И. А. ШИШМАРЕВ

Введение в теорию эллиптических уравнений

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1979

УДК 517.944

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Рецензенты: проф. В. А. ИЛЬИН,
проф. А. А. АРСЕНЬЕВ

Шишмарев И. А.

Введение в теорию эллиптических уравнений. М., Изд-во Моск. ун-та, 1979.

184 с. Библиогр. 26 назв.

Основу книги составляет курс лекций, читаемый автором в течение ряда лет на физическом факультете МГУ. Книга содержит как классические основы теории — принцип максимума, теоремы существования, различные обобщенные решения, априорные оценки Шаудера, так и менее традиционный материал — теоремы о разложимости функций в ряды по собственным функциям эллиптических операторов, теоремы о гладкости решений вариационных задач, теорему существования обобщенного решения задачи Дирихле для сильно эллиптического оператора.

Книга служит хорошим введением в круг идей и методов теории эллиптических уравнений и может быть полезна как математикам, так и физикам.

$Ш\frac{20203-176}{077(02)-79}86-78$

Илья Андреевич Шишмарёв.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Тематический план 1978 г. № 86 ИБ № 493 Зав. редакцией *А. А. Локшин.* Редактор *С. И. Зеленский.* Мл. редактор *В. В. Конкина.* Технический редактор *Г. Д. Колоскова.* Корректоры *И. А. Большакова, Л. С. Клочкова*

Сдано в набор 07.02.78. Подписано к печати 21.12.78. Л-78551. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 10,26. Изд. № 3091. Заказ 327. Тираж 4600 экз. Цена 35 коп.

Издательство Московского университета. Москва, К-9, ул. Герцена, 5/7. Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга написана на основе спецкурса, читавшегося автором в течение ряда лет на физическом факультете Московского университета. Она посвящена теории эллиптических операторов и знакомит читателя с различными методами и идеями, применяемыми в теории эллиптических уравнений.

Содержание книги таково: в первой главе для общего линейного эллиптического оператора второго порядка ставятся краевые задачи, доказываются принцип максимума, теорема Жиро и теоремы единственности для основных краевых задач. Во второй главе на примере оператора Лапласа изложены метод Пуанкаре — Перрона и метод Винера решения задачи Дирихле, теория барьеров, в частности теорема Келдыша о необходимом и достаточном условии регулярности граничной точки. Затем вводится понятие емкости, равновесного потенциала, дан критерий Неванлинны — Карлесона обращения емкости в нуль, критерий Винера регулярности граничной точки, разобран вопрос об устранимых особенностях для различных классов гармонических функций. Затем строятся обобщенные из W_2^1 решения задач Дирихле и Неймана, изучается вопрос о связи классических и обобщенных из W_2^1 решений. В третьей главе выводится теорема о среднем для собственных функций, устанавливается точная внутренняя оценка собственных функций, доказывается теорема Ильина о разложимости в ряд Фурье по собственным функциям. В четвертой главе устанавливаются априорные оценки Шаудера в классах Гельдера для общего линейного оператора второго порядка и рассматривается ряд их приложений к вопросу о разрешимости задачи Дирихле, к задаче с разрывными коэффициентами, к оценкам собственных функций и их производных самосопряженного эллиптического оператора, к краевой задаче для простейшего квазилинейного уравнения. В пятой главе приведена теория де Джорджи классов $\mathfrak{B}(D, \gamma)$, открывшая новые возможности в изучении квазилинейных уравнений. Наконец, в шестой главе доказывается теорема Гординга о разрешимости задачи Дирихле для сильноэллиптического оператора $2m$-го порядка.

Список литературы в конце книги содержит только работы, которые так или иначе цитировались в тексте. Литературные указания приведены в конце каждой главы.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность В. А. Ильину за ряд методических указаний и за предоставление в распоряжение автора рукописи статьи [10] до ее опубликования, А. А. Арсеньеву, прочитавшему рукопись книги и сделавшему ряд ценных замечаний, и В. А. Лебедеву, предоставившему свои записи лекций и много помогавшему в оформлении рукописи.

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Принцип максимума

Пусть $\mathbf{R}^N$ — евклидово пространство $N \geqslant 2$ измерений, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ — его точки. Будем обозначать через

$$r_{xy} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2} = |x-y|$$

расстояние между точками x и y, через $K(x, \rho)$ шар с центром в точке x и радиусом $\rho>0$.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^N$ — произвольная область; функция $f(x)$, определенная и непрерывная на D, удовлетворяет условию Гельдера (или, как говорят, гельдерова) с показателем μ $(0<\mu\leqslant 1)$ в D, если отношение $\frac{|f(x)-f(y)|}{r_{xy}^{\mu}}$ ограничено сверху при любых x и $y \in D$;

$$\sup_{x,y \in D} \frac{|f(x)-f(y)|}{r_{xy}^{\mu}} = F_{0,\mu} < \infty$$

называется коэффициентом Гельдера функции $f(x)$. Функция $f(x)$, определенная на компакте $D \subset \mathbf{R}^N$, принадлежит классу $C^{(k)}$ $(C^{(k,\mu)})$, если ее производные порядка k непрерывны в D (гельдеровы в D с показателем μ); $C^{(0)}$ $(C^{(0,\mu)})$ — класс функций, непрерывных в D (гельдеровых с показателем μ). Функция $f(x)$, определенная в открытой области $D \subset \mathbf{R}^N$, принадлежит классу $C^{(k)}$ $(C^{(k,\mu)})$, если она принадлежит этому классу на каждом компакте, содержащемся в D.

Пусть, далее, граница Γ открытой области D обладает свойством: каждой точке $x \in \Gamma$ можно поставить в соответствие N-мерный шар $K(x, \rho(x))$ с центром в точке x и радиусом $\rho(x)>0$ так, что часть Γ, содержащаяся в $K(x, \rho(x))$, допускает по отношению к некоторой локальной системе координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ с началом в точке x представление вида

$$\xi_N = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}),$$

причем функция ζ предполагается определенной в некоторой области $T(x)$, где она принадлежит по меньшей мере классу $C^{(1)}$ и в точке x обращается в нуль вместе с первыми производными. При этих предположениях в каждой точке $x \in \Gamma$ существует касательная гиперплоскость $\xi_N=0$ и внешняя нормаль, причем направляющие косинусы нормали — непрерывные функции на Γ. Будем говорить, что замкнутая область $\bar{D}=D+\Gamma$ принадлежит классу $A^{(k)}$ $(A^{(k,\mu)})$, если функция $\zeta \in C^{(k)}$ $(C^{(k,\mu)})$ в каждой области $T(x)$, $x \in \Gamma$; в частности, класс областей с ляпуновской границей [16] входит в класс $A^{(1,\mu)}$.

Пусть D — произвольная открытая область, $D \subset \mathbf{R}^N$, Γ — ее граница. Пусть в области D заданы вещественные функции $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ и $c(x)$ $(i, j=1, 2, \ldots, N)$; обозначим через L линейный дифференциальный оператор второго порядка:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u. \qquad (1.1)^{*)}$$

Оператор L называется *эллиптическим*, если

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N, \qquad (1.2)$$

и квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ положительно определенна для всех $x \in D$; если существуют такие числа α, $\beta > 0$, что для всех $x \in D$ и любых вещественных чисел ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$

$$\alpha \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqslant \beta \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2, \qquad (1.3)$$

то оператор L называется *равномерно эллиптическим* в D, а число α называется *константой эллиптичности.*

Пусть $f(x)$ — функция, заданная в D. Мы будем рассматривать в области D уравнение

$$Lu = f(x). \qquad (1.4)$$

Функция $u(x)$ называется *регулярным решением* уравнения (4), если $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(D+\Gamma)$ и удовлетворяет во всех точках открытой области D уравнению (4).

Теорема 1.1 (принцип максимума). *Пусть в области D выполнены условия:* $c(x) \leqslant 0$, $f(x) < 0$ $(f > 0)$ *или* $c(x) < 0$,

---

*) Формулы (теоремы, определения) нумеруются внутри каждой главы. Первая цифра указывает параграф, а вторая — номер в нем. При ссылках внутри параграфа первая цифра опускается, а при ссылке на формулу другой главы добавляется еще одна цифра — номер главы.

$f(x) \leqslant 0$ ($f \geqslant 0$). *Тогда всякое регулярное решение $u(x)$ уравнения* (4) *не имеет в D точек отрицательного относительного минимума (положительного относительного максимума).*

Доказательство. Проведем доказательство для отрицательного минимума (для положительного максимума аналогично). Пусть $u(x)$ достигает относительного отрицательного минимума в точке $x_0 \in D$. Тогда $u(x_0) < 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$, и при любых вещественных ξ_i

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, \xi_i \xi_j \geqslant 0. \qquad (1.5)$$

Покажем, что $Lu - cu \geqslant 0$ в точке x_0. В самом деле,

$$Lu - cu|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}. \qquad (1.6)$$

Квадратичная форма $\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\eta_i\eta_j$ положительно определенна, следовательно, может быть представлена в виде суммы квадратов

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\eta_i\eta_j = \sum_k \Big(\sum_p b_{kp}\eta_p\Big)^2 =$$

$$= \sum_k \sum_{p,s} b_{kp} b_{ks} \eta_p \eta_s,$$

отсюда

$$a_{ij}(x_0) = \sum_k b_{ki} b_{kj}. \qquad (1.7)$$

Подставляя (7) в (6), получим в силу (5)

$$Lu - cu|_{x_0} = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^{N} b_{ki} b_{kj} =$$

$$= \sum_k \Big(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} b_{ki} b_{kj}\Big) \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$Lu - cu|_{x_0} = f(x_0) - c(x_0) u(x_0) < 0$$

в силу условий теоремы. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Теорема 1.2 (усиленный принцип максимума). *Пусть L — равномерно эллиптический оператор с ограниченными в D коэффициентами и пусть в D выполнены условия: $c(x)\leqslant 0$, $f(x)\leqslant 0$ $(f\geqslant 0)$. Тогда всякое регулярное решение $u(x)$ уравнения* (4) *не может иметь в точке $x_0\in D$ отрицательного относительного минимума (положительного относительного максимума), если оно не обращается в постоянную в каждой содержащей x_0 области D_0, в которой $u(x)\geqslant u(x_0)$ $[u(x)\leqslant u(x_0)]$.*

Доказательство. Снова рассмотрим лишь случай отрицательного минимума. Пусть $f(x)\leqslant 0$ в D и пусть $u(x)$ достигает относительного отрицательного минимума в точке $x_0\in D$. Обозначим через I множество точек в D_0, для которых $u(x)=u(x_0)$. Надо доказать, что $I=D_0$. Так как $u(x)$ — непрерывна, то I замкнуто, поэтому достаточно доказать, что*) $\partial I\cap D_0=0$. Пусть это не так, т. е. существует точка $x\in\partial I\cap D_0$. Обозначим через $\delta>0$ расстояние от x до ∂D_0. В любой окрестности точки x есть точки, принадлежащие $D_0\setminus I$ $(x\in\partial I)$; назовем x' любую из этих точек, для которой $r_{xx'}<\delta/2$; все шары $K(x',\rho)$ радиуса ρ, $0<\rho<\delta/2$, принадлежат D_0. Обозначим через $2\rho_0$ расстояние от точки x' до I, $2\rho_0<\delta/2$ ($r_{xx'}<\delta/2$, а $x\in I$). На ∂I существует точка y, такая, что $r_{x'y}=2\rho_0$. Обозначим через x_1 середину отрезка $[x', y]$. Рассмотрим шар $K(x_1,\rho_0)$, он принадлежит D_0. Для всех точек этого шара, кроме y, имеем $u(x)>u(x_0)$, а в точке y $u(y)=u(x_0)$.

Рассмотрим шар $K(y,\rho_0/2)$, а в нем функцию

$$v(x)=e^{-k\rho_0^2}-e^{-kr^2_{xx_1}},$$

$k>0$ — постоянная, которую мы выберем позже. Найдем $Lv(x)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=e^{-kr^2}\,2kr\frac{\partial r}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\,\partial x_j}=2ke^{-kr^2}\left[-k2r^2\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{\partial r}{\partial x_j}+\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{\partial r}{\partial x_j}+r\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial x_j}\right],$$

$$e^{kr^2}Lv=-k^2 4r^2\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial r}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_j}+$$

$$+2k\left[\sum_{i,j}a_{ij}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\,\frac{\partial r}{\partial x_j}+r\frac{\partial^2 r}{\partial x_i\,\partial x_j}\right)+\right.$$

$$\left.+r\sum_i b_i\frac{\partial r}{\partial x_i}\right]+c\left(e^{k(r^2-\rho_0^2)}-1\right). \qquad (1.8)$$

*) Если I — множество точек, ∂I — его граница; D_0 — по условию открытое множество.

Выберем k столь большим, чтобы в шаре $K(y, \rho_0/2)$ было $Lv<0$. Это возможно, ибо правая часть в (8) представляет собой квадратный трехчлен относительно k, в котором коэффициент при k^2 имеет отрицательную верхнюю грань, коэффициент при k ограничен, а свободный член, зависящий от k, ограничен сверху ($c(x)\leqslant 0$!). Таким образом $Lv(x)<0$ в $K(y, \rho_0/2)$. Рассмотрим теперь в шаре $K(y, \rho_0/2)$ функцию $\varphi(x)=u(x)+\lambda v(x)$, где $\lambda=\text{const}>0$ будет выбрана ниже. На всей границе шара $\partial K(y, \rho_0/2)$ $\varphi(x)>u(x_0)$. В самом деле, на первой части границы, где $r_{xx_1}\geqslant\rho_0$, $v(x)\geqslant 0$, причем $v(x)=0$, лишь когда $r_{xx_1}=\rho_0$, т. е. когда $x\notin I$, и поэтому здесь $u(x)>u(x_0)$ и так как всюду в шаре $u(x)\geqslant u(x_0)$, то на всей первой части границы $\varphi(x)>u(x_0)$; на всей второй части, где $r_{xx_1}<\rho_0$, $u(x)>u(x_0)$, а так как $v(x)$ ограничена в шаре $K(y, \rho_0/2)$, то при достаточно малом $\lambda>0$ и $\varphi(x)=$ $=u(x)+\lambda v(x)$ также больше $u(x_0)$. Итак, $\varphi(x)>u(x_0)$ на всей границе шара $K(y, \rho_0/2)$. В центре же шара — точке y имеем $\varphi(y)=u(y)+\lambda v(y)=u(y)=u(x_0)$. Таким образом, $\varphi(x)$ имеет отрицательный минимум внутри области $K(y, \rho_0/2)$. Но при $\lambda>0$ $L\varphi=Lu+\lambda Lv=f(x)+\lambda Lv<0$ всюду в $K(y, \rho_0/2)$. Мы пришли к противоречию с теоремой 1.■

Теорема 1.3. *Пусть D—ограниченная область с границей Γ, а $u(x)$ — регулярное решение однородного уравнения $Lu=0$, не равное тождественно постоянной в D. Тогда если $c\leqslant 0$, то во всей области D*

$$|u|< \max_{x\in\Gamma} |u|(x)|, \tag{1.9}$$

если же $c\equiv 0$, то во всей области D

$$\min_{x\in\Gamma} u(x) < u(x) < \max_{x\in\Gamma} u(x). \tag{1.10}$$

Доказательство. Пусть сперва $c(x)\leqslant 0$. Так как $Lu=0$ и $u(x)\not\equiv\text{const}$, то по теореме 2 $u(x)$ достигает свой абсолютный отрицательный минимум и абсолютный положительный максимум только на границе. Поэтому во всей области D $|u|<\max\limits_{x\in\Gamma}|u(x)|$. Пусть теперь $c\equiv 0$, $u(x)\not\equiv\text{const}$. Если $\min\limits_{x\in\Gamma} u(x)<0$, а $\max\limits_{x\in\Gamma} u(x)>0$, то (10) — очевидное следствие теоремы 2. Пусть, далее, $\min\limits_{x\in\Gamma} u(x)=m\geqslant 0$ и пусть не выполнено первое неравенство в (10) (второе неравенство, очевидно, при этом справедливо), т. е. для некоторой точки $x_0\in D$ $u(x_0)\leqslant m$. Тогда для функции $v(x)=u(x)-(m+1)$ будем иметь:

$$Lv=0,\ v(x_0)\leqslant \min_{x\in\Gamma} v(x)=m-(m+1)=-1<0$$

и $v(x)\not\equiv \text{const}$, что противоречит теореме 2. Аналогично для случая, когда $\max\limits_{x\in\Gamma} u(x)\leqslant 0$. ∎

Теорема 1.4. *Пусть ограниченная область D с границей Γ принадлежит классу $A^{(2)}$, а $u(x)$ — регулярное решение уравнения (4), не равное тождественно постоянной в $(D+\Gamma)$. Тогда если $c\leqslant 0$, $f\leqslant 0$ $(f\geqslant 0)$, $\min\limits_{x\in\Gamma} u\leqslant 0$ $(\max\limits_{x\in\Gamma} u\geqslant 0)$, то для каждой точки $y\in\Gamma$, в которой $u(x)$ принимает свое минимальное (максимальное) значение, и для каждого луча l, выходящего из точки y и образующего тупой угол с внешней нормалью n к границе Γ в точке y, существует постоянная $\lambda>0$, такая, что при $x\in l$ и достаточно малых r_{xy}*

$$u(x)-u(y)>\lambda r_{xy}\quad (<-\lambda r_{xy}). \tag{1.11}$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай $c\leqslant 0$, $f\leqslant 0$, $\min\limits_{x\in\Gamma} u\leqslant 0$. Пусть $u(x)$ принимает минимальное значение в точке $y\in\Gamma$. Так как $(D+\Gamma)\in A^{(2)}$, то на внутренней нормали к Γ в точке y найдется такая точка x_1, что шар $K(x_1,\rho)$ с центром в x_1 радиуса $\rho=r_{x_1y}$, $\rho>0$ имеет с Γ лишь одну общую точку y. Обозначим через T область $K(x_1,\rho)\cap K(y,\rho/2)$ и рассмотрим в T функцию $v(x)=e^{-k\rho^2}-e^{-kr^2_{xx_1}}$; поскольку $r_{xx_1}\leqslant\rho$ в T, то $v(x)\leqslant 0$. Докажем, что если $\lambda_0>0$ достаточно мало, то для всех $x\in\partial T$

$$\varphi(x)\equiv u(x)-u(y)+\lambda_0 v(x)\geqslant 0. \tag{1.12}$$

В самом деле, на части ∂T, где $r_{xx_1}=\rho$, $v(x)=0$, а $u(x)\geqslant u(y)$ для всех $x\in T$, так что (12) выполнено; на части ∂T, где $r_{xx_1}<\rho$, $u(x)-u(y)\geqslant\beta>0$, β — некоторая постоянная (ибо вся эта часть ∂T отстоит от точки y на расстоянии $\rho/2$) и поэтому при достаточно малом λ_0 выполнено (12).

Далее, в теореме 2 было доказано, что если $k>0$ достаточно велико, то $Lv<0$ в T, поэтому $L\varphi=Lu-Lu(y)+\lambda_0 Lv=f(x)-c(x)u(y)+\lambda_0 Lv<0$ в T. Отсюда и из (12) в силу теоремы 1 следует, что $\varphi(x)\geqslant 0$ для всех $x\in T$.

Пусть теперь $x\in T$ и лежит на луче l. Так как $\varphi(x)\geqslant 0$, когда $x\in T$, то

$$u(x)-u(y)\geqslant-\lambda_0 v(x)=$$
$$=-\lambda_0(v(x)-v(y))=-\lambda_0 r_{xy}\frac{\partial v}{\partial l}(x^*), \tag{1.13}$$

x^* — некоторая точка луча l, лежащая между точками x и y. Далее,

$$\frac{\partial v}{\partial l}(x^*)=2kre^{-kr^2}\cos(r,l)|_{x^*}<0,$$

если r_{xy} достаточно мало, ибо

$$\cos(l, n) < 0; \text{ и } \left| \frac{\partial v}{\partial l}(x^*) \right| > \lambda' > 0,$$

так как $\rho/2 \leqslant r_{xx_1} \leqslant \rho$ для всех $x \in T \cap l$.

Отсюда и из (13) получаем утверждение теоремы с $\lambda = \lambda_0 \lambda'$.

Теорему 4 часто называют теоремой Жиро.

Замечания: 1. Более тонкое рассмотрение показывает, что теорема верна, когда $(D+\Gamma) \in A^{(1, \mu)}$, $\mu > 0$ — любое, см. [1].

2. Если существует производная $\frac{\partial u}{\partial l}(y)$, то, как видно из (11), $\frac{\partial u}{\partial l}(y) > 0$ в случае минимума, и $\frac{\partial u}{\partial l}(y) < 0$ в случае максимума ($\cos(l, n) < 0$, n — внешняя нормаль к Γ).

§ 2. Постановка краевых задач и теоремы единственности

Рассмотрим произвольную ограниченную область D с границей Γ, принадлежащую классу $A^{(1)}$, и в каждой точке Γ луч l, направленный так, что $\cos(l, n) \geqslant 0$, n — внешняя нормаль к Γ. Пусть α, β, φ — три функции, заданные на Γ, и такие, что $|\alpha| + |\beta| > 0$ на Γ.

Краевая задача в общем виде состоит в следующем. Требуется найти регулярное решение эллиптического уравнения $Lu = f$, которое имеет производную по направлению l в каждой точке Γ, в которой $\alpha \neq 0$, и во всех точках Γ удовлетворяет краевому условию

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial l} + \beta u = \varphi. \tag{2.1}$$

В такой общей постановке проблема разрешимости краевой задачи изучена не полностью и в настоящее время.

Остановимся подробнее на основных частных случаях.

1) $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$, т. е.

$$u = \varphi \text{ на } \Gamma. \tag{2.2}$$

Это так называемая *задача Дирихле* или *первая краевая задача*. Как мы увидим в дальнейшем, в этом случае требование гладкости границы Γ может быть существенно ослаблено.

2) $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv 0$, а направление l совпадает с направлением конормали ν, направляющие косинусы которой равны

$$\cos(\nu, x_i) = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \cos(n, x_j), \tag{2.3}$$

где
$$a=\Big[\sum_{i=1}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(x)\cos(n,x_j)\Big)^2\Big]^{1/2}.$$

Таким образом имеем
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=\varphi \text{ на } \Gamma. \tag{2.4}$$

Это так называемая *задача Неймана*, или *вторая краевая задача.*

3) $\alpha\equiv 1$, $l=\nu$, т. е.
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\beta u=\varphi \text{ на } \Gamma. \tag{2.5}$$

Это так называемая *третья краевая задача.*

4) $\alpha\equiv 1$; l — любое направление, такое, что $\cos(l, n)\geqslant\geqslant\gamma>0$ для всех точек $x\in\Gamma$, т. е.
$$\frac{\partial u}{\partial l}+\beta u=\varphi \text{ на } \Gamma,\ \cos(l,n)\geqslant\gamma>0. \tag{2.6}$$

Это так называемая *задача с косой производной.*

5) $\alpha\not\equiv 0$, но $\alpha=0$ на части Γ и l таково, что $\cos(l, n)\geqslant\geqslant\gamma>0$.

Это так называемая *смешанная задача.*

Сформулируем и докажем теоремы единственности для основных краевых задач.

Теорема 2.1. *Если $c(x)\leqslant 0$, то задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть есть два решения u_1 и u_2, тогда их разность $u(x)=u_1-u_2$ удовлетворяет условиям $Lu=0$ и $u=0$ на Γ. Отсюда в силу теоремы 1.3 $u(x)\equiv 0$. ∎

Если $c(x)$ имеет любой знак, то справедлива

Теорема 2.2. *Если диаметр области D достаточно мал, то задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Доказательство. Пусть $d>0$ — диаметр области D. Рассмотрим функцию $w(x)=2d^2-r^2_{xx_0}$, где $x_0\in D$ — любая точка. Имеем в области D $w(x)>0$, а
$$Lw=-2\sum_{i=1}^{N}a_{ii}(x)+O\Big(d\sum_{i=1}^{N}\max_{x\in\overline{D}}|b_i(x)|+d^2\max_{x\in\overline{D}}|c(x)|\Big)<0,$$

если d — достаточно мало. Положим $u=vw$, где $u=u_1(x)-u_2(x)$ — разность двух решений и подставим в уравнение $Lu=0$. В получившемся для v уравнении коэффициент при свободном члене равен $Lw<0$, так что для v справедлива теорема 1, т. е. $v\equiv 0$. ∎

Теорема 2.3. *Если область* $(D+\Gamma)\in A^{(1,\mu)}$, *а* $c\leqslant 0$, и $\beta\geqslant 0$, *причем хотя бы одна из функций* c *и* β *не равна нулю тождественно, то задача Неймана, третья краевая задача и задача с косой производной имеют не более одного решения.*

Доказательство. Пусть есть два решения u_1 и u_2, тогда их разность $u(x)=u_1-u_2$ есть решение задачи

$$\begin{cases} Lu=0 \text{ в } D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial l}+\beta u=0 \text{ на } \Gamma. \end{cases}$$

Если бы $u(x)\not\equiv 0$, то она по теореме 1.2 достигала бы отрицательного минимума или положительного максимума на Г, пусть, например, она имеет на Г отрицательный минимум. Так как либо $c\not\equiv 0$, либо $\beta\not\equiv 0$, то $u(x)\not\equiv\text{const}$. Тогда по замечанию к теореме 1.4 $\dfrac{\partial u}{\partial l}<0$ в точке отрицательного минимума y, $y\in\Gamma$. Поэтому в этой точке $\dfrac{\partial u}{\partial l}+\beta(y)u(y)<0$, что невозможно. ■

Если $c\equiv 0$, то из приведенного доказательства вытекает

Теорема 2.4. *Если* $(D+\Gamma)\in A^{(1,\mu)}$, *а* $c\equiv 0$, *то два решения задачи Неймана отличаются лишь на постоянную.*

Комбинируя доказательства теорем 1 и 3, получим, что справедлива

Теорема 2.5. *В условиях теоремы 3 смешанная задача имеет не более одного решения.*

Наконец, если область D неограниченна, то, беря шар $K(0, R)$ с центром в начале координат радиуса R, рассматривая область $D\cap K(0, R)$ и устремляя $R\to\infty$, получим теорему.

Теорема 2.6. *Все предыдущие теоремы верны и в случае неограниченной области* D, *если добавить условие на бесконечности*

$$\lim_{x\to\infty} u(x)=0.$$

Литературные указания

Глава 1 содержит классический материал. При изложении его мы придерживались книги [1].

ГЛАВА 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

В этой главе мы изучим различные классические способы решения краевых задач для эллиптических операторов второго порядка на примере простейшего и важнейшего оператора — оператора Лапласа. Мы введем здесь фундаментальные для теории эллиптических уравнений понятия — такие, как понятия различных обобщенных решений, регулярности граничной точки, емкости множества, устранимых особенностей и др.

Следует особо подчеркнуть, что все методы и понятия, развитые для оператора Лапласа, допускают естественные обобщения на случай произвольного линейного эллиптического оператора второго порядка.

§ 1. Метод Пуанкаре — Перрона решения задачи Дирихле

1°. Некоторые свойства гармонических функций. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа в шаре $K(0, R)$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } K(0, R), \\ u = \varphi \text{ на } \partial K(0, R) = S(0, R), \end{cases} \tag{1.1}$$

$\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на сфере $S(0, R)$. Хорошо известно из общего курса (см. [16]), что, решая задачу (1) методом разделения переменных, мы приходим к представлению регулярного решения в виде интеграла Пуассона:

$$u(x) = \frac{R^2 - \rho^2}{R\omega_N} \int\limits_{S(0,R)} \frac{\varphi(y)\, ds_y}{(R^2 + \rho^2 - 2\rho R\cos\theta)^{N/2}}, \quad \rho < R, \tag{1.2}$$

здесь $\omega_N = \dfrac{2(\sqrt{\pi})^N}{\Gamma(N/2)}$ — площадь поверхности единичной $(N-1)$-мерной сферы, $\rho = r_{0x}$ — сферический радиус точки x; $y \in S(0, R)$, θ — угол между векторами, идущими из начала координат в точки x и y. Формула (2) дает решение задачи (1) для любой непрерывной на $S(0, R)$ функции $\varphi(x)$. Из формулы (2) вытекает ряд простых и важных следствий.

Теорема 1.1 (теорема о среднем). *Если $u(x)$ гармонична в области D (т. е. $\Delta u=0$ в D), а $K(x, R)$ — любой шар, лежащий в D, то справедлива формула среднего значения*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \int\limits_{\partial K(x,R)} u(y)\, ds_y = \frac{1}{\omega_N} \int\limits_{\omega} u(R, \omega_y)\, d\omega_y, \quad (1.3)$$

ω — единичная сфера.

Доказательство. Поскольку гармоническая в шаре $K(x, R)$ функция $u(x)$ (в силу теоремы единственности, см. теорему 1.2.1) представляется интегралом Пуассона (2), в котором роль функции φ исполняет $u(x)$, то для доказательства (3) достаточно в формуле (2) взять x совпадающим с центром шара $K(x, R)$ (при этом $\rho=0$). ■

Теорема 1.2. *Пусть $\{u_n(x)\}$, ($n=1, 2, \ldots$) — последовательность функций, непрерывных в замкнутой области ($D+\Gamma$) и гармоничных в D. Пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ краевых значений этих функций равномерно сходится на Γ. Тогда $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в ($D+\Gamma$) к функции $u(x)$, гармоничной в D, непрерывной в ($D+\Gamma$) и имеющей краевое значение $\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.*

Доказательство. Так как последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится на Γ, то в силу критерия Коши по любому $\varepsilon>0$ найдется N, такое, что при $n, m\geqslant N$ справедливо неравенство

$$\max_{x\in\Gamma} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Поскольку $(u_n(x)-u_m(x))$ — гармоническая функция с краевым значением $(\varphi_n(x)-\varphi_m(x))$, то по теореме 1.1.3 имеем в силу (4)

$$\max_{x\in(D+\Gamma)} |u_n(x) - u_m(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x\in\Gamma} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon \text{ при } n, m \geqslant N,$$

т. е. последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в $(D+\Gamma)$. Поэтому предельная функция $u(x) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$ существует, непрерывна в $\overline{D}=D+\Gamma$ и $u|_\Gamma = \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. Докажем, что $u(x)$ гармонична в D; для этого достаточно доказать, что $u(x)$ гармонична в любом шаре $K\subset D$. Запишем $u_n(x)$ в шаре K через интеграл Пуассона

$$u_n(x) = \frac{R^{N-2}(R^2-\rho^2)}{\omega_N} \int\limits_{\omega} \frac{u_n(y)\, d\omega_y}{(R^2+\rho^2-2\rho R\cos\theta)^{N/2}}, \quad \rho < R. \quad (1.5)$$

Так как $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно, то можно перейти к пределу под знаком интеграла в (5), получим

$$u(x) = \frac{R^{N-2}(R^2-\rho^2)}{\omega_N} \int_\omega \frac{u(y)\, d\omega_y}{(R^2+\rho^2-2\rho R\cos\theta)^{N/2}}, \quad (1.6)$$

т. е. $u(x)$ гармонична в K (ибо существует лишь одна гармоническая в шаре K функция с краевым условием $u(y)$ и она представляется интегралом Пуассона (6)). ■

Теорема 1.3. *Пусть $\{u_n(x)\}$, $(n=1, 2, \ldots)$ — монотонная последовательность функций, гармоничных в открытой области D. Пусть $\{u_n(x)\}$ сходится в какой-либо точке $x_0 \in D$. Тогда $\{u_n(x)\}$ сходится всюду в D к гармонической функции $u(x)$, причем сходимость равномерна на любом компакте $D_0 \subset D$.*

Доказательство. Будем ради определенности рассматривать неубывающую последовательность $\{u_n(x)\}$. Достаточно доказать, что $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в любом шаре, лежащем в D, ибо по теореме 2 она будет сходиться тогда к гармонической в этом шаре функции. Покрывая такими шарами компакт D_0 и пользуясь леммой Гейне — Бореля, получим утверждение о равномерной сходимости $\{u_n(x)\}$ на D_0.

Докажем, что $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в любом шаре $K(x_0, R)$ с центром в точке x_0 и содержащимся в D, $K(x_0, R) \subset D$. Рассмотрим концентрический с ним шар $K(x_0, \bar{R})$ большего радиуса, $\bar{R} > R$, и также содержащийся в D. Поскольку $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, то для любого $x \in K(x_0, R)$ имеем

$$\frac{\bar{R}^{N-2}(\bar{R}^2-\rho^2)}{\omega_N(\bar{R}+\rho)^N} \leqslant \frac{\bar{R}^{N-2}(\bar{R}^2-\rho^2)}{\omega_N(\bar{R}^2+\rho^2-2\rho\bar{R}\cos\theta)^{N/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{R}^{N-2}(\bar{R}^2-\rho^2)}{\omega_N(\bar{R}-\rho)^N}, \quad (1.7)$$

где $\rho = r_{x_0 x} \leqslant R < \bar{R}$.

Так как $\{u_n(x)\}$ — неубывающая последовательность, то для всех $x \in D$ $u_n(x) - u_m(x) \geqslant 0$ при $n > m$. Фиксировав в (7) x $(\rho = r_{x_0 x})$, умножим все три члена в (7) на неотрицательное число $u_n(y) - u_m(y)$ и проинтегрируем по y на сфере $\partial K(x_0, \bar{R})$. Получим в силу теоремы о среднем и формулы Пуассона (2)

$$\frac{\bar{R}^{N-2}(\bar{R}^2-\rho^2)}{\omega_N(\bar{R}+\rho)^N}[u_n(x_0)-u_m(x_0)] \leqslant [u_n(x)-u_m(x)] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\bar{R}^{N-2}(\bar{R}^2-\rho^2)}{\omega_N(\bar{R}-\rho)^N}[u_n(x_0)-u_m(x_0)]. \qquad (1.8)$$

Так как $\rho \leqslant R < \bar{R}$ и последовательность $\{u_n(x_0)\}$ сходится по условию, то из второго неравенства в (8) получим

$$0 \leqslant \max_{x \in K(x_0, R)} [u_n(x)-u_m(x)] < \varepsilon \text{ при } n, m > N(\varepsilon), \qquad (1.9)$$

т. е. последовательность $\{u_n(x)\}$ равномерно сходится в шаре $K(x_0, R)$. Если теперь x_1 — любая точка D, $x_1 \neq x_0$, то соединим точку x_1 с точкой x_0 ломаной l с конечным числом звеньев, лежащей в области D, и пусть $\delta > 0$ — расстояние от l до ∂D. Беря последовательно, начиная с точки x_0, шары фиксированного радиуса $r < \delta/2$ с центрами на ломаной l так, что центр последующего шара лежит на границе предыдущего, мы докажем, что в каждом таком шаре последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно и, в частности, что она сходится в точке x_1, а, значит, по предыдущему, и в любом шаре, принадлежащем D с центром в x_1.

Теоремы 2 и 3 часто называют первой и второй теоремой Гарнака.

Теорема 1.4. *Гармоническая во всем пространстве функция не может быть ограничена сверху или снизу, если она не является постоянной.*

Доказательство. Пусть, например, $u(x) > m$ для всех $x \in \mathbf{R}^N$. Так как константа — гармоническая функция, то прибавляя, если надо, постоянную, мы можем считать, что $m > 0$.

Пусть x — произвольная точка $\mathbf{R}^N$, возьмем R столь большим, чтобы $\rho = r_{0x} < R$. Так как $u(y) \geqslant m > 0$, то, умножая неравенства (7) на $u(y)$ и интегрируя по y на сфере $\partial K(0, R)$, получим

$$\frac{R^{N-2}(R^2-\rho^2)}{(R+\rho)^N}u(0) \leqslant u(x) \leqslant \frac{R^{N-2}(R^2-\rho^2)}{(R-\rho)^N}u(0).$$

Устремляя здесь $R \to \infty$, получим $u(x) = u(0)$ для всех $x \in \mathbf{R}^N$. ∎

Эта теорема носит название теоремы Лиувилля.

2°. Супер- и субгармонические функции. Решение задачи Дирихле. Пусть D — ограниченная открытая область с границей Γ, а K — произвольный шар, принадлежащий замкнутой области $\bar{D} = D + \Gamma$. Если v — произвольная непрерывная функция, заданная на $\bar{D}$, то через v_K будем обозначать непрерывную функцию, равную v на ∂K — границе шара K и вне его, и гармоническую внутри K.

Определение 1.1. *Непрерывная в $\bar{D}$ функция $v(x)$ называется супергармонической (субгармонической) в D, если для любого шара $K \subset \bar{D}$*

$$v_K \leqslant v \quad (v_K \geqslant v). \tag{1.10}$$

Определение 1.2. *Пусть на* Γ *задана непрерывная функция* $\varphi(x)$. *Функция* $v(x)$ *называется верхней (нижней) для* $\varphi(x)$, *если она супергармонична в* D *(субгармонична) и если на* Γ

$$v(x) \geqslant \varphi(x) \quad (v(x) \leqslant \varphi(x)). \tag{1.11}$$

Перечислим основные свойства супергармонических (субгармонических) и верхних (нижних) функций.

1) *Гармоническая**) *функция является супер- и субгармонической.* Это свойство очевидно в силу определения 1.

2) *Если* v *и* w *супергармоничны, то и* $v+w$ — *супергармонична.* Сразу следует из того, что для любого шара $K \subset \bar{D}$

$$(v+w)_K = v_K + w_K.$$

3) *Если* v — *супергармонична, а* w — *гармонична, то* $v \pm w$ — *супергармонична.*

3) есть следствие 2), ибо $(\pm w)$ — супергармонична.

4) *Если* v *супергармонична, то* $(-v)$ — *субгармонична, и наоборот.*

4) есть следствие определения 1.

5) *Если* v *супергармонична, а* w *субгармонична, то* $(v-w)$ — *супергармонична.*

Так как $v-w=v+(-w)$, то 5) есть следствие 2) и 4).

6) *Если* v *супергармонична, то она принимает свое наименьшее значение на границе* Γ.

Доказательство. Пусть минимум достигается во внутренней точке $x_0 \in D$. Возьмем шар $K(x_0) \subset \bar{D}$ с центром в точке x_0 такого радиуса, чтобы на его границе $\partial K(x_0)$ была хотя бы одна точка $z \in \Gamma$. Тогда на всей границе $\partial K(x_0)$ $v(x)=v(x_0)$. В самом деле, $v(x) \geqslant v(x_0) = \min v$ для всех $x \in \partial K(x_0)$ и если в точке $y \in \partial K(x_0)$ было бы $v(y) > v(x_0)$, то в силу непрерывности v это неравенство выполнялось бы и в некоторой окрестности точки y, а тогда в силу теоремы о среднем для гармонической функции $v_{K(x_0)}$ мы имели бы $v_{K(x_0)}(x_0) > v(x_0)$, что невозможно, ибо v — супергармонична в D. Итак, на всей границе $\partial K(x_0)$ $v(x)=v(x_0)$, в частности, в точке $z \in \Gamma$ $v(z)=v(x_0)$, и 6) доказано.

7) *Любая верхняя функция* v *всюду в* $\bar{D}$ *не меньше любой нижней функции* w.

Доказательство. Функция $v-w$ супергармонична в силу 5). Так как на Γ $v \geqslant \varphi$, а $w \leqslant \varphi$, то $v-w \geqslant 0$ на Γ и в силу 6) $v-w \geqslant 0$ всюду в $\bar{D}$.

---

*) Здесь и ниже в этом параграфе под гармонической в D функцией понимаем функцию, непрерывную в $\bar{D}$ и гармоничную в D.

8) *Пусть* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *— верхние функции, тогда и* v, $v=\min\{v_1, \ldots, v_n\}$, *также является верхней функцией.*

Доказательство. Поскольку $v(x)$ непрерывна в $\bar{D}$ и $v \geqslant \varphi$ на Γ, то остается доказать, что v супергармонична в D. Пусть $K \subset \bar{D}$ любой шар, пусть $x_0 \in K$ любая его точка; $v(x_0)$ равно значению в точке x_0 одной из функций $v_1, \ldots, v_n$, например v_1, поэтому в точке x_0

$$v(x_0) = v_1(x_0) \geqslant v_{1K}(x_0). \tag{1.12}$$

Далее, так как $v_1 \geqslant v$, то $v_{1K} \geqslant v_K$, ибо v_{1K} и v_K — гармонические в K функции, а на ∂K $v_1 \geqslant v$. Итак, $v_{1K}(x_0) \geqslant v_K(x_0)$. Подставляя это в (12), получим $v(x_0) \geqslant v_K(x_0)$ для любой точки $x_0 \in K$, что и доказывает супергармоничность v.

9) *Если* v *— верхняя функция, то и* v_K *— верхняя функция.*

Доказательство. Обозначим $v_K = w$. Так как w — непрерывна и $\geqslant \varphi$ на Γ, то остается показать супергармоничность w, т. е. что для любого шара $K_1 \subset \bar{D}$

$$w_{K_1} \leqslant w. \tag{1.13}$$

Неравенство (13) заведомо выполнено, если K_1 лежит целиком внутри или вне шара K, ибо в первом случае w гармонична в K, а значит, и супергармонична, а во втором случае $w=v$ и, стало быть, w супергармонична. Таким образом, надо рассмотреть два случая, когда K лежит внутри K_1 и когда их границы пересекаются. Эти случаи вполне аналогичны, рассмотрим второй из них. Имеем всюду в $\bar{D}$

$$w \leqslant v, \tag{1.14}$$

а вне K и на ∂K

$$w = v, \tag{1.15}$$

Поэтому вне K и на ∂K имеем

$$w = v \geqslant v_{K_1} \geqslant w_{K_1}, \tag{1.16}$$

здесь первое неравенство имеет место в силу супергармоничности v, а второе — в силу (14). Таким образом, $w \geqslant w_{K_1}$ в той части шара K_1, которая лежит вне и на границе шара K. Осталось показать, что $w \geqslant w_{K_1}$ и в общей части $K \cap K_1$ шаров K и K_1. Так как внутри этой области w и w_{K_1} гармоничны, то достаточно доказать, что $w \geqslant w_{K_1}$ на $\partial(K \cap K_1) = (\partial K_1 \cap K) \cup (\partial K \cap K_1)$, но это так, ибо на $\partial K \cap K_1$ выполняется (16), а на $\partial K_1 \cap K$ $w = w_{K_1}$. Свойство доказано.

10) *Если* $v(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(\bar{D})$, *то для того, чтобы* $v(x)$ *была супергармонична (субгармонична) в* D, *необходимо и достаточно выполнение неравенства* $\Delta v \leqslant 0$ $(\Delta v \geqslant 0)$ *в* D.

Доказательство. Необходимость. Пусть v — супергармонична и пусть хотя бы в одной точке $x_0 \in D$ $\Delta v(x_0) > 0$, тогда $\Delta v > 0$ и в некоторой окрестности Ω точки x_0. Возьмем шар $K \subset \Omega$. Так как v супергармонична, то $w = v - v_K \geqslant 0$ в K, $\Delta w = \Delta v - \Delta v_K > 0$ в K и в силу принципа максимума (см. теорему 1.1.2) w достигает положительного максимума на ∂K, что невозможно, ибо $w = v - v_K = 0$ на ∂K по определению v_K.

Достаточность. Пусть $\Delta v \leqslant 0$ в D и $K \subset \bar{D}$ — любой шар. Рассмотрим функцию $w = v - v_K$; имеем $\Delta w \leqslant 0$ в K, поэтому w достигает минимума на ∂K, где $w = v - v_K = 0$, значит всюду в K $v \geqslant v_K$, т. е. v — супергармонична.

Теперь мы докажем теорему, дающую способ построения решения задачи Дирихле для оператора Лапласа. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на границе Г. Рассмотрим множество всех верхних функций для $\varphi(x)$. Оно не пусто, ибо любая константа $C \geqslant \max\limits_{x \in \Gamma} \varphi(x)$ является верхней функцией. Это множество ограничено снизу в силу 7) любой нижней функцией, например $C_1 = \min\limits_{x \in \Gamma} \varphi(x)$. Поэтому существует точная нижняя грань $\bar{u}(x)$ всех верхних функций для $\varphi(x)$, $\bar{u}(x) = \inf v(x)$.

Теорема 1.5. *Точная нижняя грань $\bar{u}(x)$ всех верхних функций есть гармоническая в D функция.*

Доказательство. Достаточно доказать гармоничность $\bar{u}(x)$ в любом открытом шаре $K \subset D$. Пусть x_0 — центр шара K, а $\varepsilon > 0$ — любое число. Обозначим через $\bar{v}_1$ верхнюю функцию, принимающую в точке x_0 значение не большее, чем $\bar{u}(x_0) + \varepsilon$. Положим $v_1 = (\bar{v}_1)_K$, v_1 — верхняя функция в силу 9), $v_1 \leqslant \bar{v}_1$ в K, ибо $\bar{v}_1 - v_1$ — супергармоническая в K функция, равная 0 на ∂K. Поэтому $\bar{u}(x_0) \leqslant v_1(x) \leqslant \bar{u}(x_0) + \varepsilon$ и v_1 — гармонична по построению. Обозначим через $\bar{v}_2$ верхнюю функцию, принимающую в точке x_0 значение, не большее, чем $\bar{u}(x_0) + \varepsilon/2$. Положим $\bar{\bar{v}}_2 = \min\{v_1, \bar{v}_2\}$, $\bar{\bar{v}}_2$ — верхняя функция в силу 8), ее значение в точке x_0 не превосходит $\bar{u}(x_0) + \varepsilon/2$, и пусть $v_2 = (\bar{\bar{v}}_2)_K$, v_2 — гармоническая верхняя функция, и ее значение в точке x_0 не больше, чем $\bar{u}(x_0) + \varepsilon/2$; и $v_2 \leqslant v_1$.

Продолжая этот процесс, мы получим не возрастающую последовательность $\{v_n(x)\}$, гармонических в K верхних функций, сходящуюся в точке x_0. По теореме 3 эта последовательность сходится в K к некоторой гармонической функции $v(x)$ и сходимость равномерна на любом компакте $B \subset K$. Докажем, что $v(x) = \bar{u}(x)$ в K. Имеем $v(x_0) = \bar{u}(x_0)$, надо доказать, что $v(x)$ совпадает в K с точной нижней гранью всех верхних функций. Так как $v(x)$ предел верхних функций, то $v(x) \geqslant \bar{u}(x)$. Пусть в некоторой точке $x_1 \in K$ $v(x_1) > \bar{u}(x_1)$.

Тогда существует верхняя функция w, которая в этой точке $x_1 \in K$ имеет значение $w(x_1) < v(x_1)$. Опишем шар K_1 с центром в точке x_0 радиуса ρ, $\rho = r_{x_0 x_1}$. Каждая функция $w_n = (\min\{w, v_n\})_{K_1}$ является верхней функцией. Так как последовательность $\{v_n\}$ сходится равномерно на K_1, то по теореме 2 и w_n сходится равномерно на K_1 к функции $w_0 = (\min\{w, v\})_{K_1}$, причем в силу теоремы 2 w_0 гармонична в K_1. На ∂K_1 $w_0(x) \leqslant v(x)$, а в точке x_1 (а, значит, и в некоторой ее окрестности) $w_0(x_1) < v(x_1)$. Поэтому по теореме о среднем $w_0(x_0) < v(x_0)$. Но $v(x_0) = \bar{u}(x_0)$, т. е. $w_0(x_0) < \bar{u}(x_0)$. Поэтому при достаточно большом n и $w_n(x_0) < \bar{u}(x_0)$, что невозможно, так как $w_n(x)$ — верхняя функция. ■

Точная нижняя грань всех верхних функций $\bar{u}(x) = \inf v(x)$ существует для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ и любой границы Γ; как доказано в теореме 5 $\bar{u}(x)$ гармонична в области D. Естественно поэтому считать ее обобщенным решением задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ в } D, \\ u = \varphi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{1.17}$$

Функцию $\bar{u}(x)$ будем называть *обобщенным по Пуанкаре* или просто *обобщенным* решением задачи Дирихле (17). Очевидно, что если существует регулярное решение $u(x)$ задачи Дирихле (17), то оно совпадает с $\bar{u}(x)$ — обобщенным решением. В самом деле, регулярное решение $u(x)$ является верхней функцией, поэтому для любой точки $y \in \Gamma$ имеем

$$\varphi(y) \leqslant \varliminf_{x \to y} \bar{u}(x) \leqslant \varlimsup_{x \to y} \bar{u}(x) \leqslant \lim_{x \to y} u(x) = \varphi(y),$$

т. е. $\bar{u}(x) \in C^{(0)}(D+\Gamma)$ и $\bar{u}(x) = \varphi(x)$ на Γ, поэтому, по теореме единственности, $u(x) \equiv \bar{u}(x)$ в $\bar{D}$. В следующем пункте мы выясним, как ведет себя обобщенное решение $\bar{u}(x)$ на границе Γ.

3°. Регулярные и иррегулярные точки границы. Барьеры.

Определение 1.3. *Точка $y \in \Gamma$ называется регулярной точкой границы, если для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на Γ, обобщенное решение $\bar{u}(x)$ задачи Дирихле удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \to y,\, x \in D} \bar{u}(x) = \varphi(y).$$

Определение 1.4. *Область, все точки границы которой регулярны, называется нормальной.*

Теорема 1.6. *Для регулярности точки $y \in \Gamma$ достаточно, чтобы существовала супергармоническая в D функция $w_y(x)$, обладающая свойствами:*

1) $w_y(y)=0$;

2) $w_y(x)>0,\ x\in(\overline{D}\setminus y)$.

Функция $w_y(x)$ называется барьером.

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$ — любое. Возьмем окрестность $\Omega_\varepsilon(y)$ точки y, такую, что для всех точек пересечения $\Gamma\cap\Omega_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$\varphi(y)-\varepsilon\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(y)+\varepsilon, \tag{1.18}$$

что возможно, ибо $\varphi(x)$ непрерывна на Γ. Рассмотрим две функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\psi_1(x)=\varphi(y)-\varepsilon-Cw_y(x),\quad \psi_2(x)=\varphi(y)+\varepsilon+Cw_y(x), \tag{1.19}$$

где $C>0$ — некоторая постоянная, которую мы выберем позже. Покажем, что $\psi_1(x)$ — нижняя функция, а $\psi_2(x)$ — верхняя. Докажем, например, второе: $\varphi(y)+\varepsilon$ — постоянная, а $w_y(x)$ — супергармонична, и так как $C>0$, то $\psi_2(x)$ — супергармоническая в D функция. Осталось доказать, что $\psi_2(x)\geqslant\varphi(x)$ на Γ. На части $\Gamma\cap\Omega_\varepsilon(y)$ выполнено (18), $w_y(x)\geqslant 0$, так что $\psi_2(x)\geqslant\varphi(x)$. На остальной части $\Gamma\setminus(\Gamma\cap\Omega_\varepsilon(y))$, $w_y(x)\geqslant\beta>0$, β — некоторая постоянная, поэтому, взяв C достаточно большим, получим, что и здесь $\psi_2(x)\geqslant\varphi(x)$.

Так как $\psi_1(x)$ — нижняя, а $\psi_2(x)$ — верхняя функции, то $\bar{u}(x)$ заключена между ними для всех $x\in\overline{D}$. В частности, при $x\to y$ получим

$$\psi_1(y)=\varphi(y)-\varepsilon\leqslant\varliminf_{x\to y}\bar{u}(x)\leqslant\varlimsup_{x\to y}\bar{u}(x)\leqslant\psi_2(y)=\varphi(y)+\varepsilon. \tag{1.20}$$

Так как $\varepsilon>0$ — любое, то из (20) вытекает, что $\lim\limits_{x\to y,\,x\in D}\bar{u}(x)=\varphi(y)$, т. е. точка $y\in\Gamma$ регулярна. ∎

Доказанная теорема позволяет дать простой, хотя и довольно грубый, достаточный геометрический критерий регулярности граничной точки $y\in\Gamma$ в случае, когда размерность N области D больше или равна 3. Регулярной будет любая точка $y\in\Gamma$, которой можно коснуться извне области D некоторым шаром K (т. е. K имеет с D лишь одну общую точку y). Действительно, для такой точки $y\in\Gamma$ барьером будет служить функция

$$w_y(x)=\frac{1}{r_{x_0y}^{N-2}}-\frac{1}{r_{x_0x}^{N-2}}, \tag{1.21}$$

x_0 — центр шара K, $x_0\notin\overline{D}$; $w_y(x)$ гармонична в D и удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 6.

Следующая теорема показывает, что регулярность граничной точки есть локальное свойство.

Теорема 1.7. *Для регулярности точки $y \in \Gamma$ достаточно, чтобы в какой-либо окрестности $\Omega_y \subset D$ точки y существовала супергармоническая функция $\bar{w}_y(x)$ (барьер), обладающая свойствами:*

1) $\bar{w}_y(x)$ *определена и непрерывна в замкнутой окрестности* $\bar{\Omega}_y$;

2) $\bar{w}_y(y)=0$;

3) $\bar{w}_y(x)>0$, $x \in (\bar{\Omega}_y \setminus y)$.

Доказательство. Покажем, что если выполнены условия теоремы 7, то существует барьер $w_y(x)$ в смысле теоремы 6, т. е. точка $y \in \Gamma$ регулярна. Заметим, прежде всего, что из 2) и 3) в силу непрерывности $\bar{w}_y(x)$ следует существование такого числа $k>0$, что для всех точек пересечения $\partial\Omega_y \cap D$ имеет место неравенство

$$w_y(x) \geqslant k, \quad x \in \partial\Omega_y \cap D. \tag{1.22}$$

Указанным барьером $w_y(x)$ будет функция, равная

$$w_y(x) = \begin{cases} \min\left\{\frac{2}{k}\bar{w}_y(x), 1\right\} & \text{в } \Omega_y, \\ 1 & \text{вне } \Omega_y, \end{cases} \tag{1.23}$$

В самом деле, $w_y(x)$ непрерывна в $\bar{D}$, $w_y(y)=0$, $w_y(x)>0$ в $\bar{D}\setminus y$. Остается доказать супергармоничность $w_y(x)$ в D. Возьмем любой шар $K \subset \bar{D}$ и обозначим через D_1 область, где $w_y(x)=1$, D_1 — замкнутая область, $D_2=\bar{D}\setminus D_1$. Если $K \subset D_1$, то

$$(w_y)_K = w_y, \tag{1.24}$$

ибо $w_y=1$ и, стало быть, гармонична в K. Если $K \subset D_2$, то

$$(w_y)_K \leqslant w_y, \tag{1.25}$$

ибо в D_2 $w_y(x) = \frac{2}{k}\bar{w}_y(x)$, а $w_y(x)$ — супергармонична. Пусть, наконец, $K \cap D_1 \neq 0$ и $K \cap D_2 \neq 0$. Так как в силу (23) $w_y \leqslant 1$, то $(w_y)_K \leqslant 1$ и потому в $K \cap D_1$ имеем

$$(w_y)_K \leqslant w_y = 1. \tag{1.26}$$

В области $K \cap D_2$ $(w_y)_K$ — гармонична, а w_y — супергармонична, поэтому неравенство $(w_y)_K \leqslant w_y$ для $K \cap D_2$ будет доказано, если мы покажем, что оно выполняется на $\partial(K \cap D_2)$, но это на самом деле так, ибо на $\partial K \cap D_2$ $(w_y)_K = w_y$ по определению $(w_y)_K$, а на $\partial D_2 \cap K$ $w_y=1$, а $(w_y)_K \leqslant 1$ $((w_y)_K \leqslant 1$

всюду в D). Итак и в этом случае $(w_y)_K \leqslant w_y$, так что $w_y(x)$ супергармонична в D. ■

В двумерном случае доказанная теорема позволяет дать в известном смысле окончательный геометрический критерий регулярности граничной точки, именно точка $y \in \Gamma$ регулярна, если она является концом некоторой кривой l, лежащей вне $\bar{D}$ и пересекающей все окружности достаточно малого радиуса с центром в точке y. В самом деле, поместим начало координат в точку y, а окрестность Ω_y возьмем столь малой, что все ее точки будут удалены от y меньше, чем на 1/2. Дуга l пересекает окружность, содержащую Ω_y. Считая дугу l разрезом, возьмем однозначную ветвь функции $\ln(x_1+ix_2)$. Тогда очевидно, что $\bar{w}_y(x) = -\mathrm{Re}\frac{1}{\ln(x_1+ix_2)}$, $x=(x_1, x_2)$, удовлетворяет всем условиям теоремы 7.

Итак, в двумерном случае любая область D, граница которой состоит из конечного числа непрерывных жордановых кривых, является нормальной.

В двух следующих параграфах мы построим еще одно обобщенное решение задачи Дирихле и дадим совсем другое, необходимое и достаточное, условие регулярности граничной точки, введя новое важное понятие емкости множества. Этот новый критерий даст нам возможность и в случае размерности $N \geqslant 3$ получить простой и достаточно сильный геометрический признак регулярности граничных точек.

Замечание. Мы доказали, что задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ разрешима в классическом смысле (т. е. решение регулярно) при любой непрерывной граничной функции $\varphi(x)$ в любой нормальной области D. Рассмотрим теперь задачу Дирихле для неоднородного уравнения

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } D, \\ u = \varphi & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{1.27}$$

Задача Дирихле (27) разрешима в классическом смысле, если область D — нормальна, $\varphi \in C^{(0)}(\Gamma)$, а $f \in C^{(0)}(\bar{D}) \cap C^{(0,\mu)}(D)$, $\mu > 0$ — любое.

Действительно, представив $u(x)$ в виде (подробно о свойствах объемного потенциала см. гл. 4, § 2)

$$u(x) = -\int_D h(x, y) f(y)\, dy + u_1(x),$$

где $h(x, y)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$h(x, y) = h(r_{xy}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{xy}}, & N = 2, \\ \dfrac{1}{\omega_N (N-2)} \dfrac{1}{r_{xy}^{N-2}}, & N > 2, \end{cases} \tag{1.28}$$

для $u_1(x)$ получим задачу Дирихле уже с однородным уравнением и с краевой функцией $\varphi_1(x)=\varphi(x)+\int\limits_D h(x, y)f(y)dy$, $\varphi_1\in C^{(0)}(\Gamma)$.

§ 2. Обобщенное по Винеру решение задачи Дирихле

Определение 2.1. *Пусть D — произвольная открытая ограниченная область с границей Γ. Последовательность областей $\{D_n\}$ называется винеровской аппроксимацией области D, если выполнены два условия:*

1) *каждая область D_n ограничена поверхностью Γ_n типа Ляпунова, т. е. $(D_n+\Gamma_n)\in A^{(1,\mu)}$, и $(D_n+\Gamma_n)\subset D$, $n=1, 2...$;*

2) *каков бы ни был компакт $K\subset D$, все области D_n, начиная с некоторого номера $n\geqslant n_0(K)$, содержат K внутри себя.*

Пусть на границе Γ задана непрерывная функция $\varphi(x)$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u=0 \text{ в } D, \\ u=\varphi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{2.1}$$

Продолжим $\varphi(x)$ непрерывным образом на все пространство $\mathbf{R}^N$, полученную функцию обозначим $\overline{\varphi}(x)$, $x\in\mathbf{R}^N$.

Теорема 2.1. *Пусть $\{D_n\}$ — винеровская аппроксимация области D; рассмотрим в области $(D_n+\Gamma_n)$ задачу Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u=0 \text{ в } D_n, \\ u=\overline{\varphi} \text{ на } \Gamma_n, \end{cases} \tag{2.2}$$

ее решение обозначим $u_{n,\overline{\varphi}}$. Тогда последовательность $\{u_{n,\overline{\varphi}}\}$, $(n=1, 2, ...)$ сходится равномерно на любом компакте $B\subset D$ к гармонической функции u_φ. Предельная функция u_φ не зависит от способа продолжения φ с границы Γ и от выбора последовательности $\{D_n\}$. Если существует регулярное решение задачи (1), то оно совпадает с u_φ.

Доказательство. Обозначим через $K(0, R)$ шар с центром в начале координат, такой, что $(D+\Gamma)\subset K(0, R)$. Так как $\overline{\varphi}(x)$ непрерывная функция, то при любом $\varepsilon>0$ найдется функция $\psi(x)$, являющаяся разностью двух супергармонических функций, и такая, что в шаре $K(0, R)$ выполняется неравенство

$$|\overline{\varphi}(x)-\psi(x)|<\varepsilon, \quad x\in K(0, R). \tag{2.3}$$

В самом деле, возьмем функцию $\psi(x)\in C^{(3)}(\mathbf{R}^N)$, удовлетворяющую (3) при $x\in K(0, R)$ и равную нулю при $r_{0x}\geqslant 2R$. Если положить $\lambda=\frac{\Delta\psi+|\Delta\psi|}{2}$, $\nu=\frac{-\Delta\psi+|\Delta\psi|}{2}$, то

$$\psi(x) = \int\limits_{r_{0y} \leqslant 2R} h(x, y)(\nu(y) - \lambda(y))\,dy =$$

$$= \int\limits_{r_{0y} \leqslant 2R} h(x, y)\,\nu(y)\,dy - \int\limits_{r_{0y} \leqslant 2R} h(x, y)\,\lambda(y)\,dy \equiv \psi_1(x) - \psi_2(x),$$

здесь $h(x, y)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа. Так как $\Delta\psi_1 = -\nu \leqslant 0$ и $\Delta\psi_2 = -\lambda \leqslant 0$, то ψ_1 и ψ_2 супергармонические в $K(0, R)$ функции (см. § 1, 2°, свойство 10)). Далее, если в любой δ-окрестности границы Γ две функции $\bar{\varphi}(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют неравенству $|\bar{\varphi}(x) - \psi(x)| < \varepsilon$, а вне этой δ-окрестности совершенно произвольны, то в силу принципа максимума при достаточно большом $n \geqslant n_0(\delta)$ во всей области D_n, такой, что граница Γ_n принадлежит указанной δ-окрестности, справедливо неравенство

$$|u_{n,\bar{\varphi}}(x) - u_{n,\psi}(x)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $u_\varphi(x)$ (если она существует) не зависит от вида $\bar{\varphi}(x)$ вне Γ и что доказательство сходимости последовательности $\{u_{n,\bar{\varphi}}\}$ достаточно провести в силу (3) для случая, когда $\bar{\varphi}(x)$ есть разность двух супергармонических функций.

Итак, пусть

$$\bar{\varphi}(x) = f(x) - g(x). \tag{2.5}$$

Пусть вначале области D_n возрастают, т. е. $D_n \subset D_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Из (5) имеем

$$u_{n,\bar{\varphi}} = u_{n,f} - u_{n,g}. \tag{2.6}$$

В силу супергармоничности f и g всюду в области D_{n+1}

$$u_{n+1,f}(x) \leqslant f(x), \quad u_{n+1,g}(x) \leqslant g(x), \tag{2.7}$$

ибо $u_{n+1,f}$ и $u_{n+1,g}$ гармоничны в D_{n+1} и $u_{n+1,f} = f$, $u_{n+1,g} = g$ на границе Γ_{n+1}. В частности, (7) верно и на границе Γ_n области D_n, а потому по принципу максимума всюду в D_n

$$u_{n+1,f} \leqslant u_{n,f}, \quad u_{n+1,g} \leqslant u_{n,g}, \tag{2.8}$$

поскольку на Γ_n $u_{n,f} = f$, а $u_{n+1,f} \leqslant f$, и то же верно для $g(x)$. Таким образом, последовательности $\{u_{n,f}(x)\}$ и $\{u_{n,g}(x)\}$ — невозрастающие последовательности ограниченных ($\min f \leqslant u_{n,f} \leqslant \max f$ для всех n и аналогично для $u_{n,g}$) гармонических функций. Будучи монотонной и ограниченной последовательностью, каждая из последовательностей $\{u_{n,f}\}$ и $\{u_{n,g}\}$ сходится в любой фиксированной точке $x \in D$, а тогда, так как все D_n начиная с некоторого $n \geqslant n_0(B)$ содержат B внутри себя, эти последовательности в силу теоремы 1.3 сходятся равномерно на B. Значит в силу (6) и последовательность $\{u_{n,\bar{\varphi}}\}$ сходится к гармонической в D функции u_φ, причем равномерно на любом компакте B. Докажем, что предел $u_\varphi(x)$ не зависит от выбора $\{D_n\}$. В противном случае мы построили бы две возрастающие последовательности областей $\{D'_n\}$ и $\{D''_n\}$ так, чтобы $u'_{n,\bar{\varphi}}$ и $u''_{n,\bar{\varphi}}$ сходились к разным пределам, но тогда существовала бы возрастающая последовательность областей $D'_{n_1}, D''_{n_2}, D'_{n_3}, \ldots$, такая, что соответствующая последовательность функций $u'_{n_1,\bar{\varphi}}, u''_{n_2,\bar{\varphi}}, u'_{n_3,\bar{\varphi}}, \ldots$ была бы расходящейся, что невозможно. Покажем, в заключение, что если задача (1) имеет регулярное решение $u(x)$, то оно совпадает с $u_\varphi(x)$. Это следует из того, что в этом случае мы можем взять в качестве продолжения $\bar{\varphi}(x)$ на область D решение $u(x)$ и тогда $u_{n,\bar{\varphi}}(x) \equiv u(x)$ для всех n. ■

Поскольку $u_\varphi(x)$ существует при любой непрерывной функции $\varphi(x)$ и в произвольной области D и, в частности, тогда, когда задача Дирихле (1) не имеет регулярного решения, то u_φ будем называть *обобщенным по Винеру* решением задачи (1).

Возникает естественный вопрос, в каком отношении находятся обобщенное по Пуанкаре и обобщенное по Винеру решения задачи Дирихле (1)?

Теорема 2.2. *Обобщенное по Винеру решение совпадает с обобщенным по Пуанкаре решением задачи Дирихле* (1).

Доказательство. Нам надо доказать, что $u_\varphi(x) = \bar{u}(x)$, где $\bar{u}(x) = \inf\limits_v v(x)$ — точная нижняя грань всех верхних функций для данной краевой функции $\varphi(x) \in C^{(0)}(\Gamma)$.

Пусть $v(x)$ — любая верхняя функция, докажем, что в D

$$u_\varphi(x) \leqslant v(x). \tag{2.9}$$

Будем считать, что $\varphi(x)$ продолжена с границы Γ на область D так, что

$$\bar{\varphi}(x) \leqslant v(x), \tag{2.10}$$

это всегда можно допустить, ибо в противном случае мы взяли бы в качестве продолжения φ функцию, равную $\min\{v(x), \bar{\varphi}(x)\}$. Пусть теперь $\{D_n\}$ — винеровская аппроксимация области D и $\{u_{n,\bar{\varphi}}\}$ — соответствующая последовательность гармонических функций. В силу (10) на границе Γ_n области D_n имеем

$$u_{n,\bar{\varphi}}(x) \leqslant v(x) \tag{2.11}$$

и так как $(v - u_{n,\bar{\varphi}})$ — супергармоническая функция, то неравенство (11) справедливо всюду в D_n при любом n. Отсюда следует (9) для любой верхней функции $v(x)$, а потому и

$$\bar{u}(x) = \inf v(x) \geqslant u_\varphi(x), \quad x \in D. \tag{2.12}$$

Чтобы доказать теорему, осталось показать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x_0 \in D$ найдется такая верхняя функция $v(x)$, что

$$v(x_0) \leqslant u_\varphi(x_0) + \varepsilon, \tag{2.13}$$

ибо тогда

$$\bar{u}(x) = \inf v \leqslant u_\varphi(x), \tag{2.14}$$

что вместе с (12) дает $u_\varphi(x) \equiv \bar{u}(x)$. Докажем (13). Возьмем функцию $\psi(x)$, равную разности двух супергармонических функций, $\psi(x) = f(x) - g(x)$, и такую, что (см. теорему 1)

$$|\psi(x) - \bar{\varphi}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in \overline{D}. \tag{2.15}$$

Положим

$$v_n(x) = \begin{cases} u_{n,f}(x) - u_g(x) + \dfrac{\varepsilon}{3} \text{ в } & D_n, \\[2ex] f(x) - u_g(x) + \dfrac{\varepsilon}{3} & \text{вне } D_n. \end{cases} \tag{2.16}$$

Ясно, что $v_n(x)$ — супергармонична в D. Докажем, что $v_n(x)$ верхняя функция. В самом деле, $u_g(x) \leqslant g(x)$, ибо g — супергармонична, поэтому на Γ

$$\begin{aligned} v_n(x) &= f(x) - u_g(x) + \varepsilon/3 \geqslant f(x) - g(x) + \varepsilon/3 = \\ &= \psi(x) + \varepsilon/3 > \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Пусть теперь n столь велико, что $x_0 \in D_n$. Имеем в области D_n:

$$\begin{aligned} |u_{n,f}(x) - u_g(x) - u_\psi(x)| &\equiv |u_{n,f}(x) - u_g(x) - u_f(x) + u_g(x)| = \\ &= |u_{n,f}(x) - u_f(x)| < \varepsilon/3, \text{ если } n \geqslant N_0(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Отсюда и из (16)

$$|v_n(x) - u_\psi(x)| < 2\varepsilon/3. \tag{2.19}$$

Но в силу (15)

$$|u_\varphi - u_\psi| < \varepsilon/3. \tag{2.20}$$

Из (19) и (20) следует, что всюду в области D_n, и, в частности, в точке x_0 $v_n(x) < u_\varphi(x) + \varepsilon$; неравенство (13), а вместе с ним и теорема доказаны.

Две последние теоремы позволяют по-новому взглянуть на понятие регулярности граничной точки и дать более тонкий, необходимый и достаточный критерий регулярности. Прежде всего в силу теоремы 2 можно дать другое, эквива лентное приведенному в § 2, определение регулярной граничной точки.

Определение 2.2. *Точка $y \in \Gamma$ называется регулярной, если для любой непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на Γ, обобщенное по Винеру решение $u_\varphi(x)$ задачи Дирихле удовлетворяет условию*

$$\lim_{x \to y,\, x \in D} u_\varphi(x) = \varphi(y). \tag{2.21}$$

Теперь мы в критерии регулярности граничной точки откажемся от излишнего требования непрерывности барьера в замкнутой области и от условия, что $w_y(x) > 0$ во всей замкнутой области $\bar{D}$, кроме точки y (см. теоремы 1.6 и 1.7).

Теорема 2.3. *Для того чтобы точка $y \in \Gamma$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы существовала определенная в D супергармоническая функция $w_y(x)$ (барьер), положительная в D, и такая, что $\lim\limits_{x \to y,\, x \in D} w_y(x) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Если точка $y \in \Gamma$ регулярна, то барьером $w_y(x)$ будет служить обобщенное по Винеру решение $u_\varphi(x)$, построенное для граничной функции $\varphi(x) = r_{xy}$ (надо взять $\varphi(x) = r_{xy}$, $x \in \mathbb{R}^N$).

Достаточность. Пусть существует барьер $w_y(x)$, докажем, что точка $y \in \Gamma$ регулярна. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная непрерывная граничная функция, продолжим ее непрерывным образом на всю область $\bar{D}$, будем обозначать это продолжение той же буквой φ, положим $M = \max\limits_{x \in \bar{D}} |\varphi(x)|$.
Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и возьмем число $\rho > 0$ так, чтобы в пересечении шара $K(y, \rho)$ с областью $\bar{D}$ выполнялось неравенство

$$\varphi(x) < \varphi(y) + \varepsilon. \tag{2.22}$$

Пусть $\{D_n\}$ — винеровская аппроксимация области D. Возьмем число N_0 столь большим, чтобы множество γ точек сферы $S(y, \rho)$, лежащих в области D вне области D_{N_0}, имело площадь меньшую, чем $\varepsilon S/2M$, где S — площадь сферы $S(y, \rho)$. Построим гармоническую в шаре $K(y, \rho)$ функцию $v(x)$, граничное значение которой непрерывно на сфере $S(y, \rho)$, равно 1 на множестве γ, сходит до нуля в сферическом поясе, примыкающем к множеству γ, площадь которого также меньше $\varepsilon S/2M$, и равно нулю на остальной части границы. По теореме о среднем имеем в центре шара $K(y, \rho)$

$$v(y) < \frac{1}{S}\left(\frac{\varepsilon}{2M} S + \frac{\varepsilon}{2M} S\right) = \frac{\varepsilon}{M}. \tag{2.23}$$

В силу принципа максимума для всех $n \geqslant 1$ и всех $x \in D_n$ имеем неравенство

$$|u_{n,\varphi}(x)| \leqslant M. \qquad (2.24$$

Поскольку в области D_{N_0} функция $w_y(x)$ положительна, то найдется такое $k>0$, что для всех $n>N_0$ в области D_{N_0} выполняется неравенство

$$u_{n,\varphi}(y) < kw_y(x) + \varphi(y), \ x \in D_{N_0}, \ n > N_0. \qquad (2.25$$

Покажем, что при $n>N_0$ в области $\hat{D}_n = D_n \cap K(y, \rho)$ справедливо неравенство

$$u_{n,\varphi}(x) < \varphi(y) + \varepsilon + kw_y(x) + 2Mv(x). \qquad (2.2$$

Так как $u_{n,\varphi}$ — гармонична в $\hat{D}_n$, а правая часть в (26) супергармонична, то достаточно доказать (26) на границе области $\hat{D}_n$. Если $x \in \partial D_n \cap K(y, \rho)$, то $u_{n,\varphi}(x) = \varphi(x) < \varphi(y) + \varepsilon$ в силу (22), так что неравенство (26) здесь выполнено; если $x \in D_n \cap \gamma$, то $v(x) = 1$, $2M + \varphi(y) \geqslant M$ и (26) имеет место в силу (24) и того, что $w_y(x) > 0$; если, наконец, $x \in D_n \cap (S(y, \rho) \setminus \gamma)$, т. е. $x \in D_{N_0}$, то (26) выполняется в силу (25 Из (26) заключаем, что в каждой точке $x \in D \cap K(y, \rho)$ выполняется неравенство

$$u_\varphi(x) \leqslant \varphi(y) + \varepsilon + kw_y(x) + 2Mv(x). \qquad (2.$$

Устремляя теперь x к y и учитывая (23) и то, ч $\lim\limits_{x\to y} w_y(x) = 0$, получим

$$\overline{\lim_{x\to y,\, x\in D}}\, u_\varphi(x) < \varphi(y) + 3\varepsilon. \qquad (2.$$

Заменив в проведенных рассуждениях $\varphi(x)$ на $-\varphi(x)$, пол чим $(u_{-\varphi}(x) = -u_\varphi(x))$

$$\underline{\lim_{x\to y,\, x\in D}}\, u_\varphi(x) > \varphi(y) - 3\varepsilon. \qquad (2.$$

Из (28) и (29) ввиду произвольности ε следует, что

$$\lim_{x\to y,\, x\in D} u_\varphi(x) = \varphi(y),$$

так что точка $y \in \Gamma$ — регулярна. ■

§ 3. Емкость, устранимые особенности, критерий регулярности граничной точки

1°. Потенциалы, емкость, равновесное распределен Пусть D — произвольная область в $\mathbf{R}^N$, $D \subset \mathbf{R}^N$, а $\mathcal{F}(D)$ — σ-а гебра всех борелевских подмножеств D, т. е. наименьш σ-алгебра, содержащая все компакты $K \subset D$. Назовем *зар дом* σ любую вещественную вполне аддитивную функц множеств *), определенную на $\mathcal{F}(D)$ и конечную на всех компактах $K \subset D$. Если $\sigma \geqslant 0$, то это *мера* (или *масса*) μ. Если $\mu(D) < \infty$, то мера *конечна*. Мера μ *сосредоточена на множестве* D_0, если $\mu(D \setminus D_0) = 0$. Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера μ, называется *носителем меры* μ и обозначается S_μ. Определим слабую сходимость зарядов (в частности, мер): пусть $C_0^{(0)}(D)$ — множество всех вещественных непрерывных и финитных в D функций, σ_n *сходится* к σ *слабо* $(\sigma_n \xrightarrow{\text{сл}} \sigma)$, если для любой функции $f(x) \in C_0^{(0)}(D)$

$$\lim_{n \to \infty} \int_D f(x)\, d\sigma_n(x) = \int_D f(x)\, d\sigma(x). \tag{3.1}$$

Пусть $\Phi(t) \geqslant 0$ — непрерывная возрастающая выпуклая функция вещественной переменной t, $0 \leqslant t < \infty$, а $h(r) = h(r_{xy})$ — фундаментальное решение оператора Лапласа (см. § 1). Мы будем рассматривать ядра вида

$$H(r) \equiv \Phi(h(r)), \tag{3.2}$$

причем нас в основном будут интересовать случаи $\Phi(t) = t^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$ и в особенности $\alpha = 1$. Будем предполагать, что

$$\int_0^1 H(r)\, r^{N-1}\, dr < \infty. \tag{3.3}$$

Образуем (пока формально) *потенциал* заряда σ с ядром $H(r)$

$$u_\sigma(x) = \int_D H(|x - y|)\, d\sigma(y), \tag{3.4}$$

---

*) Напомним определения σ-алгебры и вполне аддитивной функции множеств. Непустой класс $\mathcal{F}(D)$ подмножеств области D называется σ-алгеброй, если выполнены условия: 1) из $A \in \mathcal{F}$ и $B \in \mathcal{F}$ следует, что $A \cup B \in \mathcal{F}$; 2) из $A \in \mathcal{F}$ следует, что $D \setminus A \in \mathcal{F}$; 3) для любой последовательности $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. σ-алгебра, порожденная всеми компактами $\subset D$, называется σ-алгеброй борелевских множеств, а ее элементы — борелевскими множествами. Если каждому множеству $A \in \mathcal{F}$ поставлено в соответствие определенное число (или символ $+\infty$ или $-\infty$), то задана функция множеств $\varphi(A)$. Функция $\varphi(A)$ называется вполне аддитивной, если для любой последовательности множеств $A_i \in \mathcal{F}$, такой, что $A_i \cap A_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$, выполнено равенство $\varphi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i)$.

и *интеграл энергии*

$$I(\sigma)=\int\limits_D\int\limits_D H(|x-y|)\,d\sigma(x)\,d\sigma(y)=\int\limits_D u_\sigma(x)\,d\sigma(x). \quad (3.5$$

Простейшие свойства потенциала и энергии даются теоре мой 1.

Теорема 3.1. *Если* μ — *мера с компактным носителе* S_μ, *то*

1) $\varliminf\limits_{x\to x_0} u_\mu(x)=u_\mu(x_0)$;

2) *если* $\mu_n \xrightarrow{\text{сл.}} \mu$, *то*

$$\varliminf_{n\to\infty} u_{\mu_n}(x)\geqslant u_\mu(x) \quad и \quad (3.6$$

$$\varliminf_{n\to\infty} I(\mu_n)\geqslant I(\mu). \quad (3.7$$

Доказательство. Рассмотрим срезанное ядро, $\delta>0$,

$$H_\delta(r)=\begin{cases} H(r), & \delta<r,\\ H(\delta), & 0\leqslant r\leqslant\delta.\end{cases}$$

Тогда $H_\delta(r)$ — непрерывная функция и

$$u_\mu(x)=\lim_{\delta\to0}u_\mu^\delta(x)=\lim_{\delta\to0}\int\limits_D H_\delta(|x-y|)\,d\mu(y), \quad (3.$$

так что $u_\mu(x)$ есть предел неубывающей последовательност непрерывных функций, т. е. 1) имеет место.

Докажем (6). Снова возьмем срезку $H_\delta(r)$, возьмем ш. $K(R)$ столь большого радиуса $R\leqslant\infty$, чтобы $D\subset K(R)$, и п множим $H_\delta(r)$ на непрерывную функцию $\psi\in C_0^{(0)}(K(R)$ равную 1 на S_μ и нулю в окрестности $\partial K(R)$. По определ нию слабой сходимости мер получим $\Big($так как $u_\mu^\delta(x)$

$$=\int\limits_D H_\delta(|x-y|)\,\psi(y)\,d\mu(y)\Big)$$

$$u_\mu^\delta(x)=\lim_{n\to\infty}u_{\mu_n}^\delta(x)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}u_{\mu_n}(x), \quad (3.9$$

ибо $u_{\mu_n}^\delta(x)$ не убывает при $\delta\to0$. Так как в (9) $\delta>0$ — любо то (6) доказано. Аналогично доказывается (7). ■

Важное свойство потенциалов заключено в следующе теореме.

Теорема 3.2 (принцип максимума). *Если носитель* S *меры* μ — *компакт и* $u_\mu(x)\leqslant1$ *на* S, *то* $u_\mu(x)\leqslant1$ *всюд в* $\mathbf{R}^N$.

Доказательство. Так как в силу условия теоремы потенциал $u_\mu(x)$ существует на S_μ, то по теореме Егорова [17, с. 108] для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое подмножество $F\subset S_\mu$, такое, что

$$\mu(F)>\mu(S_\mu)-\varepsilon \tag{3.10}$$

и интеграл

$$u_\mu(x)=\int_D H(|x-y|)\,d\mu(y) \tag{3.11}$$

сходится равномерно на F. Если $\mu_1(e)=\mu(e\cap F)$, то $u_{\mu_1}(x)$ сходится равномерно на F, т. е. для любого $\delta>0$ найдется такое $\eta=\eta(\delta)$, что для всех $x_0\in F$

$$\int_{|y-x_0|<\eta} H(|x_0-y|)\,d\mu_1(y)<\delta. \tag{3.12}$$

Докажем, что $u_{\mu_1}(x)$ непрерывна во всем пространстве $\mathbf{R}^N$. Так как ядро $H(|x-y|)$ непрерывно при $x\neq y$ и F — компакт, то непрерывность $u_{\mu_1}(x)$ в $\mathbf{R}^N\setminus F$ очевидна. Докажем, что $u_{\mu_1}(x)$ непрерывна на F. Пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность, сходящаяся к точке $x_0\in F$. Имеем

$$u_{\mu_1}(x_n)=\int_{|y-x_n|\geqslant\eta} H(|x_n-y|)\,d\mu_1(y)+\int_{|y-x_n|<\eta} H(|x_n-y|)\,d\mu_1(y),$$

отсюда при $n\to\infty$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,u_{\mu_1}(x_n)=\int_{|y-x_0|\geqslant\eta} H(|x_0-y|)\,d\mu_1(y)+$$
$$+\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{|y-x_n|<\eta} H(|x_n-y|)\,d\mu_1(y). \tag{3.13}$$

Геометрически очевидно следующее утверждение: существует число m_0, зависящее только от размерности N, $m_0=m_0(N)$, такое, что для любого $x\in\mathbf{R}^N$ найдутся m_0 перекрывающихся замкнутых конусов Q_ν с вершинами в x таких, что если ξ_ν точка множества $Q_\nu\cap F$, ближайшая к x, то любая другая точка $y\in F$ расположена ближе к некоторой точке ξ_ν, чем к x. Возьмем такие точки ξ_ν для $x=x_n$ (x_n не обязаны принадлежать F, тогда как $\xi_\nu\in F$ по построению), тогда

$$H(|y-x_n|)\leqslant H(|y-\xi_{\nu(y)}|)\leqslant\sum_{\nu=1}^{m_0} H(|y-\xi_\nu|),\quad y,\xi_\nu\in F. \tag{3.14}$$

Подставляя (14) в (13), получим с учетом (12)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_{\mu_1}(x_n) \leqslant u_{\mu_1}(x_0) + m_0\delta. \qquad (3.$$

Так как $\delta > 0$ — любое, то отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_{\mu_1}(x_n) \leqslant u_{\mu_1}(x_0). \qquad (3.$$

Это вместе с утверждением 1) теоремы 1 доказывает, ч $u_{\mu_1}(x)$ непрерывна на F, а значит, и во всем пространстве R Поскольку $u_{\mu_1}(x) \leqslant 1$ на F, а вне F $u_{\mu_1}(x)$ — субгармони на *), то $u_{\mu_1}(x) \leqslant 1$ на $\mathbb{R}^N$.

Пусть теперь z — любая точка, не принадлежащая S_μ, ρ — расстояние от z до S_μ, имеем в силу (10)

$$u_\mu(z) = \int_F H d\mu + \int_{S_\mu \setminus F} H d\mu = u_{\mu_1}(z) + \int_{S_\mu \setminus F} H(|z-y|)\, d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant u_{\mu_1}(z) + H(\rho)\,\mu(S_\mu \setminus F) \leqslant 1 + \varepsilon H(\rho).$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое, то $u_\mu(z) \leqslant 1$, что и требовалось. ■

Теорема 3.3 (принцип непрерывности). *Если сужени потенциала $u_\mu(x)$ на множество S_μ непрерывно на S_μ, т $u_\mu(x)$ непрерывно всюду в $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В предыдущей теореме мы дока зали, что $u_{\mu_1}(x)$ непрерывно во всем $\mathbb{R}^N$, основываясь на том что $u_{\mu_1}(x)$ сходится равномерно на $F = S_{\mu_1}$. Обращаясь к до казательству теоремы 3, видим, что так как сужение $u_\mu(x)$ на S_μ непрерывно, то, по теореме Дини, $u_\mu(x)$ сходится рав номерно на S_μ, а, значит, $u_\mu(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$. ■

Переходим к изучению нового важного понятия — емко сти множества.

Определение 3.1. *Пусть E — ограниченное борелевское множество, Γ_E — класс всех распределений массы μ (меры с носителем $S_\mu \subset E$), обладающих свойством:*

$$u_\mu(x) \leqslant 1 \text{ на } E \qquad (3.17)$$

---

*) Пусть $\Phi \in C^{(2)}$, $H(|x-y|) = \Phi(h(r_{xy}))$; при $x \bar{\in} F$, $y \in F$ $\Delta_x H = \Phi' \Delta_x h + \Phi''(\nabla h)^2 = \Phi''(\nabla h)^2 \geqslant 0$, ибо Φ — выпуклая функция. Отсюда $\Delta u_{\mu_1}(x) = \int_F \Delta_x H(|x-y|)\, d\mu_1(y) \geqslant 0$ при $x \bar{\in} F$, т. е. u_{μ_1} — субгармонич на. Если Φ лишь непрерывна, то возьмем последовательность $\Phi_n \in C^{(2)}$, сходящуюся к Φ равномерно на любом компакте, принадлежащем R^1_+. Соответствующая последовательность потенциалов $u^n_{\mu_1}$ равномерно на любом компакте сходится к u_{μ_1}. Если K — любой шар, лежащий вне F, то, совершив предельный переход при $n \to \infty$, получим $(u_{\mu_1})_K \geqslant u_{\mu_1}$, т. е. u_{μ_1} субгармонична.

(*условие (17) можно считать выполненным в силу теоремы 2 для всех* $x \in \mathbb{R}^N$). *Емкостью* $C_H(E)$ *множества* E (*для ядра* $H(r)$) *называется число*

$$C_H(E) = \sup_{\mu \in \Gamma_E} \mu(E). \tag{3.18}$$

Если некоторое свойство выполняется всюду, за исключением множества емкости нуль, то говорят, что оно выполняется приближительно всюду.

Ясно, что если u_ν ограниченный потенциал, то ν обращается в нуль на множествах нулевой емкости, ибо если $\nu(E) > 0$, то

$$\frac{1}{\max u_\nu}\nu \in \Gamma_E \text{ и } \sup_{\mu \in \Gamma_E} \mu(E) \geqslant \frac{\nu(E)}{\max u_\nu} > 0,$$

что противоречит тому, что $C_H(E) = 0$.

Весьма важной является

Теорема 3.4 (о существовании равновесного распределения). *Пусть* F — *компакт и пусть для каждой точки* $x \in F$ *существует ограниченный полуконус* Q_x *с вершиной* x, *лежащий в* F. *Пусть*

$$\frac{H(r)}{H(2r)} = O(1) \text{ при } r \to 0. \tag{3.19}$$

Тогда существует мера $\mu \in \Gamma_F$, *такая, что* $u_\mu(x) \equiv 1$ *на* F *и* $\mu(F) = C_H(F)$. *Эта мера* μ *и потенциал* u_μ *называются равновесными.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \inf I(\mu)$, где infimum берется по мерам с $\mu(F) = 1$ и $S_\mu \subset F$. Ясно, что γ существует (ибо $I(\mu) \geqslant 0$). В силу (7) если $\mu_n \xrightarrow{\text{сл}} \mu$, то $\varliminf_{n\to\infty} I(\mu_n) \geqslant I(\mu)$, поэтому inf достигается на некоторой мере μ с $\mu(F) = 1$. Покажем (в три этапа), что для этой меры μ $u_\mu(x) \equiv \gamma$ на F.

1) $u_\mu(x) \geqslant \gamma$ приближительно всюду на F. Пусть это не так, тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется множество $E \subset F$, такое, что $C_H(E) > 0$ и $u_\mu(x) < \gamma - \varepsilon$ на E. Пусть τ такая мера на E, что $\tau(E) = 1$ и $u_\tau(x) \leqslant A$, $A > 0$ — некоторая постоянная. Положим $\mu_\delta = (1-\delta)\mu + \delta\tau$, δ — любое число из интервала $0 < \delta \leqslant \varepsilon/A$. Тогда $\mu_\delta(F) = 1$. Далее,

$$\gamma = \inf_{\mu} I(\mu) = \inf \int u_\mu(x)\, d\mu(x) \leqslant \inf \mu(F) = 1,$$

поэтому

$$u_{\mu_\delta}(x) = (1-\delta)u_\mu(x) + \delta u_\tau(x) \leqslant$$

$$\leqslant (1-\delta)(\gamma - \varepsilon) + \delta A \leqslant (1-\varepsilon) + \delta A,$$

т. е. $u_{\mu_\delta}(x) \leqslant 1$, так как $\delta A \leqslant \varepsilon$, так что $\mu_\delta \in \Gamma_F$. Теперь, подставляя $\mu_\delta = (1-\delta)\mu + \delta\tau$ в (5), получим

$$I(\mu_\delta) \leqslant I(\mu) - 2\delta I(\mu) + 2\delta \int_E u_\mu d\tau + O(\delta^2) \leqslant$$

$$\leqslant (1-2\delta)\gamma + 2\delta(\gamma - \varepsilon) + O(\delta^2) = \gamma - 2\delta\varepsilon + O(\delta^2) < \gamma,$$

если δ — достаточно мало, что невозможно, ибо $\gamma = \inf I(\mu)$.

2) $u_\mu \leqslant \gamma$ на S_μ, а в силу принципа максимума и всюду в $\mathbf{R}^N$. По доказанному в 1) $u_\mu(x) \geqslant \gamma$ всюду на S_μ, за исключением множества, μ-мера которого равна нулю, ибо (см. выше) если $\mu(e) > 0$, то и $C_H(e) > 0$. Если теперь $u_\mu(x_0) > \gamma$ в какой-нибудь точке $x_0 \in S_\mu$, то в силу полунепрерывности снизу (см. теорему 1.1)) $u_\mu(x) > \gamma$ в некоторой окрестности точки x_0, а эта окрестность есть множество положительной μ-меры. Из этих двух утверждений вытекает, что $I(\mu) > \gamma$ (ибо $\mu(F) = 1$), что невозможно. Итак, $u_\mu(x) \leqslant \gamma$ на S_μ.

3) Если выполнено (19) и для данной точки $x \in F$ существует полуконус Q_x, то $u_\mu(x) = \gamma$.

Проведем доказательство, считая $x = 0$, Q_0 — соответствующий полуконус. Пусть a и b $(0 < a < b)$ достаточно малы и пусть

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{H(|x|)}{\int\limits_{|y|<|x|} H(|y|)\, dy}, & x \in Q_0, \quad a < |x| < b; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Существуют сколь угодно малые числа a и b, такие, что

$$\int_{R^N} q(x)\, dx = 1, \tag{3.20}$$

ибо

$$\int_{R^N} q(x)\, dx = \int_{Q_0 \cap (a<|x|<b)} q(x)\, dx =$$

$$= \omega_0 \int_a^b dr \frac{d}{dr} \left(\log \int_0^r H(\rho)\, \rho^{N-1}\, d\rho \right) =$$

$$= \omega_0 \log \frac{\int_0^b H(\rho)\, \rho^{N-1}\, d\rho}{\int_0^a H(\rho)\, \rho^{N-1}\, d\rho} = 1,$$

так как при любом $b > 0$ найдется такое a, что выражение под знаком $\log$ будет равно e^{1/ω_0}, ω_0 — раствор конуса Q_0.

В силу 1) и 2) $u_\mu(x) = \gamma$ почти всюду, поэтому из (20) имеем

$$\gamma = \int u_\mu(x)\, q(x)\, dx = \int_F d\mu(y) \int H(|x-y|)\, q(x)\, dx. \tag{3.21}$$

Зафиксируем $\rho > 0$. Если $|y| > \rho$, и a, $b \to 0$, то по теореме о среднем

$$\int H(|x-y|)\, q(x)\, dx = H(|\xi|) \int q(x)\, dx = H(|\xi|) \to H(|y|), \tag{3.22}$$

равномерно по y, для которых $|y| > \rho$. А при $|y| \leqslant \rho$

$$j = \int_{a<|x|<b} H(|x-y|)\, q(x)\, dx = \int_{\substack{a<|x|<b\\ |x-y|>|y|/2}} + \int_{\substack{a<|x|<b\\ |x-y|\leqslant|y|/2}} = j_1 + j_2. \tag{3.23}$$

Если $|x-y| > |y|/2$, то $H(|x-y|) \leqslant H(|y|/2)$ и

$$j_1 \leqslant H(|y|/2) \int q(x)\, dx = H(|y|/2). \tag{3.24}$$

Если $|x-y| \leqslant |y|/2$, то $|x| > |y|/2$ и $q(x) \leqslant q(|y|/2)$, так что

$$j_2 \leqslant q(|y|/2) \int_{|x-y|\leqslant|y|/2} H(|x-y|)\, dx =$$

$$= q(|y|/2) \int_{|x|\leqslant|y|/2} H(|x|)\, dx = H(|y|/2). \tag{3.25}$$

Из (23), (24) и (25) видим, что

$$j \leqslant 2H(|y|/2). \tag{3.26}$$

А отсюда в силу (19)

$$j \leqslant CH(|y|), \tag{3.27}$$

$C > 0$ — константа из условия (19).

Из (27) следует, что

$$\int_{|y|\leqslant\rho} d\mu(y) \int H(|x-y|)\, q(x)\, dx \leqslant C \int_{|y|\leqslant\rho} H(|y|)\, d\mu(y) < \delta(\rho), \tag{3.28}$$

где $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, ибо в силу 2)

$$u_\mu(0) = \int H(|y|)\, d\mu(y) \leqslant \gamma < \infty.$$

Сопоставляя (21), (22) и (28) и устремляя сначала a, $b \to 0$, а потом $\rho \to 0$, получим $u_\mu(0) = \int H(|y|)\, d\mu(y) = \gamma$, что и доказывает 3).

Положим теперь $\mu_0=\gamma^{-1}\mu$. Тогда $u_{\mu_0}(x)\equiv 1$ на F и $\mu_0\in\Gamma_F$. Докажем, наконец, что $\mu_0(F)=C_H(F)$. Для любой меры $\nu\in\Gamma_F$ имеем

$$\mu_0(F)\geqslant\int u_\nu(x)\,d\mu_0(x)=\int d\mu_0(x)\int H(|x-y|)\,d\nu(y)=$$

$$=\int d\nu(y)\int H(|x-y|)\,d\mu_0(x)=\int u_{\mu_0}(y)\,d\nu(y)=\nu(F),$$

т. е. $\mu_0(F)=C_H(F)$. ■

Если условие конуса и (19) не выполняются, то из пунктов 1) и 2) проведенного доказательства следует

Теорема 3.5. *Для произвольного ядра $H(r)$ и любого компакта F существует мера $\mu\in\Gamma_F$ такая, что $u_\mu(x)=1$ приблизительно всюду на F и $\mu(F)=C_H(F)$.*

Остановимся подробнее на свойствах множеств нулевой емкости. Из доказательства теоремы 4 видно, что емкость множества F равна

$$C_H(F)=\mu_0(F)=1/\gamma,\ \text{где}\ \gamma=\inf_\mu I(\mu),\ \mu(F)=1\ \text{и}\ S_\mu\subset F. \tag{3.29}$$

Отсюда следует, что емкость конечна. Отметим три простых свойства нулевой емкости.

1) Для того чтобы $C_H(F)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(F)=0$ для любой меры μ с $I(\mu)<\infty$ (т. е. с конечной энергией). Действительно, если $\mu(F)=0$ для любой меры μ с $I(\mu)<\infty$, то $\inf\limits_{\mu,\,\mu(F)=1} I(\mu)=\gamma=\infty$ и $C_H(F)=0$. Обратно, пусть $C_H(F)=0$ и μ любая мера с $I(\mu)<\infty$; тогда если $\mu(F)=a>0$, то $\mu_0=\frac{1}{a}\mu$, $\mu_0(F)=1$, $I(\mu_0)<\infty$, т. е. $\gamma<\infty$ и $C_H(F)>0$, так что $\mu(F)=0$.

2) Если $C_H(F)=0$, то лебегова мера $\operatorname{mes}F=0$. Действительно, мера $\mu(e)=\operatorname{mes}(F\cap e)$ имеет конечную энергию, так как

$$u_\mu(x)=\int H(|x-y|)\,d\mu(y)=$$

$$=\int_F H(|x-y|)\,dy\leqslant C\int_0^R H(r)\,r^{N-1}\,dr<\infty$$

(C, R — некоторые положительные постоянные, см. (3)), поэтому $I(\mu)=\int u_\mu(x)\,d\mu(x)<\infty$. Отсюда в силу 1) $\operatorname{mes}F=0$.

3) Если $C_H(F)=0$, $S_\mu\subset F$ и $S_\mu\neq 0$, то $\sup\limits_{x\in S_\mu} u_\mu(x)=+\infty$.

В самом деле, если бы $\sup\limits_{S_\mu} u_\mu(x)=A<\infty$, то $I(\mu)<\infty$ и $C_H(F)>0$.

Дадим теперь важный геометрический критерий обращения емкости в нуль.

Теорема 3.6. *Если множество E можно покрыть $A(r)$ замкнутыми шарами радиуса r и*

$$-\int_0^1 \frac{H'(r)}{A(r)}\,dr = \infty, \tag{3.30}$$

то $C_H(E)=0$ *).

Доказательство. Ввиду (30) можно считать, что $A(r)$ — точная нижняя грань числа шаров радиуса r, покрывающих E. Пусть, от противного, $C_H(E)>0$. Тогда существует на E мера $\mu\not\equiv 0$, такая, что $I(\mu)<\infty$ (см. выше 1)). Пусть $\psi(r, a)=\mu\{x\in E,\ |x-a|\leqslant r\}$, $a\in R^N$, $r\geqslant 0$, $\psi(r, a)$ — масса, распределенная в шаре $K(a, r)$. Считаем, не ограничивая общности, что $H(r)\equiv 0$ при $r\geqslant r_0$, $r_0>0$ — некоторое число. Тогда с помощью интегрирования по частям получим с учетом (3),

$$I(\mu)=\int_E d\mu(y)\int_E H(|x-y|)\,d\mu(x)=\int d\mu(y)\int_0^\infty H(r)\,d\psi(r, y)=$$

$$=\int_E d\mu(y)\int_0^\infty \psi(r, y)(-H'(r))\,dr=\int_0^\infty (-H'(r))\,dr\int_E \psi(r, y)\,d\mu(y)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}(-H'(r))\,dr\int_E \psi(2^{-n-1}, y)\,d\mu(y). \tag{3.31}$$

По условию теоремы

$$E\subset\bigcup_{\nu=1}^{A_n}K_\nu(2^{-n}),\quad n=1, 2, \ldots, \tag{3.32}$$

где $K_\nu(2^{-n})$ — замкнутый шар радиуса 2^{-n}, $A_n=A(2^{-n})$. Так как число A_n минимально (при каждом n), то существует константа $C>0$, зависящая только от размерности N, такая, что каждая точка множества E принадлежит не более чем C шарам (легко доказывается от противного). Так как $I(\mu)<$ $<\infty$, то из (31) имеем

*) Так как $H(r)$ монотонно убывающая функция r, то $H'(r)$ существует почти всюду и интегрируема.

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} (-H'(r))\, dr C^{-1} \sum_{\nu=1}^{A_{n+2}} \int_{K_\nu(2^{-n-2})} \psi(2^{-n-1}, y)\, d\mu(y) \geqslant$$

$$\geqslant C^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} (-H'(r))\, dr \sum_{\nu=1}^{A_{n+2}} \mu^2 [K_\nu(2^{-n-2})]. \tag{3.33}$$

Из (32) в силу неравенства Коши — Буняковского имеем при любом n

$$\mu^2(E) \leqslant \Big(\sum_{\nu=1}^{A_n} \mu[K_\nu(2^{-n})]\Big)^2 \leqslant A_n \sum_{\nu=1}^{A_n} \mu^2 [K_\nu(2^{-n})]. \tag{3.34}$$

Из (33) и (34) получим

$$\infty > \frac{\mu^2(E)}{C} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} (-H'(r))\, dr \cdot A_{n+2}^{-1} =$$

$$= \frac{\mu^2(E)}{C} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n+2}^{-1} [H(2^{-n-1}) - H(2^{-n})]. \tag{3.35}$$

Далее, очевидно, что при каждом n $(n=1, 2, ...,)$,

$$A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant C_1 A_n,\ C_1 > 0 \text{ — некоторая постоянная} \tag{3.36}$$

Поскольку $A(r)$ убывающая функция r, то

$$-\int_0^1 \frac{H'(r)}{A(r)}\, dr = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \frac{-H'(r)}{A(r)}\, dr \gtreqless$$

$$\gtreqless \sum_{n=0}^{\infty} [H(2^{-n-1}) - H(2^{-n})] \frac{1}{A_{\alpha(n)}}, \tag{3.37}$$

где $\alpha(n) = n$ для знака $\leqslant$ и $\alpha(n) = n+1$ для знака $>$. Таким образом, левая и правая части в (37) сходятся (и расходятся) одновременно. Поэтому условие (30) и неравенство (35) противоречат друг другу (в (35) A_{n+2}^{-1} надо заменить на A_n^{-1} или A_{n+1}^{-1} в силу (36)). ■

Например, если $N=3$ и $H(r) = r^{2-N} = r^{-1}$, а E — конечное множество точек или спрямляемая кривая длины l, то согласно т. 3.6 $C_H(E)=0$, поскольку в первом случае $A(r) = O(1)$, а во втором $A(r) = O(r^{-1})$.

Дальнейшие два пункта мы посвятим более детальному изучению свойств гармонических функций.

2°. Устранимые особенности гармонических функций. В этом пункте мы рассмотрим ряд теорем о гармонических функциях, утверждения которых будут состоять в том, что если какое-либо свойство выполняется всюду, за исключением некоторого «негустого» множества, то это свойство имеет место всюду. Начнем с теорем об устранимых особенностях.

Пусть D — открытая ограниченная область, $D \subset \mathbf{R}^N$, с гладкой границей Г. Пусть E — компакт, $E \subset D$. Пусть $\mathscr{H}$ — некоторый класс функций, гармонических в $D \setminus E$. Требуется указать условия на E, при которых каждая функция из $\mathscr{H}$, продолжима до функции, гармонической во всей области D. Если такое продолжение возможно, то говорят, что *множество E устранимо* для класса $\mathscr{H}$. Чтобы избежать отдельной записи, будем рассматривать размерности $N \geqslant 3$. Кроме того, в определении ядра $H(r)$ будем считать $\Phi(t) = |t|$, так что $H(r) = h(r) = r^{2-N}$ *). Емкость $C_h(E) \equiv C(E)$ мы определили как $\sup \mu(E)$ по всем мерам на E, для которых ньютонов потенциал

$$u_\mu(x) = \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}}$$

не превосходит единицы при $x \in \mathbf{R}^N$. Из этого определения вытекают простые следствия, которые мы будем использовать в дальнейшем:

1) если $E_1 \subset E_2$, то $C(E_1) \leqslant C(E_2)$;

2) если $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, то $C(E) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} C(E_i)$;

3) если множество E_1 подобно множеству E_2 и получается из него растяжением в k раз, то $C(E_1) = k^{N-2} C(E_2)$;

4) Емкость сферы радиуса R равна R^{N-2}.

Три первых свойства очевидны, докажем 4). Возьмем сферу $S(0, R) = S$ и любую меру μ, заданную на S, для которой $u(x) = \int\limits_S \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} \leqslant 1$ при $x \in \mathbf{R}^N$. Вне S $u(x)$ гармонична, $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ а так как $u(x) \leqslant 1$ на S, то по принципу максимума при $|x| \geqslant R$ $u(x) \leqslant \frac{R^{N-2}}{|x|^{N-2}}$, т. е. $u(x)|x|^{N-2} = \int\limits_S \left(\frac{|x|}{|x-y|}\right)^{N-2} d\mu(y) \leqslant R^{N-2}$. Переходя здесь к пределу при $|x| \to \infty$, получим $\mu(S) \leqslant R^{N-2}$, а в силу произвольности меры μ, и $C(S) \leqslant R^{N-2}$. Возьмем теперь меру μ_0, равномерно распределенную по сфере S с плотностью $1/\omega_N R$. Потенциал $u_0(x)$, построенный по этой мере, очевидно, удовлетворяет

---

*) У $h(r)$ опущена константа $\frac{1}{\omega_N (N-2)}$.

условию $u_0(x) \leqslant 1$ при $x \in \mathbf{R}^N$. В самом деле, потенциал $u_0(x)$ равный $u_0(x) = \frac{1}{\omega_N R} \int\limits_S \frac{ds_y}{|x-y|^{N-2}}$, непрерывен во всем $\mathbf{R}^N$ гармоничен вне S, в силу симметрии постоянен на S, а значит, по принципу максимума, постоянен внутри S, а потому равен внутри и на S единице, ибо $u_0(0) = \frac{1}{\omega_N R^{N-1}} \omega_N R^{N-1} = 1$. По принципу максимума $u_0(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbf{R}^N$. Но $\mu_0(S) = R^{N-2}$. Поэтому $C(S) = R^{N-2}$ и 4) доказано.

Теорема 3.7. *Пусть $\mathcal{H}_1$ — класс всех ограниченных в D гармонических функций, $\mathcal{H}_2$ — класс всех равномерно непрерывных гармонических функций, $\mathcal{H}_3$ — класс всех гармонических функций с конечным интегралом Дирихле* *). *Множество E устранимо для $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ тогда и только тогда, когда $C_H(E) = 0$ для ядра $H(r) = r^{2-N}$ $(N \geqslant 3)$.*

Доказательство. Необходимость. От противного, пусть E имеет положительную емкость, $C(E) > 0$. Докажем, что E не устранимо для классов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$. Так как $C(E) > 0$, то существует такая мера μ, $\mu(E) = 1$, что потенциал

$$u_\mu(x) = \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} \tag{3.38}$$

ограничен и, если перейти в случае надобности к соответствующему сужению меры (см. теорему 3.2), равномерно непрерывен в $\mathbf{R}^N$. Так как $u_\mu(x)$ — непостоянна ($u_\mu(x) > 0$ и $\to 0$ при $x \to \infty$) и гармонична во всем пространстве вне E, то по теореме Лиувилля (см. теорему 1.4) $u_\mu(x)$ не гармонична на E, т. е. для классов $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ утверждение доказано. Далее, $u_\mu(x)$ принадлежит и классу $\mathcal{H}_3$, ибо **)

$$|\nabla u_\mu| \leqslant C \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-1}}$$

---

*) Т. е. с конечным интегралом $\int\limits_D |\nabla u|^2 dx$.

**) $$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}|x-z|^{N-1}} =$$

$$= \frac{1}{|y-z|^{N-2}} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{dv}{|v|^{N-1}(1+v)^{N-1}} = C \frac{1}{|y-z|^{N-2}},$$

$$u = y - z, \quad x - y = t, \quad t/|u| = v.$$

и потому

$$\int_D |\nabla u_\mu|^2 dx \leqslant C^2 \int_D dx \iint_{EE} \frac{d\mu(y)\, d\mu(z)}{|x-y|^{N-1}|x-z|^{N-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \iint_{EE} d\mu(y)\, d\mu(z) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{|x-y|^{N-1}|x-z|^{N-1}} =$$

$$= C_1 \iint_{EE} \frac{d\mu(y)\, d\mu(z)}{|y-z|^{N-2}} = C_1 \int_E u_\mu(y)\, d\mu(y) < \infty. \qquad (3.39)$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть E имеет нулевую емкость, $C(E)=0$, и пусть $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E$ — последовательность областей с гладкими границами*) ∂E_n, сходящаяся к E при $n \to \infty$; область, заключенную между границами Γ и ∂E_n, обозначим D_n. Пусть функция $u(x) \in \mathscr{H}_1$. Возьмем гладкую поверхность Γ_0, лежащую в области D вне E, область, ограниченную поверхностью Γ_0, назовем D_0. Пусть $u_0(x)$ — гармоническая в D_0 функция, равная $u(x)$ на Γ_0. Положим $v(x) = u(x) - u_0(x)$, покажем, что $v(x) \equiv 0$ в $D_0 \setminus E$. Возьмем равновесный потенциал множества E_n (см. теорему 4)

$$w_n(x) = \int_{E_n} \frac{d\mu_n(y)}{|x-y|^{N-2}}. \qquad (3.40)$$

По построению $w_n(x) = W_n = \text{const}$ на E_n, и так как $E_n \to E$, а $C(E)=0$, то $W_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ (см. свойство 3) нулевой емкости). Рассмотрим $v(x)$ и $w_n(x)$ в области $D_0 \setminus E_n$. Обе эти функции гармоничны там, на Γ_0 $v(x)=0$, а $w_n(x)>0$, на ∂E_n $|v(x)| \leqslant C$ (ибо $u_0(x)$ и $u(x)$ — ограниченные функции), а $w_n(x) = W_n$. Поэтому в силу принципа максимума

$$|v(x)| \leqslant C \frac{w_n(x)}{W_n} \qquad (3.41)$$

для всех точек $x \in D_0 \setminus E_n$ и $C>0$ от n не зависит. Фиксируем теперь любую точку $x_0 \in D_0 \setminus E$, тогда получим

$$|v(x_0)| \leqslant C \frac{w_n(x_0)}{W_n}, \quad n \geqslant n_0(x_0). \qquad (3.42)$$

Устремляя в (42) $n \to \infty$ и учитывая, что $W_n \to \infty$, а $w_n(x_0)$ — ограничено $\left(|w_n(x_0)| \leqslant \frac{1}{r_{x_0 E}^{N-2}}\right)$, получим, что $v(x_0)=0$, что и требовалось. Итак, в этом случае $u(x)$ допускает гармони-

---

*) Граница ∂E_n может состоять из конечного числа кусков.

ческое продолжение $u_0(x)$ на E. Так как $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$, то для классов $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ утверждение доказано.

Пусть $u(x) \in \mathcal{H}_3$. Используем сделанные выше построения. Пусть $\psi(t) \in C^{(2)}(R^1)$ и $\psi''(t) \equiv 0$ при $|t| > t_0$. Рассмотрим функцию $\psi(v(x))$; так как $\Delta v = 0$, то

$$\Delta\psi(v(x)) = \psi''(v)\,|\nabla v|^2. \tag{3.43}$$

Запишем вторую формулу Грина для функций $(w_n(x) - W_n)$ и $\psi(v(x))$ по области $D_0 \setminus E_n$, получим (на Γ_0 $v \equiv 0$, а на ∂E_n $w_n \equiv W_n$ и $\Delta(w_n - W_n) = 0$ в $D_0 \setminus E_n$)

$$\int_{\partial E_n} \psi(v) \frac{\partial w_n}{\partial \nu} ds = - \int_{D_0 \setminus E_n} (w_n - W_n)\,\psi''(v)\,|\nabla v|^2 dx +$$

$$+ \psi'(0) \int_{\Gamma_0} (w_n - W_n) \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = \int_{D_0 \setminus E_n} \psi'(v)\,(\nabla w_n, \nabla v)\,dx, \tag{3.44}$$

последнее равенство выполняется в силу первой формулы Грина. Оценим последнее выражение в (44), при этом учтем формулу (39) и то, что $|\psi'(v)| \leqslant C_1$ и $|\nabla v| \leqslant C_2$, $C_1, C_2 > 0$ — некоторые постоянные,

$$\left| \int_{D_0 \setminus E_n} \psi'(v)\,(\nabla w_n, \nabla v)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \left\{ \int_{D_0 \setminus E_n} (\nabla w_n)^2 dx \cdot \int_{D_0 \setminus E_n} (\nabla v)^2 dx \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sqrt{\int_{D_0 \setminus E_n} (\nabla w_n)^2 dx} \leqslant C_4 \left\{ \int_{E_n} \int_{E_n} \frac{d\mu_n(y)\, d\mu_n(z)}{|y - z|^{N-2}} \right\}^{1/2} =$$

$$= C_4 \sqrt{W_n \mu_n(E_n)} = C_4 \sqrt{W_n}. \tag{3.45}$$

Поделим теперь два последних выражения в (44) на W_n и перейдем к пределу при $n \to \infty$; в силу (45) последний член имеет пределом нуль и мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \psi'(0) \int_{\Gamma_0} \left(\frac{w_n}{W_n} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial \nu} ds =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{D_0 \setminus E_n} \left(\frac{w_n}{W_n} - 1 \right) \psi''(v)\,|\nabla v|^2 dx. \tag{3.46}$$

На Γ_0 w_n ограничено, а так как $W_n \to \infty$, то левая часть в (46) равна $-\psi'(0) \int_{\Gamma_0} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$. Вне E_n w_n ограничено, $W_n \to \infty$, так что правая часть в (46) равна $-\int\limits_{D_0/E}\psi''(v)|\nabla v|^2dx=-\int\limits_{D_0}\psi''(v)\times$ $\times|\nabla v|^2dx$, ибо $C(E)=0$ влечет $\operatorname{mes}E=0$. Итак,

$$\int\limits_{D_0}\psi''(v)|\nabla v|^2dx=\psi'(0)C_0,\quad C_0=\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial v}{\partial\nu}ds. \tag{3.47}$$

Вводя $\sigma(a)=\int\limits_{v<a}|\nabla v|^2dx$ ($\sigma(a)$ монотонно возрастает и непрерывна, так как $v\in\mathcal{H}_3$), перепишем (47) в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi''(a)\,d\sigma(a)=C_0\psi'(0). \tag{3.48}$$

Так как функция ψ произвольна, то из (48) следует, что $\sigma(a)=\alpha a$ при $a>0$ и $\sigma(a)=\beta a$ при $a<0$ ($\beta-\alpha=C_0$). Поскольку $v\in\mathcal{H}_3$, т.е. $0\leqslant\sigma(a)<\infty$, то отсюда вытекает, что $\alpha=\beta=0$, т. е. $\int\limits_{v<a}|\nabla v|^2dx\equiv0$, $v(x)\equiv\mathrm{const}$ и так как на Γ_0 $v=0$, то $v(x)\equiv0$ в $D_0\setminus E$. ■

Сформулируем теперь без доказательства аналогичные теоремы для классов Гельдера и L_p (доказательства см. в [5, с. 99]). Введем для этого важное понятие меры Хаусдорфа.

Определение 3.2. *Пусть $\varphi(r)$ — определенная при $r\geqslant0$ непрерывная, возрастающая функция и $\varphi(0)=0$; такая функция называется измеряющей. Пусть E — ограниченное множество. Рассмотрим все покрытия E счетными наборами шаров K_i радиусов $r_i\leqslant\rho$, $E\subset\bigcup\limits_i K_i$. Положим*

$$M_\rho(E)=\inf\sum_i\varphi(r_i), \tag{3.49}$$

где infimum берется по всем указанным покрытиям. Предел

$$\Lambda_\varphi(E)=\lim_{\rho\to0}M_\rho(E) \tag{3.50}$$

называется φ-мерой Хаусдорфа множества E.

Предел (50) существует (он может равняться и $+\infty$), ибо $M_\rho(E)$ при $\rho\to0$ не убывает. Если $\varphi(r)=r^\alpha$, то вместо $\Lambda_\varphi(E)$ пишут $\Lambda_\alpha(E)$.

Утверждение 3.1. *Множество E устранимо для класса $\mathcal{H}_4$ всех гармонических функций, гельдеровых в области D с показателем μ, $0<\mu<1$ тогда и только тогда, когда $\Lambda_{N-2+\mu}(E)=0$.*

Утверждение 3.2. *Пусть $N\geqslant3$, $1/p+1/q=1$, $p\geqslant1$, $N>2q$. Множество E устранимо для класса $\mathcal{H}_5$ всех гармонических функций, суммируемых со степенью p по области D,* *если $\Lambda_{N-2q}(E)<\infty$. Если $\Lambda_\alpha(E)>0$ для некоторого $\alpha>N-2q$, то E не устранимо для $\mathcal{H}_s$.*

Здесь $N\geqslant 3$, ибо $\log r_{xy}\in\mathcal{H}_s$ при всех p.

Покажем теперь, что множествами емкости нуль можно пренебрегать в теоремах типа принципа максимума и в теоремах единственности.

Теорема 3.8. *Пусть D ограниченная область с границей Γ, $D\subset\mathbf{R}^N$, $u(x)$ — ограниченная гармоническая в D функция и пусть*

$$\varlimsup_{x\to y} u(x)\leqslant A \tag{3.51}$$

во всех точках y границы Γ, за исключением замкнутого множества E нулевой емкости, $C(E)=0$. Тогда всюду в области $(D+\Gamma)$

$$u(x)\leqslant A. \tag{3.52}$$

Доказательство. Как в теореме 7, возьмем последовательность $\{E_n\}$ областей $E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E$ с гладкими границами ∂E_n, сходящуюся к множеству E при $n\to\infty$, и для каждой области E_n образуем равновесный потенциал

$$w_n(x)=\int_{E_n} h(|x-y|)\,d\mu_n(y) \tag{3.53}$$

(как обычно, $h(r)$ — фундаментальное решение оператора Лапласа); $w_n(x)=W_n=\text{const}$ на E_n и $W_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Обозначим через D_n область: $D_n=(D+\Gamma)\cap(\mathbf{R}^N\setminus E_n)$, ее граница состоит из части Γ, лежащей вне E_n, и части ∂E_n, лежащей в D. В области D_n рассмотрим две функции $u(x)$ и $v(x)=A+\varepsilon w_n(x)$, $\varepsilon>0$ — любое; $u(x)$ и $v(x)$ гармоничны в D_n, а на ∂D_n $\varlimsup\limits_{x\to y\in\partial D_n} u(x)\leqslant v(y)$, ибо на части $\partial D_n\cap\Gamma$ $\varlimsup\limits_{x\to y} u(x)\leqslant A$, а $v\geqslant A$ всюду, а на части $\partial D_n\cap E_n$ $u(x)\leqslant C$ по условию, а $v(x)>C$, если $n\geqslant n_0(\varepsilon)$, так как $w_n(x)=W_n$ на E_n и $W_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Итак, на всей границе ∂D_n $\varlimsup\limits_{x\to y\in\partial D_n} u(x)\leqslant v(y)$, а, значит, $u(x)\leqslant v(x)$ всюду в $\overline{D}_n$. Пусть теперь x_0 — любая точка D; $x_0\in D_n$ при $n\geqslant n_1$. По доказанному

$$u(x_0)\leqslant v(x_0)=A+\varepsilon w_n(x_0)\leqslant A+2\varepsilon h(r_{x_0E}), \tag{3.54}$$

r_{x_0E} — расстояние от точки x_0 до множества E, $E\subset\Gamma$. Оценка (54) следует из (53) и того факта, что $\mu_n(E_n)=1$. Так как правая часть в (54) от n не зависит, а $\varepsilon>0$ — любое, то $u(x_0)\leqslant A$. ■

Из доказанной теоремы вытекает следующее усиление теоремы единственности для задачи Дирихле.

Теорема 3.9. *Если две функции $u(x)$ и $v(x)$ гармоничны в D и принимают одинаковые предельные значения во всех точках границы Γ, за исключением множества точек емкости нуль, то они совпадают всюду в D.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 8 к разностям $u-v$ и $v-u$.

3°. Критерий Винера регулярности граничной точки.

Теорема 3.10. *Пусть D область с границей Γ и $y\in\Gamma$. Обозначим через $\widetilde{D}$ дополнение области D, $\widetilde{D}=\mathbf{R}^N\diagdown D$, через E_n множество $\{x\,|\,x\in\widetilde{D},\ 2^{-n}\leqslant r_{xy}\leqslant 2^{-n+1}\}$, а через c_n емкость E_n, $c_n=C(E_n)$. Для того чтобы точка $y\in\Gamma$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(N-2)}c_n. \tag{3.55}$$

Доказательство. Необходимость. Докажем, что если ряд (55) сходится, то точка y иррегулярна. Так как ряд (55) сходится, то возьмем m такое, чтобы

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^{n(N-2)}c_n < 1/4. \tag{3.56}$$

Фиксировав это m, возьмем функцию $\varphi(x)$, равную

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0, & \text{при}\quad r_{xy}>2^{-m},\\ 1-2^m r_{xy}, & \text{при}\quad r_{xy}\leqslant 2^{-m},\end{cases} \tag{3.57}$$

и рассмотрим в области D задачу Дирихле для оператора Лапласа с краевой функцией $\varphi(x)$ на Γ; обозначим, как обычно, $u_\varphi(x)$ обобщенное по Винеру решение этой задачи. Если мы докажем, что на каждой сфере с центром в точке y достаточно малого радиуса найдется точка, принадлежащая области D, в которой $u_\varphi\leqslant 1/2$, то это будет означать, что точка y иррегулярна (ибо $\varphi(y)=1$).

Зафиксируем любое натуральное $p>m$. Возьмем винеровскую аппроксимацию $\{D_l\}$ области D, границы Γ_l областей D_l принадлежат $A^{(1,\mu)}$. Обозначим через $\widetilde{D}_l$ дополнение D_l, $\widetilde{D}_l=\mathbf{R}^N\diagdown D_l$, через $E_{n,l}$ множество

$$E_{n,l}=\{x\,|\,x\in\widetilde{D}_l,\quad 2^{-n}\leqslant r_{xy}\leqslant 2^{-n+1}\},$$

и через $c_{n,l}$ емкость $E_{n,l}$, $c_{n,l}=C(E_{n,l})$. Так как $\sum\limits_{n=m+1}^{p}{}' 2^{n(N-2)}c_n< 1/4$, и емкость непрерывна справа*), то и

*) Непрерывность справа емкости $C(E)$ означает следующее: для любого $\varepsilon>0$ существует окрестность Ω компакта E, такая, что если $E\subset E_1\subset\Omega$, то $C(E_1)<C(E)+\varepsilon$. Это свойство емкости легко следует из определения и из теоремы 4 [18].

$$\sum_{n=m+1}^{p} 2^{n(N-2)} c_{n,l} < 1/4, \tag{3.58}$$

если l достаточно велико, $l \geqslant l_0(p)$. Рассмотрим в области $\widehat{D}_l = D_l \setminus K(y, 2^{-p})$ функцию $u_{l,\varphi}$ ($u_{l,\varphi}$ — решение в области D_l задачи Дирихле с краевой функцией φ). Обозначим через $w_{n,l}$ равновесный потенциал множества $E_{n,l}$. Для замкнутого множества $E_{n,l}$ выполнены условия теоремы 4, так что $w_{n,l} \equiv 1$ на $E_{n,l}$. Всюду в $\widehat{D}_l$ выполняется неравенство

$$u_{l,\varphi}(x) \leqslant w_{m+1,l} + \ldots + w_{p,l} + \frac{1}{2^{p(N-2)} r_{xy}^{N-2}}. \tag{3.59}$$

В самом деле, достаточно проверить справедливость (59) на границе $\partial\widehat{D}_l$ области $\widehat{D}_l$: всюду на $\partial\widehat{D}_l$ $0 \leqslant u_{l,\varphi} \leqslant 1$ в силу (57), причем $u_{l,\varphi}=0$ на $\partial\widehat{D}_l$ вне шара $K(y, 2^{-m})$; на границе $S(y, 2^{-p})$ имеем $2^{-p(N-2)} r_{xy}^{2-N} = 1$, а все потенциалы $w_{n,l} \geqslant 0$ $(m+1 \leqslant n \leqslant p)$ и равны 1 на $E_{n,l}$, т. е. на всей части $\partial\widehat{D}_l$, лежащей между сферами $S(y, 2^{-p})$ и $S(y, 2^{-m})$; правая часть в (59) больше 1, т. е. (59) доказано.

Возьмем теперь число ρ, равное $\rho = 8/2^p$, построим область $\check{D}_l = (D_l \cap K(y, \rho)) \cup K(y, 2^{-p})$ и рассмотрим в $\check{D}_l$ функцию

$$w(x) = w_{m+1,l}(x) + \ldots + w_{p,l}(x). \tag{3.60}$$

В точке $y \in \check{D}_l$ имеем

$$w_{n,l}(y) = \int_{E_{n,l}} \frac{d\mu_{n,l}(x)}{|x-y|^{N-2}} \leqslant 2^{n(N-2)} C(E_{n,l}) = 2^{n(N-2)} c_{n,l}. \tag{3.61}$$

Отсюда в силу (58) получим

$$w(y) < 1/4. \tag{3.62}$$

В силу принципа максимума для гармонической в $\check{D}_l$ функции $w(x)$ из (62) заключаем, что на $\partial\check{D}_l$ найдется точка z, в которой $w(z) < 1/4$. Точка z должна принадлежать сфере $S(y, \rho)$, ибо на остальной части границы $\partial\check{D}_l$ области $\check{D}_l$ хотя бы одна из функций $w_{n,l}$ $(m+1 \leqslant n \leqslant p)$ равна единице. Отсюда и из (59) заключаем ($z \in \widehat{D}_l$), что в точке z

$$u_{l,\varphi}(z) \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{p(N-2)} \rho^{N-2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8^{N-2}} < \frac{1}{2}. \tag{3.63}$$

Так как (63) верно для всех $l \geqslant l_0(p)$, то и

$$u_\varphi(z) \leqslant 1/2. \tag{3.64}$$

Итак, на каждой сфере $S(y, \rho)$ с центром в точке y и радиусом $\rho=8/2^p$ есть точка, в которой выполнено (64). Так как p произвольно, то наше утверждение доказано.

Достаточность. Пусть ряд (55) расходится, докажем, что точка y регулярна. Для этого мы построим в точке y барьер в смысле теоремы 2.3. Пусть p — произвольное натуральное число. Обозначим через $E_{n,p}$ множество точек $E_{n,p}=\{x \mid x \in \widetilde{D},\ 2^{-n/p} \leqslant r_{xy} \leqslant 2^{-n/p+1/p}\}$, а через $c_{n,p}$ емкость множества $E_{n,p}$. Поскольку при любом $n \geqslant 1$ $\bigcup_{k=1}^{p} E_{(n-1)p+k,p} \supset E_{n,p}$, то

$$\sum_{k=1}^{p} c_{(n-1)p+k,p} \geqslant c_{n,p} \quad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{3.65}$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}(N-2)} c_{n,p} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} 2^{\frac{p(s-1)+k}{p}(N-2)} c_{p(s-1)+k,\,p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2^{N-2}} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{s(N-2)} \sum_{k=1}^{p} c_{p(s-1)+k,\,p} \geqslant \frac{1}{2^{N-2}} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{s(N-2)} c_{s,p} = \infty, \tag{3.66}$$

ибо ряд (5.5) расходится. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}(N-2)} c_{n,p} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{p^2} 2^{(N-2)\frac{(s-1)p^2+k}{p}} c_{(s-1)p^2+k,p}, \tag{3.67}$$

то расходится по крайней мере один из p^2, стоящих в правой части (67) рядов. Будем считать, не ограничивая общности, что расходится ряд с $k=p^2$:

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p} = \infty. \tag{3.68}$$

Возьмем число N_p столь большим, чтобы

$$\sum_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p} > 2^{p/4}. \tag{3.69}$$

Обозначим, как и выше, через $w_{n,p}$ равновесный потенциал множества $E_{n,p}$. Докажем, что во всем пространстве $\mathbb{R}^N$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)}{\sum\limits_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p}} \leqslant (1+2^{-p/8}). \tag{3.70}$$

В силу теоремы 2 достаточно доказать (70) на каждом множестве $E_{sp^2,p}$, $1\leqslant s\leqslant N_p$. Пусть $E_{s_0p^2,p}$ — любое множество, $1\leqslant s_0\leqslant \leqslant N_p$. Расстояние от множества $E_{sp^2,p}$ до множества $E_{s_0p^2,p}$, $s\neq s_0$ не меньше расстояния от $E_{sp^2,p}$ до соседнего множества $E_{(s+1)p^2,p}$, а это последнее расстояние равно

$$2^{-sp}-2^{-(s+1)p+1/p}=2^{-sp}\left(1-\frac{1}{2^{p-1/p}}\right)>2^{-sp}(1-2^{-p/2}). \tag{3.71}$$

Поэтому потенциал $w_{sp^2,p}$ на множестве $E_{s_0p^2,p}$ оценивается так:

$$0\leqslant w_{sp^2,p}(x)=\int\limits_{E_{sp^2,p}}\frac{d\mu(z)}{|x-z|^{N-2}}<2^{sp(N-2)}(1-2^{-p/2})^{2-N}c_{sp^2,p}. \tag{3.72}$$

Так как по теореме 4 $w_{s_0p^2,p}(x)\leqslant 1$ на $E_{s_0p^2,p}$, то с учетом (72) получим для $x\in E_{s_0p^2,p}$

$$\sum_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)=w_{s_0p^2,p}(x)+\sum_{s=1,s\neq s_0}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)\leqslant$$

$$\leqslant 1+(1-2^{-p/2})^{2-N}\sum_{s=1}^{N_p}2^{sp(N-2)}c_{sp^2,p}. \tag{3.73}$$

Если $2^{p/4}>N$, т. е. $p>4\log_2 N=p_0$, то $(1-2^{-p/2})^{2-N}<1+2^{-p/4}$. Итак, при $p>p_0$ на каждом множестве $E_{sp^2,p}$ $(1\leqslant s\leqslant N_p)$ имеем неравенство

$$\sum_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)\leqslant 1+(1+2^{-p/4})\sum_{s=1}^{N_p}2^{sp(N-2)}c_{sp^2,p}, \tag{3.74}$$

а потому в силу (69) получим справедливое во всем $\mathbb{R}^N$ неравенство

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)}{\sum\limits_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p}} \leqslant 2^{-p/4}+1+2^{-p/4}<1+2^{-p/8}. \tag{3.75}$$

Возьмем теперь винеровскую аппроксимацию $\{D_l\}$ области D, обозначим через $\rho>0$ число, равное половине диаметра области D, а через $\widehat{D}_l$ обозначим область: $\widehat{D}_l=\widetilde{D}_l\cap K(y, \rho)$, где $\widetilde{D}_l$ — дополнение области D_l, $\widetilde{D}_l=\mathbf{R}^N\diagdown D_l$. Обозначим через p_1 натуральное число, такое, что $2^{-p_1+1/p_1}<\rho=\dfrac{\operatorname{diam} D}{2}$, тогда при $p\geqslant p_1$ все множества $E_{sp^2,p}\subset\widehat{D}_l$ для всех l и $1\leqslant s\leqslant N_p$. По построению, все точки границы $\partial\widehat{D}_l$ области $\widehat{D}_l$ регулярны. Обозначим, через $v_l(x)$ функцию, гармоническую всюду вне $\widehat{D}_l$, равную нулю на бесконечности и равную единице на $\partial\widehat{D}_l$. Поскольку $\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)$ есть гармоническая вне $\widehat{D}_l$ функция, равная нулю на бесконечности, и так как для нее всюду в $\mathbf{R}^N$ выполняется неравенство (75) (в частности, и на $\partial\widehat{D}_l$), то на $\partial\widehat{D}_l$, а стало быть, по принципу максимума, и всюду вне $\widehat{D}_l$ справедливо следующее неравенство

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)}{\sum\limits_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp}\, c_{sp^2,p}} < v_l(x)\,(1+2^{-p/8}). \tag{3.76}$$

По теореме 2.1 последовательность $\{v_l(x)\}$ сходится к функции $u_1(x)$, определенной вне $\widetilde{D}\cap K(y, \rho)$, равной нулю на бесконечности и построенной по граничной функции $\varphi(x)\equiv 1$, заданной на $\partial(\widetilde{D}\cap K(y, \rho))$ (и продолженной на все пространство $\mathbf{R}^N$ тождественной единицей). Так как левая часть (76) от l не зависит, то в каждой точке $x\in D$ выполняется неравенство

$$\frac{\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)}{\sum\limits_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp}\, c_{sp^2,p}} \leqslant u_1(x)\,(1+2^{-p/8}). \tag{3.77}$$

По построению, $0\leqslant u_1(x)\leqslant 1$ в области определения, в частности, в D. Функция $\sum\limits_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(x)$ непрерывна в точке y, и справедлива оценка в силу определения множества $E_{sp^2,p}$:

$$w_{sp^2,p}(y)=\int\limits_{E_{sp^2,p}}\frac{d\mu(z)}{|z-y|^{N-2}}>2^{sp(N-2)}\,\mu(E_{sp^2,p})=2^{sp(N-2)}c_{sp^2,p}. \tag{3.78}$$

Из (77) и (78)

$$(1+2^{-p/8}) \varliminf_{x\to y, x\in D} u_1(x) \geqslant \frac{\sum_{s=1}^{N_p} w_{sp^2,p}(y)}{\sum_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p}} >$$

$$> \frac{\sum_{s=1}^{N_p} 2^{sp(N-2)} c_{sp^2,p}}{\sum_{s=1}^{N_p} 2^{(N-2)sp} c_{sp^2,p}} = 1, \qquad (3.79)$$

т. е.

$$\varliminf_{x\to y, x\in D} u_1(x) > \frac{1}{(1+2^{-p/8})}. \qquad (3.80)$$

Так как $p \geqslant \max\{p_0, p_1\}$ здесь произвольно, то

$$\varliminf_{x\to y, x\in D} u_1(x) \geqslant 1, \qquad (3.81)$$

а так как $u_1(x) \leqslant 1$, то существует

$$\lim_{x\to y, x\in D} u_1(x) = 1. \qquad (3.82)$$

Теперь в качестве барьера $w_y(x)$, обеспечивающего регулярность точки $y\in\Gamma$, можно взять функцию $w_y(x) = 1 - u_1(x)$. ∎

Извлечем из критерия Винера достаточные геометрические признаки регулярности и иррегулярности граничной точки.

Теорема 3.11. *Точка y границы Γ области D регулярна, если ее можно коснуться вершиной ограниченного прямого кругового полуконуса Q_y, лежащего вне области D в достаточно малой окрестности точки y.*

Доказательство. Имеем $E_n \supset \widehat{E}_n$, где $E_n = \{x \mid x\in\widetilde{D}, 2^{-n} \leqslant r_{xy} \leqslant 2^{-n+1}\}$, а $\widehat{E}_n = E_n \cap Q_y$, и при $n \geqslant n_0(Q_y)$ (так, что основание полуконуса Q_y лежит вне E_n) $\widehat{E}_n$ есть растяжение $\widehat{E}_{n_0}$ в 2^{n_0-n} раз, поэтому (см. 3) на стр. 41) $C(\widehat{E}_n) = 2^{(n_0-n)(N-2)} C(\widehat{E}_{n_0})$ и, стало быть, расходится ряд (55) ($c_n = C(E_n)$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(N-2)} c_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n(N-2)} C(\widehat{E}_n) \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{n(N-2)} 2^{(n_0-n)(N-2)} C(\widehat{E}_{n_0}) =$$

$$= 2^{n_0(N-2)} C(\widehat{E}_{n_0}) \sum_{n=n_0}^{\infty} 1 = \infty, \qquad (3.83)$$

так как $C(\widehat{E}_{n_0}) > 0$, ибо $\widehat{E}_{n_0}$ содержит сферу достаточно малого радиуса $r_0 > 0$, а емкость последней равна $r_0^{N-2} > 0$.

Более тонкое использование критерия Винера приводит к следующим признакам (доказательства см. в [18]).

Утверждение 3.3. *Точка y границы Γ области D регулярна, если ее можно коснуться вершиной полуконуса Q_y, лежащего вне D и задаваемого в некоторой системе координат с началом в точке y уравнением*

$$Q_y = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=2}^{N} x_i^2 < \frac{x_1^2}{|\ln x_1|^{2/(N-3)}},\ 0 < x_1 \leqslant \delta \right\}.$$

Утверждение 3.4. *Точка y границы Γ области D иррегулярна, если при некотором $\rho > 0$ все точки $\widetilde{D} \cap K(y, \rho)$ не выходят из полуконуса Q_y с вершиной y, задаваемого в некоторой системе координат с началом в точке y уравнением*

$$\overline{Q}_y = \left\{ x \,\middle|\, \sum_{i=2}^{N} x_i^2 < \frac{x_1^2}{|\ln x_1|^{2/(N-3)+\varepsilon}},\ 0 < x_1 \leqslant \delta \right\}, \quad \varepsilon > 0 \text{ — любое.}$$

Здесь $N \geqslant 4$.

При $N = 3$, роль Q_y играет полуконус вида

$\{x \mid x_2^2 + x_3^2 < x_1^k,\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \delta\}$, $k > 0$ — любое число; роль $\overline{Q}_y$ играет полуконус вида

$$\{x \mid x_2^2 + x_3^2 < e^{-2/x_1},\ 0 < x_1 \leqslant \delta\}.$$

§ 4. Обобщенные из W_2^1 решения краевых задач

1°. Обобщенное из W_2^1 решение задачи Дирихле. Пусть D — ограниченная область с границей Γ, $D \subset \mathbf{R}^N$. Напомним определение пространства $W_2^1(D)$. На множестве функций $C^{(1)}(\overline{D})$ зададим скалярное произведение (u, v) по формуле

$$(u, v) = \int_D \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right] dx, \tag{4.1}$$

норма $\|u\|_{W_2^1(D)}$ равна

$$\|u\|_{W_2^1(D)} = \sqrt{(u, u)} = \left\{ \int_D \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right] dx \right\}^{1/2}. \tag{4.2}$$

Замыкание множества $C^{(1)}(\bar{D})$ по норме (2) называется класс $W_2^1(D)$; $W_2^1(D)$ — гильбертово пространство. Замыкание множества $C_0^{(1)}(D)$ ($C_0^{(1)}(D)$ — множество функций, принадлежащих $C^{(1)}(D)$ и имеющих компактный в D носитель) по норме (2), называется пространством $\mathring{W}_2^1(D)$, $\mathring{W}_2^1(D)$ — гильбертово пространство $\mathring{W}_2^1(D) \subset W_2^1(D)$.

Пусть $f \in L_2(D)$, а $\varphi \in W_2^1(D)$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в} \quad D, \\ u = \varphi & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.3}$$

Определение 4.1. *Обобщенным (из W_2^1) решением задачи Дирихле* (3) *называется функция $u(x) \in W_2^1(D)$, которая удовлетворяет двум условиям:*

1) $(u - \varphi) \in \mathring{W}_2^1(D)$,

2) *для любой функции $\psi \in \mathring{W}_2^1(D)$ справедливо равенство* *)

$$\int_D \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + f\psi\right] dx = 0, \tag{4.4}$$

или, вводя обозначения,

$$E(u, \psi) = \int_D \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx, \quad H(f, \psi) = \int_D f\psi\, dx,$$

$$E(u, \psi) + H(f, \psi) = 0 \text{ для любой } \psi \in \mathring{W}_2^1(D). \tag{4.5}$$

Определение 4.2. *Обобщенным решением задачи Дирихле называется функция, которая доставляет минимум квадратичному функционалу $J(v) = E(v, v) + 2H(f, v)$ в классе всех функций $v(x)$, удовлетворяющих условию $(v - \varphi) \in \mathring{W}_2^1(D)$* **) *(такие v называются допустимыми функциями).*

Лемма 4.1. *Первое и второе определения обобщенного решения эквивалентны.*

Доказательство. Для любого вещественного ε, любой функции $u \in W_2^1(D)$ и любой функции $\psi \in \mathring{W}_2^1(D)$ справедливо тождество

---

*) Умножив уравнение $\Delta u = f$ на произвольную функцию $\psi \in C_0^{(1)}(D)$ и проинтегрировав один раз по частям по области D, придем к равенству (4).

**) Из условия $(v - \varphi) \in \mathring{W}_2^1(D)$ следует, что $v \in W_2^1(D)$.

$$E(u+\varepsilon\psi,\ u+\varepsilon\psi)+2H(f,\ u+\varepsilon\psi)=[E(u,u)+2H(f,u)]+$$
$$+2\varepsilon\{E(u,\psi)+H(f,\psi)\}+\varepsilon^2E(\psi,\psi). \qquad (4.6)$$

1) Пусть $u(x)$ обобщенное решение в смысле первого определения, т. е. для любой $\psi\in\mathring{W}_2^1(D)$ фигурная скобка в (6) равна нулю. Так как $(u-\varphi)\in\mathring{W}_2^1(D)$, то любая функция v, такая, что $(v-\varphi)\in\mathring{W}_2^1(D)$, может быть представлена в виде $u+\varepsilon\psi$, где $\psi\in\mathring{W}_2^1(D)$ и тождество (6) можно переписать так:

$$J(v)=E(v,v)+2H(f,v)=[E(u,u)+2H(f,u)]+\varepsilon^2E(\psi,\psi). \qquad (4.7)$$

Отсюда видно, что функционал $J(v)$ достигает своего минимума при $\varepsilon=0$, т. е. при $v=u$.

2) Пусть $u(x)$ обобщенное решение в смысле второго определения, т. е. квадратная скобка в (6) является минимумом функционала $J(v)$ и поэтому

$$2\varepsilon\{E(u,\psi)+H(f,\psi)\}+\varepsilon^2E(\psi,\psi)\geqslant 0, \qquad (4.8)$$

Докажем, что фигурная скобка в (8) равна нулю для всех $\psi\in\mathring{W}_2^1(D)$, т. е. $u(x)$ является обобщенным решением в смысле первого определения. В самом деле, если бы для какой-нибудь $\psi\in\mathring{W}_2^1(D)$ $\{\ldots\}\neq 0$, например, $\{\ldots\}>0$, то можно взять в качестве ε отрицательное число, столь малое по модулю, что левая часть в (8) будет меньше нуля, что невозможно. ∎

Лемма 4.2. *Существует константа* $\alpha=\alpha(D)>0$, такая, *что для всех* $\psi\in\mathring{W}_2^1(D)$ *справедливо неравенство* (Пуанкаре)

$$H(\psi,\psi)\leqslant\alpha E(\psi,\psi). \qquad (4.9)$$

Доказательство. Так как $C_0^{(1)}(D)$ плотно в $\mathring{W}_2^1(D)$, то достаточно доказать (9) для любой $\psi\in C_0^{(1)}(D)$. Возьмем куб

$$Q=\underbrace{[-d,d]\times\ldots\times[-d,d]}_{N\text{ раз}}$$

со сторонами $2d$ столь большими, что $\overline{D}\subset Q$. Продолжим ψ нулем на весь куб, $\psi\in C_0^{(1)}(Q)$. Имеем для любой точки $x\in Q$ в силу неравенства Коши — Буняковского

$$\psi^2(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \left(\int_{-d}^{x_1} \frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y_1, x_2, \ldots, x_N)\,dy_1\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2d \int_{-d}^{d} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)^2 dy_1. \qquad (4.10)$$

Проинтегрируем неравенство (10) по кубу Q и учтем, что $\psi \equiv 0$ вне D, получим

$$\int_D \psi^2(x)\,dx \leqslant 2d \int_Q \left[\int_{-d}^{d} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\right)^2 dy_1\right] dx \leqslant 4d^2 \int_Q \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant 4d^2 \int_Q \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 dx = 4d^2 \int_D \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)^2 dx. \qquad (4.11)$$

Итак, неравенство (9) получено.

Теорема 4.1. *Обобщенное решение задачи Дирихле (3) единственно.*

Доказательство. Пусть есть два решения u_1 и u_2. Так как $(u_1 - \varphi) \in \mathring{W}_2^1(D)$ и $(u_2 - \varphi) \in \mathring{W}_2^1(D)$, то и $(u_1 - u_2) \in \mathring{W}_2^1(D)$, ибо $u_1 - u_2 = (u_1 - \varphi) - (u_2 - \varphi)$. Поэтому в тождестве (5) можно взять в качестве ψ функцию $u_1 - u_2$, получим

$$E(u_1, u_1 - u_2) + H(f, u_1 - u_2) = 0$$

и

$$E(u_2, u_1 - u_2) + H(f, u_1 - u_2) = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $E(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$. Отсюда, так как $(u_1 - u_2) \in \mathring{W}_2^1(D)$, получим в силу (9) $H(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$, т. е. $u_1 = u_2$. ■

Лемма 4.3. *Квадратичный функционал $J(v)$ ограничен снизу в классе всех допустимых функций.*

Доказательство. Любая допустимая функция имеет вид $v = \varphi + \psi$, где $\psi \in \mathring{W}_2^1(D)$. Поэтому имеем

$$J(v) = E(\varphi, \varphi) + E(\psi, \psi) + 2E(\varphi, \psi) + 2H(f, \varphi) + 2H(\psi, f) =$$

$$= \left\{4E(\varphi, \varphi) + 2E(\varphi, \psi) + \frac{1}{4}E(\psi, \psi)\right\} - [3E(\varphi, \varphi) - 2H(f, \varphi)] +$$

$$+ \frac{3}{4}E(\psi, \psi) + 2H(\psi, f) =$$

$$= E\left(2\varphi + \frac{\psi}{2},\ 2\varphi + \frac{\psi}{2}\right) - [3E(\varphi, \varphi) - 2H(f, \varphi)] +$$
$$+ \frac{3}{4} E(\psi, \psi) + 2H(\psi, f). \tag{4.12}$$

Так как $E(u, u) \geqslant 0$ для любой $u \in W_2^1(D)$, а квадратная скобка в (12) есть некоторая постоянная C (ибо φ и f фиксированы), то из (12) имеем

$$J(v) \geqslant C + \frac{3}{4} E(\psi, \psi) + 2H(\psi, f). \tag{4.13}$$

При любом $\beta > 0$

$$2|H(f, \psi)| = 2\left|\int\limits_D \psi f\, dx\right| \leqslant \int\limits_D \left(\frac{1}{\beta}\psi^2 + \beta f^2\right) dx =$$
$$= \frac{1}{\beta} H(\psi, \psi) + \beta H(f, f).$$

Следовательно, неравенство (13) можно продолжить

$$J(v) \geqslant C + \frac{3}{4} E(\psi, \psi) - \frac{1}{\beta} H(\psi, \psi) - \beta H(f, f) \geqslant$$
$$\geqslant C + \frac{3}{4} E(\psi, \psi) - \frac{\alpha}{\beta} E(\psi, \psi) - \beta H(f, f), \tag{4.14}$$

во втором неравенстве мы воспользовались леммой 2. Если положить теперь $\beta = 4\alpha$, то из (14) получим

$$J(v) \geqslant C + \frac{1}{2} E(\psi, \psi) - 4\alpha H(f, f) \geqslant C - 4\alpha H(f, f) \geqslant C_1. \tag{4.15}$$

Таким образом $J(v) \geqslant C_1 > -\infty$ для всех допустимых функций. ∎

Так как функционал $J(v)$ ограничен снизу, то существует точная нижняя грань $d = \inf\limits_v J(v)$, v — допустимая функция, $(v - \varphi) \in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$. По определению infimum существует последовательность $\{v_n\}$ допустимых функций, такая, что $d_n = J(v_n) \to d$ при $n \to \infty$. Любая такая последовательность называется *минимизирующей.*

Лемма 4.4. *Пусть $\{v_n\}$ — любая минимизирующая последовательность, а $\{\psi_n\}$ — любая последовательность, $\psi_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и такая, что $E(\psi_n, \psi_n) \leqslant A$ ($A \geqslant 0$ — некоторая постоянная) для всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда числовая последовательность $a_n = E(v_n, \psi_n) + H(f, \psi_n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть ε — любое. Имеем

$$J(v_n+\varepsilon\psi_n)=E(v_n+\varepsilon\psi_n,\ v_n+\varepsilon\psi_n)+2H(f,\ v_n+\varepsilon\psi_n)\geqslant d,$$

или если обозначить $d_n=E(v_n,\ v_n)+2H(f,\ v_n)$, то

$$d_n-d+2\varepsilon a_n+\varepsilon^2E(\psi_n,\ \psi_n)\geqslant 0. \qquad (4.16)$$

Обозначим $\delta_n=d_n-d$, $\delta_n\geqslant 0$; так как $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$, то для любого ε найдется $N=N(\varepsilon^2)$, такое, что при $n\geqslant N$ $0\leqslant\delta_n\leqslant\varepsilon^2A$. Отсюда и из того, что $E(\psi_n,\ \psi_n)\leqslant A$, вытекает, что при $n\geqslant N$ неравенство (16) можно переписать так:

$$2\varepsilon a_n+2\varepsilon^2A\geqslant 0,\quad n\geqslant N. \qquad (4.17)$$

Если $a_n\neq 0$, выберем при каждом n знак ε противоположным знаку a_n. Тогда из (17) при всех $n\geqslant N$ получим

$$-|\varepsilon|\,|a_n|+\varepsilon^2A\geqslant 0,$$

или

$$|a_n|\leqslant|\varepsilon|A\quad\text{при } n\geqslant N(\varepsilon^2),$$

т. е. $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. ∎

Теорема 4.2. *Пусть D произвольная ограниченная область, $D\subset\mathbf{R}^N$, $f\in L_2(D)$, $\varphi\in W_2^1(D)$. Тогда существует (и притом единственное) обобщенное решение задачи Дирихле* (3).

Доказательство. Докажем, что любая минимизирующая последовательность $\{v_n\}$ является фундаментальной в $W_2^1(D)$, т. е.

$$\|v_n-v_m\|_{W_2^1}\to 0\quad\text{при } n,\ m\to\infty. \qquad (4.18)$$

Пусть m и n любые два номера. Ясно, что

$$\chi_{nm}=v_n-v_m\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D).$$

Покажем, что существует такая постоянная $A>0$, что $E(\chi_{nm},\ \chi_{nm})\leqslant A$. Имеем $v_n=\varphi+\psi_n$, $\psi_n\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Неравенство (15), если в него подставить $v=v_n=\varphi+\psi_n$, показывает, что для всех $n=1,\ 2,\ \ldots$:

$$E(\psi_n,\ \psi_n)\leqslant 2J(v_n)+C_2=2d_n+C_2\leqslant C_3, \qquad (4.19)$$

ибо $d_n\to d$ при $n\to\infty$ и, значит, d_n ограничено. Далее,

$$E(v_n,\ v_n)=E(\varphi+\psi_n,\ \varphi+\psi_n)\leqslant 2E(\varphi,\ \varphi)+2E(\psi_n,\ \psi_n)\leqslant C_4 \qquad (4.20)$$

в силу (19) и того, что $(f+g)^2 \leqslant 2f^2+2g^2$. Поэтому

$$E(v_n - v_m, v_n - v_m) \equiv E(\chi_{nm}, \chi_{nm}) \leqslant$$
$$\leqslant 2E(v_n, v_n) + 2E(v_m, v_m) \leqslant 4C_4 = A. \qquad (4.21)$$

Воспользуемся леммой 4 для минимизирующей последовательности $\{v_n\}$ и последовательности $\{\chi_{nm}\}$, $\chi_{nm} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, m — любое фиксированное. Тогда поскольку (21) выполняется для всех n и m сразу, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и всех m

$$|E(v_n, \chi_{nm}) + H(f, \chi_{nm})| < \varepsilon, \ n \geqslant N_1(\varepsilon), \ m \text{— любое}. \qquad (4.22)$$

Аналогично применив лемму 4 к последовательностям $\{v_m\}$ и $\{\chi_{nm}\}$, n — любое фиксированное, получим

$$|E(v_m, \chi_{nm}) + H(f, \chi_{nm})| < \varepsilon, \ m \geqslant N_2(\varepsilon), \ n \text{— любое}. \qquad (4.23)$$

Так как

$$E(\chi_{nm}, \chi_{nm}) = [E(v_n, \chi_{nm}) + H(f, \chi_{nm})] -$$
$$- [E(v_m, \chi_{nm}) + H(f, \chi_{nm})],$$

то из (22) и (23) получим, что

$$0 \leqslant E(\chi_{nm}, \chi_{nm}) < \varepsilon \quad \text{при } n, m \geqslant N(\varepsilon). \qquad (4.24)$$

Отсюда в силу леммы 2 и

$$0 \leqslant H(\chi_{nm}, \chi_{nm}) < \varepsilon \quad \text{при } n, m \geqslant N(\varepsilon). \qquad (4.25)$$

Так как $\|u\|^2_{W_2^1} = E(u, u) + H(u, u)$, то из (24) и (25) следует фундаментальность любой минимизирующей последовательности $\{v_n\}$. $W_2^1(D)$ — полное пространство, следовательно, $v_0 = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$, $v_0 \in W_2^1(D)$. Докажем, что v_0— обобщенное решение задачи Дирихле (3). Прежде всего, $(v_0 - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, ибо

$$\|(v_0 - \varphi) - (v_n - \varphi)\|_{W_2^1} = \|v_n - v_0\|_{W_2^1} \to 0,$$

а $(v_n - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ — полное пространство. Далее, в силу леммы 4 для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$

$$E(v_n, \psi) + H(f, \psi) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad (4.26)$$

По неравенству Коши — Буняковского

$$|E(v_n - v_0, \psi)| \leqslant \sqrt{E(v_n - v_0, v_n - v_0)\, E(\psi, \psi)} \leqslant$$
$$\leqslant \|v_n - v_0\|_{W_2^1} \sqrt{E(\psi, \psi)} \to 0, \qquad (4.27)$$

при $n\to\infty$. Вычитая (27) из (26), получим $E(v_0, \psi)+H(f, \psi)=0$, т. е. v_0 — обобщенное решение задачи Дирихле (3). ∎

2°. **Связь обобщенного из W_2^1 и классического решения задачи Дирихле.** Рассмотрим в ограниченной области D с границей Γ задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } D, \\ u=\varphi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{4.28}$$

Если f и φ таковы, что существует как классическое (регулярное), так и обобщенное (из $W_2^1(D)$) решения задачи (28), то априори они, конечно, не совпадают в области D, ибо классическое решение, вообще говоря, не имеет интегрируемых с квадратом по области D первых производных, обобщенное же решение не имеет вторых (даже обобщенных) производных в D. Возникает вопрос, при каких требованиях на границу Γ и на данные задачи φ и f классическое и обобщенное решение совпадают в области D (почти всюду).

Для выяснения этого вопроса поступим так же, как при построении решения Винера, именно рассмотрим винеровскую аппроксимацию области D последовательностью областей $\{D_n\}$ (см. § 2). Будем считать пока, что $f\equiv 0$, а $\varphi\in W_2^1(D)$, и рассмотрим кроме задачи (28) задачу Дирихле в области D_n

$$\begin{cases} \Delta u_n = 0 \text{ в } D_n, \\ u_n=\varphi \quad \text{на } \Gamma_n. \end{cases} \tag{4.29}$$

Теорема 4.3. *Пусть D — произвольная ограниченная область, $D\subset \mathbf{R}^N$, а φ — произвольная функция из $W_2^1(D)$. Тогда, если u — обобщенное решение задачи* (28) (*с* $f\equiv 0$), *а u_n — обобщенное решение задачи* (29), *то для любого компакта $K\subset D$*

$$\|u-u_n\|_{W_2^1(K)}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty. \tag{4.30}$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{u}_n$ обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_n = 0 \text{ в } D_n, \\ \tilde{u}_n=u \quad \text{на } \Gamma_n, \end{cases} \tag{4.31}$$

где u — обобщенное решение задачи (28) ($f\equiv 0$). Докажем, что $\tilde{u}_n=u$ почти всюду в D_n. В самом деле, $\tilde{u}_n$ доставляет минимум функционалу $J_{D_n}(v)=E_{D_n}(v, v)$ в классе функций v, для которых $(v-u)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$. Поэтому функция $\tilde{v}$, равная $\tilde{u}_n$ в D и u в $D\setminus D_n$, является допустимой для задачи (28), следовательно, $E_D(\tilde{v}, \tilde{v}) \geqslant E_D(u, u)$, а в силу определения $\tilde{v}$ $E_{D_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u_n}) \geqslant E_{D_n}(u, u)$. Но $\tilde{u}_n$ — обобщенное решение задачи (31), поэтому верно и обратное неравенство $E_{D_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) \leqslant E_{D_n}(u, u)$, т. е. $E_{D_n}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_n) = E_{D_n}(u, u)$, а в силу единственности обобщенного решения $\tilde{u}_n = u$ в D_n.

Поскольку все области D_n при $n \geqslant n_0(K)$ содержат компакт K внутри себя, нам теперь достаточно доказать следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$ в любой области D_n $\|\tilde{u}_n - u_n\|_{W_2^1(D_n)} < \varepsilon$. Введем $w_n = \tilde{u}_n - u_n$. Тогда достаточно доказать, что

$$\|w_n\|_{W_2^1(D_n)} < \varepsilon, \quad n \geqslant N(\varepsilon). \tag{4.32}$$

Функция w_n является обобщенным решением задачи

$$\begin{cases} \Delta w_n = 0 & \text{в } D_n; \\ w_n = u - \varphi & \text{на } \Gamma_n. \end{cases} \tag{4.33}$$

По определению обобщенного решения задачи (28) $(u - \varphi) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Поэтому по определению пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ найдется такая последовательность $\psi_m \in C_0^{(1)}(D)$, что

$$\|u - \varphi - \psi_m\|_{W_2^1(D_n)} \leqslant \|u - \varphi - \psi_m\|_{W_2^1(D)} < \varepsilon \tag{4.34}$$

для всех n и $m \geqslant m_0(\varepsilon)$. Зафиксируем какое-нибудь $m \geqslant m_0(\varepsilon)$ и возьмем n_1 столь большим, чтобы при $n \geqslant n_1$ $\psi_m \in C_0^{(1)}(D_n) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$. Для такого m и $n \geqslant n_1$ краевое условие в (33) можно заменить на $w_n = u - \varphi - \psi_m$ на Γ_n, так как $\psi_m \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$. Теперь в силу определения обобщенного решения задачи (33) и на основании (34) имеем

$$E_{D_n}(w_n, w_n) \leqslant E_{D_n}(u - \varphi - \psi_m, u - \varphi - \psi_m) \leqslant$$

$$\leqslant \|u - \varphi - \psi_m\|^2_{W_2^1(D_n)} < \varepsilon^2 \tag{4.35}$$

при $n \geqslant n_1$. Покажем теперь, что и $H_{D_n}(w_n, w_n)$ мало при больших n. Введем функцию χ, $\chi = w_n - (u - \varphi - \psi_m)$; $\chi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$. Далее в силу (35)

$$E_{D_n}(\chi, \chi) \leqslant 2E_{D_n}(w_n, w_n) + 2E_{D_n}(u - \varphi - \psi_m, u - \varphi - \psi_m) < 4\varepsilon^2. \tag{4.36}$$

Так как $\chi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D_n)$, то по лемме 2 в силу (36)

$$H_{D_n}(\chi, \chi) \leqslant 4\alpha\varepsilon^2. \tag{4.37}$$

Сопоставляя (34), (36) и (37), получим

$$\|w_n\|^2_{W^1_2(D_n)} \leqslant 2\|\chi\|^2_{W^1_2(D_n)} + 2\|u-\varphi-\psi_m\|^2_{W^1_2(D_n)} =$$

$$= 2[E_{D_n}(\chi, \chi) + H_{D_n}(\chi, \chi)] + 2\|u-\varphi-\psi_m\|^2_{W^1_2(D_n)} < C\varepsilon^2. \blacksquare \tag{4.38}$$

Теперь рассмотрим задачу Дирихле в условиях, когда существует классическое решение: пусть область D — произвольная нормальная область (см. § 1), а функция

$$f(x) \in C^{(0)}(\bar{D}) \cap C^{(0,\mu)}(D), \ \mu > 0.$$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в } D, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{4.39}$$

Классическое решение задачи (39) существует и единственно (см. § 1). Заведомо существует также обобщенное решение задачи (39) ($f(x) \in L_2$). Имеет место

Теорема 4.4. *Пусть выполнены указанные выше условия. Тогда классическое и обобщенное решения совпадают в D (почти всюду).*

Доказательство. Представим решение задачи (39) в виде $u(x) = v(x) + w(x)$, где $w(x) = -\int\limits_D h(r_{xy}) f(y)\,dy$, $h(r_{xy})$ — фундаментальное решение оператора Лапласа. Тогда $v(x)$ есть решение следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \ \text{в } D, \\ v(x) = -w(x) \equiv \varphi(x) \ \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{4.40}$$

а $w(x)$ является классическим и обобщенным решением задачи

$$\begin{cases} \Delta w = f \ \text{в } D, \\ w(x) = -\int\limits_D h(r_{xy}) f(y)\,dy, \quad x \in \Gamma. \end{cases} \tag{4.41}$$

То, что $w(x)$ — классическое решение задачи (41), хорошо известно. В силу свойств объемного потенциала $w(x) \in C^{(1,\mu)}(\mathbf{R}^N)$, а значит, и подавно $w(x) \in W^1_2(D)$; чтобы доказать, что $w(x)$ — обобщенное решение задачи (41), надо проверить, что выполняется интегральное тождество $E(w, \psi) + H(f, \psi) = 0$ для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$. Возьмем последовательность $\{\psi_m\}$, $\psi_m \in C^{(1)}_0(D)$ и

$\|\psi_m-\psi\|_{W_2^1(D)}\to 0$ при $m\to\infty$ и применим первую формулу Грина функциям w и ψ_m по области D, получим, что $E(w,\psi_m)+H(f,\psi_m)=0$ для всех m. Переходя здесь к пределу при $m\to\infty$, что возможно, ибо $w\in W_2^1(D)$, а $f\in L_2(D)$, получим, что и для любой ψ $E(w,\psi)+H(f,\psi)=0$.

Осталось доказать совпадение классического и обобщенного решения задачи (40). Заметим, что $\varphi(x)\in W_2^1(D)$, т. е. является допустимой функцией. Пусть $\{D_n\}$ — винеровская аппроксимация области D, а v_n — решение задачи Дирихле

$$\begin{cases}\Delta v_n=0 & \text{в } D_n,\\ v_n=\varphi(x) & \text{на } \Gamma_n.\end{cases}\tag{4.42}$$

В силу теоремы 2.1 классическое решение $v_n^{\text{кл}}$ задачи (42) на любом компакте $K\subset D$ при $n\to\infty$ равномерно сходится к $v^{\text{кл}}(x)$ — классическому решению задачи (40), а в силу теоремы 3 обобщенное решение $v_n^{\text{об}}$ задачи (42) сходится при $n\to\infty$ к $v^{\text{об}}$ в норме $W_2^1(K)$. Таким образом, достаточно доказать совпадение в D_n классического и обобщенного решения задачи (42). Это доказывается так: поскольку граница Γ_n области D_n класса Ляпунова, то представляя классическое решение $v_n^{\text{кл}}$ задачи (42) в виде потенциала двойного слоя, убеждаемся, что $v_n^{\text{кл}}\in C^{(1,\mu)}(\bar{D}_n)$. Применяя теперь, как и выше, первую формулу Грина к функциям $v_n^{\text{кл}}$ и любой функции $\psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$ по области D_n, получим, что $E_{D_n}(v_n^{\text{кл}},\psi)=0$, т. е. $v_n^{\text{кл}}$ является и обобщенным решением задачи (42). ■

Замечание 4.1. Теорема 4 легко обобщается на случай неоднородного краевого условия, именно рассмотрим задачу

$$\begin{cases}\Delta u=f & \text{в } D,\\ u=\varphi & \text{на } \Gamma.\end{cases}\tag{4.43}$$

Классическое и обобщенное решение задачи (43) совпадают в области D, если D — произвольная нормальная область,

$$f\in C^{(0)}(\bar{D})\cap C^{(0,\mu)}(D),\ \text{а}\ \varphi\in C^{(1)}(\bar{D})\cap C^{(1,\mu)}(D),\quad \mu>0.$$

Замечание 4.2. Мы получили теорему 4 на основании теоремы 3, которая и сама представляет известный интерес как аналог классической теоремы 2.1 для решений задачи Дирихле из класса W_2^1. Что касается теоремы о совпадении классического и обобщенного решения, то ее легко установить и непосредственно. Докажем следующее утверждение:

Пусть D — произвольная ограниченная область, а $f(x) \in C^{(0)}(\bar{D}) \cap C^{(0,\mu)}(D)$. Тогда классическое решение (если оно существует) задачи Дирихле (39) совпадает с обобщенным.

Доказательство. Возьмем винеровскую аппроксимацию $\{D_n\}$ области D, $(D_n + \Gamma_n) \subset D$, $(D_n + \Gamma_n) \in A^{(2,\mu)}$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть $u_n^{об} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$ — обобщенное решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f \text{ в } D_n, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma_n. \end{cases} \tag{4.44}$$

Продолжим $u_n^{об}$ нулем на всю область D, полученную функцию обозначим u_n, $u_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$. Так как u_n есть обобщенное решение задачи (44), то для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D_n)$ имеем

$$\int\limits_{D_n} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + f\psi \right) dx = 0. \tag{4.45}$$

Возьмем в качестве ψ функцию u_n и заменим область интегрирования на D ($u_n \equiv 0$ вне D_n), получим с помощью неравенства (9)

$$E(u_n, u_n) = \int\limits_D \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right)^2 dx =$$

$$= \left| \int\limits_D f u_n dx \right| \leqslant \sqrt{\int\limits_D f^2 dx \int\limits_D u_n^2 dx} \leqslant \|f\|_{L_2(D)} \sqrt{\alpha E(u_n, u_n)}.$$

Отсюда

$$E(u_n, u_n) \leqslant \alpha \|f\|^2_{L_2(D)}, \quad H(u_n, u_n) \leqslant \alpha E(u_n, u_n) \leqslant \alpha^2 \|f\|^2_{L_2(D)}$$

и

$$\|u_n\|^2_{W_2^1(D)} = E(u_n, u_n) + H(u_n, u_n) \leqslant (\alpha + \alpha^2) \|f\|^2_{L_2(D)}. \tag{4.46}$$

Таким образом последовательность $\{u_n\}$ ограничена в норме $W_2^1(D)$ и, значит, из нее можно выделить подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ слабо сходящуюся к некоторой функции $\bar{u} \in W_2^1(D)$. Но в области D_n классическое решение задачи (44) совпадает с обобщенным, т. е. с $u_n(x)$, ибо по теореме Шаудера (см. гл. 4, § 3) $u_n^{кл} \in C^{(2,\mu)}(\bar{D}_n)$ и в силу формулы Грина удовлетворяет интегральному тождеству (45). Так как $\{u_n^{кл}\}$ по теореме 2.1 сходится в области D к классическому решению $u(x)$, то $u(x) = \bar{u}(x)$, т. е. $u(x) \in W_2^1(D)$. Отсюда следует, что $u(x)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + f\psi \right) dx = 0, \tag{4.47}$$

при любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, т. е. $u(x)$ является и обобщенным решением ((47) сначала устанавливаем с помощью формулы Грина для любой $\psi \in C_0^{(1)}(D)$, а затем, так как $u(x) \in W_2^1(D)$, и для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$). ■

3°. **Обобщенное из W_2^1 решение задачи Неймана.** Решение задачи Неймана вполне аналогично решению задачи Дирихле и мы подробно остановимся только на новых моментах. Рассмотрим в ограниченной области D с границей Γ задачу Неймана *)

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{в} \quad D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на } \Gamma, \ \nu \text{ — внешняя нормаль к } \Gamma. \end{cases} \tag{4.48}$$

Если $(D+\Gamma) \in A^{(1)}$, а $u(x)$ — классическое решение задачи (48), т. е. $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$, то первая формула Грина, записанная по области D для функции $u(x)$ и произвольной функции $\psi(x) \in W_2^1(D)$, дает

$$\int_D \psi \Delta u dx + \int_D \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{4.49}$$

Если положить здесь $\psi(x) \equiv 1$, то получим

$$\int_D f(x) dx = 0, \tag{4.50}$$

т. е. условие (50) — необходимое условие разрешимости задачи (48) в классическом смысле. В дальнейшем мы считаем это условие выполненным.

Если теперь D — произвольная ограниченная область с границей Γ, то, взяв винеровскую аппроксимацию $\{D_n\}$ области D, в силу первой формулы Грина получим для любой $\psi \in W_2^1(D)$

---

*) Мы рассматриваем однородную задачу. Случай неоднородного граничного условия $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \varphi$ с помощью замены $u = \bar{u} + \bar{\bar{u}}$, где $\bar{\bar{u}}$ — произвольная функция, для которой $\left.\dfrac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \varphi$, приводится к задаче (48) для $\bar{u}$.

$$\int_{D_n}\psi\Delta u dx+\int_{D_n}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dx=\int_{\Gamma_n}\psi\frac{\partial u}{\partial v}ds$$

или, вводя функционалы E и H и учитывая, что $\Delta u=f$,

$$E_{D_n}(u,\psi)+H_{D_n}(f,\psi)=\int_{\Gamma_n}\psi\frac{\partial u}{\partial v}ds. \quad (4.51)$$

Если потребовать, чтобы для любой $\psi\in W_2^1(D)$ выполнялось равенство

$$E(u,\psi)+H(f,\psi)=0, \quad (4.52)$$

то это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n}\psi\frac{\partial u}{\partial v}ds=0$. Таким образом, если равенство (52) принять за определение обобщенного решения, то в таком определении автоматически учитывается выполнение краевого условия в обобщенном смысле.

Определение 4.3. *Обобщенным из* $W_2^1(D)$ *решением задачи* (48) *называется такая функция* $u\in W_2^1(D)$, *которая для любой функции* $\psi\in W_2^1(D)$ *удовлетворяет интегральному тождеству* (52).

Определение 4.4. *Обобщенным из* $W_2^1(D)$ *решением задачи* (48) *называется такая функция* $v\in W_2^1(D)$, *которая доставляет минимум квадратичному функционалу* $J(v)=$ $=E(v,v)+2H(f,v)$ *среди всех функций, принадлежащих* $W_2^1(D)$.

Чтобы эти определения имели смысл, мы должны требовать выполнения условия (50). Для первого определения это очевидно (надо положить в (52) $\psi(x)=C$), во втором определении, если (50) не выполнено, то, прибавляя к v константу, мы не меняем $E(v,v)$, а $2H(f,v)$ можем сделать сколь угодно большим по модулю отрицательным числом. Кроме того, следует искать минимум функционала $J(v)$ в классе функций $v\in W_2^1(D)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_D v(x)dx=0, \quad (4.53)$$

ибо при выполнении условия (50) прибавление константы к v не меняет значение функционала $J(v)$, и условие (53) позволяет выделить единственное решение задачи Неймана. Теперь так же, как раньше, доказывается эквивалентность определений 3 и 4. Из теоремы вложения Соболева (см. [19]) следует справедливость неравенства Пуанкаре:

$$H(\psi, \psi) \leqslant a\left\{E(\psi, \psi) + \left(\int_D \psi dx\right)^2\right\} \tag{4.54}$$

для любой функции $\psi \in W_2^1(D)$ и любой области D, представляющей собой связное объединение конечного числа звездных*) областей (кусочная гладкость границы Γ области D является заведомо достаточным условием для справедливости (54)). В силу условия (53) второй член в неравенстве (54) пропадает. Так же как в 1° доказывается теорема единственности. Ограниченность снизу функционала $J(v)$ доказывается весьма просто:

$$2|H(f, v)| \leqslant 2H^{1/2}(f, f) H^{1/2}(v, v) \leqslant 2H^{1/2}(f, f)[aE(v, v)]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} E(v, v) + 2aH(f, f);$$

мы воспользовались неравенством (54) (с учетом (53)) и неравенством $2|ab| \leqslant \gamma a^2 + \frac{1}{\gamma} b^2$ с любым $\gamma > 0$. Поэтому $J(v) \geqslant \frac{1}{2} E(v, v) - 2aH(f, f) \geqslant -2aH(f, f)$, т. е. $J(v)$ ограничен снизу в классе допустимых функций. Далее дословно так же, как в 1°, доказывается теорема существования обобщенного из W_2^1 решения задачи Неймана, итак справедлива

Теорема 4.5. *Пусть область D представляет собой связное объединение конечного числа ограниченных звездных областей, $D \subset R^N$, а $f \in L_2(D)$ и выполнено условие* (50). *Тогда существует и притом единственное обобщенное из $W_2^1(D)$ решение задачи Неймана* (48), *удовлетворяющее условию* (53).

Литературные указания

Материал § 1 взят из [2] и [3], материал § 2 и пункта 3° § 3 взят из [4], пункты 1° и 2° § 3 взяты из [5], пункты 1° и 3° § 4 — из [6], пункт 2° § 4 — из [7].

*) Область D называется звездной относительно точки $y \in D$, если любой луч, исходящий из точки y, пересекает границу ∂D в одной точке. Область D называется звездной, если она звездна относительно каждой точки некоторого шара $K \subset D$.

ГЛАВА 3. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§ 1. Теорема о среднем для уравнения $\Delta u+\lambda u=0$

В этой главе обсуждаются вопросы о разложимости произвольной функции в абсолютно и (или) равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора Лапласа. Важным вспомогательным средством в изучении этих разложений является теорема о среднем для решений уравнения $\Delta u+\lambda u=0$, в частности для собственных функций оператора Лапласа. Эта теорема оказывается полезной и в ряде других вопросов, например при оценке максимума модуля собственных функций.

Пусть $D\subset \mathrm{R}^N$ — произвольная область, Γ — ее граница, $K(x, R)$ — шар с центром в точке $x\in D$, $R>0$ таково, что $K(x, R)\subset D$. Рассмотрим в области D уравнение

$$\Delta u+\lambda u=0, \tag{1.1}$$

λ — произвольное комплексное число. Имеет место

Теорема 1.1. *Для любого решения $u(x)\in C^{(2)}(D)$ уравнения* (1) *и любого шара $K(x, R)\subset D$ справедлива формула среднего значения*:

$$\frac{1}{\omega_N R^{N-1}}\int\limits_{\partial K(x,R)} u(y)\,ds=\frac{1}{\omega_N}\int\limits_{\omega} u(R,\omega)\,d\omega=$$

$$=2^{\frac{N-2}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)u(x)\frac{I_{\frac{N-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})}{(R\sqrt{\lambda})^{\frac{N-2}{2}}},\quad \arg\sqrt{\lambda}\in[0,\pi]. \tag{1.2}$$

Доказательство. Запишем первую формулу Грина для функций 1 и $u(x)$ по шару $K(x, r)$ радиуса $r\leqslant R$

$$\int\limits_{K(x,r)}\Delta u\,dy=\int\limits_{\partial K(x,r)}\frac{\partial u}{\partial r}\,ds$$

или в сферических координатах

$$\int\limits_0^r \rho^{N-1}d\rho\int\limits_{\omega}\Delta u(\rho,\omega)\,d\omega=r^{N-1}\int\limits_{\omega}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\omega)\,d\omega. \tag{1.3}$$

Так как $\Delta u = -\lambda u$, то отсюда имеем

$$\lambda \int_0^r \rho^{N-1} d\rho \int_\omega u(\rho, \omega)\, d\omega + r^{N-1} \int_\omega \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega)\, d\omega = 0. \quad (1.4)$$

Продифференцируем (4) по r, получим

$$\lambda r^{N-1} \int_\omega u(r, \omega)\, d\omega + (N-1) r^{N-2} \int_\omega \frac{\partial u}{\partial r}(r, \omega)\, d\omega +$$

$$+ r^{N-1} \int_\omega \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r, \omega)\, d\omega = 0. \quad (1.5)$$

Положим

$$\varphi(r) = \int_\omega u(r, \omega)\, d\omega, \quad (1.6)$$

тогда (5) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{N-1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \lambda\varphi = 0. \quad (1.7)$$

$\varphi(r)$ удовлетворяет уравнению Бесселя (7), следовательно,

$$\varphi(r) = A \frac{J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\frac{N-2}{2}}} + B \frac{N_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\frac{N-2}{2}}}, \quad \arg\sqrt{\lambda} \in [0, \pi]. \quad (1.8)$$

Из условия ограниченности $\varphi(r)$ в нуле следует, что $B = 0$. Найдем константу A. При $r \to 0$ $\varphi(r) \to u(x)\,\omega_N$ в силу (6), а

$$\frac{J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{r^{\frac{N-2}{2}}} \to \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{\frac{N-2}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}.$$

Таким образом,

$$A = u(x)\,\omega_N \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{N-2}{2}}. \quad (1.9)$$

Сопоставляя (6), (8) и (9), получим при $r = R$

$$\frac{1}{\omega_N} \int_\omega u(R, \omega)\, d\omega = 2^{\frac{N-2}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) u(x) \frac{J_{\frac{N-2}{2}}(R\sqrt{\lambda})}{(R\sqrt{\lambda})^{\frac{N-2}{2}}}. \ \blacksquare \quad (1.10)$$

Из формулы среднего значения легко следует точная оценка максимума модуля собственных функций оператора Лапласа на любом компакте $D_0 \subset D$.

Пусть $u(x)$ — нормированная собственная функция оператора Лапласа в области D, отвечающая любому однородному краевому условию, пусть соответствующее собственное значение есть λ. На устанавливаемую ниже оценку не влияет конечное число собственных функций, поэтому можно считать, что $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$.

Теорема 1.2. *Для любой нормированной собственной функции $u(x)$ оператора Лапласа в области D справедлива следующая оценка:*

$$|u(x)| \leqslant C\lambda^{\frac{N-1}{4}}, \quad \lambda > 0. \tag{1.11}$$

Оценка (11) *равномерна в любой замкнутой подобласти D_0 области D, $D_0 \subset D$. Константа $C = C(N, r_{x\Gamma})$ зависит от размерности N и от расстояния $r_{x\Gamma}$ от точки x до границы Γ области D.*

Доказательство. Обозначим $\sqrt{\lambda} = \mu$, $(N-2)/2 = p$. Запишем формулу среднего значения (2) для сферы с центром в точке $x \in D$ и радиусом r, $r \leqslant R < r_{x\Gamma}$. Возводя обе части этой формулы в квадрат и учитывая, что $\omega_N = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$, получим

$$(2\pi)^N u^2(x) \frac{J_p^2(r\mu)}{(r\mu)^{2p}} = \left(\int_\omega u(r, \omega)\, d\omega\right)^2. \tag{1.12}$$

Умножим (12) на r^{N-1} и, проинтегрировав по r от 0 до R, найдем, применяя неравенство Коши — Буняковского,

$$(2\pi)^N u^2(x) \frac{1}{\mu^{2p}} \int_0^R J_p^2(\mu r)\, r\, dr = \int_0^R r^{N-1} dr \left(\int_\omega u(r, \omega)\, d\omega\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \omega_N \int_0^R r^{N-1} dr \int_\omega u^2(r, \omega)\, d\omega \leqslant \omega_N \int_D u^2(y)\, dy = \omega_N,$$

ибо $\int_D u^2(y)\, dy = 1$. Таким образом,

$$u^2(x) \leqslant C_0 \mu^{2p} \left(\int_0^R J_p^2(\mu r)\, r\, dr\right)^{-1}. \tag{1.13}$$

Оценим интеграл в (13) снизу, пользуясь асимптотикой бесселевой функции $J_p(x)$ при $|x| \geqslant 1$ (см., например [16, с. 585])

$$\int_0^R J_p^2(r\mu)\,r\,dr = \frac{1}{\mu^2}\int_0^{R\mu} J_p^2(x)\,x\,dx = \frac{1}{\mu^2}\left(\int_0^1 + \int_1^{R\mu}\right) =$$

$$= \frac{C_1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^2}\int_1^{R\mu}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{N\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\right]^2 x\,dx > \frac{C_2}{\mu^2} + \frac{R}{2\pi\mu} > \frac{R}{4\pi\mu} \tag{1.14}$$

при $\mu \geqslant \mu_0 > 0$. Подставляя (14) в (13), получим

$u^2(x) \leqslant C_0 C_3 \mu^{2p+1}$ или, так как $\mu = \sqrt{\lambda}$, а $p = (N-2)/2$,

$$|u(x)| \leqslant C\lambda^{\frac{N-1}{4}}, \quad C \leqslant \frac{C_4(N)}{r_{x\Gamma}}. \ \blacksquare \tag{1.15}$$

Покажем, что оценка (11) является точной (в том смысле, что показатель степени $(N-1)/4$ не может быть уменьшен). Для этого рассмотрим собственные функции оператора Лапласа в шаре радиуса R при краевом условии первого рода, обладающие радиальной симметрией. Собственные числа λ определяются из условия $J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda}R) = 0$, а отвечающие им радиально симметричные собственные функции равны $u(r) = A\dfrac{J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r)}{r^{\frac{N-2}{2}}}$. Константа $A>0$ определяется из условия нормировки

$$A^2\omega_N\int_0^R r^{N-1}J^2_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r)\frac{1}{r^{N-2}}dr = A^2\omega_N\int_0^R rJ^2_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r)\,dr = 1. \tag{1.16}$$

В силу формулы (14) для интеграла $\int_0^R rJ^2_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})\,dr$ справедлива и оценка сверху:

$$\int_0^R rJ^2_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda})\,dr \leqslant \frac{C_5}{\sqrt{\lambda}}, \tag{1.17}$$

так что для A^2 имеем оценку

$$A^2 \geqslant C_6\sqrt{\lambda}.$$

Отсюда для собственной функции $u(r)$ в центре шара будем иметь оценку

$$u(0) = A \frac{\sqrt{\lambda}^{\frac{N}{2}-1}}{2^{\frac{N-2}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)} > C_7 \lambda^{\frac{N-1}{4}}. \tag{1.18}$$

и наше утверждение доказано.

§ 2. Разложения в ряды Фурье по собственным функциям оператора Лапласа

Рассмотрим в ограниченной области D с границей Γ следующую задачу на собственные функции:

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \text{ в } D, \\ Pu = 0 \text{ на } \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

здесь P — линейный оператор, задающий краевое условие,

$$P = \begin{cases} I \text{ — тождественный оператор — первая краевая задача,} \\ \dfrac{\partial}{\partial n}, \ n \text{ — нормаль к } \Gamma \text{ — вторая краевая задача,} \\ \dfrac{\partial}{\partial n} + hI, \ h \geqslant 0 \text{ — третья краевая задача.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Хорошо известно (см., например, [6, 16]), что задача (1) имеет полную в $L_2(D)$ ортонормированную систему $\{u_n(x)\}$ собственных функций, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_n\}$, $n=1, 2, \ldots$. Все собственные значения неотрицательны и имеют единственную предельную точку $+\infty$:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{2.3}$$

Напомним определение пространств Соболева W_p^l, $p \geqslant 1$ — любое, $l=0, 1, \ldots$ — любое целое и введем их обобщение на случай нецелых l — так называемые лиувиллевские классы L_p^α, $p \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$ — любые числа. Рассматривая разложения функций в ряды Фурье по собственным функциям задачи (1), мы будем иметь дело с финитными в области D функциями. Продолжая их нулем на все пространство $\mathbf{R}^N$, мы будем получать функции, заданные в $\mathbf{R}^N$, поэтому нам достаточно определить классы $W_p^l(\mathbf{R}^N)$ и $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$. Пространство $W_p^l(\mathbf{R}^N)$, $l \geqslant 0$ — целое, $p \geqslant 1$ — любое, есть пополнение пространства $C_0^{(\infty)}(\mathbf{R}^N)$ по норме

$$\|f\|_{W_p^l} = \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant l} |D^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{2.4}$$

$$D^{\alpha}f=\frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_N}f}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_N^{\alpha_N}},\quad \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N),\quad |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N.$$

Если обозначить через $\tilde f(\xi)$ преобразование Фурье функции $f(x)\in C_0^{(\infty)}(\mathbf{R}^N)$:

$$\tilde f(\xi)=(2\pi)^{-N/2}\int\limits_{\mathbf{R}^N}e^{-i(x,\xi)}f(x)\,dx,\quad (x,\xi)=\sum_{i=1}^{N}x_i\xi_i, \tag{2.5}$$

то, как известно (см., например, [20, с. 347]), норма (4) эквивалентна норме

$$|||f|||_{W_p^l}=\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^N}|(1+|\xi|^2)^{l/2}\,\tilde f(\xi)|^p\,d\xi\Big)^{1/p}. \tag{2.6}$$

Прежде чем определять пространство Лиувилля $L_p^{\alpha}(\mathbf{R}^N)$, рассмотрим так называемые ядра Бесселя — Макдональда. Найдем преобразование Фурье функции $\varphi(x)=(1+|x|^2)^{-\alpha/2}$, $\alpha>N$, зависящей только от расстояния $r^2=|x|^2=\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^2$ точки x до начала координат. Имеем

$$\tilde\varphi(\xi)=(2\pi)^{-N/2}\int\frac{e^{-i(x,\xi)}}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}\,dx. \tag{2.7}$$

Повернем декартову систему координат вокруг начала так, чтобы точка ξ попала на ось x_1, тогда точка ξ будет иметь координаты $\xi=(|\xi|,0,\ldots,0)$. Так как расстояния при поворотах не меняются, то интеграл (7) примет вид:

$$\tilde\varphi(\xi)=(2\pi)^{-N/2}\int\frac{e^{-ix_1|\xi|}}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}\,dx=$$

$$=(2\pi)^{-N/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx_1e^{-ix_1|\xi|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\ldots\!\int\frac{dx_2\ldots dx_N}{\Big(1+x_1^2+\sum\limits_{i=2}^{N}x_i^2\Big)^{\alpha/2}}. \tag{2.8}$$

В $(N-1)$-мерном пространстве $x_2,\ldots,x_N$ введем сферическую систему координат с центром в начале координат, тогда внутренний интеграл в (8) будет равен

$$\omega_{N-1}\int\limits_{0}^{\infty}\rho^{N-2}\frac{d\rho}{(1+x_1^2+\rho^2)^{\alpha/2}},$$

так что $\widetilde{\varphi}(\xi)$ представлено в виде двойного интеграла:

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-N/2}\,\omega_{N-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ix_1|\xi|}\rho^{N-2}\,\frac{dx_1 d\rho}{(1+x_1^2+\rho^2)^{\alpha/2}}. \quad (2.9)$$

Введем на плоскости x_1, ρ полярные координаты $x_1 = t\cos\theta$, $\rho = t\sin\theta$, так как $\rho \geqslant 0$, то $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ и $\widetilde{\varphi}(\xi)$ равно

$$\widetilde{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-N/2}\,\omega_{N-1}\int\limits_0^\infty t^{N-1}\frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}\int\limits_0^\pi e^{-i|\xi|t\cos\theta}\sin^{N-2}\theta\,d\theta. \quad (2.10)$$

Пользуясь теперь известными интегралами [21, с. 60, 476]

$$\int\limits_0^\pi e^{-i|\xi|t\cos\theta}\sin^{N-2}\theta\,d\theta = \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,\frac{J_{\frac{N-2}{2}}(t|\xi|)}{\left(\frac{1}{2}t|\xi|\right)^{\frac{N-2}{2}}} \quad (2.11)$$

и

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{\frac{N}{2}}}{(1+t^2)^{\alpha/2}}J_{\frac{N-2}{2}}(t|\xi|)\,dt = \left(\frac{|\xi|}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}K_{\frac{N-\alpha}{2}}(|\xi|), \quad (2.12)$$

получим окончательно при $\alpha > N$

$$\widetilde{(1+|x|^2)^{-\alpha/2}} = \frac{1}{2^{\frac{\alpha-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,\frac{K_{\frac{N-\alpha}{2}}(|\xi|)}{|\xi|^{\frac{N-\alpha}{2}}} \equiv G_\alpha(|\xi|), \quad (2.13)$$

здесь $J_\nu(x)$ — функция Бесселя, а $K_\nu(x)$ — функция Макдональда. Функцию $G_\alpha(|\xi|)$, имеющую смысл для всех вещественных α, будем называть ядром Бесселя — Макдональда. Для функций Макдональда известны следующие оценки (см. [21, с. 226]):

$$|K_\nu(x)| \leqslant C\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad x \geqslant 1, \quad \nu \text{ — любое};$$

$$|K_0(x)| \leqslant C\left(\ln\frac{1}{x}+1\right), \quad 0 < x < 1; \quad (2.14)$$

$$|K_\nu(x)| \leqslant \frac{C}{x^\nu}, \quad 0 < x < 1, \quad \nu \neq 0 \text{ — любое}.$$

Из этих оценок в силу определения (13) вытекают следующие оценки для $G_\alpha(x)$:

$$|G_\alpha(x)| \leqslant C \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x^{(N-\alpha+1)/2}}, & x \geqslant 1, \quad N, \alpha \text{ — любые;} \\ \ln\dfrac{1}{x}+1, & 0<x<1, \quad N-\alpha=0; \\ \dfrac{1}{x^{N-\alpha}}, & 0<x<1, \quad N-\alpha>0; \\ 1, & 0<x<1, \quad N-\alpha<0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Из оценок (15) следует, что $G_\alpha(x) \in L_1(\mathbf{R}^N)$ при $\alpha>0$. Дадим теперь определение лиувиллевых классов $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$.

Определение 2.1. *Рассмотрим множество $\mathcal{F}$ функций $F(x)$, представимых в виде свертки,*

$$F(x) = (2\pi)^{-N/2} \int\limits_{\mathbf{R}^N} G_\alpha(|x-y|) f(y)\, dy, \quad \alpha>0, \tag{2.16}$$

где $f(y) \in C_0^{(\infty)}(\mathbf{R}^N)$. Определим норму $F(x)$ по формуле:

$$\|F\|_{L_p^\alpha} = \|f\|_{L_p}, \quad p \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Пополнение множества $\mathcal{F}$ по норме (17) *называется пространством Лиувилля $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$, таким образом, $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$ — банахово пространство; $L_p^0(\mathbf{R}^N) = L_p(\mathbf{R}^N)$.*

Поскольку $G_\alpha(|x|) \in L_1(\mathbf{R}^N)$, то свертка (16) имеет смысл для любой функции $f \in L_p(\mathbf{R}^N)$ *). Поэтому ясно, что пространство $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$ совпадает с множеством функций $F(x)$, имеющих представление (16) при какой-либо функции $f(x) \in L_p(\mathbf{R}^N)$. Нетрудно доказать [20, с. 347], что при целых $\alpha \geqslant 0$ классы $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$ совпадают с пространствами Соболева $W_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$.

Чтобы не прерывать в дальнейшем изложения, докажем здесь лемму об оценках интегралов, содержащих бесселевы функции.

---

*) $$\left(\int\limits_{R^N}\left|\int\limits_{R^N} G_\alpha(|x-y|) f(y)\, dy\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int\limits_{R^N}\left|\int\limits_{R^N} G_\alpha(|z|) f(z+x)\, dz\right|^p dx\right)^{1/p} <$$

$$< \int\limits_{R^N} |G_\alpha(|z|)| \left(\int\limits_{R^N} |f(z+x)|^p dx\right)^{1/p} dz = \|G_\alpha\|_{L_1} \|f\|_{L_p}.$$

Лемма 2.1.

Пусть $R>0$; $\lambda, \mu>1$ — *любые, тогда справедлива оценка* ($C=C(R)$)

$$\left|\int_R^\infty J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\,J_{\frac{N-2}{2}}(r\mu)\,dr\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{\lambda^{1/4}\mu^{1/2}}, & \lambda, \mu \text{ — любые,} \\ \dfrac{C}{\lambda^{1/4}\mu^{1/2}\,|\sqrt{\lambda}-\mu|}, & \text{если } \mu\neq\sqrt{\lambda}. \end{cases} \tag{2.18}$$

Пусть $0<R\leqslant\pi/4$, $|\sqrt{\lambda}-\mu|<1$ и $\mu\geqslant\mu_0>0$, *тогда существует такая постоянная* $C_0=C_0(R,\mu_0)>0$, *что справедлива оценка*

$$\int_{R/2}^{R} rJ_{\frac{N-2}{2}}(\mu r)\,J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda}r)\,dr \geqslant \frac{C_0}{\mu}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Докажем (18). Воспользуемся асимптотикой бесселевых функций, имеем

$$J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\lambda})\,J_{\frac{N-2}{2}}(r\mu) = \frac{2}{\pi r\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\cos(\sqrt{\lambda}r - (N+1)\pi/4)\cos(\mu r-(N-1)\pi/4) + \frac{1}{r^2}O\left(\frac{1}{\mu^{3/2}\lambda^{1/4}}+\frac{1}{\lambda^{3/4}\mu^{1/2}}\right). \tag{2.20}$$

Интегрируя (20) и учитывая, что

$$\left|\int_R^\infty \frac{\cos(\mu r-\alpha)\cos(\sqrt{\lambda}r-\beta)}{r}\,dr\right| \leqslant C,$$

получим первую оценку в (18).

Так как $1/\mu+1/\sqrt{\lambda}\leqslant 2/|\sqrt{\lambda}-\mu|$, то

$$O\left[\frac{1}{\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]\int_R^\infty \frac{1}{r^2}\,dr \leqslant C\,\frac{1}{\lambda^{1/4}\mu^{1/2}\,|\sqrt{\lambda}-\mu|}. \tag{2.21}$$

Осталось оценить при $\mu\neq\sqrt{\lambda}$ интеграл

$$j=\frac{2}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\int_R^\infty \frac{\cos(\sqrt{\lambda}r-\alpha)\cos(\mu r-\beta)}{r}\,dr,$$

$$\alpha=\frac{(N+1)\pi}{4},\quad \beta=\frac{(N-1)\pi}{4}. \tag{2.22}$$

Интегрируя j два раза по частям, получим (считаем, для определенности, что $\mu < \sqrt{\lambda}$)

$$j = \frac{2}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda} r} \sin(\sqrt{\lambda} r - \alpha)\cos(\mu r - \beta) \Big|_R^{\infty} + \right.$$

$$+ \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \int_R^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} r - \alpha)\sin(\mu r - \beta)}{r}\, dr +$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_R^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} r - \alpha)\cos(\mu r - \beta)}{r^2}\, dr \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} \left\{ O\left(\frac{1}{R\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \int_R^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{\lambda} r - \alpha)\sin(\mu r - \beta)}{r}\, dr \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} \left\{ O\left(\frac{1}{R\sqrt{\lambda}}\right) + O\left(\frac{\mu}{R\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^2}{\lambda} \int_R^{\infty} \frac{\cos(\sqrt{\lambda} r - \alpha)\cos(\mu r - \beta)}{r}\, dr \right\} =$$

$$= \frac{1}{\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} O\left(\frac{1}{R\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\mu^2}{\lambda} j. \tag{2.23}$$

Отсюда для j получаем оценку

$$j \leqslant \frac{C}{\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} \, \frac{1}{|\sqrt{\lambda} - \mu|}. \tag{2.24}$$

Сопоставляя (21) и (24), видим, что и вторая оценка в (18) доказана.

Установим оценку (19). Снова, пользуясь асимптотикой бесселевых функций, получим, учитывая, что $|\sqrt{\lambda} - \mu| \leqslant 1$, а $\mu \geqslant \mu_0 > 0$,

$$r J_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda} r) = \frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}} \left\{ \sin\left[r(\mu + \sqrt{\lambda}) - \frac{N-1}{2}\pi \right] + \right.$$

$$\left. + \cos\left[r(\mu - \sqrt{\lambda}) \right] \right\} + \frac{1}{r} O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{2.25}$$

Проинтегрируем (25) по r от $R/2$ до R, $R \leqslant \pi/4$, получим

$$O\left(\frac{1}{\mu^2}\right) \int_{R/2}^{R} \frac{1}{r}\, dr = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right); \tag{2.26}$$

далее,

$$\sin\left[r(\mu+\sqrt{\lambda})-\frac{N-1}{2}\pi\right]=$$

$$=\begin{cases}(-1)^{(N-1)/2}\sin r(\mu+\sqrt{\lambda}), & N\text{ — четно},\\ (-1)^{N/2}\cos r(\mu+\sqrt{\lambda}), & N\text{ — нечетно},\end{cases}$$

поэтому

$$\frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\int\limits_{R/2}^{R}\sin\left[r(\mu+\sqrt{\lambda})-\frac{N-1}{2}\pi\right]dr=$$

$$=O\left(\frac{1}{\mu^{1/2}\lambda^{1/4}(\mu+\sqrt{\lambda})}\right)=O\left(\frac{1}{\mu^2}\right),\tag{2.27}$$

ибо $|\sqrt{\lambda}-\mu|\leqslant 1$, а $\mu\geqslant\mu_0$ — достаточно велико; наконец, в силу того, что $R\leqslant\pi/4$, а $|\mu-\sqrt{\lambda}|\leqslant 1$

$$\frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\int\limits_{R/2}^{R}\cos\left[r(\mu-\sqrt{\lambda})\right]dr\geqslant\frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\cos\left(R|\mu-\sqrt{\lambda}|\right)\cdot\frac{R}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\frac{R}{2}\cos R\geqslant\frac{1}{\pi\mu^{1/2}\lambda^{1/4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R}{2}\geqslant\frac{C_1}{\mu},$$

$$C_1=C_1(R,\mu_0)>0.\tag{2.28}$$

Из оценок (26) — (28) следует оценка (19) с $C_0=C_0(R,\mu_0)>0$. ■

Приступим теперь к изучению разложений по собственным функциям оператора Лапласа. Пусть $\{u_n(x)\}$ — полная в $L_2(D)$ ортонормированная система собственных функций задачи (1), а $\{\lambda_n\}$ ($n=1, 2, \ldots$) — соответствующая последовательность собственных чисел.

Лемма 2.2. *Для любого числа* $\mu\geqslant 1$ *справедлива следующая оценка* *):

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu|\leqslant 1}u_i^2(x)=O(\mu^{N-1}),\quad x\in D.\tag{2.29}$$

Оценка (29) *равномерна относительно* x *на любом компакте* $D_0\subset D$.

Доказательство. Достаточно доказать оценку (29) для значений μ, удовлетворяющих условию $\mu\geqslant\mu_0$, где $\mu_0>0$ — фиксированное достаточно большое число, ибо при $1\leqslant\mu\leqslant\mu_0$ оценка (29) тривиально верна в силу (3). Пусть D_0 — произвольный компакт, $D_0\subset D$, обозначим через $R>0$ величину

*) Лемма 2 является существенным усилением теоремы 2, ибо формула (29), совпадающая по порядку с оценкой (1.11), оценивает теперь целую «пачку» собственных функций.

$$\overset{\bullet}{R} = \min\left\{\frac{\pi}{4}, r_{D_0\Gamma}\right\}. \tag{2.30}$$

Для любого фиксированного $x \in D_0$ рассмотрим функцию $v(r_{xy})$, зависящую только от расстояния между точками x и y:

$$v(r_{xy}) = \begin{cases} \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{N/2} r_{xy}^{\frac{2-N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(\mu r_{xy}), & \text{при} \quad R/2 \leqslant r_{xy} \leqslant R, \\ 0 & \text{для других } y. \end{cases} \tag{2.31}$$

Найдем коэффициенты Фурье функции $v(r_{xy})$, рассматриваемой как функция y; введем для этого сферические координаты с центром в точке x, получим

$$v_i(x) = \int_D v(r_{xy}) u_i(y)\,dy = \int_{R/2}^{R} r^{N-1} v(r)\,dr \int_\omega u_i(r, \omega)\,d\omega.$$

Отсюда, пользуясь формулой среднего значения (1.2), найдем

$$v_i(x) = \mu^{\frac{N}{2}} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} u_i(x) \int_{R/2}^{R} r J_{\frac{N-2}{2}}(\mu r) J_{\frac{N-2}{2}}(\sqrt{\lambda_i} r)\,dr. \tag{2.32}$$

В формуле (32) $R \leqslant \pi/4$, поэтому для оценки снизу интеграла можно воспользоваться леммой 1. Это позволяет следующим образом оценить те коэффициенты Фурье $v_i(x)$, для которых выполнено условие $|\sqrt{\lambda_i} - \mu| \leqslant 1$:

$$|v_i(x)| \geqslant |u_i(x)| \mu^{\frac{N}{2}-1} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} C_0 \geqslant \frac{C_0}{2} |u_i(x)|, \tag{2.33}$$

ибо $|\mu/\sqrt{\lambda_i} - 1| \leqslant 1/\sqrt{\lambda_i}$, т. е. $(\mu/\sqrt{\lambda_i})^{N/2-1} \geqslant 1/2$ при $\mu > \mu_0$. Оценка (33) и равенство Парсеваля для функции $v(r_{xy})$

$$\int_D v^2(r_{xy})\,dy = \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(x)$$

позволяют получить оценку (29):

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu| \leqslant 1} u_i^2(x) \leqslant \frac{4}{C_0^2} \sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu| \leqslant 1} v_i^2(x) \leqslant \frac{4}{C_0^2} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2(x) =$$

$$= \frac{4}{C_0^2} \int_D v^2(r_{xy})\,dy = \frac{4}{C_0^2} \mu^N (2\pi)^{-N} \omega_N \int_{R/2}^{R} r J^2_{\frac{N-2}{2}}(\mu r)\,dr =$$

$$= O(\mu^{N-1}), \tag{2.34}$$

здесь последний интеграл оценен по формуле (1.17); константа, входящая в оценку O-членов, не превосходит $C(N)R^{-1}$, $R=r_x\Gamma$. ■

Следствие 2.1. *Для любого $\mu\geqslant 1$ и любого ν из отрезка $1\leqslant\nu\leqslant\mu$ равномерно относительно x на каждом компакте $D_0\subset D$ справедлива оценка*

$$\sum_{|\sqrt{\lambda_i}-\mu|<\nu} u_i^2(x) = \nu O(\mu^{N-1}). \tag{2.35}$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[\mu-\nu,\ \mu+\nu]$, в пределах которого изменяется $\sqrt{\lambda_i}$, на сумму k ($k\leqslant 2([\nu]+1)$) отрезков единичной длины и к каждому из них применим оценку (29), это даст (35). ■

Следствие 2.2. *Для любого $\delta>0$ ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{N/2+\delta}} \tag{2.36}$$

сходится равномерно на каждом компакте $D_0\subset D$.

Доказательство. Ряд (36) представим в виде двойного ряда и оценим его с помощью (29):

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{N/2+\delta}} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k\leqslant\sqrt{\lambda_i}<k+1}\frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{N/2+\delta}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{N+2\delta}}\sum_{k\leqslant\sqrt{\lambda_i}<k+1} u_i^2(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{N+2\delta}}C(k+1)^{N-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta}} < \infty,$$

здесь C — константа, ограничивающая рост O-членов в формуле (29). ■

Построим теперь так называемые ядра дробного порядка.

Определение 2.2. *Ядром дробного порядка α, $0<\alpha<2N$, называется функция $T_\alpha(x, y)$ двух точек $x, y\in D$, которая при фиксированном $x\in D$ как функция y имеет коэффициенты Фурье, равные $u_i(x)(1+\lambda_i)^{-\alpha/2}$.*

Зафиксируем любую точку x области D и обозначим через R, $R>0$, любое число, меньшее расстояния от x до Γ, $R<r_x\Gamma$. Рассмотрим две функции $v_\alpha(x, y)$ и $w_\alpha(x, y)$, равные

$$v_\alpha(x, y) = v_\alpha(r_{xy}) = \begin{cases} \left[\pi^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\right]^{-1} 2^{\frac{2-\alpha}{2}} r^{\frac{\alpha-N}{2}} K_{\frac{N-\alpha}{2}}(r), \\ \qquad\qquad \text{при } r \leqslant R, \ r = r_{xy}, \\ 0, \qquad \text{при } r > R, \end{cases} \tag{2.37}$$

и

$$w_\alpha(x, y) = w_\alpha(r_{xy}) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} a_k r^{2k}, & \text{при } r \leqslant R, \\ 0, & \text{при } r > R, \quad r = r_{xy}, \end{cases} \tag{2.38}$$

здесь $n \geqslant 1$ — любое целое, а числа a_k ($k=0, 1, \ldots, n$) выбраны так, что функция $(v_\alpha(r) - w_\alpha(r))$ и все ее производные до порядка n обращаются в нуль при $r=R$. Легко видеть, что такой выбор чисел a_k всегда возможен — система, получаемая для определения чисел a_k, однозначно разрешима. Найдем коэффициенты Фурье функции $\varphi(x, y) = v_\alpha(x, y) - w_\alpha(x, y)$. Пользуясь формулой среднего значения (1.2), получим

$$\varphi_l(x) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_l(x) \lambda_l^{\frac{2-N}{4}} \int_0^R [v_\alpha(r) - w_\alpha(r)]\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr. \tag{2.39}$$

Применяя преобразование $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$, перепишем (39) в виде

$$\varphi_l(x) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_l(x) \lambda_l^{\frac{2-N}{4}} \int_0^\infty v_\alpha(r)\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr -$$
$$- (2\pi)^{\frac{N}{2}} u_l(x) \lambda_l^{\frac{2-N}{4}} \left\{ \int_R^\infty v_\alpha(r)\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr + \right.$$
$$\left. + \int_0^R w_\alpha(r)\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr \right\}. \tag{2.40}$$

Первый интеграл в (40) вычисляется явно [21, с. 436], он равен

$$(2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda_l^{\frac{2-N}{4}} \int_0^\infty v_\alpha(r)\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr = (1 + \lambda_l)^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.41}$$

Второй и третий интегралы в (40) преобразуем с помощью $(n+1)$-кратного интегрирования по частям; при этом будем использовать формулу $\int r^{\nu} J_{\nu-1}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} r^{\nu} J_{\nu}(r\sqrt{\lambda_i})$ и обозначать символом D операцию $Df(r) = \frac{1}{r} f'(r)$, а символом D^n — n-кратное применение операции D. Получим

$$\gamma_i(\alpha) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} \times$$

$$\times \left\{\int_R^{\infty} v_\alpha(r) r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr + \int_0^R w_\alpha(r) r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr\right\} =$$

$$= (-1)^{n+1}(2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda_i^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{n}{2}\right)} \left\{\int_R^{\infty} [D^{n+1} v_\alpha(r)]\, r^{\frac{N}{2}+n+1} \times\right.$$

$$\left.\times J_{\frac{N}{2}+n}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr + \int_0^R [D^{n+1} w_\alpha(r)]\, r^{\frac{N}{2}+n+1} J_{\frac{N}{2}+n}(r\sqrt{\lambda_i})\,dr\right\}, \quad (2.42)$$

здесь внеинтегральные члены исчезли, ибо подстановка при $r=\infty$ равна нулю в силу экспоненциального убывания $v_\alpha(r)$ (см. (14)), подстановка при $r=0$ равна нулю из-за того, что при $r=0$ полином $w_\alpha(r)$ и все его производные ограничены, а функция $r^{\nu} J_{\nu}(r\sqrt{\lambda_i})$ обращается в нуль, наконец, подстановки при $r=R$ взаимно уничтожаются в силу выбора постоянных a_k.

Мажорируя в (42) бесселеву функцию $J_{\frac{N}{2}+n}(r\sqrt{\lambda_i})$ единицей, получим следующую оценку для $\gamma_i(\alpha)$:

$$|\gamma_i(\alpha)| \leqslant C\lambda_i^{-\left(\frac{N}{4}+\frac{n}{2}\right)}. \quad (2.43)$$

Подставляя (41) и (42) в (40), получим

$$\varphi_i(x) = u_i(x)(1+\lambda_i)^{-\alpha/2} - u_i(x)\gamma_i(\alpha). \quad (2.44)$$

Если мы теперь введем функцию $\psi_\alpha(x, y)$, равную

$$\psi_\alpha(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) u_i(y) \gamma_i(\alpha), \quad (2.45)$$

то в силу сходимости ряда (36) и оценки (43) при достаточно большом натуральном n, $n>N/2$, будем иметь

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) u_i(y) \gamma_i(\alpha)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(x) \,|\gamma_i(\alpha)|\, \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2(y) \,|\gamma_i(\alpha)|\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{\frac{N}{4}+\frac{n}{2}}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2(y)}{\lambda_i^{\frac{N}{4}+\frac{n}{2}}}\right\}^{1/2} < \infty. \qquad (2.46)$$

Таким образом, определяемая рядом (45) функция $\psi_\alpha(x, y)$ при $n > N/2$ существует, непрерывна по x и y в области D, ибо сходимость ряда (45) равномерна на любом компакте $D_0 \subset D$ в силу (46), и ее коэффициенты Фурье как функции y равны $u_i(x)\gamma_i(\alpha)$. Это последнее обстоятельство, вместе с равенством (44), показывает, что функция $T_\alpha(x, y)$, равная

$$T_\alpha(x, y) = \varphi(x, y) + \psi_\alpha(x, y) = v_\alpha(x, y) - w_\alpha(x, y) + \psi_\alpha(x, y), \qquad (2.47)$$

и является ядром дробного порядка α, $0 < \alpha < 2N$.

Теперь нашей целью является оценка спектральной функции оператора Лапласа.

Определение 2.3. *Функция $\Theta(x, y, \mu)$, равная*

$$\Theta(x, y, \mu) = \sum_{\lambda_i < \mu} u_i(x) u_i(y) \qquad (2.48)$$

называется спектральной функцией оператора Лапласа.

Лемма 2.3. *Спектральная функция $\Theta(x, y, \mu)$ имеет представление:*

$$\Theta(x, y, \mu) = (2\pi)^{-N/2} \mu^{N/4} r^{-N/2} J_{N/2}(r\sqrt{\mu}) + \widehat{\Theta}(x, y, \mu);$$
$$x, y \in D, \quad r = r_{xy}. \qquad (2.49)$$

Для остаточного члена $\widehat{\Theta}(x, y, \mu)$ как функции y справедлива следующая оценка в норме $L_2(D)$:

$$\|\widehat{\Theta}(x, y, \mu)\|_{L_2(D)} \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{4}}, \quad \mu > 0 \text{ — любое}, \qquad (2.50)$$

равномерная по x на любом компакте D_0 области D, $D_0 \subset D$.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать представление (49) при достаточно малом $r = r_{xy}$, ибо если $r_{xy} \geqslant r_0 > 0$, то в силу оценки $|J_{N/2}(r\sqrt{\mu})| \leqslant \frac{C}{\mu^{1/4}}$, верной при

$r \geqslant r_0$, главный член совпадает по порядку μ с остаточным членом в (49). Зафиксируем любую точку x области D и возьмем любое $R>0$ меньшее, чем расстояние от x до Г, $R<r_{x\Gamma}$. Рассмотрим функцию $v(x, y)$, равную

$$v(x, y) = v(r_{xy}) = \begin{cases} \mu^{N/4}(2\pi r)^{-N/2} J_{N/2}(r\sqrt{\mu}) \equiv v(r), \\ \qquad\qquad \text{при} \quad r = r_{xy} \leqslant R, \\ 0, \qquad \text{при} \quad r_{xy} > R. \end{cases} \tag{2.51}$$

Пользуясь теоремой о среднем, подсчитаем ее коэффициенты Фурье:

$$v_i(x) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} u_i(x) \int_0^R v(r)\, r^{\frac{N}{2}} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr =$$

$$= \mu^{\frac{N}{4}} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} u_i(x) \int_0^R J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\mu}) J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr. \tag{2.52}$$

Сделаем в последнем интеграле преобразование $\int_0^R = \int_0^\infty - \int_R^\infty$ и воспользуемся известным значением интеграла [21, с. 436]

$$\mu^{\frac{N}{4}} \lambda_i^{\frac{2-N}{4}} \int_0^\infty J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\mu}) J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \lambda_i < \mu, \\ 1/2, & \text{при} \quad \lambda_i = \mu, \\ 0, & \text{при} \quad \lambda_i > \mu. \end{cases} \tag{2.53}$$

Вводя обозначения:

$$\nu_i = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad \lambda_i < \mu \\ 1/2, & \text{при} \quad \lambda_i = \mu \\ 0, & \text{при} \quad \lambda_i > \mu \end{cases} \quad \text{и} \quad I_i(R) = \mu^{\frac{1}{4}} \lambda_i^{\frac{1}{4}} \int_R^\infty J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\mu}) \times$$

$$\times J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_i})\, dr \tag{2.54}$$

и учитывая (53), запишем (52) в виде:

$$v_i(x) = \gamma_i u_i(x) - \mu^{\frac{N-1}{4}} \lambda_i^{\frac{1-N}{4}} u_i(x) I_i(R). \tag{2.55}$$

Возьмем любое число $\Lambda > \mu$, умножим равенство (55) на $u_i(y)$ и просуммируем полученное выражение по всем i, для которых $\lambda_i \leqslant \Lambda$, найдем

$$\sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} v_l(x) u_l(y) = \sum_{\lambda_l < \mu} u_l(x) u_l(y) + \frac{1}{2} \delta_{\lambda_{l_0}, \mu} \sum_{l: \lambda_l = \lambda_{l_0}} u_l(x) u_l(y) -$$

$$- \mu^{\frac{N-1}{4}} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{\frac{1-N}{4}} u_l(x) u_l(y) I_l(R), \qquad (2.56)$$

здесь $\delta_{\lambda_{l_0}, \mu}$ — символ Кронекера, поскольку член с $\delta_{\lambda_{l_0}, \mu}$ присутствует лишь тогда, когда μ совпадает с одним из собственных значений λ_{l_0}. Поскольку функция $v(r_{xy})$, как функция y, принадлежит $L_2(D)$, то можно перейти к пределу в (56) при $\Lambda \to \infty$ $\left(\sum\limits_{\lambda_l \leqslant \Lambda} v_l(x) u_l(y) \xrightarrow[L_2(D)]{} v(x, y) \text{ при } \Lambda \to \infty \right)$, мы получим равенство (в смысле $L_2(D)$)

$$\Theta(x, y, \mu) = v(r_{xy}) + \widehat{\Theta}(x, y, \mu), \qquad (2.57)$$

где $\Theta(x, y, \mu)$ определено в (48), а $\widehat{\Theta}(x, y, \mu)$ равно

$$\widehat{\Theta}(x, y, \mu) = -\frac{1}{2} \delta_{\lambda_{l_0}, \mu} \sum_{l: \lambda_l = \lambda_{l_0}} u_l(x) u_l(y) +$$

$$+ \mu^{\frac{N-1}{4}} \operatorname*{l.i.m.}_{\Lambda \to \infty} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{\frac{1-N}{4}} u_l(x) u_l(y) I_l(R), \qquad (2.58)$$

предел в (58) существует согласно сказанному выше. Формула (57) совпадает в силу (51) с (49), и нам осталось доказать справедливость оценки (50).

Для первого члена в (58) имеем (норма берется по y):

$$\left\| -\frac{1}{2} \delta_{\lambda_{l_0}, \mu} \sum_{l: \lambda_l = \lambda_{l_0}} u_l(x) u_l(y) \right\|_{L_2(D)} =$$

$$= \frac{1}{2} \delta_{\lambda_{l_0}, \mu} \left\{ \sum_{l: \lambda_l = \lambda_{l_0}} |u_l(x)|^2 \right\}^{1/2} = O\left(\mu^{\frac{N-1}{4}}\right) \qquad (2.59)$$

равномерно по $x \in D_0$ в силу леммы 2. Покажем теперь, что для всех $\Lambda > \mu$ существует константа $C = C(N)$, такая, что равномерно по x на любом компакте $D_0 \subset D$ справедлива оценка (норма берется по y):

$$j(\Lambda) = \left\| \mu^{\frac{N-1}{4}} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{\frac{1-N}{4}} I_l(R) u_l(x) u_l(y) \right\|^2_{L_2(D)} \leqslant C \mu^{\frac{N-1}{2}}. \qquad (2.60)$$

Возведем в квадрат сумму $\mu^{\frac{N-1}{4}} \sum\limits_{\lambda_i \leqslant \Lambda} \lambda_i^{\frac{1-N}{4}} I_i(R) u_i(x) u_i(y)$ и проинтегрируем по y по области D, пользуясь ортонормированностью собственных функций, получим

$$j(\Lambda) = \sum_{\lambda_i < \Lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda_i}\right)^{\frac{N-1}{2}} I_i^2(R) u_i^2(x). \tag{2.61}$$

Разобьем сумму в (61) на четыре суммы и оценим каждую из них:

$$j(\Lambda) = \sum_{\sqrt{\lambda_0} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant 1} + \sum_{|\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant 1} + \sum_{1 < |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant \sqrt{\mu}/2} + \sum_{\substack{1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} < \sqrt{\mu}/2, \\ 3/2\sqrt{\mu} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \sqrt{\Lambda}}} . \tag{2.62}$$

Для первой суммы в (62) имеем ($\lambda_0 > 0$):

$$j_1 = \sum_{\sqrt{\lambda_0} \leqslant \sqrt{\lambda_i} < 1} \left(\frac{\mu}{\lambda_i}\right)^{\frac{N-1}{2}} I_i^2 u_i^2(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\frac{N-1}{4}} \mu^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\sqrt{\lambda_0} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant 1} I_i^2 u_i^2(x). \tag{2.63}$$

Теперь учтем, что в силу (3) имеется лишь конечное число собственных функций, для которых $\sqrt{\lambda_i} \leqslant 1$, все они непрерывны на D_0 и ограничены; для $I_i(R)$ справедлива оценка (18) и поэтому $I_i^2(R) \leqslant C$. Отсюда и из (63) получим оценку:

$$j_1 \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{2}}. \tag{2.64}$$

(Эту же оценку можно получить с помощью леммы 2). Оценим вторую сумму в (62), снова используя первую оценку в (18) и лемму 2, получим

$$j_2 = \sum_{|\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant 1} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_i}}\right)^{\frac{N-1}{2}} I_i^2(R) u_i^2(x) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{|\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant 1} u_i^2(x) = O(\mu^{\frac{N-1}{2}}). \tag{2.65}$$

Оценим третью сумму в (62). Обозначим через p наименьшее натуральное число, для которого $2^p \geqslant \sqrt{\mu}/2$. Тогда сегмент $[1, \sqrt{\mu}/2]$ покрывается системой сегментов $[2^{l-1}, 2^l]$, $l=1, 2, \ldots, p$. На каждом сегменте $[2^{l-1}, 2^l]$ будем оценивать величину $I_i^2(R)$ по второй формуле в (18). Учитывая, что для всех λ_i, участвующих в третьей сумме, $\sqrt{\mu/\lambda_i} \leqslant 2/3$, получим

$$j_3 = \sum_{l=1}^{p} \sum_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant 2^l} \left(\frac{\mu}{\lambda_i}\right)^{\frac{N-1}{2}} I_i^2(R)\, u_i^2(x) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{2}{3}\right)^{N-1} \sum_{l=1}^{p} \sum_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| < 2^l} u_i^2(x)\, |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}|^{-2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{4^{l-1}} \sum_{2^{l-1} \leqslant |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \leqslant 2^l} u_i^2(x) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{l=1}^{p} \frac{1}{4^{l-1}} 2^l \mu^{\frac{N-1}{2}} \leqslant C_2 \mu^{\frac{N-1}{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{l-2}} = C_3 \mu^{\frac{N-1}{2}}, \qquad (2.66)$$

в предпоследнем неравенстве мы воспользовались оценкой (35). Оценим последнюю сумму в (62). Здесь, в силу второй оценки в (18), имеем неравенство

$$I_i(R) < C/\sqrt{\lambda_i}, \text{ ибо } |\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\mu}| \geqslant \sqrt{\lambda_i}/3.$$

Поэтому

$$j_4 \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{2}} \sum_{\substack{1 \leqslant \sqrt{\lambda_i} < \sqrt{\mu}/2, \\ 3/2\sqrt{\mu} \leqslant \sqrt{\lambda_i} \leqslant \sqrt{\Lambda}}} \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{N/2+1/2}} \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2(x)}{\lambda_i^{N/2+1/2}} =$$

$$= O\left(\mu^{\frac{N-1}{2}}\right) \qquad (2.67)$$

в силу следствия 2. Собирая оценки (64)—(67), видим, что неравенство (60) имеет место. ■

Следствие. *Для любого q, $1 \leqslant q < 2N/(N+1)$, и любого $\mu > 0$ справедлива следующая оценка спектральной функции $\Theta(x, y, \mu)$, равномерная по x на любом компакте $D_0 \subset D$:*

$$\|\Theta(x, y, \mu)\|_{L_q(D)} \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{4}} \qquad (2.68)$$

(*норма берется по y*).

Доказательство. Имеем в силу (49)

$$\Theta(x, y, \mu) = (2\pi)^{-N/2}\mu^{N/4}\frac{J_{N/2}(r\sqrt{\mu})}{r^{N/2}} + \widehat{\Theta}(x, y, \mu), \quad r = r_{xy}. \tag{2.69}$$

Отсюда, при $x \in D_0$, в силу неравенства Гельдера и оценки (50)

$$\|\widehat{\Theta}(x, y, \mu)\|_{L_q(D)} = \left\{\int_D |\widehat{\Theta}(x, y, \mu)|^q dy\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_D |\widehat{\Theta}x, y, \mu)|^2 dy\right\}^{1/2} (\operatorname{mes} D)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{4}}, \tag{2.70}$$

так как $q < 2$.

Для первого члена в формуле (69), пользуясь оценкой $|J_\nu(x)| \leqslant \frac{C}{\sqrt{x}}$, получим

$$\|(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\mu^{\frac{N}{4}} J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\mu})\, r^{-\frac{N}{2}}\|_{L_q(D)} \leqslant C\mu^{\frac{N-1}{4}} \left\{\int_0^R r^{N-1} r^{-\frac{N+1}{2}q} dr\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C\mu^{\frac{N-1}{4}},$$

так как $q < \frac{2N}{N+1}$. ■

Рассмотрим ядро дробного порядка $T_\alpha(x, y)$ с $\alpha = (N-1)/2$. Как было показано выше, коэффициенты Фурье ядра $T_{\frac{N-1}{2}}(x, y)$ как функции y равны $u_l(x)(1+\lambda_l)^{-\frac{N-1}{4}}$. Обозначим через $E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x, y)$ частную сумму ряда Фурье для ядра $T_{\frac{N-1}{2}}(x, y)$,

$$E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x, y) = \sum_{\lambda_l < \mu} \frac{u_l(x)\, u_l(y)}{(1+\lambda_l)^{\frac{N-1}{4}}}. \tag{2.71}$$

Имеет место

Лемма 2.4. *Для любого $\mu > 0$ равномерно по x на каждом компакте $D_0 \subset D$ справедливы следующие оценки:*

$$\|E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x, y)\|_{L_q(D)} \leqslant C, \quad 1 < q < 2N/(N+1), \tag{2.72}$$

$$\|E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x, y)\|_{L_2(D \setminus D_1)} \leqslant C, \tag{2.73}$$

здесь нормы берутся по точке y, а D_1 — любая область, такая, что $D_0 \subset D_1 \subset D$.

Доказательство. Для спектральной функции $\Theta(x, y, t) = \sum_{\lambda_i < t} u_i(x) u_i(y)$ справедливо следующее очевидное тождество (α — любое):

$$E_\mu T_\alpha(x, y) = \int_0^\mu (1+t)^{-\alpha/2} d_t \Theta(x, y, t) = (1+\mu)^{-\alpha/2} \Theta(x, y, \mu) + \\ + \frac{\alpha}{2} \int_0^\mu (1+t)^{-\alpha/2-1} \Theta(x, y, t)\, dt. \tag{2.74}$$

Чтобы доказать (72), докажем, что норма в $L_q(D)$ каждого слагаемого в правой части (74) для всех $\mu > 0$ не превосходит константы, при условии, что $\alpha = (N-1)/2$. Имеем в силу (68)

$$(1+\mu)^{-\frac{N-1}{4}} \|\Theta(x, y, \mu)\|_{L_q(D)} \leqslant C. \tag{2.75}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (74). С помощью представления (49) получим

$$\left\| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} \Theta(x, y, t)\, dt \right\|_{L_q}^q \leqslant \\ \leqslant 2^q (2\pi)^{-N/2} \int_D \left| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{N/4} \frac{J_{N/2}(r_{xy}\sqrt{t})}{r_{xy}^{N/2}}\, dt \right|^q dy + \\ + 2^q \int_D \left| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} \widehat{\Theta}(x, y, t)\, dt \right|^q dy. \tag{2.76}$$

В первом члене формулы (76) интеграл по t разобьем на два: в одном из них $r_{xy}\sqrt{t} \leqslant 1$, а в другом $r_{xy}\sqrt{t} > 1$.

В интеграле по области $r\sqrt{t} \leqslant 1$ воспользуемся следующей оценкой для бесселевой функции:

$$|J_{N/2}(x)| \leqslant \frac{C}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}, \qquad \delta > 0 \text{ — любое}, \tag{2.77}$$

верной при $0 \leqslant x \leqslant 1$, ибо при всех x $|J_{N/2}(x)| \leqslant C$. Мы получим

$$\int\limits_D dy \left| \int\limits_0^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{N/4} \frac{J_{N/2}(r\sqrt{t})}{r^{N/2}} dt \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_D r_{xy}^{-\frac{N+1}{2}q-\delta q} dy \left| \int\limits_0^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{\frac{N}{4}-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}} dt \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int\limits_D r_{xy}^{-\frac{N+1}{2}q-\delta q} dy, \tag{2.78}$$

так как

$$\int\limits_0^{\infty} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{\frac{N}{4}-\frac{1}{4}-\frac{\delta}{2}} dt < \infty \text{ при любом } \delta > 0. \tag{2.79}$$

Докажем, что последний интеграл в (78) также сходится, если $\delta>0$ достаточно мало. В сферических координатах с центром в точке x имеем

$$\int\limits_D r_{xy}^{-\frac{N+1}{2}q-\delta q} dy \leqslant \omega_N \int\limits_0^d r^{N-1} r^{-\left(\frac{N+1}{2}-\delta\right)q} dr < \infty, \tag{2.80}$$

ибо по условию $q < 2N/(N+1)$, а, стало быть, при достаточно малом $\delta > 0$ и $\left(\frac{N+1}{2}-\delta\right) q < N$; в формуле (80) $d = \operatorname{diam} D$.

В интеграле по области $r\sqrt{t} \geqslant 1$ воспользуемся асимптотикой бесселевой функции

$$J_{N/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x+\alpha) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\delta}}\right),$$

$$|x| \geqslant 1, \quad 0 < \delta \leqslant 1 - \text{любое}. \tag{2.81}$$

Интеграл от остаточного члена оценивается снова по формуле (78). Таким образом, осталось рассмотреть интеграл

$$i_1 = \int\limits_D dy \left| \int\limits_{r\sqrt{t}\geqslant 1}^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{\frac{N-1}{4}} \frac{1}{r^{\frac{N+1}{2}}} \cos(r\sqrt{t}+\alpha) dt \right|^q. \tag{2.82}$$

Внутренний интеграл оценивается так:

$$\left| \int\limits_{r\sqrt{t}\geq 1}^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} t^{\frac{N-1}{4}} \cos(r\sqrt{t}+\alpha)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{1}^{r\sqrt{\mu}} (r^2+\xi^2)^{-\frac{N-1}{4}-1} (\xi^2)^{\frac{N-1}{4}} \cos(\xi+\alpha)\, d\xi^2 \leqslant C_2 \right.$$

при всех r и μ. (2.83)

Из (82) и (83) получим

$$j_1 \leqslant C_3 \int\limits_D r_{xy}^{-\frac{N+1}{2}q}\, dy \leqslant C_4 \tag{2.84}$$

в силу (80).

Обратимся ко второму члену в формуле (76). Внутренний интеграл один раз проинтегрируем по частям, получим

$$\int\limits_0^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-1} \widehat{\Theta}(x, y, t)\, dt = (1+\mu)^{-\frac{N-1}{4}-1} \int\limits_0^{\mu} \widehat{\Theta}(x, y, t)\, dt +$$

$$+ \left(\frac{N-1}{4}+1\right) \int\limits_0^{\mu} (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-2} \left(\int\limits_0^{t} \widehat{\Theta}(x, y, \eta)\, d\eta \right) dt. \tag{2.85}$$

Рассмотрим интеграл от $\widehat{\Theta}$; в силу формулы (58) имеем для почти всех $y \in D$

$$\int\limits_0^{t} \widehat{\Theta}(x, y, \eta)\, d\eta = -\frac{1}{2} \int\limits_0^{t} \delta_{\lambda_{l_0}, \eta} \sum_{l:\lambda_l=\lambda_{l_0}} u_l(x)\, u_l(y)\, d\eta +$$

$$+ \int\limits_0^{t} \eta^{\frac{N-1}{4}} \operatorname*{l.i.m.}_{\Lambda\to\infty} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{\frac{1-N}{4}} u_l(x)\, u_l(y)\, I_l(R)\, d\eta =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda_l \leqslant t} u_l(x)\, u_l(y) +$$

$$+ \operatorname*{l.i.m.}_{\Lambda\to\infty} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{\frac{1-N}{4}} u_l(x)\, u_l(y) \int\limits_0^{t} \eta^{\frac{N-1}{4}} I_l(R)\, d\eta \tag{2.86}$$

(возможность интегрирования под знаком предела вытекает из обобщенного неравенства Минковского [20, с. 32], в силу которого, если $f_n(\eta, y) \xrightarrow[L_2(y)]{} f(\eta, y)$, то

$$\left\{\int_D \left| \int_0^t [f(\eta, y) - f_n(\eta, y)]\, d\eta \right|^2 dy\right\}^{1/2} \leqslant \int_0^t d\eta \left\{\int_D |f - f_n|^2 dy\right\}^{1/2} \to 0$$

при $n \to \infty$).

Далее, в силу (54)

$$\int_0^t \eta^{\frac{N-1}{4}} I_i(R)\, d\eta = \lambda_l^{1/4} \int_0^t \eta^{N/4} d\eta \int_R^\infty J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\eta}) J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr =$$

$$= 2\lambda_l^{1/4} \int_R^\infty J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l})\, dr \left(\int_0^t \sqrt{\eta}^{\frac{N+2}{2}} J_{\frac{N}{2}}(r\sqrt{\eta})\, d(\sqrt{\eta})\right) =$$

$$= 2\lambda_l^{1/4} t^{\frac{N}{4} + \frac{1}{2}} \int_R^\infty \frac{1}{r} J_{\frac{N-2}{2}}(r\sqrt{\lambda_l}) J_{\frac{N+2}{2}}(r\sqrt{t})\, dr = 2t^{\frac{N+1}{4}} \widehat{I}_l(R). \tag{2.87}$$

Сопоставляя формулы (76), (85)—(87), найдем, так как $q < 2$

$$\int_D \left| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4} - 1} \widehat{\Theta}(x, y, t)\, dt \right|^q dy \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \left\{ (1+\mu)^{-\frac{N-1}{2} - 2} \int_D \left| \sum_{\lambda_l \leqslant \mu} u_l(x) u_l(y) \right|^2 dy + \right.$$

$$+ \int_D \left| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4} - 2} \sum_{\lambda_l < t} u_l(x) u_i(y)\, dt \right|^2 dy +$$

$$+ (1+\mu)^{-\frac{N-1}{2} - 2} \mu^{\frac{N+1}{2}} \lim_{\Lambda \to \infty} \int_D \left| \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{(1-N)/4} u_l(x) u_l(y) \widehat{I}_l(R) \right|^2 dy +$$

$$\left. + \lim_{\Lambda \to \infty} \int_D dy \left| \int_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4} - 2} t^{\frac{N+1}{4}} \sum_{\lambda_l \leqslant \Lambda} \lambda_l^{(1-N)/4} u_l(x) u_l(y) \widehat{I}_l(R)\, dt \right|^2 \right\}. \tag{2.88}$$

Два первых слагаемых в формуле (88) оцениваются одинаково, имеем, например, для второго слагаемого в силу неравенства Коши — Буняковского и формулы (35)

$$\int\limits_D \left| \int\limits_0^\mu (1+t)^{-\frac{N-1}{4}-2} \sum_{\lambda_i \leqslant t} u_i(x) u_i(y)\, dt \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\mu (1+t)^{-7/4} dt \int\limits_0^\mu (1+t)^{-\frac{N}{2}-\frac{7}{4}} \left(\int\limits_D \left| \sum_{\lambda_i \leqslant t} u_i(x) u_i(y) \right|^2 dy \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty (1+t)^{-7/4} dt \int\limits_0^\mu (1+t)^{-\frac{N}{2}-\frac{7}{4}} \left(\sum_{\lambda_i \leqslant t} u_i^2(x) \right) dt \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \int\limits_0^\mu (1+t)^{-\frac{N}{2}-\frac{7}{4}} t^{N/2} dt \leqslant C_7. \tag{2.89}$$

Два последних слагаемых в формуле (88) также оцениваются одинаково, рассмотрим, например, первое из них:

$$j_2(\Lambda) = (1+\mu)^{-\frac{N-1}{2}-2} \mu^{\frac{N+1}{2}} \int\limits_D \left| \sum_{\lambda_i \leqslant \Lambda} \lambda_i^{(1-N)/4} u_i(x) u_i(y) \widehat{I}_i(R) \right|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_8}{\mu} \left\| \sum_{\lambda_i \leqslant \Lambda} \lambda_i^{(1-N)/4} u_i(x) u_i(y) \widehat{I}_i(R) \right\|^2_{L_2(D)}. \tag{2.90}$$

Поскольку для $\widehat{I}_i(R)$ справедлива лемма 1, то на основании (90) и (60) заключаем, что для $j_2(\Lambda)$ имеет место оценка:

$$j_2(\Lambda) \leqslant \frac{C_9}{\mu} \text{ для всех } \Lambda. \tag{2.91}$$

Оценки (88), (89) и (91) показывают, что и второе слагаемое в формуле (76) оценивается при всех $\mu>0$ сверху константой. Этим завершается доказательство соотношения (72).

Доказательство соотношения (73) вполне аналогично проведенному выше. Отличие состоит лишь в том, что во всех рассуждениях надо взять $q=2$ и заметить, что если $x \in D_0$, а $y \in D \setminus D_1$, и число R в главном члене спектральной функции (см. (49) и (51)) взято меньшим, чем расстояние от D_0 до $D \setminus D_1$, то для главного члена справедлива та же оценка, что и для остаточного члена $\widehat{\Theta}$. ■

Теорема 2.1 (о равномерной сходимости). *Если функция $f(x)$ имеет компактный носитель в области D и принадлежит классу Лиувилля $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$, причем*

$$\alpha \geqslant (N-1)/2, \quad \alpha p > N \quad и \quad p \geqslant 1, \tag{2.92}$$

то ее разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа сходится равномерно на каждом компакте $D_0 \subset D$.

Доказательство. Согласно теореме вложения для классов Лиувилля [20, с. 380] все классы L_p^α, удовлетворяющие условию (92), вкладываются в класс $L_{p'}^{(N-1)/2}$ с некоторым $p'>2N/(N-1)$, поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $\alpha=(N-1)/2$, $p>2N/(N-1)$. Итак, пусть $f(x)$ имеет компактный носитель в D и принадлежит классу $L_p^{(N-1)/2}(\mathbf{R}^N)$ с $p>2N/(N-1)$. В силу определения 1 это означает, что существует функция $h(x)\in L_p(\mathbf{R}^N)$ с компактным носителем в D, такая, что

$$f(x)=\int\limits_D\left[v_{\frac{N-1}{2}}(r_{xy})-w_{\frac{N-1}{2}}(r_{xy})\right]h(y)\,dy, \tag{2.93}$$

здесь $v_{(N-1)/2}(r_{xy})$ и $w_{(N-1)/2}(r_{xy})$ функции, определенные в (37) и (38), причем в формуле (38) возьмем $n>N/2$. В формуле (93) стоит сглаженное ядро Бесселя — Макдональда, что в силу финитности функции $h(y)$ эквивалентно определению 1. По-прежнему можно считать, что

$$\|f\|_{L_p^{(N-1)/2}(D)}=\|h\|_{L_p(D)}. \tag{2.94}$$

Рассмотрим функцию $g(x)$, равную

$$g(x)=\int\limits_D\psi_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)\,h(y)\,dy, \tag{2.95}$$

где $\psi_{(N-1)/2}(x,\ y)$ функция, определенная в (45). Коэффициенты Фурье g_l функции $g(x)$ равны

$$g_l=h_l\gamma_l\left(\frac{N-1}{2}\right), \tag{2.96}$$

числа $\gamma_l\left(\frac{N-1}{2}\right)$ определены в (42). Из (96) следует, что ряд Фурье функции $g(x)$ сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте $D_0\subset D$, ибо имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty}|g_lu_l(x)|=\sum_{l=1}^{\infty}\left|h_l\gamma_l\left(\frac{N-1}{2}\right)u_l(x)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{l=1}^{\infty}u_l^2(x)\,\gamma_l^2\left(\frac{N-1}{2}\right)\sum_{l=1}^{\infty}h_l^2\right\}^{1/2}\leqslant\int\limits_D h^2(y)\,dy\sum_{l=1}^{\infty}\frac{u_l^2(x)}{\lambda_l^{N/2+n}}\leqslant C \tag{2.97}$$

так как $h\in L_p(D)$, $p>2$, и сходится ряд (36). Поэтому нам достаточно доказать, что равномерно на любом компакте $D_0\subset D$ сходится ряд Фурье функции

$$F(x)=f(x)+g(x)=\int_D T_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)\,h(y)\,dy, \tag{2.98}$$

где

$$T_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)=v_{\frac{N-1}{2}}(r_{xy})-w_{\frac{N-1}{2}}(r_{xy})+\psi_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)\,-$$

ядро дробного порядка $(N-1)/2$, см. (47). В силу определения ядра дробного порядка для частной суммы ряда Фурье функции $F(x)$ имеем представление

$$\sum_{\lambda_l<\mu} F_l u_l(x)=\int_D E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)\,h(y)\,dy.$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера, заключаем, что частные суммы ряда Фурье функции $F(x)$ ограничены равномерно на каждом компакте $D_0\subset D$:

$$\Bigl|\sum_{\lambda_l<\mu} F_l u_l(x)\Bigr|\leqslant\Bigl\|E_\mu T_{\frac{N-1}{2}}(x,\ y)\Bigr\|_{L_q(D)}\|h\|_{L_p(D)}\leqslant C_1\|h\|_{L_p(D)}, \tag{2.99}$$

ибо $p>2N/(N-1)$ и q, связанное с p соотношением $1/p+$ $+1/q=1$, удовлетворяет условию $q<2N/(N+1)$, и норма $\|E_\mu T_{(N-1)/2}(x,\ y)\|_{L_q}\leqslant C_1$ в силу леммы 4.

Докажем, что частные суммы $\sum\limits_{\lambda_l<\mu} F_l u_l(x)$ при $\mu\to\infty$ сходятся к $F(x)$ равномерно на каждом компакте $D_0\subset D$. Возьмем любую последовательность $\{F^{(n)}(x)\}$ функций $F^{(n)}(x)\in$ $\in C_0^{(\infty)}(D)$, сходящуюся в норме $L_p^{(N-1)/2}(\mathbf{R}^N)$ к $F(x)$:

$$\|F^{(n)}(x)-F(x)\|_{L_p^{(N-1)/2}}\to 0,\quad \text{при}\quad n\to\infty. \tag{2.100}$$

Каждая функция $F^{(n)}(x)\in L_p^{(N-1)/2}(\mathbf{R}^N)$ и имеет компактный в D носитель, поэтому для нее справедливо представление (98) с некоторой функцией $h^{(n)}(y)\in L_p(D)$. Из (100) с помощью равенства (94) выводим, что

$$\|h^{(n)}(y)-h(y)\|_{L_p(D)}\to 0,\quad \text{при}\quad n\to\infty. \tag{2.101}$$

$F^{(n)}(x)\in C_0^{(\infty)}(D)$, следовательно, ее разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа сходится абсолютно и равномерно в D. Теперь

$$\Bigl|F(x)-\sum_{\lambda_l<\mu} F_l u_l(x)\Bigr|\leqslant\Bigl|F^{(n)}(x)-\sum_{\lambda_l<\mu} F_l^{(n)} u_l(x)\Bigr|+$$

$$+|F(x)-F^{(n)}(x)|+\Bigl|\sum_{\lambda_l<\mu}(F_l-F_l^{(n)})\,u_l(x)\Bigr|. \tag{2.102}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — любое, а $D_0 \subset D$ — любой компакт. Имеем по теореме вложения для классов Лиувилля ($(N-1)p/2>N$, см. [20])

$$|F(x)-F^{(n)}|(x)| \leqslant C_2 \| F(x)-F^{(n)}(x) \|_{L_p^{(N-1)/2}} < \varepsilon/3,$$

$$\text{если } n \geqslant n_0(\varepsilon). \tag{2.103}$$

Далее, в силу (99) и (101) равномерно на D_0 выполняется неравенство:

$$\left| \sum_{\lambda_l<\mu} (F_l - F_l^{(n)}) u_l(x) \right| \leqslant C_1 \| h-h^{(n)} \|_{L_p(D)} < \varepsilon/3, \text{ если } n \geqslant n_1(\varepsilon). \tag{2.104}$$

Наконец, при каждом n, если $\mu \geqslant \mu_0(n)$

$$\left| F^{(n)}(x) - \sum_{\lambda_l<\mu} F_l^{(n)} u_l(x) \right| < \varepsilon/3, \tag{2.105}$$

для всех $x \in D_0$ в силу абсолютной и равномерной сходимости ряда Фурье функции $F^{(n)}(x)$. Сопоставляя формулы (102)—(105), заключаем, что ряд Фурье функции $F(x)$ сходится равномерно на каждом компакте $D_0 \subset D$ к этой функции. ■

Теорема 2.2 (о локализации). *Если функция $f(x)$ имеет компактный носитель в области D и обращается в нуль в подобласти D_0, $D_0 \subset D$, и принадлежит классу $L_2^\alpha(\mathbf{R}^N)$ при $\alpha \geqslant (N-1)/2$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к нулю равномерно на любом компакте K, лежащем в D_0.*

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством теоремы 1, лишь p надо взять равным 2, а при получении оценки (99) вместо соотношения (72) надо воспользоваться вторым неравенством (73) леммы 4.

Теорема 2.3 (об абсолютной сходимости). *Если функция $f(x)$ имеет компактный носитель в области D и принадлежит классу Лиувилля $L_p^\alpha(\mathbf{R}^N)$, причем*

$$\alpha > N/2, \quad \alpha p > N \quad \text{и} \quad p \geqslant 1, \tag{2.106}$$

то ее ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа сходится абсолютно и равномерно на каждом компакте $D_0 \subset D$.

Доказательство. В силу теоремы вложения для классов Лиувилля [20, с. 380] достаточно доказать теорему для любой функции $f(x) \in L_2^\alpha(\mathbf{R}^N)$, $\alpha>N/2$, имеющей компактный носитель в D. Так же как в теореме 1, рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) + g(x) = \int_D T_\alpha(x, y) h(y)\, dy, \tag{2.107}$$

где $T_\alpha(x, y)$ ядро дробного порядка α, $\alpha > N/2$, а $h(y) \in L_2(D)$ и имеет компактный носитель в D. Достаточно доказать теорему для функции $F(x)$. В силу определения ядра дробного порядка, коэффициенты Фурье функции $F(x)$ равны

$$F_i = \int_D \frac{u_i(y)}{(1+\lambda_i)^{\alpha/2}} h(y)\,dy = \frac{1}{(1+\lambda_i)^{\alpha/2}} h_i. \tag{2.108}$$

Так как $h \in L_2(D)$, то формула (108) и равенство Парсеваля дают

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i^2 (1+\lambda_i)^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 = \|h\|^2_{L_2(D)}. \tag{2.109}$$

Отсюда и из следствия 2 вытекает абсолютная и равномерная на каждом компакте D_0 области D ($D_0 \subset D$) сходимость ряда Фурье функции $F(x)$, поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F_i u_i(x)| \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} F_i^2 (1+\lambda_i)^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i^2(x)}{(1+\lambda_i)^\alpha} \right\}^{1/2} \leqslant C \|h\|_{L_2(D)}, \tag{2.110}$$

мы воспользовались здесь неравенством Коши — Буняковского и тем, что $\alpha > N/2$. ■

Как показано в [9], условия теорем 1, 2, 3 не могут быть ослаблены.

Литературные указания

Материал § 1 взят из [8], § 2 — из [9] и [10].

ГЛАВА 4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ШАУДЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе мы установим априорные оценки Шаудера для общего линейного эллиптического оператора второго порядка, с их помощью докажем разрешимость задачи Дирихле, изучим оценки собственных функций и их производных для самосопряженного оператора второго порядка, рассмотрим вопрос о существовании решения у простейшего квазилинейного уравнения и некоторые другие задачи. Мы начнем с вывода так называемых «интерполяционных неравенств», нужных нам для дальнейшего изложения и представляющих самостоятельный интерес.

§ 1. Интерполяционные неравенства для классов Гельдера

Пусть функция $u(x)$ задана в замкнутой ограниченной области $\overline{D}=D+\Gamma$ и принадлежит в ней классу $C^{(n,\mu)}$, $n\geqslant 0$, $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Обозначим через U_k сумму максимумов модулей всех производных $u(x)$ порядка $k\leqslant n$, а через $U_{k,\mu}$ сумму коэффициентов Гельдера этих производных, взятых для показателя μ; в частности, U_0, $U_{0,\mu}$ обозначают максимум модуля и коэффициент Гельдера функции $u(x)$.

Пусть $\overline{D}\in A^{(1,\mu)}$, т. е. функция, задающая границу Γ в локальных координатах, принадлежит классу $C^{(1,\mu)}$; положим $\operatorname{diam}\overline{D}=R$. Мы будем использовать тот очевидный факт, что область, принадлежащая $A^{(1,\mu)}$, обладает следующими двумя свойствами:

1) существует число $\chi<0$, такое, что любые две точки x_1, $x_2\in\overline{D}$ можно соединить гладкой кривой длины $l\leqslant\chi r_{x_1x_2}$, лежащей в $\overline{D}$;

2) существует число $\xi>0$, такое, что для любого шара $K(x,\rho)$ с центром в точке $x\in\overline{D}$ и радиусом $\rho\leqslant R$ и для любого i, $i=1, 2, \ldots, N$, в области $\overline{D}\cap K(x,\rho)$ содержится отрезок длины $\xi\rho$, параллельный координатной оси Ox_i. Числа χ и ξ зависят только от области $\overline{D}$.

Нам потребуется также следующее алгебраическое неравенство: если для чисел $0<\alpha_i<1$, a, b, $a_i>0$ выполнено неравенство

$$a=O\Big(\sum_i a_i a^{\alpha_i}+b\Big),\tag{1.1}$$

то

$$a=O\Big(\sum_i a_i^{\frac{1}{1-\alpha_i}}+b\Big);\tag{1.2}$$

Очевидно, что достаточно доказать утверждение для одного слагаемого. Пусть $a\leqslant C_0(a_1a^\alpha+b)$, $0<\alpha<1$. Имеем неравенство Юнга:

$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^{p'}}{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ p>1,$$

$x,\ y\geqslant 0$ — любые. Отсюда

$$a_1a^\alpha=(a_1\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}a^\alpha\right)\leqslant a_1^p\frac{\varepsilon^p}{p}+\frac{1}{p'\varepsilon^{p'}}a^{\alpha p'},\quad \varepsilon>0 \text{ — любое.}$$

Положим $p=\dfrac{1}{1-\alpha}$, $p>1$, $p'=\dfrac{1}{\alpha}$. Тогда

$$a_1a^\alpha\leqslant(1-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}a_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+\alpha\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}a.$$

Поэтому

$$a\leqslant C_0\Big[(1-\alpha)\varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}a_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+b\Big]+C_0\alpha\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}a.$$

Выберем ε так, чтобы $C_0\alpha\varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}}=\dfrac{1}{2}$, т. е. $\varepsilon=(2C_0\alpha)^\alpha$.

Тогда

$$a=O\big(a_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+b\big).\tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *Существует константа $C=C(\bar D)$, такая, что для всех $u(x)\in C^{(1)}(\bar D)$ справедливо неравенство:*

$$U_{0,\mu}\leqslant CU_1^\mu U_0^{1-\mu},\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.\tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $R=\operatorname{diam}\bar D$, а $\omega=\sup\limits_{x,y\in\bar D}|u(x)-u(y)|$ — колебание $u(x)$ в $\bar D$. Возьмем любое δ, $0<\delta\leqslant R$. Для любых двух точек x и y, принадлежащих $\bar D$, имеем

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{r_{xy}^\mu}\leqslant\chi U_1 r_{xy}r_{xy}^{-\mu}\leqslant\chi U_1\delta^{1-\mu},\ \text{если } r_{xy}\leqslant\delta\tag{1.5}$$

(первое неравенство выполняется в силу теоремы Лагранжа и свойства 1) области $\bar{D}$). Если же $r_{xy} \geqslant \delta$, то

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{r_{xy}^{\mu}} \leqslant \omega\delta^{-\mu}, \quad r_{xy} \geqslant \delta. \tag{1.6}$$

Из (5) и (6) следует, что для всех x и $y \in \bar{D}$ имеет место неравенство:

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{r_{xy}^{\mu}} \leqslant \chi U_1 \delta^{1-\mu} + \omega\delta^{-\mu}. \tag{1.7}$$

Поэтому и $U_{0,\mu} = \sup\limits_{x,y\in\bar{D}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{r_{xy}^{\mu}}$ оценивается при любом δ, $0<\delta\leqslant R$, следующим образом:

$$U_{0,\mu} \leqslant \chi U_1 \delta^{1-\mu} + \omega\delta^{-\mu}. \tag{1.8}$$

Минимизируем по δ правую часть в (8). Для этого выберем δ из условия равенства двух слагаемых в правой части (8), $\delta_{\min}=\omega/\chi U_1$; так как $\omega\leqslant\chi R U_1$, то $\delta_{\min}\leqslant R$. Подставляя это значение δ в (7), получим

$$U_{0,\mu} \leqslant 2\chi^{\mu} U_1^{\mu} \omega^{1-\mu}. \tag{1.9}$$

Но $\omega\leqslant 2U_0$, и из (9) получим (4). ■

Если $u(x)\in C^{(k+1)}(\bar{D})$, то, проводя рассуждения, как и выше, для любой k-той производной функции $u(x)$, получим

$$U_{k,\mu} = O\left(U_{k+1}^{\mu} U_k^{1-\mu}\right). \tag{1.10}$$

Лемма 1.2. *Существует константа $C_1=C_1(\bar{D})$, такая, что для всех $u(x)\in C^{(1,\mu)}(\bar{D})$ справедливо неравенство:*

$$U_1 \leqslant C_1\left(U_{1,\mu}^{\frac{1}{1+\mu}} U_0^{\frac{\mu}{1+\mu}} + U_0 R^{-1}\right). \tag{1.11}$$

Доказательство. Рассмотрим любую первую производную $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i=1, 2, \ldots, N$. Обозначим $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) = p_i(x)$ и пусть абсолютный максимум $p_i(x)$ в $\bar{D}$ достигается в точке x_0; пусть для определенности $P_i=p_i(x_0)>0$. Возьмем любое δ, $0<\delta\leqslant R=\operatorname{diam}\bar{D}$. В области $\bar{D}\cap K(x_0, \delta)$ имеем

$$P_i - p_i(x) \leqslant U_{1,\mu} r_{xx_0}^{\mu} \leqslant U_{1,\mu}\delta^{\mu}, \text{ ибо } r_{xx_0}\leqslant\delta, \tag{1.12}$$

т. е. в $\bar{D}\cap K(x_0, \delta)$

$$P_i - U_{1,\mu}\delta^{\mu} \leqslant p_i(x), \quad x\in\bar{D}\cap K(x_0, \delta). \tag{1.13}$$

Отсюда, либо

$$P_i \leqslant U_{1,\mu}\delta^{\mu}. \qquad (1.14)$$

либо $P_i > U_{1,\mu}\delta^{\mu}$, и тогда, в силу (13) для всех $x \in \bar{D} \cap \cap K(x_0, \delta)$ $p_i(x) > 0$. Поэтому по теореме Лагранжа для отрезка $[x, y] \in \bar{D} \cap K(x_0, \delta)$, параллельного оси Ox_i, о котором идет речь в свойстве 2) областей класса $A^{(1,\mu)}$ (см. выше, с. 98), на основании неравенства (13) получим

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{\xi\delta} = p_i(x^*) \geqslant P_i - U_{1,\mu}\delta^{\mu}. \qquad (1.15)$$

Мажорируя здесь левую часть, получим

$$P_i \leqslant U_{1,\mu}\delta^{\mu} + \frac{2U_0}{\xi\delta}. \qquad (1.16)$$

Так как (16) грубее, чем (14), то (16) выполняется всегда.

Поэтому при любом δ, $0<\delta\leqslant R$

$$U_1 \leqslant N\left(U_{1,\mu}\delta^{\mu} + \frac{2U_0}{\xi\delta}\right). \qquad (1.17)$$

Минимизируя правую часть (17) по δ, найдем $\delta_{\min} = \left(\frac{2}{\xi\mu}\frac{U_0}{U_{1,\mu}}\right)^{\frac{1}{1+\mu}}$. Подставляя $\delta_{\min}$ в (17) и учитывая, что (17) имеет место при $0<\delta\leqslant R$, тогда как $\delta_{\min}$ может быть и больше R, получим (11). ■

Если $u(x) \in C^{(k,\mu)}(\bar{D})$, то

$$U_k = O\left(U_{k,\mu}^{\frac{1}{1+\mu}} U_{k-1}^{\frac{\mu}{1+\mu}} + U_{k-1}R^{-1}\right). \qquad (1.18)$$

Теорема 1.1. *Для всех функций $u(x) \in C^{(n)}(\bar{D})$ и всех целых k, $0\leqslant k<n$, равномерно выполняются оценки:*

$$U_k = O\left(U_n^{\frac{k}{n}} U_0^{\frac{n-k}{n}} + U_0R^{-k}\right), \qquad (1.19)$$

$$U_{k,\mu} = O\left(U_n^{\frac{k+\mu}{n}} U_0^{\frac{n-k-\mu}{n}} + U_0R^{-(k+\mu)}\right). \qquad (1.20)$$

Доказательство. Докажем, что

$$U_1 = O\left(U_0^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} + U_0R^{-1}\right). \qquad (1.21)$$

В обозначениях леммы 2 имеем в области $\bar{D} \cap K(x_0, \delta)$ в силу теоремы Лагранжа

$$P_i - p_i(x) \leqslant \chi U_2 r_{x_0 x} \leqslant \chi U_2 \delta, \text{ ибо } r_{x_0 x} \leqslant \delta. \qquad (1.22)$$

Отсюда, как в лемме 2, либо

$$P_i \leqslant \chi U_2 \delta, \qquad (1.23)$$

либо

$$P_i \leqslant \chi U_2 \delta + \frac{2U_0}{\xi\delta}. \qquad (1.24)$$

Из (23) и (24), как и в лемме 2, получим (21). Поэтому для любого целого $p \geqslant 1$ имеет место оценка

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_{p-1}^{\frac{1}{2}} + U_{p-1} R^{-1}\right). \qquad (1.25)$$

Будем доказывать (19) по индукции. При $n=2$, $k \leqslant 1$ (19) имеет место в силу (21); пусть (19) справедливо для $n=p$, $k<p$, докажем справедливость (19) для $n=p+1$, $k<p+1$. Согласно предположению индукции имеем для $n=p$, $k=p-1$

$$U_{p-1} = O\left(U_p^{\frac{p-1}{p}} U_0^{\frac{1}{p}} + U_0 R^{-(p-1)}\right). \qquad (1.26)$$

Подставляя (26) в (25), получим (мы пользуемся неравенством $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p)$)

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_p^{\frac{p-1}{2p}} U_0^{\frac{1}{2p}} + U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1-p}{2}} + \right.$$

$$\left. + U_p^{\frac{p-1}{p}} U_0^{\frac{1}{p}} R^{-1} + U_0 R^{-p}\right). \qquad (1.27)$$

Исключим из правой части (27) U_p, пользуясь алгебраическим неравенством (1)—(2), получим

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}} U_0^{\frac{1}{p+1}} + U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1-p}{2}} + U_0 R^{-p}\right). \qquad (1.28)$$

Второй член в правой части (28) преобразуем по неравенству Юнга

$$U_{p+1}^{\frac{1}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1-p}{2}} \leqslant U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}} + U_0^{\frac{p}{p-1}} R^{-p}. \qquad (1.29)$$

Таким образом

$$U_p = O\left(U_{p+1}^{\frac{p}{p+1}} U_0^{\frac{1}{p+1}} + U_0 R^{-p}\right), \qquad (1.30)$$

т. е. мы получили (19) для $n=p+1$, $k=p$. Пусть $n=p+1$, $k<p$. Так как (19) справедливо при $n=p$, $k<p$, то для любого $k<p$ имеем

$$U_k = O\left(U_p^{\frac{k}{p}}\, U_0^{\frac{p-k}{p}} + U_0 R^{-k}\right);$$

подставим сюда (30), получим

$$U_k = O\left(U_{p+1}^{\frac{k}{p+1}}\, U_0^{\frac{p+1-k}{p+1}} + U_0 R^{-k}\right), \quad k < p, \tag{1.31}$$

т. е. (19) доказано. Подставляя теперь в формулу (10) вместо U_{k+1} и U_k оценки их по формуле (19), получим (20). ▶

Теорема 1.2. *Для всех функций $u(x) \in C^{(n,\mu)}(\bar{D})$ и всех целых k, $0 \leqslant k \leqslant n$, равномерно выполняются оценки*:

$$U_k = O\left(U_{n,\mu}^{\frac{k}{n+\mu}}\, U_0^{\frac{n+\mu-k}{n+\mu}} + U_0 R^{-k}\right), \tag{1.32}$$

$$U_{k,\mu} = O\left(U_{n,\mu}^{\frac{k+\mu}{n+\mu}}\, U_0^{\frac{n-k}{n+\mu}} + U_0 R^{-(k+\mu)}\right). \tag{1.33}$$

Доказательство. В формулу (19) при $k=n-1$ подставим формулу (18) с $k=n$, получим

$$U_{n-1} = O\left(U_{n-1}^{\frac{\mu}{1+\mu}\frac{n-1}{n}}\, U_{n,\mu}^{\frac{n-1}{n}\frac{1}{1+\mu}}\, U_0^{\frac{1}{n}} + \right.$$

$$\left. + U_{n-1}^{\frac{n-1}{n}}\, U_0^{\frac{1}{n}}\, R^{\frac{1-n}{n}} + U_0 R^{-(n-1)}\right),$$

отсюда с помощью (1) и (2) получим (32) при $k=n-1$, а подставляя эту последнюю формулу в (18) с $k=n$, получим (32) для $k=n$, наконец, подставляя (32) с $k=n$ в (19), получим (32) при любом $k<n-1$. Таким образом (32) доказано. Если теперь (32) с $k=n$ подставить в (20) на место U_n, то получим (33) при $k<n$; (33) при $k=n$ тривиально верно. ◀

Оценки теорем 1 и 2 называются *интерполяционными неравенствами для классов Гельдера*. Как мы видели при доказательстве этих теорем, константы, ограничивающие рост O-членов в оценках (19), (20), (32), (33), зависят лишь от n, размерности N и от области $\bar{D}$, точнее от чисел χ и ξ (см. стр. 98). Поэтому имеет место

Замечание 1.1. Оценки теорем 1 и 2 выполняются равномерно относительно любого семейства $\mathfrak{A}$ областей $\bar{D} \in A^{(1,\mu)}$, для которого ограничены числа χ и $1/\xi$.

§ 2. Леммы. Оценки потенциалов

В этом параграфе собраны вспомогательные предложения, необходимые нам для вывода априорных оценок Шаудера. Последние две леммы, в которых даны оценки потенциалов, оказываются весьма полезными и в ряде других вопросов.

Мы будем устанавливать оценки Шаудера одновременно как внутри области D, так и для всей замкнутой области $\bar{D}$; этим объясняется подход в леммах 1—4.

Пусть D — произвольная ограниченная область с ляпуновской границей Γ, $\bar{D}=(D+\Gamma)\subset R^N$, $\bar{D}\in A^{(1,\mu)}$. Пусть Γ_0 — замкнутое подмножество границы Γ, $\Gamma_0\subset\Gamma$, обозначим $D_0=\bar{D}\setminus\Gamma_0$.

Пусть $x\in D_0$ — любая точка, положим $d(x)=\frac{1}{4}r_{x\Gamma_0}$, $d(x)>0$. Зафиксируем любое число ν, $0<\nu<4$. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ областей $M_x=\bar{D}\cap K(x,\nu d(x))$ для всех $x\in D_0$. Если $u(x)\in C^{(n,\mu)}$ в D, то, согласно замечанию в конце предыдущего параграфа, оценки теорем 1.1 и 1.2 выполняются равномерно для всего семейства $\mathfrak{M}$ областей M_x, т. е. эти оценки не зависят от точки x. Обозначим через $U_k^{(\nu)}(x)$, $U_{k,\mu}^{(\nu)}(x)$ значения U_k и $U_{k,\mu}$ для области M_x, $x\in D_0$.

Положим

$$\bar{U}_k^{(\nu)}=\sup_{x\in D_0}[(\nu d(x))^k U_k^{(\nu)}(x)],\quad \bar{U}_{k,\mu}^{(\nu)}=\sup_{x\in D_0}[(\nu d(x))^{k+\mu}U_{k,\mu}^{(\nu)}(x)]. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Имеют место оценки:*

$$\bar{U}_{0,\mu}^{(\nu)}=O\{[\bar{U}_1^{(\nu)}]^{\mu}U_0^{1-\mu}\} \tag{2.2}$$

$$\bar{U}_k^{(\nu)}=O\{[\bar{U}_n^{(\nu)}]^{\frac{k}{n}}U_0^{\frac{n-k}{n}}+U_0\},\ k\leqslant n, \tag{2.3}$$

$$\bar{U}_{k,\mu}^{(\nu)}=O\{[\bar{U}_n^{(\nu)}]^{\frac{k+\mu}{n}}U_0^{\frac{n-k-\mu}{n}}+U_0\},\ k<n, \tag{2.4}$$

$$\bar{U}_k^{(\nu)}=O\{[\bar{U}_{n,\mu}^{(\nu)}]^{\frac{k}{n+\mu}}U_0^{\frac{n+\mu-k}{n+\mu}}+U_0\},\ k\leqslant n, \tag{2.5}$$

$$\bar{U}_{k,\mu}^{(\nu)}=O\{[\bar{U}_{n,\mu}^{(\nu)}]^{\frac{k+\mu}{n+\mu}}U_0^{\frac{n-k}{n+\mu}}+U_0\},\ k\leqslant n. \tag{2.6}$$

Доказательство. Доказательство всех этих оценок одинаково, рассмотрим, например, оценки (2) и (5). Докажем (2). Возьмем любую область M_x, имеем согласно лемме 1.1 $U_{0,\mu}^{(\nu)}(x)=O\{[U_1^{(\nu)}(x)]^{\mu}[U_0^{(\nu)}(x)]^{1-\mu}\}$. В силу замечания 1.1 константа, входящая в оценку O-членов (обозначим ее C_0), не зависит от x.

$$(\nu d(x))^{\mu}U_{0,\mu}^{(\nu)}(x)\leqslant C_0\{[\nu d(x)U_1^{(\nu)}(x)]^{\mu}[U_0^{(\nu)}(x)]^{1-\mu}\}\leqslant$$
$$\leqslant C_0\{[\sup_{x\in D_0}(\nu d(x)U_1^{(\nu)}(x))]^{\mu}U_0^{1-\mu}\}=C_0\{[\bar{U}_1^{(\nu)}]^{\mu}U_0^{1-\mu}\}. \tag{2.7}$$

Так как неравенство (7) верно для любого $x\in D_0$, то и

$$\bar U_{0,\mu}^{(\nu)}=\sup_{x\in D_0}[(\nu d(x))^{\mu}U_{0,\mu}^{(\nu)}(x)]\leqslant C_0\{[\bar U_1^{(\nu)}]^{\mu}U_0^{1-\mu}\},$$

так что (2) доказано. Докажем оценку (5). Снова возьмем любую область M_x, ее диаметр обозначим R_x. В силу теоремы 1.2 и замечания 1.1 имеем

$$U_k^{(\nu)}(x)=O\{[U_{n,\mu}^{(\nu)}(x)]^{k/(n+\mu)}[U_0^{(\nu)}(x)]^{(n+\mu-k)/(n+\mu)}+U_0^{(\nu)}(x)R_x^{-k}\}$$

и

$$(\nu d(x))^kU_k^{(\nu)}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\{[(\nu d(x))^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(\nu)}(x)]^{k/(n+\mu)}[U_0^{(\nu)}]^{(n+\mu-k)/(n+\mu)}+$$

$$+U_0^{(\nu)}[\nu d(x)R_x^{-1}]^k\}\leqslant$$

$$\leqslant C_0C_1^k\{[\sup_{x\in D_0}[(\nu d(x))^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(\nu)}(x)]]^{k/(n+\mu)}U_0^{(n+\mu-k)/(n+\mu)}+U_0\}=$$

$$=C_0C_1^k\{[\bar U_{n,\mu}^{(\nu)}]^{k/(n+\mu)}U_0^{(n+\mu-k)/(n+\mu)}+U_0\},\qquad(2.8)$$

здесь мы воспользовались тем, что $U_0^{(\nu)}(x)\leqslant U_0$ и $\nu d(x)/R_x\leqslant C_1$ для всех $x\in D_0$ в силу определения области M_x, (8) верно для всех $x\in D_0$, откуда

$$\bar U_k^{(\nu)}=\sup_{x\in D_0}[(\nu d(x))^kU_k^{(\nu)}(x)]=O\{[\bar U_{n,\mu}^{(\nu)}]^{k/(n+\mu)}U_0^{(n+\mu-k)/(n+\mu)}+U_0\},$$

так что (5) доказано.

Лемма 2.2. *Для любой замкнутой области $D_1\subset D_0$, расстояние которой до Γ_0 равно δ, $\delta>0$, справедливы оценки*:

$$U_k(D_1)=O[(\nu\delta)^{-k}\bar U_k^{(\nu)}],\qquad(2.9)$$

$$U_{k,\mu}(D_1)=O[(\nu\delta)^{-(k+\mu)}(\bar U_{k,\mu}^{(\nu)}+\bar U_k^{(\nu)})],\qquad(2.10)$$

ν — любое, $0<\nu<4$, O от ν не зависит; $U_k(D_1)$ — значение U_k для области D_1.

Доказательство. Возьмем какую-либо k-тую производную D^ku функции $u(x)$. Пусть $\max_{D_1}|D^ku|$ достигается в точке $y\in D_1$. Возьмем шар $K(y,\nu d(y))$ и в области $M_y=\bar D\cap\cap K(y,\nu d(y))$ будем иметь

$$\bar U_k^{(\nu)}\geqslant(\nu d(y))^kU_k^{(\nu)}(y)\geqslant(\nu d(y))^k|D^ku(y)|,$$

поэтому

$$\max_{x\in D_1}|D^ku(x)|=|D^ku(y)|\leqslant\frac{1}{(\nu d(y))^k}\bar U_k^{(\nu)}\leqslant\frac{4^k}{(\nu\delta)^k}\bar U_k^{(\nu)},\qquad(2.11)$$

ибо $d(y)=r_y r_0/4 \geqslant \delta/4$. Так как (11) верно для любой k-той производной, то и $U_k(D_1)=O[(\nu\delta)^{-k}\overline{U}_k^{(\nu)}]$, и (9) доказано.

Докажем (10). Пусть $D^{k,\mu}u$ — коэффициент Гельдера какой-либо k-той производной функции $u(x)$ в области D_1, пусть x_1 и $x_2 \in D_1$ — точки, для которых

$$\frac{|D^k u(x_1)-D^k u(x_2)|}{r_{x_1x_2}^{\mu}} > \frac{1}{2} D^{k,\mu}u.$$

Возможны два случая:

1) $\nu d(x_1) \geqslant r_{x_1x_2}$ или $\nu d(x_2) \geqslant r_{x_1x_2}$; пусть, например, $\nu d(x_1) \geqslant r_{x_1x_2}$, возьмем шар $K(x_1, \nu d(x_1))$ и в области $M_{x_1}=\overline{D}\cap K(x_1, \nu d(x_1))$ будем иметь ($x_2 \in M_{x_1}$, так как $r_{x_1x_2} \leqslant \nu d(x_1)$)

$$\overline{U}_{k,\mu}^{(\nu)} \geqslant (\nu d(x_1))^{k+\mu}\, U_{k,\mu}^{(\nu)}(x_1) \geqslant (\nu d(x_1))^{k+\mu}\, \frac{|D^k u(x_1)-D^k u(x_2)|}{r_{x_1x_2}^{\mu}} >$$

$$> (\nu d(x_1))^{k+\mu}\, \frac{1}{2} D^{k,\mu}u.$$

Отсюда, как и выше, получим

$$D^{k,\mu}u = O[(\nu\delta)^{-(k+\mu)}\overline{U}_{k,\mu}^{(\nu)}]. \tag{2.12}$$

2) $\nu d(x_1) < r_{x_1x_2}$ и $\nu d(x_2) < r_{x_1x_2}$; в этом случае $r_{x_1x_2} > \nu\delta/4$ и

$$D^{k,\mu}u < 2\frac{|D^k u(x_1)-D^k u(x_2)|}{r_{x_1x_2}^{\mu}} \leqslant \frac{4\max\limits_{D_1}|D^k u|}{\left(\frac{\nu\delta}{4}\right)^{\mu}} =$$

$$= O[(\nu\delta)^{-\mu}U_k(D_1)]. \tag{2.13}$$

Сопоставляя (12) и (13) и оценивая $U_k(D_1)$ по формуле (9), получим (10). ∎

Лемма 2.3. *Если* $0<\nu\leqslant\lambda<\lambda_0<4$, *то равномерно относительно* ν *и* λ *выполняются оценки*:

$$\overline{U}_k^{(\lambda)} = O\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k \overline{U}_k^{(\nu)}\right]. \tag{2.14}$$

$$\overline{U}_{k,\mu}^{(\lambda)} = O\left[\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{k+\mu} (\overline{U}_{k,\mu}^{(\nu)}+\overline{U}_k^{(\nu)})\right]. \tag{2.15}$$

Доказательство. Докажем (14) (аналогично доказывается (15)). Пусть $y\in D_0$ точка, в которой

$$(\lambda d(y))^k U_k^{(\lambda)}(y) > \frac{1}{2}\overline{U}_k^{(\lambda)}. \tag{2.16}$$

Расстояние от шара $K(y, \lambda d(y))$ до Γ_0 равно $(4-\lambda)d(y)=\delta>0$. Пусть $\nu\leqslant\lambda$, по лемме 2, примененной к области $D_1=\overline{D}\cap K(y, \lambda d(y))$,

$$U_k^{(\lambda)}(y) = O\left[(\nu\delta)^{-k}\overline{U}_k^{(\nu)}\right]. \tag{2.17}$$

Из (16) и (17)

$$\overline{U}_k^{(\lambda)} = O\left\{\left[\frac{\lambda d(y)}{\nu(4-\lambda)d(y)}\right]^k \overline{U}_k^{(\nu)}\right\} = O\left\{\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^k \overline{U}_k^{(\nu)}\right\},$$

поскольку $4-\lambda \geqslant 4-\lambda_0$ и (14) доказано. ∎

Замечание 2.1. Очевидно, что леммы 1—3 остаются справедливыми и в том случае, когда множество Γ_0 пусто, если считать $d(x)=d$, $d>0$ — константа, в частности оценки (9) и (10) выполняются для $D_1=\overline{D}$, если положить δ равным d.

Лемма 2.4. *Пусть $w(x)$ — объемный потенциал,*

$$w(x) = \int\limits_{K(x_0, 3\rho)} h(r_{xy}) f(y)\, dy, \tag{2.18}$$

$h(r_{xy})$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, $f(y)$ — плотность, $f(y) \in C^{(n-2,\mu)}(K(x_0, 3\rho))$, $n \geqslant 2$ — любое целое, $0<\mu<1$. Тогда в шаре $K(x_0, 2\rho)$, $\rho>0$, $w(x) \in C^{(n,\mu)}$, и при $k \leqslant n$ справедливы оценки *):

$$W_k^{(2)} = O\left(\rho^{2-k} F_0^{(3)} + \rho^{n-k+\mu} F_{n-2,\mu}^{(3)}\right), \tag{2.19}$$

$$W_{k,\mu}^{(2)} = O\left(\rho^{2-k-\mu} F_0^{(3)} + \rho^{n-k} F_{n-2,\mu}^{(3)}\right). \tag{2.20}$$

Доказательство. Для стандартности записи будем считать, что $N>2$, тогда $h(r_{xy}) = \dfrac{1}{(N-2)\,\omega_N} \dfrac{1}{|x-y|^{N-2}}$. Нам достаточно доказать оценку (20) при $k=n$, ибо остальные оценки (19) и (20) получаются из оценки (20) с $k=n$ и тривиальной оценки $W_0^{(2)} = O(\rho^2 F_0^{(3)})$ с помощью интерполяционных неравенств (1.32) и (1.33). Итак, докажем, что имеет место оценка

$$W_{n,\mu}^{(2)} = O\left(\rho^{2-n-\mu} F_0^{(3)} + F_{n-2,\mu}^{(3)}\right). \tag{2.21}$$

Имеем

$$w(x) = \gamma_N \int\limits_{K(x_0, 3\rho)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} f(y)\, dy, \quad \gamma_N = \frac{1}{(N-2)\,\omega_N}. \tag{2.22}$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{x-x_0}{\rho} = \overline{x} \tag{2.23}$$

---

*) Значки (2) и (3) показывают, что соответствующая величина берется в шаре $K(x_0, 2\rho)$ или в шаре $K(x_0, 3\rho)$.

и сохраним для функций w и f их прежние обозначения, получим

$$w(\bar{x}) = \gamma_N \rho^2 \int\limits_{K(0,3)} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N-2}} f(\bar{y})\, d\bar{y}. \tag{2.24}$$

Возьмем срезающую функцию $\chi(t) \in C_0^{(\infty)}(\mathbf{R}_+^1)$, равную

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 5/2, \\ 0, & \text{при } t \geqslant 11/4. \end{cases}$$

С ее помощью (24) перепишем в виде

$$w(\bar{x}) = \gamma_N \rho^2 \int\limits_{K(0,3)} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N-2}} f(\bar{y})\, \chi(|\bar{y}|)\, d\bar{y} +$$

$$+ \gamma_N \rho^2 \int\limits_{K(0,3)\setminus K(0,5/2)} [1-\chi(|\bar{y}|)] \frac{f(\bar{y})\, d\bar{y}}{|\bar{x}-\bar{y}|^{N-2}} \equiv$$

$$\equiv w_1(\bar{x}) + w_2(\bar{x}). \tag{2.25}$$

Поскольку мы оцениваем $w(\bar{x})$, когда $\bar{x}$ изменяется в шаре $K(0, 2)$, то в члене $w_2(\bar{x})$ нет особенности в подынтегральной функции, ибо $\bar{x} \in K(0, 2)$, а $\bar{y} \in K(0, 3) \setminus K(0, 5/2)$; дифференцируя $w_2(\bar{x})$ по $\bar{x}$ под знаком интеграла $n+1$ раз, получим оценку

$$\max_{\bar{x} \in K(0,2)} |D^{n+1} w_2(\bar{x})| \leqslant C\rho^2 \int\limits_{K(0,3)\setminus K(0,5/2)} |f(\bar{y})|\, d\bar{y} \leqslant C\rho^2 F_0^{(3)}. \tag{2.26}$$

Так как производная по x и по $\bar{x}$ связаны соотношением:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i},$$

то из (26) получим

$$\rho^{n+1} |D^{n+1} w_2(x)| \leqslant C\rho^2 F_0^{(3)},$$

т. е.

$$\max_{x \in K(x_0, 2\rho)} |D^{n+1} w_2(x)| \leqslant C\rho^{2-(n+1)} F_0^{(3)},$$

а потому и *)

$$W_{2;n+1}^{(2)} \leqslant C\rho^{2-(n+1)} F_0^{(3)}$$

и, наконец,

$$W_{2;n,\mu}^{(2)} \leqslant (2\rho)^{1-\mu} W_{2;n+1}^{(2)} \leqslant C\rho^{2-n-\mu} F_0^{(3)}. \tag{2.27}$$

---

*) Здесь и ниже все постоянные, зависящие от размерности N, порядка n производных и других несущественных для изучаемой задачи параметров, обозначены одной буквой C.

Рассмотрим интеграл $w_1(\bar{x})$. Введем сферическую систему координат с центром в точке $\bar{x}$, $z=(\bar{x}, r, \omega)$, $\vec{r}$ — радиус-вектор, идущий из точки $\bar{x}$ в точку z, $\vec{r}=r\vec{e}$, $\vec{e}(\omega)$ — единичный вектор, ω — точка на единичной сфере с центром в $\bar{x}$. Интеграл $w_1(\bar{x})$ запишем в виде

$$w_1(\bar{x}) = \gamma_N \rho^2 \int\limits_\omega J(\omega)\, d\omega \int\limits_0^5 \frac{1}{r^{N-2}} r^{N-1} f(\bar{x}, r, \omega)\, \chi(\bar{x}, r, \omega)\, dr =$$

$$= \gamma_N \rho^2 \int\limits_\omega J(\omega)\, d\omega \int\limits_0^5 r f(\bar{x}, r, \omega)\, \chi(\bar{x}, r, \omega)\, dr, \qquad (2.28)$$

здесь $J(\omega)$ — угловой элемент, а интеграл по r в силу финитности χ берется в постоянных конечных пределах. Продифференцируем (28) по $\bar{x}$ $(n-2)$ раза $(f \in C^{(n-2,\mu)}!)$ под знаком интеграла; применяя для дифференцирования произведения правило Лейбница, получим

$$D^{n-2} w_1(\bar{x}) = \gamma_N \rho^2 \int\limits_\omega J(\omega)\, d\omega \int\limits_0^5 r \{(D^{n-2} f)\chi + \ldots + f D^{n-2}\chi\}\, dr. \qquad (2.29)$$

Вернемся в выражении (29) к старым переменным (сначала к $\bar{y}$, а затем к y), получим

$$D^{n-2} w_1(x) = \gamma_N \int\limits_{K(x_0, 3\rho)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \{(D^{n-2} f)\chi + \ldots + f D^{n-2}\chi\}\, dy. \qquad (2.30)$$

Учитывая, что χ и все ее производные ограничены, и что в силу интерполяционных неравенств младшие производные оцениваются через старшую, достаточно рассмотреть лишь первое слагаемое в интеграле (30). Докажем, что если $\psi \in C^{(0,\mu)}$ и финитна в шаре $K(x_0, 3\rho)$, а

$$u(x) = \gamma_N \int\limits_{K(x_0, 3\rho)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \psi(y)\, dy, \qquad (2.31)$$

то $u(x) \in C^{(2,\mu)}(K(x_0, 2\rho))$ и

$$U^{(2)}_{2,\mu} \leqslant C \Psi^{(3)}_{0,\mu}. \qquad (2.32)$$

Тогда, сопоставляя (30)—(32), (27) и (25), получим требуемую оценку (21). Итак, нам осталось доказать, что $u(x) \in C^{(2,\mu)}$ и получить оценку (32). Введем обозначения для производных: $\frac{\partial u}{\partial x_i}=u_i$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=u_{ij}$, $\frac{\partial \psi}{\partial y_i}=\psi_i$ и т. д. Обозначим шар $K(x_0, 2\rho)$ через K_1, а шар $K(x_0, 3\rho)$ через K_2.

Пусть сперва $\psi(y)\in C_0^{(1)}(K_2)$. С помощью интегрирования по частям получим (интегралы по ∂K_2 равны нулю в силу финитности ψ)

$$u_i(x)=\gamma_N \int_{K_2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\psi(y)\,dy=$$

$$=-\gamma_N \int_{K_2} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\psi(y)\,dy=\gamma_N \int_{K_2} \frac{1}{|x-y|^{N-2}}\psi_i(y)\,dy.$$

Так как ψ финитна в шаре K_2, то, продолжая ее нулем на все пространство, мы можем считать, что интеграл в последней формуле берется по всему $\mathbf{R}^N$.

Пусть $\delta>0$ — любое число. Для второй производной $u_{ij}(x)$ получим, снова интегрируя по частям и пользуясь финитностью $\psi(y)$,

$$u_{ij}(x)=-\gamma_N \int_{R^N} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\psi_i(y)\,dy=$$

$$=-\gamma_N \int_{|x-y|\geqslant\delta} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\psi_i(y)\,dy-$$

$$-\gamma_N \int_{|x-y|\leqslant\delta} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}[\psi(y)-\psi(x)]\,dy=$$

$$=\gamma_N \int_{|x-y|>\delta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\psi(y)\,dy+$$

$$+\gamma_N \int_{|x-y|\leqslant\delta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)[\psi(y)-\psi(x)]\,dy+$$

$$+\gamma_N(N-2)\int_{|x-y|=\delta} \frac{1}{\delta^{N-1}}\cos(\nu, y_i)\cos(\nu, y_j)\times$$

$$\times[\psi(y)-\psi(x)-\psi(y)]\,ds_y, \qquad (2.33)$$

ν — нормаль к сфере $|x-y|=\delta$. Формула (33) показывает, что $u_{ij}(x)$ существует при $\psi(y)\in C_0^{(0,\mu)}(K_2)$, ибо второй интеграл в последнем равенстве в (33) сходится, если $\psi(y)\in C^{(0,\mu)}$.

Докажем (32). Заметим, что последний член в (33) равен

$$\gamma_N (N-2)\psi(x) \int\limits_{|x-y|=\delta} \cos(\nu, y_i)\cos(\nu, y_j)\,\delta^{1-N}\,ds_y =$$

$$= \gamma_N (N-2)\psi(x) \int\limits_{|x-y|=1} \cos(\nu, y_i)\cos(\nu, y_j)\,d\omega = \sigma_{ij}\psi(x).$$

Пусть теперь x и $\bar{x}$ любые две точки, $|x-\bar{x}|<\delta$. Докажем, что равно нулю следующее выражение

$$J = \int\limits_{|x-y|\geqslant\delta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] dy -$$

$$- \int\limits_{|x-y|=\delta} \cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] ds_y. \qquad (2.34)$$

Действительно, возьмем шар $K(x, R)$ с центром в точке x достаточно большого радиуса R, тогда

$$\int\limits_{K(x,R)\cap(|x-y|\geqslant\delta)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] dy -$$

$$- \int\limits_{|x-y|=\delta} \cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] ds_y =$$

$$= \int\limits_{\partial K(x,R)} \cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] ds_y.$$

Отсюда

$$J = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x-y|=R} \cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right] ds_y. \qquad (2.35)$$

Имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right]\right| =$$

$$= (N-2)\left|\frac{y_i - x_i}{|x-y|^N} - \frac{y_i - \bar{x}_i}{|\bar{x}-y|^N}\right| \leqslant$$

$$\leqslant (N-2)\left\{\frac{|x_i - \bar{x}_i|}{|x-y|^N} + |y_i - \bar{x}_i|\left|\frac{1}{|x-y|^N} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^N}\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant (N-2)\left\{\frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^N} + |y-\bar{x}|\left|\frac{|\bar{x}-y|^N - |x-y|^N}{|x-y|^N\,|\bar{x}-y|^N}\right|\right\} =$$

$$= (N-2)\left\{\frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^N} + \frac{||\bar{x}-y|-|x-y||}{|x-y|^N\,|\bar{x}-y|^{N-1}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{N-1}|\bar{x}-y|^k\,|x-y|^{N-1-k}\right\}. \qquad (2.36)$$

Из (36) при больших R имеем, $y \in \partial K(x, R)$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right]\right| \leqslant C\,|\bar{x}-x|\,\frac{1}{R^N}, \qquad (2.37)$$

ибо $||\bar{x}-y|-|x-y|| \leqslant |x-\bar{x}|$. Поэтому

$$\left|\int\limits_{|x-y|=R}\cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right]ds_y\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\,\frac{|\bar{x}-x|}{R^N}\,R^{N-1}\to 0,$$

при $R\to\infty$.

Итак $J = 0$.

Запишем теперь формулу (33) для другой точки $\bar{x}$, $|x-\bar{x}|<\delta$, а шар радиуса δ будем по-прежнему брать с центром в точке x, получим

$$u_{ij}(\bar{x}) = \gamma_N\int\limits_{|x-y|\geqslant\delta}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)\psi(y)\,dy +$$

$$+\gamma_N\int\limits_{|x-y|\leqslant\delta}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)[\psi(y)-\psi(\bar{x})]\,dy +$$

$$+\gamma_N\psi(\bar{x})\int\limits_{|x-y|=\delta}\cos(\nu, y_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)ds_y. \qquad (2.38)$$

Согласно сделанному выше замечанию первый интеграл в (38) берется по всему пространству вне шара $|x-y|\geqslant\delta$. Вычитаем (38) из (33) и результат преобразовываем к виду:

$$u_{ij}(x) - u_{ij}(\bar{x}) = \gamma_N\int\limits_{|x-y|\geqslant\delta}[\psi(y)-\psi(\bar{x})]\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right]dy +$$

$$+\gamma_N\int\limits_{|x-y|\leqslant\delta}[\psi(y)-\psi(x)]\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)dy -$$

$$-\gamma_N \int\limits_{|x-y|\leqslant\delta} [\psi(y)-\psi(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right) dy -$$

$$-\sigma_{ij}[\psi(x)-\psi(\bar{x})]+\gamma_N \psi(\bar{x}) J. \tag{2.39}$$

Поскольку $J=0$, то в правой части формулы (39) стоят четыре слагаемых, покажем, что каждое из них не превосходит $C|x-\bar{x}|^\mu \Psi^{(3)}_{0,\mu}$. Для последнего члена в (39) это очевидно. Второй и третий члены в (39) оцениваются одинаково, рассмотрим один из них. Обозначим расстояние между точками x и $\bar{x}$ через σ, $|x-\bar{x}|=\sigma$. Возьмем δ равным 2σ, $\delta=2\sigma$, тогда обе точки x и $\bar{x}$ лежат в шаре $|x-y|\leqslant\delta$. Поэтому имеем

$$\left| \int\limits_{|x-y|\leqslant 2\sigma} [\psi(y)-\psi(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right) dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|\bar{x}-y|\leqslant 3\sigma} |\psi(y)-\psi(\bar{x})| \left| \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant C\Psi^{(3)}_{0,\mu} \int\limits_{|\bar{x}-y|\leqslant 3\sigma} |\bar{x}-y|^\mu \frac{1}{|\bar{x}-y|^N} dy =$$

$$= C\Psi^{(3)}_{0,\mu}\, \omega_N \int\limits_0^{3\sigma} r^{\mu+N-1-N}\, dr \leqslant C\sigma^\mu \Psi^{(3)}_{0,\mu} = C\Psi^{(3)}_{0,\mu} |x-\bar{x}|^\mu. \tag{2.40}$$

Оценим первый член в правой части (39). Имеем (δ_{ij} — символ Кронекера)

$$\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)=$$

$$=(N-2)N\left\{\left[\frac{(y_i-x_i)(y_j-x_j)}{|x-y|^{N+2}}-\frac{(y_i-\bar{x}_i)(y_j-\bar{x}_j)}{|\bar{x}-y|^{N+2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N}\delta_{ij}\left[\frac{1}{|x-y|^N}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^N}\right]\right\}. \tag{2.41}$$

Вторую квадратную скобку в (41) записываем как в (36):

$$\left|\frac{1}{|x-y|^N}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^N}\right|=$$

$$=\frac{||\bar{x}-y|-|x-y||}{|x-y|^N\,|\bar{x}-y|^N}\sum_{k=0}^{N-1}|\bar{x}-y|^k\,|x-y|^{N-k-1}. \tag{2.42}$$

Далее $\sigma = |\bar{x} - x| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$ в области $|x - y| \geqslant 2\sigma$, поэтому по неравенству треугольника

$$\frac{1}{2}|x - y| \leqslant |\bar{x} - y| \leqslant \frac{3}{2}|x - y|, \text{ при } |x - y| \geqslant 2\sigma. \qquad (2.43)$$

Из (42) и (43)

$$\left| \frac{1}{|x-y|^N} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^N} \right| \leqslant C \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{N+1}}. \qquad (2.44)$$

Первую квадратную скобку в (41) оценим, используя (43) и (42), следующим образом:

$$\left| \frac{(y_i - x_i)(y_j - x_j)}{|x-y|^{N+2}} - \frac{(y_i - \bar{x}_i)(y_j - \bar{x}_j)}{|\bar{x}-y|^{N+2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |y_i - \bar{x}_i| \, |y_j - \bar{x}_j| \left| \frac{1}{|x-y|^{N+2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N+2}} \right| +$$

$$+ (|\bar{x}_i - x_i| \, |y_j - \bar{x}_j| + |y_i - \bar{x}_i| \, |\bar{x}_j - x_j| +$$

$$+ |\bar{x}_i - x_i| \, |\bar{x}_j - x_j|) \frac{1}{|x-y|^{N+2}} \leqslant C \frac{|x-\bar{x}|}{|x-y|^{N+1}} + \frac{|x-\bar{x}|^2}{|x-y|^{N+2}}. \qquad (2.45)$$

С помощью (41), (44) и (45) оценим первый член в (39), получим

$$\left| \gamma_N \int\limits_{|x-y| \geqslant 2\sigma} [\psi(y) - \psi(\bar{x})] \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}} \right] dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_{|x-y| \geqslant 2\sigma} \Psi^{(3)}_{0,\mu} |x-y|^{\mu} \left[\frac{\sigma}{|x-y|^{N+1}} + \frac{\sigma^2}{|x-y|^{N+2}} \right] dy \leqslant$$

$$\leqslant C\Psi^{(3)}_{0,\mu} \sigma \int\limits_{2\sigma}^{\infty} r^{N-1+\mu} \left[\frac{1}{r^{N+1}} + \frac{\sigma}{r^{N+2}} \right] dr = C\Psi^{(3)}_{0,\mu} |x - \bar{x}|^{\mu}. \qquad (2.46)$$

Сопоставляя (39), (40) и (46), получим

$$|u_{ij}(x) - u_{ij}(\bar{x})| \leqslant C\Psi^{(3)}_{0,\mu} |x - \bar{x}|^{\mu} \qquad (2.47)$$

для всех x и $\bar{x} \in K_2$. Таким образом, $u(x) \in C^{(2,\mu)}(K_2)$ и

$$U^{(3)}_{2,\mu} \leqslant C\Psi^{(3)}_{0,\mu},$$

оценка (32) доказана. ■

Лемма 2.5. *Пусть $v(x)$ — потенциал двойного слоя,*

$$v(x) = 2\int\limits_{y_N=0} \frac{\partial h(r_{xy})}{\partial y_N}\varphi(y)\,ds_y = -2\int\limits_{y_N=0} \frac{\partial h(r_{xy})}{\partial x_N}\varphi(y)\,ds_y, \qquad (2.48)$$

плотность $\varphi(y) \in C^{(n,\mu)}$ на гиперплоскости Γ $(\Gamma: y_N = 0)$ и равна нулю вне шара $K(y_0, 2\rho)$, $y_0 \in \Gamma$, $n \geqslant 0$ — любое целое, $0 < \mu < 1$. Тогда всюду в полупространстве $x_N \geqslant 0$ $v(x) \in C^{(n,\mu)}$ и справедлива оценка:

$$V_{n,\mu} = O(\Phi^{(2)}_{n,\mu}). \qquad (2.49)$$

Доказательство. Снова считаем, что $N > 2$, $h(r_{xy}) = \gamma_N \frac{1}{|x-y|^{N-2}}$. Пусть D^n — любая производная n-ного порядка; при $x_N > 0$ имеем

$$D^n v(x) = -2\gamma_N \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N} D^n_x\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\varphi(y)\,ds_y. \qquad (2.50)$$

Будем различать 3 случая:

1) Все n производных от функции $v(x)$ берутся в касательном направлении (т. е. нет производных по $\partial/\partial x_N$). Тогда

$$D^n v(x) = -2\gamma_N \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N} D^n_x\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\varphi(y)\,ds_y =$$

$$= -2\gamma_N (-1)^n \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N} D^n_y\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)\varphi(y)\,ds_y,$$

и, интегрируя по гиперплоскости Γ $(\Gamma: y_N = 0)$ по частям и учитывая финитность $\varphi(y)$, получим

$$D^n v(x) = -2\gamma_N \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) D^n_y\varphi(y)\,ds_y. \qquad (2.51)$$

Обозначим $x = (x_1, \ldots, x_N) = (x', x_N)$. Возьмем разность $D^n v(x)$ в двух точках x и $\bar{x}$, у которых координата x_N совпадает

$$D^n v(x', x_N) - D^n v(\bar{x}', x_N) =$$

$$= -2\gamma_N \left[\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) D^n_y\varphi(y)\,ds_y - \right.$$

$$\left. - \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right) D^n_y\varphi(y)\,ds_y\right].$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной интегрирования по формуле $y=x'-z$, а во втором $y=\bar{x}'-z$, получим

$$D^n v(x', x_N) - D^n v(\bar{x}', x_N) =$$
$$= -2\gamma_N \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left[\frac{1}{(|z|^2+x_N^2)^{(N-2)/2}}\right] \times$$
$$\times [D_z^n \varphi(x'-z) - D_z^n \varphi(\bar{x}'-z)]\, ds_z.$$

Отсюда

$$|D^n v(x', x_N) - D^n v(\bar{x}', x_N)| \leqslant$$
$$\leqslant |x'-\bar{x}'|^\mu \Phi_{n,\mu}^{(2)} 2\gamma_N \int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|z|^2+x_N^2}\right)^{(N-2)/2}\right| ds_z \leqslant$$

ибо

$$\leqslant C\Phi_{n,\mu}^{(2)} |x'-\bar{x}'|^\mu, \tag{2.52}$$

$$J = \int_\Gamma \left|\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|z|^2+x_N^2}\right)^{(N-2)/2}\right| dz =$$
$$= (N-2)|x_N| \int_\Gamma \frac{ds_z}{(|z|^2+x_N^2)^{N/2}} =$$
$$= (N-2)\,\omega_{N-1}|x_N| \int_0^\infty \frac{r^{N-2}\,dr}{(r^2+x_N^2)^{N/2}} =$$
$$= (N-2)\,\omega_{N-1} \int_0^\infty \frac{t^{N-2}\,dt}{(1+t^2)^{N/2}} = \frac{1}{2}(N-2)\,\omega_{N-1}.$$

Пусть теперь x и $\bar{x}$ две точки, у которых различна только координата x_N. Тогда

$$D^n v(x', x_N) - D^n v(x', \bar{x}_N) =$$
$$= -2\gamma_N \left\{\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)[D_y^n \varphi(y) - D_{x'}^n \varphi(x')]\, ds_y - \right.$$
$$\left. - \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \bar{x}_N}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)[D_y^n \varphi(y) - D_{x'}^n \varphi(x')]\, ds_y\right\}. \tag{2.53}$$

Лишние члены в (53), содержащие $D_{x'}^n \varphi(x')$, взаимно уничтожаются, ибо, как легко видеть, при $x_N>0$

$$2\gamma_N \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) dy = -1. \tag{2.54}$$

В самом деле, пусть $x=(x', x_N)$ — любая точка полупространства $x_N>0$. Возьмем шар $K(x, R)$ с центром в точке x достаточно большого радиуса и запишем первую формулу Грина для двух функций $\gamma_N \frac{1}{|x-y|^{N-2}}$ и 1 по области $K(x, R) \cap \{y_N>0\}$, получим

$$\gamma_N \int\limits_{\Gamma \cap K(x,R)} \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) ds_y +$$

$$+\gamma_N \int\limits_{\partial K(x,R) \cap \{y_N>0\}} \frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) ds_y = -1. \quad (2.55)$$

Далее

$$\gamma_N \int\limits_{\partial K(x,R) \cap \{y_N>0\}} \frac{\partial}{\partial \nu_y}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) ds_y =$$

$$=-(N-2)\gamma_N \int\limits_{\omega(R)} d\omega \frac{1}{R^{N-1}} R^{N-1} \to$$

$$\to -(N-2)\gamma_N \frac{\omega_N}{2} = -\frac{1}{2} \quad (2.56)$$

при $R\to\infty$, ибо $\omega(R)\to\omega_N/2$. Из (55) и (56) при $R\to\infty$ получим (54).

Вернемся к формуле (53). Обозначим $|x_N-\bar{x}_N|=|x-\bar{x}|=$ $=\sigma$, σ — расстояние между точками x и $\bar{x}$. Разобьем каждый интеграл в (53) на сумму двух интегралов: по шару $|x'-y|\leqslant\sigma$ и по его дополнению $\Gamma\setminus(|x'-y|\leqslant\sigma)=|x'-y|>$ $>\sigma$, и оценим их, используя (36):

$$|D^n v(x', x_N) - D^n v(x', \bar{x}_N)| =$$

$$=2\gamma_N \Bigg| \int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma} \frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)[D_y^n\varphi(y)-D_{x'}^n\varphi(x')]\,ds_y -$$

$$-\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_N}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)[D_y^n\varphi(y)-D_{x'}^n\varphi(x')]\,ds_y +$$

$$+\int\limits_{|x'-y|>\sigma} [D_y^n\varphi(y)-D_{x'}^n\varphi(x')]\left[\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial \bar{x}_N}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)\right] ds_y \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant (N-2)\,\Phi_{n,\mu}^{(2)} \left(\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma} |x'-y|^{\mu} \frac{ds_y}{|x-y|^{N-1}} + \right.$$

$$+\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma}|x'-y|^{\mu}\frac{ds_y}{|\bar{x}-y|^{N-1}}\Bigg)+$$

$$+\Phi^{(2)}_{n,\mu}\int\limits_{|x'-y|\geqslant\sigma}|x'-y|^{\mu}\left|\frac{\partial}{\partial x_N}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_N}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)\right|ds_y\leqslant$$

$$\leqslant C\Phi^{(2)}_{n,\mu}\Bigg(\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma}|x'-y|^{\mu-N+1}ds_y+\sigma\int\limits_{|x'-y|\geqslant\sigma}|x'-y|^{\mu-N}ds_y\Bigg)\leqslant$$

$$\leqslant C\Phi^{(2)}_{n,\mu}\left(\int\limits_0^{\sigma}r^{\mu-N+1}r^{N-2}\,dr+\sigma\int\limits_{\sigma}^{\infty}r^{\mu-N}r^{N-2}dr\right)=C\Phi^{(2)}_{n,\mu}\,\sigma^{\mu}. \tag{2.57}$$

(В предпоследнем неравенстве использовано (36).) Поскольку для любых двух точек $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$, лежащих в полупространстве $x_N>0$, имеет место равенство

$$D^nv(\bar{x})-D^nv(\bar{\bar{x}})=[D^nv(\bar{x}',\bar{x}_N)-D^nv(\bar{x}',\bar{\bar{x}}_N)]+$$
$$+[D^nv(\bar{x}',\bar{\bar{x}}_N)-D^nv(\bar{\bar{x}}',\bar{\bar{x}}_N)],$$

то в силу оценок (52) и (57) в случае 1) справедливо равенство (49).

2) В производной $D^nv(x)$ n-ного порядка функции $v(x)$ есть четное число $2k$ производных по направлению нормали $\partial/\partial x_N$. Так как $\Delta_x\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)=0$, при $x_N>0$, $y\in\Gamma$, то

$$\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)=-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right),$$

и поскольку производных по $\partial/\partial x_N$ четное число, то этот случай сводится к предыдущему.

3) Пусть, наконец, в производной $D^nv(x)$ n-ного порядка функции $v(x)$ есть нечетное число $(2k+1)$ производных $\partial/\partial x_N$. Тогда $2k$ из них мы, как в случае 2), выразим через касательные производные и останется лишь производная первого порядка по $\partial/\partial x_N$. Итак, достаточно рассмотреть случай, когда в производной $D^nv(x)$ есть лишь одна производная $\partial/\partial x_N$, т. е. $D^nv(x)=D^{n-1}_{x'}\frac{\partial v}{\partial x_N}$. Имеем при $x_N>0$

$$D^n v(x) = D_{x'}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial x_N} =$$

$$= -2\gamma_N \int\limits_\Gamma D_{x'}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) \varphi(y)\, ds_y =$$

$$= 2\gamma_N \sum_{i=1}^{N-1} \int\limits_\Gamma D_{x'}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) \varphi(y)\, ds_y =$$

$$= 2\gamma_N (-1)^n \int\limits_\Gamma D_{x'}^1 \left[\sum_{i=1}^{N-1} D_y^{n-2} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) \right] \varphi(y)\, ds_y =$$

$$= 2\gamma_N \int\limits_\Gamma D_{x'}^1 \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) D_y^{n-2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i^2} \right) ds_y, \tag{2.58}$$

мы здесь n раз проинтегрировали по частям и воспользовались финитностью функции $\varphi(y)$. Обозначим

$$D^{n-2} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i^2} \right) = \psi(y). \tag{2.59}$$

По условию леммы $\psi(y) \in C^{(0,\mu)}$ на Γ и равна нулю вне шара $|y-y_0| \leqslant 2\rho$, $y_0 \in \Gamma$. Итак, полагая $D_{x'}^1 = \partial/\partial x_i$, $i \neq N$, получим из (58) и (59)

$$D^n v(x) = 2\gamma_N \int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) \psi(y)\, dy. \tag{2.60}$$

Если $x = (x', x_N)$, то возьмем другую точку $\bar{x} = (\bar{x}', x_N)$ с той же координатой x_N и составим разность

$$D^n v(x) - D^n v(\bar{x}) =$$

$$= 2\gamma_N \int\limits_\Gamma \psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} \left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}} \right) \right] ds_y. \tag{2.61}$$

Заметим теперь, что при любом $x = (x', x_N)$ следующий интеграл по шару $K(x', R)$ на гиперплоскости Γ равен нулю при любом $R > 0$:

$$\int\limits_{K(x',R)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}} \right) ds_y = 0. \tag{2.62}$$

Действительно, введем сферическую систему координат с центром в точке x' и с полярной осью, направленной вдоль оси Ox_i, тогда

$$\int\limits_{K(x',R)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) ds_y = \int\limits_{\partial K(x',R)} \frac{1}{|x-y|^{N-2}} \cos(\nu, x_i)\, d\tau_y =$$

$$= R^{N-2}\frac{1}{(R^2+x_N^2)^{(N-2)/2}} \underbrace{\int\limits_0^{\pi}\cdots\int\limits_0^{\pi}}_{N-3} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta_1 \sin^{N-3}\theta_1 \ldots$$

$$\ldots \sin\theta_{N-3}\, d\theta_1 \ldots d\theta_{N-3}\, d\varphi = 0$$

из-за интегрирования по θ_1. Обозначим через σ расстояние между точками x и $\bar{x}$, $\sigma = |x-\bar{x}| = |x'-\bar{x}'|$ и с помощью (62) преобразуем равенство (61) следующим образом:

$$D^n v(x) - D^n v(\bar{x}) = 2\gamma_N \int\limits_{|x'-y|\leqslant 2\sigma} [\psi(y) -$$

$$-\psi(x')]\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right) ds_y -$$

$$-2\gamma_N \int\limits_{|x'-y|\leqslant 2\sigma} [\psi(y)-\psi(\bar{x}')]\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right) ds_y +$$

$$+ 2\gamma_N \lim_{R\to\infty} \int\limits_{2\sigma\leqslant|x'-y|<R} [\psi(y)-\psi(\bar{x}')]\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right\} ds_y \qquad (2.63)$$

(здесь все лишние члены пропадают в силу (62)). Два первых члена в (63) оцениваются одинаково:

$$\left|\int\limits_{|x'-y|<2\sigma} [\psi(y)-\psi(\bar{x}')]\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right) ds_y\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\Psi_{0,\mu}^{(2)} \int\limits_{|\bar{x}'-y|\leqslant 3\sigma} |x'-y|^{\mu-N+1}\, ds_y \leqslant$$

$$\leqslant C\Psi_{0,\mu}^{(2)} \int\limits_0^{3\sigma} r^{\mu-N+1} r^{N-2}\, dr = C\Psi_{0,\mu}^{(2)} |x-\bar{x}|^{\mu}. \qquad (2.64)$$

Оценим последний член в (63). Фигурная скобка в силу (36) и (43) не превосходит $C\dfrac{|x-\bar{x}|}{|x'-y|^N}$, поэтому предел существует и оценивается так:

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int\limits_{2\sigma\leqslant|x'-y|\leqslant R}[\psi(y)-\psi(\bar{x}')]\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right\}ds_y\right|\leqslant$$

$$\leqslant C|x-\bar{x}|\,\Psi^{(2)}_{0,\mu}\int\limits_{2\sigma}^{\infty}r^{\mu-N+N-2}\,dr=C\Psi^{(2)}_{0,\mu}|x-\bar{x}|^{\mu}. \qquad (2.65)$$

Из (59), (64) и (65) имеем

$$|D^n v(x)-D^n v(\bar{x})|\leqslant C\Phi^{(2)}_{n,\mu}|x-\bar{x}|^{\mu}. \qquad (2.66)$$

Нам осталось рассмотреть разность $D^n v(x)-D^n v(\bar{x})$ для двух точек x и $\bar{x}$, у которых различна только координата x_N, $x=(x', x_N)$, $\bar{x}=(x', \bar{x}_N)$. Имеем для этой разности выражение (61). Поскольку в силу (62) равен нулю интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\frac{1}{|x-y|^{N-2}}-\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right\}ds_y=0, \qquad (2.67)$$

то разность (61) можно представить в виде:

$$D^n v(x)-D^n v(\bar{x})=2\gamma_N\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma}[\psi(y)-\psi(x')]\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|x-y|^{N-2}}\right)ds_y-$$

$$-2\gamma_N\int\limits_{|x'-y|\leqslant\sigma}[\psi(y)-\psi(x')]\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right)ds_y+$$

$$+2\gamma_N\int\limits_{|x'-y|\geqslant\sigma}[\psi(y)-\psi(x')]\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|x-y|^{N-2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\bar{x}-y|^{N-2}}\right\}ds_y, \qquad (2.68)$$

$\sigma=|x-\bar{x}|=|x_N-\bar{x}_N|$. Все интегралы в (68) оцениваются точно так же, как в (64) и (65). Итак, и в этом случае

$$|D^n v(x)-D^n v(\bar{x})|\leqslant C\Phi^{(2)}_{n,\mu}|x-\bar{x}|^{\mu}. \qquad (2.69)$$

Тем самым полностью рассмотрен случай 3). ■

§ 3. Априорные оценки Шаудера

Пусть D — произвольная ограниченная область с границей Γ, $\bar{D}=(D+\Gamma)\subset R^N$, пусть $\bar{D}\in A^{(n,\mu)}$, $n\geqslant 2$ — любое целое, $0<\mu<1$. Обозначим, как и в § 2, через Γ_0 некоторое замкнутое подмножество границы Γ, $\Gamma_0\subset\Gamma$, $D_0=\bar{D}\setminus\Gamma_0$; для любой точки $x\in D_0$ положим $d(x)=\frac{1}{4}r_{x\Gamma_0}$, $d(x)>0$. Пусть $\varphi(x)$ функция, заданная на $\Gamma_1=\overline{\Gamma\setminus\Gamma_0}$ и принадлежащая классу $C^{(n,\mu)}(\Gamma_1)$, а $f(x)$ — функция, заданная на D_0 и принадлежащая классу $C^{(n-2,\mu)}(D_0)$. Возьмем любую точку $x_0\in D_0$ и число σ, $0<\sigma<\sigma_0<1$, значение σ_0 будет определено ниже. Пусть пересечение $\Gamma_1\cap K(x_0,\ 2\sigma d(x_0))$ представляет собой часть плоскости. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \Delta u=f \quad \text{в области} \quad \bar{D}\cap K(x_0,\ 2\sigma d(x_0)), & (3.1)\\ u=\varphi \quad \text{на границе} \quad \Gamma_1\cap K(x_0,\ 2\sigma d(x_0)). & (3.2)\end{cases}$$

Положим $\rho=\sigma d(x_0)$, будем, как и в § 2, обозначать через $Y_k^{(\sigma)}$, $Y_{k,\mu}^{(\sigma)}$ значения Y_k, $Y_{k,\mu}$, найденные для функции $y(x)$ в области $\bar{D}\cap K(x_0,\ \sigma d(x_0))$.

Теорема 3.1. *Для любой функции* $u(x)\in C^{(n,\mu)}(\bar{D}\cap$ $\cap K(x_0,\ 2\rho))$, *удовлетворяющей условиям* (1) *и* (2), *справедлива оценка*:

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)}=O\left\{\rho^{2-n-\mu}F_0^{(3\sigma)}+F_{n-2,\mu}^{(3\sigma)}+\rho^{-\mu}U_n^{(2\sigma)}+\sum_{k=1}^{n-1}U_k^{(2\sigma)}+\Phi_{n,\mu}(\Gamma_1)\right\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть сперва $f(x)\equiv 0$. Рассмотрим два случая:

$$\Gamma_1\cap K(x_0,\ 3\rho/2)=0 \tag{3.4}$$

и

$$\Gamma_1\cap K(x_0,\ 3\rho/2)\neq 0. \tag{3.5}$$

В первом случае функцию $u(x)$ в шаре $K(x_0,\ \rho)$ можно представить в виде интеграла Пуассона (см. главу 2, § 1):

$$u(x)=-\int\limits_{\partial K(x_0,3\rho/2)} u(y)\frac{\partial G(x,\ y)}{\partial \nu_y}\,ds_y, \tag{3.6}$$

$G(x,\ y)$ — функция Грина первой краевой задачи для шара. Отсюда дифференцируя (6) при $x\in K(x_0,\ \rho)$ под знаком интеграла любое число раз, получим $(x\in K(x_0,\ \rho))$

$$|D^m u(x)| = \left| \int\limits_{\partial K(x_0, 3\rho/2)} u(y) D_x^m \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial \nu_y} \right) ds_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant C U_0^{(3\sigma/2)} \int\limits_{\partial K(x_0, 3\rho/2)} r_{xy}^{2-N-m-1} ds_y \leqslant$$

$$\leqslant C U_0^{(2\sigma)} \rho^{1-N-m} \int\limits_{\partial K(x_0, 3\rho/2)} ds_y \leqslant \overline{C U_0^{(2\sigma)}} \rho^{-m}. \tag{3.7}$$

Отсюда для любого целого $m \geqslant 0$

$$U_m^{(\sigma)} = O(\rho^{-m} U_0^{(2\sigma)}). \tag{3.8}$$

Беря $m = n + 1$, получим на основании (8)

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)} = O(U_{n+1}^{(\sigma)} \rho^{1-\mu}) = O(\rho^{-(n+\mu)} U_0^{(2\sigma)}). \tag{3.9}$$

Пусть теперь $\Gamma_1 \cap K(x_0, 3\rho/2) \neq 0$. Обозначим через $\bar{u}(x)$ функцию

$$\bar{u}(x) = -2 \int\limits_{\Gamma_1 \cap K(x_0, 3\rho/2)} \bar{\varphi}(y) \frac{\partial h(r_{xy})}{\partial y_N} ds_y, \tag{3.10}$$

$\bar{u}(x)$ — потенциал двойного слоя, взятый по части плоскости $y_N = 0$, его плотность $\bar{\varphi}(y)$ равна $\bar{\varphi}(y) = \varphi(y)\chi(y)$, где $\chi(y) \in C_0^{(\infty)}(y_N = 0)$, равна 1 в области $\Gamma_1 \cap K(x_0, 3\rho/2)$ и нулю вне области $\Gamma_1 \cap K(x_0, 2\rho)$. Тогда функция $\bar{\bar{u}} = u - \bar{u}$ есть решение задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta \bar{\bar{u}} = 0 & \text{в области } D \cap K(x_0, 3\rho/2), \\ \bar{\bar{u}} = 0 & \text{на } \Gamma_1 \cap K(x_0, 3\rho/2), \\ \bar{\bar{u}} = u - \bar{u} & \text{на } D \cap \partial K(x_0, 3\rho/2). \end{cases} \tag{3.11}$$

Обозначим через $G_1(x, y)$ функцию Грина первой краевой задачи для области $D \cap K(x_0, 3\rho/2)$ (она, очевидно, существует, так как $D \cap K(x_0, 3\rho/2)$ — шаровой сегмент). Имеем

$$\bar{\bar{u}}(x) = - \int\limits_{\partial K(x_0, 3\rho/2) \cap D} \frac{\partial G_1(x, y)}{\partial \nu_y} (u - \bar{u}) ds_y. \tag{3.12}$$

Отсюда, как и в первом случае*), сразу же получим

$$\bar{\bar{U}}_{n,\mu}^{(\sigma)} = O\{\rho^{-(n+\mu)} [U_0^{(2\sigma)} + \bar{U}_0^{(2\sigma)}]\}. \tag{3.13}$$

---

*) Достаточно представить $G_1(x, y)$ в виде $G_1(x, y) = h(r_{xy}) + w(x, y)$ и учесть, что $x \in K(x_0, \rho)$, а $y \in \partial K(x_0, 3\rho/2)$.

Функцию $\overline{u}(x)$ оценим с помощью леммы 2.5. Получим

$$\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} = O\left(\Phi_{n,\mu}^{(3\sigma/2)}\right) = O\left(\Phi_{n,\mu}^{(2\sigma)}\right). \tag{3.14}$$

$$\overline{U}_0^{(2\sigma)} = O\left(U_0^{(2\sigma)}\right), \quad \text{ибо} \quad \overline{U}_0^{(2\sigma)} = O\left(\Phi_0^{(2\sigma)}\right) = O\left(U_0^{(2\sigma)}\right),$$

из (13) и (14) получим для случая $\Gamma_1 \cap K(x_0, 3\rho/2) \neq 0$ оценку:

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)} = \overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + \overline{\overline{U}}_{n,\mu}^{(\sigma)} = O\left(\rho^{-(n+\mu)} U_0^{(2\sigma)} + \Phi_{n,\mu}^{(2\sigma)}\right). \tag{3.15}$$

Объединяя оба случая (оценки (9) и (15)), получим снова оценку (15).

Исключим теперь из правой части (15) член $\rho^{-(n+\mu)} U_0^{(2\sigma)}$. Напишем разложение Тейлора для функции $u(x)$ с центром в точке x_0

$$u(x) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} u^{(\alpha)}(x_0)(x-x_0)^\alpha +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \int_0^1 u^{(\alpha)}[x_0+t(x-x_0)](1-t)^{k-1}\,dt, \tag{3.16}$$

здесь α — мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!$

$$(x-x_0)^\alpha = (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \ldots (x_N - x_{0N})^{\alpha_N},$$

$$u^{(\alpha)} = D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}}; \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N,$$

$k \geqslant 0$ — любое *) целое. Из формулы (16) сразу следует, что полином Тейлора степени k ($k \geqslant 0$ — любое целое) гармонической функции сам есть гармоническая функция. В самом деле, по индукции, при $k=0$ это так, пусть это верно для $k-2$, докажем справедливость утверждения для полинома степени $k-1$. Применим оператор Лапласа к обеим частям формулы (16). Так как $\Delta u(x)=0$ и по предположению полином порядка $k-2$ гармоничен, то из (16) получим

$$\sum_{|\alpha|=k-1} \frac{1}{\alpha!} u^{(\alpha)}(x_0)\,\Delta(x-x_0)^\alpha =$$

$$= -\sum_{|\alpha|=k} \frac{k}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \Delta\left[(x-x_0)^\alpha u^{(\alpha)}(x_0+t(x-x_0))\right] dt. \tag{3.17}$$

---

*) Из формулы Пуассона для гармонической функции видно, что если $u(x)$ гармонична в области D, то $u(x) \in C^{(\infty)}(D)$.

Равенство (17) выполняется тождественно по x из достаточно малой окрестности точки x_0, что возможно только если полином Тейлора степени $k-1$ гармоничен, ибо в противном случае слева в (17) стоит однородный многочлен по степеням $(x-x_0)$ порядка $k-1-2$, а справа — выражение, имеющее в точке x_0 нуль порядка $\geqslant k-2$.

Обозначим через $\tilde{u}(x)$ полином Тейлора степени $(n-1)$, а через $r(x)$ разность $r(x)=u(x)-\tilde{u}(x)$. По доказанному $r(x)$ — гармоническая функция и для нее верна оценка (15). Поскольку $D^n\tilde{u}(x)=0$, то $R^{(\sigma)}_{n,\mu}=U^{(\sigma)}_{n,\mu}$; из формулы (16), записанной для $k=n$, получим $R^{(2\sigma)}_0=O(\rho^n U^{(2\sigma)}_n)$, наконец, $R_{n,\mu}(\Gamma_1\cap K(x_0,\ 2\rho))=O(\Phi^{(2\sigma)}_{n,\mu}+\sum\limits_{k=1}^{n-1}U^{(2\sigma)}_k)$. Подставляя эти формулы в (16), получим

$$U^{(\sigma)}_{n,\mu}=O(\rho^{-\mu}U^{(2\sigma)}_n+\sum_{k=1}^{n-1}U^{(2\sigma)}_k+\Phi_{n,\mu}(\Gamma_1)), \tag{3.18}$$

что совпадает с оценкой (2) для случая, когда $f\equiv 0$.

Пусть теперь $f(x)$ любая функция $\in C^{(n-2,\mu)}(D_0)$. Положим $u(x)=v(x)+w(x)$, где

$$w(x)=-\int\limits_{\bar{D}\cap K(x_0,3\rho)} h(r_{xy})f(y)\,dy. \tag{3.19}$$

Тогда $v(x)$ есть решение задачи:

$$\begin{cases}\Delta v=0 & \text{в области } \bar{D}\cap K(x_0,\ 2\rho),\\ v=\varphi-w & \text{на границе } \Gamma_1\cap K(x_0,\ 2\rho).\end{cases} \tag{3.20}$$

Для $v(x)$ в силу (18) имеем оценку

$$V^{(\sigma)}_{n,\mu}=O\left\{\rho^{-\mu}V^{(2\sigma)}_n+\sum_{k=1}^{n-1}V^{(2\sigma)}_k+\Phi_{n,\mu}(\Gamma_1)+W^{(2\sigma)}_{n,\mu}\right\}. \tag{3.21}$$

Поскольку $u(x)=v(x)+w(x)$, то $U^{(\sigma)}_{n,\mu}=O(V^{(\sigma)}_{n,\mu}+W^{(\sigma)}_{n,\mu})$, и подставляя сюда оценку (21) для $V^{(\sigma)}_{n,\mu}$, видим, что оценка (21) справедлива и когда в левой части вместо $V^{(\sigma)}_{n,\mu}$ стоит $U^{(\sigma)}_{n,\mu}$. Далее, $v(x)=u(x)-w(x)$, поэтому $V^{(2\sigma)}_k=O(U^{(2\sigma)}_k+W^{(2\sigma)}_k)$, подставляя эту оценку в правую часть (21) и оценивая все $W^{(2\sigma)}_k$, $k=1,2,\ldots,n$ и $W^{(2\sigma)}_{n,\mu}$ по лемме 2.4, получим окончательно

$$U^{(\sigma)}_{n,\mu}=O\left\{\rho^{-\mu}U^{(2\sigma)}_n+\sum_{k=1}^{n-1}U^{(2\sigma)}_k+\Phi_{n,\mu}(\Gamma_1)+\rho^{2-n-\mu}F^{(3\sigma)}_0+F^{(3\sigma)}_{n-2,\mu}\right\}.\blacksquare \tag{3.22}$$

Замечание 3.1. Оценка (22) справедлива, в частности, когда $\Gamma_1=\Gamma$, а $\Gamma_0=0$; при этом $d(x)$ надо считать константой. Если $\Gamma_0=\Gamma$ и $\Gamma_1=0$, то $d(x)=\frac{1}{4}r_{x\Gamma}$ и оценка (22) приобретает следующий вид:

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)}=O\{\rho^{2-n-\mu}F_0^{(3\sigma)}+F_{n-2,\mu}^{(3\sigma)}+\rho^{-\mu}U_n^{(2\sigma)}\}. \tag{3.23}$$

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для общего линейного эллиптического оператора второго порядка

$$\begin{cases} Lu=f & \text{в} \quad D, \\ u=\varphi & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{3.24}$$

где

$$Lu=\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u. \tag{3.25}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены следующие условия: область* $(D+\Gamma)\in A^{(n,\mu)}$, *коэффициенты оператора* L $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)\in C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$, $(i,\ j=1,\ 2,\dots,\ N)$, $f(x)\in C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$, $\varphi(x)\in C^{(n,\mu)}\ (\Gamma)$, $n\geqslant 2$ — *любое целое*, $0<\mu<1$. *Тогда для любого решения* $u(x)$ *задачи* (24) *из класса* $C^{(n,\mu)}(\bar{D})$ *справедлива априорная оценка Шаудера:*

$$U_{n,\mu}=O\{U_0+F_0+F_{n-2,\mu}+\Phi_{n,\mu}\}. \tag{3.26}$$

Оценка (26) *равномерна относительно любого семейства эллиптических операторов* L, *у которого ограничены величины**) $1/\alpha$, A_0, B_0, C_0, $A_{n-2,\mu}$, $B_{n-2,\mu}$, $C_{n-2,\mu}$.

Доказательство. Так как Γ_0 пусто и $\Gamma_1=\Gamma$, то положим $d(x)=1/4$ для всех $x\in D$. Пусть $x_0\in D$ — произвольная точка. Возьмем шар $K(x_0,\ 4\sigma d(x_0))=K(x_0,\ \sigma)$ $(0<\sigma<\sigma_0)$, с центром в точке x_0 и радиусом σ $(d(x_0)=1/4)$. Если пересечение этого шара с границей Γ не пусто, то введем новые координаты $y_i=y_i(x)$, $i=1,\ 2,\ \dots,\ N$, так, чтобы граница $\Gamma\cap K(x_0,\ 4\sigma d(x_0))$ перешла в часть плоскости $y_N=0$, а область $D\cap K(x_0,\ 4\sigma d(x_0))$ лежала в полупространстве $y_N\geqslant 0$. При этом оператор L перейдет в оператор L' вида (легко видеть, что оператор L' — эллиптический **):

*) A_k, $A_{k,\mu}$ (аналогично для коэффициентов b_i и c) обозначают, как обычно, сумму максимумов модулей или сумму коэффициентов Гельдера всех k-тых производных всех коэффициентов $a_{ij}(x)$, взятых в области $\bar{D}$.

**) Переход $x\to y=y(x)$ осуществляется по формулам: $y_1=y_1(x)=x_1,\dots$ $\dots,\ y_{N-1}=y_{N-1}(x)=x_{N-1}$, $y_N=y_N(x)=x_N-\varphi(x_1,\ \dots,\ x_{N-1})$, где $x_N=\varphi(x_1,\ \dots,\ x_{N-1})$ — уравнение Γ в локальных координатах с центром в точке x_0. Тогда $a'_{ij}(y)=\sum_{r,s=1}^{N}a_{rs}(x)\frac{\partial y_i}{\partial x_r}\frac{\partial y_j}{\partial x_s}\Big|_{x=x^{-1}(y)}$ и эллиптичность L' следует из эллиптичности L.

$$L'u(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a'_{ij}(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{N} b'_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} + c'(y) u = f'(y).$$

«Заморозим» у оператора L' коэффициенты в точке y_0, где $y_0 = y(x_0)$, т. е. будем рассматривать его как оператор с постоянными коэффициентами $a_{ij}(y_0)$. Для этого запишем уравнение $L'u(y) = f'(y)$ в виде

$$L''u(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a'_{ij}(y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} = f'(y) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{N} [a'_{ij}(y_0) - a'_{ij}(y)] \frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^{N} b'_i(y) \frac{\partial u}{\partial y_i} - c'(y) u.$$

Введем новые декартовы координаты z с центром в точке y_0 так, чтобы оператор L'' перешел в оператор Лапласа, а полупространство $y_N \geqslant 0$ перешло снова в полупространство $z_N \geqslant 0$. Мы получим в координатах $z_1, z_2, \ldots, z_N$

$$\Delta u = f''(z) + \sum_{i,j=1}^{N} [a''_{ij}(0) - a''_{ij}(z)] \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial z_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{N} b''_i(z) \frac{\partial u}{\partial z_i} - c''(z) u \equiv \bar{f}(z). \tag{3.27}$$

В силу условий доказываемой теоремы новая функция $\bar{f} \in C^{(n-2,\mu)}$. Если σ_0 достаточно мало (это и есть условие, определяющее выбор σ_0), то $u(z)$ в шаре $K(0, \sigma/2)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \Delta u = \bar{f}(z) & \text{в области } K(0, \sigma/2) \cap \{z_N > 0\}, \\ u = \bar{\varphi}(z) & \text{на границе } K(0, \sigma/2) \cap \{z_N = 0\}. \end{cases}$$

Если же шар $K(x_0, 4\sigma d(x_0)) = K(x_0, \sigma)$ не имеет пересечения с границей Γ, то мы сразу «заморозим» коэффициенты в точке x_0 и сделаем преобразование координат $x \to z$ так, чтобы оператор с постоянными (замороженными в точке x_0) коэффициентами перешел в оператор Лапласа. Мы вновь придем к уравнению (27). Теперь как в том, так и в другом случае применим к функции $u(z)$ в шаре половинного радиуса $K(0, \sigma/2) = K(0, 2\sigma d(x_0))$ теорему 3, получим оценку *).

---

*) Если f и g — любые функции, то

$$(fg)_{0,\mu} = O(F_{0,\mu} G_0 + F_0 G_{0,\mu}).$$

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)} = O\Big\{\rho^{-\mu}U_n^{(2\sigma)} + \sum_{k=1}^{n-1} U_k^{(2\sigma)} + \Phi_{n,\mu} +$$

$$+\rho^{2-n-\mu}[F_0^{(3\sigma)} + A_{0,\mu}\rho^{\mu}U_2^{(3\sigma)} + B_0U_1^{(3\sigma)} + C_0U_0^{(3\sigma)}] + F_{n-2,\mu}^{(3\sigma)} +$$

$$+A_{0,\mu}\rho^{\mu}(U_{n,\mu}^{(3\sigma)} + U_n^{(3\sigma)}) + \sum_{k=2}^{n-1}(A_{n-k,\mu}U_k^{(3\sigma)} + A_{n-k}U_{k,\mu}^{(3\sigma)}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(B_{n-k-1,\mu}U_k^{(3\sigma)} + B_{n-k-1}U_{k,\mu}^{(3\sigma)}) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-2}(C_{n-k-2,\mu}U_k^{(3\sigma)} + C_{n-k-2}U_{k,\mu}^{(3\sigma)}), \quad \rho = \sigma d = \frac{1}{4}\sigma. \quad (3.28)$$

Обозначая через γ_1 константу, ограничивающую рост O-членов в (28), получим

$$U_{n,\mu}^{(\sigma)} \leqslant \gamma_1 A_{0,\mu}\rho^{\mu}U_{n,\mu}^{(3\sigma)} + M(\sigma), \quad (3.29)$$

$M(\sigma)$ обозначает все остальные члены в (28). Умножая (29) на $\rho^{n+\mu}$, получим

$$\rho^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(\sigma)} \leqslant \gamma_1 A_{0,\mu}\rho^{\mu}\rho^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(3\sigma)} + \rho^{n+\mu}M(\sigma). \quad (3.30)$$

Согласно лемме 2.3.

$$\overline{U}_{n,\mu}^{(3\sigma)} = O\left[\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)^{n+\mu}(\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + \overline{U}_n^{(\sigma)})\right] = O[\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + \overline{U}_n^{(\sigma)}],$$

поэтому

$$\rho^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(3\sigma)} \leqslant (3\rho)^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(3\sigma)} \leqslant \overline{U}_{n,\mu}^{(3\sigma)} = O[\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + \overline{U}_n^{(\sigma)}].$$

Далее,

$$\overline{U}_n^{(\sigma)} = \sup_{x\in\overline{D}}\{[\sigma d(x)]^n U_n^{(\sigma)}(x)\} \leqslant \rho^n U_n, \quad \text{ибо} \quad d(x) = \text{const} = 1/4.$$

Из двух последних формул имеем

$$\rho^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(3\sigma)} \leqslant \gamma_2(\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + \rho^n U_n). \quad (3.31)$$

Подставляя (31) в (30), получим

$$\rho^{n+\mu}U_{n,\mu}^{(\sigma)} \leqslant \gamma_1\gamma_2 A_{0,\mu}\rho^{\mu}\overline{U}_{n,\mu}^{(\sigma)} + O[\rho^{n+\mu}(M(\sigma) + U_n)]. \quad (3.32)$$

Обозначим через σ_1 число, равное

$$\sigma_1 = \sup\{\sigma \mid \sigma < \sigma_0, \quad \gamma_1\gamma_2 A_{0,\mu}\rho^{\mu} < 1/4\}, \quad (3.33)$$

(относительно σ_0 см. теорему 1; $\rho=\sigma/4$). Записав неравенство (32) с $\sigma=\sigma_1$, выберем точку $x_0 \in D$ так, чтобы для шара $K(x_0, \sigma_1/4)$ было выполнено неравенство

$$\frac{1}{2}\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n,\mu} < (\sigma_1 d)^{n+\mu} U^{(\sigma_1)}_{n,\mu}. \tag{3.34}$$

Из (34) и (32) с учетом (33) получим

$$\frac{1}{2}\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n,\mu} \leqslant \frac{1}{4}\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n,\mu} + O\left[(\sigma_1 d)^{n+\mu}(M(\sigma_1)+U_n)\right],$$

или

$$\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n,\mu} = O\left[(\sigma_1 d)^{n+\mu}(M(\sigma_1)+U_n)\right]. \tag{3.35}$$

Далее, в силу леммы 2.2 и замечания 2.1 имеем

$$U_{n,\mu} = O\left\{(\sigma_1 d)^{-(n+\mu)}\left[\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n,\mu} + \overline{U}^{(\sigma_1)}_{n}\right]\right\}. \tag{3.36}$$

Подставляя (35) в (36) и учитывая то, что $\overline{U}^{(\sigma_1)}_{n} \leqslant \rho_1^n U_n$, получим

$$U_{n,\mu} = O\left\{M(\sigma_1) + U_n + (\sigma_1 d)^{-\mu} U_n\right\}. \tag{3.37}$$

Из (33) находим, что для $\rho_1 = \sigma_1 d = \sigma_1/4$ справедлива оценка $\rho_1^{-\mu} = O(A_{0,\mu}+1)$. Подставляя эту оценку в (37), вспоминая выражение для $M(\sigma_1)$ и учитывая, что $U^{(3\sigma)}_k \leqslant U_k$ и $U^{(3\sigma)}_{k,\mu} \leqslant U_{k,\mu}$ для всех k, получим

$$\begin{aligned} U_{n,\mu} = O\Big\{&(A_{0,\mu}+1)U_n + \sum_{k=1}^{n-1} U_k + \Phi_{n,\mu} + \\ &+ (A_{0,\mu}^{(n-2+\mu)/\mu}+1)(F_0+U_2+B_0U_1+C_0U_0) + F_{n-2,\mu} + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1}(A_{n-k,\mu}U_k + A_{n-k}U_{k,\mu}) + \sum_{k=1}^{n-1}(B_{n-k-1,\mu}U_k + B_{n-k-1}U_{k,\mu}) + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2}(C_{n-k-2,\mu}U_k + C_{n-k-2}U_{k,\mu})\Big\}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Чтобы получить окончательный результат, исключим из правой части (38) все $U_{k,\mu}$ с $k \leqslant n-1$ и все U_k с $0<k\leqslant n$; для этого воспользуемся теоремой 1 и неравенствами (1.1), (1.2). Итак, мы установили оценку (26),

$$U_{n,\mu} = O\left\{U_0 + F_0 + F_{n-2,\mu} + \Phi_{n,\mu}\right\}. \tag{3.39}$$

Как видно из (38), константа, ограничивающая рост O-членов в (39), зависит от $1/\alpha$, A_0, B_0, C_0, и $A_{n-2,\mu}$, $B_{n-2,\mu}$, $C_{n-2,\mu}$ (промежуточные значения $A_{k,\mu}, \ldots$ исключаются по теореме 1).■

В случае, когда граничное условие в задаче (24) ставится на части Γ_1 границы Γ и рассматриваются решения, непрерывные в $\bar{D}$ и принадлежащие классу $C^{(n,\mu)}$ в $\bar{D}\setminus\Gamma_0$ ($\Gamma_0 = \overline{\Gamma\setminus\Gamma_1}$), то, дословно повторяя проведенные рассуждения, получим теорему:

Теорема 3.3. *Пусть D_1 — замкнутая область, $D_1 \subset \bar{D}\setminus\Gamma_0$, расстояние которой до Γ_0 равно δ, $\delta>0$. Тогда для любого решения задачи* (24), *принадлежащего $C^{(n,\mu)}$ в $\bar{D}\setminus\Gamma_0$ и непрерывного в $\bar{D}$, справедлива оценка*

$$\delta^{n+\mu} U_{n,\mu}(D_1) = O\{U_0(\bar{D}) + F_0 + F_{n-2,\mu} + \Phi_{n,\mu}(\Gamma_1)\}, \quad (3.40)$$

где O зависит от тех же величин, что и в теореме 2. В частности, если $\Gamma_0=\Gamma$, а Γ_1 пусто, то для любого решения задачи (24) *непрерывного в $\bar{D}$ и принадлежащего $C^{(n,\mu)}$ в D, справедлива оценка*

$$\delta^{n+\mu} U_{n,\mu}(D_1) = O\{U_0(\bar{D}) + F_0 + F_{n-2,\mu}\}, \quad (3.41)$$

$\delta>0$ — расстояние от D_1 до границы Γ. Требования гладкости на область, коэффициенты оператора L, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ те же, что и в теореме 2.

При изучении ряда задач бывает важно знать, при каких условиях в оценках (39), (40) и (41) можно из правой части исключить член $U_0(\bar{D})$.

Теорема 3.4. *Для всякого регулярного**) *решения $u(x)$ задачи* (24) *справедлива оценка*

$$U_0 = O\{\Phi_0 + F_0\}, \quad (3.42)$$

при условии, что коэффициент $c(x) \leqslant 0$ в $\bar{D}$. Эта оценка равномерна относительно любого семейства эллиптических операторов с ограниченными значениями A_0, B_0, C_0 и $1/\alpha$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \bar{D}$ — точка, в которой $u(x)$ достигает абсолютного максимума. Если $x_0 \in \Gamma$, то $|u(x_0)| = |\varphi(x_0)|$ и оценка (42) имеет место. Если же $x_0 \in D$, то рассмотрим два случая.

1. $c(x) < 0$ в $\bar{D}$. Пусть в точке x_0 $u(x)$ принимает наибольшее положительное значение, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \leqslant 0$$

(см. гл. 1), поэтому

---

*) Т. е. $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(\bar{D})$, см. гл. 1.

$$Lu(x_0) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x_0)u(x_0) = f(x_0),$$

и

$$c(x_0)u(x_0) \geqslant f(x_0), \quad \text{т. е.} \quad u(x_0) \leqslant \frac{f(x_0)}{c(x_0)}. \tag{3.43}$$

В случае отрицательного минимума точно так же имеем

$$u(x_0) \geqslant \frac{f(x_0)}{c(x_0)}. \tag{3.44}$$

И из (43) и (44) получим

$$U_0 \leqslant \frac{F_0}{\min\limits_{x\in\bar{D}}|c(x)|}. \tag{3.45}$$

Объединяя (45) с оценкой для случая, когда $x_0 \in \Gamma$, получим

$$U_0 \leqslant \Phi_0 + \frac{F_0}{\min\limits_{x\in\bar{D}}|c(x)|}. \tag{3.46}$$

2. $c(x) \leqslant 0$ в $\bar{D}$. Полагаем $u = vw$ и подставляем в уравнение $Lu = f$. Тогда в уравнении для v коэффициент при v равен Lw; выберем w так, чтобы всюду в $\bar{D}$ было $Lw < -1$. В качестве w можно, как в теореме 1.1.2, взять функцию $w(x) = e^{-k\rho^2} - e^{-kr_{xy}^2}$, $x \in \bar{D}$, где $\rho > 0$ столь велико, что шар $K(y, \rho)$ с центром в точке $y \notin \bar{D}$ содержит область $\bar{D}$ внутри себя. Если A_0, B_0, C_0 и $1/\alpha$ ограничены, то при достаточно большом $k > 0$ $Lw < -1$ в $\bar{D}$. Для функции $v(x)$ мы получим оценку (46), а так как $u(x) = v(x)w(x)$ и $w(x)$ ограничено, то

$$U_0 = O(\Phi_0 + F_0). \blacksquare \tag{3.47}$$

§ 4. Разрешимость задачи Дирихле в классах Гельдера

Рассмотрим в ограниченной области D с границей Γ задачу Дирихле для эллиптического оператора L:

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в области } D, \\ u = \varphi & \text{на границе } \Gamma. \end{cases} \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Если $(D + \Gamma) \in A^{(n,\mu)}$, коэффициенты оператора L принадлежат $C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$, $f(x) \in C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$, $\varphi(x) \in C^{(n,\mu)}(\Gamma)$, $n \geqslant 2$ — любое целое и коэффициент $c(x) \leqslant 0$ в $\bar{D}$,* *то задача Дирихле* (1) *имеет, и притом единственное, решение из класса* $C^{(n,\mu)}(\overline{D})$.

Доказательство. Для доказательства теоремы применим так называемый метод продолжения по параметру. Пусть сперва $\varphi\equiv 0$. Введем параметр t, $0\leqslant t\leqslant 1$, и рассмотрим семейство операторов

$$L_t = (1-t)\Delta + tL. \tag{4.2}$$

Очевидно, все операторы L_t, $0\leqslant t\leqslant 1$, равномерно эллиптичны в $\overline{D}$, ибо

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{(t)}(x)\xi_i\xi_j \geqslant [1-t+t\alpha]\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \geqslant \min\{\alpha,\ 1\}\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2.$$

Обозначим через τ множество тех $t\in[0,\ 1]$, для которых разрешима задача Дирихле

$$\begin{cases} L_t u = f & \text{в}\quad D,\\ u=0 & \text{на}\quad \Gamma\end{cases} \tag{4.3}$$

в классе $C^{(n,\mu)}(\overline{D})$ при любой $f\in C^{(n-2,\mu)}(\overline{D})$. Множество τ не пусто, ибо, как легко видеть, из лемм 2.4 и 2.5 вытекает разрешимость задачи Дирихле для оператора Лапласа в классе $C^{(n,\mu)}$; итак, $t=0\in\tau$. Покажем, что τ одновременно открыто и замкнуто (относительно $[0,\ 1]$), и поэтому $\tau=[0,\ 1]$. Тем самым будет доказано, что однородная задача Дирихле имеет решение из класса $C^{(n,\mu)}$ и при $t=1$, т. е. для оператора $L_1=L$.

1. τ — открыто. Пусть $t_0\in\tau$, решение $u(x)\in C^{(n,\mu)}(\overline{D})$ задачи $L_{t_0}u=f$, $u|_\Gamma=0$ представим в виде $u=Mf$ (так как $c(x)\leqslant 0$, то решение единственно).

Введем в классе $C^{(k,\mu)}=C^{(k,\mu)}(\overline{D})$ норму по формуле

$$\|u\|_{k,\mu}=U_{k,\mu}+U_0. \tag{4.4}$$

Класс $C^{(k,\mu)}$ с нормой (4) становится банаховым пространством; сохраним для него обозначение $C^{(k,\mu)}$. Введенный выше оператор M есть линейный оператор из $C^{(n-2,\mu)}$ в $C^{(n,\mu)}$. В силу априорной оценки Шаудера и теоремы 3.4

$$\|Mf\|_{n,\mu}\leqslant C_1\|f\|_{n-2,\mu}. \tag{4.5}$$

Уравнение $L_{t_0+\varepsilon}u=f$ можно записать в виде $L_{t_0}u=f+\varepsilon(\Delta-L)u$, поэтому решение задачи Дирихле

$$L_{t_0+\varepsilon}u=f,\ u|_\Gamma=0$$

эквивалентно (в силу теоремы единственности) решению функционального уравнения

$$u = Mf + \varepsilon M(\Delta - L)u. \tag{4.6}$$

Линейный оператор $H = M(\Delta - L)$ отображает $C^{(n,\mu)}$ в себя, ибо оператор $(\Delta - L)$ переводит $C^{(n,\mu)}$ в $C^{(n-2,\mu)}$, причем, очевидно,

$$\|(\Delta - L)u\|_{n-2,\mu} \leqslant C_2 \|u\|_{n,\mu}, \tag{4.7}$$

а оператор M, как указано выше, действует из $C^{(n-2,\mu)}$ в $C^{(n,\mu)}$. Оператор H ограничен, так как в силу (5) и (7) имеем

$$\|H\| = \sup_u \frac{\|Hu\|_{n,\mu}}{\|u\|_{n,\mu}} \leqslant \sup_u \frac{C_1 \|(\Delta - L)u\|_{n-2,\mu}}{\|u\|_{n,\mu}} \leqslant C_1 C_2 < \infty. \tag{4.8}$$

Уравнение (6) запишем теперь в виде

$$(1 - \varepsilon H)u = Mf. \tag{4.9}$$

Уравнение (9), как известно, имеет при $|\varepsilon| < 1/\|H\|$ решение в виде ряда Неймана

$$u = (1 - \varepsilon H)^{-1} Mf = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n H^n (Mf), \tag{4.10}$$

таким образом, множество τ вместе с точкой t_0 содержит интервал $(t_0 - \varepsilon,\ t_0 + \varepsilon)$ при достаточно малом ε, $(|\varepsilon| < 1/\|H\|)$, т. е. τ открыто.

2. τ — замкнуто. Пусть $\{t_k\} \in \tau$ и $t_k \to t_0$ при $k \to \infty$; надо доказать, что $t_0 \in \tau$. Обозначим через $u_k(x)$ решение задачи

$$\begin{cases} L_{t_k} u_k = f & \text{в} \quad D, \\ u_k = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{4.11}$$

В силу оценки Шаудера

$$\|u_k\|_{n,\mu} \leqslant C_1 \|f\|_{n-2,\mu} = C_3. \tag{4.12}$$

Таким образом, последовательность $\{u_k(x)\}$ ограничена в норме $C^{(n,\mu)}$, значит, она компактна в любом $C^{(n,\mu')}$ с $\mu' < \mu$ (достаточно применить теорему Арцела к $\{u_k(x)\}$ и ее производным до порядка n). Чтобы не вводить новых обозначений, считаем, что сама последовательность $\{u_k(x)\}$ сходится к некоторой функции $u_0(x)$, $u_k(x) \xrightarrow[C^{(n,\mu')}]{} u_0(x)$ при $k \to \infty$.

Так как $u_k(x)$ сходится к $u_0(x)$ равномерно вместе со всеми производными до порядка n, то переходя к пределу в формуле, определяющей коэффициент Гельдера n-ной производной и пользуясь (12), заключаем, что $u_0(x) \in C^{(n,\mu)}$. Переходя к пределу при $k\to\infty$ в задаче (11), видим, что $u_0(x)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} L_{t_0}u=f & \text{в} \quad D, \\ u_0=0 & \text{на } \Gamma, \end{cases} \tag{4.13}$$

т. е. $t_0\in\tau$, и τ замкнуто. Итак, в случае однородного краевого условия теорема доказана.

Пусть теперь $u|_\Gamma=\varphi$. Обозначим через $w(x)$ решение из $C^{(n,\mu)}$ задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta w=0 & \text{в} \quad D, \\ w=\varphi & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.14}$$

Как было указано выше, такое решение существует. Если $v(x)\in C^{(n,\mu)}$ — решение следующей задачи с нулевым граничным условием:

$$\begin{cases} Lv=f_1, & \text{где} \quad f_1=f-Lw \quad \text{в} \quad D, \\ v=0, & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{4.15}$$

(оно, по доказанному выше, существует), то функция $u(x)=v(x)+w(x)$ есть единственное (ибо $c(x)\leqslant 0$) решение задачи (1) из класса $C^{(n,\mu)}(\overline{D})$. ■

Замечание 4.1. Пусть граничная функция $\varphi(x)$ лишь непрерывна на Γ. Возьмем последовательность $\varphi_k(x)\in C^{(n,\mu)}(\Gamma)$, $k=1, 2, \ldots$, равномерно на Γ, сходящуюся к $\varphi(x)$. Пусть $u_k(x)$ — решение из пространства $C^{(n,\mu)}$ задачи Дирихле:

$$\begin{cases} Lu_k=f & \text{в} \quad D, \\ u_k=\varphi_k & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{4.16}$$

В силу принципа максимума последовательность $\{u_k(x)\}$ равномерно в $\overline{D}$ сходится *) к некоторой функции $u(x)\in C^{(0)}(\overline{D})$, $u|_\Gamma=\varphi(x)$. По теореме 3.3 для любой замкнутой подобласти $D_1\subset D$ справедливо неравенство

$$\|u_k-u_m\|_{n,\mu}\leqslant C\max_{x\in\overline{D}}|u_k(x)-u_m(x)|,$$

для всех m и k. Отсюда следует, что предельная функция $u(x)\in C^{(n,\mu)}$ в открытой области D и $Lu=f$.

Мы доказали теорему существования решения задачи Дирихле для случая, когда коэффициент $c(x)$ при свободном члене в операторе L неположителен в области D. Рассмотрим

---

*) Разность $\psi=u_n-u_m$ есть решение задачи: $\left.\begin{matrix} L\psi=0 \quad \text{в} \quad D, \\ \psi=\varphi_n-\varphi_m \quad \text{на } \Gamma. \end{matrix}\right\}$

теперь общий случай. Введем понятие сопряженного оператора. Пусть коэффициенты оператора L

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \qquad (4.17)$$

принадлежат в области D классам: $a_{ij} \in C^{(2)}$, $b_i \in C^{(1)}$, тогда оператор L можно записать в виде

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^{N} e_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu, \qquad (4.18)$$

где

$$e_i = b_i - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \qquad (4.19)$$

и определить сопряженный (формально) для L оператор $\widetilde{L}$ по формуле

$$\widetilde{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} (e_i u) + cu, \qquad (4.20)$$

или

$$\widetilde{L}u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} u) - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) + cu. \qquad (4.21)$$

Если $L = \widetilde{L}$, то оператор L называется (формально) самосопряженным. Необходимым и достаточным условием самосопряженности оператора L является обращение в нуль всех функций $e_i(x)$.

Запишем равенство

$$vLu - u\widetilde{L}v = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[a_{ij} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right] + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} (e_i uv). \qquad (4.22)$$

Отсюда, если $(D + \Gamma) \in A^{(1)}$, с помощью интегрирования по частям получим вторую формулу Грина

$$\int_D [vLu - u\widetilde{L}v]\, dx = \int_\Gamma \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) + buv \right] ds, \qquad (4.23)$$

где $b(x) = \sum_{i=1}^{N} e_i(x) \cos(n, x_i)$, n — внешняя нормаль к Γ, а $\partial/\partial\nu$ — производная по конормали (см. гл. 1); $u, v \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}_{(\bar{D})}$.

Рассмотрим в области D с границей Γ задачу Дирихле

$$\begin{cases} Lu = f & \text{в} \quad D, \\ u = \varphi & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.24}$$

Сопряженной задачей Дирихле называется задача

$$\begin{cases} \tilde{L}v = g & \text{в} \quad D; \\ v = \psi & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{4.25}$$

Пусть $u(x)$ — решение задачи (24), а $v(x)$ — решение однородной (g, $\psi \equiv 0$) сопряженной задачи (25) и пусть $u, v \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$. Запишем для u и v вторую формулу Грина по области $(D+\Gamma)$, получим

$$\int_D fv\,dx + \int_\Gamma \varphi \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0. \tag{4.26}$$

Таким образом, выполнение равенства (26) для любого решения однородной сопряженной задачи (25) есть необходимое условие разрешимости задачи Дирихле (24). Если $c(x) \leqslant 0$ в D, то однородная сопряженная задача имеет только тривиальное решение и условие (26) выполнено при любых f и φ. Если $c(x)$ имеет любой знак, то однородная сопряженная задача может иметь (как и для оператора Лапласа) не только тривиальное решение, и задача Дирихле (24) может оказаться не разрешимой. Метод априорных оценок Шаудера позволяет в этом случае доказать теорему об альтернативе.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1, *кроме условия $c(x) \leqslant 0$. Тогда для задачи Дирихле* (24) *справедлива следующая альтернатива: либо соответствующая однородная задача (f, $\varphi \equiv 0$) имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ и тогда, каковы бы ни были f и φ, задача* (24) *имеет и притом единственное решение из класса $C^{(n,\mu)}(\bar{D})$, либо однородная задача имеет p линейно-независимых решений $u_1, \ldots, u_p$ и тогда задача* (24) *разрешима только в том случае, когда выполнены p дополнительных условий (обращение в нуль некоторых функционалов от f и φ). Если эти условия выполнены, то задача* (24) *имеет бесчисленное множество решений и если $\bar{u}$ — одно из них, то общее решение имеет вид $\bar{u}(x) + \sum_{i=1}^{p} c_i u_i(x)$, c_i — произвольные постоянные.*

Доказательство. Введем оператор L_0 по формуле $L_0 u = Lu - cu$. Тогда задача (24) может быть записана в виде

$$\begin{cases} L_0 u = f - cu & \text{в} \quad D, \\ u = \varphi & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.27}$$

Ищем решение задачи (27) в виде $u(x)=u_0(x)+u_1(x)$, где $u_0(x)$ — решение следующей задачи:

$$\begin{cases} L_0u_0=f & \text{в} \quad D, \\ u_0=\varphi & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases} \tag{4.28}$$

Такая функция $u_0(x)\in C^{(n,\mu)}$ существует в силу теоремы 1, ибо у оператора L_0 коэффициент при свободном члене равен нулю. Функция $u_1(x)$ должна быть решением задачи

$$\begin{cases} L_0u_1=-cu & \text{в} \quad D, \\ u_1=0 & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{4.29}$$

где $u=u_0+u_1$. Воспользовавшись введенным при доказательстве теоремы 1 оператором M, мы можем заменить задачу (29) эквивалентным функциональным уравнением $u_1=-M(cu)$, откуда, прибавляя к обеим частям функцию $u_0(x)$, получим уравнение:

$$u+M(cu)=u_0, \tag{4.30}$$

M — линейный оператор из $C^{(n-2,\mu)}$ в $C^{(n,\mu)}$. Рассмотрим уравнение (30) в банаховом пространстве $C^{(n-2,\mu)}(\bar{D})$. В силу оценок Шаудера $M(cu)$ вполне непрерывный оператор в $C^{(n-2,\mu)}$, ибо если $v=M(cu)$, то

$$\|v\|_{n,\mu}\leqslant C_1\|u\|_{n-2,\mu}, \tag{4.31}$$

т. е. он переводит ограниченное множество из $C^{(n-2,\mu)}$ в компактное. Таким образом, для уравнения (30) в силу теоремы Рисса справедлива альтернатива Фредгольма (см. [17]). Так как $u_0\in C^{(n,\mu)}$, то решения уравнения (30) принадлежат $C^{(n,\mu)}(\bar{D})$. ∎

Замечание 4.2. Недостатком теоремы 2 является то, что примененный в доказательстве метод Рисса не позволяет уточнить вид линейных функционалов, участвующих в дополнительных условиях. Это можно сделать (как для оператора Лапласа) с помощью теории потенциалов и интегральных уравнений. Сформулируем результат: пусть выполнены условия теоремы 2 для L и $\tilde{L}$, тогда однородная задача Дирихле (24) и сопряженная однородная задача имеют одинаковое число линейно независимых решений (нуль или положительное конечное число). Если однородная задача имеет p линейно независимых решений, то условия разрешимости неоднородной задачи имеют вид

$$\int\limits_D f(x)\,v_i(x)\,dx+\int\limits_\Gamma \varphi(x)\,\frac{\partial v_i}{\partial \nu}\,ds=0, \tag{4.32}$$

где $v_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, p$, — решения однородной сопряженной задачи (см. [1]).

По поводу оценок Шаудера и проблемы разрешимости для других краевых задач см. [11, гл. 3].

§ 5. Некоторые приложения оценок Шаудера

1°. Задача с разрывными коэффициентами. Задача с разрывными коэффициентами (задача дифракции) в простейшем варианте ставится так:

Пусть задана открытая N-мерная область D с границей Γ и внутри нее $(N-1)$-мерная геометрически замкнутая поверхность Γ_1, разбивающая область D на подобласти D_1 и D_2. Рассмотрим в области $(D+\Gamma)$ следующую задачу:

$$\begin{cases} L_1 u = f_1 & \text{в} \quad D_1, \\ L_2 u = f_2 & \text{в} \quad D_2, \\ [u]\Big|_{\Gamma_1} = \varphi, \quad \left[\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right]\Big|_{\Gamma_1} = \psi, & \bar{u}|_\Gamma = \chi, \end{cases} \tag{5.1}$$

здесь

$$L_l u = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{(l)} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i^{(l)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + c^{(l)} u, \tag{5.2}$$

определенный в области D_l линейный эллиптический оператор,

$$c^{(l)} \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D_l, \quad [u]|_{\Gamma_1} \equiv u(x)|_{x\to\Gamma_1-0} - u(x)|_{x\to\Gamma_1+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\Big|_{\Gamma_1} \equiv \frac{\partial u}{\partial \nu_1}\Big|_{x\to\Gamma_1-0} + \frac{\partial u}{\partial \nu_2}\Big|_{x\to\Gamma_1+0},$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_l} = \frac{1}{a^{(l)}(x)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{(l)}(x) \cos(n_l, x_j) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

n_l — внешняя нормаль к Γ_1 по отношению к области D_l, $l = 1, 2$. Пусть $(D_1 + \Gamma_1) \in A^{(1)}$, $a_{ij}^{(l)}$, $b_i^{(l)}$, $c^{(l)} \in C^{(0,\mu)}(\bar{D}_l)$.

Определение 5.1. *Решением задачи* (1) *с разрывными коэффициентами называется функция* $u(x)$, *которая удовлетворяет следующим условиям*:

1) $u(x) \in C^{(1)}$ *в областях* $(D_1+\Gamma_1)$ *и* $(D_2+\Gamma_1)$,

2) $u(x) \in C^{(2)}$ *в* D_1 *и* D_2,

3) $u(x)$ *удовлетворяет всем условиям* (1) *в классическом смысле.*

Нашей целью является установление априорной оценки максимума модуля решения задачи (1).

Рассмотрим вначале задачу (1) при f_1, f_2, φ, $\chi \equiv 0$, а затем общий случай сведем к этому частному. Итак, имеем задачу

$$
\begin{cases}
L_1 v = 0 & \text{в} \quad D_1, \\
L_2 v = 0 & \text{в} \quad D_2, \\
[v]\Big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left[\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right]\Big|_{\Gamma_1} = k(x), & v|_\Gamma = 0.
\end{cases} \tag{5.3}
$$

Мы докажем, что для любого решения задачи (3) справедлива оценка

$$
V_0 = O(K_0). \tag{5.4}
$$

Лемма 5.1. *Пусть G — произвольная область с границей γ, $(G+\gamma)\in A^{(2,\mu)}$, а L — эллиптический оператор вида (2). Если $c(x)\leqslant 0$ и $c(x)\not\equiv 0$ в G, то существует функция $\zeta(x)$, удовлетворяющая двум требованиям:*

1) $\zeta\in C^{(2,\mu)}(\bar G)$ *и* $L\zeta = 0$ *в* G,

2) $\zeta(x)\Big|_\Gamma = \text{const} > 0$ *и* $\dfrac{\partial\zeta}{\partial\nu}\Big|_\Gamma > 1$.

Доказательство. Рассмотрим в области $(G+\gamma)$ задачу Дирихле

$$
\begin{cases}
L\bar\zeta = 0 & \text{в} \quad G, \\
\bar\zeta = 1 & \text{на} \quad \gamma.
\end{cases} \tag{5.5}
$$

Так как $(G+\gamma)\in A^{(2,\mu)}$ и граничная функция $\in C^{(2,\mu)}$ на γ, то по теореме 4.1 решение $\bar\zeta(x)\in C^{(2,\mu)}(\bar G)$ задачи (5) существует и единственно. Поскольку $c(x)\not\equiv 0$, то $\bar\zeta(x)\not\equiv \text{const}$; в силу принципа максимума (теорема 1.1.3) $|\bar\zeta(x)| < 1$ при $x\in G$. По теореме Жиро (теорема 1.1.4) $\dfrac{\partial\bar\zeta}{\partial\nu} > 0$ всюду на γ и, так как $\dfrac{\partial\bar\zeta}{\partial\nu}$ непрерывна на γ, найдется такое $\alpha > 0$, что $\dfrac{\partial\bar\zeta(x)}{\partial\nu} > \alpha$ для всех $x\in\gamma$. Полагая $\zeta(x) = \dfrac{1}{\alpha}\bar\zeta(x)$, получим искомую функцию.

Теорема 5.1. *Пусть коэффициенты операторов L_l принадлежат $C^{(0,\mu)}$ в области $\bar D_l$, $c^{(l)}(x)\leqslant 0$ $(l=1, 2)$, $(D_1+\Gamma_1)\in A^{(2,\mu)}$. Тогда для любого решения $v(x)$ задачи (3) справедлива оценка*

$$
\max_{x\in\bar D}|v(x)| \leqslant C\max_{x\in\Gamma_1}|k(x)|. \tag{5.6}
$$

Доказательство. Пусть $c^{(1)}(x)\not\equiv 0$ в D_1 (другие случаи рассматриваются аналогично). Так как $[v]|_{\Gamma_1} = 0$, то $v(x)$ непрерывна в области $\bar D$, пусть $x_0\in\bar D$ — точка, в которой $v(x)$ достигает абсолютного максимума. Рассмотрим $v(x)$ как регулярное решение уравнения $L_l v=0$ в области D_l, $l=1, 2$: В силу принципа максимума $x_0 \in \Gamma_1$, ибо на Γ $v(x)=0$. Для определенности будем считать, что $v(x)$ достигает в точке x_0 положительного максимума. Рассмотрим в области $(D_1+\Gamma_1)$ функцию $\sigma_1(x)=K_0\zeta(x)-v(x)$, $K_0=\max\limits_{x\in\Gamma_1}|k(x)|$, а $\zeta(x)$ — функция из леммы для области $(D_1+\Gamma_1)$. Докажем, что $\sigma_1 \geqslant 0$ в $\bar{D}_1$. Допустим противное, т. е. что в некоторой точке $x_1 \in \bar{D}_1$ $\sigma_1(x_1)<0$. Поскольку $L_1\sigma_1=L_1(K_0\zeta-v)=0$, то отрицательный минимум функции $\sigma_1(x)$ достигается на Γ_1. $\zeta(x)=\mathrm{const}$ на Γ_1, следовательно, отрицательный минимум $\sigma_1(x)$ достигается в точке x_0. По теореме Жиро $\frac{\partial v}{\partial \nu_1}(x_0)>0$. Из условия $[v]|_{\Gamma_1}=0$ и того, что $v(x)$ принимает в точке x_0 максимальное положительное значение в области $\bar{D}_2$, снова по теореме Жиро следует, что $\frac{\partial v}{\partial \nu_2}(x_0)>0$.

Согласно (3)

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_1}(x_0)+\frac{\partial v}{\partial \nu_2}(x_0)=k(x_0),$$

откуда

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_1}(x_0)<k(x_0)\leqslant K_0.$$

Функция $\sigma_1(x)\not\equiv\mathrm{const}$ в $\bar{D}_1$ и достигает в точке $x_0\in\Gamma_1$ отрицательного минимума; по теореме Жиро имеем в точке x_0

$$\frac{\partial \sigma_1(x_0)}{\partial \nu_1}=K_0\frac{\partial \zeta(x_0)}{\partial \nu_1}-\frac{\partial v(x_0)}{\partial \nu_1}<0,$$

что невозможно ввиду того, что $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu_1}>1$ и $\frac{\partial v}{\partial \nu_1}(x_0)<K_0$. Мы пришли к противоречию; итак, $\sigma_1(x)\geqslant 0$ в $\bar{D}_1$, т. е. $K_0\zeta(x)\geqslant v(x)$ всюду в области $(D_1+\Gamma_1)$ и, в частности, в точке x_0. Так как $|\zeta(x)|\leqslant C$, то отсюда получаем (6). ∎

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает единственность решения задачи (1) и устойчивость решения относительно изменения функции $\psi(x)$.

Для получения оценки максимума модуля решения задачи (1) поступим следующим образом. Обозначим через $w(x)$ функцию, равную

$$w(x)=\begin{cases} w_1(x) & \text{в } D_1, \\ w_2(x) & \text{в } D_2, \end{cases} \tag{5.7}$$

где $w_1(x)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} L_1 w_1=f_1 & \text{в } D_1, \\ w_1=\varphi & \text{на } \Gamma_1, \end{cases} \tag{5.8}$$

а $w_2(x)$ — решение задачи

$$\begin{cases} L_2 w_2 = f_2 \quad \text{в} \quad D_2, \\ w_2 = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ и } w_2 = \chi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.9}$$

Представляя решение $u(x)$ задачи (1) в виде $u(x)=v(x)+w(x)$, для $v(x)$ получим задачу (3). Оценка U_0 теперь легко следует из теорем 3.4, 5.1 и оценки Шаудера для первых производных функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$.

2°. **Оценки в замкнутой области собственных функций и их производных для самосопряженного оператора.** Пусть в открытой N-мерной области D с границей Γ задан эллиптический оператор L с непрерывными коэффициентами

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu. \tag{5.10}$$

Обозначим через $\bar{A}_{ij}(x)$ алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}(x)$, через $A(x)=\det\|a_{ij}(x)\|$, через $A_{ij}(x)=\bar{A}_{ji}(x)/A(x)$ — элементы обратной матрицы. Рассмотрим так называемую *«функцию сравнения»* $H(x, y)$

$$H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(N-2)\,\omega_N \sqrt{A(y)}} \left[\sum\limits_{i,j=1}^{N} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right]^{(2-N)/2}, \\ \hfill N > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi \sqrt{A(y)}} \ln \left[\sum\limits_{i,j=1}^{N} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right]^{-1/2}, N = 2. \end{cases} \tag{5.11}$$

В дальнейшем считаем, что $N>2$, двумерный случай будет рассмотрен особо.

Из положительной определенности квадратичной формы $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j$ и формулы (11) сразу следуют оценки, равномерные по x и $y \in \bar{D}$

$$H(x, y) = O(r_{xy}^{2-N}), \quad \frac{\partial H}{\partial x_i} = O(r_{xy}^{1-N}), \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = O(r_{xy}^{-N}). \tag{5.12}$$

Также из определения функции $H(x, y)$ вытекает равенство

$$\sum_{k,l=1}^{N} a_{kl}(y) \frac{\partial^2 H}{\partial x_k \partial x_l} = 0, \quad x \neq y. \tag{5.13}$$

Если коэффициенты $a_{ij} \in C^{(1)}(\bar{D})$, то из (12) и (13) получим оценку

$$L_x H(x, y) = O(r_{xy}^{1-N}), \quad x, y \in \bar{D}, \tag{5.14}$$

ибо в силу (13)

$$L_x H(x, y) = \sum_{i,j} [a_{ij}(x) - a_{ij}(y)] \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial H}{\partial x_i} + cH,$$

и (14) следует из оценок (12), так как $|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| = O(r_{xy})$.

Пусть теперь L — (формально) самосопряженный оператор:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x) u, \tag{5.15}$$

а его коэффициенты a_{ij} и c принадлежат классам: $a_{ij} \in C^{(1)}(\bar{D})$, $c \in C^{(0)}(\bar{D})$. Пусть область $(D + \Gamma) \in A^{(1)}$, применим вторую формулу Грина (см. (4.23)) к двум функциям $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ и $H(x, y)$, получим

$$u(y) = \int_D (uL_x H - HLu)\, dx + \int_\Gamma \left(H \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial H}{\partial \nu_x} \right) ds_x. \tag{5.16}$$

Формула (16) устанавливается обычным образом: надо вырезать малую окрестность точки y, определяемую неравенством $\sum_{i,j=1}^{N} A_{ij}(y)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \leqslant \rho^2$ и затем устремить ρ к нулю.

С помощью интегрирования по частям получим первую формулу Грина:

$$\int_D vLu\, dx + \int_D \left[\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - cuv \right] dx = \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds, \tag{5.17}$$

здесь предположения относительно функции u те же, что и в формуле (16), а $v(x) \in C^{(1)}(\bar{D})$ или $v \in W_2^1(D)$.

Рассмотрим в области D задачу на собственные функции

$$\begin{cases} Lu + \lambda u = 0 & \text{в} \quad D, \\ u = 0 & \text{на} \quad \Gamma, \end{cases} \tag{5.18}$$

L — оператор (15), $c(x) \leqslant 0$.

Различают классическую и обобщенную постановку задачи (18).

Определение 5.2. *Классической собственной функцией задачи* (18) *называют такую не равную тождественно нулю функцию* $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(0)}(\bar{D})$, *которая равна нулю на* Γ *и при некотором* λ *удовлетворяет в* D *уравнению* $Lu+\lambda u=0$.

Определение 5.3. *Обобщенной собственной функцией задачи* (18) *называют такую не эквивалентную нулю функцию* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, *которая при некотором* λ *удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_D \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_j} - cu\psi - \lambda u\psi\right] dx = 0 \qquad (5.19)$$

для любой $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$.

Те значения λ, *для которых существуют собственные функции, называются собственными значениями задачи* (18).

Имеют место два утверждения:

Теорема 5.2. *Если* D — *произвольная связная область, а коэффициенты* $a_{ij}(x)$ *и* $c(x)$ *оператора* L *ограничены и измеримы, то существует полная ортонормированная система обобщенных собственных функций задачи* (18).

Эта теорема доказывается вариационным методом, подобно тому как в гл. 2 доказано существование обобщенного из W_2^1 решения задачи Дирихле (см: [22]).

Теорема 5.3. *Пусть* D — *произвольная нормальная* *) *область, содержащаяся вместе с границей* Γ *в некоторой открытой области* D_1 *и пусть коэффициенты оператора* L *принадлежат в* D_1 *классам* $a_{ij} \in C^{(1,\mu)}$, $c \in C^{(0,\mu)}$, $0 < \mu \leqslant 1$. *Тогда*

1) *существует полная ортонормированная система классических собственных функций задачи* (18);

2) *системы классических и обобщенных собственных функций, а также соответствующие системы собственных чисел совпадают.*

Первое утверждение этой теоремы доказывается с помощью построения функции Грина задачи Дирихле для оператора L в нормальной области D и сведения задачи на собственные функции (9) к эквивалентному интегральному уравнению. Второе утверждение доказывается вполне аналогично тому, как было доказано в гл. 2 § 4 совпадение классического и обобщенного решения задачи Дирихле для оператора Лапласа (см. [23]).

Приступим к выводу оценки собственных функций. Пусть выполнены условия теоремы 3. Эти условия обеспечивают существование полной ортонормированной системы классических собственных функций, которые являются одновременно

*) Определение нормальной области см. гл. 2, § 1.

обобщенными собственными функциями задачи (18), т. е. всякая собственная функция $\in C^{(0)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D) \cap \overset{\bullet}{W}{}_2^1(D)$.

Докажем, что если $u_n(x)$ — любая собственная функция задачи (18), а $y \in D$ — любая точка, то справедлива формула

$$u_n^2(y) = \int\limits_D H(x, y) \left\{2\lambda_n u_n^2 - \left[2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - cu_n^2\right]\right\} dx + \\ + \int\limits_D u_n^2 L_x H(x, y)\, dx. \tag{5.20}$$

Пусть $\{D_m\}$ — винеровская аппроксимация области D, $(D_m + \Gamma_m) \subset D$, $(D_m + \Gamma_m) \in A^{(1,\mu)}$. Применим формулу (16) к функции $u_n^2(x)$ по области $(D_m + \Gamma_m)$, получим

$$u_n^2(y) = \int\limits_{D_m} H(x, y) \left\{2\lambda_n u_n^2 - \left[2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - cu_n^2\right]\right\} dx + \\ + \int\limits_{D_m} u_n^2 L_x H(x, y)\, dx + 2\int\limits_{\Gamma_m} H(x, y)\, u_n \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x - \int\limits_{\Gamma_m} u_n^2 \frac{\partial H(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x, \tag{5.21}$$

ибо

$$Lu_n^2 = 2\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}u_n\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right) + cu_n^2 = \\ = -2\lambda_n u_n^2 + \left[2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial u_n}{\partial x_j} - cu_n^2\right] \tag{5.22}$$

и $y \in D_m$ при $m > m_0(y)$. Устремим теперь в формуле (21) $m \to \infty$. Из условия $u_n \in W_2^1(D)$ и из оценок (12) и (13) следует, что интегралы по области D_m переходят в интегралы по области D. В силу оценки (12), непрерывности $u_n(x)$ в $\overline{D}$ и того, что $u_n(x) = 0$ на Γ, имеем

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Gamma_m} u_n^2(x) \frac{\partial H(x, y)}{\partial \nu_x} ds_x = 0. \tag{5.23}$$

Осталось доказать, что

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Gamma_m} u_n(x)\, H(x, y) \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds_x = 0. \tag{5.24}$$

Так как производные функции $u_n(x)$, вообще говоря, не являются непрерывными в $\bar{D}$, а лишь известно, что $u_n \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то неясно, существует ли вообще предел (24).

Лемма 5.2. *Для любой функции* $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ *существует предел*

$$\lim \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds = 0. \qquad (5.25)$$

Доказательство. Классическая собственная функция является одновременно обобщенной, поэтому для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ имеем в силу (19)

$$\int_D \left\{ \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - c u_n v \right] - \lambda_n u_n v \right\} dx = 0.$$

u_n и $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, отсюда

$$\lim_{m\to\infty} \int_{D_m} \left\{ \left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} - c u_n v \right] - \lambda_n u_n v \right\} dx = 0.$$

Интеграл от квадратной скобки преобразуем с помощью формулы (17), получим

$$\lim_{m\to\infty} \left\{ - \int_{D_m} v [L u_n + \lambda_n u_n] dx + \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds \right\} = 0. \qquad (5.26)$$

Из $L u_n + \lambda_n u_n = 0$ и (26)

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\Gamma_m} v \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds = 0. \blacksquare \qquad (5.27)$$

Докажем с помощью этой леммы, что выполняется (24). Окружим точку y шаром $K \subset D$. $D_m \to D$, и все D_m при $m \geqslant m_1(K)$ содержат шар K. Вне шара K функция $H(x, y) u_n(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D \setminus K)$. На поверхности ∂K $H(x, y) u_n(x) \in C^{(2)}(\partial K)$. Если мы гладко продолжим функцию $H(x, y) u_n(x)$ внутрь шара, то полученная в результате этого продолжения функция $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ и совпадает вне шара K с $H(x, y) u_n(x)$. Применяя лемму к функции $v(x)$, получим (24). Таким образом равенство (20) доказано.

Теорема 5.4. *Пусть* $(D+\Gamma)$ — *произвольная ограниченная нормальная область, а коэффициенты оператора* L *определены в некоторой области* $D_1 \supset D$ *и принадлежат классам:*

$a_{ij} \in C^{(1,\mu)}(D_1)$, $c \in C^{(0,\mu)}(D_1)$; $c(x) \leqslant 0$. *Тогда для собственных функций задачи* (18) *справедлива равномерная в замкнутой области* $(D+\Gamma)$ *оценка*

$$\max_{x \in \bar{D}} |u_n(x)| = O(\lambda_n^{N/4}). \tag{5.28}$$

Доказательство. 1. Пусть размерность $N \geqslant 3$. Функция $u_n^2(x) \not\equiv 0$, непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и равна нулю на Γ, она достигает абсолютного максимума в некоторой внутренней точке y_n области D. Запишем формулу (20) для точки y_n:

$$u_n^2(y_n) = \int_D H(x, y_n) \left\{ 2\lambda_n u_n^2(x) - \left[2 \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} - c u_n^2 \right] \right\} dx +$$
$$+ \int_D u_n^2(x) L_x H(x, y_n)\, dx. \tag{5.29}$$

Функция сравнения $H(x, y_n)$ положительна в D и выражение, заключенное в квадратные скобки в (29), также положительно всюду в D ($c(x) \leqslant 0$!), следовательно, можно мажорировать правую часть в (29) следующим образом:

$$u_n^2(y_n) \leqslant 2\lambda_n \int_D H(x, y_n)\, u_n^2(x)\, dx + \int_D u_n^2(x)\, |L_x H(x, y_n)|\, dx. \tag{5.30}$$

Обозначим через C_0 константу, ограничивающую рост O-членов в формулах (12) и (14), и через K_n — шар радиуса $R_n = \frac{1}{2\sqrt{C_0 \omega_N \lambda_n}}$ с центром в точке y_n. Пусть, далее, $D' = D \cap K_n$, $D'' = D \setminus D'$. Каждый из интегралов в формуле (30) разобьем на сумму двух интегралов по областям D' и D'' и оценим:

$$\int_D u_n^2(x)\, |L_x H(x, y_n)|\, dx = \int_{D'} + \int_{D''}.$$

Используя оценку (14), нормированность собственной функции $u_n(x)$ и тот факт, что абсолютный максимум $u_n^2(x)$ достигается в точке $x = y_n$, получим

$$\int_{D'} u_n^2(x)\, |L_x H(x, y_n)|\, dx \leqslant C_0 u_n^2(y_n) \int_{D'} r_{xy_n}^{1-N} dx \leqslant$$
$$\leqslant C_0 u_n^2(y_n) \int_{K_n} r_{xy_n}^{1-N}\, dx = u_n^2(y_n)\, C_0 \omega_n R_n = u_n^2(y_n) \frac{\sqrt{C_0 \omega_N}}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{5.31}$$

$$\int_{D''} u_n^2(x)\,|L_x H(x, y_n)|\,dx \leqslant C_0 \int_{D''} u_n^2(x)\, r_{xy_n}^{1-N} dx \leqslant$$

$$\leqslant C_0 R_n^{1-N} \int_{D''} u_n^2(x)\,dx \leqslant C_0 R_n^{1-N} = 2^{N-1} C_0^{(N+1)/2} \omega_N^{(N-1)/2} \lambda_n^{(N-1)/2}. \tag{5.32}$$

Аналогично оценивается второй интеграл в формуле (30)

$$2\lambda_n \int_{D'} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\,dx \leqslant 2\lambda_n u_n^2(y_n)\, C_0 \int_{D'} r_{xy_n}^{2-N} dx \leqslant$$

$$\leqslant u_n^2(y_n)\, 2\lambda_n C_0 \frac{R_n^2}{2}\, \omega_N = \frac{u_n^2(y_n)}{4}, \tag{5.33}$$

$$2\lambda_n \int_{D''} H(x, y_n)\, u_n^2(x)\,dx \leqslant 2\lambda_n C_0 \int_{D''} r_{xy_n}^{2-N} u_n^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\lambda_n C_0 R_n^{2-N} \int_{D''} u_n^2(x)\,dx \leqslant 2\lambda_n C_0 R_n^{2-N} = 2^{N-1} C_0^{N/2} \omega_N^{(N-2)/2} \lambda_n^{N/2}. \tag{5.34}$$

Сопоставляя формулы (30) — (34), получим

$$u_n^2(y_n)\left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{C_0\omega_N}}{2}\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{N-1} C_0^{N/2} \omega_N^{(N-2)/2} \left[\lambda_n^{N/2} + \sqrt{C_0\omega_N}\, \lambda_n^{(N-1)/2}\right] \leqslant \frac{C_1^2}{2}\, \lambda_n^{N/2}, \tag{5.35}$$

при $\lambda_n > 1$, где $C_1^2 = 2^N C_0^{N/2} \omega_N^{(N-2)/2} [1 + \sqrt{C_0\omega_N}]$. Известно, что $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Конечное число собственных функций не влияет на устанавливаемую оценку (28), поэтому достаточно доказать ее, начиная с некоторого номера n_0. Выберем этот номер так, чтобы при $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{C_0\omega_N}}$. Отсюда и из (35) получим $u_n^2(y_n) \leqslant C_1^2 \lambda_n^{N/2}$ и

$$|u_n(y_n)| \leqslant C_1 \lambda_n^{N/4}. \tag{5.36}$$

2. Рассмотрим случай $N = 2$. Оценка (28) в двумерном случае устанавливается сведением задачи к уже изученному случаю $N = 4$. Пусть D_0 — произвольная двумерная нормальная область, лежащая вместе со своей границей Γ_0 в открытой области $\widetilde{D}$, и пусть коэффициенты оператора L_0 $a_{ij}^{(0)}(x)$ и $c^{(0)}(x)$ определены в $\widetilde{D}$ и принадлежат классам $a_{ij}^{(0)} \in C^{(1,\mu)}(\widetilde{D})$, $c^{(0)} \in C^{(0,\mu)}(\widetilde{D})$, и $c^{(0)} \leqslant 0$. Отвечающая оператору L_0 задача на собственные функ-

ции (18) имеет полную в $L_2(D_0)$ ортонормированную систему собственных функций $\{u_n^{(0)}(x)\}$ и систему собственных значений $\{\lambda_n^{(0)}\}$. Взяв прямые произведения $D_0 \times D_0$ и $\widetilde{D} \times \widetilde{D}$ областей D_0 и $\widetilde{D}$, получим четырехмерные области D и D_1, причем $D \subset D_1$. Область D является нормальной, в чем нетрудно убедиться с помощью «барьеров». Рассмотрим в области D задачу на собственные функции для оператора L следующего вида.

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)\,u, \tag{5.37}$$

где

$$a_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} a_{ij}^{(0)}(x_1, x_2) & \text{при } i, j = 1, 2, \\ a_{ij}^{(0)}(x_3, x_4) & \text{при } i, j = 3, 4, \\ 0 & \text{при других } i \text{ и } j, \end{cases}$$

а $c(x_1, x_2, x_3, x_4) = c^{(0)}(x_1, x_2) + c^{(0)}(x_3, x_4)$.

Ясно, что коэффициенты оператора L принадлежат в D_1 классам: $a_{ij} \in C^{(1,\mu)}(D_1)$, $c \in C^{(0,\mu)}(D_1)$ и $c(x) \leqslant 0$; так как область D — нормальна, то для собственных функций соответствующей оператору L задачи на собственные значения справедлива оценка (28). С другой стороны, всякая нормированная собственная функция u_{nm} этой задачи представляет собой произведение нормированных собственных функций $u_n^{(0)}$ и $u_m^{(0)}$

$$u_{nm}(x_1, x_2, x_3, x_4) = u_n^{(0)}(x_1, x_2)\, u_m^{(0)}(x_3, x_4), \tag{5.38}$$

а соответствующее собственное значение λ_{nm} равно

$$\lambda_{nm} = \lambda_n^{(0)} + \lambda_m^{(0)}. \tag{5.39}$$

Для всякой функции $u_{nm}(x)$, как уже указывалось, справедлива оценка (28), в частности, при $n = m$ и $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$ будем иметь

$$|u_n^{(0)}|^2 = |u_{nn}| \leqslant C_1 \lambda_{nn}^{N/4} = C_1 (2\lambda_n^{(0)})^{N/4} = 2C_1 \lambda_n^{(0)}, \quad N = 4. \tag{5.40}$$

Отсюда следует

$$|u_n^{(0)}| \leqslant \sqrt{2C_1}\,[\lambda_n^{(0)}]^{1/2}, \tag{5.41}$$

что совпадает с формулой (28) для двумерного случая. ∎

Переходим к установлению оценок для производных собственных функций и их коэффициентов Гельдера.

Теорема 5.5. *Если область $(D + \Gamma)$ принадлежит классу $A^{(k,\mu)}$, а функции $\frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_l}$ и $c(x)$ принадлежат классу $C^{(k-2,\mu)}$*

$(\bar{D})$ $(k \geqslant 2)$, *то собственные функции задачи* (18) *принадлежат в замкнутой области* $(D+\Gamma)$ *классу* $C^{(k,\mu)}$.

Доказательство. Условия теоремы обеспечивают существование полной системы классических собственных функций задачи (18), причем каждая собственная функция $u_n(x)$ имеет производные до второго порядка, непрерывные в области D, и является единственным решением задачи Дирихле:

$$\begin{cases} Lu = -\lambda_n u_n(x) & \text{в} \quad D, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.42}$$

Нетрудно видеть, что $u_n(x)$ и $f(x)=\lambda_n u_n(x)$ принадлежат*) классу $C^{(0,\mu)}(\bar{D})$. Это позволяет применить теорему 4.1 к задаче (42), в силу которой решение этой задачи (обозначим его через $u(x)$) существует, принадлежит $C^{(2,\mu)}(\bar{D})$ и является единственным решением из этого класса. Поэтому $u(x) = u_n(x) \in C^{(2,\mu)}(\bar{D})$ и $f(x)=\lambda_n u_n(x) \in C^{(2,\mu)}(\bar{D})$. Снова применим теорему 4.1 к задаче (42), имея уже в виду, что $f=\lambda_n u_n \in C^{(2,\mu)}(\bar{D})$, получим, что $u_n(x)$ и $f=\lambda_n u_n$ принадлежат $C^{(3,\mu)}(\bar{D})$, если $k=3$ и $C^{(4,\mu)}(\bar{D})$, если $k \geqslant 4$. Проводя далее (если $k>4$) подобные рассуждения, завершим доказательство теоремы.

Теорема 5.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда для собственных функций задачи* (18) *в замкнутой области* $\bar{D}$ *справедливы оценки*

$$U_{n;l} = O(\lambda_n^{N/4+l/2}), \quad 0 \leqslant l \leqslant k, \tag{5.43}$$

$$U_{n;l,\mu} = O(\lambda_n^{N/4+l/2+\mu/2}), \quad 0 \leqslant l \leqslant k. \tag{5.44}$$

здесь $U_{n;l}$ — *сумма максимумов модулей в области* $\bar{D}$ *всех производных порядка* l *собственной функции* $u_n(x)$.

Доказательство. Каждая собственная функция $u_n(x)$ есть решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} Lu_n = -\lambda_n u_n & \text{в} \quad D, \\ u_n = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.45}$$

Применим к задаче (45) теорему 3.2

$$U_{n;k,\mu} = O(\lambda_n U_{n;0} + \lambda_n U_{n;k-2,\mu} + U_{n;0}), \tag{5.46}$$

---

*) Этот факт следует из представления $u_n(x)$ как решения интегрального уравнения $u(x)=\lambda \int\limits_D G(x, y) u(y) dy$, $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле.

причем O не зависит от номера n собственной функции. Оценим в (46) $U_{n;k-2,\mu}$ с помощью интерполяционного неравенства (1.33) через $U_{n;k,\mu}$, получим

$$U_{n;k,\mu} = O\left(U_{n;0} + \lambda_n U_{n;0} + \lambda_n U_{n;0}^{2/(k+\mu)} U_{n;k,\mu}^{1-2/(k+\mu)}\right). \tag{5.47}$$

Отсюда с помощью неравенств (1.1) и (1.2) найдем

$$U_{n;k,\mu} = O\left(U_{n;0} + \lambda_n U_{n;0} + \lambda_n^{k+\mu/2} U_{n;0}\right). \tag{5.48}$$

Воспользовавшись теперь оценкой (28), получим из (48)

$$U_{n;k,\mu} = O\left(\lambda_n^{N/4+k/2+\mu/2}\right). \tag{5.49}$$

Наконец, из оценок (49) и (28) с помощью интерполяционных неравенств (1.32), (1.33) получим оценки (43) и (44). ■

3°. **Задача Дирихле для простейшего квазилинейного уравнения.** Пусть $F(p_{ij}, p_i, u, x)$ — произвольная функция, определенная при $x \in D$; $u, p_i, p_{ij} \in \mathbf{R}^1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ и непрерывно дифференцируемая в области определения. *Решение* $u(x)$ *нелинейного уравнения*

$$F(p_{ij}, p_i, u, x) = 0, \tag{5.50}$$

где $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $p_{ij} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ называется *эллиптическим в области* D, если квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \left(p_{ij}(x),\ p_i(x),\ u(x), x\right) \xi_i \xi_j \tag{5.51}$$

является положительно определенной в D. Если квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \left(p_{ij}, p_i, u, x\right) \xi_i \xi_j \tag{5.52}$$

является положительно определенной для всех $x \in D$ и для всех значений $u, p_i, p_{ij} \in \mathbf{R}^1$ $(i, j = 1, \ldots, N)$, то *уравнение* (50) называется *эллиптическим*.

Мы будем рассматривать эллиптические уравнения. Нетрудно видеть, что для уравнения (50) при условии $\partial F/\partial u \leqslant 0$ справедлив принцип максимума:

Теорема 5.7. *Если u и $\bar{u}$ — два решения эллиптического уравнения* (50), *для которого выполнено условие $\partial F/\partial u \leqslant 0$, то разность $v = u - \bar{u}$ не может иметь в точке $x \in D$ отрицательного минимума* (положительного максимума), *если она не обращается в постоянную в каждой области, содержащей x, и такой, что $v(y) \geqslant v(x)$ $(v(x) \geqslant v(y))$.*

Доказательство. Для $t \in [0, 1]$ рассмотрим функцию $F(\bar{p}_{ij}+t(p_{ij}-\bar{p}_{ij}), \bar{p}_i+t(p_i-\bar{p}_i), \bar{u}+t(u-\bar{u}), x)$. Имеем $F(0) \equiv \equiv F|_{t=0}=0$ и $F(1) \equiv F|_{t=1}=0$, поэтому

$$0 = F(1) - F(0) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial t} dt = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} dt + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial v}{\partial x_i} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_i} dt + v \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u} dt. \quad (5.53)$$

Из условия $\partial F/\partial u \leqslant 0$ и (52) следует, что (53) есть линейное эллиптическое уравнение для функции $v(x)$ в области D с неположительным коэффициентом при свободном члене. Поэтому для $v(x)$ справедлив принцип максимума (т. 1.1.2).

Нелинейное уравнение (50) называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно старших (вторых) производных. Квазилинейное уравнение имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(p_k, u, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a(p_k, u, x) = 0. \quad (5.54)$$

Нетрудно получить оценку максимума модуля решения квазилинейного уравнения (54), если $\partial a/\partial u < 0$. Именно, справедлива

Теорема 5.8. *Если для квазилинейного эллиптического уравнения (54) выполнено условие* $\partial a/\partial u \leqslant -\gamma < 0$, *то*

$$\max_{x \in \bar{D}} |u(x)| \leqslant \max_{x \in \Gamma} |u(x)| + \max_{x \in \bar{D}} \frac{|a(0, 0, x)|}{\gamma}. \quad (5.55)$$

Доказательство. Если $\max_{x \in \bar{D}} |u(x)|$ достигается на Γ, то (55) справедливо. Для внутренних точек области D имеем в силу (54)

$$0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \int_0^1 \frac{\partial a(tp_k, tu, x)}{\partial t} dt + a(0, 0, x) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial p_i} dt + u \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial u} dt + a(0, 0, x). \quad (5.56)$$

Таким образом $u(x)$ есть решение линейного эллиптического уравнения (56) с неположительным коэффициентом при свободном члене. Так как $\min\left|\int\limits_0^1 \frac{\partial a}{\partial u}\,dt\right| \geqslant \gamma$, то оценка (55) получается на основании теоремы 3.4. ■

Рассмотрим теперь вопрос о разрешимости задачи Дирихле для простейшего квазилинейного уравнения.

Пусть $(D+\Gamma)\in A^{(2,\mu)}$ — ограниченная двумерная область, функция $\varphi(x)\in C^{(2,\mu)}(\Gamma)$; в области $\overline{D}$ ставится следующая задача Дирихле для квазилинейного уравнения:

$$\begin{cases} Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ в } D, \\ u = \varphi \quad\quad \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.57}$$

Для доказательства существования решения задачи (57) нам потребуются две леммы.

Лемма 5.3. *Пусть $u(x)\in C^{(2)}(D)\cap C^{(1)}(\overline{D})$ — решение задачи Дирихле*

$$\begin{cases} Lu = f \text{ в } D, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \end{cases} \tag{5.58}$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

— линейный оператор с ограниченными коэффициентами, $c(x)\leqslant 0$, а $(D+\Gamma)\in A^{(2,\mu)}$ — ограниченная N-мерная область. Тогда

$$\max_{x\in\Gamma}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant C \max_{x\in\overline{D}}|f(x)| \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{5.59}$$

причем константа C зависит лишь от максимума модуля коэффициентов оператора L и от константы эллиптичности α.

Доказательство. $u=0$ на Γ, поэтому производные от $u(x)$ вдоль границы в любой точке Γ равны нулю, имеем на Γ

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \leqslant \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|, \; n \text{ — нормаль к } \Gamma, \tag{5.60}$$

так что достаточно доказать (59) для $|\partial u/\partial n|$.

Поскольку $(D+\Gamma)\in A^{(2,\mu)}$, то любой точки границы можно коснуться извне шаром некоторого фиксированного радиуса $R>0$. Пусть $y\in\Gamma$ — любая точка, а $K(x_0, R)$ — указанный шар для точки y, $x_0\notin\overline{D}$. Рассмотрим функцию

$$w_y(x) = e^{-kR^2} - e^{-kr^2_{xx_0}}.$$

Как было показано в теореме 1.1.2, $w_y(x)$ обладает при достаточно большом $k>0$ следующими свойствами:

1) $w_y(x) \in C^{(2)}(\bar{D})$,

2) $w_y(x) > 0$ в $\bar{D} \setminus y$ и $w_y(y) = 0$,

3) $L_x w_y(x) < -1$ в $\bar{D}$,

4) $\max\limits_{x\in\Gamma} \left| \frac{\partial w_y}{\partial n} \right| \leqslant C.$

Положим

$$v(x) = w_y(x) \max_{x\in\bar{D}} |f| \equiv w_y(x) F_0. \tag{5.61}$$

В силу 3) $L[v \pm u] < 0$. Так как $u|_\Gamma = 0$, а $v|_\Gamma \geqslant 0$, то в силу принципа максимума всюду в $\bar{D}$ $|u| \leqslant v$. В точке y $u(y) = v(y) = 0$, всюду в $\bar{D}$ $|u| \leqslant v$, поэтому в точке $y \in \Gamma$ имеем

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \leqslant \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| = F_0 \left| \frac{\partial w_y(x)}{\partial n} \right| \leqslant CF_0 \tag{5.62}$$

ввиду 4). ■

Лемма 5.4. *Пусть $u(x) \in C^{(2)}(D) \cap C^{(1)}(\bar{D})$ — решение уравнения*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{5.63}$$

область $(D + \Gamma) \in A^{(2,\mu)}$, коэффициенты $a_{ij} \in C^{(0,\mu)}(\bar{D})$. Пусть $\bar{u}(x) \in C^{(2)}(\bar{D})$ — функция, равная $u(x)$ на Γ и такая, что $|D^1 \bar{u}(x)| \leqslant \beta$ и $|D^2 \bar{u}(x)| \leqslant \beta$ в D. Тогда имеет место оценка

$$\max_{x\in\bar{D}} |D^1 u(x)| \leqslant C\beta, \tag{5.64}$$

где константа C зависит лишь от максимума модуля коэффициентов a_{ij} и константы эллиптичности α.

Доказательство. Докажем справедливость принципа максимума для первых производных функции $u(x)$, например для $\partial u/\partial x_1$. Предположим вначале, что $a_{ij} \in C^{(1)}(\bar{D})$, а $u(x) \in C^{(3)}(D)$. Разделим уравнение (63) на a_{22} ($a_{22}(x) \neq 0$) и продифференцируем по x_1, получим, полагая $\partial u/\partial x_1 = u_1$,

$$\left(\frac{a_{11}}{a_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + 2 \frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{x_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = 0. \tag{5.65}$$

Таким образом u_1 удовлетворяет эллиптическому уравнению (65) и для u_1 справедлив принцип максимума. Теперь избавимся от лишних условий. Возьмем последовательность коэффициентов $\{a_{ij}^{(n)}\}$, $a_{ij}^{(n)} \in C^{(2)}$, такую, что $\{a_{ij}^{(n)}\}$ сходится равномерно в $\bar{D}$ к a_{ij} при $n \to \infty$ и равномерно по n удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ. Обозначим через $u_n(x)$ решение задачи

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}^{(n)} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ в } D, \\ u_n = u \quad \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.66}$$

Согласно замечанию 4.1 последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно в $\bar{D}$ к $u(x)$ вместе с первыми производными. Так как $a_{ij}^{(n)} \in C^{(2)}(\bar{D})$, то $u_n(x) \in C^{(3)}(D)$ (в силу того же замечания). Поэтому проведенное выше рассуждение применимо к $u_n(x)$, первые производные $u_n(x)$ сходятся равномерно в $\bar{D}$ к $\partial u/\partial x_1$ и $\partial u/\partial x_2$, следовательно, последние достигают максимума и минимума на границе Г.

Теперь, чтобы доказать (64), рассмотрим функцию $w = u - \bar{u}$. Имеем $Lw = -L\bar{u} \equiv f$, где $|f| \leqslant 4\beta A$, $A = \max\limits_{i,j;x \in \bar{D}} |a_{ij}(x)|$. Кроме того, $w|_\Gamma = 0$. Применим к $w(x)$ лемму 3, получим

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \leqslant C\, 4\beta A, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда, так как $u = \bar{u} + w$,

$$\max_{x \in \Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant \beta(1 + 4AC), \quad i = 1, 2. \tag{5.67}$$

Поскольку $\max\limits_{x \in \bar{D}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|$ достигается на границе, где справедлива оценка (67), то (64) доказано.

Вернемся к задаче (57); имеет место следующая

Теорема 5.9. *Пусть коэффициенты $a_{ij}(x, u)$ оператора L ограничены $|a_{ij}| \leqslant A$ и принадлежат классу $C^{(0,\mu)}(\bar{D} \times R^1)$; пусть $(D + \Gamma) \in A^{(2,\mu)}$, а $\varphi(x) \in C^{(2,\mu)}(\Gamma)$. Тогда существует (и только одно) решение задачи (57) из класса $C^{(2,\mu)}(\bar{D})$.*

Доказательство. Обозначим через $\psi(x)$ решение задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \text{ в } D, \\ \psi = \varphi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.68}$$

В силу теорем 3.2 и 3.4 для $\psi(x)$ имеем оценку $\Psi_{2,\mu} \leqslant C(\Phi_0 + \Phi_{2,\mu})$. Отсюда и из теоремы 1.2 получим оценки

$$\Psi_1 \leqslant \beta, \quad \Psi_2 \leqslant \beta, \tag{5.69}$$

где константа β зависит лишь от функции $\varphi(x)$. Если мы будем рассматривать искомое решение $u(x)$ задачи (57) как решение линейного уравнения

$$L_1 u = \sum_{i,j=1}^{2} \bar{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{5.70}$$

где $\bar{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x; u(x))$, то в силу леммы 4 (роль $\bar{u}$ играет ψ)

$$U_1 \leqslant C\beta, \tag{5.71}$$

где C зависит лишь от A и константы эллиптичности α. Из (71) на основании теоремы Лагранжа следует, что $u(x) \in C^{(0,\mu)}(\bar{D})$ с $\mu = 1$, ибо

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant C\beta\chi r_{x_1 x_2} = C_1 r_{x_1 x_2}, \tag{5.72}$$

($\chi = \chi(D)$, см. § 1.)

Рассмотрим теперь банахово пространство $C^{(0)}(\bar{D})$ функций, непрерывных в $\bar{D}$ с нормой

$$\|u\|_0 = \max_{x \in \bar{D}} |u(x)|.$$

Обозначим через $\mathfrak{M} \subset C^{(0)}(\bar{D})$ подмножество, состоящее из функций, удовлетворяющих условиям

$$\|u\|_0 \leqslant \Phi_0 \text{ и } |u(x_1) - u(x_2)| \leqslant C_1 r_{x_1 x_2}. \tag{5.73}$$

Ясно, что $\mathfrak{M}$ — компактное выпуклое подмножество $C^{(0)}(\bar{D})$ (компактность — в силу теоремы Арцела).

Построим итерационный процесс для решения задачи (57): возьмем любую функцию $u(x) \in \mathfrak{M}$, подставим ее в коэффициенты $a_{ij}(x, u)$, получим $\bar{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x, u(x))$. Коэффициенты $\bar{a}_{ij}(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ и фиксированным коэффициентом, не зависящим от $u(x)$, ибо

$$|\bar{a}_{ij}(x_1) - \bar{a}_{ij}(x_2)| \leqslant A_2 [r^{\mu}_{x_1 x_2} + |u(x_1) - u(x_2)|^{\mu}] \leqslant C_2 r^{\mu}_{x_1 x_2},$$

в силу (73). Решим теперь линейную задачу

$$\begin{cases} L_1 v = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \bar{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ в } D, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad v = \varphi \text{ на } \Gamma. \end{cases} \tag{5.74}$$

По теореме 4.1 решение задачи (74) существует, единственно, принадлежит $C^{(2,\mu)}(\bar{D})$ и удовлетворяет неравенству

$\|v\|_0 \leqslant \Phi_0$. В силу леммы 4 для $v(x)$ справедливо неравенство (71), а значит, и (72). Условия (73) выполнены и $v(x) \in \mathfrak{M}$. Итак, мы построили оператор M: $u(x) \to v(x)$, переводящий $\mathfrak{M}$ в себя. Если мы докажем, что M — непрерывный оператор, то, так как $\mathfrak{M}$ — выпуклое компактное подмножество банахова пространства, по теореме Шаудера (см. [14] M будет иметь неподвижную точку $u_0(x)$, $Mu_0(x) = u_0(x)$. Очевидно, $u_0(x) \in C^{(2,\mu)}(\bar{D})$ является искомым решением задачи (57).

Докажем непрерывность оператора M. Пусть $\{u_n(x)\}$ — последовательность функций из $\mathfrak{M}$, равномерно сходящаяся к некоторой функции $\tilde{u}(x)$, $\|u_n - \tilde{u}\|_0 \to 0$, $n \to \infty$. Пусть $v_n = Mu_n$, $v_n(x)$ является решением задачи (74). Поскольку максимум модуля и коэффициент Гельдера коэффициентов $\bar{a}_{ij}^{(n)} = a_{ij}(x, u_n(x))$ не зависят от n (см. выше), то в силу теоремы 4.1 имеем

$$\|v_n\|_{2,\mu} \leqslant C_3 \|\Phi\|_{2,\mu} = C_4. \tag{5.75}$$

Поэтому существует подпоследовательность $\{v_{n_k}\}$, которая сходится вместе со своими первыми и вторыми производными к некоторой функции $\tilde{v}(x)$ и ее соответствующим производным. Тогда $\tilde{v}(x)$ удовлетворяет предельному уравнению

$$\begin{cases} L_1 \tilde{v} = \sum\limits_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, \tilde{u}(x)) \dfrac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \text{ в } D, \\ \tilde{v} = \varphi \text{ на } \Gamma, \end{cases} \tag{5.76}$$

т. е. $\tilde{v} = M\tilde{u}$. Предельная функция $\tilde{v}(x)$ единственна (как решение задачи (76)), и вся последовательность $v_n(x)$ сходится к $\tilde{v} = M\tilde{u}$, т. е. оператор M непрерывен. ∎

Литературные указания

При изложении § 1—4 мы следовали схеме книг [1] и [11]. Материал § 5 взят: пункт 1° из [12], пункт 2° из [13], пункт 3° из [14].

ГЛАВА 5. МНОГОМЕРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

§ 1. Класс функций $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ и его свойства

Целью этой главы является изучение свойств экстремалей — решений вариационных задач. Начнем с введения важного нового класса функций, тесно связанного с обобщенными решениями уравнений, являющихся уравнениями Эйлера для многомерных вариационных задач.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ — произвольная открытая область, Γ — ее граница, Γ может содержать и бесконечно удаленную точку.

Определение 1.1. *Пусть $\gamma > 0$ — любое фиксированное число. Классом $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ называется множество функций $w(x) \in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$**), *удовлетворяющих следующему условию: какова бы ни была точка $y \in D$* ($\delta(y) = r_{y\Gamma} > 0$ — расстояние от точки y до границы Γ) *и три вещественных числа k, ρ_1, ρ_2, $0 < \rho_1 < \rho_2 < \delta(y)$, имеют место неравенства*

$$\int\limits_{A(k) \cap K(y, \rho_1)} |\nabla w|^2 \, dx \leqslant \frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int\limits_{A(k) \cap K(y, \rho_2)} (w(x) - k)^2 \, dx \qquad (1.1)$$

и

$$\int\limits_{B(k) \cap K(y, \rho_1)} |\nabla w|^2 \, dx \leqslant \frac{\gamma}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int\limits_{B(k) \cap K(y, \rho_2)} (w(x) - k)^2 \, dx, \qquad (1.2)$$

здесь ∇w — градиент $w(x)$, $\nabla w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_N}\right)$, $K(y, \rho)$ — шар с центром в точке y радиуса ρ, $A(k)$ — множество точек x из D, для которых $w(x) > k$, $B(k)$ — множество точек x из D, для которых $w(x) < k$.

Покажем, что класс $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ замкнут относительно сходимости в среднем.

Лемма 1.1. *Если последовательность $\{w_n(x)\}$ функций из класса $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ сходится в среднем на D к функции $w(x)$, то $w(x) \in \mathfrak{B}(D, \gamma)$.*

Доказательство. Возьмем любую точку $y \in D$ и любые числа ρ_1, ρ_2 так, что $0 < \rho_1 < \rho_2 < \delta(y)$. Из неравенств (1) и (2) при $k = 0$ получим

*) Поскольку область D может быть неограниченной, то удобно рассматривать пространство $\overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$ — множество функций, принадлежащих $W_2^1(K)$ для любого компакта K, $K \subset D$.

$$\int_{K(y,\rho_1)} |\nabla w_n|^2 dx \leqslant \frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)^2} \int_{K(y,\rho_2)} |w_n|^2 dx. \qquad (1.3)$$

Так как w_n сходится в среднем на D, то правая часть в (3), а значит, и левая часть ограничены. По теореме Банаха — Сакса [24, с. 204] отсюда следует, что предельная функция $w(x)$ принадлежит W_2^1 в шаре $K(y, \rho_1)$, а поскольку y и ρ_1 любые, то $w(x) \subset \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$. Осталось доказать для $w(x)$ неравенства (1) и (2), докажем, например (1). Для любого действительного k положим

$$w_n(x, k) = \begin{cases} w_n(x) - k, & \text{при } w_n(x) \geqslant k, \\ 0, & \text{при } w_n(x) < k. \end{cases}$$

Последовательность $\{w_n(x, k)\}$ сходится в $L_2(D)$ к функции

$$w(x, k) = \begin{cases} w(x) - k, & \text{при } w(x) \geqslant k, \\ 0, & \text{при } w(x) < k \end{cases}$$

и интегралы в (1) для функции $w_n(x, k)$ совпадают с интегралами по шарам $K(y, \rho_1)$ и $K(y, \rho_2)$ соответственно. Мы доказали, что $w(x, k) \in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$, и остается перейти в (1) к пределу при $n \to \infty$. ■

Следующие две леммы справедливы для любых функций из $\overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$.

Зафиксируем произвольную функцию $w(x) \in \mathfrak{B}(D, \gamma)$ и любую точку $y \in D$, $\delta(y) > 0$. Обозначим для краткости $K(\rho) = K(y, \rho)$, $A(k, \rho) = A(k) \cap K(y, \rho)$, $B(k, \rho) = B(k) \cap \cap K(y, \rho)$. Имеет место

Лемма 1.2. *Существует такая константа* $\beta_1 = \beta_1(N)$, *что для любых чисел* ρ, k, λ *с условием* $0 < \rho < \delta(y)$, $k < \lambda$, *справедливо неравенство*

$$(\lambda - k)\,[\tau(k, \lambda, \rho)]^{(N-1)/N} \leqslant \beta_1 \int_{A(k,\rho)\setminus A(\lambda,\rho)} |\nabla w|\, dx, \qquad (1.4)$$

где

$$\tau(k, \lambda, \rho) = \min\{\operatorname{mes} A(\lambda, \rho), \operatorname{mes}[K(\rho) \setminus A(k, \rho)]\}. \qquad (1.5)$$

Доказательство. Докажем сначала лемму для полулинейной в шаре $K(\rho)$ функции $w(x)$. Так называют определенную в некоторой области G функцию $\varphi(x)$, если область G можно представить в виде объединения конечного числа областей, в каждой из которых $\varphi(x)$ линейна (в частности, постоянна). Если $w(x)$ полулинейна в шаре $K(\rho)$, то границы $\partial A(t, \rho)$ и $\partial B(t, \rho)$ областей $A(t, \rho)$ и $B(t, \rho)$ содержатся в сумме сферической поверхности $\partial K(\rho)$ и конечного числа гиперплоскостей.

Обозначим через μ_1 $(N-1)$-мерную меру множества, тогда для почти всех t имеем:

$$\mu_1 \partial A(t, \rho) = \mu_1 [K(\rho) \cap \partial A(t)] + \mu_1 [A(t) \cap \partial K(\rho)], \tag{1.6}$$

$$\mu_1 \partial B(t, \rho) = \mu_1 [K(\rho) \cap \partial B(t)] + \mu_1 [B(t) \cap \partial K(\rho)], \tag{1.7}$$

$$\operatorname{mes} K(\rho) = \operatorname{mes} A(t, \rho) + \operatorname{mes} B(t, \rho), \tag{1.8}$$

$$\mu_1 \partial K(\rho) = \mu_1 [B(t) \cap \partial K(\rho)] + \mu_1 [A(t) \cap \partial K(\rho)], \tag{1.9}$$

$$K(\rho) \cap \partial B(t) = K(\rho) \cap \partial A(t). \tag{1.10}$$

Для любого $\xi > 0$ справедливо равенство

$$\int\limits_{A(\xi,\rho)} |\nabla w|\, dx = \int\limits_{\xi}^{+\infty} \mu_1 [K(\rho) \cap \partial A(t)]\, dt. \tag{1.11}$$

Если $w(x)$ постоянна или линейна во всем шаре $K(\rho)$, то (11) очевидно; в общем случае полулинейной в шаре $K(\rho)$ функции шар $K(\rho)$ разбивается на конечное число областей, для каждой из которых выполняется равенство, аналогичное (11), сложив эти равенства, вновь получим (11).

Поскольку $\partial A(t, \rho)$ и $\partial B(t, \rho)$ содержатся в сумме сферической поверхности $\partial K(\rho)$ и конечного числа гиперплоскостей, то в силу изопериметрического свойства сферы (при заданном объеме шар имеет наименьшую площадь поверхности) существует постоянная $a = a(N) = \left(\frac{\omega_N}{N}\right)^{N-1} \frac{1}{\omega_N}$ такая, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} [\operatorname{mes} K(\rho)]^{1-1/N} &= a \mu_1 \partial K(\rho), \\ [\operatorname{mes} A(t, \rho)]^{1-1/N} &\leqslant a \mu_1 \partial A(t, \rho), \\ [\operatorname{mes} B(t, \rho)]^{1-1/N} &\leqslant a \mu_1 \partial B(t, \rho). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Теперь подставим (10) в (7) и результат сложим с (6), получим с учетом (9) следующее равенство:

$$\begin{aligned} 2\mu_1 [K(\rho) \cap \partial A(t)] &= \mu_1 \partial A(t, \rho) + \mu_1 \partial B(t, \rho) - \\ &- \{\mu_1 [A(t) \cap \partial K(\rho)] + \mu_1 [B(t) \cap \partial K(\rho)]\} = \\ &= \mu_1 \partial A(t, \rho) + \mu_1 \partial B(t, \rho) - \mu_1 \partial K(\rho). \end{aligned}$$

Умножим это равенство на константу a и воспользуемся формулами (12), найдем

$$\begin{gathered} 2a \mu_1 [K(\rho) \cap \partial A(t)] = a\mu_1 \partial A(t, \rho) + a \mu_1 \partial B(t, \rho) - a\mu_1 \partial K(\rho) \geqslant \\ \geqslant [\operatorname{mes} A(t, \rho)]^{1-1/N} + [\operatorname{mes} B(t, \rho)]^{1-1/N} - [\operatorname{mes} K(\rho)]^{1-1/N}. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Обозначим

$$\tau(t, \rho) = \min\{\operatorname{mes} A(t, \rho),\ \operatorname{mes}[K(\rho)\setminus A(t, \rho)]\},$$

тогда $\operatorname{mes} K(\rho) \geqslant 2\tau(t, \rho)$. Заменим в (13) $\operatorname{mes} B(t, \rho)$ согласно (8) и воспользуемся легко проверяемым неравенством:

$$x^\alpha + (1-x)^\alpha - 1 \geqslant 2x^\alpha - (2x)^\alpha$$

при фиксированном α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, и $x \in [0, 1/2]$, с помощью которого из (13) получим

$$2a\mu_1[K(\rho) \cap \partial A(t)] \geqslant 2[\tau(t, \rho)]^{1-1/N} - [2\tau(t, \rho)]^{1-1/N} = \\ = \tau^{1-1/N} \cdot 2(1 - 2^{-1/N}). \qquad (1.14)$$

Неравенство (14) справедливо для почти всех t. Положим

$$\beta_1 = \beta_1(N) = a(1 - 2^{-1/N})^{-1}.$$

Из (11) и (14) получим

$$\beta_1 \int\limits_{A(k,\rho)\setminus A(\lambda,\rho)} |\nabla w|\, dx = \beta_1 \int\limits_k^\lambda \mu_1[K(\rho) \cap \partial A(t)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_k^\lambda [\tau(t, \rho)]^{1-1/N} dt \geqslant [\tau(\lambda, k, \rho)]^{1-1/N} \int\limits_k^\lambda dt =$$

$$= (\lambda - k)[\tau(\lambda, k, \rho)]^{1-1/N}, \qquad (1.15)$$

ибо в силу определения $\tau(t, \rho) \geqslant \tau(\lambda, k, \rho)$ при $k \leqslant t \leqslant \lambda$. Итак, для полулинейных в шаре $K(\rho)$ функций лемма доказана. Пусть теперь $w(x) \in \overset{\text{loc}}{W}{}^1_2(D)$ — любая функция. Существует последовательность полулинейных в $K(\rho)$ функций $\{w_n(x)\}$, такая, что $w_n \underset{W_2^1}{\longrightarrow} w$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{K(\rho)} |w_n(x) - w(x)|\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K(\rho)} |\nabla w_n(x) - \nabla w(x)|\, dx = 0. \qquad (1.16)$$

Обозначим через $A_n(t, \rho)$ множество

$$A_n(t, \rho) = \{x \mid x \in K(\rho),\ w_n(x) > t\}$$

и для любой пары чисел k и λ, $k < \lambda$, положим

$$\tau_n(k, \lambda, \rho) = \min\{\operatorname{mes} A_n(\lambda, \rho),\ \operatorname{mes}[K(\rho)\setminus A(k, \rho)]\}.$$

Из (16) следует, что для почти всех t

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}[A_n(t, \rho) \cup A(t, \rho) \setminus A_n(t, \rho) \cap A(t, \rho)] \equiv$$

$$\equiv \lim_{n\to\infty} \operatorname{mes}\{x \mid x \in K(\rho),\ [w_n > t,\ w \leqslant t] \cup [w > t,\ w_n \leqslant t]\} = 0. \qquad (1.17)$$

Так как все w_n — полулинейны, то в силу (15) при всех целых $n \geqslant 1$ и любых k и λ, $k < \lambda$, имеем

$$(\lambda - k)\,[\tau_n(k, \lambda, \rho)]^{1-1/N} \leqslant \beta_1 \int\limits_{A_n(k,\rho) \setminus A_n(\lambda,\rho)} |\nabla w_n|\,dx. \tag{1.18}$$

Из (17) и (18) вытекает, что неравенство (4) имеет место для $w(x) \in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$ для почти всех пар k и λ. Но если (4) выполнено для почти всех пар k и λ, то оно справедливо и для всех пар k и λ, ибо в силу монотонности:

$$\lim_{\eta \to 0} \int\limits_{A(k+\eta,\rho) \setminus A(\lambda-\eta,\rho)} |\Delta w|\,dx \leqslant \int\limits_{A(k,\rho) \setminus A(\lambda,\rho)} |\nabla w|\,dx$$

и

$$\lim_{\eta \to 0} \tau(k+\eta, \lambda-\eta, \rho) \geqslant \tau(k, \lambda, \rho). \blacksquare$$

Лемма 1.3. *Существует константа $\beta_2 = \beta_2(N)$, такая, что для любой пары чисел ρ и k, удовлетворяющих условиям $0 < \rho < \delta(y)$, $0 < 2\,\mathrm{mes}\,A(k, \rho) \leqslant \mathrm{mes}\,K(\rho)$, справедливо неравенство*

$$[\mathrm{mes}\,A(k, \rho)]^{-2/N} \int\limits_{A(k,\rho)} (w(x) - k)^2\,dx \leqslant \beta_2 \int\limits_{A(k,\rho)} |\nabla w|^2\,dx. \tag{1.19}$$

Доказательство. Для любого натурального n положим $\lambda_n = \inf\{\lambda\}$, где infimum берется по тем λ, для которых

$$\mathrm{mes}\,A(k, \rho) \geqslant 2^{nN}\,\mathrm{mes}\,A(\lambda, \rho). \tag{1.20}$$

Положив $\lambda_0 = k$, будем иметь

$$k = \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \tag{1.21}$$

В силу определения множеств $A(\lambda, \rho)$, $B(\lambda, \rho)$ и числа λ_n имеем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{mes}\,A(\lambda_n + \varepsilon, \rho) = \mathrm{mes}\,A(\lambda_n, \rho) \leqslant 2^{-nN}\,\mathrm{mes}\,A(k, \rho) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{\varepsilon \to +0} \mathrm{mes}\,A(\lambda_n - \varepsilon, \rho) = \mathrm{mes}\,[K(\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho)]. \tag{1.22}$$

Из (22) вытекает существование такой последовательности множеств D_n, что

$$A(k, \rho) = D_0 \supset D_1 \supset \ldots \supset D_n \supset \ldots \tag{1.23}$$

и для любого n

$$\mathrm{mes}\,D_n = 2^{-nN}\,\mathrm{mes}\,A(k, \rho) \quad \text{и} \tag{1.24}$$

$$[K(\rho) \setminus B(\lambda_n, \rho)] \supset D_n \supset A(\lambda_n, \rho). \tag{1.25}$$

В силу (22) и леммы 2 имеем при $n \geqslant 1$

$$\beta_1 \int\limits_{D_{n-1}\setminus D_n} |\nabla w|\,dx \geqslant \lim_{\varepsilon\to+0} \beta_1 \int\limits_{A(\lambda_{n-1}+\varepsilon,\rho)\setminus A(\lambda_n-\varepsilon,\rho)} |\nabla w|\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\varepsilon\to+0} (\lambda_n - \varepsilon - \lambda_{n-1} - \varepsilon)\,[\min\{\operatorname{mes} A(\lambda_n - \varepsilon, \rho),$$
$$\operatorname{mes}[K(\rho)\setminus A(\lambda_{n-1}+\varepsilon, \rho)]\}]^{(N-1)/N}. \qquad (1.26)$$

По условию леммы $0 < 2\operatorname{mes} A(k, \rho) \leqslant \operatorname{mes} K(\rho)$, следовательно, минимум выражения в фигурной скобке равен $\operatorname{mes} A(\lambda_n - \varepsilon, \rho)$ и неравенство (26) можно продолжить так:

$$\beta_1 \int\limits_{D_{n-1}-D_n} |\nabla w|\,dx \geqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \lim_{\varepsilon\to+0} [\operatorname{mes} A(\lambda_n - \varepsilon, \rho)]^{(N-1)/N} =$$

$$= (\lambda_n - \lambda_{n-1})\,(\operatorname{mes}[K(\rho)\setminus B(\lambda_n, \rho)])^{(N-1)/N} \geqslant$$
$$\geqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1})\, 2^{-n(N-1)} [\operatorname{mes} A(k, \rho)]^{(N-1)/N}, \qquad (1.27)$$

здесь мы воспользовались формулами (22), (25) и (24). Из (27) с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\beta_1^2 \int\limits_{D_{n-1}\setminus D_n} |\nabla w|^2\,dx \geqslant [\operatorname{mes}(D_{n-1}\setminus D_n)]^{-1} \Big(\beta_1 \int\limits_{D_n\setminus D_{n-1}} |\nabla w|\,dx\Big)^2 \geqslant$$

$$\geqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2\, 2^{-2n(N-1)}\, [\operatorname{mes}(D_{n-1}\setminus D_n)]^{-1}\, [\operatorname{mes} A(k, \rho)]^{2(N-1)/N} \geqslant$$
$$\geqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2\, 2^{-n(N-2)-N} [\operatorname{mes} A(k, \rho)]^{1-2/N}, \qquad (1.28)$$

ибо в силу (24) $\operatorname{mes}(D_n\setminus D_{n-1}) = \dfrac{2^N - 1}{2^{nN}} \operatorname{mes} A(k, \rho)$

и $\qquad [\operatorname{mes}(D_n\setminus D_{n-1})]^{-1} > 2^{N(n-1)} [\operatorname{mes} A(k, \rho)]^{-1}.$

Поскольку $A(k, \rho) = D_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (D_{n-1}\setminus D_n)$, то из (28) получим

$$\beta_1^2 \int\limits_{A(k,\rho)} |\nabla w|^2\,dx \geqslant [\operatorname{mes} A(k, \rho)]^{1-2/N} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2\, 2^{-n(N-2)-N}, \qquad (1.29)$$

и, в частности, сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2\, 2^{-n(N-2)-N}. \qquad (1.30)$$

Обозначим через θ наибольший член ряда (30), $\theta < \infty$, тогда для любого натурального m найдем ($\lambda_0 = k$)

$$(\lambda_m - \lambda_0)^2 = \Big[\sum_{n=1}^{m} (\lambda_n - \lambda_{n-1})\Big]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^2 \cdot 2^{-n(N-2)-N} \cdot \sum_{n=1}^{m} 2^{n(N-2)+N} \leqslant \theta\, m m 2^{m(N-2)+N}. \tag{1.31}$$

Теперь имеем такую цепочку неравенств

$$\int\limits_{A(k,\rho)} (w(x)-k)^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{D_{n-1}\setminus D_n} (w-k)^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - k)^2 \operatorname{mes}(D_{n-1}\setminus D_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_0)^2\, 2^{N-nN} \operatorname{mes} A(k,\rho) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} A(k,\rho) \sum_{n=1}^{\infty} \theta\, n^2\, 2^{n(N-2)+N+N-nN} = \theta \operatorname{mes} A(k,\rho)\, c_0, \tag{1.32}$$

где $c_0 = 2^{2N} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\, 2^{-2n} < \infty$. Из (29) и (32) имеем

$$\beta_1^2 \int\limits_{A(k,\rho)} |\nabla w|^2\,dx \geqslant [\operatorname{mes} A(k,\rho)]^{1-2/N}\theta \geqslant$$

$$\geqslant [\operatorname{mes} A(k,\rho)]^{1-2/N} c_0^{-1} [\operatorname{mes} A(k,\rho)]^{-1} \cdot \int\limits_{A(k,\rho)} (w(x)-k)^2\,dx, \tag{1.33}$$

т. е. мы получили неравенство (19) с $\beta_2 = \beta_2(N) = \beta_1^2 c_0$. ∎

В двух следующих леммах существенно используется принадлежность функции $w(x)$ классу $\mathfrak{B}(D,\gamma)$.

Лемма 1.4. *Любому положительному числу $\sigma<1$ можно поставить в соответствие такое положительное число $\theta(\sigma)$, что при $0<\rho<\delta(y)$, $-\infty<k<+\infty$ из неравенства*

$$\operatorname{mes} A(k,\rho) < \rho^N \theta(\sigma) \tag{1.34}$$

следует, что

$$\operatorname{mes} A(k+\sigma c,\ \rho-\sigma\rho) = 0, \tag{1.35}$$

где

$$c = \rho^{-N/2} [\theta(\sigma)]^{-1/2} \Big[\int\limits_{A(k,\rho)} (w(x)-k)^2\,dx \Big]^{1/2}. \tag{1.36}$$

Доказательство. Пусть $\theta(\sigma)$ — наибольшее из чисел θ, удовлетворяющих двум неравенствам

$$2\rho^N\theta \leqslant \operatorname{mes} K(\rho-\sigma\rho), \tag{1.37}$$

$$\theta \leqslant \left[\frac{\sigma^2 2^{-(N+2)}}{1+\gamma+\beta_2}\right]^N, \tag{1.38}$$

здесь γ — константа из (1) и (2), а β_2 — константа из неравенства (19). Докажем, что при таком определении числа $\theta(\sigma)$ из (34) и (36) следует (35).

Положим

$$\rho_n = \rho - \sigma\rho + \frac{\sigma\rho}{2^n}, \quad k_n = k + \sigma c - \frac{\sigma c}{2^n}, \tag{1.39}$$

откуда $\rho_n \geqslant \rho_{n+1}$, а $k_n \leqslant k_{n+1}$. Из неравенства (1) с $\rho_1 = \rho_{n+1}$ и $\rho_2 = \rho_n$ получим

$$\int\limits_{A(k_n, \rho_{n+1})} |\nabla w|^2 dx \leqslant \gamma 4^{n+1} \sigma^{-2} \rho^{-2} \int\limits_{A(k_n, \rho_n)} (w(x) - k_n)^2 dx, \tag{1.40}$$

ибо $\rho_n - \rho_{n+1} = \frac{\sigma\rho}{2^{n+1}}$. По лемме 3 имеем

$$\beta_2 [\operatorname{mes} A(k_n, \rho_n)]^{2/N} \int\limits_{A(k_n, \rho_{n+1})} |\nabla w|^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \beta_2 [\operatorname{mes} A(k_n, \rho_{n+1})]^{2/N} \int\limits_{A(k_n, \rho_{n+1})} |\nabla w|^2 dx \geqslant \int\limits_{A(k_n, \rho_{n+1})} (w(x) - k_n)^2 dx. \tag{1.41}$$

Из (40) и (41) получим

$$\beta_2 \gamma 4^{n+1} (\sigma\rho)^{-2} [\operatorname{mes} A(k_n, \rho_n)]^{2/N} \int\limits_{A(k_n, \rho_n)} (w - k_n)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{A(k_n, \rho_{n+1})} (w - k_n)^2 dx \geqslant \int\limits_{A(k_{n+1}, \rho_{n+1})} (w - k_n)^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{A(k_{n+1}, \rho_{n+1})} (w - k_{n+1})^2 dx. \tag{1.42}$$

Далее в силу (39)

$$\int\limits_{A(k_{n+1}, \rho_{n+1})} (w - k_n)^2 dx \geqslant \int\limits_{A(k_{n+1}, \rho_{n+1})} (k_{n+1} - k_n)^2 dx =$$

$$= \frac{(\sigma c)^2}{4^{n+1}} \operatorname{mes} A(k_{n+1}, \rho_{n+1}). \tag{1.43}$$

Из (42) и (43)

$$\sigma^4 (c\rho)^2 2^{-4(n+1)} \operatorname{mes} A(k_{n+1}, \rho_{n+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2 \gamma [\operatorname{mes} A(k_n, \rho_n)]^{2/N} \int\limits_{A(k_n, \rho_n)} (w - k_n)^2 dx. \tag{1.44}$$

Докажем теперь по индукции, что для любого натурального n справедливы неравенства:

$$\operatorname{mes} A(k_n, \rho_n) \leqslant \rho^N \theta(\sigma) \frac{1}{2^{2nN}}, \tag{1.45}$$

$$\int\limits_{A(k_n,\rho_n)} (w-k_n)^2\,dx \leqslant \rho^N\theta(\sigma)\,c^2\frac{1}{2^{2nN}}. \qquad (1.46)$$

При $n=0$ неравенства (45) и (46) совпадают с (34) и (36), так как $k_0=k$ и $\rho_0=\rho$ (см. (39)). Пусть (45) и (46) выполнены для номера n, покажем, что они справедливы и для номера $n+1$. Имеем в силу (42) и предположения индукции:

$$\int\limits_{A(k_{n+1},\rho_{n+1})} (w-k_{n+1})^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2\gamma\,4^{n+1}(\sigma\rho)^{-2}\,[\operatorname{mes} A(k_n,\rho_n)]^{2/N}\int\limits_{A(k_n,\rho_n)} (w-k_n)^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2\gamma\,4^{n+1}(\sigma\rho)^{-2}\rho^2\theta^{2/N}\frac{1}{4^{2n}}\,\rho^N\theta c^2\,\frac{1}{2^{2nN}} <$$

$$< \rho^N\theta(\sigma)\,c^2\,\frac{1}{2^{2(n+1)N}},$$

$\theta^{2/N}$ оценивается с помощью (38). Итак, (46) выполнено для $n+1$. Из (44) и (46) имеем, снова оценивая $\theta^{2/N}$ по (38),

$$\operatorname{mes} A(k_{n+1},\rho_{n+1}) \leqslant \beta_2\gamma\sigma^{-4}c^{-2}\rho^{-2}\,2^{4(n+1)}\rho^2\theta^{2/N}\frac{1}{4^{4n}}\,\rho^N\theta c^2\,\frac{1}{2^{2nN}} <$$

$$< \rho^N\theta(\sigma)\frac{1}{2^{2(n+1)N}},$$

что совпадает с (45) для $n+1$; индукция оправдана.

Перейдем теперь к пределу в (45) при $n\to\infty$; учитывая (39), получим, что $\operatorname{mes} A(k+\sigma c,\ \rho-\sigma\rho)=0$. ∎

Замечание 1.1. Если $w(x)\in\mathfrak{B}(D,\gamma)$, то и $-w(x)\in\mathfrak{B}(D,\gamma)$. Поэтому вместе с леммами 2, 3, 4 справедливы аналогичные леммы, в которых вместо $A(k,\rho)$ взято $B(k,\rho)$.

Следствие 1.1. *Для каждого r, $0<r<\delta(y)$, колебание функции $w(x)$ в шаре $K(r)$ конечно.*

Доказательство. Колебание $\operatorname{osc}(w,r)$ функции $w(x)\in \overset{\text{loc}}{W}{}^1_2(D)$ в шаре $K(r)$ определяется как разность между существенным максимумом и существенным минимумом $w(x)$ в шаре $K(r)$: $\operatorname{osc}(w,r)=\operatorname{vrai\,max} w(x)-\operatorname{vrai\,min} w(x)$, где $\operatorname{vrai\,max} w(x)=\inf\{\lambda\mid \operatorname{mes} A(\lambda,r)=0\}$, а $\operatorname{vrai\,min} w(x)=\sup\{\lambda\mid \operatorname{mes} B(\lambda,r)=0\}$.

Докажем, что колебание $w(x)$ в шаре $K(r)$ конечно. Возьмем два числа ρ и σ так, чтобы $0<\rho<\delta(y)$, $0<\sigma<1$ и $\rho-\sigma\rho=r$. По ним выберем k так, чтобы выполнялось (34). Тогда в силу леммы 4 при c, определенном в (36), почти всюду в шаре $K(r)$ будет выполнено неравенство $w(x) \leqslant k+\sigma c$. Вследствие замечания найдем и оценку снизу для $w(x)$, так что следствие доказано.

Лемма 1.5. *Существует такое число* $\eta>0$, *что при* $0<4\rho<\delta(y)$ *имеет место неравенство*

$$\operatorname{osc}(w, \rho) \leqslant (1-\eta) \operatorname{osc}(w, 4\rho). \tag{1.47}$$

Доказательство. Пусть $\mu_1 = \operatorname{vrai}\max w(x)$, а $\mu_2 = \operatorname{vrai}\min w(x)$ функции $w(x)$ в шаре $K(4\rho)$. Если $\mu_1=\mu_2$, то $w(x)=\mathrm{const}$ почти всюду в $K(4\rho)$ и (47) выполнено. Пусть $\mu_1 > \mu_2$, обозначим $\operatorname{osc}(w, 4\rho) = \mu_1-\mu_2 = \omega$, а $\bar\mu = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}$. По определению множеств $A(k, \rho)$ и $B(k, \rho)$ выполняется одно из двух неравенств

$$2 \operatorname{mes} A(\bar\mu, 2\rho) \leqslant \operatorname{mes} K(2\rho), \tag{1.48}$$

$$2 \operatorname{mes} B(\bar\mu, 2\rho) \leqslant \operatorname{mes} K(2\rho). \tag{1.49}$$

Пусть выполнено (48). Для любого λ, $0<\lambda \leqslant \omega/4$, обозначим

$$D(\lambda) = A(\mu_1-2\lambda, 2\rho) \setminus A(\mu_1-\lambda, 2\rho). \tag{1.50}$$

Поскольку

$$\mu_1 - 2\lambda \geqslant \mu_1 - \frac{\omega}{2} = \bar\mu,$$

а значит, и $\mu_1-\lambda > \bar\mu$ и так как

$$\operatorname{mes} A(\bar\mu, 2\rho) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{mes} K(2\rho),$$

$$\tau = \min\{\operatorname{mes} A(\mu_1-\lambda, 2\rho),$$

$$\operatorname{mes}[K(2\rho)\setminus A(\mu_1-2\lambda, 2\rho)]\} = \operatorname{mes} A(\mu_1-\lambda, 2\rho).$$

Поэтому в силу леммы 2

$$\lambda [\operatorname{mes} A(\mu_1-\lambda, 2\rho)]^{(N-1)/N} \leqslant \beta_1 \int\limits_{D(\lambda)} |\nabla w|\, dx. \tag{1.51}$$

В силу (1) имеем

$$\int\limits_{D(\lambda)} |\nabla w|^2 dx \leqslant \int\limits_{A(\mu_1-2\lambda, 2\rho)} |\nabla w|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma}{4\rho^2} \int\limits_{A(\mu_1-2\lambda, 4\rho)} (w(x)-\mu_1+2\lambda)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\gamma}{4\rho^2} \int\limits_{A(\mu_1-2\lambda, 4\rho)} (2\lambda)^2 dx \leqslant \frac{\gamma}{\rho^2} \lambda^2 \operatorname{mes} K(4\rho). \tag{1.52}$$

Из (51) и (52) с помощью неравенства Коши — Буняковского получим

$$\lambda^2 [\operatorname{mes} A(\mu_1 - \lambda,\ 2\rho)]^{2-2/N} \leqslant \beta_1^2 \left(\int\limits_{D(\lambda)} |\nabla w|\, dx \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \beta_1^2 \operatorname{mes} D(\lambda) \int\limits_{D(\lambda)} |\nabla w|^2\, dx \leqslant \operatorname{mes} D(\lambda)\, \beta_1^2 \frac{\gamma}{\rho^2} \lambda^2 \operatorname{mes} K(4\rho),$$

т. е.

$$\operatorname{mes} D(\lambda) \geqslant \frac{\rho^2}{\beta_1^2 \gamma} [\operatorname{mes} A(\mu_1 - \lambda,\ 2\rho)]^{2-2/N} [\operatorname{mes} K(4\rho)]^{-1}. \tag{1.53}$$

Пусть теперь $\theta(1/2)$ значение функции $\theta(\sigma)$ при $\sigma = 1/2$ (см. (38) и (39)), и пусть n — натуральное число, такое, что

$$\left[\theta\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2-2/N} n\rho^{2/N} \geqslant \gamma\beta_1^2 \operatorname{mes} K(4\rho) \operatorname{mes} K(2\rho). \tag{1.54}$$

Положим

$$\eta = 2^{-(n+2)}, \tag{1.55}$$

тогда

$$\lambda \leqslant \frac{\omega}{4} \text{ для } \lambda = 2^m \eta\omega,\ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.56}$$

Поэтому в силу (53)

$$\operatorname{mes} D(2^m \eta\omega) \geqslant \frac{\rho^2}{\beta_1^2 \gamma} [\operatorname{mes} A(\mu_1 - 2^m\eta\omega, 2\rho)]^{2-2/N} [\operatorname{mes} K(4\rho)]^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\rho^2}{\beta_1^2 \gamma} [\operatorname{mes} A(\mu_1 - 2\eta\omega,\ 2\rho)]^{2-2/N} [\operatorname{mes} K(4\rho)]^{-1},\ m = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.57}$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{m=1}^{n} D(2^m \eta\omega) = \left[A\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2},\ 2\rho\right) \setminus A\left(\mu_1 - \frac{\omega}{2^{n+1}},\ 2\rho\right)\right] \subset K(2\rho),$$

получим

$$\operatorname{mes} K(2\rho) \geqslant \sum_{m=1}^{n} D(2^m \eta\omega) \geqslant$$

$$\geqslant n [\operatorname{mes} K(4\rho)]^{-1} \frac{\rho^2}{\gamma\beta_1^2} [\operatorname{mes} A(\mu_1 - 2\eta\omega,\ 2\rho)]^{2-2/N}. \tag{1.58}$$

Сопоставляя (54) и (58), найдем

$$\operatorname{mes} A(\mu_1 - 2\eta\omega,\ 2\rho) \leqslant \theta\left(\frac{1}{2}\right)\rho^N < \theta\left(\frac{1}{2}\right)(2\rho)^N; \tag{1.59}$$

так как μ_1 — существенный максимум $w(x)$ в шаре $K(4\rho)$, то из (59) получим

$$\int\limits_{A(\mu_1-2\eta\omega,2\rho)} (w(x) - \mu_1 + 2\eta\omega)^2\,dx \leqslant (2\eta\omega)^2 \operatorname{mes} A(\mu_1 - 2\eta\omega, 2\rho) <$$
$$< (2\rho)^N (2\eta\omega)^2\,\theta\left(\frac{1}{2}\right). \tag{1.60}$$

Пользуясь неравенством (15), применим лемму 4, найдем по формуле (36) соответствующее значение c:

$$c^2 = (2\rho)^{-N}\,\theta^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{A(\mu_1-2\eta\omega,2\rho)} (w(x) - \mu_1 + 2\eta\omega)^2\,dx. \tag{1.61}$$

Сопоставляя (61) и (60), найдем

$$c < 2\eta\omega.$$

Отсюда в силу леммы 4 получим ($\sigma = 1/2$)

$$0 = \operatorname{mes} A\left(\mu_1 - 2\eta\omega + \frac{1}{2}c,\ 2\rho - \frac{1}{2}2\rho\right) \geqslant \operatorname{mes} A(\mu_1 - \eta\omega,\ \rho),$$

т. е.

$$\operatorname{mes} A(\mu_1 - \eta\omega,\ \rho) = 0. \tag{1.62}$$

Таким образом, существенный максимум $w(x)$ в шаре $K(\rho)$ не превосходит $\mu_1 - \eta\omega$. Поэтому, если $\omega_1 = \mu_1' - \mu_2'$, где μ_1', μ_2' — существенный максимум и минимум функции $w(x)$ в $K(\rho)$, то, поскольку $\mu_2' \geqslant \mu_2$, а $\mu_1' \leqslant \mu_1 - \eta\omega = \mu_1 - \eta(\mu_1 - \mu_2)$, для ω_1 будем иметь

$$\omega_1 = \mu_1' - \mu_2' \leqslant \mu_1 - \eta(\mu_1 - \mu_2) - \mu_2 =$$
$$= (1 - \eta)(\mu_1 - \mu_2) = (1 - \eta)\omega. \tag{1.63}$$

К этому же результату мы придем в силу замечания 1.1, если будем считать выполненным условие (49). ■

Основное свойство функций из класса $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ устанавливается в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Любая функция $w(x) \in \mathfrak{B}(D, \gamma)$ удовлетворяет условию Гельдера на каждом компакте $D_0 \subset D$.*

Доказательство. Согласно следствию 1 колебание $w(x)$ в любом шаре $K(\rho) \subset D$ конечно, поэтому в силу леммы 5 $\operatorname{osc}(w, \rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, ибо

$$\operatorname{osc}\left(w, \frac{\rho}{4^n}\right) \leqslant (1 - \eta)^n \operatorname{osc}(w, \rho) \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

см. (47). Рассмотрим функцию

$$\bar{w}(x)=\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{1}{\operatorname{mes} K(x,\rho)}\int\limits_{K(x,\rho)} w(y)\,dy\right]. \tag{1.64}$$

Почти всюду в шаре $K(x,\rho)$ $\mu_1\leqslant w(y)\leqslant\mu_2$, где

$$\mu_1=\operatorname*{vrai\,max}_{y\in K(x,\rho)} w(y),\ \text{а}\ \mu_2=\operatorname*{vrai\,min}_{y\in K(x,\rho)} w(y)$$

и, как указано выше, $\mu_2-\mu_1\to 0$ при $\rho\to 0$, поэтому предел (64) существует для всех $x\in D$ и функция $\bar{w}(x)$ непрерывна в D. В каждой точке Лебега функции $w(x)$ имеем $\bar{w}(x)=w(x)$, а так как почти все точки D являются точками Лебега для суммируемой функции $w(x)$ [25], то $\bar{w}(x)$ эквивалентна $w(x)$. Таким образом, достаточно доказать гельдеровость функции $\bar{w}(x)$. Пусть $D_0\subset D$ — любой компакт и $r>0$ — расстояние от D_0 до $\Gamma=\partial D$. Возьмем число δ так, что $0<\delta<r$ и положим

$$\tau=\sup_{x,y;y\in D_0,\,r_{xy}\leqslant\delta} 2|\bar{w}(x)-\bar{w}(y)|\left(\frac{\delta}{4}\right)^{-\alpha}, \tag{1.65}$$

где α — константа, равная $\alpha=-\log_4(1-\eta)$, η — постоянная из леммы 5. $\bar{w}(x)$ непрерывна в D, а D_0 — компакт, следовательно, $\tau<\infty$. Зафиксируем теперь любую точку $y\in D_0$ и возьмем шар с центром в точке y радиуса ρ, $\rho\leqslant\delta$. Из

$$\operatorname{osc}(\bar{w},\rho)=\sup_{x_1,x_2\in K(y,\rho)}|\bar{w}(x_1)-\bar{w}(x_2)|\leqslant 2\sup_{x\in K(y,\rho)}|\bar{w}(x)-\bar{w}(y)|,$$

и из (65) при $\delta/4\leqslant\rho\leqslant\delta$ имеем

$$\operatorname{osc}(\bar{w},\rho)\leqslant\tau\left(\frac{\delta}{4}\right)^{\alpha}\leqslant\tau\rho^{\alpha},\ \text{при}\ \frac{\delta}{4}\leqslant\rho\leqslant\delta. \tag{1.66}$$

Но каково бы ни было ρ, $0<\rho<\delta/4$, найдется такое натуральное m, что

$$\frac{\delta}{4}\leqslant 4^m\rho\leqslant\delta. \tag{1.67}$$

Поэтому в силу леммы 5 и формул (66) и (67) получим

$$\operatorname{osc}(\bar{w},\rho)\leqslant(1-\eta)^m\operatorname{osc}(\bar{w},4^m\rho)\leqslant(1-\eta)^m\tau(4^m\rho)^{\alpha}=$$

$$=\tau\rho^{\alpha}(1-\eta)^m 4^{m\alpha}=\tau\rho^{\alpha},\ \text{при}\ 0<\rho<\frac{\delta}{4}, \tag{1.68}$$

$(1-\eta)^m 4^{m\alpha}=1$ по определению числа α. Сопоставляя (66) и (68), видим, что

$$\operatorname{osc}(w,\rho)\leqslant\tau\rho^{\alpha},\ 0\leqslant\rho\leqslant\delta.\ \blacksquare \tag{1.69}$$

§ 2. Гладкость решений многомерных вариационных задач

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^N$ задан равномерно эллиптический оператор

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) \tag{2.1}$$

с ограниченными и измеримыми коэффициентами. Обозначим через $\lambda_1 > 0$ и λ_2 нижнюю и верхнюю грани вещественной симметричной матрицы $\|a_{ij}(x)\|$, так что для любых вещественных $\xi_1, \ldots, \xi_N$ имеют место неравенства

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2, \quad x \in D. \tag{2.2}$$

Определение 2.1*). *Обобщенным (из $W_2^1(D)$) решением уравнения $Lu = 0$ называется функция $u(x) \in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$, которая для любой функции $\psi(x) \in W_2^1(D)$ с компактным в D носителем удовлетворяет интегральному тождеству:*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_D a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты оператора L ограничены и измеримы в области D. Тогда всякое обобщенное решение уравнения $Lu=0$ принадлежит классу $\mathfrak{B}(D, \gamma)$ с $\gamma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $y \in D$, $\delta(y) > 0$ — расстояние от точки y до $\Gamma = \partial D$. Пусть k — любое действительное число, положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} u(x) - k, & \text{при } x \in A(k), \\ 0, & \text{при } x \in (D \setminus A(k)). \end{cases} \tag{2.4}$$

Ясно, что $\varphi(x) \in W_2^1(D)$. Возьмем любое положительное число $\sigma < \delta(y)$ и любую функцию $g(t) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^1_+)$, равную нулю при $t \in [\sigma, +\infty)$. Функция $\psi(x) = \varphi(x)g(r_{xy}) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, она равна нулю вне шара $K(y, \sigma)$. Запишем тождество (2) для $u(x)$ и $\psi(x) = \varphi(x)g(r_{xy})$, получим

*) Это определение отличается от данного в гл. 2 § 4 тем, что оно приспособлено для случая неограниченной области D.

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_D a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (\varphi g)}{\partial x_j} dx = 0. \tag{2.5}$$

Так как $\psi \equiv 0$ вне $K(y, \sigma)$, то (5) в сферических координатах с центром в точке y будет иметь вид

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_0^\sigma d\rho \left\{ \int_{\partial K(y,\rho)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi g'(\rho) \cos(\rho, x_j)\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_{\partial K(y,\rho)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} g \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} ds \right\} = 0. \tag{2.6}$$

Проинтегрируем второй интеграл в (6) по частям, получим

$$\int_0^\sigma d\rho\, g(\rho) \int_{\partial K(y,\rho)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} ds =$$

$$= -\int_0^\sigma g'(\rho)\, d\rho \int_0^\rho dt \int_{\partial K(y,t)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} ds =$$

$$= -\int_0^\sigma g'(\rho)\, d\rho \int_{K(y,\rho)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx. \tag{2.7}$$

Подставим (7) в (6) и обозначим $\cos(\rho, x_j) = \nu_j$,

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_0^\sigma d\rho\, g'(\rho) \left[\int_{\partial K(y,\rho)} a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\, ds - \int_{K(y,\rho)} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \right] = 0. \tag{2.8}$$

В силу произвольности σ и $g(\rho)$ отсюда следует, что выражение в квадратных скобках в (8) равно нулю для почти всех $\rho < \delta(y)$, т. е.

$$\int_{\partial K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi\, ds = \int_{K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx. \tag{2.9}$$

Подставляя сюда выражение (4) для $\varphi(x)$, получим

$$\int_{A(k) \cap \partial K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} (u - k)\, ds =$$

$$= \int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx. \tag{2.10}$$

Левую часть равенства (10) оценим сверху с помощью неравенства Коши — Буняковского и формулы (2)

$$\left| \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \nu_j \frac{\partial u}{\partial x_i} (u-k)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} (u-k) \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \nu_i \nu_j \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}^{1/2} ds \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2 \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} (u-k)\, |\nabla u|\, ds, \text{ ибо } \sum_{i=1}^{N} \nu_i^2 = 1. \tag{2.11}$$

Правую часть (10) оценим снизу с помощью формулы (2)

$$\int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho)} \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geqslant \lambda_1 \int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho)} |\nabla u|^2 dx. \tag{2.12}$$

Сопоставляя (10) — (12) и вновь применяя неравенство Коши — Буняковского, получим:

$$\lambda_1 \int_0^\rho dt \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,t)} |\nabla u|^2 ds = \lambda_1 \int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho)} |\nabla u|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2 \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} (u-k)\, |\nabla u|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_2 \left\{ \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} (u-k)^2 ds \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,\rho)} |\nabla u|^2 ds \right\}^{1/2}. \tag{2.13}$$

Положим

$$\mu_1(t) = \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,t)} (u-k)^2 ds, \quad \mu_2(t) = \int\limits_{A(k)\cap \partial K(y,t)} |\nabla u|^2 ds. \tag{2.14}$$

Тогда (13) можно переписать в виде

$$\int_0^\rho \mu_2(t)\, dt \leqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sqrt{\mu_1(\rho)\, \mu_2(\rho)}. \tag{2.15}$$

Применяя к (15) неравенство Лере [1, с. 179], получим

$$\int_0^{\rho_1} \mu_2(t)\, dt \leqslant \frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)^2} \int_0^{\rho_2} \mu_1(t)\, dt, \quad \gamma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \tag{2.16}$$

или, вспоминая (14),

$$\int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho_1)} |\nabla u|^2 dx \leqslant \frac{\gamma}{(\rho_2-\rho_1)^2} \int\limits_{A(k)\cap K(y,\rho_2)} (u-k)^2 dx, \qquad (2.17)$$

$0<\rho_1<\rho_2<\delta(y)$. Таким образом, мы получили неравенство (1.1), определяющее класс $\mathfrak{B}(D, \gamma)$. Неравенство (1.2) получается в силу того, что $-u(x)$ также удовлетворяет условиям теоремы. ■

Следствие 2.1. *Любое обобщенное решение уравнения $Lu=0$ удовлетворяет условию Гельдера на каждом компакте $D_0\subset D$.*

Переходим к изучению вопроса о гладкости экстремалей. Пусть $F(x)=F(x_1, \ldots, x_N)\in C^{(2)}(\mathbf{R}^N)$, обозначим

$$F_i(x)=\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad F_{ij}(x)=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

и пусть существуют два положительных числа λ_1 и λ_2, таких, что для любой точки $x\in\mathbf{R}^N$ и любого вектора $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ выполняются неравенства

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} F_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2. \qquad (2.18)$$

Пусть $D\subset\mathbf{R}^N$ — произвольная область.

Определение 2.2. *Функция $\tilde u(x)\in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$ называется экстремалью интеграла*

$$I(u)=\int\limits_D F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right) dx \qquad (2.19)$$

в области D, если для любой функции $\psi\in W_2^1(D)$ с компактным носителем справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_D F_i\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\tilde u}{\partial x_N}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,dx=0. \qquad (2.20)$$

Это определение корректно, ибо в силу условия (18) функция $F_i\left(\frac{\partial\tilde u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\tilde u}{\partial x_N}\right)$ интегрируема с квадратом по любому компакту, лежащему в D. Действительно, взяв в условии (18) вектор ξ вида $\xi=(0, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, 0)$, получим, что для всех $x\in\mathbf{R}^N$ $c_1\leqslant F_{ij}(x)\leqslant c_2$, c_1, c_2 — постоянные. Отсюда, интегрируя, получим

$$|F_i(x)|\leqslant|F_i(0)|+\left|\int\limits_0^x F_{ij}\,dx_j\right|\leqslant c_3+c_2|x|.$$

Поэтому

$$\left|F_i\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}\right)\right| \leqslant c_2 |\nabla \tilde{u}| + c_3,$$

и, стало быть, $F_i\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}\right) \in L_2$ на любом компакте из D.

Теорема 2.2. *Любая экстремаль $\tilde{u}(x)$ интеграла $I(u)$ в области D имеет первые производные, удовлетворяющие условию Гельдера на каждом компакте $D_0 \subset D$.*

Доказательство. Пусть $D_1 \subset D$ ограниченная область, такая, что $D_0 \subset D_1$ и расстояние r от D_1 до ∂D больше нуля. Пусть $\sigma > 0$, таково, что $\sigma < r$, а $s \leqslant N$ — натуральное число, положим для любого натурального числа n

$$u_n(x) = \tilde{u}\left(x_1, \ldots, x_s + \frac{\sigma}{n}, \ldots, x_N\right). \tag{2.21}$$

Поскольку $u_n(x)$ отличается от $\tilde{u}(x)$ лишь сдвигом вдоль оси x_s на величину меньшую, чем расстояние от D_1 до ∂D, то $u_n(x) \in W_2^1(D_1)$ и в силу (20) для любой функции $\psi(x) \in W_2^1(D_1)$ с компактным в D_1 носителем имеем

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{D_1} F_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0. \tag{2.22}$$

Обозначим через $w_n(x)$ разность $w_n(x) = u_n(x) - \tilde{u}(x), w_n(x) \in W_2^1(D_1)$ и запишем тождество для $x \in D_1$

$$F_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right) - F_i\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{dF_i}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_N}\right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_0^1 F_{ij}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_N}\right) \frac{\partial w_n}{\partial x_j} dt. \tag{2.23}$$

Вводя обозначение

$$a_{ij}^{(n)}(x) = \int_0^1 F_{ij}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_1} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} + t\frac{\partial w_n}{\partial x_N}\right) dt,$$

перепишем (23) в виде

$$F_i\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_N}\right) - F_i\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x_N}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} a_{ij}^{(n)}(x)\,\frac{\partial w_n}{\partial x_j} = 0, \tag{2.24}$$

причем в силу (18) для матрицы $\|a_{ij}^{(n)}(x)\|$ справедливо соотношение

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^{(n)}(x)\,\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2 \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2. \tag{2.25}$$

Сопоставляя (20), (22) и (24), найдем, что для любой функции $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ с компактным носителем в D_1 справедливо равенство

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{D_1} a_{ij}^{(n)} \frac{\partial w_n}{\partial x_j}\,\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx = 0. \tag{2.26}$$

Отсюда, в силу теоремы 1 заключаем, что $w_n(x) \in \mathfrak{B}(D_1, \gamma)$ с $\gamma = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2$. Поэтому функции $w_n(x)\frac{n}{\sigma} = \frac{u_n(x) - \tilde{u}(x)}{\sigma/n}$ также принадлежат $\mathfrak{B}(D_1, \gamma)$. Известно [24, с. 154], что если $u(x) \in \overset{\text{loc}}{W}{}_2^1(D)$, то разностные отношения сходятся в $L_2(K)$, $K \subset D$ — любой компакт, к обобщенным производным $\partial\tilde{u}/\partial x_s$. Следовательно, так как $\frac{u_n(x) - \tilde{u}(x)}{\sigma/n} \in \mathfrak{B}(D_1, \gamma)$ и в силу леммы 1.1 класс $\mathfrak{B}(D_1, \gamma)$ замкнут относительно сходимости в среднем, производная $\partial\tilde{u}/\partial x_s$ также принадлежит классу $\mathfrak{B}(D_1, \gamma)$; s — любое и все производные $\partial\tilde{u}/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, принадлежат классу $\mathfrak{B}(D_1, \gamma)$. А тогда по теореме 1.1 производные $\partial\tilde{u}/\partial x_i$ удовлетворяют условию Гельдера на любом компакте, содержащемся в D_1, в частности на D_0. ■

Следствие 2.2. *Если $F(x)$ — аналитическая функция, то экстремали $u(x)$ также аналитичны в D.*

В самом деле, мы доказали, что $u(x) \in C^{(1,\mu)}(D)$. Согласно теореме Морри (см. [1, с. 164]) если экстремаль принадлежит $C^{(1)}$, то она принадлежит и $C^{(\infty)}$, а по теореме Бернштейна (см. там же), если $F(x)$ — аналитична и $u(x) \in C^{(3)}$, то $u(x)$ — аналитична.

Другие обширные приложения теорем 1.1 и 2.1 к квазилинейным уравнениям изложены в книге [11].

Литературные указания

Глава 5 представляет собой изложение работы [15].

ГЛАВА 6. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА $2m$-го ПОРЯДКА

Здесь мы рассмотрим простейший вариант краевой задачи в обобщенной постановке для эллиптического оператора $2m$-го порядка.

Пусть L — линейный дифференциальный оператор порядка $2m$, $m \geqslant 1$, записанный в дивергентной форме,

$$Lu = \sum_{|\alpha|,\ |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} (a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u), \tag{1}$$

α и β — мультииндексы, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$, все α_i и β_i — неотрицательные целые числа, $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} \ldots D_N^{\alpha_N}$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!$, $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_N^{\alpha_N}$, $|x| = \left\{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right\}^{1/2}$.

Определение 1. *Оператор* (1) *называется эллиптическим в точке* $x \in D$, *если для любого действительного вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$

$$\left| \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^{\alpha} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\beta} \right| \geqslant c_0(x) |\xi|^{2m}, \quad c_0(x) > 0. \tag{2}$$

Оператор (1) *называется эллиптическим в* D, *если он эллиптичен в каждой точке области* D, *и равномерно эллиптическим в* D, *если существует константа* $c_1 > 0$, *такая, что*

$$\frac{1}{c_1} |\xi|^{2m} \geqslant \left| \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \xi^{\alpha} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\beta} \right| \geqslant c_1 |\xi|^{2m}. \tag{3}$$

Оператор (1) *называется сильно эллиптическим в* D, *если существует константа* $c > 0$, *такая, что для всех* $x \in D$ *и любого действительного вектора* ξ

$$\operatorname{Re}\left\{ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \right\} \geqslant c |\xi|^{2m}. \tag{4}$$

Из определения 1 видно, что если коэффициенты при старших производных у оператора L действительны, то L — сильно эллиптичен тогда и только тогда, когда L или $-L$ равномерно эллиптичен в D. Мы будем изучать общий случай комплексных коэффициентов и скалярное произведение (f, g) функций f, $g \in L_2(D)$ будем записывать в виде $(f, g) = \int\limits_D f \bar{g} dx$, черта над функцией означает комплексно сопряженную величину.

Рассмотрим в ограниченной области D с границей Γ, $(D+\Gamma) \in A^{(1)}$, простейшую краевую задачу для эллиптического оператора L

$$\begin{cases} Lu = f \text{ в } D, \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \end{cases} \tag{5}$$

ν — нормаль на Γ. Задача (5) называется задачей Дирихле. Мы будем искать обобщенные решения задачи (5) из класса $W_2^m(D)$.

Определение 2. *Пусть* $f \in L_2(D)$, *а* $\varphi \in W_2^m(D)$. *Обобщенным решением задачи Дирихле* (5) *называется функция* $u(x)$, *такая, что* $(u - \varphi) \in \mathring{W}_2^m(D)$ *и для любой* $\psi \in \mathring{W}_2^m(D)$ *выполняется интегральное тождество*:

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha \psi) = (f, \psi). \tag{6}$$

Введем обозначение $B[u, \psi]$ для билинейной формы, стоящей в левой части (6). Тогда интегральное тождество (6) может быть записано в виде

$$B[u, \psi] = (f, \psi) \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^m(D). \tag{7}$$

Тождество (6) получается путем умножения уравнения $Lu = f$ на произвольную функцию $\psi \in C_0^\infty(D)$ и интегрирования по частям. Условие $(u - \varphi) \in \mathring{W}_2^m(D)$ есть обобщенная трактовка граничных условий задачи (5), ибо принадлежность $u - \varphi$ классу $\mathring{W}_2^m(D)$ означает, что каждая из обобщенных производных $D^j u - D^j \varphi$, $|j| \leqslant m$, является пределом в $L_2(D)$ некоторой последовательности функций из $C_0^\infty(D)$.

Обозначим через $\|\cdot\|_k$ норму элемента в пространстве $W_2^k(D)$, т. е.

$$\|u\|_k = \Big\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_D |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big\}^{1/2}. \tag{8}$$

Напомним, что пространство $W_2^k(D)$ есть пополнение пространства $C^\infty(D)$ по норме (8), а $\mathring{W}_2^k(D)$ — пополнение C_0^∞ по той же норме.

Начнем доказательство существования обобщенного решения задачи Дирихле для сильно эллиптического оператора L с вывода неравенства Гординга.

Лемма 1. *Пусть все коэффициенты сильно эллиптического оператора* L *ограничены, а коэффициенты при старших членах непрерывны. Тогда существуют положительные постоянные* c *и* C, *такие, что для всех* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geqslant c\|u\|_m^2 - C\|u\|_0^2. \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно доказать (9) для $u \in C_0^\infty(D)$ (для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$ неравенство (9) получается тогда предельным переходом).

Покажем, прежде всего, что для любого $\varepsilon > 0$ и натурального k найдется константа $c = c(k, \varepsilon) > 0$, такая, что справедливо неравенство

$$\|u\|_{k-1}^2 \leqslant \varepsilon\|u\|_k^2 + c\|u\|_0^2 \tag{10}$$

для всех $u \in C_0^\infty(D)$. В самом деле, продолжая функцию u нулем на все пространство $\mathbf{R}^N$ и пользуясь преобразованием Фурье, мы можем норму $\|u\|_j$ с любым j представить в виде

$$\|u\|_j^2 = (2\pi)^{-N} \sum_{|\alpha| \leqslant j} \int_{\mathbf{R}^N} |\xi^\alpha|^2 |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi, \tag{11}$$

ибо в силу равенства Парсеваля

$$\int_{\mathbf{R}^N} |D^\alpha u(x)|^2 dx = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} |\widetilde{D^\alpha u}(\xi)|^2 d\xi,$$

а $\widetilde{D^\alpha u}(\xi) = (i\xi)^\alpha \tilde{u}(\xi)$. Неравенство (10) следует теперь из (11) и из того, что при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{|\alpha| \leqslant k-1} |\xi^\alpha|^2 \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha| \leqslant k} |\xi^\alpha|^2 + c \text{ для всех } \xi \in \mathbf{R}^N,$$

где c зависит лишь от ε и k.

Вначале докажем неравенство Гординга для однородного (т. е. совпадающего со своей главной частью) оператора L с постоянными коэффициентами. Вновь применяя преобразование Фурье и пользуясь условием сильной эллиптичности (4), получим:

$$\operatorname{Re} B[u, u] = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u) =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} (a_{\alpha\beta} (i\xi)^\beta \tilde{u}, (i\xi)^\alpha \tilde{u}) =$$

$$= \operatorname{Re} \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \geqslant$$

$$\geqslant c_1 \int_{\mathbf{R}^N} |\xi|^{2m} |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi \geqslant c_2 (\|u\|_m^2 - \|u\|_{m-1}^2). \qquad (12)$$

Последнее неравенство имеет место в силу (11), $c_2>0$. Оценивая член с $\|u\|_{m-1}^2$ по (10), выводим из (12) неравенство (9).

Теперь рассмотрим общий случай. Докажем (9) для функций $u \in C_0^\infty(D)$, у которых носитель лежит в достаточно малой окрестности произвольной фиксированной точки $x_0 \in D$. Имеем по доказанному

$$\operatorname{Re} B[u, u] = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbf{R}^N} a_{\alpha\beta}(x_0) D^\beta u \overline{D^\alpha u} dx +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \int_{\mathbf{R}^N} (a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0)) D^\beta u \overline{D^\alpha u} dx +$$

$$+ \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|+|\beta|<2m} \int_{\mathbf{R}^N} a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \overline{D^\alpha u} dx \geqslant c_3 \|u\|_m^2 - c_4 \|u\|_0^2 + j_1 + j_2, \qquad (13)$$

где через j_1 и j_2 обозначены два последних интеграла, а $c_3 > 0$ и c_4 — константы. Для j_1 имеем оценку

$$|j_1| \leqslant \delta \|u\|_m^2, \qquad (14)$$

где $\sup\limits_{|\alpha|=|\beta|=m,\, x \in R^N \cap \operatorname{supp} u(x)} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0)| = \delta$. Если носитель $u(x)$ достаточно мал, то $\delta < c_3/2$ в силу непрерывности $a_{\alpha\beta}(x)$. Применив для оценки j_2 неравенство Коши — Буняковского, получим

$$|j_2| \leqslant c_5 \|u\|_m \|u\|_{m-1}.$$

Отсюда с помощью неравенства $2|ab| \leqslant \varepsilon |a|^2 + \varepsilon^{-1} |b|^2$, $\varepsilon>0$ — любое, и оценки (10) получим оценку

$$|j_2| \leqslant \varepsilon \|u\|_m^2 + c_6 \|u\|_0^2. \qquad (15)$$

Подставляя (14) с $\delta = c_3/2$ и (15) в (13), получим

$$\operatorname{Re} B[u, u] \geqslant c_7 \|u\|_m^2 - c_8 \|u\|_0^2. \qquad (16)$$

Наконец, для доказательства (9) в общем случае возьмем разбиение единицы

$$\omega_j \in C_0^\infty(D), \ \omega_j(x) \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^n \omega_j^2(x) \equiv 1, \qquad (17)$$

причем носители всех ω_j достаточно малы, как указано выше.

Применяя оценку (16) и неравенство Коши — Буняковского, имеем

$$\operatorname{Re} B[u, u] = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_D a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u \overline{D^\alpha u}\, dx =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} \int_D \omega_j^2 a_{\alpha\beta} D^\beta u \overline{D^\alpha u}\, dx =$$

$$= \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \sum_j \int_D a_{\alpha\beta} D^\beta (\omega_j u) D^\alpha \overline{(\omega_j u)}\, dx + O(\|u\|_m \|u\|_{m-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_j (c_7 \|\omega_j u\|_m^2 - c_8 \|\omega_j u\|_0^2) + O(\|u\|_m \|u\|_{m-1}) \geqslant c\|u\|_m^2 - C\|u\|_0^2 \tag{18}$$

(здесь дважды применялось правило Лейбница для дифференцирования произведения и оценка (10)). ■

Лемма 2. *Пусть $B[x, y]$ — билинейная форма в гильбертовом пространстве H с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\ ,\ )$, удовлетворяющая двум условиям*:

1) $|B[x, y]| \leqslant \alpha \|x\| \|y\|$,

2) $|B[x, x]| \geqslant \beta \|x\|^2$

для всех x и $y \in H$, $\alpha, \beta > 0$ — константы. Тогда каждый ограниченный линейный функционал $F(x)$ в H можно представить в виде

$$F(x) = B[y_0, x] = \overline{B[x, y_{00}]},$$

причем элементы y_0 и y_{00} определяются по F однозначно.

Доказательство. Так как билинейная форма $B[y, x]$ при фиксированном y является линейным ограниченным функционалом, то по теореме Рисса существует единственный элемент z, такой, что

$$B[y, x] = (z, x). \tag{19}$$

Тем самым определен линейный оператор $Ay = z$. Оператор A имеет ограниченный обратный, ибо $\beta\|y\|^2 \leqslant |B[y, y]| = |(z, y)| \leqslant \|y\| \|z\|$, т. е. $\|Ay\| = \|z\| \geqslant \beta\|y\|$. Поэтому область значений $R(A)$ оператора A является замкнутым линейным подпространством в H (если $z_n \in R(A)$ и $z_n \to z$, то $y_n = A^{-1} z_n \to y$ и $Ay = z$, т. е. $z \in R(A)$). Покажем, что $R(A) = H$. Если $R(A) \neq H$, то в H существует элемент $\tilde{y} \neq 0$ ортогональный к $R(A)$, т. е. $(Ay, \tilde{y}) = 0$ для всех $y \in H$. Тогда $B[\tilde{y}, \tilde{y}] = (A\tilde{y}, \tilde{y}) = 0$, что невозможно в силу свойства 2) билинейной формы B, ибо $\tilde{y} \neq 0$.

Функционал $F(x)$ представим в виде (z_0, x), где $z_0 \in H$. [Т]ак как $R(A)=H$, то существует элемент y_0, такой, что $z_0 = Ay_0$. Поэтому

$$F(x) = (z_0, x) = B[y_0, x]. \qquad (20)$$

[Д]окажем, что y_0 определяется по F однозначно. Если есть [е]ще один элемент $y_1 \neq y_0$, для которого справедливо (20), то [B]$[y_0-y_1, x]=0$ для всех $x \in H$ и, положив $x=y_0-y_1$, прихо[д]им к противоречию с 2). Проведенные рассуждения приме[н]имы и к форме $\overline{B[y, x]}$. ■

Теорема 1. *Пусть L — сильно эллиптический оператор [с] ограниченными коэффициентами, и коэффициенты главной [ч]асти оператора непрерывны, пусть $f \in L_2(D)$, а $\varphi \in \mathring{W}_2^m(D)$. [С]уществует постоянная λ_0, такая, что для любого λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \lambda_0$ [з]адача Дирихле для оператора $L' = L + \lambda$ имеет единственное [о]бобщенное решение.*

Доказательство. Обозначим через $B[u, \psi]$, $B'[u, \psi]$ [б]илинейные формы, отвечающие операторам L и L' соответственно. Поскольку для $B[u, u]$, $u \in \mathring{W}_2^m(D)$, выполнено неравенство Гординга (9) с константами $c>0$ и C, то для билинейной формы $B'[u, \psi]$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\, B'[u, u] \geqslant c\|u\|_m^2, \quad u \in \mathring{W}_2^m(D),$$

если $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \lambda_0 = C$, ибо $B'[u, u] = B[u, u] + \lambda\|u\|_0^2$. Из неравенства Коши — Буняковского следует ограниченность формы $B'[u, \psi]$

$$|B'[u, \psi]| \leqslant A\|u\|_m \|\psi\|_m \qquad \forall u, \psi \in W_2^m(D). \qquad (21)$$

Итак, для $B'[u, \psi]$ в пространстве $\mathring{W}_2^m(D)$ выполнены оба условия леммы 2. Рассмотрим линейный ограниченный функционал в пространстве $\mathring{W}_2^m$

$$F(\psi) = (f, \psi) - B'[\varphi, \psi].$$

Согласно лемме 2 существует (единственная) функция $v \in \mathring{W}_2^m(D)$, для которой

$$F(\psi) = B'[v, \psi].$$

Из двух последних равенств

$$B'[v+\varphi, \psi] = (f, \psi) \text{ для всех } \psi \in \mathring{W}_2^m(D), \qquad (22)$$

т. е. функция $u=v+\varphi$ является единственным обобщенным из $W_2^m(D)$ решением задачи Дирихле для оператора L' $(u - \varphi \in \mathring{W}_2^m(D))$. ■

На этом пути нетрудно доказать теорему об альтернативе Фредгольма.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* $\varphi\equiv 0$. *Тогда имеет место альтернатива Фредгольма: либо для любой функции* $f\in L_2(D)$ *существует единственное обобщенное решение задачи Дирихле, либо существует конечное число линейно-независимых решений* v_j $(j=1, ..., p)$ *однородной задачи Дирихле для сопряженного оператора* L^* *и задача Дирихле для оператора* L *разрешима лишь в случае, если* $(f, v_j)=0$, $j=1, ..., p$.

Доказательство. Мы рассматриваем обобщенные решения, поэтому решение u задачи Дирихле для оператора L должно удовлетворять условиям: $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$ и

$$B[u, \psi]=(f, \psi) \text{ для всех } \psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D). \tag{23}$$

Зафиксируем $\lambda>0$ из условия $\lambda\geqslant\lambda_0$, где λ_0 — константа, о которой шла речь в теореме 1, и положим, как и там, $L'=L+\lambda$ и $B'[u, \psi]=B[u, \psi]+\lambda(u, \psi)$. В силу теоремы 1 для любой $g\in L_2(D)$ существует единственное решение w задачи Дирихле: $L'w=g$, $w\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$. Положим $w=L'^{-1}g$, тогда решение задачи Дирихле $Lu=f$, $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$ эквивалентно решению функционального уравнения

$$u-Tu=f_1, \tag{24}$$

где $T=\lambda L'^{-1}$, $f_1=L'^{-1}f$, ибо требуется найти функцию $u\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$, удовлетворяющую интегральному тождеству $B[u, \psi]=(f, \psi)$, а оно совпадает с тождеством $B'[u, \psi]=(f+\lambda u, \psi)$, $\psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$. Оператор T является вполне непрерывным линейным оператором в $L_2(D)$. В самом деле, если $w=L'^{-1}g$, то $B'[w, \psi]=(g, \psi)$ для всех $\psi\in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$, в частности, при $\psi=w$ имеем:

$$c\|w\|_m^2\leqslant|B'[w, w]|=|(g, w)|\leqslant\|w\|_0\|g\|_0\leqslant\|w\|_m\|g\|_0,$$

отсюда $c\|w\|_m\leqslant\|g\|_0$, т. е. оператор $L'^{-1}=1/\lambda T$ переводит ограниченное множество в $L_2(D)$ в ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^m(D)$, т. е. в компактное множество в $L_2(D)$, что и утверждалось.

Таким образом, для уравнения (24) справедлива альтернатива Фредгольма (см. [17]), т. е. либо для любой $f_1\in L_2(D)$ существует единственное решение уравнения (24), либо однородное уравнение $u-Tu=0$ имеет нетривиальные решения и уравнение (24) разрешимо только, если $(f_1, v_j)=0$ для всех решений v_j сопряженного однородного уравнения $v-T^*v=0$.

В первом случае существует единственное обобщенное решение задачи Дирихле для оператора L при любой функции $f \in L_2(D)$ (единственность следует из того, что при $f=0$ и $f_1 = L'^{-1}f = 0$).

Рассмотрим второй возможный случай. Заметим, прежде всего, что теорема 1 справедлива и для оператора $L^* = \sum\limits_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a}_{\beta\alpha} D^\beta)$, возможно, с другой постоянной λ_0'. Покажем, что если $\lambda \geqslant \max\{\lambda_0, \lambda_0'\}$, то

$$T^* = \lambda (L^* + \lambda)^{-1}. \qquad (25)$$

В самом деле, по определению T^*

$$(T^* v, g) = (v, Tg) \text{ для всех } v, g \in L_2(D). \qquad (26)$$

Положим $Tg = h$, $T^*v = w$. Пусть теперь $S = \lambda(L^* + \lambda)^{-1}$ и $Sv = w_1$. Тогда по теореме 1 в применении к оператору $L^* + \lambda$ получим

$$B_*'[w_1, \psi] = \lambda (v, \psi) \text{ для всех } \psi \in \overset{\bullet}{W}{}_2^m(D), \; B_*'[w_1, \psi] = \overline{B'[\psi, w_1]}. \qquad (27)$$

Отсюда, положив $\psi = h = Tg$, будем иметь

$$\overline{B'[h, w_1]} = B_*'[w_1, h] = \lambda (v, h) = \lambda (v, Tg) = \lambda (T^* v, g) =$$
$$= \lambda (w, g) = \lambda \overline{(g, w)} = \overline{B'[h, w]}, \qquad (28)$$

последнее равенство выполняется в силу существования решения задачи Дирихле для оператора L', причем в соответствующем интегральном тождестве взято $\psi = w$. Итак, $B'[h, w_1 - w] = 0$ при всех $h \in \overset{\bullet}{W}{}_2^m(D)$. Взяв $h = w_1 - w$, получим, что $w_1 = w$, т. е. $S = T^*$ и (25) доказано. Из (25) и (27) мы видим, что уравнение $v - T^*v = 0$ эквивалентно равенству

$$\overline{B[\psi, v]} = 0 \text{ для всех } \psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^m(D); \; v \in \overset{\bullet}{W}{}_2^m(D), \qquad (29)$$

т. е. каждое нетривиальное решение уравнения $v - T^*v = 0$ является решением однородной задачи Дирихле для сопряженного оператора L^*. Наконец, из условия $(f_1, v_j) = 0$ следует, что $(f, v_j) = 0$, ибо

$$(f_1, v_j) = (L'^{-1} f, v_j) = (f, (L'^{-1})^* v_j) = \frac{1}{\lambda} (f, T^* v_j) = \frac{1}{\lambda} (f, v_j),$$

v_j — решения уравнения $v - T^*v = 0$. ∎

Литературные указания

Материал этой главы взят из [26].

ЛИТЕРАТУРА

1. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М., ИЛ, 1957.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М., ГИТТЛ, 1953.
3. Петровский И. Г. Метод Перрона решения задачи Дирихле. — УМН, 1940, вып. 8, с. 107—114.
4. Келдыш М. В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. — УМН, 1940, вып. 8, с. 171—231.
5. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М., «Мир», 1971.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М., ГИТТЛ, 1951.
7. Ильин В. А., Шишмарев И. А. О связи между обобщенным и классическим решением задачи Дирихле. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1960, т. 24, № 4, с. 521—530.
8. Титчмарш Э. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М., ИЛ, 1961.
9. Ильин В. А. Проблемы локализации и сходимости для рядов Фурье по фундаментальным системам функций оператора Лапласа. — УМН, 1968, т. 23, вып. 2, с. 61—120.
10. Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М. Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. — УМН, 1976, т. 31, вып. 6, с. 28—83.
11. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М., «Наука», 1964.
12. Шишмарев И. А. Априорная оценка решений задачи Дирихле для эллиптического оператора с разрывными коэффициентами. — ДАН, 1960, т. 131, № 2, с. 269—272.
13. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1960, т. 24, № 6, с. 883—896.
14. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
15. Де Джорджи. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari. — «Mem. Accad. Sci. Torino», 1957, 3, 25—43 (перевод сб. «Математика», 1960, 4 : 6, с. 23—38).
16. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1953.
17. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.
18. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М., «Наука», 1966.
19. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
20. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., «Наука», 1969.
21. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М., ИЛ, 1949.
22. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М., ГИТТЛ, 1952.
23. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Об эквивалентности систем обобщенных и классических собственных функций. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1960, т. 24, № 5, с. 757—774.
24. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1966.
25. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., ИЛ, 1963.
26. Гординг Л. Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. — «Math. Scand.», 1953, 1, 55—72.