{s(z)}{a(z)}.$$

Тогда из условия унитарности следует, что в (29.22) фигурирует величина $\Phi^{(+)}(\omega) = \Phi(\omega + i0) = \frac{s(\omega + i0)}{a(\omega + i0)}$.

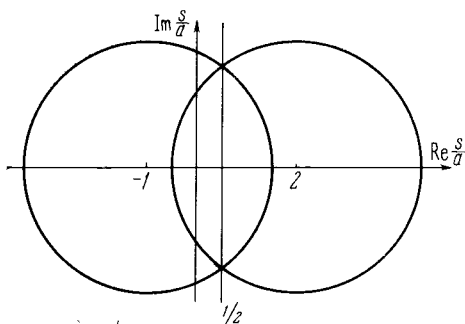


Рис. 65.

Воспользовавшись уравнениями (29.18), получим $(s(\omega)/a(\omega))^* = \Phi^{(-)}(\omega) = \Phi(\omega - i0)$. Окончательно (29.22) записывается в виде

$$\Phi^{(+)}(\omega) + \Phi^{(-)}(\omega) = \pm 1, \quad \omega > 1, \quad \omega < -1. \quad (29.23)$$

Уравнение (29.23) представляет собой хорошо известную линейную краевую задачу Римана; методы решения ее изложены, например, у Гахова (1963). В нашей постановке $\Phi(z)$ — произвольная нечетная мероморфная функция, поэтому решение ищется среди более широкого класса функций, чем обычно. Определим новую функцию

$$G(z) = \frac{\Phi(z)}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad (29.24)$$

где под $\sqrt{z^2 - 1}$ понимается выбранная выше ветвь двузначной функции, подчиняющаяся (29.5). Для $G(z)$ легко установить свойства

$$G^*(z) = -G(z^*), \quad -G(-z) = G(z) \quad (29.25)$$

и показать, что на разрезах она подчиняется уравнению

$$G^{(+)}(\omega) - G^{(-)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}}. \quad (29.26)$$

Частное решение (29.26) находится с помощью теоремы Коши, примененной к функции $G(z)$ вдоль контура C (рис. 44). Оно имеет вид

$$G_0(z) = \frac{z}{\pi i} \int_1^{\infty} \frac{d\omega'}{\sqrt{\omega'^2 - 1}(\omega'^2 - z^2)} = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsin} z. \quad (29.27)$$

Будем искать общее решение в виде

$$G(z) = G_0(z) + i\beta(z).$$

Тогда $\beta(z)$ определяется уравнением

$$\beta^{(+)}(z) - \beta^{(-)}(z) = 0,$$

т. е. $\beta(z)$ является произвольной мероморфной функцией. Возвращаясь к функции $\Phi(z)$, получаем общее решение уравнения (29.23):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsin} z + i \sqrt{z^2 - 1} \beta(z), \quad (29.28)$$

причем

$$\beta(z) = -\beta(-z), \quad \beta^*(z) = \beta(z^*).$$

Интересно отметить геометрический смысл частного решения (29.23)

$$w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsin} z, \quad w + w^* = \pm 1. \quad (29.29)$$

В комплексной плоскости w (29.29) суть уравнения двух прямых, параллельных мнимой оси (рис. 66). Пусть частное решение будет аналитической функцией z в плоскости с разрезами. Отсюда следует, что оно должно осуществлять конформное преобразование односвязной области плоскости z (плоскость с разрезами) на односвязную область плоскости w (рис. 66). Антисимметрия функции $\Phi(z)$ однозначно показывает, что этой областью в плоскости w является полоса, ограниченная линиями $\operatorname{Re} w = \pm 1/2$. Теперь легко убедиться в том, что искомая аналитическая функция z совпадает с $w(z)$ из (29.29).

Так как отношение $s(z)/a(z)$ известно (29.28), то решение уравнения (29.21) сводится к нахождению, например, функции $a(z)$. Будем искать решение как функцию w .

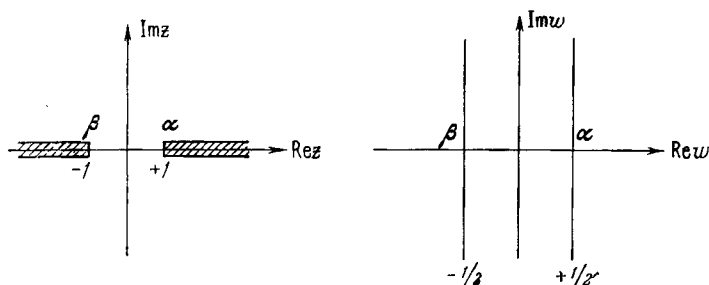


Рис. 66.

Встречавшиеся выше функции z и $q(z)$ выражаются через новую переменную следующим образом:

$$z = \sin \pi w, \quad q(z) = i \cos \pi w. \quad (29.30)$$

Любая мероморфная функция z перейдет при замене (29.30) в мероморфную же функцию w . Порядок роста целых функций при этом меняется. Например, простейшая целая функция z , имеющая полюс первого порядка на бесконечности, в плоскости w также будет целой функцией w , но первого порядка.

В новой переменной w имеем

$$\Phi [z(w)] = w + \beta_0(w), \quad (29.31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_0(w) = \cos \pi w \beta(\sin \pi w), \quad \beta_0(w) = \beta_0(w+1), \\ \beta_0(-w) = -\beta_0(w), \quad \beta_0^*(w) = \beta_0(w^*). \end{aligned} \right\} \quad (29.32)$$

Формулы (29.31) и (29.32) показывают, что двузначные в плоскости z функции превращаются в плоскости w в периодические. Введем еще одну функцию

$$\varphi(w) = s[z(w)] + a[z(w)]. \quad (29.33)$$

Из соотношений (29.18) и (29.21) следует, что $\varphi(w)\varphi(w^*) = 1$. Воспользовавшись определением (29.29), получим функциональное уравнение для $\varphi(w)$:

$$\varphi(w)\varphi(1-w) = 1. \quad (29.34)$$

Кроме того, $a [z(w)] = \varphi(w)/(w + \beta_0(w) + 1)$ является нечетной функцией z , а значит и w . Окончательно для определения $\varphi(w)$ находим два функциональных уравнения:

$$\varphi(w) \varphi(1-w) = 1, \quad \frac{\varphi(w)}{w + \beta_0(w) + 1} = - \frac{\varphi(-w)}{-w - \beta_0(w) + 1}. \quad (29.35)$$

Для решения уравнений (29.35) их достаточно прологарифмировать. Тогда первое из них дает $\varphi(w) = \exp \{g(w - 1/2)\}$, где $g(z)$ — любая антисимметричная функция своего аргумента. Окончательное решение имеет вид

$$\varphi(w) = \frac{w + \beta_0(w)}{w + \beta_0(w) + 1} e^{h(w-1/2)}, \quad (29.36)$$

где

$$h(w) + h(-w) = 0, \quad h(w) + h(w+1) = 0.$$

Периодичность функции $h(w) = h(w+2)$ наводит на мысль о том, что она является мероморфной функцией z на двулистной римановой поверхности. Этот факт можно установить прямым вычислением. Однако более удобно вернуться к переменной z . Для этого положим

$$D(w) = e^{h(w-1/2)}$$

и, пользуясь свойствами $h(w)$, установим, что $D(w)$ обладает следующими свойствами:

$$D(-w) = D(w), \quad D(w) D(1-w) = 1.$$

Переходя к переменной z , получим для $d(z) = D[w(z)]$:

$$d(-z) = d(z), \quad |d(z)|^2 = 1. \quad (29.37)$$

Теперь легко убедиться в том, что условия (29.37) совпадают с таковыми для функции $s(z)$, определенной (29.13). Следовательно, общий вид $d(z)$ дается формулой (29.16) и

$$d(z) = b [\zeta(z)]. \quad (29.38)$$

После подстановки (29.36) в (29.12) получим искомое выражение для $S(w)$:

$$S(w) = \left(\frac{w + \beta_0(w) - 2}{w + \beta_0(w) + 1} \right) \frac{w + \beta_0(w)}{[w + \beta_0(w)]^2 - 1} D(w). \quad (29.39)$$

Особенности $S(w)$, обусловленные $D(w)$, были подробно проанализированы выше. Они есть не что иное, как неоднозначности типа КДД-полюсов, каждый из которых задается двумя параметрами. Из формул (29.39) следует, что эти неоднозначности возникают в обеих парциальных волнах одновременно.

Оставшаяся часть $S(w)$ зависит от произвольной мероморфной функции $\beta_0(w)$. Функция $\beta_0(w)$ осуществляет связь между парциальными волнами $S_1(w)$, $S_3(w)$. Анализ этой части $S(w)$, зависящей от $\beta_0(w)$, удобно проводить в комплексной плоскости w . Полюсы и нули $S(w)$ определяются уравнениями

$$w + \beta_0(w) + n = 0, \quad n = 0, \pm 1, -2. \quad (29.40)$$

Воспользовавшись свойством периодичности $\beta_0(w)$ (29.32), уравнения (29.40) можно привести к виду

$$w + n + \beta_0(w + n) = 0, \quad (29.41)$$

из которого следует, что для определения корней уравнений (29.40) достаточно решить одно из них, например с $n = 0$:

$$w + \beta_0(w) = 0. \quad (29.42)$$

Корни уравнения (29.41), а следовательно, и уравнения (29.40) сдвинуты по отношению к корням уравнения (29.42) на величину $-n$.

Рассмотрим отношение $\frac{w + \beta_0(w)}{w + \beta_0(w) - 1}$, которое входит в $S_3(w)$. Очевидно, что нули знаменателя сдвинуты на 1 по отношению к нулям числителя. Иначе говоря, полюсы и нули этого отношения симметричны относительно линии $\text{Re } w = 1/2$, которая является образом правого разреза плоскости ω (разрез $\omega > 1$). Выражение для $S_1(w)$ содержит дополнительный множитель $\frac{w + \beta_0(w) - 2}{w + \beta_0(w) + 1}$, множество нулей и полюсов которого также симметрично относительно линии $\text{Re } w = 1/2$. Указанная симметрия есть следствие условия унитарности на разрезе $\omega > +1$. Легко убедиться в том, что решение (29.39) удовлетворяет условию кроссинг-симметрии и, как следствие, не унитарно на разрезе $\omega < -1$ или на его образе в плоскости w — линии $\text{Re } w = -1/2$.

Из уравнения (29.42) можно получить следующие свойства множества его корней W :

а) множество W симметрично относительно начала координат,

б) множество W симметрично относительно оси $\text{Im } w = 0$.

Как следствие (а) и (б), множество W симметрично также относительно оси $\text{Re } w = 0$. Поэтому для определения его достаточно найти все корни уравнения (29.42), расположенные в первом квадранте плоскости w , включая его границу.

Дальнейшая детализация свойств множества W возможна лишь при некоторых предположениях относительно $\beta_0(w)$. Ниже будет достаточным предположить, что $\beta_0(w)$ имеет вид

$$\beta_0(w) = \cos \pi w \frac{P(\sin \pi w)}{Q(\sin \pi w)}, \quad (29.43)$$

что соответствует следующему предположению о виде функции $\beta(\omega)$:

$$\beta(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Здесь P и Q — полиномы по ω с действительными коэффициентами, один из которых является нечетной функцией ω . Тогда уравнение (29.42) приводится к виду

$$w \cdot Q(\sin \pi w) + \cos \pi w \cdot P(\sin \pi w) = 0. \quad (29.44)$$

Исследование нулей уравнения (29.44) было проведено Понтрягиным (1942).

29.3. Построение формул, описывающих экспериментальные данные по s -фазам πN -рассеяния. Оно сводится к установлению вида функций P , Q и D . Прежде всего необходимо обеспечить наличие при малых q следующих разложений:

$$\delta_i = a_i q + \dots, S_j(\omega) = 1 + ia_j q + \dots, \quad (29.45)$$

которые определяются требованием того, чтобы формулы (29.39) определяли s -фазы. Разрешая уравнения (29.39)

относительно функций $\beta_0(w)$ и $D(w)$, получим

$$\left. \begin{aligned} w + \beta_0(w) &= \frac{2S_3(w) + S_1(w)}{S_3(w) - S_1(w)}, \\ D(w) &= S_3(w) \frac{2S_1(w) + S_3(w)}{S_1(w) + 2S_3(w)}. \end{aligned} \right\} \quad (29.46)$$

Из (29.46) и (29.45) следуют разложения

$$\left. \begin{aligned} \beta(z) &= \frac{i}{q^2(z)} \left[\frac{3}{a_3 - a_1} + O(z-1) \right], \\ d(z) &= 1 + iq(z) \left[\frac{1}{3}(a_1 + 2a_3) + O(z-1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29.47)$$

Очевидно, что, исходя из (29.47), в качестве $\beta(z)$ удобно выбрать следующее выражение:

$$\beta(z) = \frac{z}{z^2 - 1} R(z); \quad R(z) = R(-z), \quad R^*(z) = R(z^*). \quad (29.48)$$

В силу четности $R(z)$ можно понимать как полином от z^2 . Дальнейший выбор функций $\beta(z)$ и $d(z)$ должен целиком базироваться на экспериментальных данных, которые указывают на то, что между фазами $\delta_i(\omega)$ существует соотношение

$$|\delta_1(\omega) + 2\delta_3(\omega)| \ll \delta_1(\omega) - \delta_3(\omega). \quad (29.49)$$

Этому соотношению можно удовлетворить, если, например, положить $d(z) = 1$. Действительно, в этом случае легко получить, что

$$S_j(\omega) = e^{2i\Delta_j(\omega)}, \quad (29.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \Delta_1(\omega) &= \frac{4 \frac{q}{\omega} \left[R(\omega) + \frac{q}{\pi\omega} \ln(\omega + q) \right]}{4 \left[R(\omega) + \frac{q}{\pi\omega} \ln(\omega + q) \right]^2 + 3\omega^2 q^2}, \\ \operatorname{tg} \Delta_3(\omega) &= -\frac{1}{2} \frac{\frac{q}{\omega}}{R(\omega) + \frac{q}{\pi\omega} \ln(\omega + q)}. \end{aligned} \right\} \quad (29.51)$$

Длины рассеяния определяются формулами $a_1 = 1/R(1)$, $a_3 = -1/2R(1)$, т. е. при малых q условие (29.49) вы-

полняется. Предположение о виде $d(z)$ ($d(z) \equiv 1$) приводит к экспериментально проверяемым следствиям. Отношение $S_1(\omega)/S_3(\omega)$ определяет функцию $R(z)$ и не зависит от предположений относительно $d(z)$:

$$R_{1,3}(\omega) = \frac{q}{\omega} \left[\frac{3}{2} \operatorname{ctg}(\delta_1(\omega) - \delta_3(\omega)) - \frac{1}{\pi} \ln(\omega + q) \right]. \quad (29.52)$$

Если $d(z) \equiv 1$, то $R(\omega)$ можно вычислить и из экспериментальных данных по $\delta_3(\omega)$, так как в этом случае имеет место формула

$$R_3(\omega) = \frac{q}{\omega} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \delta_3(\omega) - \frac{1}{\pi} \ln(\omega + q) \right]. \quad (29.53)$$

Очевидно, что функции $R_{1,3}(\omega)$ и $R_3(\omega)$ должны совпадать, если $d(z) \equiv 1$. Результаты их расчета приведены

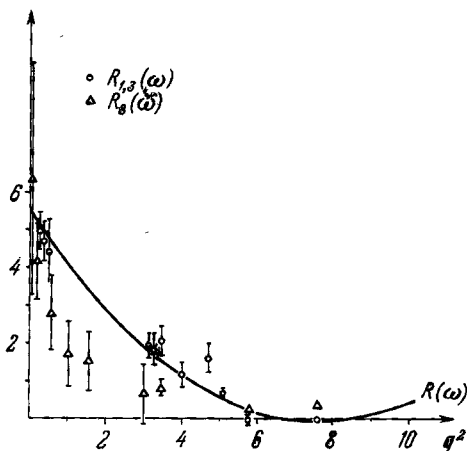


Рис. 67.

на рис. 67. Они ясно указывают на отсутствие равенства функций $R_{1,3}(\omega)$ и $R_3(\omega)$, т. е. $d(z) \neq 1$.

Из формулы (29.39) следует, что при $d(z) \neq 1$ должна существовать такая мероморфная функция $R(z)$, для которой имеет место равенство

$$e^{2i(\delta_1 - \Delta_1)} = e^{2i(\delta_3 - \Delta_3)}, \quad (29.54)$$

где Δ_1 даются формулами (29.51). Равенство (29.54) является следствием условия кроссинг-симметрии, так как именно оно устанавливает связь между парциальными волнами $S_1(\omega)$ и $S_3(\omega)$.

Выбирая для $R(\omega)$ выражение

$$R(\omega) = 5,42 - 1,41 q^2 + 0,089 q^4 \quad (29.55)$$

и аппроксимируя экспериментальные данные по s -фазам формулами (Маккинли (1963))

$$\operatorname{tg} \delta_1 = q(0,172 - 0,04 q^2 + 0,01 q^4),$$

$$\operatorname{tg} \delta_3 = q(0,086 + 0,036 q^2 - 0,003 q^4),$$

можно показать, что равенство (29.54) хорошо удовлетворяется (рис. 68).

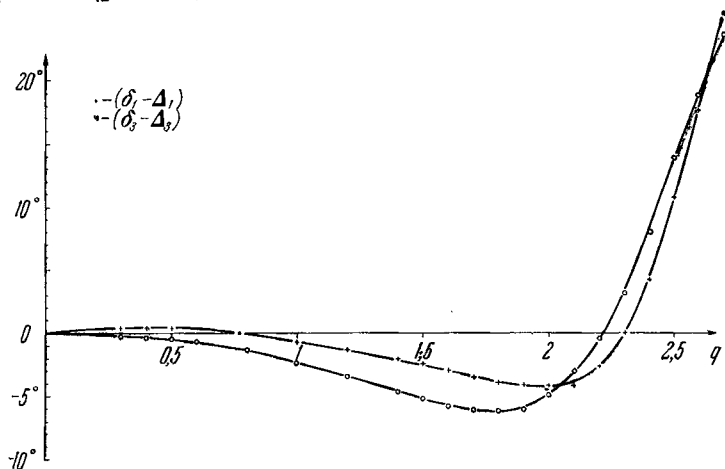


Рис. 68.

Хотя условие кроссинг-симметрии является приближенным, результаты расчета (рис. 68) позволяют надеяться, что с их помощью можно получить удовлетворительное описание s -волн. Исходя из формул (29.14) — (29.17) и вида функций $R_{1,3}(\omega)$ и $R_3(\omega)$, естественно принять для $b[\xi(z)]$ следующее аналитическое

выражение:

$$\left. \begin{aligned} b[\zeta(z)] &= e^{2i\delta(\omega)} = \frac{1 + i \operatorname{tg} \delta(\omega)}{1 - i \operatorname{tg} \delta(\omega)}, \\ \operatorname{tg} \delta(\omega) &= q^{2n+1} (b_0 + b_1 q^2 + b_2 q^4). \end{aligned} \right\} \quad (29.56)$$

Трех коэффициентов b_i достаточно для описания кривой рис. 68. Расположение нулей и минимумов на рис. 68 свидетельствует в пользу предположения о том, что $n = 3$. Заметим, что этот же результат ($\delta \sim q^3$) можно получить и при $n = 0$, если $b_0 = 0$. Поэтому положим ниже $n = 0$.

Таким образом, экспериментальные данные по s-фазам πN-рассеяния анализируются с помощью формул

$$\delta_i(\omega) = \Delta_i(\omega) + \delta(\omega), \quad (29.57)$$

где Δ_i определены формулами (29.51) с

$$R(\omega) = a_0 + a_1 q^2 + a_2 q^4,$$

а

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = q(b_0 + b_1 q^2 + b_2 q^4).$$

В качестве экспериментальных данных взят набор фаз $\delta_i(\omega)$ из работы Маккинли (1963). Последняя рассмотренная точка имеет энергию 460 Мэв в л. с. к. В табл. 5 приведены результаты анализа*). Большое значение χ^2 в первом столбце определяется тремя точками. Вклад в χ^2 каждой из них больше 10. Эти точки расположены относительно кривых $\operatorname{tg} \delta_i/q$ так, что для их описания необходимо введение дополнительных параметров в формулы (29.57). Даже если пытаться провести кривые по этим точкам, то фазы δ_i будут слишком быстро меняться в интервале $2 < q < 2,5$, что не находит подтвер-

*) Используемая нами величина χ^2 определена в общем случае следующим образом:

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{y_{\text{теор}} - y_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{эксп}}} \right)^2,$$

где $\sigma_{\text{эксп}}$ — статистическая ошибка в определении $y_{\text{эксп}}$, а суммирование распространено по всем экспериментальным значениям. Описание экспериментальных точек считается хорошим, если отношение χ^2 к разности числа экспериментальных точек и числа определяемых параметров порядка единицы (Клешиков, Соколов (1964)).

ждения в других способах описания s -фаз πN -рассеяния. Поэтому целесообразно исключить эти точки из анализа. Ими являются следующие: δ_1 при 270 Мэв и δ_3 при 307 и 370 Мэв *). После такого изменения экспериментальных данных величина χ^2 резко падает (второй столбец). При этом все коэффициенты меняются незначительно, кроме b_0 , который падает больше чем на порядок.

Заметим, что ошибка в определении этого коэффициента превышает его величину. Поэтому целесообразно положить $b_0 = 0$, что практически не влияет на значения остальных коэффициентов, но приводит к уменьшению ошибок (третий столбец).

Таблица 5

χ^2	83,3	32,56	32,56
a_0	5,13 ± 0,14	4,91 ± 0,14	4,92 ± 0,14
a_1	-1,27 ± 0,055	-1,12 ± 0,0636	-1,12 ± 0,0633
a_2	0,075 ± 0,0052	0,058 ± 0,00639	0,0584 ± 0,00634
b_0	-0,0034 ± 0,0048	-0,00023 ± 0,0048	0
b_1	-0,0456 ± 0,0046	-0,0493 ± 0,00466	-0,0495 ± 0,00278
b_2	-0,00918 ± 0,00072	0,00955 ± 0,0007	0,00957 ± 0,00051

Исходя из формул (29.57), легко вычислить длины рассеяния:

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &= 0,305 (1 \pm 0,03), \\ a_1 + 2a_3 &= 0. \end{aligned} \quad (29.58)$$

Значения длин рассеяния (29.58) расходятся с результатами других методов, например, значениями, полученными Гамильтоном и Вулкоком (1963). Однако они прекрасно согласуются с последними экспериментальными данными по πN -рассеянию при 35 и 39 Мэв (Дональд и др. (1966)), которые приводят к следующим величинам:

$$\begin{aligned} a_1 - a_3 &= 0,291 \pm 0,013; \quad 2a_1 + a_3 = 0,293 \pm 0,02. \\ & \hspace{15em} (29.59) \end{aligned}$$

Из (29.59) следует, что $a_1 + 2a_3 \approx -0,002 \pm 0,024$.

*) Значения δ при 270, 307 Мэв — Зинов и др. (1960), при 370 Мэв — Уокер и др. (1960).

Новейшие попытки определения длин рассеяния на основе д. с. для рассеяния вперед также приводят к большим значениям $a_1 - a_3$ (Самаранайке, Вулкок (1966)): $a_1 - a_3 = 0,292 \pm 0,020$; $a_1 + 2a_3 = -0,035 \pm 0,012$. (29.60)

Общей чертой последних данных является большая величина разности $a_1 - a_3$, все три приведенных значения которой согласуются между собой. Некоторое отличие в

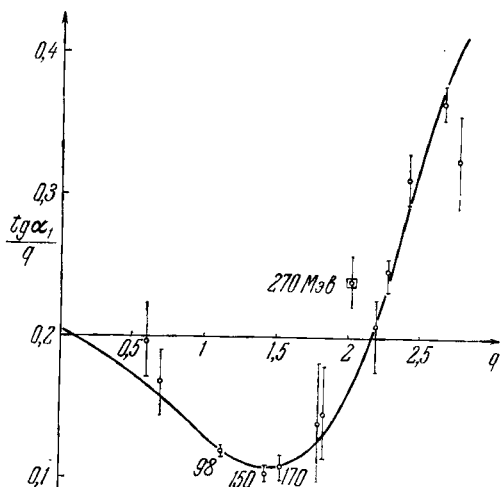


Рис. 69.

значении $a_1 + 2a_3$ может быть обусловлено различным экспериментальным материалом, использованным при получении (29.60). Описание зависимости фазовых сдвигов s-волн от энергии следует признать хорошим, так как $\chi^2/N \approx 1,015$, где N — число степеней свободы распределения χ^2 . Особо нужно отметить, что кривая $\text{tg } \delta_1/q$ хорошо проходит через точки при энергиях 98, 150 и 170 Мэв (рис. 69). Эти экспериментальные значения вызывали большие трудности при описании δ -фаз другими способами (Маккинли (1963)). Таким образом, можно надеяться, что дальнейшие экспериментальные и теоретические работы приведут скорее к подтверждению и уточнению

общего хода кривых $\text{tg } \delta / q$ (рис. 69, 70) и значений длин рассеяния (29.58), чем к опровержению этих результатов.

29.4. Интерпретация полюсов функций $S_i(\omega)$. В процессе получения формул, описывающих экспериментальные данные по s -фазам πN -рассеяния, произвол, содержащийся в уравнениях (29.39), использовался без всяких

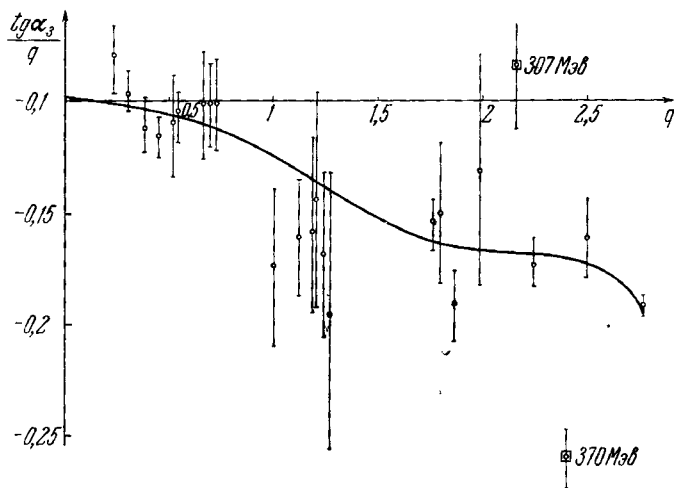


Рис. 70.

ограничений. Поэтому вполне возможно, что окончательные выражения для $S_i(\omega)$ имеют полюсы на физическом листе комплексной плоскости z . Поскольку уточнение экспериментальных данных должно привести к видоизменению параметризации (29.57), то нет особого смысла в исследовании полюсов именно этих формул. Более разумным представляется решение вопроса о смысле полюсов и их интерпретации. Однако сначала мы все же укажем, как в принципе могут быть найдены полюсы.

Для нахождения полюсов $S_i(\omega)$, связанных с функцией $D(\omega)$, удобно представить D в форме (29.16), что легко достигается заменой

$$z = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1}, \quad q(\xi) = i \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}. \quad (29.61)$$

Далее, очевидно, что все полюсы с $|\zeta_n| < 1$ попадут во внутренность единичного круга в плоскости ζ , т. е. на физический лист z .

Определение полюсов, обусловленных функцией $\beta_0(w)$, связано с решением уравнения (29.42), как было показано выше. Из формул (29.39) и (29.41) следует, что на физический лист попадут только те из корней уравнения (29.42), которые расположены в полосах $-3/2 \leq \text{Re } w \leq -1/2$, $1/2 \leq \text{Re } w \leq 3/2$. В силу симметрии множества корней

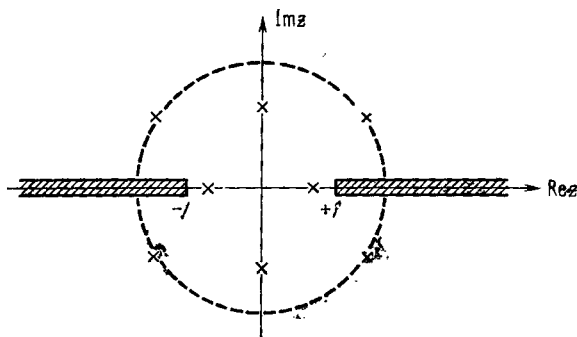


Рис. 71.

уравнений (29.42) для их нахождения достаточно установить все корни, расположенные в полуполосе $\text{Im } w \geq 0$, $1/2 \leq \text{Re } w \leq 3/2$.

Наиболее общее расположение полюсов функций $S_i(z)$, независимо от того, происходят ли они от функции $D(w)$ или $\beta_0(w)$, изображено на рис. 71. Разумеется, конкретное число чисто мнимых, действительных и комплексных полюсов зависит от вида функций $D(w)$ и $\beta_0(w)$. Часть полюсов фактически будет отсутствовать в функции $S_3(z)$: это те полюсы, которые возникли из уравнения (29.40) с $n = +1$, так как им соответствуют нули числителя (29.39), расположенные в тех же точках. Поэтому, строго говоря, на рис. 71 изображено объединение множеств полюсов функций $S_i(w)$. Запишем каждый из элементов этого множества в виде

$$z_n = x_n + iy_n.$$

Тогда любому из множеств такого типа можно поставить в соответствие функцию комплексного переменного z , имеющую в точках z_n полюсы, а именно:

$$\rho(z) = \prod_n \frac{1 - x_n^2}{z^2 - x_n^2} \prod_m \frac{1 + y_m^2}{z^2 + y_m^2} \prod_k \frac{(1 + x_k^2 + y_k^2)^2 - 4x_k^2}{(z^2 + x_k^2 + y_k^2)^2 - 4z^2 x_k^2}. \quad (29.62)$$

Мероморфная функция $\rho(z)$ обладает следующими свойствами:

$$\rho(z) = \rho(-z), \quad \rho^*(z) = \rho(z^*), \quad \rho(1) = 1. \quad (29.63)$$

Поэтому, вспоминая свойства функции источника $u(q^2)$, можно положить

$$\rho(z) = u^2(z^2 - 1). \quad (29.64)$$

Таким образом, формулы (29.62) и (29.64) дают рецепт построения функции источника по заданным матричным элементам $S_j(z)$.

Рассмотрим, далее, вопрос о том, в каком отношении находится изложенная выше количественная теория s -волн πN -рассеяния с аналогичным исследованием, основанным на представлении Мандельштама (§ 26). Для этого связь функций $S_j(z)$ и $h_j(z)$ (29.6) представим в виде

$$\frac{S_j(z) - 1}{2iq(z)} = \rho(z) h_j(z). \quad (29.65)$$

Аналитические свойства функций $\rho(z)$ и $h_j(z)$ определяют таковые для функции $f_j(z) = \frac{S_j(z) - 1}{2iq(z)}$. Установим аналитические свойства последней, исходя из представления Мандельштама. Для этого воспользуемся анализом аналитических свойств парциальных волн в комплексной плоскости s (рис. 49). Заметим, что z и s связаны соотношением

$$z = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{s - M^2 - 1}{2M}. \quad (29.66)$$

Теперь легко получить аналитические свойства функции $f_j(z)$ в плоскости z ; они изображены на рис. 72. Сопоставляя их с аналитическими свойствами той же величины в статической модели, показанными на рис. 71, мы прихо-

дим к выводу: в последней разрез вдоль прямой $\text{Re } z = 0$, возникающий от реакции $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, представлен в виде системы полюсов. Функция $\rho(z)$, построенная по этим полюсам, определяет пространственное распределение

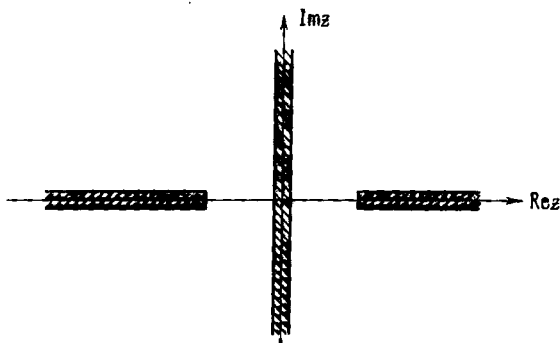


Рис. 72.

источника — нуклона. После изучения электромагнитной структуры нуклона (§ 28) подобная связь разреза от реакции $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ и структуры источника представляется естественной.

Таким образом, рассмотрение s -волн πN -рассеяния в рамках статической модели подтверждает вывод более общего, но математически менее строгого анализа, основанного на представлении Мандельштама, о необходимости учета $\pi\pi$ -взаимодействия для понимания энергетического хода s -волн.

ГЛАВА 6

ИТОГИ И ВЫВОДЫ

§ 30. Анализ теории $\pi\pi$ -взаимодействия

30.1. Общие свойства $\pi\pi$ -решений. Основная цель, которую мы ставили при проведении изложенных в этой книге исследований, состояла в получении количественного описания процессов сильного взаимодействия при низких энергиях. Вместо динамического принципа мы использовали свойства аналитичности, кроссинг-симметрии и унитарности амплитуды рассеяния, сформулированные с помощью представления Мандельштама. При этом оказалось, что условие унитарности перепутывает между собой амплитуды различных процессов. Возникает своеобразная иерархия процессов (рис. 2), причем степень их подчиненности определяется массами участвующих частиц. Вершина, описывающая рассеяние пионов — самых легких из сильно взаимодействующих частиц, — занимает при этом центральное положение. В области низких энергий система соотношений для пион-пионных амплитуд оказывается замкнутой, т. е. не содержит амплитуд каких-либо других процессов. Представление амплитуды рассеяния в виде небольшого числа парциальных волн позволило получить из этих соотношений систему уравнений. Ввиду того, что исходные положения, строго говоря, противоречат друг другу, при выводе уравнений следует использовать приближенные их формулировки. Это дает определенную свободу для спекуляций и приводит к тому, что из одних и тех же основных положений можно получить ряд различных систем уравнений для одного и того же процесса (например, $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$). Неудачный выбор приближений может привести к математически некорректным систе-

мам уравнений. Получение удачных уравнений требует определенного искусства уравнивания нарушений исходных положений. Удачными уравнениями следует считать такие, свойства решений которых находятся в соответствии с характером сделанных приближений.

Использованный нами метод дифференциального приближения позволил получить математически непротиворечивую и сравнительно простую систему уравнений для $\pi\pi$ -рассеяния. Эта система, написанная с одним вычитанием, явно содержит лишь один параметр λ — аналог перенормированной константы связи. Однако общие решения этой нелинейной системы зависят от большого числа произвольных параметров, которые входят в виде параметров КДД. Простейшее решение, не содержащее их, зависит только от λ . Оно не описывает резонансов и фактически представляет собой сумму членов обычной теории возмущений для взаимодействия $\lambda\varphi^4$. Для получения резонансов следует перейти к более сложному решению, причем каждому резонансу соответствуют два параметра КДД — ширина Γ_i и положение ν_i .

Таким образом, рассмотренная схема не дает динамического описания резонансного взаимодействия, т. е. получения резонансов на основе введения в теорию только одной константы пион-пионного взаимодействия λ . В духе нерелятивистской модели Дайсона можно трактовать решения с КДД-параметрами как соответствующие введению нестабильных частиц с массой $m_i \sim \sqrt{\nu_i} > 2\mu$ и константой связи с пионами $g_i \sim \sqrt{\Gamma_i}$, т. е. введению новых короткодействующих сил. Если ν_i и Γ_i достаточно велики, то соответствующее решение не приводит к узкому резонансу. В этом случае можно говорить просто о феноменологических короткодействующих силах, которые оказывают влияние на амплитуду рассеяния пионов при низких энергиях.

В рамках этой схемы КДД-члены такого типа можно вводить не только в низшие парциальные волны, но и в высшие волны. Единственным критерием в этом случае является эксперимент. К сожалению, экспериментальный материал по $\pi\pi$ -рассеянию крайне беден, и достоверных данных об энергетическом поведении парциальных фаз мало.

Мы ограничиваемся простейшей моделью, содержащей p -мезон. Такая модель с неизбежностью содержит также весьма сильное короткодействующее взаимодействие в состоянии $l = 0$, $l = 0$. Оно приводит к большой во всем интервале низких энергий парциальной волне A_0^0 : длина рассеяния a_0 оказывается величиной порядка μ^{-1} , а $\text{ctg } \delta_0^0$ — медленно падающей функцией. Такое поведение фазы δ_0^0 $\pi\pi$ -рассеяния согласуется с нашим анализом s -волн низкоэнергетического πN -рассеяния. Это обстоятельство позволяет относиться к рассматриваемой простой модели с большим доверием.

При выводе низкоэнергетических уравнений основные принципы удалось использовать лишь в приближенной форме.

В результате мы пришли к количественной картине, в которой, однако, константы и даже области взаимодействия не являются однозначно определенными. К сожалению, в настоящее время нет возможности точно математически записать исходные общие принципы в терминах д. с. (такая задача требует знания аналитических свойств высших функций Грина для процессов типа $2\pi \rightarrow 4\pi$ и т. п.).

30.2. Гипотеза «бутстрапа». В настоящее время весьма популярна гипотеза, согласно которой строгие следствия общих принципов могут привести к более однозначному количественному описанию. Эта гипотеза обычно ассоциируется с так называемой «философией бутстрапа». Наиболее оптимистично настроенные сторонники этого направления надеются, что общие принципы должны привести к единственному решению, т. е. к такому описанию мира элементарных частиц, при котором все их характеристики (включая массы, квантовые числа и константы взаимодействия) будут определены однозначно.

В последние годы появилось много работ по программе «бутстрапа», в которых основная программа формулируется в виде ряда более специализированных гипотез. К принятому в книге изложению наиболее близки работы, которые ограничиваются представлениями «низкоэнергетического бутстрапа». Кроме описанных выше (см. § 9) обычных низкоэнергетических предположений, «низкоэнерге-

тический бутстрап» использует еще два следующие положения:

а) левый разрез в уравнениях для парциальных волн, который ассоциируется с силами, обуславливающими взаимодействие, аппроксимируется вкладами от резонансных волн,

б) предполагается, что существуют решения, резонансные свойства которых совпадают с использованными аппроксимациями, т. е. в прямом канале восстанавливаются резонансы с теми же массами и теми же ширинами, что и резонансы, использованные при аппроксимации кроссинг-канала.

Наиболее простой пример использования этой схемы — «рождение» ρ -мезона. В качестве кроссинг-интеграла используется проекция на ρ -состояние графиков, изображенных на рис. 73.

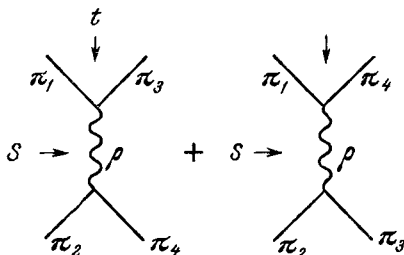


Рис. 73.

В прямом канале делается приближение двухчастичной унитарности и требуется воспроизведение резонанса с массой m_ρ и шириной Γ_ρ . Проблема сводится к решению интегрального уравнения

$$A_1(v) = V(v) + \frac{v}{\pi} \int_0^\infty \frac{K(v') |A_1(v')|^2 dv'}{v'(v'-v)}$$

При этом кроссинг-интеграл $V(v)$ является функцией m_ρ , $v_{\text{вх}}$ и Γ_ρ , $v_{\text{вх}}$, а решение $A_1(v)$ может иметь резонанс в точке m_ρ , $v_{\text{вых}}$ с шириной Γ_ρ , $v_{\text{вых}}$, которые являются функциями m_ρ , $v_{\text{вх}}$ и Γ_ρ , $v_{\text{вх}}$. Требование m_ρ , $v_{\text{вх}} = m_\rho$, $v_{\text{вых}}$ и Γ_ρ , $v_{\text{вх}} = \Gamma_\rho$, $v_{\text{вых}}$ должно определить m_ρ и Γ_ρ . Однако, как и рассмотренные нами уравнения, это уравнение нелинейно и его решения зависят от параметров, которых нет в явном виде в уравнении, — например, от точки вычитания расходящихся интегралов. Поэтому даже в таком простом случае физически однозначное решение получить невозможно. Если вместо точки

нормировки ввести параметр обрезания на высоких энергиях, то решение оказывается чувствительным к этому параметру. Следовательно, низкоэнергетические приближения, лежащие в основе схемы, в решении не воспроизводятся.

Различные вычисления в духе «бутстрапа» отличаются способами аппроксимации левого разреза, способами учета высокоэнергетических вкладов, а также введением неупругих членов в условие унитарности (например, $\rho \rightarrow \rho\omega$).

Наиболее существенным свойством всех решений является их сильная зависимость от области высоких энергий, т. е. той области, где более или менее последовательное истолкование общих динамических принципов еще технически неосуществимо. Поэтому можно считать, что низкоэнергетической теории «бутстрапа» в том виде, в каком ее пытались реализовать, еще нет.

30.3. Модель для амплитуды рассеяния вперед. Возвращаясь к нашей схеме, мы можем теперь предположить, что параметры ρ -модели в принципе возможно объяснить, используя высокоэнергетическую информацию. Для реализации этой программы необходимо найти такую формулировку задачи рассеяния, которая одновременно была бы удобна для описания как области низких, так и высоких энергий. Очевидно, парциальная волна уже не является подходящим объектом исследования, так как небольшим числом парциальных волн нельзя удовлетворительно описать высокоэнергетическое дифракционное рассеяние. Одним из возможных путей исследования здесь является использование стрип-аппроксимации (§ 8.5) совместно с гипотезой полюсов Редже.

Для того чтобы проиллюстрировать степень возможного влияния области высоких энергий на низкоэнергетические характеристики рассеяния, рассмотрим простую модель, основанную на представлениях, изложенных в § 11.1, для амплитуды рассеяния вперед $f(v, 1)$ нейтральных псевдоскалярных мезонов. Эта амплитуда удовлетворяет очевидным д. с. и условиям кроссинг-симметрии (11.4). Условие унитарности выберем в виде (11.1), где фактор $K(v)$ в области высоких энергий модифицируем так, чтобы условие (11.1) находилось в соответствии с постоянным полным

сечением σ_∞ , т. е. положим

$$K(\nu) \Big|_{\nu \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{4\pi}{\nu\sigma_\infty}.$$

Исследование этой модели (Ширков (1965)) показывает, что значение амплитуды в точке симметрии $f(-1/2, 1) = \Lambda$ ограничено, причем $\Lambda_{\max} > 0$, $\Lambda_{\min} < 0$. Решения, отвечающие $0 < \Lambda < \Lambda_{\max}$, находятся в близком соответствии с решениями нейтральной модели для s -волны (§ 11), отличаясь от них наличием дополнительного параметра, описывающего положение нуля в комплексной плоскости (на мнимой оси в переменных z), и при определенном выборе этого параметра их низкоэнергетическое поведение практически не отличается от даваемого (11.24). В то же время решения, отвечающие $\Lambda_{\min} < \Lambda < 0$, не имеют аналога в упругой модели. Они, в частности, могут приводить к отрицательным длинам рассеяния.

30.4. Проблема замкнутости низкоэнергетического описания. Мы видим, таким образом, что влияние высокоэнергетических эффектов может приводить также к существенному изменению представлений о низкоэнергетических характеристиках рассеяния. Эти изменения обусловлены появлением в решениях новых параметров (типа указанного выше нуля в комплексной плоскости), имеющих чисто высокоэнергетическое происхождение. Поэтому успех того или иного низкоэнергетического приближения зависит от степени влияния таких высокоэнергетических параметров на низкоэнергетическое рассеяние. Критерием здесь является только эксперимент.

Если построить модель типа только что описанной для пион-пионного рассеяния, то мы, в частности, получим нарушение «правила сумм» (13.7), ограничивающего полную ширину ρ -мезона.

Современные экспериментальные данные ($\Gamma_{\text{полн}}^{\rho} \approx \approx 100 \text{ Мэв}$) превышают эту полную ширину (которая, с учетом влияния f_0 -мезона, согласно (17.11) равна $(\Gamma_{\text{полн}}^{\rho})_{\text{теор}}^{\rho} \sim \sim 60 \text{ Мэв}$). Если эти данные существенно не изменятся в дальнейшем, то это будет означать, что высокоэнергетические (включая неупругие) эффекты вносят существенные поправки в построенную низкоэнергетическую схему для пион-пионного рассеяния.

§ 31. Некоторые выводы о πN -взаимодействии

В отличие от $\pi\pi$ -взаимодействия, πN -рассеяние при низких энергиях изучено достаточно хорошо. Попытки теоретического осмысления этого процесса начались довольно давно. Обилие и точность экспериментальных данных позволяют проследить взаимосвязь между моделями, описывающими различные аспекты этого взаимодействия.

Д. с. для p -волн πN -рассеяния, известные под названием уравнений Чу — Лоу (1956), позволили впервые понять резонансный характер волны f_{33} и относительную малость остальных p -волн. Формула Чу — Лоу дала возможность хорошо описать фазу δ_{33} вплоть до резонанса и определить значение константы связи f^2 . Небольшая ее модификация, состоящая в использовании улучшенной кинематики и учете конечных размеров нуклона, раздвигает рамки ее применимости до 600 Мэв.

Следующий важный этап связан с д. с. при фиксированном значении передачи импульса t . Для рассеяния вперед они могут быть проверены путем сравнения с экспериментом и, по-видимому, хорошо выполняются до ~ 20 Гэв. Поэтому принципы, заложенные при строгом доказательстве аналитических свойств амплитуды рассеяния, получают экспериментальное подтверждение. Тем более важной явилась работа Чу, Гольдбергера, Лоу, Намбу (1957) (ЧГЛН), в которой на основе д. с. для фиксированного значения t были получены уравнения для парциальных волн. Они были выведены методом, которому выше присвоено название «дифференциального приближения». Говоря более точно, дифференциальное приближение есть применение метода ЧГЛН к амплитуде рассеяния, заданной представлением Мандельштама.

Фактически в работе ЧГЛН изучалось влияние (3,3)-резонанса на s -, p - и d -волны πN -рассеяния. Однако этот метод дает возможность получить сами уравнения для этих волн. Уравнения для s -волн были выписаны авторами упомянутой работы. Можно сказать, что ЧГЛН показали, как из д. с. для релятивистски инвариантных функций $A(\pm)$, $B(\pm)$ в статическом пределе ($1/M \rightarrow 0$) получают уравнения Чу — Лоу. В процессе получения последних были использованы следующие приближения:

- 1) д. с. без вычитания,
- 2) приближенный способ выделения парциальных волн,
- 3) переход к статическому пределу, т. е. использование разложения по $1/M$, $q/M \rightarrow 0$.

В ряде последующих работ изучалась законность предположений (1), (2). Так, было показано, что использование предположения (1) при вычислении борновского члена в $\text{Re } f_s^{(-)}$ дает 20%-ную ошибку для π -мезонов с энергией $E_{\text{л.с.к}} - \mu c^2 \approx 200 \text{ Мэв}$ (Хёлер и Дитц (1960)). В целом предположения (1), (2) могут дать еще большие ошибки. Эти результаты приводят к выводу о том, что лучше избегать (1) и (2). Однако возможна и другая точка зрения. Суть ее состоит в том, что использование предположений (1) — (3) позволяет «вывести» уравнения для отдельных s -, p -, ... парциальных волн. Как и всякий «вывод» физических уравнений, данный вывод условен (см. ЧГЛН, стр. 343).¹ Поэтому может оказаться, что полученные уравнения не так уж плохи. Для того чтобы подтвердить эту точку зрения, нужно проанализировать следствия уравнений для парциальных волн возможно более строго. Такая работа была проделана, на наш взгляд, только для парциальной амплитуды f_{33} .

Дальнейший прогресс в понимании πN -рассеяния связан с использованием представления Мандельстама. Д. с. при фиксированном t привели в статическом пределе к формулам для s -волн, плохо описывающим энергетический ход фаз (§ 22). Чини и Фубини впервые указали на то, что это связано с отбрасыванием $\pi\pi$ -взаимодействия (Чини (1960)).

Учет этого взаимодействия был произведен Боукоком, Коттингэмом и Лурье (БКЛ) (1960) на основе приближения Чини — Фубини. Они вычислили в статическом пределе амплитуду πN -рассеяния (узла $\pi\pi NN$) с учетом одноуклонного члена (3,3)-резонанса и ρ -мезонного резонанса. Для получения согласия с экспериментом было проведено вычитание в д. с. для $A^{(+)}$ и $B^{(-)}$. Положение ρ -мезона и одна из констант его взаимодействия с нуклонными и мезонными полями определялись из изовекторной части нуклонного формфактора (26.16). На таком пути удалось объяснить поведение амплитуд рассеяния в широкой энергетической области.

Несколько раньше в рамках аналогичных приближений Фрэзер и Фулко (1960) (ФФ) показали важность учета $\pi\pi$ -взаимодействия для анализа электромагнитных формфакторов нуклона. Они первые предсказали существование ρ -мезонного резонанса, который был впоследствии обнаружен экспериментально.

Работы ФФ и БКЛ имеют один общий недостаток: авторы их вынуждены использовать разложения амплитуд процессов по угловым переменным вне области их сходимости. Это приводит к тому, что расходящимся рядам приписываются конечные значения, которые затем определяются из эксперимента. Несмотря на этот недостаток, указанные работы имеют большое значение, так как они впервые продемонстрировали возможности представления Мандельстама.

Впоследствии появился ряд исследований, посвященный уточнению работ ФФ и БКЛ. Были учтены релятивистские поправки, и оказалось, что они уменьшают ту часть функции $\text{Re } f_s^{(-)}$, которая обусловлена $\pi\pi$ -взаимодействием (Карасси и Пассаторе (1962)). Однако пренебречь им полностью не удастся. В результате параметры, характеризующие $\pi\pi$ -взаимодействие, меняют свои значения. Тем не менее их удастся согласовать со значениями, полученными другими методами. Что касается электромагнитных формфакторов нуклона, то вместо использования дельтаобразного приближения для вычисления $\text{Im } F_1^{(+)}(t)$ можно провести интегрирование. При этом также удастся достичь согласия с экспериментом (Грашин, Мельников (1962)).

Поэтому многочисленные работы по анализу πN -рассеяния и электромагнитным формфакторам нуклонов приводят к выводу о том, что качественная картина πN -рассеяния верна. Она лучше всего иллюстрируется на языке низших порядков теории возмущений подобно тому, как интерпретировались члены, ответственные за $\pi\pi$ -взаимодействие (§ 26.4). Характерная и новая черта этой картины — наличие сильного $\pi\pi$ -взаимодействия, приводящего, например, к ρ -мезонному резонансу. Качественной же ее следует признать потому, что в силу большого числа приближений представление Мандельстама для πN -вза-

имодействия, как правило, не приводит к формулам, допускающим количественную экспериментальную проверку, поскольку при этом возникают расхождения при определении одной и той же величины разными методами (§ 28.2).

Перечисленные трудности можно еще проиллюстрировать на примере (3,3)-резонанса. Уже в теории Чу — Лоу положение этого резонанса являлось параметром теории. Он определялся видом функции распределения фиксированного источника. Представление Мандельстама позволило установить, что влияние $\pi\pi$ -взаимодействия на парциальную волну f_{33} мало. Если на основании этого представления изучить аналитические свойства $f_{33}(W)$ в комплексной плоскости W (полной энергии), а потом из всех нефизических особенностей учесть только полюсные члены, то без введения обрезания резонанс возникает при 10 $M_{\pi\pi}$ (Фраучи и Валека (1960)). При этом перехода к статическому пределу не делается. Напомним, что экспериментальное значение положения резонанса 195 $M_{\pi\pi}$. Решение той же задачи другим методом, но также без перехода к статическому пределу, с учетом тех же полюсных членов приводит к резонансу при 500 $M_{\pi\pi}$ (Боли и др. (1961)). Отсюда следует, что необходимость введения обрезания вызвана переходом к статическому пределу. Отказ от статического предела приводит к тому, что положение резонанса зависит от высокоэнергетических вкладов (на языке потенциалов — короткодействующих сил), которые в настоящее время сколько-нибудь точно не вычисляются. Таким образом, происхождение (3,3)-резонанса становится более ясным, но положение его не поддается теоретическому обоснованию.

Кроме проблемы изучения низкоэнергетического поведения узла πN , можно задаться более частной задачей: определить из данных по πN -рассеянию фазы $\pi\pi$ -рассеяния, не делая при этом попыток объяснить энергетический ход πN -фаз. Такая задача может быть решена модифицированным методом Гамильтона. Сам метод Гамильтона и присущие ему трудности были разобраны выше (§ 24.2). Модификация состоит прежде всего в том, что аналитические свойства функций $\Phi(\alpha, B^{(-)}, A^{(+)}, \beta)$ изучаются в комплексной плоскости v , а не s . Это приводит к тому, что при $c = \cos \theta = -1$ единственным нефизическим разрезом

для πN -рассеяния является разрез от процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ (§ 25.2). Поэтому естественно вместо «разностей» для парциальных волн рассматривать разности самих функций Φ , что и составляет вторую черту модификации. Не будет преувеличением сказать, что это есть применение идеологии «разностей» в дифференциальном методе. Дальнейшее исследование завершается так: с помощью данных фазового анализа вычисляется «разность», т. е.

$$\Delta_{\Phi}(v) = \Phi(v, -1) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Im } \Phi(v', -1)}{v' - v} dv',$$

для положительных значений v . Функция $\Delta_{\Phi}(v)$ имеет единственный разрез при $v \leq -1$. Фаза ее на этом разрезе отвечает π -рассеянию. Поэтому с помощью конформного преобразования значение $\Delta_{\Phi}(v)$ при $v > 0$ можно продолжить на $v \leq -1$ и тем самым определить фазы $\delta_{\pi\pi}$. Полученные таким образом результаты согласуются с результатами других методов. Однако в единственной работе (Аткинсон (1962)), выполненной модифицированным методом «разностей», использовано неправильное конформное преобразование, вследствие чего трудно придавать этому согласию большое значение. Проведенное в главе 5 рассмотрение узла πN по духу наиболее близко к работе ФФ и БКЛ. Оно отличается от них тем, что дифференциальный метод позволил в этом случае обойтись без использования рядов по угловым переменным вне их области сходимости. Более точный по сравнению с этими работами учет условия унитарности привел нас к выражениям, справедливым в некоторой области комплексного переменного v , включающей как часть физической области πN -рассеяния, так и часть нефизической области процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$. Это дало возможность говорить об одновременном описании низкоэнергетической области πN -рассеяния и электромагнитной структуры нуклона. В этом, очевидно, и заключается наиболее сильная сторона дисперсионного подхода на основе представления Мандельстама: он дает возможность обоснованно вводить феноменологические параметры в различные процессы и устанавливать соотношения между этими параметрами. Последовательность

таким образом связанных между собой процессов уже обсуждалась в главе 1 и изображена в виде иерархической схемы (рис. 2). Мы проследили существующие связи по основной линии между процессами $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ и $\pi N \rightarrow \pi N$. При этом был использован один и тот же метод — дифференциальное приближение, — который привел нас к согласованным выводам. Кроме того, были прослежены связи и по линии электромагнитной структуры π -мезона ($\gamma\pi\pi$ -узел) и нуклона (γNN -узел).

На языке теории поля все перечисленные процессы объединены тем, что в их основе лежит единый лагранжиан взаимодействия, а именно:

$$L_{\text{int}} = g\bar{\psi}(x)\gamma_5\tau_i\psi(x)\varphi_i(x) + h[\varphi_i(x)\varphi_i(x)]^2, \quad (31.1)$$

который принадлежит к числу перенормируемых. Трудность изучения процессов на его основе состоит в том, что перенормированная константа g имеет большое значение: $g^2/4\pi \approx 14$. Соответствующая константа h , по-видимому, также не мала. Поэтому теория возмущений неприменима к лагранжиану взаимодействия (31.1), а других методов вычислений не существует. Однако если верить в существование динамической теории на базе лагранжиана взаимодействия (31.1), то все рассматриваемые нами процессы должны определяться значениями масс M и μ и константами связи g и h . Часто вместо g используют соответствующую константу псевдовекторного взаимодействия

$$f^2 = \frac{1}{4\pi} \left(g \frac{\mu}{2M} \right)^2 \approx 0,08.$$

Зависимость некоторых величин от f удается проследить с помощью дисперсионного подхода. Так, например, ширина (3,3)-резонанса Γ_{33} равна

$$\Gamma_{33} \approx \frac{8f^2}{3} q_r^3 u(q_r^2).$$

Положение резонанса $\omega_r = \sqrt{1 + q_r^2}$ является параметром теории. Функция $u(q^2)$ неизвестна. При $q = 0$ она равна 1 и для небольших q^2 немного отличается от единицы. Детали ее поведения зависят от структуры источника π -нуклона, т. е. от $\pi\pi$ -взаимодействия. Однако в дисперсионном подходе эти зависимости не вскрываются.

Что касается длин рассеяния, то можно утверждать, что очевидные с точки зрения теории возмущений зависимости

$$a_{2T, 2I} \approx k_{2T, 2I} f_r^2$$

содержатся в дисперсионном подходе. Однако он может предсказать только два из коэффициентов:

$$k_{1,1} - k_{1,3} \approx 1, \quad k_{3,3} \approx \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\omega_r}\right).$$

Далее, если вспомнить формулы (28.23), то ясно, что зависимость коэффициентов $c_{i,\rho}^{(v)}$ в модели формфакторов (28.21), (28.22) от параметров t_r линейна. Для параметра $c_{1,\rho}^{(v)}$ справедливо более сильное утверждение:

$$c_{1,\rho}^{(v)} \approx -\frac{2}{3} f^2 t_r.$$

Все сказанное, нам кажется, подтверждает мысль о том, что дисперсионный подход позволяет выявить ряд важных соотношений между взаимосвязанными процессами и дать качественное описание явлений с помощью нескольких параметров. Что же касается строго количественного подхода, то он потребует большой дополнительной работы. Весьма вероятно также, что количественное описание рассмотренных нами явлений потребует выхода за рамки дисперсионного подхода. Однако можно надеяться, что ряд установленных выше общих черт процессов сильных взаимодействий сохранится и при дальнейшем развитии теории.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Двигаясь по ветвям низкоэнергетического иерархического дерева (рис. 2), мы подробно рассмотрели узел первого этажа ($\pi\pi\pi\pi$), а также два узла второго этажа ($\pi\pi NN$) и ($\eta\pi\pi\pi$). На основании сформулированных вначале принципов мы не смогли получить однозначного количественного описания для этих процессов. Получаемые решения характеризуются большим числом произвольных параметров. Единственным критерием для выбора этих параметров является эксперимент.

В реакции $\pi N \rightarrow \pi N$, для которой имеется много экспериментальных данных, удастся не только определить параметры, возникающие в уравнениях узла ($\pi\pi NN$), но также сделать заключение о входящих в них параметрах первого этажа, т. е. фазах $\pi\pi$ -рассеяния. В реакции $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ из-за скудности экспериментального материала не удастся полностью фиксировать все параметры (в частности, параметры, определяющие так называемый « σ -мезон», т. е. s -волну в канале $I = 0$). В наиболее плачевном состоянии находится узел ($\eta\pi\pi\pi$), в котором из-за отсутствия экспериментальных данных почти ничего не удастся фиксировать.

Ясно, что в этих условиях целесообразность дальнейшего продвижения по ветвям дерева является по меньшей мере проблематичной.

Возникновение этих произвольных параметров обусловлено той математической моделью, с помощью которой сформулированы исходные физические представления. Небольшие модификации математического описания (например, несколько иные аппроксимации условий унитарности или кроссинг-симметрии) не могут привести к

существенному изменению общего положения. Для этого необходим по крайней мере выход за рамки низкоэнергетических представлений, например, путем согласования высокоэнергетической информации с низкоэнергетическими амплитудами с помощью стрип-аппроксимации.

По нашему мнению, до тех пор, пока используемые основные положения не включают представлений о внутренних связях сильно взаимодействующих частиц, дисперсионные схемы рассмотренного типа неизбежно будут оставаться на уровне полуфеноменологических моделей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1*)

Используя (2.6), амплитуду T представим в виде

$$T(k, \theta) = \lambda \int e^{-ik_r x} U(x) e^{ik_i x} dx + \\ + \lambda^2 \int e^{-ik_r x} U(x) G(x, y, k^2) U(y) e^{ik_i y} dx dy. \quad (\text{П.1.1})$$

Если теперь рассматривать $\text{Im } T(k, \theta)$, то первый интеграл из-за действительности потенциала вклада не дает. Поэтому мы будем исследовать только второй интеграл. В выражении (П.1.1) важно то, что функция $G(x, y, k^2)$ не зависит от направления вектора k . Поэтому оказывается возможным провести интегрирование по одному из углов в явном виде. Выберем следующую систему координат:

$$k_i = k(1, 0, 0), \\ k_r = k(\cos \theta, \sin \theta, 0), \\ x = x(\sin \beta_1 \cos \alpha_1, \sin \beta_1 \sin \alpha_1, \cos \beta_1), \\ y = y(\sin \beta_2 \cos \alpha_2, \sin \beta_2 \sin \alpha_2, \cos \beta_2).$$

Полярная ось перпендикулярна к плоскости, содержащей векторы k_i и k_r . Функция $G(x, y, k^2)$ зависит от x^2, y^2 и $xy \cos \theta_{12} = xy [\cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]$. Введем теперь переменные интегрирования $\chi = \alpha_1 - \alpha_2$ и α_1 . Второй интеграл I_2 в (П.1.1) примет вид

$$I_2 = \int_0^\infty x^2 dx \int_0^\infty y^2 dy \int_0^\pi \sin \beta_1 d\beta_1 \int_0^\pi \sin \beta_2 d\beta_2 \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} d\alpha_1 \times \\ \times e^{-ik_r x \sin \beta_1 \cos(\theta - \alpha_1)} U(x) G(x, y, \theta_{12}, k^2) U(y) e^{ik_i y \sin \beta_2 \cos(\chi - \alpha_1)}. \quad (\text{П.1.2})$$

*) Это рассуждение следует Гольдбергу и Ватсону (1964).

Вся зависимость от угла α_1 вынесена в экспоненту. Это интегрирование можно выполнить в явном виде. Воспользовавшись интегральным представлением для функции Бесселя

$$J_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha_1}{2\pi} e^{iz \cos(\alpha_1 + \psi)},$$

имеем

$$I_2 = 2\pi \int_0^\infty x^2 dx \int_0^\infty y^2 dy \int_0^\pi \sin \beta_1 d\beta_1 \int_0^\pi \sin \beta_2 d\beta_2 \int_0^{2\pi} d\chi \times \\ \times J_0 [k \sqrt{2xy} \sqrt{\sin \beta_1 \sin \beta_2} \sqrt{\zeta - \cos(\theta - \chi)}] \times \\ \times U(x) G(x, y, \theta_{12}, E) U(y), \quad (\text{П.1.3})$$

$$\zeta = \frac{y^2 \sin^2 \beta_2 + x^2 \sin^2 \beta_1}{2xy \sin \beta_1 \sin \beta_2}.$$

Функция ζ имеет минимум, равный 1, который достигается, например, когда $x = y$ и $\beta_1 \rightarrow \pi/2$, $\beta_2 = \pi/2$ (или $\beta_1 \rightarrow \beta_2$). Следовательно, если рассматривать $\cos(\theta - \chi) > 1$, то при больших значениях x и y бесселева функция J_0 будет экспоненциально расти, так как корень $\sqrt{\zeta - \cos(\theta - \chi)}$ становится мнимым:

$$J_0(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{i(z - \frac{\pi}{2})} + e^{-i(z - \frac{\pi}{2})}}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}.$$

Для того чтобы аналитически продолжить амплитуду рассеяния по $\cos \theta$, в этом месте надо сделать гипотезу об асимптотическом поведении потенциала. Мы опять предположим, что при больших $|r|$ имеем $U(r) \sim e^{-\mu r}$. Отсюда мы получаем следующее условие на аналитическое продолжение по $\cos \theta$:

$$\sqrt{2} k |\operatorname{Re} \sqrt{\cos(\theta - \chi) - 1}| < 2\mu. \quad (\text{П.1.4})$$

Неравенство (П.1.4) удобно переписать в терминах переменной ξ , имеющей определение

$$\cos(\theta - \chi) = \operatorname{ch}(\xi + i\eta).$$

Тогда (П.1.4) принимает вид

$$(\cos \psi + 1) \operatorname{sh}^2 \frac{\xi}{2} < \frac{2\mu^2}{k^2}, \quad (\text{П.1.5})$$

где $\psi = \eta + \chi$. Мажорируя (П.1.5) (т. е. считая, что $\cos \psi = 1$), получим

$$\operatorname{ch} \xi < 1 + \frac{2\mu^2}{k^2}. \quad (\text{П.1.6})$$

Условие (П.1.6) определяет область аналитичности по переменной $z = \cos \theta = \operatorname{ch} (\xi + i\eta)$. В комплексной плоскости z эта область представляет собой эллипс с фокусами ± 1 и с большой полуосью $1 + \frac{2\mu^2}{k^2}$:

$$\frac{z_r^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{z_i^2}{\operatorname{sh}^2 \xi} = 1, \quad (\text{П.1.7})$$

где

$$z_r = \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad z_i = \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{(z-4M^2)(z-4\mu^2)}} \times \\ &\times \operatorname{In} \frac{z-4M^2+z-4\mu^2+2\sqrt{(z-4M^2)(z-4\mu^2)+4B^2}}{z-4M^2+z-4\mu^2-2\sqrt{(z-4M^2)(z-4\mu^2)+4B^2}}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Логарифм в условии унитарности (2.30) получается из $\Phi(z)$, если $4M^2 = z^+ = z'z'' + \sqrt{(z'^2-1)(z''^2-1)}$ и $4\mu^2 = z^- = z'z'' - \sqrt{(z'^2-1)(z''^2-1)}$, $B=0$. Пусть $M^2 > \mu^2$, и пусть ветвь логарифма выбрана так, что при $z > 4M^2$ фаза логарифма равна нулю. Точка ветвления логарифма z_0 как функция M^2 и μ^2 имеет вид

$$z_0 = 2(M^2 + \mu^2) - \frac{M^2 - \mu^2}{B^2} - B^2. \quad (\text{П.2.2})$$

Максимальное возможное значение z_0 как функции M^2 равно $4\mu^2$, и максимум достигается, когда $M^2 = \mu^2 + B^2$. Если $M^2 \neq \mu^2 + B^2$, то точка ветвления логарифма лежит перед точкой $4\mu^2$ (рис. П.1). Поэтому эта точка не будет нас интересовать. Разобьем прямую $-\infty < z < +\infty$ на три области, как показано на рис. П.2.

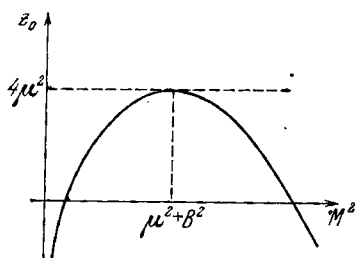


Рис. П.1.

В области I фаза логарифма равна нулю и $\Phi(z)$ — вещественная функция.

Для того чтобы попасть в область II, надо обойти точку ветвления функции $\sqrt{z - 4M^2}$. Обозначим через $\Phi^{(\pm)}(z)$ граничные значения функции $\Phi(z)$ в области II после обхода точки $4M^2$ сверху и снизу соответственно. Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{(+)}(z) &= \frac{1}{i \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)}} \times \\ &\times \ln \frac{z - 4\mu^2 + z - 4M^2 + 2i \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)} + 4B^2}{z - 4\mu^2 + z - 4M^2 - 2i \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)} + 4B^2}, \\ \Phi^{(-)}(z) &= \frac{i}{\sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)}} \times \\ &\times \ln \frac{z - 4\mu^2 + z - 4M^2 - 2i \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)} + 4B^2}{z - 4\mu^2 + z - 4M^2 + 2i \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)} + 4B^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.2.3})$$

Видно, что функции $\Phi^{(+)}(z)$ и $\Phi^{(-)}(z)$ совпадают, т. е. в результате обхода точки $4M^2$ функция $\Phi(z)$ не ветвится. Можно записать в области II:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)}} \operatorname{arctg} \frac{2 \sqrt{(z - 4\mu^2)(4M^2 - z)}}{z - 4\mu^2 + z - 4M^2 + 4B^2}. \quad (\text{П.2.4})$$

Поскольку логарифм в этой области не ветвится, то arctg в окрестности точки $4M^2$ стремится к нулю.

Для того чтобы перейти в окрестности точки $4\mu^2$ в область III, нужно знать, к какому углу стремится arctg — к нулю или π . Это зависит от того, обращается ли знаменатель аргумента arctg в нуль или нет, т. е. проходит ли arctg угол $\pi/2$. Если $M^2 < \mu^2 + B^2$, то arctg в окрестности точки $4\mu^2$ стремится к нулю. Поэтому, обходя сверху и снизу точку $4\mu^2$, мы не получим скачка функции

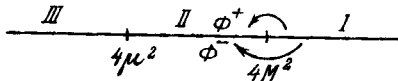


Рис. П.2.

$\Phi(z)$ (П.2.4) в области III вплоть до логарифмической точки ветвления z_0 .

Совершенно другая ситуация получается, если $M^2 \geq \mu^2 + B^2$. В этом случае в малой окрестности справа от точки $4\mu^2$

$$\Phi(z) \approx \frac{2\pi}{\sqrt{(z-4\mu^2)(4M^2-z)}},$$

и, следовательно, в области III

$$\Phi^{(+)}(z) - \Phi^{(-)}(z) = -\frac{4\pi i}{\sqrt{(4M^2-z)(4\mu^2-z)}}. \quad (\text{П.2.5})$$

В этом случае точкой ветвления функции является точка $4\mu^2$ и скачок на разрезе $4\mu^2 \geq z \geq z_0$ равен (П.2.5).

В формуле (2.30)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{(z_- - z)(z_+ - z)}} \ln \frac{z_- - z + z_+ - z + 2\sqrt{(z_- - z)(z_+ - z)}}{z_- - z + z_+ - z - 2\sqrt{(z_- - z)(z_+ - z)}},$$

где

$$z_- = z'z'' - \sqrt{(z'^2 - 1)(z''^2 - 1)} \geq 1,$$

$$z_+ = z'z'' + \sqrt{(z'^2 - 1)(z''^2 - 1)} > z_- \geq 1.$$

Ветвь логарифма вещественна при $z < 1$, поэтому удобно расположить области I, II, III в порядке, обратном показанному на рис. П.2. Так как $B^2 = 0$, то $z_0 \rightarrow -\infty$. В области II реализуется случай $\operatorname{arctg} \rightarrow \pi$, и,

следовательно, в области III, когда $z > z_+$,

$$\Delta\Phi = \frac{-4\pi i}{\sqrt{(z-z_-)(z-z_+)}}. \quad (\text{П.2.6})$$

Применим результат исследования функции $\Phi(z)$ к проблеме продолжения условия унитарности для реакции $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ в область ниже физического порога.

При продолжении условия унитарности для парциальных амплитуд (Мандельстам (1960)) реакции $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ из области физических энергий $E^2 \geq 4M^2$ до $4\mu^2$ необходимо, чтобы порог кроссинг-интеграла был ниже $4\mu^2$. При этом ближайшие особенности на кроссинг-разрезе определяются проекциями на состояния с данным l полюсных членов $\frac{g^2}{s-M^2} - \frac{g^2}{u-M^2}$; s и u связаны с энергией $N\bar{N}$ -системы $t^{1/2}$ соотношениями (21.25), и в (П.2.1) $z \sim t$.

Поэтому необходимо исследовать функцию $\Phi(z)$ (П.2.1), где $B^2 = M_N^2$. Так как $M_N^2 < \mu^2 + M_N^2$, то в области II реализуется случай $\arctg \rightarrow 0$, и следовательно в области III скачок $\Phi(z)$ равен нулю вплоть до точки z_0 ,

$$z_0 = 4\mu^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{4M^2}\right).$$

Таким образом, условие унитарности можно аналитически продолжить до $4\mu^2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

В изотопическом формализме пионная квантованная функция описывается вектором в трехмерном изотопическом пространстве φ_α ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$). Оператор изотопического спина ω представляется в виде квадратных матриц третьего ранга, которые могут быть выбраны так:

$$(\omega_j)_{\alpha\beta} = -i\varepsilon_{j\alpha\beta}. \quad (\text{П.3.1})$$

Вычисляя квадрат этого вектора, получаем

$$(\omega_j, \omega_j)_{\alpha\beta} = 1(1+1)\delta_{\alpha\beta}, \quad (\text{П.3.2})$$

что, очевидно, соответствует значению изотопического спина, равному единице. Оператор полного изотопического

спина системы из двух пионов выражается суммой

$$I = \omega(1) + \omega(2), \quad (\text{П.3.3})$$

где $\omega(k)$ действует на переменные k -го пиона.

Согласно правилам сложения моментов собственные значения оператора $(I, I) = I(I + 1)$ имеют три значения $I = 0; 1; 2$. Теперь легко получить собственные значения скалярного произведения $(\omega(1), \omega(2))$, которые равны

$$\langle \omega(1), \omega(2) \rangle_I = \lambda_I, \lambda_I = (-2, -1, 1) \quad (\text{П.3.4})$$

соответственно.

Проекционные операторы можно выразить в следующем виде:

$$P_I = \prod_{k \neq I} \frac{\lambda_k - (\omega(1), \omega(2))}{\lambda_k - \lambda_I}, \quad (\text{П.3.5})$$

что после подстановки (П.3.4) дает

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{3} [-1 + (\omega(1), \omega(2))^2], \\ P_1 &= \frac{1}{2} [2 - (\omega(1), \omega(2)) - (\omega(1), \omega(2))^2], \\ P_2 &= \frac{1}{6} [2 + 3(\omega(1), \omega(2)) + (\omega(1), \omega(2))^2]. \end{aligned} \right\} (\text{П.3.6})$$

В представлении (П.3.1) получаем

$$\left. \begin{aligned} (\omega(1), \omega(2))_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} &= \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \\ (\omega(1), \omega(2))_{\alpha\gamma}^2{}_{\beta\delta} &= \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}. \end{aligned} \right\} (\text{П.3.7})$$

Проекционные операторы примут вид

$$\left. \begin{aligned} (P_0)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} &= \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}, \\ (P_1)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} &= \frac{1}{2} [\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}], \\ (P_2)_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} &= \frac{1}{2} [\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}] - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}. \end{aligned} \right\} (\text{П.3.8})$$

Разлагая амплитуду F по состояниям с заданным значением I :

$$F = P_0 A_0 + P_1 A_1 + P_2 A_2, \quad (\text{П.3.9})$$

приходим к формулам (7.27) и (7.29).

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Опишем геометрический способ получения аналитических свойств функций $\Phi_{1,2}(\nu, z)$. Для этого удобно рассматривать $\Phi_{1,2}(\nu, z)$ как функции t, z . При любом фиксированном значении $z \neq 1$ переход от переменных ν, z к t, z тривиален. Рассеяние вперед ($z = 1$) рассматривается как предел при $z \rightarrow 1$. Изучим на плоскости s, u кривые $z = \text{const}$. Ими будут гиперболы (рис. П.3)

$$su = (M^2 - 1)^2 - \frac{1+c}{2} [s - (M+1)^2] [s - (M-1)^2] \quad (\text{П.4.1})$$

с асимптотами

$$s = 0, \quad u = -\frac{1+c}{2} [s - 2(M^2 + 1)].$$

Вид гипербол не зависит от того, выражаются ли s и u через ν, z формулами (21.13) или (25.2). Координаты вершин гиперболы

$$s = M^2 - 1, \quad u = M^2 + 1 + 2z$$

и

$$s = -(M^2 - 1), \quad u = M^2 + 1 + 2Mz.$$

При изменении z в интервале $[-1, +1]$ вершины гиперболы пробегает конечные отрезки. Вершины делят гиперболу на части, вдоль которых $K(\nu) = \sqrt{(M^2 + \nu)(1 + \nu)}$ имеет определенный знак. Так, на линиях (α, β) и (χ, ε) для $\nu > 0$ $K(\nu) > 0$; на линии (γ, δ) при $\nu > 0$ $K(\nu) < 0$. Это означает, что на линиях (α, β) и (χ, ε) s и u связаны с ν, z формулами (21.13). На остальных частях гиперболы справедливы формулы (25.2). Подчеркнем еще раз, что границы применимости (21.13) и (25.2) определяются вершинами гиперболы.

Особенности $\Phi_{1,2}(\nu, z)$ определяются значениями t, z , при которых разности $t' - t, s' - s$ и $u' - u$ обращаются в нуль. Интервал изменения t', s', u' задается

представлением Мандельштама (23.1). Очевидно, нахождение области обращения в нуль разности $t' - t$ не вызывает затруднений, и разрез от нее всегда начинается с $v = -\frac{2\mu^2}{1-z}$. При любом z в интервале $[-1, +1]$ одна из ветвей гиперболы] (П.4.1) проходит через точку α

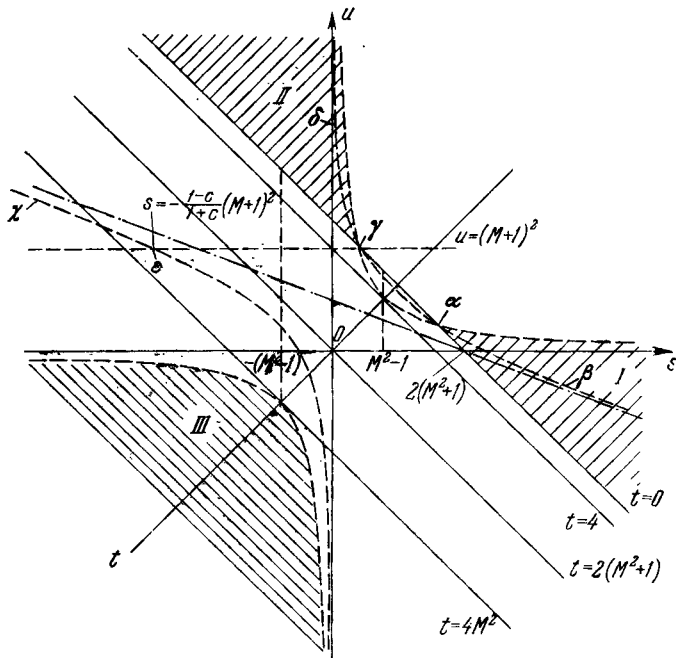


Рис. П.3.

с координатами $s = (M + 1)^2$, $t = 0$. Координата t точки, лежащей на (α, β) , определяется ее прямоугольной проекцией на ось t . Таким образом, рассматривая прямоугольные проекции точек физической области процесса I, расположенных на гиперболе (П.4.1), легко установить, что от $s' - s$ всегда будет разрез вдоль $t' < 0$, т. е. $v > 0$. Аналогично на линии (χ, ϵ) разность $u' - u$ обращается в нуль. Начало разреза связано с проекцией

на ось t точки ε , координаты которой

$$s_\varepsilon = -\frac{1-c}{1+c}(M+1)^2, \quad u_\varepsilon = (M+1)^2.$$

Координата проекции точки ε на ось t вычисляется легко; она определяет величину $a_2(z)$, с которой и начинается разрез от $u' - u$. Для значения $z = 1/M$ точка ε является вершиной гиперболы. При $z > 1/M$ вершина гиперболы лежит левее точки ε . В этом случае разность $u' - u$ обращается в нуль, начиная со значений $u' = (M+1)^2 + M^2(z - \frac{1}{M})$. Если теперь пересчитать положение этой точки на переменную v , то ось будет соответствовать началу разреза с $-M^2$. Теперь легко установить, что разрезы от разностей $u' - u$ и $s' - s$, в которых s и u выражаются через v , z с помощью (21.13) после замены $K \rightarrow -K$, определяются частями гиперболы с асимптотикой $s = 0$. Пересчитывая эти разрезы с оси t на ось v , при фиксированном z получим разрез $0 < v < \infty$ от второго канала ($u' - u = 0$) и, при $z > 1/M$, конечный разрез от него же с границами $-a_2(z) < v < -M^2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Поясним геометрический смысл преобразования (25.3). Будем описывать кинематику реакций в пространстве скоростей (Черников (1964)), которое является пространством Лобачевского. Обычная связь между элементами треугольника $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$ заменяется здесь на $\text{ch } C = \text{ch } A \text{ ch } B - \text{sh } A \text{ sh } B \cos \gamma$. 4-скорость частицы p/m изображается точкой этого пространства.

Рассмотрим плоскость в пространстве скоростей, проходящую через скорости частиц, участвующих в реакции I: $P_i = p_i/M$, $Q_i = q_i/M$ ($i = 1, 2$) (см. рис. П.4).

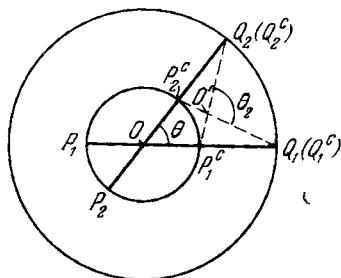


Рис. П.4.

Точка O (пересечение прямых $p_1 Q_1$ и $p_2 Q_2$) изображает скорость центра масс. Инварианты s и t могут быть выражены через расстояния $P_1 Q_1$ и $Q_1 Q_2$:

$$s = M^2 + \mu^2 + 2M\mu \operatorname{ch} P_1 Q_1, \quad t = 2\mu^2 (1 - \operatorname{ch} Q_1 Q_2).$$

Чтобы перейти к переменной второй реакции, заметим, что из (21.13) и (25.2) вытекает, что $ss^* = (M^2 - \mu^2)^2$. Отсюда следует, что s^* может быть представлено в виде

$$s^* = M^2 + \mu^2 - 2M\mu \operatorname{ch} P_1^c Q_1.$$

Если теперь отождествить P_1^c со скоростью начального нуклона в реакции II, а Q_1 — со скоростью вылетающего мезона в реакции II — Q_1^c , то из условия инвариантности t следует, что точку Q_2 можно отождествить со скоростью Q_2^c . Тогда P_2^c есть пересечение отрезка $O Q_2$ с малой окружностью. Скорость O' центра масс реакции II и угол рассеяния θ_2 определяются пересечением отрезка $P_2^c Q_1$ и $Q_2 P_1^c$ и углом между ними. Импульс реакции II определяется соотношением

$$q_2 = M \operatorname{sh} O' P_1^c = \mu \operatorname{sh} O' Q_1^c.$$

Из рисунка видно, что $\theta_2 > \theta$, за исключением рассеяния вперед и назад, когда эти углы равны, $q_2 = q$ для рассеяния назад и меньше q для всех остальных углов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

В § 29 была сформулирована задача о нахождении парциальных волн $h_i(z)$ или матричных элементов S -матрицы $S_i(z)$, которые подчиняются условиям (1) — (4), являющимся следствиями уравнений типа уравнения Чу — Лоу. Там же было дано решение этой задачи для частного случая двухрядной матрицы A_{ij} методом, который легко обобщается на любую двухмерную матрицу, соответствующую моментам $l, 1/2$ сталкивающихся частицы и источника. Общие свойства этих решений, если на них смотреть как на звристические, можно использовать для построения целого класса решений уравнений типа уравнения Чу — Лоу с матрицей кроссинг-

симметрии A_{ij} произвольного порядка. Ниже мы коротко изложим схему такого построения (Мещеряков (1965в)).

Риманова поверхность матричных элементов определяется так же, как и в двухрядном случае, присутствием в общем решении функции

$$w = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \sin z. \quad (\text{П.6.1})$$

Целесообразность введения этой функции вне зависимости от порядка матрицы объясняется тем, что в записи через нее условие унитарности на функцию $h_i(w)$ linearизуется и имеет вид

$$\frac{1}{h_i(1-w)} = \frac{1}{h_i(w)} + \varphi(w), \quad (\text{П.6.2})$$

где

$$\varphi(w) = (-1)^{l+1} (\cos \pi w)^{2l+1} u^2 (-\cos^2 \pi w).$$

Общее решение (П.6.2), не обладающее какой-либо симметрией по переменной w , содержит w явно. Отсюда следует, что риманова поверхность $S_i(z)$, которая согласно условию кроссинг-симметрии содержит как четные, так и нечетные функции, вообще говоря, бесконечнолистка. Этот факт естественно учитывается, если рассматривать $S_i(z)$ как функцию переменной w , после чего основные условия принимают следующую форму:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } S_i(w) \text{ — мероморфные функции } w; \\ \text{II. } S_i^*(w) = S_i(w^*); \\ \text{III. } S_i(w) S_i(1-w) = 1; \\ \text{IV. } S_i(-w) = A_{ij} S_j(w). \end{array} \right\} (\text{П.6.3})$$

Вспоминая результаты § 29, легко получить, что условие (П.6.3) всегда допускает решение вида

$$S_0(w) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right) D(w), \quad \left. \right\} (\text{П.6.4})$$

$$D(w)^* D(1-w) = 1, \quad D(w) = D(-w), \quad D^*(w) = D(w^*).$$

Кроме того, решение задачи (П.6.3) для двухрядной матрицы указывает на то, что если $S_i(w)$ — какое-либо решение задачи (П.6.3), то

$$\left. \begin{aligned} & S_i[w + \beta_0(w)], \\ \beta_0^*(w) = \beta_0(w^*), \quad \beta_0(w) = -\beta_0(-w), \quad \beta_0(w+1) = \beta_0(w) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.6.5})$$

также является ее решением. Таким образом, если известно частное решение задачи (П.6.3), то, пользуясь произволом (П.6.4) и (П.6.5), можно построить целый класс решений исходной задачи.

В качестве исходных частных решений выбираются решения задачи (П.6.3), имеющие конечное число полюсов во всей плоскости w . Для таких решений существует метод построения функций $S_i(w)$. Он основан на том, что можно указать окружность достаточно большого радиуса, которая охватывает все полюсы функций $S_i(w)$. Поэтому вне ее имеет место разложение в ряд:

$$S_i(w) = 1 + \sum_n \frac{a_n^{(i)}}{w^{n+1}}, \quad (\text{П.6.6})$$

который сходится абсолютно и равномерно при $|w| > R$. Условие II приводит к тому, что коэффициенты ряда (П.6.6) чисто действительные:

$$a_n^{(i)*} = a_n^{(i)}, \quad (\text{П.6.7})$$

а из условия IV кроссинг-симметрии следуют уравнения

$$A_{ij} a_n^{(j)} = (-1)^{n+1} a_n^{(i)}. \quad (\text{П.6.8})$$

Для выяснения ограничений, налагаемых на коэффициенты $a_n^{(i)}$ условием унитарности, нужно воспользоваться равенством

$$\frac{1}{S_i(w)} = S_i(1-w). \quad (\text{П.6.9})$$

Вид этого равенства не зависит от индекса i . Обе части его удобно разложить по возрастающим степеням $1/w$. Левая часть (П.6.9) представляется в необходимом виде с помощью техники обращения рядов. Упрощение

правой части (П.6.9) производится на основе очевидной формулы

$$\frac{1}{(\alpha - w)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{p=n}^{\infty} \frac{C_p^n \alpha^{p-n}}{w^{p+1}}, \quad (\text{П.6.10})$$

$$C_p^n = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}.$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/w$, получим ряд равенств, из которых выпишем явно только первое:

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(i)} &= \frac{a_0^{(i)}(a_0^{(i)} + 1)}{2}, \\ a_{2m+1}^{(i)} &= f_m(a_{2m}^{(i)}, \dots, a_0^{(i)}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.6.11})$$

Условие унитарности оставляет $a_{2m}^{(i)}$ произвольными и выражает коэффициент $a_{2m+1}^{(i)}$ через все предыдущие. Комбинируя уравнения (П.6.11) и (П.6.8), получаем нелинейную систему алгебраических уравнений для $a_0^{(i)}$:

$$A_{ij} (a_0^{(j)})^2 = (a_0^{(i)})^2 + 2a_0^{(i)}. \quad (\text{П.6.12})$$

Из вышеизложенного следует утверждение о том, что число различных решений задачи (П.6.3), обладающих конечным числом полюсов в плоскости w , не больше числа различных действительных решений системы (П.6.12).

Совместное решение бесконечной системы уравнений (П.6.8) и (П.6.10) позволит представить искомые функции в виде (П.6.6). Эта задача может быть решена конечным числом шагов. Действительно, существует теорема о том, что число линейно независимых коэффициентов $a_n^{(i)}$ определяется числом полюсов функций $S_i(w)$, если считать каждый из них столько раз, какова его кратность (Гантмахер (1954)). Эта теорема естественно записывается с помощью бесконечной ганкелевой матрицы

$$S^{(i)} = |a_{m+n}^{(i)}|_0^{\infty} = \begin{vmatrix} a_0^{(i)} & a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & \dots \\ a_1^{(i)} & a_2^{(i)} & a_3^{(i)} & \dots \\ a_2^{(i)} & a_3^{(i)} & a_4^{(i)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

У матрицы $S^{(i)}$ детерминанты главных миноров $D_R^{(i)} = \det |a_{m+n}^{(i)}|_0^{R-1}$ равны нулю, начиная с $D_{N_i}^{(i)} \neq 0$, где N_i — число полюсов функции $S_i(w)$. Теорема о числе линейно независимых коэффициентов разложения (П.6.6) делает вполне разрешимой бесконечную систему уравнений (П.6.8 — П.6.11). Отметим, что эта система содержит нелинейные уравнения (П.6.12) только на первом этапе, остальные уравнения линейны. Практическое решение следует начинать с уравнений (П.6.8).

Изложенную методику можно проиллюстрировать конкретным примером, скажем, матрицы A_{11} , соответствующей моментам 1,1 взаимодействующих частицы и источника:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \quad (\text{П.6.13})$$

В этом случае функции $S_i(w)$ имеют вид

$$S_1(w) = \frac{w - 5/2}{w + 3/2}, \quad S_2(w) = \frac{w - 5/2}{w + 3/2} \frac{w + 1/2}{w - 3/2}, \quad S_3(w) = \frac{w + 1/2}{w - 3/2}. \quad (\text{П.6.14})$$

Свойства (П.6.4) и (П.6.5) позволяют, используя функции (П.6.14), построить целый класс решений задачи (П.6.3) для матрицы кроссинг-симметрии (П.6.13).

ЛИТЕРАТУРА

- Амати, Фубини (Amati D., Fubini S.) (1962), *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **12**, 359.
- Ансельм А. А., Грибов В. Н. (1959), *ЖЭТФ* **37**, 501.
- Аткинсон (Atkinson D.) (1962), *Phys. Rev.* **128**, 1908.
- Барашенков В. С. (1966), Препринт ОИЯИ Р-2582; *Fortsch. d. Phys.* (в печати).
- Батусов Ю. А., Бунятов С. А., Сидоров В. М., Ярба В. А. (1960), *ЖЭТФ* **39**, 1850.
- Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. (1957), Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, Москва.
- Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. (1958), Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, Москва.
- Боголюбов Н. Н. (1966), Лекции по теории симметрий, МГУ.
- Боли и др. (Boli N., Goribotti G., Giambiagi T., Rignotti A.) (1961), *Nuovo Cim.* **20**, 1209.
- Боукок и др. (Bowcock T., Cottingham W., Lurie D.) (1962), *Nuovo Cim.* **16**, 918; *Phys. Rev. Lett.* **5**, 385.
- Вандерс (Wanders G.) (1962), *Nuovo Cim.* **23**, 816.
- Ван-Кампен (Van Kampen N. G.) (1953a), *Phys. Rev.* **91**, 1267 (ПСФ № 2, 44, 1957); (1953b), *Phys. Rev.* **89**, 1072 (ПСФ № 2, 28, 1957).
- Ватсон (Watson K. M.) (1952), *Phys. Rev.* **88**, 1163.
- Вик (Wick G.) (1955), *Rev. Mod. Phys.* **27**, 53.
- Вигнер (Wigner E.) (1964), *Science* **143**, (УФН **85**, 727).
- Вонг (Wong D.) (1957), *Phys. Rev.* **107**, 302.
- Гантмахер Ф. Р. (1954), Теория матриц, Гостехиздат, Москва.
- Гахов Ф. Д. (1963), Краевые задачи, Физматгиз, Москва.
- Гамильтон (Hamilton J.) (1963), *Strong Interactions and High Energy Physics*, Oliver and Boyd, London, p. 281—367.
- , Вулкок (Hamilton J., Woolcock W.) (1963), *Rev. Mod. Phys.* **35**, 737.
- и др. (Hamilton J., Menotti P., Oades G., Vick L. L. J.) (1962), *Phys. Rev.* **128**, 1881.
- Голдбергер (Goldberger M.) (1955), *Phys. Rev.* **99**, 979 (ПСФ № 2, 110, 1957).
- и др. (Goldberger M., Miyazawa H., Oehme R.) (1955), *Phys. Rev.* **99**, 986 (ПСФ № 2, 123, 1957).
- , Ватсон (Goldberger M., Watson K.) (1964), *Collision Theory*, Wiley, N. Y.

- Грашин А. Ф. (1963), ЖЭТФ 43, 277.
- , Мельников В. К. (1962), ЖЭТФ 42, 1404.
- Гурдэн, Мартэн (Gourdin M., Martin A.) (1959), Nuovo Cim. 16, 78.
- Дайсон (Dyson F.) (1957), Phys. Rev. 106, 157.
- Деврие и др. (DeVrie C., Hofstadter R., Johnson A., Herman R.) (1964), Phys. Rev. B134, 848.
- Джин, Мартэн (Jin Y., Martin A.) (1964), Phys. Rev. B135, 1464.
- Дрелл, Захарьясен (Drell S. D., Zachariassen F.) (1961), Electromagnetic Structure of Nucleons, Oxford Univ. Press (Электромагнитная структура нуклонов, ИЛ, Москва, 1962).
- Доналд и др. (Donald R. A., Evans W. H., Hart W., Mason P., Plane D. E., Read E. J. C.) (1966), Proc. Phys. Soc. 87, 445.
- Ефремови др. (Efremov A. V., Meshcheryakov V. A., Shirkov D. V., Tzu H. Y.) (1960a), Proc. of 10th Rochester Conference, Interscience Publ., N. Y., p. 278.
- (Efremov A. V., Meshcheryakov V. A., Shirkov D. V., Tzu H. Y.) (1960b), Nucl. Phys. 22, 202.
- , Чжу Хан-юань, Ширков Д. В. (1961a), ЖЭТФ 41, 603.
- и др. (Efremov A. V., Tzu H., Shirkov D. V.) (1961b), Scientia Sinica 10, 812.
- , Ширков Д. В. (1962), ЖЭТФ 42, 1345.
- , Мещеряков В. А., Ширков Д. В. (1960в), ЖЭТФ 39, 454; 1099.
- Жакоб, Вик (Jakob M., Wick G.) (1959), Ann. of Phys. 7, 404.
- Зайди, Ломон (Zaidi M., Lomon E.) (1958), Phys. Rev. 108, 1352.
- Захарьясен (Zachariassen F.) (1961), Phys. Rev. 121, 1851.
- Зинов В. Г., Коренченко С. М., Полумордвинова Н. И., Тентюкова Г. Н. (1960), ЖЭТФ 38, 1407.
- Исаев, Сэвэрыньский (Isaev P. S., Sewerynski M. V.) (1961), Nucl. Phys. 22, 663; 27, 148.
- , Лендъел В. И., Мещеряков В. А. (1963), ЖЭТФ 45, 294.
- , Мещеряков В. А. (1962), ЖЭТФ 43, 1339.
- и др. (Isaev P. S., Lend'el V. I., Meshcheryakov V. A.) (1964a), Proceedings of the International Conference at Stanford Univ. 1963, Stanford Univ. Press.
- , Мещеряков В. А., Радудцкий Г. М., Табаченко А. И. (1964b), ЖЭТФ 47, 970.
- Карасси, Пассаторе (Carraresi M., Passatore G.) (1962), Nuovo Cim. 26, 1254.
- Кармони и др. (Carmony et al.) (1964), Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий, стр. 486, Атомиздат, Москва.

- Кастильехо, Далитц, Дайсон (Castillejo L., Dalitz R., Dyson F.) (1956), Phys. Rev. 101, 543.
- Клементель, Вилли (Clementel E., Villi C.) (1958), Nuovo Cim. 4, 1207.
- Клепиков Н. П., Мещеряков В. А., Соколов С. Н. (1960), Препринт ОИЯИ Д-584.
- , Соколов С. Н. (1964), Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия, «Наука», Москва.
- Колдуэлл и др. (Caldwell D. et al.) (1962), Phys. Lett. 2, 253.
- Лавлес (Lovelace C.) (1961), Nuovo Cim. 22, 102.
- (Lovelace C.) (1966), Pion-Nucleon Phase Shifts, Invited Paper at the 1966 Berkeley Conference, Preprint CERN, Th. 705.
- и др. (Lovelace C., Heintz R. M., Donnachie A.) (1966), Phys. Lett. 22, 332.
- Лайсон (Layson W.) (1961), Nuovo Cim. 20, 1207.
- Ландау Л. Д., Смородинский Я. А. (1944), ЖЭТФ 8, 154.
- Левинсон (Levinson N.) (1949), Vid. Sels. Mat.-fys. Medd. 25, № 9.
- Лендел А. И., Лендель В. И., Мещеряков В. А., Эрнст Б. М. (1966), Яд. физ. 3, 1093.
- Лукин Л. П., Серебряков В. В. (1964), Сиб. мат. ж. 5, 1422.
- Маккинли (McKinley M.) (1963), Rev. Mod. Phys. 35, 788.
- Мартэн (Martin A.) (1965), High Energy Physics and Elementary Particles, JAEA, Vienna, p. 155.
- (1966), Nuovo Cim. (в печати).
- Мещеряков В. А., Неменов Л. Л., Соловьев Л. Д., Строкич Ю. П., Ткебучава Ф. Г. (1965а), Яд. физ. 2, 124.
- , Соловьев Л. Д., Ткебучава Ф. Г. (1965б), Яд. физ. 3, 116.
- (1965в), Препринт ОИЯИ Р-2369.
- Мандельштам (Mandelstam S.) (1958), Phys. Rev. 112, 1344.
- (1960), Phys. Rev. Lett. 4, 84.
- (1959), Phys. Rev. 115, 1741.
- Маркушевич А. И. (1950), Теория аналитических функций, Гостехиздат, Москва.
- Мэтьюз П. (1959), Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИЛ, Москва.
- Наканиши (Nakanishi N.) (1961), Progr. Theor. Phys. 26, 337.
- Неменов Л. Л. (1962), Препринт ОИЯИ Р-111.
- Нишиджима К. (1965), Фундаментальные частицы, «Мир», Москва.
- Овил и др. (Ouvil P., Lovelace C., Donnachie A., Lea A. T.) (1964), Phys. Rev. Lett. 12, 76.
- Окубо (Okubo S.) (1960), Phys. Rev. 118, 357.
- Окунь Л. Б., Померанчук И. Я. (1959), ЖЭТФ 36, [300; Nucl. Phys. 10, 492,

- Орлов И. И., Парфенов Ю. В. (1967), Яд. физ. 6, № 4.
 Оме (Oehme R.) (1956), Phys. Rev. 102, 1174 (ПСФ № 2, 194, 1957).
- Померанчук И. Я. (1958), ЖЭТФ 34, 725.
- Понтрягин Л. С. (1942), Изв. АН СССР, сер. мат. 6, 115.
- Розенфельд и др. (Rosenfeld et al.) (1967), Rev. Mod. Phys. 39, № 1.
- Самаранайке, Вулкок (Samaranayake V. K., Woolcock W.) (1966), Phys. Rev. Lett. 15, 936.
- Селлери (Seller y F.) (1965), Phys. Lett. 3, 76.
- Селов и др. (Selove W., Hagopian V., Brody H., Barker A., Leboy E.) (1962), Phys. Rev. Lett. 9, 272.
- Серебряков В. В., Ширков Д. В. (1962а), ЖЭТФ 42, 610.
 — — (1962б), Nucl. Phys. 34, 500.
 — — (1962в), Phys. Lett. 1, 129.
 — — (1965), Fortschritte der Phys. 13, 227.
 — — (1967), Препринт ИМ СО АН СССР ТФ-24.
- Соловьев Л. Д. (1961), ЖЭТФ 40, 597.
 —, Чен Цун-лю (1962), ЖЭТФ 42, 526.
- Тер-Мартirosян К. А. (1960), ЖЭТФ 39, 827.
- Уиттекер, Ватсон (1963), Курс современного анализа, Физматгиз, Москва.
- Уипмэн, Герстайн (Whipman M., Gerstein I.) (1964), Phys. Rev. B134, 1123.
- Уокер и др. (Walker W., Davis J., Shephard W.) (1966), Phys. Rev. 118, 1612.
- Федербуш и др. (Federbush P., Goldberger M., Treiman S.) (1958), Phys. Rev. 112, 642.
- Ферми Э. (1956), Лекции о мезонах и нуклонах, ИЛ, Москва.
- Феррари, Селлери (Ferrari E., Seller y F.) (1963), Nuovo Cim. 27, 1450.
- Фрай, Варнок (Frye G., Warnock R. L.) (1963), Phys. Rev. 130, 478.
- Фрэзер, Фулко (Fraser W., Fulco T.) (1960), Phys. Rev. 117, 1609.
- Фраучи, Валека (Frautschi S., Walecka J.) (1960), Phys. Rev. 120, 1486.
- Фруассар (Froussart M.) (1961), Phys. Rev. 123, 1053.
- Хёлер, Дитц (Höhler G., Dietz K.) (1960), Z. f. Phys. 160, 453.
- Хенли Э., Тирринг В. (1963), Элементарная квантовая теория поля, ИЛ, Москва.
- Хури (Khuri N. N.) (1957), Phys. Rev. 107, 1148.
- Чен и др. (Chan L. H., Dunning J. R., Ramsey N. F., Jr., Walker J. K., Wilson R.) (1966), Phys. Rev. B141, 1298.
- Черников Н. А. (1964), Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ, Дубна, т. 3, стр. 151—178.
- Чини (Cini M.) (1960), Intern. Conf. on High Energy Phys. at Kiev, Academy of Science USSR, Moscow, vol. 1, p. 338.

- Чини, Фубини (Cini M., Fubini S.) (1960), Ann. of Phys. 3, 352.
- Чу (Chew G.) (1962), S-Matrix Theory of Strong Interaction, Benjamin, N. Y.
- , Лоу (Chew G., Low F.) (1956), Phys. Rev. 101, 1570.
- , (1959), Phys. Rev. 113, 1640.
- ЧГЛН (Chew G., Goldberger M., Low F., Nambu L.) (1957), Phys. Rev. 106, 1337.
- , Мандельштам (Chew G., Mandelstam S.) (1960), Phys. Rev. 119, 467.
- , —, Нойес (Chew G., Mandelstam S., Noyes H.) (1960), Phys. Rev. 119, 478.
- , Фраунш (Chew G., Frautshi S.) (1960), Phys. Rev. Lett. 5, 580.
- — (1961), Phys. Rev. 123, 1478.
- Ширков Д. В. (1962), Nucl. Phys. 34, 510.
- (1965, в сб. «High—Energy Physics and Elementary Particles», Vienna, 1965, pp. 209 — 226.
- (1966), Яд. физ. 3, 1149.
- Эдварс, Мэттьюз (Edwards S., Matthews P.) (1957), Phil. Mag. 8, 839.
- Янг, Треиман (Yang C. N., Treiman S. B.) (1962), Phys. Rev. Lett. 8, 140.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адиабатическая ветвь решения
в лл-рассеянии 122
- Аксиоматическая теория рассеяния 11, 58
- Аксиоматический метод 58
- Амплитуда πN -рассеяния 180
- лл-рассеяния 67
- Аналитические свойства амплитуды πN -рассеяния 202
- — — лл-рассеяния 70
- — — рассеяния в квантовой механике 15
- — — фоторождения 173
- — — парциальных волн πN -рассеяния 195, 212
- — — лл-рассеяния 87
- — — фактора нуклона 255
- — — пиона 164
- Бутстреп 290
- Высшие парциальные волны в нейтринной модели 147
- — — πN -рассеяния 251
- — — лл-рассеяния 151
- Дисперсионные соотношения в квантовой механике 18
- — для πN -рассеяния вперед 40
- — — — при фиксированном $\cos \theta$ 220
- Дифференциальные приближения 99
- G-сопряжение 8
- Кроссинг-симметрия 10, 47
- амплитуды πN -рассеяния 183
- — лл-рассеяния 68
- — фоторождения 172
- парциальных волн πN -рассеяния в статическом пределе 199
- — — лл-рассеяния 92, 115
- спектральных функций πN -рассеяния 207
- — — лл-рассеяния 70
- — — фоторождения 173
- Матрицы рассеяния теория 60
- Несовместность унитарности и кроссинг-симметрии 75
- Оптическая теорема 35
- — в квантовой механике 24
- — для πN -рассеяния 40
- — — лл-рассеяния 65
- Перекрестная симметрия, см. кроссинг-симметрия
- Правило подстановки 49
- Представление Мандельштама, см. аналитические свойства амплитуды
- Проекционные операторы для πN -рассеяния 181
- — — лл-рассеяния 309
- Радиус нуклона среднеквадратичный 254

- Розенблюта формула 254
- Селлери формула 157
- Сечения рассеяния эффективные 65, 68
- Стрип-аппроксимация 80
- Унитарность амплитуды $\pi\pi$ -рассеяния 67
- — рассеяния двухчастичная 60
- матрицы рассеяния 37, 51
- спектральная πN -рассеяния 205
- — $\pi\pi$ -рассеяния 71
- Чини — Фубини представление 85
- Чу — Лоу метод 156
- Чу—Лоу приближения эффективного радиуса 197
- — уравнение p -волн πN -рассеяния 194
- — — s -волн πN -рассеяния 263
- Чу — Мандельстама уравнение 96
- Функция источника в модели Чу — Лоу 193, 286
- Электромагнитный формфактор нуклона 253
- — пиона 163
- — , резонансная модель 168, 260
- Эффективного радиуса приближения 30, 60, 80