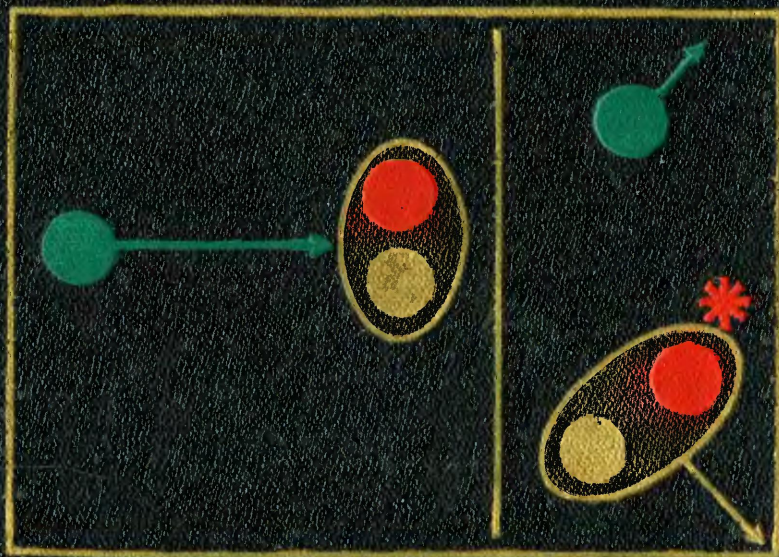


ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Эрик ШМИД и Хорст ЦИТЕЛЬМАН



Эрих Шмид и Хорст Цигельман

ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Перевод с английского
В. И. КУКУЛИНА

под редакцией
Ю. М. ШИРОКОВА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1979

22.314
Ш 73
УДК 530.1

Erich W. Schmid
Horst Ziegelmann

THE QUANTUM MECHANICAL THREE-BODY PROBLEM

Pergamon Press
Friedr. Vieweg + Sohn
Braunschweig

Шмид Э. и Цигельман Х. Проблема трех тел в квантовой механике, монография, перев. с англ. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1979, 272 стр.

Книга посвящена квантовой механике трехчастичных систем. Детально рассматриваются уравнения Фаддеева для T -матрицы, резольвенты, волновой функции рассеяния и операторов перехода, служащие основным средством квантовомеханического исследования трехчастичных систем. В книгу включены также два дополнения, содержащие подробное описание и сопоставление наиболее широко используемых методов решения трехчастичных интегральных уравнений, не затронутых в основном тексте, и обобщение теории Фаддеева на случай четырех и большего числа частиц.

Рис. 49, табл. 7, библи.— 203 назв.

Эрих Шмид и Хорст Цигельман

ПРОБЛЕМА ТРЕХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

М., 1979 г., 272 стр. с илл.

Редактор В. Я. Дубнова
Технический редактор В. Н. Кондакова
Корректоры О. А. Сигал, О. М. Кривенко
ИБ № 2457

Сдано в набор 10.05.79. Подписано к печати 05.10.79. Бумага 84×108^{1/32}, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 14,28. Уч.-изд. л. 14,31. Тираж 4800 экз. Заказ № 533. Цена книги 1 р. 70 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Ш 20402 — 155 132-79. 1704020000
053(02)-79

© Перевод на русский язык.
Наука. Главная редакция
физико-математической
литературы, 1979

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	6
Предисловие автора к русскому изданию	8
Предисловие авторов	9
Глава 1. Введение	11
1. Эксперименты по рассеянию с развалом на три частицы	12
2. Трудности теории	15
3. Значение задачи трех тел для ядерной физики	19
Глава 2. Некоторые понятия квантовой механики	22
1. Задача двух тел	22
1.1. Гамильтониан	22
1.2. Граничное условие для состояний рассеяния	23
1.3. Оператор Мёллера	24
1.4. Уравнение для резольвенты и уравнение Липмана — Швингера	27
1.5. S -матрица	32
1.6. T -матрица	35
1.7. Соотношение унитарности	36
2. Задача трех тел	38
2.1. Гамильтониан	38
2.2. Двухчастичные подсистемы в трехчастичном пространстве	39
2.3. Граничные условия и операторы Мёллера	41
2.4. Уравнение для резольвенты и уравнение Липмана — Швингера	44
Глава 3. Уравнения Фаддеева	48
1. Уравнения Фаддеева для T -матрицы	48
2. Уравнения Фаддеева для резольвенты	55
3. Уравнения Фаддеева для волновых функций рассеяния	56
4. S -матрица	58
5. Уравнения Фаддеева для операторов перехода	62
6. Соотношение унитарности	67
Глава 4. Методы решения уравнений Фаддеева	72
1. Разложение уравнений Фаддеева по парциальным волнам	72
2. Некоторые понятия теории интегральных уравнений	77
3. Применение к уравнениям Фаддеева	82

Глава 5. Сепарабельные потенциалы	84
1. Сепарабельные потенциалы в задаче двух тел	84
2. Решение уравнений Фаддеева с сепарабельными потен- циалами	91
2.1. Рассеяние с перестройкой	91
2.2. Развал на три частицы	94
2.3. Одинаковые частицы	95
2.4. Численное решение уравнений Фаддеева с сепара- бельными потенциалами	100
2.5. Результаты для трех одинаковых частиц	108
2.6. Модель Ватсона	113
2.7. Результаты для трехнуклонной системы	116
Глава 6. Решение уравнений Фаддеева с локальным по- тенциалом	123
1. Прямое решение уравнений Фаддеева с локальным потен- циалом	123
2. Метод Шмидта (вейнберговский метод квазичастиц)	127
3. Метод квазичастиц в задаче трех тел	134
3.1. Уравнения Альта — Грассбергера — Сандхаса	134
3.2. Применение метода квазичастиц к уравнению для трехчастичной резольвенты	137
3.3. Практические вычисления с помощью квазичастич- ного метода	151
Глава 7. Решение уравнений Фаддеева с помощью падё- приближения	155
1. Метод падё-приближения	155
2. Падё-приближение и интегральные уравнения	157
3. Падё-приближение и уравнения Фаддеева	158
Глава 8. Вариационные методы	162
1. Вариационные методы для связанных состояний	162
2. Вариационные методы для упругого и многоканального рассеяния	168
3. Вариационные методы для многоканального рассеяния с учетом трехчастичного развала	179
3.1. Гиперсферические функции	183
3.2. Состояния с последующим распадом	190
3.3. Метод Пайнера — Шлезингера — Райта	196
Дополнение 1. Методы решения и приближения для ин- тегральных уравнений теории многочас- тичного рассеяния	204
A. Сепарабельные разложения операторов рассеяния	204
1. Унитарно-полюсное разложение	205
2. Метод Бейтмана	211
3. Метод Адхикари — Слоана	217
4. О сходимости сепарабельных разложений операторов теории рассеяния	223
5. Сравнение результатов, полученных в $3N$ -системе с разными сепарабельными разложениями	225

Б. Итерационные методы	227
1. Метод ортогонального проектирования	229
2. Метод Сасакавы — Нойеса — Ковальского	241
Заключение	249
Дополнение 2. Интегральные уравнения для рассеяния N частиц ($N > 3$)	251
А. Интегральные уравнения для четырех частиц	251
Б. Интегральные уравнения для N частиц	259
Литература	264
Дополнительная литература	269
Литература к Дополнению 1	269
Литература к Дополнению 2	271

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Книга Э. Шмида и Х. Цигельмана представляет собой по существу первое в мировой литературе последовательное и полное изложение квантовой механики трехчастичных систем. Авторам удалось систематизировать и изложить логически связанным и педагогически удачным образом обширный материал, разбросанный по многочисленным журнальным статьям и трудам различных международных конференций, к тому же часто малодоступный для читателя.

Как хорошо известно, бурное развитие этой области началось с основополагающих математических работ Л. Д. Фаддеева, опубликованных в начале 60-х годов. Поэтому изложение фаддеевской теории трехчастичного рассеяния занимает в книге центральное место. Вместе с тем в книге подробно изложены практически эффективные методы решения фаддеевских уравнений, развитые за последующие годы многими авторами, в частности изложен метод факторизации интегральных ядер, метод квазичастиц, суммирование ряда Неймана с помощью паде-приближения и др.

Кроме чисто теоретических вопросов, в книге систематизированы основные экспериментальные факты, касающиеся трехнуклонной системы и дан краткий обзор результатов численных расчетов для этой системы. Из основного материала книги несколько выпадает глава 8, посвященная вариационным методам и содержащая главным образом оригинальные результаты авторов книги. Более полное изложение вариационных методов и результатов, касающееся трехнуклонной системы, можно найти в прекрасном обзоре Дельвеса *).

Поскольку со времени выхода английского оригинала книги (1974 г.) было проведено много новых иссле-

*) *Delves L. M.*—Adv. in Nucl. Phys.,/Ed. H. Baranger and E. Vogt, v. S. N. Y.— L., Plenum Press, 1972.

дований трехчастичных систем как чисто методического, так и расчетного характера, к основному тексту добавлены два дополнения (написанных В. И. Кукулиным). Первое дополнение содержит обзор тех методов решения интегральных уравнений теории рассеяния, которые предложены или получили значительное развитие лишь в последнее время. Во втором дополнении изложено обобщение теории Фаддеева на системы из четырех частиц и из произвольного числа частиц.

Вместе с указанными дополнениями книга Шмида и Цигельмана может служить учебным пособием для студентов и аспирантов соответствующих специальностей, а также достаточно полной монографией для специалистов по атомной и ядерной физике, желающих быстро ознакомиться с этой бурно развивающейся областью исследований или получить нужную справку. Для полноты в русском издании добавлен список литературы, содержащий в основном работы, вышедшие в последнее время.

*В. И. Кукулин
Ю. М. Широков*

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Четыре года прошло со времени выхода первого издания этой книги на английском языке. За этот период физика трехчастичных систем развивалась даже более быстрыми темпами, чем в предшествующие годы. В центре интересов оказались ее приложения к атомной и ядерной физике, а также к физике мезонов. В настоящее время предметом интенсивных исследований стала скорее динамика систем, состоящих не из элементарных, а из составных частиц. При этом имеется надежда на то, что как только динамическое поведение системы из трех составных частиц с внутренними степенями свободы будет достаточно хорошо понято, можно будет достичь и лучшего понимания взаимодействия между элементарными частицами.

Переводчик этой книги В. И. Кукулин добавил к ней два дополнения. С его эрудицией и пониманием физики трехчастичных систем он мог бы сам написать хорошую книгу аналогичного содержания. Причина, по которой он не сделал этого, как всегда проста — у активных физиков слишком мало свободного времени.

Развитие трехчастичной физики базируется на математических уравнениях, сформулированных советским физиком и математиком Л. Д. Фаддеевым в 1960 г. Поэтому появление русского перевода этой книги особенно уместно, ибо книгу можно рассматривать как символ нашей признательности Л. Д. Фаддееву за его вклад в эту важную область.

Английский оригинал настоящей книги был хорошо принят теми физиками, которые нуждались в доступно написанном введении во вдохновляющую область трехчастичной физики. Я искренне надеюсь, что это новое и более полное издание на русском языке так же хорошо послужит и советским читателям.

Проф. Эрих Шмид

Декабрь 1978 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Одной из самых известных проблем классической физики была задача трех тел, т. е. нахождение решения ньютоновских уравнений движения для трех взаимодействующих тел. Аналогичная задача существует и в современной квантовой механике, а именно — задача об описании движения трех взаимодействующих атомных или субатомных частиц на основе строгих интегральных уравнений. С тех пор как Л. Д. Фаддеев в 1960 г. опубликовал первую работу по этой проблеме: «Теория рассеяния для системы трех частиц»*), было выполнено большое число исследований, результаты большей частью можно найти лишь в оригинальных статьях и обзорах.

Настоящая книга возникла на основе курса лекций, прочитанных авторами в летнем семестре 1972 г. Нам хотелось бы, чтобы исследователь, пожелавший ознакомиться с квантовой задачей трех тел, не был вынужден продирааться сквозь лес обзорных статей и оригинальной литературы. С этой целью курс лекций был тщательно обработан и расширен до настоящего объема.

Мы не ставили перед собой цель охватить эту область целиком. Например, известны различные формулировки абстрактной теории, причем любая из них могла бы с равным успехом служить математической основой теории, изложенной в настоящей книге. Тем не менее подходы С. Вейнберга, Л. Розенберга, Дж. Нобла, Р. Ньютона, Р. Шугара и Р. Блаккенбекле-

*) Уместно напомнить, что впервые корректные интегральные уравнения для описания квантовомеханической системы трех частиц в частном случае потенциалов нулевого радиуса опубликовали Г. В. Скорняков и К. А. Тер-Мартirosян в 1956 г. Однако Фаддееву удалось не только сформулировать основные уравнения в общем виде, но и дать полное математическое исследование проблемы.— (Прим. перев.)

ра, а также П. А. Казакс и К. Р. Грейдера были опущены, тогда как подход Фаддеева использован очень широко. Взамен, основное внимание уделено различным методам перехода от абстрактных операторных уравнений к их численным решениям и к вычислению величин, допускающих сравнение с экспериментом.

Мы надеемся, что эта книга сделает физику трехчастичных систем гораздо более доступной для интересующихся этой проблематикой. Мы также надеемся, что книга поможет экспериментаторам лучше понять, как вычисляются теоретические значения.

Мы благодарны доктору Дж. Швагеру и доктору Ф. Соре за внимательное чтение рукописи и миссис К. Штиллер за ее перепечатку. Мы также благодарны авторам оригинальных статей за разрешение воспроизвести их рисунки.

Эрих Шмид
Хорст Цигельман

Институт теоретической физики
Тюбингенского университета.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

Квантовомеханическая задача трех тел имеет дело с движением трех частиц под влиянием потенциала взаимодействия. Ее фундаментом является уравнение Шредингера для трех частиц

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = H\psi$$

с

$$H = - \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 + \sum_{i>n-1}^3 v(i, \kappa),$$

где $v(i, \kappa)$ — двухчастичный потенциал; трехчастичный потенциал*) $v(i, j, \kappa)$ также допустим, но используется очень редко.

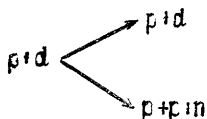
В атомной и ядерной физике, а также в физике элементарных частиц имеется большое количество состояний и процессов, для которых требуется трехчастичное рассмотрение. Вот некоторые примеры:

- а) рассеяние электронов на водороде,
- б) ядра ^3H и ^3He ,
- в) пуклон-дейтронное рассеяние,
- г) фоторасщепление ^3H и ^3He ,
- д) рассеяние мезонов на дейтронах,
- е) рассеяние мезона на пуклоне, когда последний трактуется как мезон-пуклонное связанное состояние,
- ж) многочастичные системы, которые приближенно могут трактоваться как трехчастичные, например рассеяние дейтронов на ^4He с развалом дейтрона, а также рассеяние протона на ^{11}B с превращением в три α -частицы.

Специфические трудности возникают, когда реакция приводит к конечному состоянию с тремя свободными

*) Трехчастичным называется потенциал, который обращается в нуль, когда хотя бы одна из частиц уходит на бесконечность.—(Прим. перев.)

частицами, например, как в случае протон-дейтронного рассеяния с энергией, превышающей 2,22 МэВ в системе центра масс



Такие процессы делают проблему трех тел особенно интересной. Трехчастичная система в состоянии рассеяния все еще достаточно проста, чтобы допускать точное решение, но она уже является и достаточно сложной, поскольку имеет каналы перестройки и развала, отличные от упругого рассеяния.

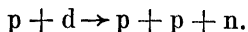
Обсудим теперь трудности изучения трехчастичного развала и разберемся в экспериментальной ситуации.

1. Эксперименты по рассеянию с развалом на три частицы

Три частицы, которые участвуют в реакции, имеют $3 \times 3 = 9$ степеней свободы в конфигурационном пространстве. Реакция может быть описана и в импульсном пространстве, где мы также имеем девять степеней свободы. В асимптотической области импульсы жестко фиксированы, т. е. измеримы для каждого одиночного события.

В так называемом полном опыте определяются все девять импульсов. Трудности возникают здесь из-за большого количества данных, которые должны быть измерены одновременно, и из-за малого числа событий, происходящих на каждую комбинацию данных.

Рассмотрим реакцию



Четыре из девяти компонент импульсов конечного состояния определяются начальным состоянием через законы сохранения энергии и импульса. Сохранение импульса означает, что сумма импульсов вылетающих частиц в лабораторной системе должна быть равна импульсу налетающего протона. Сохранение энергии означает,

что сумма кинетических энергий вылетающих частиц должна быть равна кинетической энергии налетающего протона минус энергия связи дейтрона. В обозначениях рис. 1 это означает

$$k_1 = \sum_{i=3}^5 k_{i2} \quad \frac{k_1^2}{2m_1} - |E^B| = \sum_{i=3}^5 \frac{k_i^2}{2m_i}.$$

В результате остается $9 - 4 = 5$ подлежащих измерению компонент импульсов вылетающих частиц.

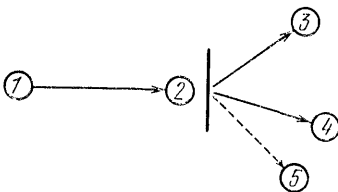


Рис. 1. Изображение трехчастичной реакции развала.

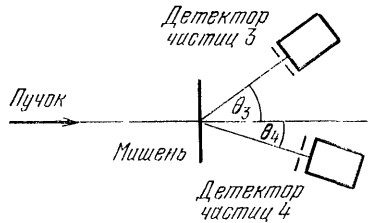


Рис. 2. Схема эксперимента.

Можно поступить следующим образом: регистрировать две вылетающие частицы, оставляя третью незарегистрированной. Каждый счетчик определяет три параметра (рис. 2), а именно, энергию и направление импульса одного из вылетающих пучков. Два счетчика вместе

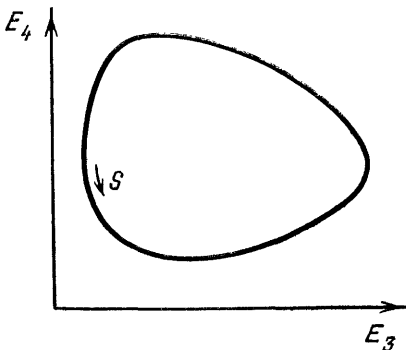


Рис. 3. Кинематически допустимая кривая в трехчастичной реакции развала.

измеряют шесть параметров. Один из них лишний, так что данные не независимы. Они должны удовлетворять некоторому кинематическому условию. Если для фиксированного расположения счетчиков отложить все события на (E_3, E_4) -диаграмме, то теоретически они будут лежать на определенной кривой, изображенной на рис. 3.

На практике используются сцинтилляционные счетчики с конечной апертурой и конечным разрешением по энергиям, а также многоканальные анализаторы. Плотность пятен является мерой числа зарегистрированных событий. Когда с помощью сложной техники совпадений удается подавить фон, вдоль кинематической кривой появляется полоса (рис. 4). Ее ширина обусловлена конеч-

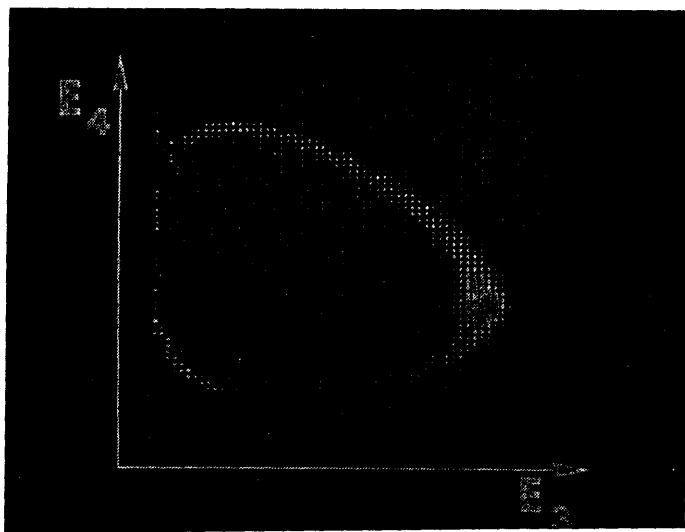


Рис. 4. Результаты эксперимента на совпадение (Брюкмап с сотр. [1]).

ным разрешением экспериментальной установки. При изменении расположения обоих счетчиков картина будет меняться. На графике обычно откладывается интенсивность полосы вдоль кинематической кривой в зависимости от параметра кривой (рис. 5). Углы θ_3 и θ_4 могут быть выбраны так, чтобы выявить интересные детали

процесса рассеяния, как, например, в случае, когда две частицы имеют очень малую относительную скорость.

Описанный эксперимент называется полным, поскольку он дает максимальную информацию (за исключением

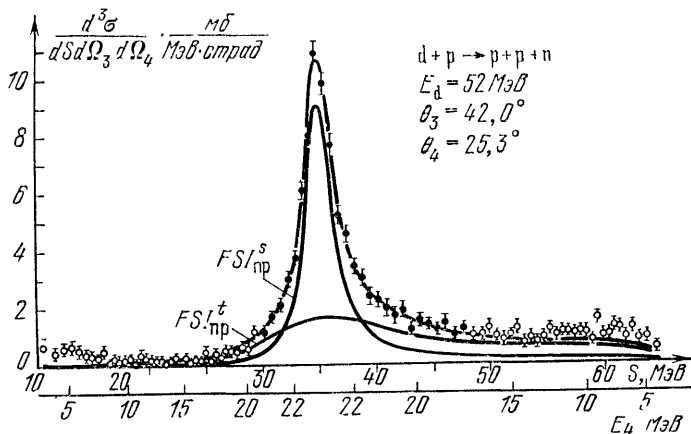


Рис. 5. Сечение трехчастичного развала отложено в зависимости от параметра кривой S (Брюкман с сопр. [1]).

сведений о поляризации). Его трудно выполнить, так как скорость счета очень низка. В большинстве актов рассеяния выходящие частицы минуют один или оба счетчика. Те же редкие события, когда оба счетчика срабатывают в совпадении, распределяются по всей кинематической кривой. Поэтому статистика получается очень плохая. Ранние эксперименты всегда были неполными из-за того, что разумная интенсивность достигалась лишь путем измерения меньше чем 5 параметров. Например, использовали только один протонный счетчик и получали сечение, которое представляло собой интеграл от всего дифференциального поперечного сечения по неизмеренным параметрам.

2. Трудности теории

Перед тем как перейти к обсуждению трудностей задачи трех тел, сначала полезно спросить, почему так проста задача двух тел.

а) *Рассеяние двух элементарных частиц.* В начальном состоянии волновой пакет, описывающий налетающую частицу, движется навстречу волне, которая описывает мишень в лабораторной системе. В системе центра масс волновой пакет движется по направлению к началу координат, где происходит взаимодействие (рис. 6). Начальное или граничное условия являются по существу временными условиями. Можно, однако, перейти к пределу, когда энергия волнового пакета является точно фиксированной, и таким образом отделить временную зависимость. Граничное условие становится тогда не зависящим от времени. С некоторыми усилиями этот переход можно сделать математически строго [2]. Получающиеся результаты являются вполне убедительными.

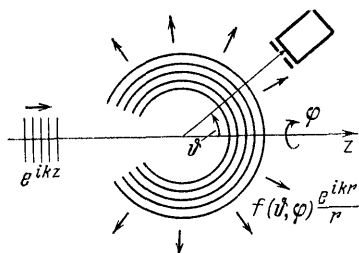
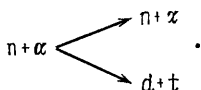


Рис. 6. Рассеяние двух частиц в системе центра масс.

Решение, описывающее рассеяние, состоит из плоской волны e^{ikz} , отвечающей падающему потоку и потоку нерассеянных частиц плюс сферическая волна $f(\vartheta, \varphi)e^{ikr}/r$, которая описывает поток рассеянных частиц. Когда спины не учитываются, амплитуда $f(\vartheta, \varphi)$ не зависит от азимутального угла φ , и сферическая волна имеет вид $f(\vartheta)e^{ikr}/r$. Частицы испускаются во всевозможных направлениях (ϑ) или (ϑ, φ) , что для короткодействующих потенциалов легко можно описать суперпозицией малого числа парциальных волн. Благодаря сохранению энергии относительный импульс k — одинаковый по всем направлениям.

б) *Рассеяние составных частиц без развала.* В отличие от случая а) продукты реакции могут отличаться от исходных частиц, например:

б) *Рассеяние составных частиц без развала.* В отличие от случая а) продукты реакции могут отличаться от исходных частиц, например:



Но и в этом случае решение, отвечающее рассеянию, имеет асимптотическую форму, типичную для задачи двух тел. Оно состоит из плоской волны и выходящих сферических волн

$$\psi(\infty) = \phi(1) e^{ik_1 z_1} + \phi(1) f(\vartheta_1, \varphi_1) \frac{e^{ik_1 r_1}}{r_1} + \\ + \phi(2) g(\vartheta_2, \varphi_2) \frac{e^{ik_2 r_2}}{r_2}.$$

Но теперь имеются две сферические волны, соответствующие двум возможностям распада, и каждый член умножается на функцию $\phi(i)$, которая описывает внутреннее движение фрагментов. При учете спина частиц нужно скомбинировать спин и орбитальный момент таким образом, чтобы получить парциальные волны с данным полным моментом. Граничное условие при этом все еще имеет простую, не зависящую от времени форму; и для короткодействующих потенциалов взаимодействия достаточно небольшого числа парциальных волн для описания процесса распада во всех направлениях. Из-за различия в энергиях внутреннего движения относительные импульсы каналов распада k_1 и k_2 , вообще говоря, различны, но составляют небольшой набор дискретных чисел.

в) *Трехчастичный распад.* В отличие от случая б), мы сталкиваемся здесь с проблемой бесконечного большого числа каналов распада. Рассмотрим, например, частицы 2 и 3 в качестве одной из подсистем конечного состояния, как показано на рис. 7. Эта подсистема теперь уже

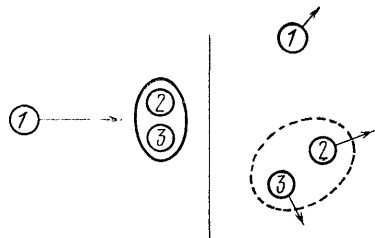


Рис. 7. Трехчастичная реакция с распадом на три свободные частицы.

не находится в одном из своих связанных состояний, как это было в случае б), а занимает одно из двухчастичных состояний рассеяния, образующих континуум. Этот континуум характеризуется, в частности, относительным импульсом k , который может принимать непрерывный ряд значений и служит в качестве непрерывного индекса ка-

нала (напомним обсуждение вопроса о степенях свободы; определенное распределение энергии между тремя свободными частицами являлось одной степенью свободы). Вторая проблема — это размер области, в которой происходит реакция. В то время как в случае б) эта область была конечной или даже для ядерных сил очень малой, здесь она становится бесконечно большой, как можно усмотреть из следующего рассуждения.

Рассеяние может происходить в три этапа. На первом этапе образуется подсистема 2, 3 в возбужденном состоянии (рис. 8а). Несколько позднее это возбужденное состояние распадается (рис. 8б), и одна из частиц, скажем,

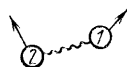
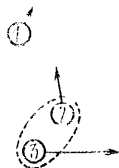
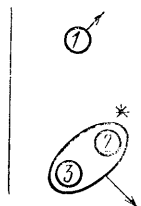
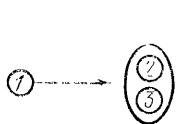


Рис. 8а. Первый этап реакции развала: образование двух-частичного возбужденного состояния.

Рис. 8б. Второй этап: распад возбужденного состояния.

Рис. 8в. Третий этап: перерассеяние.

частица 2 испускается по направлению к частице 1. Затем частица 2 подхватывает частицу 1 (рис. 8в), и рассеивается еще раз. Этот процесс называется «перерассеянием». Он показывает, что взаимодействие, которое формирует конечное состояние, не сосредоточено в малой области около центра масс, а может происходить где угодно в трехмерном пространстве.

Указанные две трудности, т. е. континуум каналов и бесконечность объема, в котором происходит реакция, порождают и третью. Не существует больше простого способа постулировать не зависящее от времени граничное условие. В сомнительных случаях нужно вернуться к физическому зависящему от времени граничному условию, и убедиться, что налагаемое не зависящее от времени условие с ним согласуется. Трудность в нахождении не зависящего от времени граничного условия мож-

но легко понять, если задать следующий вопрос: если две из трех частиц удаляются от общего центра масс, а третья частица приближается к нему, то состоянию каких волн это соответствует — сходящихся или расходящихся? Фактически и здесь тоже можно сконструировать состояние с расходящимися волнами (например, путем использования «*K*-гармоник» или волновых пакетов (см. гл. 8)) или же посредством разложения волновой функции на компоненты (см. гл. 3). Но это уже не так легко сделать, как в двухчастичном случае.

3. Значение задачи трех тел для ядерной физики

Чем же так интересна задача трех тел для ядерной физики? Все еще не решенной проблемой ядерной физики и вообще физики элементарных частиц в целом является проблема сильных взаимодействий. Эксперименты дают только энергии связи и поперечные сечения. Затем с помощью уравнения Шредингера находят феноменологические потенциалы, которые образуют основу теоретической ядерной физики. Есть надежда, что на более позднем этапе эти потенциалы также удастся получить из фундаментальной теории.

Для определения феноменологического потенциала необходимо установить связь между данными измерений и взаимодействием. Другими словами, необходимо решить уравнение Шредингера. Для двух нуклонов сделать это относительно легко. Однако данные по двум нуклонам не содержат достаточной информации. Помимо этого, на практике не всякие двухнуклонные эксперименты могут быть выполнены; примером может служить нейтрон-нейтронное рассеяние. Для того чтобы получить сколь угодно надежный нуклон-нуклонный потенциал, нужно, по меньшей мере, учесть данные для трех нуклонов в дополнение к двухнуклонным данным; следующие детали представляют особый интерес.

а) *Нейтрон-нейтронное взаимодействие.* Это взаимодействие необходимо для проверки зарядовой симметрии и изоспиновой инвариантности ядерных сил. Оно содержится в данных по тритону, в поперечном сечении упругого $n-d$ -рассеяния, и более чувствительным образом в некоторых данных по реакции $n-d$ -развала. В послед-

ней реакции можно так расположить счетчики и выбрать такие энергии E_3 и E_4 , чтобы измерялись события, в которых относительный импульс двух нейтронов очень мал. При этом нейтроны взаимодействуют в течение долгого времени («взаимодействие в конечном состоянии»), что будет проявляться в величине поперечного сечения рассеяния.

б) *Поведение ядерных сил вне массовой поверхности.* В двухчастичном рассеянии энергия сохраняется, если для ее измерения как до, так и после процесса рассеяния имеются в распоряжении достаточно большие интервалы времени. После того как частицы окажутся вне области взаимодействия, допустимые значения их импульсов будут ограничены условием сохранения энергии. Все возможные события располагаются на гиперсфере пространства импульсов, которая называется энергетической поверхностью. Такие процессы называются «событиями на массовой поверхности».

Если же двухчастичную систему можно рассматривать как изолированную только в течение короткого интервала времени Δt , а вне этого интервала система взаимодействует со своим окружением, то строгое сохранение энергии больше не имеет места из-за принципа неопределенности. Процессы рассеяния, которые происходят в течение интервала Δt и нарушают закон сохранения энергии, имеют ненулевую вероятность. Такие процессы называются «процессами вне массовой поверхности» или виртуальными*). Такого рода механизм типичен для трехчастичного рассеяния, где рассеяние в двухчастичной системе искажается присутствием третьей частицы (рис. 9). Когда две частицы взаимодействуют в трехчастичном процессе, их конечное состояние не обязательно имеет ту же самую энергию, что и начальное, поскольку обычно это конечное состояние существует лишь в течение очень короткого промежутка времени, предшествующего разрушению двухчастичного состояния воздействием третьей частицы. Виртуальные эффекты, как и соотношение неопределенностей, хорошо описываются уравнением Шредингера. Однако в двухчастичном рассеянии виртуальным эффектам обычно не уделяется

*) В оригинале «off-shell». — (Прим. перев.)

никакого внимания, поскольку здесь предполагается, что потенциал взаимодействия задан. В этом случае уравнение Шредингера определяет как амплитуду рассеяния на массовой поверхности, так и немассовую амплитуду. Но как только мы перейдем к обратной задаче рассеяния, т. е. к нахождению потенциала, описывающего данные по рассеянию, то сразу же станет ясно, что амплитуда двухчастичного рассеяния на массовой поверхности не содержит достаточной информации для однозначного определения потенциала взаимодействия*). Существует бесконечное количество потенциалов, которые дают амплитуды двухчастичного рассеяния одинаковые на массовой поверхности, но различающиеся вне ее. При этом говорят, что такие потенциалы имеют различные «немассовые» свойства.

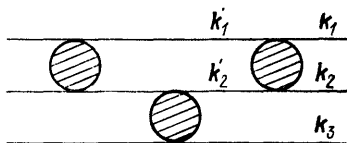


Рис. 9. Трехчастичное многократное рассеяние. Энергии подсистемы (1, 2) в промежуточном состоянии (k'_1, k'_2) и в начальном состоянии (k_1, k_2) не обязаны быть равными, т. е. $k_1'^2/2m_1 + k_2'^2/2m_2 \neq k_1^2/2m_1 + k_2^2/2m_2$.

В задаче трех частиц свойства потенциала взаимодействия вне массовой поверхности играют важную роль, вследствие чего трехчастичные данные важны для решения обратной задачи рассеяния. Некоторая информация уже содержится в трехчастичных данных по энергиям связи и в процессах рассеяния с двухчастичной фрагментацией, как, например, в упругом $n-d$ -рассеянии. Исчерпывающая же информация присутствует лишь в полных результатах по развалу. Брейшоу [128], однако, показал, что эксперименты по развалу должны быть исключительно точными, чтобы обеспечить эту информацию.

*) Лишь при определенных предположениях о математической форме потенциала становится возможным подобрать определенные параметры с помощью данных двухчастичного рассеяния.

Г л а в а 2

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В этой главе мы сначала рассмотрим рассеяние двух частиц на основе общего формализма. Затем мы покажем, какие результаты можно перенести на трехчастичное рассеяние и где возникают трудности.

1. Задача двух тел

1.1. Гамильтониан. Гамильтониан для двух частиц, взаимодействующих посредством потенциала v , имеет вид

$$h' = \frac{\mathbf{k}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{k}_2^2}{2m_2} + v, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ — импульсы, а m_1, m_2 — массы частиц.

Для трансляционно инвариантного потенциала движение центра масс можно отделить путем введения импульса центра масс \mathbf{k} и относительного импульса \mathbf{p}

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{k}_1 - m_1 \mathbf{k}_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.3)$$

$$h' = \frac{k^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{p^2}{2\mu} + v, \quad (2.4)$$

где приведенная масса

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2). \quad (2.5)$$

Вследствие трансляционной инвариантности движение центра масс является свободным и описывается собственным состоянием оператора импульса. Это движение не представляет интереса. Поэтому мы ограничимся рассмотрением гамильтониана относительного движения:

$$h = \frac{p^2}{2\mu} + v \equiv h_0 + v. \quad (2.6)$$

1.2. Граничное условие для состояний рассеяния.

Рассеяние двух частиц описывается зависящим от времени уравнением Шредингера (мы используем систему единиц с $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^{(+)}(t) = H \psi_a^{(+)}(t). \quad (2.7)$$

Верхний значок (+) указывает, что система представляет собой состояние, экспериментально приготовленное перед рассеянием и постепенно рассеивающееся с течением времени. Значок (—) относился бы к экспериментально непроверяемой ситуации, в которой коллимированный пучок получается после рассеяния. Индекс a обозначает все свойства начального состояния.

Решением уравнения (2.7) является

$$\psi_a^{(+)}(t) = e^{-iht} \psi_a^{(+)}, \quad (2.8)$$

где $\psi_a^{(+)}$ — не зависящий от времени волновой пакет.

Начальное или граничное условие может быть словесно выражено так: состояние рассеяния $\psi_a^{(+)}(t)$ должно получаться из волнового пакета, который является свободным в бесконечно далеком прошлом и свойства которого характеризуются индексом a ; слово свободный означает, что амплитуда обращается в нуль в области взаимодействия, где $v \neq 0$.

Математически это условие формулируется следующим образом. Вводится реперный волновой пакет, который имеет форму ϕ_a при $t = 0$ и для которого зависимость от времени описывается свободным гамильтонианом h_0 ,

$$\phi_a(t) = e^{-ih_0 t} \phi_a. \quad (2.9)$$

Налагается требование, чтобы волновой пакет $\psi_a^{(+)}$ совпадал со свободным пакетом ϕ_a в пределе бесконечно далекого прошлого. Поскольку с течением времени волновые пакеты расплываются, было бы бессмысленным требовать поточечного совпадения двух функций. Вместо этого потребуем, чтобы норма*) разности обращалась

*) Такая норма подразумевает интегрирование по всему пространству, так что уравнение (2.10) представляет собой математически осмысленное условие.

в нуль,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \| e^{-iht} \psi_a^{(+)} - e^{-ih_0 t} \phi_a \| = 0. \quad (2.10)$$

Такой предел нормы называется сильным пределом. В дальнейшем мы будем обозначать его как «s-lim». Наше словесное требование имеет тот недостаток, что волновой пакет, ограниченный стенами лаборатории в конечный момент времени, становится довольно-таки размытым образованием в бесконечно удаленном прошлом (если только его образование не включено в используемый формализм). Отмеченная трудность преодолевается путем использования свободного реперного волнового пакета ϕ_a , который также ограничен стенами лаборатории при $t = 0$.

Нужно отметить, что наше словесное требование подразумевает определенное ограничение на радиус действия потенциала. Математически это ограничение выражается тем фактом, что предел (2.10) существует не для всякого потенциала [3]. Уравнение (2.10) можно также записать в виде

$$\psi_a^{(+)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} \phi_a \equiv \Omega^{(+)} \phi_a, \quad (2.11)$$

где предел имеет смысл сильного (норма разности левой и правой частей уравнения обращается в нуль). Уравнение (2.11) определяет так называемый оператор Мёллера $\Omega^{(+)}$.

1.3. Оператор Мёллера. Если подействовать оператором Мёллера $\Omega^{(+)}$ на свободное состояние, то получится состояние рассеяния $\psi_a^{(+)}$. Согласно уравнению (2.11) этот оператор имеет вид

$$\Omega^{(\pm)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t}. \quad (2.12)$$

Мы включили сюда определение мёллеровского оператора $\Omega^{(-)}$. Этот оператор дает состояние рассеяния $\psi_a^{(-)}(t)$, которое переходит в свободное состояние $\phi_a(t)$ при $t \rightarrow +\infty$. Хотя состояния $\psi_a^{(-)}(t)$ не могут быть приготовлены экспериментально, они необходимы для строгого описания измерения (поскольку именно их «видят» счетчики).

Из определения (2.12) следует, что для любого конечного времени τ соотношение

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{ih(t+\tau)} e^{-ih_0(t+\tau)} = \Omega^{(\pm)} = e^{ih\tau} \Omega^{(\pm)} e^{-ih_0\tau} \quad (2.13)$$

также справедливо. Путем дифференцирования получаем

$$0 = \frac{d\Omega^{(\pm)}}{d\tau} = e^{ih\tau} (h\Omega^{(\pm)} - \Omega^{(\pm)}h_0) e^{-ih_0\tau}$$

и находим перестановочное соотношение

$$h\Omega^{(\pm)} = \Omega^{(\pm)}h_0. \quad (2.14)$$

Область определения оператора Мёллера — гильбертово пространство свободных состояний, или, более точно, пространство квадратично интегрируемых свободных состояний. Эту область, однако, можно расширить путем включения состояний с жестко фиксированным импульсом. Для этого следует выполнить над волновыми пакетами процедуру предельного перехода к фиксированной энергии. Такое обобщение приводит к некоторым концептуальным трудностям, поскольку волновой пакет теперь становится бесконечно большим, так что взаимодействие присутствует *всегда*. Соответственно этому и математическая трактовка становится трудной. Нас не должно вводить в заблуждение то обстоятельство, что действие оператора Мёллера на ненормируемое состояние с виду не приводит к проблемам сходимости. Указанное обобщение оправдано работой Фаддеева [4], который показал, что для большого класса потенциалов получаются правильные результаты. Таким образом, можно использовать собственные состояния импульса $|\mathbf{p}\rangle$ вместо волновых пакетов Φ_a и применять к ним волновые операторы $\Omega^{(\pm)}$. Таким путем мы получаем состояния рассеяния $|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}$, где $|\mathbf{p}\rangle^{(+)}$ соответствуют обсуждавшимся во введении состояниям, которые содержат плоскую волну плюс расходящиеся сферические волны. Состояния рассеяния $|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}$ имеют определенную энергию E , точно так же как свободные состояния $|\mathbf{p}\rangle$ имеют определенную энергию $p^2/2\mu$. Эти две энергии совпадают, что можно показать,

используя «перестановочное соотношение» (2.14)

$$\begin{aligned} h|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} &= h\Omega^{(\pm)}|\mathbf{p}\rangle = \Omega^{(\pm)}h_0|\mathbf{p}\rangle = \\ &= \Omega^{(\pm)}\frac{p^2}{2\mu}|\mathbf{p}\rangle = \frac{p^2}{2\mu}|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Мы теперь можем в общем смысле установить, что операторы Мёллера отображают собственное и несобственное свободное гильбертово пространство *) на соответствующие состояния рассеяния гамильтониана h . Связанные состояния не затрагиваются этим отображением; они не принадлежат к области значений мёллеровских операторов. По этой причине операторы Мёллера не унитарны, но лишь изометричны. Эрмитово сопряженные операторы $\Omega^{(\pm)\dagger}$, действуя на состояния рассеяния, дают обратное отображение. Если ими подействовать на связанные состояния $|\psi_n\rangle$ гамильтониана h , то получится нуль. Это можно увидеть из равенства

$$\langle \Omega^{(\pm)\dagger} \psi_n | \mathbf{p} \rangle = \langle \psi_n | \Omega^{(\pm)} \mathbf{p} \rangle = \langle \psi_n | \mathbf{p} \rangle^{(\pm)} = 0.$$

Выражение справа равно нулю, так как $|\psi_n\rangle$ и $|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}$ — это собственные состояния h с разными энергиями. Следовательно, выражение слева тоже равно нулю, а так как состояния $|\mathbf{p}\rangle$ образуют полный набор, то мы имеем

$$\Omega^{(\pm)\dagger} |\psi_n\rangle = 0.$$

Предел по времени в равенстве (2.12) можно заменить на предел Эйлера

$$\begin{aligned} \Omega^{(\pm)} &= s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iht} e^{-ih_0 t} = \\ &= s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 e^{\pm \varepsilon t} e^{iht} e^{-ih_0 t} dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Это было показано Яухом [5] при допущении, что сильный предел по времени для левой части существует.

*) Термины собственное и несобственное свободное гильбертово пространство неудачны, поскольку несобственные состояния не принадлежат никакому гильбертову пространству, но могут входить в топологические векторные пространства более общего вида.—(Прим. ред.)

Процедуру эйлеровского предельного перехода можно понять, применяя ее к обычной функции $f(t)$, стремящейся к f_∞ для $t \rightarrow -\infty$. Легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} dt = 1$$

и что конечные временные интервалы не дают вклада в интеграл

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} f(t) dt.$$

Вклад же от бесконечно далеких времен равен как раз f_∞ , в чем можно убедиться с помощью подстановки

$$\begin{aligned} \varepsilon t &= x, \\ \int_{-\infty}^0 \varepsilon e^{\varepsilon t} f(t) dt &= \int_{-\infty}^0 e^x f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \end{aligned}$$

Когда ε стремится к нулю, $f(x/\varepsilon)$ стремится к f_∞ и может быть вынесена за знак интеграла.

Введение предела Эйлера — то место, где время исчезает из нашей двухчастичной теории. В следующем разделе мы увидим, что посредством этой процедуры получается не зависящее от времени интегральное уравнение, которое включает в себя точно такое же граничное условие, как уже обсужденное ранее во Введении.

1.4. Уравнение для резольвенты и уравнение Липшица — Швингера. Выражение (2.16) для оператора Мёллера в том виде, как оно написано, не очень полезно, поскольку мы не можем выполнить интегрирование*). Но так как мы можем подействовать операторами

*) Так как h и h_0 не коммутируют, то две экспоненциальные функции в подынтегральном выражении нельзя объединить в одну:

$$e^{iht} e^{-ih_0 t} \neq e^{i(h-h_0)t}.$$

Мёллера на плоские волны, то можно написать

$$\begin{aligned}
 |p\rangle^{(\pm)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{\pm \varepsilon t} e^{iht} e^{-iEt} |p\rangle = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm \varepsilon \int_{\mp\infty}^0 dt e^{i(h-E \mp i\varepsilon)t} |p\rangle = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon (E \pm i\varepsilon - h)^{-1} |p\rangle. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Мы установили важное соотношение между решениями $|p\rangle^{(\pm)}$, отвечающими рассеянию, и резольвентой, или функцией Грина,

$$g(z) \equiv (z - h)^{-1}. \quad (2.18)$$

Соотношение

$$|p\rangle^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g(E \pm i\varepsilon) |p\rangle \quad (2.19)$$

задает переход от теории, зависящей от времени, к не зависящей от времени теории.

Из равенства $z - z' = g^{-1}(z) - g^{-1}(z')$ мы получаем при умножении на $g(z)g(z')$ первое резольвентное уравнение

$$g(z') - g(z) = (z - z')g(z)g(z'), \quad (2.20a)$$

$$g(z') - g(z) = (z - z')g(z')g(z). \quad (2.20b)$$

Определяя свободную резольвенту

$$g_0(z) \equiv (z - h_0)^{-1}, \quad (2.21)$$

и используя соотношение

$$v = h - h_0 = g_0^{-1}(z) - g^{-1}(z),$$

мы получаем при умножении на $g(z)g_0(z)$ второе резольвентное уравнение

$$g(z) = g_0(z) + g_0(z)vg(z), \quad (2.22a)$$

$$g(z) = g_0(z) + g(z)vg_0(z). \quad (2.22b)$$

Теперь используем это операторное тождество для вывода интегрального уравнения для состояний рассеяния,

исходя из (2.19)

$$|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon (g_0(E \pm i\varepsilon) + g_0(E \pm i\varepsilon) v g_0(E \pm i\varepsilon)) |\mathbf{p}\rangle. \quad (2.23)$$

Используя теперь соотношение

$$\pm i\varepsilon g_0(E \pm i\varepsilon) |\mathbf{p}\rangle = \pm i\varepsilon (E \pm i\varepsilon - h_0)^{-1} |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}\rangle \quad (2.24)$$

для первого члена уравнения (2.23) и соотношение (2.19) для второго члена, мы получаем

$$|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)} = |\mathbf{p}\rangle + g_0(E \pm i0) v |\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}. \quad (2.25)$$

Это и есть уравнение Липпмана — Швингера для состояний рассеяния $|\mathbf{p}\rangle^{(\pm)}$. Предел по ε , который необходимо взять в $g_0(E \pm i\varepsilon)$, указан с помощью обозначения $E \pm i0$. В r -представлении в конфигурационном пространстве [6] этот предел приводит к равенству

$$\langle \mathbf{r} | g_0(E \pm i0) | \mathbf{r}' \rangle = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\exp(\pm i\sqrt{2\mu E}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.26)$$

Свободная резольвента $g_0(E)$ имеет разрез вдоль вещественной положительной E -полуоси. Предел по ε указывает, на каком берегу разреза мы должны находиться, чтобы удовлетворить граничному условию. Знак (+) соответствует физическому граничному условию (см. стр. 23).

Если написать уравнение Липпмана — Швингера в конфигурационном пространстве *)

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle^{(+)} = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle - \int d\mathbf{r}' \frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{i\sqrt{2\mu E}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} v(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p} \rangle^{(+)}, \quad (2.27)$$

то видно, что первый член справа есть плоская волна, а второй член (для больших значений r) — это выходящая сферическая волна. Итак, физическое зависящее от

*) Произведение операторов в уравнении (2.25) вычисляют, вводя полный набор $1 = \int d\mathbf{r}' |\mathbf{r}'\rangle \langle \mathbf{r}'|$ и предполагая локальность потенциала $\langle \mathbf{r} | v | \mathbf{r}' \rangle = v(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

времени граничное условие привело к интегральному уравнению, которое включает не зависящее от времени граничное условие, уже описанное во Введении.

Теперь нам нужно выяснить, является ли ядро нашего интегрального уравнения компактным оператором [7]. Если ядро компактно, то можно применить теорию Фредгольма и все стандартные методы решения, которые будут обсуждаться в главе 4. Простейший способ узнать что-либо о компактности — это исследовать, является ли норма Шмидта конечной, что дает достаточное условие. Норма Шмидта некоторого оператора $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определяется так:

$$\|K\|_s = [\text{Sp}(K^+K)]^{1/2} = \left[\int \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} |K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|^2 \right]^{1/2}. \quad (2.28)$$

В нашем интегральном уравнении (2.27) ядро есть

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\exp(i\sqrt{2\mu z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} v(\mathbf{r}') \quad (2.29)$$

с $z = E + i\varepsilon$.

Квадрат нормы Шмидта дается равенством

$$\begin{aligned} \|K\|_s^2 &= \frac{\mu^2}{4\pi^2} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\exp(-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} |v(\mathbf{r}')|^2 = \\ &= \frac{\mu^2}{4\pi^2} \int d\mathbf{R} \frac{\exp(-2\text{Im}(\sqrt{2\mu z})R)}{R^2} \int d\mathbf{r}' |v(\mathbf{r}')|^2 = \\ &= \frac{\mu^2}{2\pi \text{Im}(\sqrt{2\mu z})} \int d\mathbf{r}' |v(\mathbf{r}')|^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Очевидно, эта норма Шмидта может быть конечной лишь в том случае, если, во-первых, интеграл от квадрата абсолютной величины потенциала существует (это исключает кулоновский потенциал и потенциалы с твердой сердцевиной) и, во-вторых, если мнимая часть величины $\sqrt{2\mu z}$ не равна нулю (что как раз исключает область энергий рассеяния, которой мы интересуемся). Тот факт, что норма Шмидта расходится в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, тесно связан с тем обстоятельством, что мы вышли за рамки гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций L_2 (ср. со стр. 25). Но, как уже было установлено ранее, конечность нормы Шмидта является достаточным, но не необходимым условием компактности. Лав-

лейс [8] смог показать, что ядро нашего интегрального уравнения компактно в банаховом пространстве C_1 непрерывных ограниченных функций с непрерывными ограниченными производными, несмотря на расходимость нормы Шмидта. Это дает ответ на вопрос, имеет ли уравнение Липпмана — Швингера единственное решение. Для компактных операторов справедлива альтернатива Фредгольма: неоднородное интегральное уравнение с компактным ядром либо имеет единственное решение для любого неоднородного члена, в то время как соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение (тождественно равно нулю), либо однородное интегральное уравнение имеет по крайней мере одно нетривиальное решение, тогда как неоднородное уравнение либо не имеет решений вовсе, либо это решение не единственно.

Покажем теперь, что в нашем случае выполняется первая альтернатива. Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (2.27):

$$|\psi\rangle = g_0(E + i0)v|\psi\rangle. \quad (2.31)$$

Если бы существовало решение $|\psi\rangle$ для положительных энергий $E > 0$, то оно должно было бы удовлетворять уравнению Шредингера. Последнее утверждение легко проверяется путем умножения уравнения (2.31) слева на $g_0^{-1}(E + i0)$. Будучи решением уравнения Шредингера, $|\psi\rangle$ должна была бы сохранять вероятность, что невозможно, поскольку эта функция содержит лишь расходящиеся волны (ср. с замечаниями, сделанными после (2.27)). Поэтому однородное уравнение не имеет решений*) для $E > 0$, а решение неоднородного уравнения (2.27) единственно.

Как мы увидим в задаче трех тел в этом месте возникает трудность.

Чтобы завершить обсуждение уравнения Липпмана — Швингера (2.25), выпишем его представление в импульсном пространстве:

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{p} \rangle^{(\pm)} = \langle \mathbf{k} | \mathbf{p} \rangle + \left(E \pm i\varepsilon - \frac{k^2}{2\mu} \right)^{-1} \int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \mathbf{p} \rangle^{(\pm)}. \quad (2.32)$$

*) При $E < 0$ решения возможны и представляют собой связанные состояния.

В этом представлении ядро имеет форму

$$K(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \left(E \pm i\varepsilon - \frac{k^2}{2\mu} \right)^{-1} \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle. \quad (2.33)$$

Для $\varepsilon \rightarrow 0$ ядро имеет полюс на действительной оси, который приводит к расходимости нормы Шмидта. Очевидно, такая сингулярность является довольно безвредной, так как Лавлейсу [8] удалось показать, что ядро тем не менее компактно.

В качестве другого примера сингулярного оператора рассмотрим единичный оператор, который также выглядит безобидным,

$$\langle \mathbf{p} | \mathbb{1} | \mathbf{p}' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.34)$$

Он не имеет конечной нормы Шмидта, так как интеграл от квадрата δ -функции расходится. Однако, в отличие от (2.33), сингулярность здесь достаточно сильная, чтобы сделать этот оператор некомпактным; этот факт будет иметь весьма неприятные последствия в задаче трех тел.

1.5. S-матрица. S-матрица является связующим звеном между решениями, отвечающими рассеянию, и измеряемыми данными.

Рассмотрим состояние рассеяния $\psi_a^{(+)}(t)$, которое эволюционировало, в соответствии с (2.8), от свободного волнового пакета $\phi_a(t)$, и найдем вероятность того, что в пределе $t \rightarrow +\infty$ в $\psi_a^{(+)}(t)$ содержится другой свободный волновой пакет $\phi_b(t)$. Точно так же, как $\phi_a(t)$ описывает начальную ситуацию, $\phi_b(t)$ описывает конечную ситуацию, т. е. продукты реакции в той конфигурации, которая отбирается путем определенного расположения счетчиков.

Таким образом, мы ищем матричный элемент (точнее, его квадрат модуля):

$$S_{ba} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi_b(t) | \psi_a^{(+)}(t) \rangle, \quad (2.35)$$

ИЛИ

$$S_{ba} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-ih_0 t} \phi_b | e^{-iht} \psi_a^{(+)} \rangle, \quad (2.36)$$

ИЛИ

$$S_{ba} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{iht} e^{-ih_0 t} \phi_b | \psi_a^{(+)} \rangle. \quad (2.37)$$

Используя (2.11) и (2.12), получаем

$$S_{ba} = \langle \Omega^{(-)} \phi_b | \Omega^{(+)} \phi_a \rangle, \quad (2.38)$$

или

$$S_{ba} = \langle \psi_b^{(-)} | \psi_a^{(+)} \rangle, \quad (2.39)$$

или

$$S_{ba} = \langle \phi_b | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | \phi_a \rangle. \quad (2.40)$$

Вводя собственные функции импульса вместо волновых пакетов, получаем

$$S_{p'p} = \langle p' | \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} | p \rangle. \quad (2.41)$$

Следовательно, S -матрица является импульсным представлением S -оператора

$$S = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)}. \quad (2.42)$$

Чтобы выполнить предельные переходы, содержащиеся в S -матрице, вернемся к равенству (2.36), которое для фиксированной энергии имеет вид

$$S_{p'p} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{i(E'-E)t} \langle p' | p \rangle^{(+)}. \quad (2.43)$$

Ради общности примем, что две энергии являются разными:

$$E' = \frac{p'^2}{2\mu} \neq E = \frac{p^2}{2\mu}. \quad (2.44)$$

Мы можем выразить состояние рассеяния $|p\rangle^{(+)}$ с помощью резольвенты согласно (2.19) и получить.

$$S_{p'p} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon e^{i(E'-E)t} \langle p' | g(E + i\varepsilon) | p \rangle. \quad (2.45)$$

Резольвента удовлетворяет интегральному уравнению, которое очень сходно с уравнением Липпмана — Швингера (ср. уравнения (2.22а) и (2.25)). Поэтому в импульсном представлении она имеет полюсы (ср. с (2.32)). Извлечем эти полюсы из матричного элемента и выполним предельный переход.

Подставив уравнение (2.22) для резольвенты в форме (б) в форму (а), получим

$$\begin{aligned} g(z) &= g_0(z) + g_0(z)vg_0(z) + g_0(z)vg(z)vg_0(z) = \\ &= g_0(z) + g_0(z)[v + vg(z)v]g_0(z) \equiv \\ &\equiv g_0(z) + g_0(z)t(z)g_0(z). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Таким образом, резольвента оказывается связанной с некоторым оператором $t(z)$, который менее сингулярен, чем $g(z)$:

$$t(z) \equiv v + vg(z)v. \quad (2.47)$$

Кинематические сингулярности $g(z)$ теперь выделяются явно,

$$\langle \mathbf{p}' | g(z) | \mathbf{p} \rangle = \frac{\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{z - p^2/2\mu} + \frac{\langle \mathbf{p}' | t(z) | \mathbf{p} \rangle}{(z - p'^2/2\mu)(z - p^2/2\mu)}. \quad (2.48)$$

Введем этот результат при $z = E + i\varepsilon$, $E = p^2/2\mu$ в выражение (2.45) для S -матрицы и получим

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon e^{i(E' - E)t} \left\{ \frac{\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{i\varepsilon} + \frac{\langle \mathbf{p}' | t(E + i\varepsilon) | \mathbf{p} \rangle}{(E + i\varepsilon - E')i\varepsilon} \right\} = \\ &= \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i(E' - E)t}}{E' - E - i\varepsilon} \langle \mathbf{p}' | t(E + i\varepsilon) | \mathbf{p} \rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Во втором члене пределы можно вычислить, используя символическое соотношение *)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\varepsilon} = 2\pi i \delta(\omega). \quad (2.50)$$

Окончательно получаем

$$S_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - 2\pi i \delta(p'^2/2\mu - p^2/2\mu) \langle \mathbf{p}' | t(E + i0) | \mathbf{p} \rangle. \quad (2.51)$$

*) Это соотношение легко проверить путем умножения на пробную функцию и интегрированием по контуру. В представленном здесь формализме теории рассеяния такое интегрирование означает переход от собственных функций энергии к волновым пакетам,

1.6. T -матрица. Сингулярности резольвенты привели к двум δ -функциям в S -матрице. Одна из них описывает «отсутствие рассеяния», так как в ней $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$. (Из-за бесконечной протяженности плоской волны бесконечно много частиц проходит мимо рассеивающего центра без отклонения.) Вторая δ -функция означает сохранение энергии. Вся информация о процессе рассеяния содержится в T -матрице. Она дает дифференциальное сечение через соотношение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 \mu^2 |\langle \mathbf{p}' | t(E + i0) | \mathbf{p} \rangle|^2. \quad (2.52)$$

Состояние $|\mathbf{p}\rangle$ определяет энергию и направление пучка; $|\mathbf{p}'\rangle$ соответствует направлению, в котором помещается счетчик.

Из-за сохранения энергии мы имеем, конечно,

$$\frac{p'^2}{2\mu} = \frac{p^2}{2\mu} = E. \quad (2.53)$$

Но следует указать, что равенство (2.47) определяет также и T -матрицу вне массовой поверхности, для которой

$$\frac{p'^2}{2\mu} \neq \frac{p^2}{2\mu} \neq E. \quad (2.54)$$

Однако не существует никаких двухчастичных экспериментальных данных, которые были бы связаны с T -матрицей вне массовой поверхности; в трехчастичном рассеянии (см. Введение и гл. 3) ситуация иная.

Поскольку поперечное сечение прямо связано с T -матрицей, было бы желательно иметь интегральное уравнение для самой T . Вводя (2.46) во второе резольвентное уравнение (2.22a), получим

$$\begin{aligned} g(z) &= g_0(z) + g_0(z)t(z)g_0(z) = \\ &= g_0(z) + g_0(z)vg_0(z) + g_0(z)vg_0(z)t(z)g_0(z), \end{aligned} \quad (2.55)$$

или

$$t(z) = v + vg_0(z)t(z). \quad (2.56a)$$

Используя теперь равенство (2.22b) вместо (2.22a), получим

$$t(z) = v + t(z)g_0(z)v. \quad (2.56b)$$

В соответствующем пространстве эти уравнения являются интегральными уравнениями для T -матрицы. Все интегральные уравнения этой главы (т. е. (2.22), (2.25) и (2.56)) имеют одно и то же ядро

$$K(z) = g_0(z)v,$$

или соответственно

$$K^\dagger(z^*) = vg_0(z).$$

Приведем теперь некоторые полезные соотношения для T -матрицы.

Сравнение (2.56) с (2.47) дает

$$g_0(z)t(z) = g(z)v, \quad (2.57a)$$

$$t(z)g_0(z) = vg(z). \quad (2.57b)$$

Легко также проверить, что

$$t(z) = (1 - vg_0(z))^{-1}v, \quad (2.58a)$$

$$t(z) = v(1 - g_0(z)v)^{-1}, \quad (2.58b)$$

$$(1 - g_0(z)v)^{-1} = 1 + g_0(z)t(z), \quad (2.59a)$$

$$(1 - vg_0(z))^{-1} = 1 + t(z)g_0(z). \quad (2.59b)$$

1.7. Соотношение унитарности. Для эрмитова потенциала имеет место закон сохранения потока вероятности. Как следствие этого S -матрица должна быть унитарной:

$$S^\dagger S = \mathbb{1}. \quad (2.60)$$

С помощью равенства (2.51) можно вывести следствия этого соотношения для T -матрицы. Мы хотим, однако, использовать другой способ [9], который пригоден также и для задачи трех тел.

Из равенства (2.56a) легко вывести следующее соотношение (умножив на $t^{-1}(z)$ справа и на v^{-1} слева):

$$t^{-1}(z) = v^{-1} - g_0(z). \quad (2.61)$$

Как указывалось в связи с уравнением (2.26), $g_0(z)$ имеет разрез вдоль положительной полуоси энергии. Согласно (2.61) t^{-1} и, следовательно, t имеют тот же самый разрез. Соотношение унитарности и скачок t на разрезе эквивалентны друг другу.

Запишем теперь равенство (2.61) для $z = E + i\varepsilon$

$$t^{-1}(E + i\varepsilon) = v^{-1} - g_0(E + i\varepsilon), \quad (2.62a)$$

и для $z = E - i\varepsilon$

$$t^{-1}(E - i\varepsilon) = v^{-1} - g_0(E - i\varepsilon), \quad (2.62б)$$

а затем получим скачок путем вычитания и умножения на $t(E + i\varepsilon)$, $t(E - i\varepsilon)$ слева и справа соответственно

$$\begin{aligned} t^{-1}(E + i\varepsilon) - t^{-1}(E - i\varepsilon) &= -g_0(E + i\varepsilon) + g_0(E - i\varepsilon), \\ t(E - i\varepsilon) - t(E + i\varepsilon) &= t(E + i\varepsilon) \{-g_0(E + i\varepsilon) + \\ &\quad + g_0(E - i\varepsilon)\} t(E - i\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Используя первое резольвентное уравнение, преобразуем разность в фигурных скобках к виду

$$\begin{aligned} -g_0(E + i\varepsilon) + g_0(E - i\varepsilon) &= 2i\varepsilon g_0(E + i\varepsilon) g_0(E - i\varepsilon) = \\ &= 2i\varepsilon [(E - h_0)^2 + \varepsilon^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

С помощью соотношения

$$\pi \delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon (x^2 + \varepsilon^2)^{-1} \quad (2.65)$$

получим в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ соотношение унитарности

$$t(E - i0) - t(E + i0) = 2\pi i t(E + i0) \delta(E - h_0) t(E - i0),$$

или (ср. с (2.47))

$$t(E + i0) - t^\dagger(E + i0) = -2\pi i t(E + i0) \delta(E - h_0) t^\dagger(E + i0) \quad (2.66)$$

В импульсном представлении получим для рассеяния вперед

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle \mathbf{p} | t(E + i0) | \mathbf{p} \rangle &= \\ &= -\pi \int d\mathbf{p}'' \delta(E - p''^2/2\mu) |\langle \mathbf{p} | t(E + i0) | \mathbf{p}'' \rangle| = \\ &= -\pi \mu p \int d\widehat{p}'' |\langle \mathbf{p} | t(E + i0) | \mathbf{p}'' \rangle|^2; \quad (2.67) \\ |\mathbf{p}| &= |\mathbf{p}'| = \sqrt{2\mu E}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{Im} \langle \mathbf{p} | t(E + i0) | \mathbf{p} \rangle = -\frac{p}{16\pi^3 \mu} \sigma_{\text{полн.}} \quad (2.68)$$

Это и есть хорошо известная оптическая теорема [10], связывающая мнимую часть амплитуды рассеяния на нулевой угол с полным поперечным сечением.

2. Задача трех тел

2.1. Гамильтониан. Если не рассматривать трехчастичные потенциалы, то гамильтониан для трех частиц с массами m_1, m_2, m_3 имеет вид

$$H' = \frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + \frac{k_3^2}{2m_3} + v_1 + v_2 + v_3. \quad (2.69)$$

Здесь использовано следующее обозначение для двухчастичных потенциалов $v(i, \kappa)$:

$$v_1 = v(2, 3), \quad v_2 = v(3, 1), \quad v_3 = v(2, 1). \quad (2.70)$$

Мы будем применять такого рода обозначения для различных двухчастичных величин довольно часто.

Теперь нам нужно отделить движение центра масс и ввести координаты Якоби. Декартовы пространственные координаты обозначаем $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ и \mathbf{r}_3 . Координаты Якоби, в которых частицы, скажем, 2 и 3 появляются явно как некоторая подсистема, обозначим через $\xi_1, \eta_1, \mathbf{r}$. Преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, & \eta_1 &= \mathbf{r}_1 - \frac{m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_2 + m_3}, \\ \mathbf{r} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Соответствующее преобразование для импульсных переменных будет таким:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \frac{m_3 \mathbf{k}_2 - m_2 \mathbf{k}_3}{m_2 + m_3}, \\ \mathbf{q}_1 &= \frac{(m_2 + m_3) \mathbf{k}_1 - m_1 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Координата \mathbf{p}_1 , канонически сопряженная ξ_1 , есть импульс частицы 2 в системе центра масс частиц 2 и 3,

а q_1 , канонически сопряженная η_1 , есть импульс частицы 1 в системе центра масс всех трех частиц.

Координаты Якоби с индексами 2 и 3, где явно появляются подсистемы (1,3) и (1,2), получаются при соответствующей замене индексов в преобразованиях (2.71) и (2.72).

В координатах Якоби оператор Гамильтона имеет вид

$$H' = \frac{k^2}{2(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{p_1^2}{2\mu_1} + \frac{q_1^2}{2M_1} + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma, \quad (2.73)$$

где приведенные массы

$$\mu_1 = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}, \quad M_1 = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}. \quad (2.74)$$

Благодаря трансляционной инвариантности двухчастичных потенциалов движение общего центра масс становится собственным состоянием импульса, которое нас не интересует. Поэтому мы отбросим его и запишем ($\alpha = 1, 2$ или 3):

$$H = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma \equiv h_\alpha + \sum_{\gamma=1}^3 v_\gamma. \quad (2.75)$$

2.2. Двухчастичные подсистемы в трехчастичном пространстве. Двухчастичные подсистемы играют важную роль в задаче трех частиц. Мы уже выбрали координаты Якоби с учетом этого обстоятельства и теперь введем так называемые гамильтонианы каналов h_α

$$h_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + v_\alpha. \quad (2.76)$$

Асимптотические состояния с двумя частицами в связанном состоянии, как это имеет место, например, в упругом рассеянии, являются собственными состояниями такого h_α , и именно отсюда произошло название «гамильтониан канала». Для полного гамильтониана мы имеем

$$H = h_\alpha + \bar{V}_\alpha \quad (2.77)$$

с

$$\bar{V}_\alpha = V - v_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} v_\gamma. \quad (2.78)$$

Удобно обозначить развальный канал (все частицы свободные) индексом $\alpha = 0$. С определением

$$v_0 \equiv 0 \quad (2.79)$$

соотношения (2.76) — (2.78) становятся справедливыми также и для $\alpha = 0$. Наряду с гамильтонианами каналов введем резольвенты каналов

$$g_\alpha(z) \equiv (z - h_\alpha)^{-1}. \quad (2.80)$$

Для обозначений операторов примем следующее соглашение. Все операторы, которые действуют в трехчастичном гильбертовом пространстве, но содержат только одно двухчастичное взаимодействие (как $h_\alpha, v_\alpha, g_\alpha$) или же никакого взаимодействия (как h_0, v_0, g_0) будут обозначаться малыми буквами. Их матричные элементы можно выразить через матричные элементы двухчастичных операторов в двухчастичном пространстве. В тех случаях, когда их можно спутать с двухчастичными операторами в двухчастичном пространстве, эти последние будут отмечаться крышечкой ($\hat{}$). Например:

$$\langle p_\alpha, q_\alpha | v_\alpha | p'_\alpha, q'_\alpha \rangle = \delta(q_\alpha - q'_\alpha) \langle p_\alpha | \hat{v}_\alpha | p'_\alpha \rangle. \quad (2.81)$$

Истинно трехчастичные операторы (подобно H, V, \bar{V}_α) обозначаются заглавными буквами.

Матричные элементы указанных выше резольвент каналов имеют вид

$$\begin{aligned} \langle p_{\alpha_2}, q_\alpha | g_\alpha(z) | p'_{\alpha_2}, q'_\alpha \rangle &= \\ &= \delta(q_\alpha - q'_\alpha) \left\langle p_{\alpha_2} \left| \hat{g}_\alpha \left(z - \frac{g_\alpha^2}{2M_\alpha} \right) \right| p'_{\alpha_2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.82a)$$

Эти матричные элементы связаны с матричными элементами двухчастичных резольвент (2.18). Резольвента g_α имеет индекс канала, так как в разных каналах могут действовать разные потенциалы v_α . Отметим, что δ -функция получается из-за того, что g_α содержит только взаимодействие в подсистеме α , а частица α является свободной. Аргументом у \hat{g}_α является энергия подсистемы α , которая получается при вычитании кинетической энергии

частицы α из трехчастичной энергии z . Для g_0 имеем

$$\langle p_\alpha, q_\alpha | g_0(z) | p'_\alpha, q'_\alpha \rangle = \frac{\delta(q_\alpha - q'_\alpha) \delta(p_\alpha - p'_\alpha)}{z - q_\alpha^2/2M_\alpha - p_\alpha^2/2\mu_\alpha}. \quad (2.82б)$$

Рассеяние в подсистеме α описывается T -матрицей (ср. с равенством (2.47))

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_\alpha(z) v_\alpha. \quad (2.83)$$

По аналогии с уравнениями (2.56) и (2.58) имеем

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + v_\alpha g_0(z) t_\alpha(z), \quad (2.84а)$$

или

$$t_\alpha(z) = v_\alpha + t_\alpha(z) g_0(z) v_\alpha; \quad (2.84б)$$

и

$$t_\alpha = (1 - v_\alpha g_0(z))^{-1} v_\alpha, \quad (2.85а)$$

или

$$t_\alpha = v_\alpha (1 - g_0(z) v_\alpha)^{-1}. \quad (2.85б)$$

Матричные элементы приобретают вид

$$\begin{aligned} \langle p_\alpha, q_\alpha | t_\alpha(z) | p'_\alpha, q'_\alpha \rangle &= \\ &= \delta(q_\alpha - q'_\alpha) \langle p_\alpha | \hat{t}_\alpha(z - q_\alpha^2/2M_\alpha) | p'_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Оператор t_α будет нужен, например, чтобы описать трехчастичное рассеяние как многократное двухчастичное.

Графическим представлением формулы (2.86) является рис. 10.

2.3. Граничные условия и операторы Мёллера. Обсуждение граничных условий и мёллеровских операторов, приведенное в предыдущих разделах 1.2 и 1.3 для случая двухчастичного рассеяния, может быть без затруднений обобщено на трехчастичное рассеяние.

Временная эволюция трехчастичного волнового пакета дается выражением

$$\psi_{\alpha m}^{(+)}(t) = e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} \quad (2.87)$$

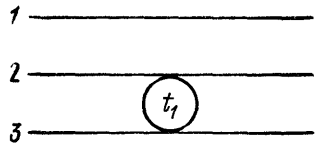


Рис. 10. Трехчастичный процесс с рассеянием в двухчастичной подсистеме.

тогда как реперные волновые пакеты эволюционируют согласно соотношению

$$\phi_{\alpha m}(t) = e^{-ih\alpha t} \phi_{\alpha m}. \quad (2.88)$$

Волновой пакет $\phi_{\alpha m}$ описывает свободное движение частицы α ($\alpha = 1, 2, 3$) по отношению к двум другим частицам, которые находятся в m -м связанном состоянии. Для $\alpha = 0$ мы имеем волновой пакет ϕ_0 с тремя свободными частицами, который, однако, не очень употребителен в качестве начального состояния (за исключением описания газа).

Граничное условие формулируется аналогично случаю двух частиц. Потребуем, чтобы норма разности $\psi_{\alpha m}^{(+)}(t) - \phi_{\alpha m}(t)$ исчезала в отдаленном прошлом:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \| e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} - e^{-ih\alpha t} \phi_{\alpha m} \| = 0. \quad (2.89)$$

Это приводит к следующему представлению состояний рассеяния:

$$\psi_{\alpha m}^{(+)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-ih\alpha t} \phi_{\alpha m} \equiv \Omega_{\alpha}^{(\pm)} \phi_{\alpha m}, \quad (2.90)$$

и к такому определению мёллеровских операторов:

$$\Omega_{\alpha}^{(\pm)} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iHt} e^{-ih\alpha t}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (2.91)$$

где мы включили предел $t \rightarrow \pm\infty$, который важен для построения S -матрицы.

Несмотря на формальную аналогию, не следует упускать из виду, что трактовка задачи трех тел является гораздо более трудной. Это можно увидеть уже из того факта, что для каждого разбиения α нужен отдельный оператор Мёллера. Самостоятельной проблемой является уже доказательство того, что мёллеровские операторы существуют [11], а также доказательство того, что их можно применять к ненормируемым состояниям с определенной энергией [12]. Таковыми являются состояния канала с двухчастичной фрагментацией

$$|\phi_{\alpha m}\rangle = |q_{\alpha}, \psi_{\alpha m}\rangle = |q_{\alpha}\rangle |\psi_{\alpha m}\rangle, \quad (2.92)$$

где

$$h_\alpha |\phi_{\alpha m}\rangle = E_{\alpha m} |\phi_{\alpha m}\rangle,$$

и состояния канала с тремя свободными частицами

$$|\phi_0\rangle = |\mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha\rangle = |\mathbf{q}_\alpha\rangle |\mathbf{p}_\alpha\rangle, \quad (2.93)$$

где

$$h_0 |\phi_0\rangle = (q_\alpha^2/2M_\alpha + p_\alpha^2/2\mu_\alpha) |\phi_0\rangle.$$

В равенстве (2.93) индекс α произволен и указывает лишь одну из трех возможных систем координат Якоби. Область определения мёллеровских операторов (2.91) — это пространство состояний канала. Областью их значений является пространство состояний рассеяния

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \Omega_\alpha^{(\pm)} |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (2.94)$$

Перестановочное соотношение

$$H\Omega_\alpha^{(\pm)} = \Omega_\alpha^{(\pm)} h_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (2.95)$$

справедливо также и в трехчастичном случае по аналогии с соотношением (2.14). Это следует из того, что состояния рассеяния имеют ту же энергию, что и свободные начальные и конечные состояния, несмотря на то, что все эти состояния являются собственными состояниями разных гамильтонианов.

Можно показать [13], что состояния рассеяния, которые принадлежат к разным начальным (или разным конечным) состояниям, ортогональны друг другу

$$\langle \psi_{\alpha m}^{(\pm)} | \psi_{\beta n}^{(\pm)} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \delta(\mathbf{q}'_\alpha - \mathbf{q}_\beta) \quad (2.96)$$

(для свободных состояний канала это справедливо лишь при $\alpha = \beta$!). Как и в двухчастичном случае, существуют также и эрмитово сопряженные операторы Мёллера $\Omega^{(+)\dagger}$. Они действуют обратным образом, т. е. при действии на состояния рассеяния дают свободные состояния канала (если индексы каналов одинаковы)

$$\Omega^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = \delta_{\alpha\beta} |\phi_{\beta n}\rangle. \quad (2.97)$$

При действии на трехчастичные связанные состояния они дают нуль

$$\Omega_\alpha^{(\pm)\dagger} |\psi_\nu^B\rangle = 0. \quad (2.98)$$

Заметим, что в двухчастичном случае (см. стр. 26) состояния, аннулируемые эрмитово сопряженным оператором Мёллера, и состояния, не аннулируемые им, разделены по энергии ($E < 0$ и $E > 0$). Для трехчастичного случая это уже не так (ср. с равенством (2.97) для $\alpha \neq \beta$: $\Omega_\alpha^{(\pm)\dagger} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = 0$ для $E > 0$).

2.4 Уравнение для резольвенты и уравнение Липпмана — Швингера. Попытаемся теперь установить связь между зависящей и не зависящей от времени теориями.

Для трехчастичного рассеяния также возможен переход от предела по времени к пределу Эйлера (ср. с (2.16)). Интегрирование по времени приводит по аналогии с (2.19) к соотношению

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon G(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle, \quad (2.99)$$

где $G(z)$ полная резольвента трехчастичной системы

$$G(z) \equiv (z - H)^{-1}. \quad (2.100)$$

Используя резольвенту канала (2.80), можно выписать два резольвентных уравнения

$$G(z) = g_\alpha(z) + g_\alpha(z) \bar{V}_\alpha G(z), \quad (2.101a)$$

и

$$G(z) = g_\alpha(z) + G(z) \bar{V}_\alpha g_\alpha(z), \quad (2.101b)$$

которые легко проверяются с помощью тождества

$$\bar{V}_\alpha = g_\alpha^{-1}(z) - G^{-1}(z). \quad (2.102)$$

Уравнение Липпмана — Швингера для состояния рассеяния получается при подстановке резольвентного уравнения (2.101a) в (2.99)

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon (g_\alpha(E \pm i\varepsilon) + \\ + g_\alpha(E \pm i\varepsilon) \bar{V}_\alpha G(E \pm i\varepsilon)) |\phi_{\alpha m}\rangle. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Так как свободное состояние канала $|\phi_{\alpha m}\rangle$ есть собственное состояние h_α с энергией E , то мы имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_\alpha(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (2.104)$$

Используя этот результат и соотношение (2.99) для преобразования второго члена соотношения (2.103), получим

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_{\alpha}(E \pm i0) \bar{V}_{\alpha} |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle. \quad (2.105)$$

В отличие от задачи двух тел (см. замечания к уравнению (2.31)), решение уравнения Липпмана — Швингера теперь определяется неоднозначно, так как однородное уравнение

$$|\psi\rangle = g_{\alpha}(E + i0) \bar{V}_{\alpha} |\psi\rangle \quad (2.106)$$

имеет решения для энергий в области рассеяния. Последнее обстоятельство можно усмотреть, если в равенстве (2.103) выбрать другое состояние канала $|\phi_{\beta n}\rangle$, $\beta \neq \alpha$. Тогда получим [14]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_{\alpha}(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\beta n}\rangle = 0, \quad (2.107)$$

так как состояние $|\phi_{\beta n}\rangle$ не является собственным состоянием h_{α} ; произведение $g_{\alpha}|\phi_{\beta n}\rangle$ остается конечным для $\varepsilon \rightarrow 0$ и, следовательно, выражение (2.107) обращается в нуль. Мы получаем, таким образом, уравнение

$$|\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle = g_{\alpha}(E \pm i0) \bar{V}_{\alpha} |\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle. \quad (2.108)$$

Это уравнение показывает, что однородное уравнение, следующее из неоднородного уравнения Липпмана — Швингера (2.105), имеет в качестве нетривиальных решений состояния рассеяния $|\psi_{\beta n}^{(\pm)}\rangle$ других каналов с $\beta \neq \alpha$.

В задаче двух тел однородное уравнение также имело нетривиальные решения, но лишь при дискретных энергиях связи, где не происходит никакого рассеяния. В трехчастичной же задаче однородное уравнение имеет нетривиальные решения (помимо соответствующих трехчастичным энергиям связи) в континууме, который охватывает область энергий рассеяния.

Это свойство уравнения Липпмана — Швингера в трехчастичном случае тесно связано с проекционными свойствами эрмитово сопряженных мёллеровских операторов (2.97) [9].

Чтобы получить единственные решения уравнения Липпмана — Швингера, нужно ввести дополнительные

условия, которые отберут из множества решений те, которые удовлетворяют физическому граничному условию или заменяющему его равенству (2.99). Глёткле [15] показал, что единственные решения имеет такая система уравнений *):

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + g_{\alpha}(E + i0) \bar{V}_{\alpha} |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle, \quad (2.109a)$$

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = g_{\beta}(E + i0) \bar{V}_{\beta} |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle, \quad (2.109б)$$

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = g_{\gamma}(E + i0) \bar{V}_{\gamma} |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle. \quad (2.109в)$$

В дополнении к уравнению Липпмана — Швингера Глёткле потребовал, чтобы в каналах β, γ были только расходящиеся волны и никаких сходящихся волн (эти последние могли бы присутствовать согласно уравнению (2.108), если ограничиться уравнением (2.109a)). Вводя подходящие приближения, Глёткле сумел преобразовать систему уравнений (2.109a) — (2.109в) в систему интегральных уравнений с конечной нормой Шмидта.

В изначальном виде ни ядро уравнения (2.105), ни ядра уравнений (2.109a) — (2.109в) не имеют конечной нормы Шмидта. Эти ядра также не являются компактными [7], так что стандартные методы теории интегральных уравнений здесь использованы быть не могут. Ядром уравнения Липпмана — Швингера является

$$K_{\alpha}(z) = g_{\alpha}(z) \bar{V}_{\alpha}. \quad (2.110)$$

Используя (2.22a), получаем

$$K_{\alpha}(z) = g_0(z) \bar{V}_{\alpha} + g_0(z) v_{\alpha} g_{\alpha}(z) \bar{V}_{\alpha}. \quad (2.111)$$

Дельта-функции, появляющиеся из-за двухчастичных потенциалов в первом члене, вызывают расходимость нормы Шмидта (см. замечание к (2.34)):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 | g_0(z) \bar{V}_{\alpha} | \mathbf{k}'_1 \mathbf{k}'_2 \mathbf{k}'_3 \rangle &\sim \left(z - \sum_{i=1}^3 k_i^2 / 2m_i \right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{\gamma \neq \alpha} \delta(\mathbf{q}_{\gamma} - \mathbf{q}'_{\gamma}) \langle \mathbf{p}_{\gamma} | \hat{v}_{\gamma} | \mathbf{p}'_{\gamma} \rangle. \end{aligned} \quad (2.112)$$

) Следует отметить, что задолго до Глёткле аналогичные системы уравнений Липпмана — Швингера, имеющие единственные решения, были использованы Базем с сотр. [129]. — (Прим. перев.)

В правой части соотношения (2.112) δ -функция, отвечающая движению общего центра масс, уже опущена. Графическое представление (рис. 11) оператора $g_0 V$ показывает, что он имеет несвязные части. В каждом члене

$$g_0(z)V = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Рис. 11. Графическое представление ядра трехчастичного уравнения Липпмана — Швингера.

взаимодействуют только две частицы, тогда как третья движется свободно, что свидетельствует о наличии δ -функции в импульсном пространстве. Поэтому при поиске полезных интегральных уравнений надо стараться избегать появления несвязных частей в ядрах.

1. Уравнения Фаддеева для T -матрицы

После того как Фаддеев в 1960 г. показал [16], что уравнение Липпмана — Швингера (2.105) не имеет единственного решения, он изучил свойства оператора

$$T(z) = V + VG(z)V. \quad (3.1)$$

Этот оператор, хотя и является формальным аналогом двухчастичного T -оператора (см. (2.47)), но не связан с сечением рассеяния столь непосредственно как в двухчастичном случае. По аналогии с (2.46) имеем

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z)T(z)g_0(z). \quad (3.2)$$

Оператор $T(z)$ менее сингулярен, чем резольвента $G(z)$, так как в нем отщеплены сингулярные операторы $g_0(z)$. Как и в двухчастичном случае (2.56), у нас есть уравнения

$$T(z) = V + Vg_0(z)T(z), \quad (3.3a)$$

$$T(z) = V + T(z)g_0(z)V. \quad (3.3b)$$

Эти интегральные уравнения для T -оператора имеют тот же недостаток, что и уравнение Липпмана — Швингера (2.105), а также резольвентные уравнения (2.101), поскольку все они имеют те же ядра.

Фаддеев пришел к новому уравнению с помощью следующего приема *): он расщепил уравнение (3.3a) на три уравнения (в дальнейшем z -зависимость операторов опускается)

$$T_i = v_i + v_i g_0 T. \quad (3.4)$$

Поскольку $V = v_1 + v_2 + v_3$, то T -оператор есть сумма трех новых операторов T_i :

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (3.5)$$

*) Этот способ вывода теперь называется фаддеевской редукцией в задаче трех тел.— (Прим. перев.)

Этим расщеплением выражение (3.3а) разворачивается в систему уравнений для компонент T_i . В матричной форме

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & v_1 \\ v_2 & v_2 & v_2 \\ v_3 & v_3 & v_3 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Пока мы ничего не выиграли. Уравнение (3.6) все еще имеет некомпактное ядро и то же самое имеет место для всех уравнений, которые получаются из него при итерациях. Расщепление, однако, дает частное решение, приводящее к менее сингулярному ядру. Перенесем в первой строке матричного уравнения (3.6) член $(v_1 g_0 T_1)$ налево

$$T_1 - v_1 g_0 T_1 = v_1 + v_1 g_0 (T_2 + T_3). \quad (3.7)$$

Умножение на $(1 - v_1 g_0)^{-1}$ слева дает

$$T_1 = t_1 + t_1 g_0 (T_2 + T_3), \quad (3.8)$$

где использован оператор (см. (2.85а))

$$t_1 = (1 - v_1 g_0)^{-1} v_1. \quad (3.9)$$

Если строки 2 и 3 преобразовать тем же образом, то получится матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Это уравнение называется уравнением Фаддеева для T -матрицы. Его иногда пишут так:

$$T_i(z) = t_i(z) + \sum_{j=1}^3 F_{ij}(z) g_0(z) T_j(z),$$

или, в матричном обозначении,

$$\mathcal{T}(z) = \mathfrak{t}(z) + \mathcal{K}_F(z) \mathcal{T}(z)$$

с

$$\mathcal{K}_F(z) \equiv F_{ij}(z) g_0(z) \equiv (1 - \delta_{ij}) t_i(z) g_0(z).$$

Вместо потенциалов v_i новые уравнения (3.10) содержат двухчастичные T -матрицы t_i , которые теперь уже понимаются как операторы в трехчастичном пространстве

(см. (2.86)). Величины t_i входят в уравнение Фаддеева вне массовой поверхности из-за энергетического сдвига $z - q_i^2/2M_i$ и из-за того, что вычисление произведения операторов $t_i g_0 T_j$ подразумевает интеграцию по всем возможным промежуточным состояниям

$$|p_i^{\prime\prime}\rangle |q_i^{\prime\prime}\rangle$$

с

$$\frac{p_i^{\prime\prime 2}}{2\mu_i} \neq z - \frac{q_i^{\prime\prime 2}}{2M_i} \neq \frac{p_i^{\prime\prime 2}}{2\mu_i}.$$

Мы имеем здесь математическую формулировку отмеченного во Введении явления, состоящего в том, что в трехчастичную амплитуду входят двухчастичные амплитуды рассеяния вне энергетической поверхности, откуда следует, что данные трехчастичного рассеяния содержат больше информации, чем одни только двухчастичные данные.

Поскольку операторы t_i действуют только в подсистеме i , ядро уравнения (3.10) все еще содержит δ -функции

$$\langle p_i q_i | t_i(z) | p_i' q_i' \rangle = \delta(q_i - q_i') \left\langle p_i \left| \hat{t}_i \left(z - \frac{q_i^2}{2M_i} \right) \right| p_i' \right\rangle. \quad (3.11)$$

Следовательно, это ядро не имеет конечной нормы Шмидта. Тем не менее уравнение (3.10) удобнее, чем уравнения (3.3) и (3.6). Уже в его первой итерации опасные δ -функции устраняются (интегрированием):

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 g_0 (t_2 + t_3) \\ t_2 g_0 (t_3 + t_1) \\ t_3 g_0 (t_1 + t_2) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} t_1 g_0 (t_2 + t_3) & t_1 g_0 t_3 & t_1 g_0 t_2 \\ t_2 g_0 t_3 & t_2 g_0 (t_3 + t_1) & t_2 g_0 t_1 \\ t_3 g_0 t_2 & t_3 g_0 t_1 & t_3 g_0 (t_1 + t_2) \end{pmatrix} g_0 \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Теперь у нас остались операторные произведения $t_i g_0 t_j$ только с $i \neq j$, так что интегральное ядро содержит лишь члены, в которых все три частицы связаны друг с другом. Рис. 12 дает графическое представление члена тако-

го типа; сравним его с графическим представлением ядра Липпмана — Швингера (рис. 11).

Норма Шмидта ядра итерированных уравнений Фаддеева (3.12) существует, если потенциалы спадают достаточно быстро и если $\text{Im } z \neq 0$. Это выглядит довольно обнадеживающим, но мы все еще не достигли цели. Необходимо исследовать два вопроса.

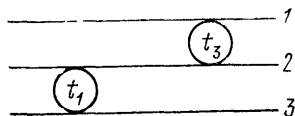


Рис. 12. Графическое представление типичного члена итерированного фаддеевского ядра.

а) Норма Шмидта итерированного ядра не существует для $\text{Im } z = 0$ и $\text{Re } z > E_{\min}^B$ (где E_{\min}^B — низший энергетический уровень подсистем), и поэтому неясно, является ли ядро компактным для физических энергий.

б) Фаддеевские уравнения были выведены из уравнения «с изъяном» (3.6), которое не имеет единственного решения для $\text{Im } z = 0$. Неясно поэтому, имеют ли уравнения (3.10) или (3.12) единственные решения.

Главная часть работы Фаддеева [17] связана с этими двумя вопросами.

Норма Шмидта для произведения вида

$$t_i(z) g_0(z) t_j(z), \quad i \neq j, \quad (3.13)$$

расходится при $\text{Im } z \rightarrow 0$ и $\text{Re } z > E_{\min}^B$, поскольку как T -матрицы, так и свободный пропагатор сингулярны (последний только для $\text{Re } z > 0$, см. (2.82) и (5.28)). Вторая итерация приводит к операторным произведениям вида

$$t_i(z) g_0(z) t_j(z) g_0(z) t_\kappa(z), \quad i \neq j, \quad j \neq \kappa. \quad (3.14)$$

Эти выражения снова менее сингулярны, чем выражения (3.13), так как интегрирования по промежуточным состояниям имеют тенденцию сглаживать сингулярности, а в (3.14) дополнительные интегрирования имеются. После четвертой итерации, которая приводит к ядру \mathcal{H}_F^5 , остающиеся сингулярности становятся столь же безвредными, как и в задаче двух тел (ср. с объяснением после формулы (2.33)). Фаддеев смог показать [18], что пятая степень \mathcal{H}_F^5 ядра уравнения (3.10) является компактным

оператором в подходящем банаховом пространстве для вещественных энергий, превышающих E_{\min}^B .

Отсюда следует, что ядро \mathcal{K}_F неутерированного уравнения Фаддеева имеет, несмотря на δ -функции и несмотря на сингулярности t_i и g_0 на вещественной энергетической оси, некоторые важные свойства, известные для компактных операторов:

а) Справедлива альтернатива Фредгольма [18] (см. также стр. 30).

б) Ядро имеет только дискретный спектр η_ν

$$\mathcal{K}_F \psi_\nu = \eta_\nu \psi_\nu. \quad (3.15)$$

в) Резольвента $\mathcal{R}(\lambda) = (\lambda - \mathcal{K}_F)^{-1}$ существует [19] и является мероморфной функцией параметра λ .

Так как однородная часть (3.10) имеет в качестве своих решений только трехчастичные связанные состояния [18], то из п. а) следует, что (3.10) при энергиях в области рассеяния имеет единственные решения. А из п. в) следует, что для практического решения нашей задачи не нужно начинать с четвертой итерации, а можно рассматривать прямо исходное уравнение. В принципе это решает нашу трехчастичную задачу. Некоторые трудности возникают с заряженными частицами из-за дальнедействующего характера кулоновских сил, но и здесь достигнут прогресс [20].

Чтобы «почувствовать» уравнения Фаддеева, запишем для уравнения (3.10), ряд Неймана, получающийся последовательными итерациями,

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mathcal{K}_F^\nu(z) \dagger(z). \quad (3.16)$$

Здесь мы не касаемся вопроса о сходимости. В графическом представлении мы получаем, например, для T_1

$$\begin{aligned} & \text{---} \bigcirc \tau_1 \text{---} = \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} + \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} \bigcirc t_3 \text{---} + \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} \bigcirc t_2 \text{---} + \\ & + \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} \bigcirc t_2 \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} + \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} \bigcirc t_3 \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} + \text{---} \bigcirc t_1 \text{---} \bigcirc t_3 \text{---} \bigcirc t_2 \text{---} + \dots \end{aligned} \quad (3.17)$$

Благодаря специфической форме фаддеевского ядра друг за другом следуют только T -матрицы разных подсистем (ср. также (3.12) и рис. 12). Графики нужно читать по следующим правилам: прямые линии представляют свободные состояния (собственные состояния гамильтониана h_0). Операторы g_0 в явном виде не появляются, так как при действии на свободные состояния они дают только числовые множители. Для перехода от графического представления к операторному необходимо лишь иметь в виду, что за каждым взаимодействием идет свободный пропагатор и что нужно ввести свободный пропагатор g_0 . Примем, что последовательность времен упорядочена справа налево; таким образом, начальное состояние находится с правой стороны графика, а конечное — с левой.

Смысл уравнений Фаддеева теперь можно усмотреть из графического представления отвечающего им ряда Неймана. Эти уравнения описывают процесс трехчастичного рассеяния как многократное двухчастичное рассеяние, где индивидуальные двухчастичные события могут быть на массовой поверхности или вне ее. Описание трехчастичного рассеяния как многократного двухчастичного было введено Ватсоном [21] еще в 1953 г.

Мы хотим теперь сравнить графическое представление уравнения (3.17) с графическим представлением уравнения Липпмана — Швингера, чтобы еще раз продемонстрировать некомпактность ядра уравнения (3.3) и чтобы дополнительно прояснить роль двухчастичных T -матриц в уравнениях Фаддеева. Потенциалы, появляющиеся в (3.3), будут изображаться волнистыми линиями

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \circlearrowleft T \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \sum_{i=7}^3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \sum_{i=7}^3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \circlearrowleft T \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad (3.18)$$

Мы еще раз видим, что означает выражение «несвязное ядро»: в каждом члене второй суммы одна частица не взаимодействует; ее состояние не изменяется, что в интеграле по промежуточным состояниям выражается δ -функцией. Та же ситуация имеет место и после одной

Суммируя различные частичные ряды (3.21) с помощью этого выражения, получаем ряд Неймана для уравнений Фаддеева, т. е. (3.17). Так как в (3.21) показано лишь несколько графиков, необходимо некоторое воображение, чтобы проверить этот результат с помощью нашего рисунка; легко, однако, видеть, каким образом возникают первые два графика в правой части (3.17).

Очевидно, что ряд (3.21) становится при частичном суммировании менее расходящимся, так как ряд (3.23), который может расходиться, заменяется двухчастичной T -матрицей. Частичное суммирование ряда Неймана и привело Фаддеева к расщеплению трехчастичной T -матрицы на компоненты T_i . Как мы видели, такое расщепление приводит после одной итерации к интегральному уравнению со связным ядром.

Перейдем теперь к выводу других форм уравнений Фаддеева. Согласно равенству (3.2) резольвента $G(z)$ может быть вычислена, если T -оператор известен. Однако можно написать уравнения Фаддеева непосредственно для резольвенты или, более точно, для отдельных компонент, получаемых при расщеплении этой резольвенты. При заданной резольвенте $G(z)$ решение задачи рассеяния также известно согласно (2.99). И в этом случае возможно найти уравнения Фаддеева, которые могут непосредственно дать решение для рассеяния. Из этого решения задачи рассеяния можно выделить элементы S -матрицы, в особенности для физически интересных амплитуд переходов. Для этих последних также имеются свои собственные уравнения Фаддеева.

2. Уравнения Фаддеева для резольвенты

Введем теперь расщепление T -операторов согласно равенству (3.5) в формулу (3.2) для резольвенты:

$$G(z) = g_0(z) + \sum_{i=1}^3 g_0(z) T_i(z) g_0(z). \quad (3.24)$$

Определив компоненты $G_i(z)$ равенством

$$G_i(z) = g_0(z) T_i(z) g_0(z), \quad (3.25)$$

получим для резольвенты

$$G(z) = g_0(z) + \sum_{i=1}^3 G_i(z). \quad (3.26)$$

Интегральные уравнения для компонент $G_i(z)$ получаются путем подстановки уравнений Фаддеева (3.10) в равенство (3.25):

$$G_i = g_0 t_i g_0 + g_0 \sum_{j=1}^3 F_{ij} g_0 T_j g_0. \quad (3.27)$$

Распространив (2.46) на трехчастичное пространство, получим

$$g_0 t_i g_0 = g_i - g_0, \quad (3.28)$$

и вместе с (3.25) соотношение (3.27) даст уравнение

$$G_i(z) = g_i(z) - g_0(z) + \sum_{j=1}^3 g_0(z) F_{ij}(z) G_j(z). \quad (3.29)$$

Это и есть уравнения Фаддеева для резольвенты [14]. Снова в ядре появляется типичный фаддеевский оператор $F_{ij}(z)$ и все, что было сказано об этом ядре на стр. 51, остается справедливым и здесь.

3. Уравнения Фаддеева для волновых функций рассеяния

Для состояний рассеяния, согласно (2.99), имеем

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon G(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (3.30)$$

Используя расщепление (3.26) для резольвенты, получим

$$\begin{aligned} |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_0(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle + \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon \sum_{i=1}^3 G_i(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle. \end{aligned} \quad (3.31)$$

С определениями

$$|\chi_{i\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_i(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (3.32a)$$

И

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon G_i(E \pm i\varepsilon) |\phi_{\alpha m}\rangle, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.32б)$$

получим следующее расщепление состояний рассеяния на компоненты:

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = |\chi_{0\alpha m}^{(\pm)}\rangle + \sum_{i=1}^3 |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i. \quad (3.33)$$

Подставим теперь уравнения Фаддеева (3.29) в равенство (3.32б) и найдем

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon \left\{ g_i(E \pm i\varepsilon) - g_0(E \pm i\varepsilon) + \sum_{j=1}^3 g_0(E \pm i\varepsilon) F_{ij}(E \pm i\varepsilon) G_j(E \pm i\varepsilon) \right\} |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (3.34)$$

Используя определения (3.32) еще раз, найдем

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i = |\chi_{i\alpha m}^{(\pm)}\rangle - |\chi_{0\alpha m}^{(\pm)}\rangle + \sum_{j=1}^3 g_0(E \pm i\varepsilon) F_{ij}(E \pm i\varepsilon) |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_j. \quad (3.35)$$

Предельный переход, содержащийся в определении (3.32а), можно выполнить. Для $\alpha \neq 0$ (когда во входном канале есть связанная пара) получим

$$|\chi_{i\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \delta_{i\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (3.36)$$

(ср. с замечанием после равенства (2.107)). Для $\alpha = 0$ (состояние рассеяния получается из свободного состояния $|\phi_0\rangle$) имеем

$$|\chi_{i0}^{(\pm)}\rangle = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_0(E \pm i\varepsilon) |\phi_0\rangle = |\phi_0\rangle, & i = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pm i\varepsilon g_i(E \pm i\varepsilon) |\phi_0\rangle = \Omega_i^{(\pm)} |\phi_0\rangle, & i \neq 0, \end{cases} \quad (3.37)$$

где $\Omega_i^{(\pm)}$ — двухчастичный оператор Мёллера в трехчастичном пространстве (ср. уравнения (2.11) и (2.17)).

С использованием соотношений (3.36) и (3.37) уравнения Фаддеева (3.35) для состояний рассеяния [14] принимают вид:

а) при наличии во входном канале связанной пары, $\alpha \neq 0$

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i = \delta_{i\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle + \sum_{j=1}^3 g_0(E \pm i0) F_{ij}(E \pm i0) |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_j,$$

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = \sum_{i=1}^3 |\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle_i; \quad (3.38)$$

б) при трех свободных частицах во входном канале, $\alpha = 0$

$$|\psi_0^{(\pm)}\rangle_i = |\phi_i^{(\pm)}\rangle + \sum_{j=1}^3 g_0(E \pm i0) F_{ij}(E \pm i0) |\psi_0^{(\pm)}\rangle_j,$$

$$|\psi_0^{(\pm)}\rangle = |\phi_0\rangle + \sum_{i=1}^3 |\psi_0^{(\pm)}\rangle_i. \quad (3.39)$$

Величина $|\phi_i^{(\pm)}\rangle$ определяется как (ср. с равенством (3.37))

$$|\phi_i^{(\pm)}\rangle = \Omega_i^{(\pm)} |\phi_0\rangle - |\phi_0\rangle$$

и представляет сферическую волну (расходящуюся или соответственно сходящуюся).

4. S -матрица

В качестве S -матрицы мы определим амплитуду, получающуюся в том случае, если мы позволим свободному состоянию $e^{-ih\alpha t} |\phi_{\alpha m}\rangle$ или $e^{-ih_0 t} |\phi_0\rangle$ эволюционировать в состояния рассеяния $e^{-iHt} |\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle$ или $e^{-iHt} |\psi_0^{(+)}\rangle$ соответственно и проанализируем состояния рассеяния в том случае, когда свободными состояниями являются $e^{-ih\beta t} |\phi_{\beta n}\rangle$ или $e^{-ih_0 t} |\phi_0\rangle$ в пределе $t \rightarrow \infty$,

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-ih\beta t} \phi_{\beta n} | e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} \rangle \quad (3.40a)$$

($\alpha, \beta \neq 0$, рассеяние с перестройкой),

$$S_{0, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\alpha}; \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-ih_0 t} \phi_0 | e^{-iHt} \psi_{\alpha m}^{(+)} \rangle \quad (3.40b)$$

($\alpha \neq 0$, развал), и

$$S_{0,0}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle e^{-ih_0 t} \phi_0 | e^{-iHt} \psi_0^{(+)} \rangle \quad (3.40\text{в})$$

(свободно-свободное рассеяние).

С помощью (2.90) и (2.91) находим

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \langle \phi_{\beta n} | \Omega_{\beta}^{(-)\dagger} \Omega_{\alpha}^{(+)} | \phi_{\alpha m} \rangle \quad (3.41\text{а})$$

($\alpha, \beta \neq 0$),

$$S_{0, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \langle \phi_0 | \Omega_0^{(-)\dagger} \Omega_{\alpha}^{(+)} | \phi_{\alpha m} \rangle \quad (3.41\text{б})$$

($\alpha \neq 0$) и

$$S_{0,0}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}) = \langle \phi_0 | \Omega_0^{(-)\dagger} \Omega_0^{(+)} | \phi_0 \rangle. \quad (3.41\text{в})$$

В отличие от двухчастичного случая (2.42), в трехчастичном случае мы имеем 4×4 матрицу операторов

$$S_{\beta\alpha} = \Omega_{\beta}^{(-)\dagger} \Omega_{\alpha}^{(+)}. \quad (3.42)$$

Матричные элементы этого набора операторов, взятые между состояниями каналов $|\phi_{\alpha m}\rangle$ или $|\phi_0\rangle$, образуют S -матрицу.

Состояния канала $|\phi_{1m}\rangle$ не образуют полного набора, поскольку m обозначает связанное состояние подсистемы (2, 3), а континуум этой подсистемы отсутствует, и аналогично для $|\phi_{2n}\rangle$ и $|\phi_{3l}\rangle$. Только состояния $|\phi_0\rangle$ образуют полный набор функций. С другой стороны, набор функций, образованных всеми состояниями каналов $|\phi_0\rangle$, $|\phi_{1m}\rangle$, $|\phi_{2n}\rangle$ и $|\phi_{3l}\rangle$, содержит неортогональные функции и является переполненным.

Из равенства (3.41) с помощью (2.94) получаем

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \psi_{\alpha m}^{(+)} \rangle \quad (3.43\text{а})$$

($\alpha, \beta \neq 0$),

$$S_{0, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \langle \psi_0^{(-)} | \psi_{\alpha m}^{(+)} \rangle \quad (3.43\text{б})$$

($\alpha \neq 0$) и

$$S_{0,0}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}, \mathbf{p}_{\alpha}) = \langle \psi_0^{(-)} | \psi_0^{(+)} \rangle. \quad (3.43\text{в})$$

Здесь мы могли бы остановиться, так как мы можем рассматривать состояния рассеяния, которые получаются из соотношений (3.38) и (3.39). Но мы хотим выделить из

S -матрицы δ -функции и вывести уравнения Фаддеева для остающихся амплитуд перехода. Мы могли бы действовать, как и в двухчастичном случае (см. (2.39) — (2.51)), но при этом необходимо знать такую форму операторов перехода, которая допускает отделение кинематических сингулярностей резольвенты (аналогично равенству (2.48)). Не зная этого, будем поступать следующим образом. Рассмотрим сначала только рассеяние с перестройкой.

Подставим резольвентное уравнение (2.1016) в уравнение (2.99):

$$|\psi_{\alpha m}^{(\pm)}\rangle = |\phi_{\alpha m}\rangle + G(E_{\alpha m} \pm i0) \bar{V}_{\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (3.44)$$

Из него находим

$$|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle = |\psi_{\alpha m}^{(-)}\rangle + (G(E_{\alpha m} + i0) - G(E_{\alpha m} - i0)) \bar{V}_{\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle. \quad (3.45)$$

Разность резольвент вычисляется тем же самым образом, что и в соотношениях (2.64) и (2.65),

$$G(E_{\alpha m} + i0) - G(E_{\alpha m} - i0) = -2\pi i \delta(E_{\alpha m} - H). \quad (3.46)$$

Используя (3.43), (3.45) и (3.46), для S -матрицы находим

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \psi_{\alpha m}^{(-)} \rangle - \\ - 2\pi i \langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \delta(E_{\alpha m} - H) \bar{V}_{\alpha} | \phi_{\alpha m} \rangle. \quad (3.47)$$

Состояния рассеяния $|\psi_{\alpha m}^{(-)}\rangle$ и $|\psi_{\beta n}^{(-)}\rangle$ ортогональны при $\alpha \neq \beta$, поскольку они являются собственными состояниями одного и того же гамильтониана с разными граничными условиями (см. равенство (2.96)). Поскольку, очевидно,

$$\langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \delta(E_{\alpha m} - H) = \delta(E_{\alpha m} - E_{\beta n}) \langle \psi_{\beta n}^{(-)} |,$$

то мы получаем

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \\ = \delta(\mathbf{q}'_{\beta} - \mathbf{q}_{\alpha}) \delta_{\beta\alpha} \delta_{mn} - 2\pi i \delta(E_{\alpha m} - E_{\beta n}) \langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \bar{V}_{\alpha} | \phi_{\alpha m} \rangle \\ (\alpha, \beta \neq 0). \quad (3.48a)$$

Обращаясь далее к случаю развала, можно повторить аналогичным образом наш вывод и получить

$$S_{0,\alpha m}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha) = \\ = -2\pi i \delta \left(E_{\alpha m} - \frac{q'^2_\alpha}{2M_\alpha} - \frac{p'^2_\alpha}{2\mu_\alpha} \right) \langle \psi_0^{(-)} | \bar{V}_\alpha | \Phi_{\alpha m} \rangle \quad (3.48б) \\ (\alpha \neq 0).$$

Результат для свободно-свободного рассеяния будет таким:

$$S_{0,0}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = \delta(\mathbf{q}'_\alpha - \mathbf{q}_\alpha) \delta(\mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}_\alpha) - \\ - 2\pi i \delta \left(\frac{q^2_\alpha}{2M_\alpha} + \frac{p^2_\alpha}{2\mu_\alpha} - \frac{q'^2_\alpha}{2M_\alpha} - \frac{p'^2_\alpha}{2\mu_\alpha} \right) \langle \psi_0^{(-)} | V | \Phi_0 \rangle. \quad (3.48в)$$

Теперь S -матрица имеет ту же самую форму, что и в соотношении (2.51). Та часть процесса рассеяния, где «ничего не происходит», отщепляется. Остаток описывает переходы в системе с помощью матрицы переходов

$$R_{\beta n, \alpha m}^{(-)}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) = \langle \psi_{\beta n}^{(-)} | \bar{V}_\alpha | \Phi_{\alpha m} \rangle \quad (3.49а)$$

и с помощью соответствующих матриц из (3.48б) и (3.48в).

По аналогии с равенством (3.45) мы могли бы записать уравнение для $\langle \psi_{\beta n}^{(-)} |$ и получили бы выражение для $S_{\beta\alpha}$ с другой матрицей перехода

$$R_{\beta n, \alpha m}^{(+)}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) = \langle \Phi_{\beta n} | \bar{V}_\beta | \psi_{\alpha m}^{(+)} \rangle. \quad (3.49б)$$

Резюмируя, можно записать

$$S_{\beta n, \alpha m}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) = \delta(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\alpha) \delta_{\beta\alpha} \delta_{mn} - \\ - 2\pi i \delta(E_{\alpha m} - E_{\beta n}) R_{\beta n, \alpha m}^{(\pm)}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha); \quad (3.50а)$$

$$S_{0,\alpha m}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha) = \\ = -2\pi i \delta \left(E_{\alpha m} - \frac{q'^2_\alpha}{2M_\alpha} - \frac{p'^2_\alpha}{2\mu_\alpha} \right) R_{0,\alpha m}^{(\pm)}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha), \quad (3.50б)$$

$$S_{0,0}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha) = \delta(\mathbf{q}'_\alpha - \mathbf{q}_\alpha) \delta(\mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}_\alpha) - \\ - 2\pi i \delta \left(\frac{q^2_\alpha}{2M_\alpha} + \frac{p^2_\alpha}{2\mu_\alpha} - \frac{q'^2_\alpha}{2M_\alpha} - \frac{p'^2_\alpha}{2\mu_\alpha} \right) R_{0,0}^{(\pm)}(\mathbf{q}'_\alpha, \mathbf{p}'_\alpha; \mathbf{q}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha). \quad (3.50в)$$

Лавлейс показал [22], что две матрицы перехода $R_{\beta\alpha}^{(\pm)}$ и $R_{\beta\alpha}^{(-)}$ отличаются только вне массовой поверхности, так что две возможности (\pm) в (3.50) эквивалентны.

5. Уравнения Фаддеева для операторов перехода

Мы хотим рассмотреть матрицы перехода $R_{\beta\alpha}^{(\pm)}$ как представления операторов перехода в пространстве состояний канала $|\phi_\alpha\rangle$. Используя соотношение (3.44), состояния рассеяния в (3.49) можно выразить с помощью состояний канала:

$$\begin{aligned} R_{\beta n, \alpha m}^{(+)} &= \langle \phi_{\beta n} | \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta G (E_{\alpha m} + i0) \bar{V}_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle, \\ R_{0, \alpha m}^{(+)} &= \langle \phi_0 | V + VG (E_{\alpha m} + i0) \bar{V}_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle, \\ R_{0, 0}^{(+)} &= \langle \phi_0 | V + VG \left(\frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha} + \frac{p_\alpha^2}{2\mu_\alpha} + i0 \right) V | \phi_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.51a)$$

и

$$\begin{aligned} R_{\beta n, \alpha m}^{(-)} &= \langle \phi_{\beta n} | \bar{V}_\alpha + \bar{V}_\beta G (E_{\beta n} + i0) \bar{V}_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle, \\ R_{0, \alpha m}^{(-)} &= \langle \phi_0 | \bar{V}_\alpha + VG \left(\frac{q_\alpha'^2}{2M_\alpha} + \frac{p_\alpha'^2}{2\mu_\alpha} + i0 \right) \bar{V}_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle, \\ R_{0, 0}^{(-)} &= \langle \phi_0 | V + VG \left(\frac{q_\alpha'^2}{2M_\alpha} + \frac{p_\alpha'^2}{2\mu_\alpha} + i0 \right) V | \phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.51b)$$

В качестве операторов перехода для $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3^*$ определим операторы

$$U_{\beta\alpha}^{(+)}(z) \equiv \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta G(z) \bar{V}_\alpha \quad (3.52a)$$

и

$$U_{\beta\alpha}^{(-)}(z) \equiv \bar{V}_\alpha + \bar{V}_\beta G(z) \bar{V}_\alpha. \quad (3.52b)$$

Заметим, что для S -матрицы мы должны взять предел (в обоих случаях), когда z приближается к вещественной оси энергий из верхней полуплоскости.

В S - и R -матрицах областью значений индексов является число различных каналов (считая развальный канал за *один* канал), тогда как для оператора перехода

*) Заметим, что $\bar{V}_0 = V$.

индексы обозначают различные разбиения 0, 1, 2, 3. Может случиться, что для определенной подсистемы не существует вовсе связанных состояний. В этом случае соответствующее значение α или β не появляется среди индексов каналов. Однако это значение появляется как индекс операторных матриц в соотношениях (3.52). Соответствующие операторы даже дают вклад в рассеяние в других каналах из-за связи всех операторов через уравнения Фаддеева (ср. с соотношением (3.56)).

Уравнения Фаддеева для операторов перехода $U_{\beta\alpha}^{(\pm)}(z)$ выводятся следующим образом. В соотношении (3.52a) мы используем определение (2.78) для V_α :

$$U_{\beta\alpha}^{(+)} = \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta \sum_{\delta \neq \alpha} G v_\delta \quad (3.53)$$

и подставляем резольвентное уравнение (2.1016):

$$U_{\beta\alpha}^{(+)} = \bar{V}_\beta + \bar{V}_\beta \sum_{\delta \neq \alpha} (g_\delta + G \bar{V}_\delta g_\delta) v_\delta \quad (3.54)$$

с

$$g_\delta v_\delta = g_0 t_\delta$$

(ср. с равенствами (2.83) и (2.84a)). В результате мы получаем

$$U_{\beta\alpha}^{(+)} = \bar{V}_\beta + V_\beta \sum_{\delta \neq \alpha} (1 + G \bar{V}_\delta) g_0 t_\delta. \quad (3.55)$$

С определением (3.52a) это дает

$$F_{\beta\alpha}^{(+)} = \bar{V}_\beta + \sum_{\delta \neq \alpha} U_{\beta\delta}^{(+)} g_0 t_\delta = \bar{V}_\beta + \sum_{\delta=0}^3 U_{\beta\delta}^{(+)} g_0 F_{\delta\alpha}. \quad (3.56)$$

Таким образом, мы снова получаем систему, аналогичную уравнениям Фаддеева. Фаддеевское ядро уравнения (3.10) расширяется на одну строку и один столбец

$$F_{\beta\alpha} = t_\beta (1 - \delta_{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & t_1 & t_1 \\ t_2 & t_2 & 0 & t_2 \\ t_3 & t_3 & t_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ и $t_0 \equiv 0$).

Вовсе не очевидно, что в нашем уравнении для $U_{\beta\alpha}$ мы получим фаддеевское ядро. Например, для $\beta = \alpha$ можно вывести следующее уравнение:

$$U_{\alpha\alpha}^{(+)} = \bar{V}_{\alpha} + U_{\alpha\alpha}^{(+)} g_{\alpha} \bar{V}_{\alpha}. \quad (3.58)$$

Это уравнение имеет ядро Липпмана — Швингера и, следовательно, обладает всеми недостатками, уже обсуждавшимися на стр. 44—46. Очевидно, что важно вывести *связанные* уравнения и этим учесть, что состояния каналов перекрываются и что переходы между разными каналами происходят в течение времени взаимодействия [9].

Аналогично можно получить уравнения Фаддеева для операторов $U_{\beta\alpha}^{-}$:

$$U_{\beta\alpha}^{-} = \bar{V}_{\alpha} + \sum_{\delta=0}^3 F_{\delta\beta} g_{\delta} U_{\delta\alpha}^{-}. \quad (3.59)$$

Уравнения (3.56) и (3.59) были введены Лавлейсом [8]. В сравнении с уравнениями (3.10), (3.29), (3.38) и (3.39) они имеют небольшой дефект, поскольку содержат и двухчастичные T -матрицы и потенциалы. Этот недостаток можно исправить небольшой модификацией операторов перехода [23]. Введем операторы

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_{\alpha}^{-1} + U_{\beta\alpha}^{(+)} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_{\beta}^{-1} + U_{\beta\alpha}^{-}. \quad (3.60)$$

Эти операторы на массовой поверхности приводят к той же самой S -матрице, что и операторы $U_{\beta\alpha}^{(\pm)}$, и они удовлетворяют уравнениям

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\delta=0}^3 F_{\delta\beta} g_{\delta} U_{\delta\alpha} \quad (3.61a)$$

и

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\delta=0}^3 U_{\beta\delta} g_{\delta} F_{\delta\alpha} \quad (3.61b)$$

($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$).

Уравнения Фаддеева (3.56), (3.59) и (3.61) связывают друг с другом не *все* операторы перехода. Мы покажем это на примере уравнения (3.61); другие уравнения можно рассмотреть аналогичным образом. Уравнение (3.61a) распадается на различные типы уравнений, именно, на:

а) систему уравнений для операторов перехода с перестройкой (рассеянием с перестройкой называется процесс рассеяния, в котором образуется связанное состояние, состоящее из частиц, отличающихся от образующих начальное связанное состояние)

$$\begin{aligned} U_{1\alpha} &= (1 - \delta_{1\alpha}) g_0^{-1} + t_2 g_0 U_{2\alpha} + t_3 g_0 U_{3\alpha}, \\ U_{2\alpha} &= (1 - \delta_{2\alpha}) g_0^{-1} + t_1 g_0 U_{1\alpha} + t_3 g_0 U_{3\alpha}, \\ U_{3\alpha} &= (1 - \delta_{3\alpha}) g_0^{-1} + t_1 g_0 U_{1\alpha} + t_2 g_0 U_{2\alpha} \end{aligned} \quad (3.62)$$

($\alpha = 1, 2, 3$);

б) систему уравнений для операторов, описывающих развал:

$$\begin{aligned} U_{1\alpha} &= g_0^{-1} && + t_2 g_0 U_{20} + t_3 g_0 U_{30}, \\ U_{2\alpha} &= g_0^{-1} && + t_1 g_0 U_{10} + t_3 g_0 U_{30}, \\ U_{3\alpha} &= g_0^{-1} && + t_1 g_0 U_{10} + t_2 g_0 U_{20}; \end{aligned} \quad (3.63)$$

в) уравнения, связывающие операторы для развала и для перестройки:

$$\begin{aligned} U_{01} &= g_0^{-1} + t_1 g_0 U_{11} + t_2 g_0 U_{21} + t_3 g_0 U_{31}, \\ U_{02} &= g_0^{-1} + t_1 g_0 U_{12} + t_2 g_0 U_{22} + t_3 g_0 U_{32}, \\ U_{03} &= g_0^{-1} + t_1 g_0 U_{13} + t_2 g_0 U_{23} + t_3 g_0 U_{33}; \end{aligned} \quad (3.64)$$

г) уравнение, которое связывает оператор для свободно-свободных переходов с операторами для развала:

$$U_{00} = t_1 g_0 U_{10} + t_2 g_0 U_{20} + t_3 g_0 U_{30}. \quad (3.65)$$

Уравнения (3.62) для $\alpha = 1, 2$ или 3 являются замкнутыми системами интегральных уравнений, и то же справедливо для системы (3.63). Существенным является следующее обстоятельство. Если интегральные уравнения (3.62) для рассеяния с перестройкой уже решены, то уже нет никакой необходимости решать интегральные уравнения для развала, ибо, согласно (3.64), амплитуды для развала при этом можно найти из известных амплитуд простым интегрированием, т. е. без решения интегрального уравнения. Амплитуды переходов из трехча-

стичного континуума в трехчастичный континуум получаются из амплитуд развала снова с помощью интегрирования (см. (3.65)). Тем самым амплитуды перестройки уже содержат полную информацию о трехчастичном рассеянии. Однако они должны быть известны полностью, а не только на массовой поверхности. В (3.64) и (3.65) амплитуды входят вне массовой поверхности, поскольку для промежуточных состояний, которые вводятся для вычисления операторных произведений, энергия не сохраняется.

Имеется формальная аналогия между (3.62) и уравнением Лишмана — Швингера [24]. Чтобы показать это, перепишем уравнение (3.62):

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\delta} (1 - \delta_{\beta\delta}) g_0^{-1} g_0 t_{\delta} g_0 U_{\delta\alpha}, \quad (3.66)$$

и обозначим неоднородный член с помощью матричного элемента оператора «потенциала» V ,

$$(V)_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.67)$$

Введем также «пропагатор» G_0 :

$$(G_0)_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} g_0 t_{\beta} g_0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (3.68)$$

и « T -матрицу» T

$$(T)_{\beta\alpha} = U_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.69)$$

Тогда уравнение (3.66) принимает вид

$$T = V + VG_0T \quad (3.70)$$

в полной аналогии с (2.56). Написанное уравнение, однако, является матричным относительно индексов разбиения $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, что выражает тот факт, что теперь мы имеем многоканальную проблему. С первого взгляда уравнение (3.70) представляется не более чем формальным трюком. А то, что G_0 ассоциируется с t_{β} , а g_0^{-1} с V , даже сбивает с толку. Но если вспомнить, что матрица переходов получается путем взятия матричных элементов от $U_{\beta\alpha}$ по состояниям каналов, и выписать для $z = E_{\alpha m} + i0$

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\beta n} | (V)_{\beta\alpha} | \phi_{\alpha m} \rangle &= (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \phi_{\beta n} | E_{\alpha m} - h_0 | \phi_{\alpha m} \rangle = \\ &= (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \phi_{\beta n} | v_{\alpha} | \phi_{\alpha m} \rangle, \end{aligned} \quad (3.71)$$

то мы увидим связь между V и взаимодействием. Позднее мы используем уравнение (3.70), чтобы сформулировать задачу трех тел как эффективную задачу двух тел, а именно, как задачу взаимодействия частицы со связанным состоянием пары частиц. Тогда станет ясно, почему взаимодействие в подсистеме должно присутствовать в пропагаторе G_0 . Формулировка (3.70) имеет большое эвристическое значение: алгебраические манипуляции можно выполнять по аналогии с задачей двух частиц. Можно поинтересоваться, например, матричным оператором, соответствующим двухчастичной резольвенте. По аналогии с (2.46) он должен иметь вид

$$G = G_0 + G_0 T G_0. \quad (3.72)$$

Используя определения (3.68) и (3.69), мы находим

$$(G)_{\beta\alpha} = g_0 (\delta_{\beta\alpha} v_\alpha + v_\beta G v_\alpha) g_0. \quad (3.73)$$

По аналогии с уравнением (2.22) существует «резольвентное» уравнение

$$G = G_0 + G_0 V G. \quad (3.74)$$

Подставляя (3.73) и вводя сокращение

$$M_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} v_\alpha + v_\beta G v_\alpha, \quad (3.75)$$

получаем

$$M_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} t_\alpha + t_\beta g_0 \sum_{\gamma \neq \beta} M_{\gamma\alpha}. \quad (3.76)$$

Это уравнение было использовано Фаддеевым для исследования резольвенты G [25]. Через $M_{\beta\alpha}$ резольвента G записывается в виде

$$G = g_0 + g_0 \sum_{\beta, \alpha} M_{\beta\alpha} g_0. \quad (3.77)$$

6. Соотношение унитарности

Дальнейшим применением уравнений Фаддеева в форме (3.70) является вывод соотношения унитарности для операторов перехода $U_{\beta\alpha}$ [24]. Действуя по аналогии с главой 2, раздел 1.7, влияние разных каналов следует учитывать отдельно.

Из (3.70) легко вывести следующий аналог соотношения (2.61):

$$\mathbf{T}^{-1}(z) = \mathbf{V}^{-1}(z) - \mathbf{G}_0(z). \quad (3.78)$$

Обратный оператор для «потенциала» \mathbf{V} при $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ есть

$$(\mathbf{V}^{-1}(z))_{\beta\alpha} = (1/2 - \delta_{\beta\alpha})g_0(z), \quad (3.79)$$

что можно проверить умножением с использованием определения (3.67). Этот обратный оператор в нашем случае зависит от энергии. Для скачка \mathbf{T} на вещественной оси энергии получаем поэтому, в отличие от (2.63),

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(E + i\varepsilon) - \mathbf{T}(E - i\varepsilon) &= \\ &= -\mathbf{T}(E + i\varepsilon) \{ \mathbf{V}^{-1}(E + i\varepsilon) - \mathbf{V}^{-1}(E - i\varepsilon) - \\ &\quad - \mathbf{G}_0(E + i\varepsilon) + \mathbf{G}_0(E - i\varepsilon) \} \mathbf{T}(E - i\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.80)$$

С помощью соотношений (3.68) и (3.79) выражению в фигурных скобках можно придать вид

$$\begin{aligned} (1/2 - \delta_{\beta\alpha})\Delta g_0 - \delta_{\beta\alpha}\Delta(g_0 t_\alpha g_0) &= 1/2\Delta g_0 - \delta_{\beta\alpha}\Delta g_\alpha, \\ \alpha, \beta &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (3.81)$$

где Δ означает скачок, а во второй строке было использовано равенство (2.46) в трехчастичном пространстве. Скачок g_γ тогда будет (ср. с (2.64) и (2.65))

$$\begin{aligned} \Delta g_\gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (g_\gamma(E + i\varepsilon) - g_\gamma(E - i\varepsilon)) = -2\pi i \delta(E - h_\gamma), \\ \gamma &= 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Скачок Δg_γ с $\gamma \neq 0$ содержит вклад как от связанных состояний подсистем, так и от трехчастичного континуума. Их можно разделить следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta(E - h_\gamma) &= \sum_n \Delta_{\gamma n}(E) + (1 + g_0(E + i0) t_\gamma(E + i0)) \times \\ &\quad \times \Delta_0(E) (1 + t_\gamma(E - i0) g_0(E - i0)), \end{aligned} \quad (3.83)$$

где

$$\Delta_{\gamma n}(E) = |\mathbf{q}_\gamma\rangle |\psi_{\gamma n}\rangle \delta\left(E - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} - E_{\gamma n}^B\right) \langle \psi_{\gamma n} | \langle \mathbf{q}_\gamma |$$

и

$$\Delta_0(E) = |\mathbf{q}_\gamma\rangle \langle \mathbf{p}_\gamma| \delta\left(E - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma}\right) \langle \mathbf{p}_\gamma| \langle \mathbf{q}_\gamma|.$$

Это расщепление можно проверить, если подействовать $\delta(E - h_\gamma)$ на представление единичной матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} = \sum_n \int d\mathbf{q}_\gamma |\psi_{\gamma n}\rangle \langle \mathbf{q}_\gamma| \langle \mathbf{q}_\gamma| \langle \psi_{\gamma n}| + \\ + \int d\mathbf{p}_\gamma \int d\mathbf{q}_\gamma |\mathbf{p}_\gamma\rangle^{(+)} \langle \mathbf{q}_\gamma| \langle \mathbf{q}_\gamma| \langle \mathbf{p}_\gamma|^{(+)}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

используя

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_\gamma\rangle^{(+)} \langle \mathbf{q}_\gamma| &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon g_\gamma \left(\frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} + \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} + i\varepsilon \right) |\mathbf{p}_\gamma\rangle \langle \mathbf{q}_\gamma| = \\ &= \left[1 + g_0 \left(\frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} + \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} + i0 \right) t_\gamma \left(\frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} + \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} + i0 \right) \right] |\mathbf{p}_\gamma\rangle \langle \mathbf{q}_\gamma| \end{aligned} \quad (3.85)$$

(ср. с (2.17) и (2.46)). Подставляя (3.82), (3.83) в соотношение (3.80) и возвращаясь к явным обозначениям, получим для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} U_{\beta\alpha}(E + i0) - U_{\beta\alpha}(E - i0) = \\ = -2\pi i \left\{ \sum_{\gamma=1}^3 \sum_n U_{\beta\gamma}(E + i0) \Delta_{\gamma n}(E) U_{\gamma\alpha}(E - i0) + \right. \\ + \sum_{\gamma=1}^3 U_{\beta\gamma}(E + i0) (1 + g_0(E + i0) t_\gamma(E + i0)) \times \\ \times \Delta_0(E) (1 + t_\gamma(E - i0) g_0(E - i0)) U_{\gamma\alpha}(E - i0) - \\ \left. - \sum_{\gamma, \delta=1}^3 U_{\beta\gamma}(E + i0) \frac{1}{2} \Delta_0(E) U_{\delta\alpha}(E - i0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Если использовать соотношения

$$\begin{aligned} (1 + t_\gamma g_0) U_{\gamma\alpha} &= U_{0\alpha} - \delta_{\gamma\alpha} g_0^{-1}, \quad \alpha \neq 0, \\ U_{\beta\gamma} (1 + g_0 t_\gamma) &= U_{\beta 0} - \delta_{\beta\gamma} g_0^{-1}, \quad \beta \neq 0, \\ \sum_{\delta=1}^3 U_{\delta\alpha} &= 2U_{0\alpha}, \quad \alpha \neq 0, \end{aligned} \quad (3.87)$$

которые легко проверить с помощью (3.61), то уравнение (3.86) сводится к

$$\begin{aligned}
 U_{\beta\alpha}(E+i0) - U_{\beta\alpha}(E-i0) = \\
 = -2\pi i \left\{ \sum_{\gamma=1}^3 \sum_n U_{\beta\gamma}(E+i0) \Delta_{\gamma n}(E) U_{\gamma\alpha}(E-i0) + \right. \\
 \left. + U_{\beta 0}(E+i0) \Delta_0(E) U_{0\alpha}(E-i0) \right\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Это и есть соотношение унитарности для трехчастичных операторов перехода $U_{\beta\alpha}$. Оптическая теорема получается, если ограничиться рассеянием вперед и положить $\beta = \alpha$. Используя проекционные свойства $\Delta_{\gamma n}$, находим

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\alpha}(E+i0) - U_{\alpha\alpha}(E-i0) | \phi_{\alpha m} \rangle = \\
 = -2\pi i \left\{ \sum_{\gamma, n} \int d\mathbf{q}_\gamma \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\gamma}(E+i0) | \phi_{\gamma n} \rangle \times \right. \\
 \times \delta \left(E - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} - E_{\gamma n}^B \right) \langle \phi_{\gamma n} | U_{\gamma\alpha}(E-i0) | \phi_{\alpha m} \rangle + \\
 \left. + \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{p}_1 \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha 0}(E+i0) | \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \times \right. \\
 \left. \times \delta \left(E - \frac{q_1^2}{2M_1} - \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right) \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | U_{0\alpha}(E-i0) | \phi_{\alpha m} \rangle. \right.
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

Поскольку

$$\langle \phi_{\gamma n} | U_{\gamma\alpha}(E-i0) | \phi_{\alpha m} \rangle = \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\gamma}(E+i0) | \phi_{\gamma n} \rangle^* \tag{3.90}$$

(ср. с (3.52)), то (3.89) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\alpha}(E+i0) | \phi_{\alpha m} \rangle = \\
 = -\pi \left\{ \sum_{\gamma, n} \int d\mathbf{q}_\gamma \delta \left(E - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} - E_{\gamma n}^B \right) \left| \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\gamma}(E+i0) \times \right. \right. \\
 \times | \phi_{\gamma n} \rangle \left. \right|^2 + \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{p}_1 \delta \left(E - \frac{q_1^2}{2M_1} - \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right) \times \\
 \left. \times \left| \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha 0}(E+i0) | \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \right|^2 \right\}. \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

Это и есть оптическая теорема для трехчастичного рассеяния. Она связывает полное поперечное сечение (т. е. сумму упругого сечения, сечения развала и сечения с перестройкой) с амплитудой упругого рассеяния вперед

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \langle \phi_{\alpha m} | U_{\alpha\alpha}(E + i0) | \phi_{\alpha m} \rangle = \\ = - \frac{q_{\alpha}}{16\pi^3 M_{\alpha}} \left\{ \sum_{\gamma=1}^3 \sum_n \sigma_{\gamma n} + \sigma_{\text{разв}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА *)

В этой главе мы хотим исследовать, как можно практически решить уравнения Фаддеева. Для этого сначала перейдем от абстрактных операторных уравнений к интегральным уравнениям. Затем изучим некоторые методы теории интегральных уравнений и посмотрим, могут ли они быть применены к уравнениям Фаддеева.

1. Разложение уравнений Фаддеева по парциальным волнам

Интегральные уравнения получаются из фаддеевских уравнений для операторов T_i , G_i , $U_{\beta\alpha}$, $U_{0\alpha}$ или для векторов состояния $|\psi_{\alpha n}\rangle_i$ выбором какого-либо пространства представлений. В пространстве импульсов $|\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{q}_\alpha\rangle$ интегральные уравнения будут шестимерными. Так как полный угловой момент L и его z -компонента M сохраняются, то имеет смысл выбрать такое представление, чтобы его векторы были собственными состояниями L и M . При этом интегральные уравнения становятся четырехмерными. Однако они еще слишком сложны для численных расчетов. Хотя других сохраняющихся величин нет, размерность можно еще понизить ценой перехода к более связанным уравнениям.

С этой целью мы используем пространство состояний, которые характеризуются полным угловым моментом L , его z -компонентой \tilde{M} , угловым моментом l_α подсистемы α , угловым моментом $\hat{\lambda}_\alpha$ частицы α и абсолютными значениями импульсов p_α, q_α [26, 27]. Имеются три пространства такого рода в зависимости от того, которая из подсистем выбрана:

$$|\gamma\rangle = \begin{cases} |I\rangle = |LMl_1\lambda_1p_1q_1\rangle, \\ |II\rangle = |LMl_2\lambda_2p_2q_2\rangle, \\ |III\rangle = |LMl_3\lambda_3p_3q_3\rangle. \end{cases} \quad (4.1)$$

*) См. также Дополнение 1.— (Прим. перев.)

С первого взгляда предпочтительный выбор определенной подсистемы кажется неоправданным, так как все три частицы следует рассматривать на равной основе [28]. Но поскольку наши операторы t_α , $U_{\beta\alpha}$ во всяком случае берутся в определенных подсистемах, то подобный выбор может даже дать некоторое преимущество. Теперь уже наши интегральные уравнения всего лишь двумерные, поскольку остались только две непрерывные переменные p_α и q_α . Однако число связанных уравнений становится бесконечно большим, так как существует бесконечно большое число способов, с помощью которых данный угловой момент L можно разложить на сумму угловых моментов l_α и λ_α .

Тем не менее имеет смысл поступать следующим образом. Для короткодействующих потенциалов взаимодействие будет эффективно только для небольшого числа угловых моментов, и поэтому бесконечную систему уравнений можно с хорошей точностью аппроксимировать конечной системой. Теперь мы собираемся сделать парциально-волновое разложение для уравнений Фаддеева (3.61).

Прежде всего мы должны найти преобразование между состояниями (4.1) и состояниями $|p_\alpha, q_\alpha\rangle$. Базис, который диагонализует энергии, угловые моменты и z -компоненты угловых моментов для определенного набора координат Якоби, получается с помощью унитарного преобразования вида

$$|q_\alpha \lambda_\alpha \mu_\alpha, p_\alpha l_\alpha m_\alpha\rangle = \int d\hat{q}_\alpha d\hat{p}_\alpha Y_{\lambda_\alpha \mu_\alpha}(\hat{q}_\alpha) Y_{l_\alpha m_\alpha}(\hat{p}_\alpha) |p_\alpha, q_\alpha\rangle. \quad (4.2)$$

Функции $Y_{\lambda_\alpha \mu_\alpha}$, $Y_{l_\alpha m_\alpha}$ — это хорошо известные сферические гармоники. Интегрирование проводится по направлениям векторов q_α и p_α . Квантовые числа μ_α , m_α суть z -компоненты угловых моментов λ_α , l_α . Второе унитарное преобразование приводит к базису, фигурирующему в формуле (4.1), с определенным полным угловым моментом

$$|LM l_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha q_\alpha\rangle = \sum_{\mu_\alpha, m_\alpha} \langle \lambda_\alpha l_\alpha \mu_\alpha m_\alpha | LM \rangle |q_\alpha \lambda_\alpha \mu_\alpha, p_\alpha l_\alpha m_\alpha\rangle. \quad (4.3)$$

Матричные элементы $\langle \lambda l \mu m | LM \rangle$ — это хорошо известные коэффициенты Клебша — Гордана.

Из нормировки импульсных состояний $|p_\alpha, q_\alpha\rangle$ следует

$$\langle I | I' \rangle = \frac{\delta(q_1 - q'_1)}{q_1^2} \frac{\delta(p_1 - p'_1)}{p_1^2} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \delta_{l_1 l'_1} \dots \quad (4.4)$$

В новом представлении двухчастичная T -матрица (2.86) имеет вид (для $\gamma = I$; аналогично будет для $\gamma = II, III$)

$$\begin{aligned} \langle I | t_1(z) | I' \rangle &= \\ &= \frac{\delta(q_1 - q'_1)}{q_1^2} \delta_{LL'} \delta_{MM'} \delta_{l_1 l'_1} \delta_{\lambda_1 \lambda'_1} \hat{t}_{1, l_1} \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1}; p_1, p'_1 \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Величина \hat{t}_{1, l_1} представляет вклад l_1 -й парциальной волны в T -матрицу \hat{t}_1

$$\begin{aligned} \langle p_1 | \hat{t}_1 \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1} \right) | p'_1 \rangle &= \sum_{l_1=0}^{\infty} (2l_1 + 1) P_{l_1}(\hat{p}_1 \cdot \hat{p}'_1) \hat{t}_{1, l_1} \times \\ &\times \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1}; p_1, p'_1 \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Свободная резольвента $g_0(z)$, также появляющаяся в уравнениях Фаддеева, становится (для $\gamma = I$ и аналогично для $\gamma = II, III$)

$$\langle I | g_0(z) | I' \rangle = \langle I | I' \rangle \left(z - \frac{q_1^2}{2M_1} - \frac{p_1^2}{2\mu_1} \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Представление операторов, подобных $U_{\beta\alpha}$, t_γ , имеет простой вид лишь в том случае, если в качестве представления взять пространство, относящееся к той же подсистеме, что и оператор, как это будет для $\langle \beta | U_{\beta\alpha} | \alpha \rangle$ и $\langle \gamma | t_\gamma | \gamma' \rangle$. С другой стороны, уравнения Фаддеева связывают все возможные подсистемы. Нам необходимо использовать поэтому все три пространства (4.1) и уметь переходить от одного к другому. Для такого перехода нам нужно найти интеграл перекрывания $\langle \beta' | \alpha \rangle$. Расчет такого интеграла является довольно сложным, поскольку он включает восьмикратное интегрирование $\int d\hat{q}_\alpha d\hat{p}_\alpha d\hat{q}'_\beta d\hat{p}'_\beta$ и четырехкратное суммирование $\Sigma(\mu_\alpha, m_\alpha, \mu_\beta, m_\beta)$ произведений коэффициентов Клебша — Гордана и сфериче-

ских гармоник. Результат, который мы приводим из работы Бальяна и Брезина [27] соответственно, является громоздким

$$\begin{aligned} \langle \beta' | \alpha \rangle = & f(m_1, m_2, m_3) \delta_{LL'} \delta_{MM'} \times \\ & \times \frac{\delta(p_\beta'^2/2\mu_\beta + q_\beta'^2/2M_\beta - p_\alpha^2/2\mu_\alpha - q_\alpha^2/2M_\alpha)}{p_\beta' q_\beta' p_\alpha q_\alpha} \times \\ & \times A_{\beta'\alpha} \left(\frac{p_\alpha}{q_\beta}, \frac{p_\beta'}{q_\beta}, l, l_\beta, \lambda_\beta, l_\alpha, \lambda_\alpha \right). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Угловые моменты одной системы координат Якоби не определяют однозначно смешивание угловых моментов в другой системе координат Якоби. Дополнительно нужно еще знать абсолютные значения импульсов. Эта зависимость переменных одного набора от переменных другого набора в основном и выражена функцией $A_{\beta'\alpha}$, содержащей ту часть отмеченного выше суммирования, которую нельзя провести явно в общем случае. Мы можем, однако, принять, что функция $A_{\beta'\alpha}$ является известной. Во многих практических приложениях (см. главу 6, разд. 1 и гл. 7, разд. 3) предполагается, что взаимодействие эффективно только для нулевого углового момента относительного движения, что сильно упрощает дело.

У нас есть теперь все необходимое, чтобы выписать уравнения Фаддеева в новом представлении. Сначала возьмем матричные элементы уравнения (3.61а) в соответствии с «естественным» представлением для $U_{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned} \langle \beta | U_{\beta\alpha} | \alpha' \rangle = & (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \beta | \alpha' \rangle \left(z - \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} - \frac{q_\beta^2}{2M_\beta} \right) + \\ & + \sum_{\gamma \neq \beta} \langle \beta | t_\gamma g_0 U_{\gamma\alpha} | \alpha' \rangle. \quad (4.9) \end{aligned}$$

Произведение операторов в правой части вычисляется путем введения полного набора состояний ($\gamma = I, II$ или III)

$$\sum_{(\gamma)} |\gamma\rangle \langle \gamma| = \mathbb{1}. \quad (4.10)$$

(Заметим, что γ как индекс состояния обозначает все переменные, появляющиеся в (4.1).)

Используя (4.7), получим

$$\langle \beta | t_\gamma g_0 U_{\gamma\alpha} | \alpha' \rangle = \sum_{(\gamma')} \frac{\langle \beta | t_\gamma | \gamma \rangle \langle \gamma | U_{\gamma\alpha} | \alpha' \rangle}{z - p_\gamma^2 / 2\mu_\gamma - q_\gamma^2 / 2M_\gamma}. \quad (4.11)$$

Чтобы получить матрицу перехода t_γ в ее естественном представлении, используем разложение (4.10) еще раз:

$$\langle \beta | t_\gamma = \sum_{(\gamma')} \langle \beta | \gamma' \rangle \langle \gamma' | t_\gamma. \quad (4.12)$$

Уравнения Фаддеева наконец приобретают вид

$$\begin{aligned} \langle \beta | U_{\beta\alpha} | \alpha' \rangle = & (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \beta | \alpha' \rangle \left(z - \frac{p_\beta^2}{2\mu_\beta} - \frac{q_\beta^2}{2M_\beta} \right) + \\ & + \sum_{\gamma \neq \beta} \sum_{(\gamma')} \sum_{(\gamma)} \frac{\langle \beta | \gamma' \rangle \langle \gamma' | t_\gamma | \gamma \rangle \langle \gamma | U_{\gamma\alpha} | \alpha' \rangle}{z - \frac{p_\gamma^2}{2\mu_\gamma} - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Два из четырех интегрирований могут быть выполнены с помощью δ -функций, содержащихся в матрице перехода (4.5) и в перекрытии (4.8). При данном полном угловом моменте перекрытие $\langle \beta | \gamma' \rangle$ связывает бесконечно много угловых моментов подсистем. Уравнение (4.13), таким образом, становится бесконечной системой связанных интегральных уравнений в двух измерениях для матричных элементов $\langle \gamma | U_{\gamma\alpha} | \alpha' \rangle$. Энергия z и состояние α' входят в качестве параметров. Предельный переход $z \rightarrow E + i0$ играет существенную роль при выборе контура интегрирования в окрестности сингулярностей.

Бесконечная система уравнений (4.13) становится конечной, если принять, что лишь конечное число парциальных волн дает вклад в разложение (4.6), что оправдано для короткодействующих потенциалов. Число уравнений зависит от полного углового момента L и от максимального углового момента l_0 , для которого взаимодействие еще эффективно. В литературе [27, 29] имеются несколько различающиеся оценки этого числа, что может служить указателем степени сложности связи угловых моментов в системе трех частиц.

До сих пор мы имели дело с различающимися бесспиновыми частицами. Учет спина в принципе не создает

непреодолимых затруднений. Лишь связь угловых моментов становится гораздо более громоздкой и увеличивается число уравнений. Принцип Паули учитывается путем использования только симметричных или антисимметричных состояний для представления операторов [30, 31]. Для одинаковых частиц уравнения Фаддеева менее сложны, поскольку одинаковые частицы означают одинаковые каналы, что уменьшает число связанных уравнений.

Нужно отметить, что фаддеевские уравнения могут быть также преобразованы в систему интегро-дифференциальных уравнений в конфигурационном пространстве [32]. Также и в этом представлении они были с успехом решены для задачи о связанном состоянии трех нуклонов [33]. В большинстве приложений, однако, используется импульсное представление (как в (4.13)).

2. Некоторые понятия теории интегральных уравнений

Фаддеевские уравнения в импульсном представлении являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода

$$f = h + Kf. \quad (4.14a)$$

Формально их можно решить путем введения резольвенты *)

$$R = (1 - K)^{-1} \leadsto f = Rh.$$

Чтобы обсудить методы решения, рассмотрим для простоты одномерное уравнение этого типа

$$f(x) = h(x) + \int_a^b K(x, y) f(y) dy. \quad (4.14b)$$

Обобщение на уравнения Фаддеева, представляющие собой системы двумерных интегральных уравнений, можно сделать без затруднений. Более детальное обсуждение методов, приводимых ниже, можно найти в двух работах Вейнберга [7,34] и в учебниках по интегральным уравнениям [35].

*) Резольвента, фигурирующая в теории рассеяния, отличается от этой резольвенты множителем g_0 .

а) *Решение итерациями.* Если Kf мало по сравнению с h , то решением (4.14 а) в нулевом порядке будет

$$f^{(0)} = h.$$

При последующих итерациях оно становится таким:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} K^i h. \quad (4.15)$$

Резольвента будет иметь вид

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} K^i. \quad (4.16)$$

Этот ряд, называемый рядом Неймана, сходится тогда и только тогда (для произвольного h), когда все собственные значения η_ν ядра K

$$K\psi_\nu = \eta_\nu \psi_\nu, \quad (4.17a)$$

имеют абсолютные значения меньше единицы

$$|\eta_\nu| < 1. \quad (4.17b)$$

б) *Вырожденное ядро.* Если ядро имеет форму

$$K(x, y) = \bar{\varphi}(x)\varphi(y), \quad (4.18)$$

то интегральное уравнение (4.14 б) можно легко решить, поскольку x -зависимость подынтегральной функции можно вынести за знак интеграла, который при этом становится константой c ,

$$f(x) = h(x) + c\bar{\varphi}(x). \quad (4.19)$$

Для этой константы мы имеем равенство

$$c = \int_a^b \varphi(y) f(y) dy = \int_a^b \varphi(y) h(y) dy + c \int_a^b \varphi(y) \bar{\varphi}(y) dy,$$

и получаем

$$c = \frac{\int_a^b \varphi(y) h(y) dy}{1 - \int_a^b \varphi(y) \bar{\varphi}(y) dy}. \quad (4.20)$$

в) *Разложение компактного ядра по вырожденным ядрам.* Простой метод решения в случае б) наводит на мысль разложить невырожденное ядро по вырожденным ядрам. Действительно, для каждого компактного ядра можно найти ряд из вырожденных ядер, аппроксимирующих исходное ядро таким образом, чтобы норма разности стала произвольно малой. Для полной ортогональной системы $(\bar{\varphi}_\mu \otimes \varphi_\nu)$, $\int \bar{\varphi}_\mu(x) \varphi_\nu^*(x) dx = \delta_{\mu\nu}$ мы имеем

$$K(x, y) = \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} \bar{\varphi}_\mu(x) \varphi_\nu^*(y) \quad (4.21)$$

с

$$a_{\mu\nu} = \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_\mu^*(x) \bar{\varphi}_\nu(y) dx dy. \quad (4.22)$$

Если разложение (4.21) подставить в интегральное уравнение (4.14 б), то получим

$$f(x) = h(x) + \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} c_\nu \bar{\varphi}_\mu(x) \quad (4.23)$$

с бесконечным количеством констант c_ν . Эти константы определяются уравнением

$$c_\kappa = \int_a^b \varphi_\kappa^*(y) f(y) dy = \int_a^b \varphi_\kappa^*(y) h(y) dy + \\ + \sum_{\mu, \nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} c_\nu \int_a^b \varphi_\kappa^*(y) \bar{\varphi}_\mu(y) dy, \quad (4.24)$$

представляющим собой набор линейных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\delta_{\kappa\nu} - a_{\kappa\nu}) c_\nu = \int_a^b \varphi_\kappa^*(y) h(y) dy. \quad (4.25)$$

В практических вычислениях разложение (4.21) нужно оборвать после конечного числа членов:

$$K(x, y) = \sum_{\mu, \nu=1}^N a_{\mu\nu} \bar{\varphi}_\mu(x) \varphi_\nu^*(y) + K_N(x, y). \quad (4.26)$$

Остаток $K_N(x, y)$ либо отбрасывается, либо приближенно учитывается методом Шмидта.

г) *Метод Шмидта* [36]. При использовании разложения (4.26) интегральное уравнение (4.14б) приобретает вид

$$f(x) = h(x) + \sum_{\mu, \nu=1}^N a_{\mu\nu} c_\nu \bar{\varphi}_\mu(x) + \int_a^b K_N(x, y) f(y) dy. \quad (4.27)$$

От исходного ядра достаточно отщепить только конечное число членов $a_{\mu\nu} \bar{\varphi}_\mu \varphi_\nu^*$, чтобы достичь сходимости ряда Неймана для остатка $K_N(x, y)$. Это получается потому, что для компактных ядер в крайнем случае имеется не более конечного числа собственных значений, не удовлетворяющих условию (4.17б).

Резольвенту R_N остаточного ядра $K_N(x, y)$ поэтому можно вычислить с помощью ряда

$$R_N = \sum_{i=0}^{\infty} K_N^i. \quad (4.28)$$

Имея резольвенту R_N , уравнение (4.27) можно привести к виду, аналогичному (4.23),

$$\begin{aligned} f(x) &= h'(x) + \sum_{\mu, \nu=1}^N a_{\mu\nu} c_\nu \bar{\varphi}'_\mu(x), \\ h'(x) &= \int_a^b R_N(x, y) h(y) dy, \\ \bar{\varphi}'_\mu(x) &= \int_a^b R_N(x, y) \bar{\varphi}_\mu(y) dy. \end{aligned} \quad (4.29)$$

А как уже было показано (см. (4.23) — (4.25)), такие уравнения можно решать алгебраическими методами.

д) *Падé-аппроксимация*. Не сходящийся ряд Неймана становится сходящимся, если ядро умножить на комплексный параметр λ , удовлетворяющий условию

$$|\lambda| < |\eta_{\max}^{-1}| < 1. \quad (4.30)$$

Тогда ряд определяет некоторую функцию

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda K)^i h = h + \lambda K f(\lambda), \quad (4.31)$$

которая аналитична в области, заданной условием (4.30). Вне этой области функция $f(\lambda)$ все еще определяется коэффициентами $K^i h$, но ее уже нельзя вычислить через ее ряд Тейлора (4.31), так как она мероморфна с полюсами в точках $\lambda_i = \eta_i^{-1}$. Решение интегрального уравнения (4.14)

$$f = f(1) \quad (4.32)$$

можно найти, однако, с помощью конструкции, которая является рациональной функцией λ . Этот метод, названный по имени французского математика Падé [37, 38], будет изучен более детально в главе 7.

Тесно связанным с методом Падé является метод моментов [39]*). Итерирование (в общем случае не сходящееся) уравнения (4.14) дает систему функций

$$f_{\nu} = \sum_{i=0}^{\nu} K^i h, \quad (4.33)$$

из которых конструируется приближенное решение

$$f^N = \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} f_{\nu}. \quad (4.34)$$

Затем требуют, чтобы это приближенное решение удовлетворяло интегральному уравнению (4.14) в пространстве, натянутом на функции f_{ν} ,

$$\sum_{\nu=0}^N a_{\nu} (f_{\mu}, f_{\nu}) = (f_{\mu}, h) + \sum_{\nu=0}^N a_{\nu} (f_{\mu}, K f_{\nu}). \quad (4.35)$$

Это — система линейных уравнений, определяющая коэффициенты a_{ν} . Набор функций f_{ν} не обязательно должен быть полным. Итерации дают как раз те функции, которые являются подходящими. Также нет необходимости начинать итерации с неоднородного члена h . В качестве начальной точки можно выбрать, например, решение не-

*). См. также монографию [Д1.1].— (Прим. перев.)

которой родственной задачи или приближенное решение, полученное другим методом.

е) *Численное интегрирование.* Наконец, мы хотим отметить метод, который выглядит наиболее очевидным. Если использовать правило интегрирования с узлами y_j и весами w_j , то уравнение (4.14б) приобретает вид

$$f(x) = h(x) + \sum_{j=1}^N w_j K(x, y_j) f(y_j) + \text{остаток.} \quad (4.36)$$

Пренебрегая остатком и полагая $x = y_i$, получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - w_j K(y_i, y_j)) f(y_j) = h(y_i), \quad (4.37)$$

определяющую $f(x)$ в узловых точках. Полная функция в этом случае дается равенством (4.36).

3. Применение к уравнениям Фаддеева

Теперь исследуем, какие из приведенных выше методов годятся для решения фаддеевских уравнений.

Метод а), например, можно исключить, если трехчастичная система имеет связанное состояние. В этом случае однородное уравнение (4.17а) имеет решение при энергии связанного состояния с собственным значением $\eta = 1$. При энергиях выше энергии связи мы даже имеем $|\eta| > 1$; это означает, что нельзя ожидать сходимости ряда Неймана (см. уравнение (4.17б)). Мы получим сходимость лишь при очень высоких энергиях (кроме случая потенциалов с твердой сердцевиной*), поскольку ядро при этом становится все менее и менее эффективным [40].

Метод б) также можно исключить. Как видно из соотношений (4.5) и (4.8), ни один из матричных элементов

*) Отметим, что при переходе от потенциалов v к t -матрицам интенсивность взаимодействия «редуцируется»; более строго это означает, что, в отличие от ядра уравнения Липпмана — Швингера G_{0v} , ядро уравнения Фаддеева не может иметь собственных значений, превосходящих по модулю 2, для сколь угодно сильного отталкивающего потенциала (см. детальное обсуждение в работах [Д1.37, Д1.40]). — (Прим. перев.)

$\langle \gamma' | t_\gamma | \gamma \rangle$ или $\langle \beta | \gamma' \rangle$ не факторизуется

$$\langle \gamma' | t_\gamma | \gamma \rangle \neq h(\gamma') i(\gamma), \quad (4.38a)$$

$$\langle \beta | \gamma' \rangle \neq j(\beta) k(\gamma'), \quad (4.38б)$$

и поэтому β -зависимость в уравнении (4.13) нельзя вынести за знак интеграла.

Прямое применение методов в) и г) является непрактичным, так как нельзя найти ряды из вырожденных ядер, аппроксимирующие ядро Фаддеева достаточно хорошо. Причина та, что фаддеевское ядро четырехмерно и имеет различные сингулярности, возникающие от операторов t_γ и g_0 .

Метод д) можно применять непосредственно, поскольку (см. гл. 7) решения уравнений Фаддеева можно аппроксимировать с произвольной точностью рациональными функциями (ср. с утверждением п. в) на стр. 52).

Метод е) был применен к уравнениям Фаддеева непосредственно лишь однажды. Причина та, что мощность компьютеров исчерпывается довольно быстро (см. гл. 6). Если по каждому измерению использовать по 30 узлов интегрирования, то получим двумерную сетку из $N=900$ точек. Матрица, которую следует обратить согласно уравнению (4.37), имеет размерность $N \times N = 900 \times 900$ в простейшем случае тождественных бесспиновых частиц с взаимодействием лишь в s -волне.

Успешные вычисления в ранний период трехчастичной теории были сделаны с помощью комбинации методов в) и е), а позднее — с помощью комбинирования г) и е). В этих вычислениях метод в) или г) применялся не к полному уравнению Фаддеева, а лишь к уравнениям, описывающим подсистемы. Ядра этих уравнений аппроксимировать намного проще. Качество приближения также легче исследовать в подсистеме, чем в полной трехчастичной системе [8]. Однако на этом пути уравнения Фаддеева не сводятся к алгебраическому уравнению типа (4.25). Уравнения все еще остаются интегральными, но уже одномерными и поддающимися решению методом (е).

Комбинация методов в) и е) соответствует введению сепарабельных потенциалов [41], которые будут обсуждаться в следующей главе.

1. Сепарабельные потенциалы в задаче двух тел

Рассмотрим снова уравнение (2.56) для двухчастичной T -матрицы в двухчастичном пространстве

$$t(z) = v + v g_0(z) t(z),$$

или в явном виде

$$\langle \mathbf{p}' | t(z) | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p}' | v | \mathbf{p} \rangle + \int d\mathbf{p}'' \frac{\langle \mathbf{p}' | v | \mathbf{p}'' \rangle \langle \mathbf{p}'' | t(z) | \mathbf{p} \rangle}{z - \frac{p''^2}{2\mu}}. \quad (5.1)$$

Ядро этого интегрального уравнения

$$K(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') = \frac{\langle \mathbf{p}' | v | \mathbf{p}'' \rangle}{z - p''^2/2\mu} \quad (5.2)$$

вырождено, если потенциал имеет вид

$$\langle \mathbf{p}' | v | \mathbf{p}'' \rangle = \lambda \chi(\mathbf{p}') \chi^*(\mathbf{p}''). \quad (5.3)$$

Такой потенциал называется сепарабельным. Интегральное уравнение (5.1) с таким потенциалом решается так же легко, как и уравнение (4.19). Перед тем, как это показать, введем для сепарабельного потенциала операторное обозначение

$$v^s = \lambda |\chi\rangle \langle \chi|. \quad (5.4)$$

Отсюда видно, что сепарабельный потенциал — это проекционный оператор. В конфигурационном пространстве он имеет вид

$$\langle \mathbf{r} | v^s | \mathbf{r}' \rangle = \lambda \langle \mathbf{r} | \chi \rangle \langle \chi | \mathbf{r}' \rangle = \lambda \chi(\mathbf{r}) \chi^*(\mathbf{r}'). \quad (5.5)$$

Таким образом, сепарабельный потенциал нелокален*).

Для сепарабельного потенциала уравнение (5.1) в операторной форме приобретает вид

$$t = \lambda |\chi\rangle \langle \chi| + \lambda |\chi\rangle \langle \chi| g_0 t. \quad (5.6)$$

Его можно решить сразу. Умножим на $\langle \chi | g_0$ слева,

$$\langle \chi | g_0 t = \lambda \langle \chi | g_0 | \chi \rangle \langle \chi | + \lambda \langle \chi | g_0 | \chi \rangle \langle \chi | g_0 t, \quad (5.7)$$

и получим

$$\langle \chi | g_0 t = \frac{\langle \chi | g_0 | \chi \rangle \langle \chi |}{\lambda^{-1} - \langle \chi | g_0 | \chi \rangle}. \quad (5.8)$$

Подставляя в уравнение (5.6), находим

$$t(z) = \lambda |\chi\rangle \langle \chi| + \frac{\lambda |\chi\rangle \langle \chi | g_0(z) | \chi \rangle \langle \chi |}{\lambda^{-1} - \langle \chi | g_0(z) | \chi \rangle},$$

или

$$t(z) = |\chi\rangle \tau(z) \langle \chi|, \quad (5.9)$$

где

$$\tau(z) = (\lambda^{-1} - \langle \chi | g_0(z) | \chi \rangle)^{-1}.$$

Таким образом T -матрица для сепарабельного потенциала сама сепарабельна. Это свойство T -матрицы важно для решения уравнений Фаддеева. Как мы увидим, размерность этих уравнений уменьшается с двух до одной, если двухчастичная T -матрица сепарабельна. В импульсном представлении T -матрица в согласии с равенством (5.9) будет иметь вид

$$\langle p' | t(z) | p \rangle = \frac{\chi(p') \chi^*(p)}{\lambda^{-1} - \int d p'' \frac{|\chi(p'')|^2}{z - p''^2/2\mu}}. \quad (5.10)$$

Теперь мы хотим выяснить, при каких условиях сепарабельный потенциал (5.4) имеет связанное состояние с энергией E^B **). С этой целью рассмотрим левую

*) Локальный потенциал в конфигурационном пространстве имеет вид $\langle \mathbf{r} | v | \mathbf{r}' \rangle = v(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

***) Из-за проекционных свойств сепарабельного потенциала он может иметь, самое большее, только одно связанное состояние.

собственную функцию ядра уравнения (5.1)

$$\langle \psi | = \langle \psi | v g_0(E^B). \quad (5.11)$$

Это уравнение эквивалентно предингеровскому, что можно проверить путем умножения на $g_0^{-1}(E^B)$ справа. С сепарабельным потенциалом (5.4) найдем, что

$$\langle \psi | = \lambda \langle \psi | \chi \rangle \langle \chi | g_0(E^B). \quad (5.12)$$

Собственное решение пропорционально $\langle \chi | g_0(E^B)$

$$\langle \psi | = N \langle \chi | g_0(E^B). \quad (5.13)$$

Множитель N получается из условия нормировки

$$N^{-2} = \langle \chi | g_0^2(E^B) | \chi \rangle. \quad (5.14)$$

В дальнейшем будем предполагать, что состояние $|\chi\rangle$ нормировано так, что $N = 1$. Решение уравнения (5.12) существует не при всякой энергии E^B . Умножив (5.12) на $|\chi\rangle$ справа, получим

$$\langle \psi | \chi \rangle = \lambda \langle \psi | \chi \rangle \langle \chi | g_0(E^B) | \chi \rangle, \quad (5.15)$$

и так как $\langle \psi | \chi \rangle = N \langle \chi | g_0(E^B) | \chi \rangle \neq 0$, то

$$\lambda^{-1} = \langle \chi | g_0(E^B) | \chi \rangle, \quad (5.16a)$$

или

$$\lambda^{-1} = \int d\mathbf{p} \frac{|\chi(\mathbf{p})|^2}{E^B - p^2/2\mu}. \quad (5.16b)$$

Это равенство связывает энергию E^B с интенсивностью взаимодействия λ . Если связанное состояние с $E^B < 0$ существует, то λ обязана быть отрицательной, поскольку подынтегральная функция в (5.16b) отрицательна. Это очевидно, ибо потенциал является притягивающим только для $\lambda < 0$. Но даже при $\lambda < 0$ мы не всегда получим связанное состояние. Поскольку $E^B < 0$, параметр λ должен удовлетворять неравенству

$$\lambda^{-1} > - \int d\mathbf{p} \frac{|\chi(\mathbf{p})|^2}{p^2/2\mu} \equiv (\lambda^{-1})_{\min}. \quad (5.17)$$

Рассмотрим теперь еще раз T -матрицу для сепарабельного потенциала. И допустим, что потенциал имеет связанное состояние, т. е. параметр λ получается из со-

отношения (5.16) с $E^B < 0$. Тогда из (5.9) найдем

$$t(z) = \frac{|\chi\rangle\langle\chi|}{\langle\chi|g_0(E^B) - g_0(z)|\chi\rangle}. \quad (5.18)$$

Используя резольвентное уравнение (2.20), видим, что T -матрица имеет полюс при энергии связанного состояния E^B

$$t(z) = \frac{|\chi\rangle\langle\chi|}{(z - E^B)\langle\chi|g_0(E^B)g_0(z)|\chi\rangle}. \quad (5.19)$$

Вычет можно выразить через волновую функцию связанного состояния. Из соотношений (5.13), (5.14) и уравнения Шредингера $g_0^{-1}(E^B)|\psi\rangle = v|\psi\rangle$ получим

$$\text{Res}(t) = v|\psi\rangle\langle\psi|v. \quad (5.20)$$

Для частного случая сепарабельного потенциала мы проверили, таким образом, общее правило, что двухчастичная T -матрица имеет полюсы при энергиях, равных энергиям связанных состояний и что вычеты факторизуются. Для обобщения нашего результата разложим ядро уравнения (5.1) по биортогональной системе его собственных функций (ср. с методом в) на стр. 79). В качестве набора функций $\bar{\varphi}$ возьмем правые собственные функции

$$K(z)|\bar{\varphi}_\nu(z)\rangle = \nu g_0(z)|\bar{\varphi}_\nu(z)\rangle = \eta_\nu(z)|\bar{\varphi}_\nu(z)\rangle, \quad (5.21)$$

а в качестве набора φ возьмем левые собственные функции

$$\langle\varphi_\nu(z)|K(z) = \langle\varphi_\nu(z)|\nu g_0(z) = \eta_\nu(z)\langle\varphi_\nu(z)|. \quad (5.22)$$

Можно легко показать, что соответствующие собственные значения в обоих случаях равны друг другу и что

$$\langle\varphi_\nu(z)|\bar{\varphi}_\mu(z)\rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad (5.23)$$

и выполняется равенство

$$|\bar{\varphi}_\nu(z)\rangle = v|\varphi_\nu(z^*)\rangle. \quad (5.24)$$

Тогда из (4.21) и (4.22) получаем разложение

$$K(z) = \nu g_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu(z)|\bar{\varphi}_\nu(z)\rangle\langle\varphi_\nu(z)|. \quad (5.25)$$

Умножая (5.25) на $g_0^{-1}(z)$ справа, получим для потенциала следующее разложение:

$$v = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_{\nu}(z) |\bar{\varphi}_{\nu}(z)\rangle \langle \varphi_{\nu}(z) | g_0^{-1}(z), \quad (5.26)$$

которое можно упростить с помощью равенств (5.22) и (5.24) следующим образом:

$$v = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\bar{\varphi}_{\nu}(z)\rangle \langle \varphi_{\nu}(z^*)|. \quad (5.27)$$

Используя так называемый «идеальный выбор» базисных функций (равенства (5.21) и (5.22)), решение уравнения (4.25) можно выписать явно, и тогда T -матрица примет вид

$$t(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{v |\varphi_{\nu}(z^*)\rangle \langle \varphi_{\nu}(z) | v}{1 - \eta_{\nu}(z)}. \quad (5.28)$$

Мы видим, что в общем случае T -матрица имеет полюсы при всех энергиях z_p , для которых собственное значение $\eta_{\nu}(z)$ становится равным единице

$$\eta_{\nu}(z_p) = 1. \quad (5.29)$$

Для $\text{Im} \sqrt{z_p} > 0$ энергии z_p — это энергии связанных состояний, а функции $\varphi_{\nu}(z_p)$ — соответствующие нормируемые волновые функции (поскольку уравнение (5.22) будет совпадать с сопряженным уравнением Шредингера, когда $\eta_{\nu}(z_p) = 1$). Кроме того, мы можем видеть, что вычет, вообще говоря, факторизуется и что полюсный член в T -матрице доминирует в окрестности полюса,

$$t(z) \approx \frac{v |\varphi_{\nu}\rangle \langle \varphi_{\nu} | v}{1 - \eta_{\nu}(z)}. \quad (5.30)$$

В окрестности полюса T -матрица приближенно является сепарабельной, а поскольку сепарабельная T -матрица соответствует сепарабельному потенциалу, то можно утверждать, что вблизи связанного состояния любой потенциал действует подобно сепарабельному. То же самое верно и для окрестности резонансного полюса (z_p комплексно) и для окрестности полюса так называемого антисвязанного состояния ($z_p < 0$). Эти полюсы распо-

ложены на так называемом нефизическом листе, $\text{Im} \sqrt{z_p} < < 0$. Несмотря на эпитет «нефизические», эти полюсы могут сильно влиять на процесс рассеяния в тех случаях, когда они близки к оси положительных энергий. При низкой энергии полюсы дают главный вклад в рассеяние двух нуклонов. Для триплетного рассеяния — это полюс дейтронного связанного состояния при энергии $-2,22$ МэВ, а для синглетного рассеяния — это полюс антисвязанного состояния при $-0,067$ МэВ. Поэтому такое взаимодействие хорошо аппроксимируется сепарабельным потенциалом. Это справедливо и в том случае, если «истинный» потенциал является локальным. Но, во всяком случае, истинный потенциал неизвестен. Мы знаем лишь данные по рассеянию и энергиям связи и можем утверждать, что все потенциалы, описывающие эти данные, в равной мере хороши. При этом «истинный» потенциал также может быть и сепарабельным или же

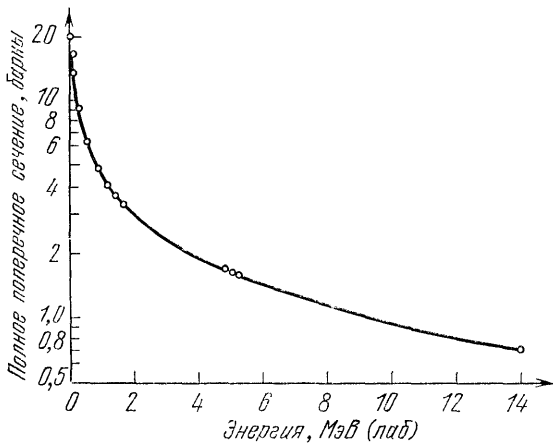


Рис. 13. Сравнение рассчитанных $n-p$ полных поперечных сечений с экспериментальными данными (Ямагучи [41]).

суммой сепарабельных членов. Только для больших расстояний имеются теоретические аргументы (одноопионный обмен), говорящие, что потенциал должен быть локален. Локальный потенциал имеет то преимущество, что он действует во многих состояниях с разными угловыми

моментами, тогда как один сепарабельный член действует лишь в одном состоянии, что не очень реалистично.

Впервые сепарабельный нейтрон-протонный потенциал был предложен Ямагучи [41]. Форм-фактор этого потенциала

$$\chi(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}. \quad (5.31)$$

Радиальный параметр β и константа связи λ подгоняются под данные при низких энергиях; используется два значения λ : одно для синглетного состояния и одно для триплетного. Как показано на рис. 13, нейтрон-протонное сечение рассеяния для S -волны воспроизводится очень хорошо вплоть до 14 МэВ (лаб.). Более реалистичны потенциалы, учитывающие также данные по рассеянию при

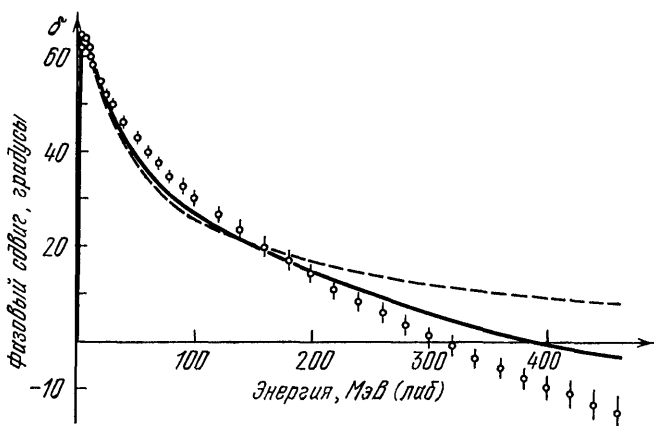


Рис. 14. Сравнение вычисленных 1S_0 p — r фазовых сдвигов с экспериментальными значениями. Сплошная кривая представляет результат расчета с двухчленным потенциалом Чрепиншека с соотр. [42], тогда как штриховая соответствует результату для одночленного потенциала Ямагучи.

более высоких энергиях. Эти потенциалы содержат несколько сепарабельных членов и описывают также эффекты, обусловленные кулоновским, тензорным взаимодействием и отталкивающей сердцевиной [42]. Рис. 14 демонстрирует, насколько хорошо такой потенциал описывает нейтрон-протонный 1S_0 фазовый сдвиг вплоть до 460 МэВ (лаб.).

В дальнейшем мы увидим, как решаются уравнения Фаддеева для сепарабельного потенциала. Здесь следует указать, что в 1962 г. Митра [43] использовал преимущества сепарабельных потенциалов для решения шредингеровского уравнения.

2. Решение уравнений Фаддеева с сепарабельными потенциалами

Двухчастичный T -оператор в трехчастичном пространстве, входящий в уравнения Фаддеева (3.61а), (3.61б), для сепарабельного потенциала приобретает вид

$$t_\gamma(z) = |\chi_\gamma\rangle \tau_\gamma \left(z - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} \right) \langle \chi_\gamma |. \quad (5.32)$$

Это уравнение обобщает результат (5.9) на трехчастичную систему. Индекс γ указывает подсистему, в которой действуют форм-факторы. Поскольку функция τ_γ зависит от энергии подсистемы, а z — это общая энергия трехчастичной системы, то мы должны вычесть кинетическую энергию свободной частицы. С правой стороны равенства (5.32) в качестве множителя стоит единичный оператор в функциональном пространстве частицы γ , который явно не выписан.

2.1. Рассеяние с перестройкой. Рассмотрим S -матрицу для рассеяния с перестройкой. Из равенств (3.50а), (3.51), (3.52) и (3.60) имеем *)

$$S_{\beta\alpha}(q'_\beta; q_\alpha) = \delta(q'_\beta - q_\alpha) \delta_{\beta\alpha} - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \langle \phi_\beta | U_{\beta\alpha}(E + i0) | \phi_\alpha \rangle, \quad (5.33)$$

где

$$|\phi_\gamma\rangle = |q_\gamma\rangle |\psi_\gamma\rangle. \quad (5.34)$$

Для сепарабельного потенциала с форм-фактором, нормированным должным образом, мы имеем, согласно (5.13),

$$|\phi_\gamma\rangle = g_0(E_\gamma) |\chi_\gamma\rangle |q_\gamma\rangle \quad (5.35)$$

$$с \quad E_\gamma = E_\gamma^B + q_\gamma^2/2M_\gamma.$$

*) Для простоты мы допускаем, что в каждой подсистеме имеется всего одно связанное состояние.

Здесь оператор $g_0(z)$ действует в трехчастичном пространстве, в отличие от g_0 в (5.13). Следовательно, аргумент оператора g_0 есть сумма энергии подсистемы и энергии свободной частицы. Комбинируя соотношения (5.33) — (5.35), мы видим, что для получения S -матрицы нам нужно только представление матричного оператора

$$X_{\beta\alpha}(z) = \langle \chi_\beta | g_0(z) U_{\beta\alpha}(z) g_0(z) | \chi_\alpha \rangle \quad (5.36)$$

в импульсном пространстве $|q_\beta\rangle$, $|q_\alpha\rangle$. Уравнение для оператора (5.36) вытекает из уравнений Фаддеева (3.61a) и равенства (5.32):

$$\begin{aligned} \langle \chi_\beta | g_0 U_{\beta\alpha} g_0 | \chi_\alpha \rangle &= (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \chi_\beta | g_0 | \chi_\alpha \rangle + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^3 (1 - \delta_{\beta\gamma}) \langle \chi_\beta | g_0 | \chi_\gamma \rangle \tau_\gamma \langle \chi_\gamma | g_0 U_{\gamma\alpha} g_0 | \chi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Уравнение (3.61a) было умножено на $\langle \chi_\beta | g_0$ и на $g_0 | \chi_\alpha \rangle$ слева и справа соответственно. Используя сокращенную запись (5.36) и

$$Z_{\beta\alpha}(z) = (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \chi_\beta | g_0(z) | \chi_\alpha \rangle, \quad (5.38)$$

приводим уравнение (5.37) к виду

$$X_{\beta\alpha}(z) = Z_{\beta\alpha}(z) + \sum_{\gamma=1}^3 Z_{\beta\gamma}(z) \tau_\gamma \left(z - \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} \right) X_{\gamma\alpha}(z). \quad (5.39)$$

После умножения на $\langle q_\beta |$ и $|q'_\alpha\rangle$ соответственно слева и справа и после введения промежуточных состояний уравнение (5.39) превращается в интегральное уравнение для матричных элементов оператора $X_{\beta\alpha}$. Поскольку этот оператор по своему определению (5.36) уже берется между состояниями подсистемы, то полученное интегральное уравнение лишь трехмерное и становится одномерным после разложения по парциальным волнам.

Чтобы проиллюстрировать смысл уравнения (5.39), сравним его с уравнениями (2.56a, б) для двухчастичного T -оператора

$$t(z) = v + v g_0(z) t(z). \quad (5.40)$$

Мы видим, что уравнение (5.39) описывает задачу трех тел как эффективную двухтелную задачу*). Степени свободы данной подсистемы интегрированы, и поэтому подсистема рассматривается как одна частица (в различных каналах). Если забыть про индексы каналов, то мы можем сравнить $X_{\beta\alpha}$ с двухчастичным T -оператором, а $Z_{\beta\alpha}$ — с эффективным двухчастичным потенциалом. Как мы увидим в этой же главе позднее (раздел 2.4), этот потенциал становится комплексным для энергий выше порога развала. Для комплексного потенциала поток вероятности не сохраняется. Частицы исчезают из двухчастичной системы и появляются в канале развала.

Оператор τ_γ в уравнении (5.39) соответствует свободному двухчастичному пропагатору g_0 в (5.40). Он описывает свободное движение частицы γ относительно связанной подсистемы γ . Это соответствие можно сделать более ясным. В импульсном представлении мы имеем для системы двух частиц

$$\langle \mathbf{q} | \hat{g}_0(z) | \mathbf{q}' \rangle = \frac{\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{z - \frac{q^2}{2\mu}}. \quad (5.41)$$

Свободный пропагатор \hat{g}_0 имеет полюс при энергии относительного движения двух частиц. То же справедливо для τ_γ . Согласно равенствам (5.9) и (5.19) можно написать

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_\gamma | \tau_\gamma(z - q_\gamma^2/2M_\gamma) | \mathbf{q}'_\gamma \rangle &= \\ &= \frac{\delta(\mathbf{q}_\gamma - \mathbf{q}'_\gamma)}{(z - E_\gamma^B - q_\gamma^2/2M_\gamma) \langle \chi_\gamma | \hat{g}_0(E_\gamma^B) \hat{g}_0(z - q_\gamma^2/2M_\gamma) | \chi_\gamma \rangle}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

«Пропагатор» τ_γ также имеет полюс, если энергия**) $z - E_\gamma^B$ будет равна энергии относительного движения данной подсистемы и свободной частицы.

*) Та же аналогия описана на стр. 66.

**) Мы должны вычесть, конечно, энергию связанного состояния E_γ^B , так как z — это энергия трехчастичной системы. Вычеты в (5.41) и (5.42) одни и те же, так как

$$\langle \chi | \hat{g}_0(E_\gamma^B) \hat{g}_0(z - q_\gamma^2/2M_\gamma) | \chi \rangle = 1$$

для $z - q_\gamma^2/2M_\gamma = E_\gamma^B$ (см. (5.14)).

2.2. Развал на три частицы. Чтобы найти амплитуды развала, нам не нужно решать другое интегральное уравнение. Согласно (3.64)

$$U_{0\alpha} = z - h_0 + \sum_{\gamma=1}^3 t_{\gamma} g_0 U_{\gamma\alpha}, \quad (5.43)$$

мы можем вычислить их из амплитуд для перестройки. Для S -матрицы нам нужны в этом случае матричные элементы

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | U_{0\alpha} | \Phi_{\alpha} \rangle = \\ = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | U_{0\alpha} g_0 | \chi_{\alpha} \rangle | \mathbf{q}'_{\alpha} \rangle \equiv \langle \mathbf{q}_1 | X_{0\alpha} | \mathbf{q}'_{\alpha} \rangle. \quad (5.44)$$

Для оператора $X_{0\alpha}$ из уравнения (5.43) находим

$$X_{0\alpha} = \langle \mathbf{p}_1 | U_{0\alpha} g_0 | \chi_{\alpha} \rangle = \\ = \langle \mathbf{p}_1 | \chi_{\alpha} \rangle + \sum_{\gamma=1}^3 \langle \mathbf{p}_1 | \chi_{\gamma} \rangle \tau_{\gamma} \langle \chi_{\gamma} | g_0 U_{\gamma\alpha} g_0 | \chi_{\alpha} \rangle = \\ = \sum_{\gamma=1}^3 \langle \mathbf{p}_1 | \chi_{\gamma} \rangle \tau_{\gamma} X_{\gamma\alpha}. \quad (5.45)$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что на энергетической поверхности $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | \chi_{\alpha} \rangle | \mathbf{q}'_{\alpha} \rangle = 0$. Таким образом, уравнение (5.43) снова привело к операторам перестройки (5.36).

И в этом случае результат (5.45) для амплитуды развала можно понять в рамках эффективной двухчастичной реакции. Нужно лишь увидеть, что операторы перестройки входят в уравнение (5.45) вне массовой поверхности, т. е. в виде представления $\langle \mathbf{q}_1 | X_{1\alpha} | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle$, где $|\mathbf{q}_1\rangle$ может принимать континуум значений. В начальном состоянии мы имеем

$$E = E_{\alpha}^B + \frac{q_{\alpha}^2}{2M_{\alpha}},$$

или

$$|\mathbf{q}_{\alpha}| = \sqrt{2M_{\alpha}(E - E_{\alpha}^B)}. \quad (5.46)$$

В конечном состоянии у нас есть три свободных частицы и энергия E становится равной

$$E = \frac{p_{\gamma}^2}{2\mu_{\gamma}} + \frac{q_{\gamma}^2}{2M_{\gamma}}. \quad (5.47)$$

Полная энергия E будет сохраняться для произвольного импульса \mathbf{q}_γ в интервале

$$0 \leq |\mathbf{q}_\gamma| \leq \sqrt{2M_\gamma E}. \quad (5.48)$$

Для импульсов \mathbf{q}_γ , удовлетворяющих на энергетической поверхности условию

$$E_\gamma^B + \frac{q_\gamma^2}{2M_\gamma} = E_\alpha^B + \frac{q_\alpha^2}{2M_\alpha},$$

амплитуда $\langle \mathbf{q}_\gamma | X_{\gamma\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle$ является амплитудой вероятности образования перестроенного конечного состояния. Для импульсов \mathbf{q}_γ из интервала (5.48) амплитуда $\langle \mathbf{q}_\gamma | X_{\gamma\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle$ будет амплитудой вероятности образования конечного состояния подсистемы γ в состоянии с положительной энергией $p_\gamma^2/2\mu_\gamma$ и частицы γ в состоянии с импульсом $|\mathbf{q}_\gamma\rangle$. В определении $X_{\gamma\alpha}$ оператор $U_{\gamma\alpha}$ был умножен слева на $g_0(E+i0)|\chi_\gamma\rangle|\mathbf{q}_\gamma\rangle$. Это состояние есть состояние канала, если \mathbf{q}_γ удовлетворяет условию

$$E = E_\gamma^B + q_\gamma^2/2M_\gamma$$

на энергетической поверхности. Если взять \mathbf{q}_γ из интервала (5.48), то состояние $g_0(E+i0)|\chi_\gamma\rangle|\mathbf{q}_\gamma\rangle$ уже больше не является состоянием канала. Оно описывает состояния подсистемы с положительной энергией

$$p_\gamma^2/2\mu_\gamma = E - q_\gamma^2/2M_\gamma.$$

Поскольку нас интересуют не состояния подсистемы γ с частными значениями положительной энергии, а распад на три свободные частицы, то оператор $X_{\gamma\alpha}$ умножается в (5.45) на $\langle \mathbf{p}_1 | \chi_\gamma \rangle \tau_\gamma$. Этот множитель описывает распад подсистемы. Главная информация о развале, однако, содержится в операторе $X_{\gamma\alpha}$.

2.3. Одинаковые частицы. Для одинаковых частиц каналы перестройки становятся неразличимыми и по этой причине число уравнений в системе (5.39) уменьшается. Было бы неверно, однако, положить $X_{11} = X_{12} = X_{13}$. Упругая амплитуда X_{11} не равна амплитуде перестройки X_{12} , так как отвечающие им процессы рассеяния совершенно различны. Этот факт можно увидеть уже из ряда Неймана уравнения (5.39): для X_{11} первый член равен нулю, тогда как для X_{12} он равен $\langle \chi_1 | g_0 | \chi_2 \rangle$. Невозможно лишь различить результаты упругого рас-

сеяния и рассеяния с перестройкой. Мы достигли бы своей цели, однако, если бы могли вычислить сумму упругого рассеяния и рассеяния с перестройкой.

До сих пор индексы каналов обозначали различные каналы и различные координатные системы. Для рассеяния с перестройкой у нас было точно три канала, поскольку мы считали, что частицы являются бесспиновыми и что для каждой пары частиц имеется одно связанное состояние. Если же частицы одинаковы, то эти три канала становятся неразличимыми и индекс канала обозначает только координатную систему. Все форм-факторы $|\chi_T\rangle$ теперь одинаковы. Однако нам все еще нужен индекс γ , чтобы указывать, к какой подсистеме относится форм-фактор.

Рассмотрим эффективный потенциал $Z_{\beta\alpha}$, определяемый равенством (5.38). Недиagonalные элементы такие, как

$$Z_{12} = \langle \chi_1 | g_0 | \chi_2 \rangle \quad (5.49)$$

и

$$Z_{13} = \langle \chi_1 | g_0 | \chi_3 \rangle$$

отличаются только заменой переменных ($2 \leftrightarrow 3$). Эти матричные элементы одинаковы и будут обозначаться через Z :

$$Z \equiv Z_{\beta\alpha}, \quad \beta \neq \alpha. \quad (5.50)$$

Диагональные элементы от $Z_{\beta\alpha}$ равны нулю.

Для операторов перехода $X_{\beta\alpha}$ ситуация аналогичная. У нас есть только диагональные элементы вида

$$X_D \equiv X_{\alpha\alpha} \quad (5.51a)$$

и недиагональные элементы

$$X_N \equiv X_{\beta\alpha}, \quad \beta \neq \alpha. \quad (5.51b)$$

Из уравнения (5.39) мы получаем два различных уравнения для неизвестных амплитуд X_D и X_N ,

$$X_D = 2Z\tau X_N, \quad (5.52a)$$

$$X_N = Z + Z\tau X_D + Z\tau X_N. \quad (5.52b)$$

Складывая умноженное на двойку уравнение (5.52b) и уравнение (5.52a), находим для величины

$$X \equiv X_D + 2X_N \quad (5.53a)$$

следующее уравнение:

$$X = 2Z + 2Z\tau X. \quad (5.53б)$$

Величина X является единственной амплитудой (в операторной форме), которая одна определяет S -матрицу для рассеяния одинаковых бесспиновых частиц в случае одного двухчастичного связанного состояния [8]. Амплитуда перестройки X_N входит с множителем 2 в соответствии с тем, что для упругого рассеяния имеется лишь одна возможность $\beta = \alpha$, тогда как для рассеяния с перестройкой существуют две возможности $\beta \neq \alpha$.

Операторы в уравнениях (5.53а) и (5.53б) действуют в пространстве относительного движения связанного состояния и свободной частицы. В импульсном представлении получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | X(E + i\varepsilon) | \mathbf{q}' \rangle &= 2 \langle \mathbf{q} | Z(E + i\varepsilon) | \mathbf{q}' \rangle + \\ &+ 2 \int d\mathbf{q}'' \langle \mathbf{q} | Z(E + i\varepsilon) | \mathbf{q}'' \rangle \tau \left(E + i\varepsilon - \frac{q''^2}{2M} \right) \times \\ &\times \langle \mathbf{q}'' | X(E + i\varepsilon) | \mathbf{q}' \rangle. \end{aligned} \quad (5.54)$$

При $m_1 = m_2 = m_3 = m$ приведенные массы, согласно соотношению (2.74), примут вид

$$\mu = \frac{m}{2}, \quad M = \frac{2}{3}m. \quad (5.55)$$

Для вычисления «потенциала» Z следует вспомнить определения (5.38) и (5.50). Согласно этим определениям «потенциал» — это матричный элемент от свободной трехчастичной резольвенты g_0 между форм-факторами, действующими в разных каналах,

$$\langle \mathbf{q} | Z | \mathbf{q}' \rangle = \langle \mathbf{q} | \langle \chi_1 | g_0 | \chi_2 \rangle | \mathbf{q}' \rangle. \quad (5.56)$$

Этот матричный элемент вычисляется путем введения промежуточных состояний $|\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i\rangle \langle \mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i|$,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} | Z | \mathbf{q}' \rangle &= \int d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}'_1 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}'_1 \times \\ &\times \frac{\langle \mathbf{q} | \langle \chi_1 | \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 \rangle \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}'_1, \mathbf{p}'_1 \rangle \langle \mathbf{q}'_1, \mathbf{p}'_1 | \chi_2 \rangle | \mathbf{q}' \rangle}{E + i\varepsilon - q_1^2/2M - p_1^2/2\mu}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где

$$\langle \mathbf{q} | \langle \chi_i | \mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \rangle = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_i) \chi_i^*(\mathbf{p}_i). \quad (5.58)$$

Начиная с этого места, мы можем опускать индекс канала в форм-факторах, поскольку все форм-факторы одни и те же. Тот факт, что они действуют в различных подсистемах, уже учитывается выбором координат. Перекрытие $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2 \rangle$ тогда принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1 | \mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2 \rangle &= \delta(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}'_1(\mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2)) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1(\mathbf{q}'_2, \mathbf{p}'_2)) = \\ &= \delta\left(\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}'_2 + \frac{1}{2} \mathbf{q}'_2\right) \delta\left(\mathbf{p}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{p}'_2 - \frac{3}{4} \mathbf{q}'_2\right). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Требуемое здесь преобразование координат легко можно вывести из преобразований (2.72). В уравнении (5.57) можно выполнить интегрирование по δ -функциям, и «потенциал» тогда примет вид

$$\langle \mathbf{q} | Z(E + i\epsilon) | \mathbf{q}' \rangle = \frac{\chi^*\left(\mathbf{q}' + \frac{1}{2} \mathbf{q}\right) \chi\left(-\frac{1}{2} \mathbf{q}' - \mathbf{q}\right)}{E + i\epsilon - \frac{q^2}{2m} - \frac{(\mathbf{q} + \mathbf{q}')^2}{2m} - \frac{q'^2}{2m}}. \quad (5.60)$$

Полезно проиллюстрировать вычисление выражений, подобных (5.56), графическим представлением [23] таким, как на рис. 15. На нем одиночная линия обозначает собственное состояние импульса частицы, двойной линией обозначено собственное состояние импульса движения центра масс связанного состояния подсистемы, полукруг обозначает форм-фактор; промежуточное состояние, состоящее из трех свободных частиц, умножается

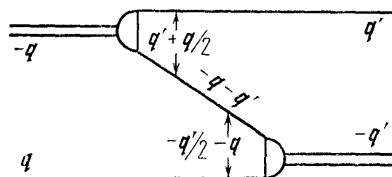


Рис. 15. Графическое представление «потенциала» в уравнении (5.54).

на свободный пропагатор g_0 . При небольшом навыке результат (5.60) можно написать, исходя прямо из графика.

Неизвестная амплитуда зависит от семи переменных, а именно, от \mathbf{q} , \mathbf{q}' и E . Причем \mathbf{q} — это переменная интегрирования, в то время как \mathbf{q}' и E входят в интегральное уравнение только как параметры. Для S -матрицы необходима только амплитуда $\langle \mathbf{q} | X(E + i0) | \mathbf{q}' \rangle$ на массовой поверхности для процессов перестройки и упругого рас-

сеяния (см. (5.33)) или наполовину вне массовой поверхности для развала (см. (5.45)). Поэтому мы можем положить \mathbf{q}' равным относительному импульсу в начальном состоянии и получить

$$E = \frac{3q'^2}{4m} + E^B. \quad (5.61)$$

В сферических координатах q, ϑ, φ , выбранных таким образом, чтобы $\vartheta = 0$ совпадало с направлением \mathbf{q}' , интегральное уравнение становится двумерным, так как угол φ не появляется. После разложения по парциальным волнам получают одномерные уравнения

$$X_L(q, q', E + i\varepsilon) = 2Z_L(q, q', E + i\varepsilon) + \int_0^\infty dq'' K_L(q, q'', E + i\varepsilon) X_L(q'', q', E + i\varepsilon), \quad (5.62)$$

с

$$K_L(q, q'', E + i\varepsilon) = 8\pi q''^2 Z_L(q, q'', E + i\varepsilon) \tau \left(E + i\varepsilon - \frac{3q''^2}{4m} \right).$$

Квантовое число L обозначает полный угловой момент трехчастичной системы. Благодаря сохранению углового момента уравнения с разными L не связаны друг с другом.

Проекции X и Z на парциальные волны имеют вид

$$Z_L(q, q', E + i\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \vartheta P_L(\cos \vartheta) Z(q, q', E + i\varepsilon), \quad (5.63a)$$

$$X_L(q, q', E + i\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d \cos \vartheta P_L(\cos \vartheta) X(q, q', E + i\varepsilon). \quad (5.63b)$$

Функции $P_L(\cos \vartheta)$ являются полиномами Лежандра.

Решения X уравнения (5.54) получаются из решений X_L уравнения (5.62) путем суммирования

$$X(q, q', E + i\varepsilon) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L + 1) P_L(\cos \vartheta) X_L(q, q', E + i\varepsilon). \quad (5.64)$$

В (5.62) необходимо теперь выполнить предельный переход по ε , который, как мы знаем, содержит граничное условие. Как будет видно в следующем разделе, существуют полюсы, которые будут приближаться к действительной оси, когда ε стремится к нулю. Влияние этих полюсов можно представить символической формулой

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x). \quad (5.65)$$

Эта формула заменяет интеграл от полюсного члена на интеграл в смысле главного значения, к которому добавляется (вычитается) половина вычета в полюсе. Знак перед вычетом определяется граничным условием.

2.4. Численное решение уравнений Фаддеева с сепарабельными потенциалами. Теперь мы подготовлены к решению уравнения Фаддеева (5.62) с помощью метода ε главы 4, раздела 2. Однако следует быть осторожным, поскольку ядро может иметь сингулярности. Они могут возникать от двухчастичного пропагатора τ , а также от «потенциала» Z .

а) *Сингулярности пропагатора τ .* Согласно равенству (5.42) мы имеем

$$\tau \left(E + i\varepsilon - \frac{3}{4} \cdot \frac{q''^2}{m} \right) \sim \left(E + i\varepsilon - \frac{3}{4} \frac{q''^2}{m} - E^B \right)^{-1}, \quad (5.66)$$

где $E^B < 0$ — это энергия двухчастичного связанного состояния. Для $E > E^B$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем полюс при

$$q''^2 = \frac{4}{3} m (E - E^B). \quad (5.67)$$

Этот полюс будет присутствовать при любом процессе рассеяния, так как

$$E = 3q'^2/4m + E^B \geq E^B$$

(ср. с (5.61)). Лишь при расчете связанного состояния можно положить $E < E^B$, и полюс пропадает.

б) *Сингулярности «потенциала» Z .* Свободная резольвента g_0 , появляющаяся в «потенциале» Z , становится сингулярной выше порога трехчастичного развала, поскольку становится возможным свободное движение всех

трех частиц. Поэтому в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ функция Z для определенных значений импульсов q, q' имеет полюсы

$$\begin{aligned} Z(q, q', E + i\varepsilon) &\sim (E + i\varepsilon - \frac{q^2}{m} - \frac{q'^2}{m} - \frac{qq'}{m} \cos \vartheta)^{-1} = \\ &= \frac{m}{qq'} (y + i\varepsilon - \cos \vartheta)^{-1} \end{aligned} \quad (5.68)$$

с

$$y = \frac{mE - q^2 - q'^2}{qq'}.$$

Проектирование на парциальные волны приводит к выражению

$$Z_L(q, q', E + i\varepsilon) \sim \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_L(x) dx}{y + i\varepsilon - x}, \quad (5.69)$$

где $x = \cos \vartheta$. Используя соотношение (5.65), находим

$$\begin{aligned} Z_L(q, q', E + i0) &\sim \frac{1}{2} \left[P \int_{-1}^1 \frac{P_L(x) dx}{y - x} - i\pi \int_{-1}^1 \delta(y - x) P_L(x) dx \right] \equiv \\ &\equiv Q_L(y). \end{aligned} \quad (5.70)$$

При интегрировании в смысле главного значения полюс превращается в логарифмическую сингулярность, появляющуюся при $y = \pm 1$; для этих значений y полюс совпадает с концом промежутка интегрирования. Функция Лежандра второго рода $Q_L(y)$ имеет разрез при $-1 < y < +1$, связанный с граничным условием. Чтобы удовлетворить граничному условию, необходимо взять соответствующие значения функции $Q_L(y)$ (определенной равенством (5.70)) на разрезе.

Логарифмические сингулярности, как уже было сказано, появляются при $y = \pm 1$. Для переменных q, q' это означает

$$mE - \left(q \pm \frac{1}{2} q' \right)^2 - \frac{3}{4} q'^2 = 0. \quad (5.71)$$

Функция $Z_L(q, q', E + i0)$ появляется как в ядре уравнения (5.62), так и в неоднородном члене. В неоднородном члене переменная q находится вне массовой поверхности, а q' — на массовой поверхности (ср. с (5.61)). Условие

(5.71) не может быть выполнено, поскольку с учетом (5.61) левая часть условия (5.71) становится

$$mE - \left(q + \frac{1}{2}q'\right)^2 - mE + mE^B = -\left(q + \frac{1}{2}q'\right)^2 + mE^B < 0, \quad (5.72)$$

что всегда меньше нуля, так как энергия E^B отрицательна. Следовательно, сингулярность появиться не может.

Другая ситуация будет для ядра. Здесь как q , так и q'' — вне массовой поверхности, ибо q'' есть переменная интегрирования. Условие (5.71) выполняется для

$$q = \pm \left(\frac{1}{2}q'' \pm \sqrt{mE - \frac{3}{4}q''^2} \right). \quad (5.73)$$

Логарифмические сингулярности расположены на кривых $q(q'')$, которые описываются равенством (5.73) (рис. 16).

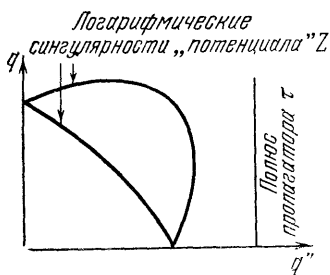


Рис. 16. Положение сингулярностей ядра уравнения (5.62).

Функция Z_L комплексна между двумя эллиптическими дугами (см. рис. 16). Это как раз та область, в которой δ -функция уравнения (5.70) дает вклад. Рис. 16 показывает также положение полюса, который появляется от двухчастичного пропагатора τ и который уже обсуждался в п. а).

Таким образом, мы видим, что трехчастичная задача становится все более и более

сложной по мере того, как мы переходим от изучения связанных состояний к задаче рассеяния с перестройкой и далее к изучению развала, поскольку число сингулярностей увеличивается. Аналогичная ситуация будет и в том случае, если нам приходится решать уравнение Шредингера в конфигурационном пространстве. При этом затруднения возрастают из-за того, что граничное условие становится все более и более сложным. Приводимая ниже таблица дает схематическое представление об этом.

Вопросительный знак указывает на особую сложность написания граничного условия с учетом развала; такое ус-

ловие нельзя написать в краткой форме (ср. с гл. 8, раздел 3).

Обратимся теперь к интегрированию уравнения Фаддеева. Можно ли найти сетку узлов интегрирования, обеспечивающую необходимую точность численного интегрирования, несмотря на сингулярности, показанные на рис. 16? Полюс эффективного двухчастичного пропагатора не причиняет большого беспокойства, поскольку его положение фиксировано. Его можно исключить некоторым преобразованием [44] или он может быть просто проинтегрирован [45, 46]. Трудности, однако, возникают от полюсов функции Z_L , так как эти полюсы меняют свое положение в зависимости от переменной q .

	Уравнения Фаддеева в импульсном пространстве	Уравнения Шредингера в конфигурационном пространстве
Связанные состояния $E < E^B$	Нет сингулярностей	$\psi(\infty) \rightarrow 0$
Чистое упругое рассеяние $E^B < E < 0$	Полюс эффективного двухчастичного пропагатора	$\psi(\infty) \approx e^{ikz} + f(\theta)e^{ikr/r}$
Рассеяние с развалом $E > 0$	Дополнительные полюсы трехчастичного пропагатора	?

В принципе интегрирование можно было бы выполнить путем выбора новой сетки узлов интегрирования для каждого значения q . Имеются квадратурные сетки, позволяющие учесть сингулярности [47], но мы не можем их использовать, так как метод e) требует, чтобы мы имели дело с одной сеткой узлов. В противном случае мы не получим систему N уравнений для N неизвестных значений функции X_L ; у нас будет неизвестных больше, чем уравнений.

Имеются два способа обойти это затруднение: во-первых, мы можем скомбинировать численное и аналитическое интегрирование и таким путем использовать наше знание аналитических свойств подынтегральной функции

[48—52]. Во-вторых, можно использовать теорему Коши и сдвинуть контур интегрирования в комплексную плоскость.

Сначала рассмотрим второй метод. Он был введен Хезерингтоном и Шиком [53] и позднее был использован Амадо [54], а также Кахиллом и Слоаном [55]. Интересные модификации метода были сделаны Эбенхоём [56] и Авишаи [57]. Сам метод состоит из трех шагов.

а) Выполняется аналитическое продолжение интегрального уравнения на комплексные импульсы.

б) Интегральное уравнение решается для таких комплексных импульсов, которые достаточно удалены от сингулярностей.

в) Решение для вещественных импульсов получается с помощью одной итерации уравнения (5.62), исходя из решения для комплексных импульсов.

Обсудим эти три шага более детально.

а) Если в нашем интегральном уравнении (5.62) сделать подстановку $q = \rho e^{-i\varphi}$, то решения будут также определены для комплексных импульсов (мы опускаем в наших обозначениях зависимость от q' и E),

$$X_L(\rho e^{-i\varphi}) = 2Z_L(\rho e^{-i\varphi}) + \int_0^{\infty} dq'' K_L(\rho e^{-i\varphi}, q'') X_L(q''). \quad (5.74)$$

Путь интегрирования в (5.74) — все еще положительная вещественная полуось q'' . Чтобы получить интегральное

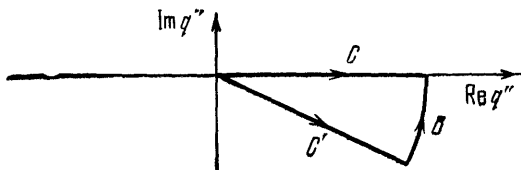


Рис. 17. Контур интегрирования в уравнениях (5.74) и (5.75).

уравнение, позволяющее определить функцию $X_L(\rho e^{-i\varphi})$ без знания $X_L(q'')$ на вещественной положительной полуоси, мы сдвигаем контур интегрирования от C к C' (рис. 17). Это означает, что мы интегрируем вдоль направления $\rho'' e^{-i\varphi}$ от нуля до бесконечности при фиксиро-

ванном значении φ . Согласно теореме Коши это возможно в том случае, если дуга B не дает вклада в интеграл и если подынтегральная функция аналитична в плоскости $CC'B$. Эти два условия выполнены, ибо, как можно видеть из соотношения (5.73), ядро не имеет сингулярностей в области $CC'B$, и, кроме того, Брейшпоу смог показать [58], что решение $X_L(\rho e^{-i\varphi})$ аналитично при условии

$$\varphi < \operatorname{arctg} \sqrt{-3E^B/(E-E^B)}.$$

Таким образом, получаем интегральное уравнение

$$X_L(\rho e^{-i\varphi}) = 2Z_L(\rho e^{-i\varphi}) + e^{-i\varphi} \int_0^{\infty} d\rho'' K_L(\rho e^{-i\varphi}, \rho'' e^{-i\varphi}) X_L(\rho'' e^{-i\varphi}). \quad (5.75)$$

б) Численное решение интегрального уравнения (5.75) не представляет никаких трудностей, так как все функции «хорошо ведут себя» вдоль контура C' .

в) Теорема Коши используется второй раз, чтобы найти связь между решением для комплексных импульсов и решением для вещественных импульсов. В уравнении (5.62) переменную q берут вещественной и смотрят, можно ли сдвинуть контур интегрирования от C к C' (вдоль C' решение известно). Прежде чем выполнить предельный переход по ε , рассмотрим сингулярности и разрывы в комплексной q'' -плоскости. Положение разрывов дается неравенствами $-1 < y < +1$ (см. равенство (5.71)). В переменных q, q'' это означает

$$q^2 + q''^2 + qq''y - mE - i\varepsilon = 0 \quad (5.76)$$

с $|y| < 1$.

Здесь имеются три различных случая:

а) $0 \leq q \leq \sqrt{mE}$ (рис. 18).

Контур C проходит ниже сингулярностей и ниже разрыва. При этом ничто не мешает нам сдвинуть контур интегрирования в нижнюю комплексную полуплоскость (контур C'). Тогда получаем

$$X_L(q) = 2Z_L(q) + e^{-i\varphi} \int_0^{\infty} d\rho'' K_L(q, \rho'' e^{-i\varphi}) X_L(\rho'' e^{-i\varphi}). \quad (5.77)$$

Следующий случай — немного более сложный.

$\beta) \sqrt{mE} \leq q \leq \sqrt{4mE/3}$ (рис. 19).

Сингулярность, которая в случае (α) находилась в третьем квадранте, теперь сдвинулась в четвертый квадрант и не позволяет непосредственно сдвинуть контур

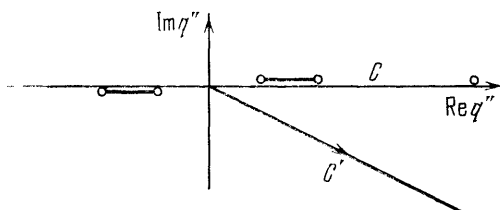


Рис. 18. Контур интегрирования в уравнении (5.77). Сингулярности указаны кружками, а разрезы — жирными линиями (Р. Кахилл и Я. Слоан [55]).

интегрирования в C' . Сначала мы должны проинтегрировать вдоль старого контура C , потом обойти вокруг сингулярности в точке P и затем вернуться к точке Q . Вблизи P мы проходим через разрез (см. рисунок) вниз на

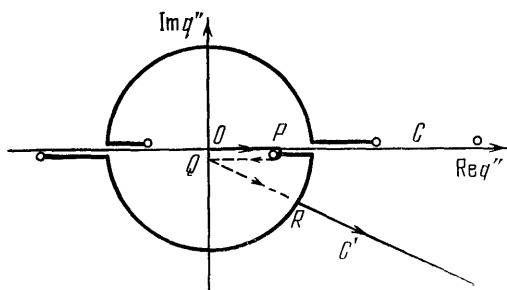


Рис. 19. Контур интегрирования в уравнении (5.78). Штриховая линия указывает контур интегрирования на втором листе. Сингулярности указаны кружками, а разрезы — жирными линиями (Р. Кахилл и Я. Слоан [55]).

второй риманов лист. Начиная от Q и двигаясь по контуру C' , мы снова выходим на первый риманов лист в точке R . За счет ухода на второй лист мы достигаем того,

что подынтегральная функция аналитична между C и C' . На разрезе в интеграл от 0 до Q вносит вклад лишь скачок, а сингулярность в P исключается. Таким образом, в этом случае мы имеем

$$X_L(q) = 2Z_L(q) + \int_{0 \rightarrow P \rightarrow Q} dq'' K_L(q, q'') X_L(q'') + e^{-i\varphi} \int_0^{\infty} d\rho'' K_L(q, \rho'' e^{-i\varphi}) X_L(\rho'' e^{-i\varphi}). \quad (5.78)$$

Амплитуда $X_L(q)$ между 0 и P дается уравнением (5.77), поскольку $|\mathbf{OP}| \leq \sqrt{mE/3}$.

И, наконец, последний случай.

$\gamma) q > \sqrt{4mE/3}$.

Контур интегрирования можно снова сдвинуть прямо от C к C' , так как сингулярности функции Z_L сместились с вещественной оси в комплексную плоскость. Уравнение (5.77) снова справедливо.

Из решения нашего интегрального уравнения для комплексных значений импульса q , которое достаточно легко получить, можно, таким образом, найти решение для всех вещественных значений q .

Определенный недостаток описываемого метода заключается в том, что должно быть известно аналитическое поведение ядра и решения в плоскости импульсов. Для обсуждаемого интегрального уравнения никаких трудностей не возникает. Но имеются более сложные уравнения (например, уравнения Альта — Грассбергера — Сандхаса, см. гл. 6), где такую дополнительную информацию вряд ли можно получить.

Для таких уравнений более подходящим оказывается другой метод [48]. В этом методе интегрирование выполняется вдоль вещественной оси q . Важным обстоятельством является то, что решение $X_L(q)$ есть непрерывная функция, которую можно аппроксимировать интерполяционным полиномом

$$X_L(q) \approx \sum_{i=1}^N X_L(q_i) H_i(q), \quad (5.79)$$

где H_i — полином вида

$$H_i(q) = \frac{\prod_{j \neq i}^N (q - q_j)}{\prod_{j \neq i} (q_i - q_j)}, \quad H_i(q_j) = \delta_{ij}. \quad (5.80)$$

Подставляя (5.79) в интегральное уравнение (5.62), получим для $q = q_i$

$$X_L(q_i) = 2Z_L(q_i) + \sum_{j=1}^N X_L(q_j) \int_0^\infty dq'' K_L(q_i, q'') H_j(q''). \quad (5.81)$$

И вместо решения сингулярного интегрального уравнения нам нужно лишь вычислить сингулярные интегралы

$$I_{ij} = \int_0^\infty dq'' K_L(q_i, q'') H_j(q''), \quad (5.82)$$

(это много проще), что приводит к матричному уравнению

$$X_L(q_i) = 2Z_L(q_i) + \sum_{j=1}^N I_{ij} X_L(q_j). \quad (5.83)$$

2.5. Результаты для трех одинаковых частиц.

2.5.1. Связанные состояния. Согласно Фаддееву (см. стр. 52) все решения однородного фаддеевского уравнения соответствуют связанным состояниям. Покажем, что эти решения удовлетворяют также уравнению Шредингера, хотя это и очевидно. Начнем с однородного варианта уравнения Фаддеева (3.35)

$$|\psi\rangle_i = \sum_{j \neq i} g_0(z) t_i(z) |\psi\rangle_j. \quad (5.84)$$

Используя соотношение (2.57а) (в трехчастичном пространстве!), найдем

$$|\psi\rangle_i = g_i(z) v_i \sum_{j \neq i} |\psi\rangle_j, \quad (5.85)$$

или

$$g_j^{-1}(z) |\psi\rangle_i = (z - h_0 - v_i) |\psi\rangle_i = v_i \sum_{j \neq i} |\psi\rangle_j. \quad (5.86)$$

Беря сумму по i и учитывая, что $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^3 |\psi\rangle_i$, получаем уравнение Шредингера

$$\left(z - h_0 - \sum_{i=1}^3 v_i \right) |\psi\rangle = 0. \quad (5.87)$$

Для сепарабельного потенциала и одинаковых частиц однородный вариант уравнения (3.35) соответствует однородному варианту уравнения (5.62). Мы найдем связанные состояния, если сможем определить энергии, для которых однородное уравнение имеет решение. Если интегральное уравнение аппроксимируется матричным уравнением (как, например, (4.37) или (5.83)), то нужно найти нули определителя. Результаты такого расчета [59] представлены на рис. 20. В этом расчете изучалась трехбозонная система с сепарабельным потенциалом Ямагучи в зависимости от изменения параметра длины β . Константа связи λ была выбрана таким образом, чтобы двухчастичная энергия связи все время была равна

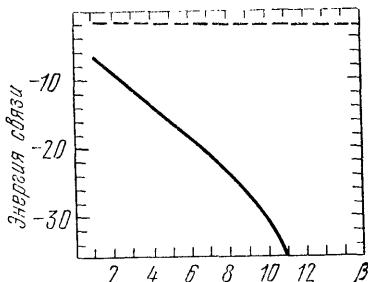


Рис. 20. Трехчастичная энергия связи (сплошная линия — основное состояние, штриховая — возбужденное состояние) как функция обратного радиуса потенциала β (Р. Амадо с сотр. [59]) *).

$|E^B| = 1,5$ (в системе единиц $\hbar = 2m = 1$). Поскольку трехчастичное связанное состояние является более компактным по сравнению с двухчастичным связанным состоянием, то его энергия связи чувствительна к радиусу действия потенциала. Это особенно справедливо для основного состояния. В отличие от трехнуклонной системы,

*) Следует отметить, что возбужденное состояние в рассматриваемой модели имеет рыхлую кластерную структуру, сильно отличающуюся от компактной структуры основного состояния. Благодаря этому обстоятельству зависимость энергии возбужденного состояния от параметра β , как показали более аккуратные расчеты [Д1.4] будет иной, чем это изображено на рис. 20.—(Прим. перев.)

трехбозонная система, рассматриваемая здесь, имеет также и возбужденное состояние. Для фермионов и более реалистических потенциалов, зависящих от спина (раздел 5.2.7), это состояние исчезает.

2.5.2. Состояния рассеяния. Расчеты рассеяния для трехбозонной системы были выполнены при помощи

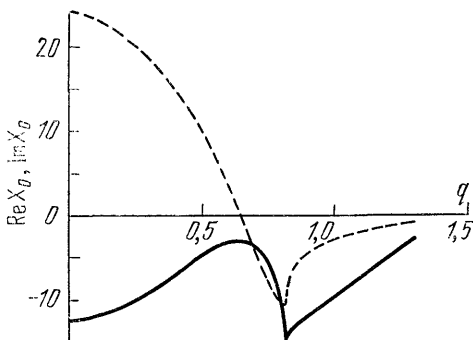


Рис. 21а. Решение $X_0(q, q', E)$ уравнения (5.62) для нулевого полного момента; $E = 3q'^2/4m + E^B = 1$ в системе единиц: $\hbar = 2m = 1$, $E^B = -1,5$. Сплошная линия представляет действительную часть X_0 , штриховая — мнимую часть (Ф. Соре и Х. Цигельман [48]).

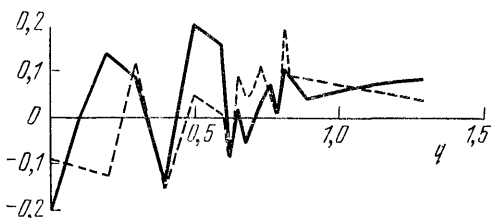


Рис. 21б. Разности решений, найденных с деформацией контура и без нее. Сплошная линия представляет действительную часть, штриховая — мнимую часть. Вертикальная шкала растянута в 50 раз по сравнению с рис. 21а.

обоих методов раздела 2.4. Рис. 21а и 21б показывают результаты численного решения уравнения (5.83) выше порога развала, а также разность между этим решением и решением, найденным с помощью метода деформации

контура. Согласие довольно хорошее (1—2%). Оптическая теорема дает другую проверку точности такого расчета (см. соотношение (3.92)). Поскольку полный момент сохраняется, разность между полным сечением и упругим сечением должна быть равна сечению развала для каждой парциальной волны в отдельности. Сечение развала дается шестимерным интегралом, стоящим в правой части (3.91). В то время как два интегрирования делаются тривиально, четыре остальных интегрирования должны выполняться численно [60]. Трехмерный интеграл для сечения упругого рассеяния при разложении по парциальным волнам берется тривиально. Результаты такого теста представлены для $E = 5$ в приводимой ниже таблице.

L	$\sigma_{\text{полн}}^L - \sigma_{\text{упр}}^L$	$\sigma_{\text{разв}}^L$	L	$\sigma_{\text{полн}}^L - \sigma_{\text{упр}}^L$	$\sigma_{\text{разв}}^L$
0	0,2090	0,2082	4	0,0324	0,0318
1	0,0172	0,0199	5	0,00648	0,00642
2	0,4014	0,4023	6	0,001409	0,001409
3	0,1428	0,1427	7	0,000295	0,000294

На рис. 22 изображены действительные части фазовых сдвигов в упругом канале. Эти фазовые сдвиги связаны с амплитудой $X_L(q', q', E)$ на массовой поверхности формулой

$$X_L \equiv X_L(q', q', E) = -\frac{3\pi}{m} \frac{e^{2i\delta_L} - 1}{2iq'}. \quad (5.88)$$

Разрешая ее относительно $\text{tg}(\text{Re } \delta_L)$, находим*)

$$\text{tg}(\text{Re } \delta_L) = \frac{\text{Im } X_L}{\text{Re } X_L} \frac{\sqrt{1 + \frac{4m^2 q'^2}{9\pi^2} |X_L|^2 + \frac{4mq'}{3\pi} \text{Im } X_L - 1}}{\frac{2mq'}{3\pi} \text{Re } X_L}. \quad (5.89)$$

Удивительно, что фазы с четными значениями L положительны, а с нечетными — отрицательны. Как было показа-

*) Ниже порога развала фазы действительны и равенство (5.89) сводится к $\text{tg } \delta_L = \text{Im } X_L / \text{Re } X_L$.

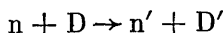
по Амадо [61], этот факт связан с тем, что в трехчастичной системе сепарабельное взаимодействие эквивалентно

обменному механизму.

Рассмотрим две частицы (рис. 23) n и D^* , и пусть частица D может распадаться на две частицы типа n ,

$$D \rightleftharpoons n + n.$$

Тогда реакцию



можно описать как обмен n'' -частицей (ср. также с

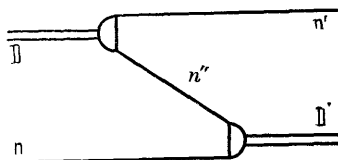


Рис. 23. Обменный механизм в модели с сепарабельным потенциалом.

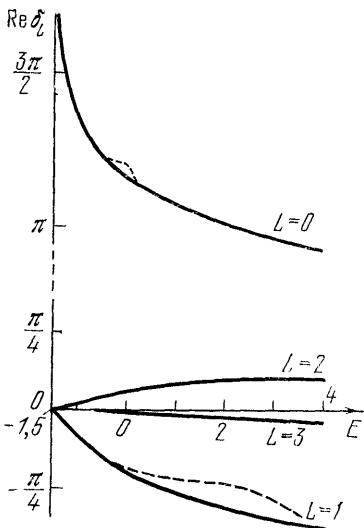


Рис. 22. Действительные части фазовых сдвигов в зависимости от полной энергии в системе центра масс (в единицах: $\hbar = 2m = 1$, $E^B = -1,5$) для различных полных угловых моментов (Р. Амадо с сотр. [59]; Ф. Соре и Х. Цигельман [63]).

рис. 15; линия с импульсом $(-q-q')$ соответствует обмениваемой частице). Допустив такой механизм, Амадо [61], используя теоретико-полевые методы [62], вывел интегральное уравнение (5.53б), не обращаясь к уравнениям Фаддеева. Эффективный потенциал Z_L в уравнении (5.62), будучи обменным, с необходимостью является притягивающим для четных L и отталкивающим для нечетных. Это и объясняет знак фаз. Штриховые линии на рис. 22 представляют более старые результаты Амадо [59].

*) Эти названия должны напоминать нам о «нейтроне» и «дейтроне», хотя здесь мы имеем дело с бесспиновыми бозонами.

Более точные расчеты показали, что кривая δ_0 не имеет каспа на пороге развала [63]. Это согласуется с предсказанием Дельвеса [64] о том, что малое фазовое пространство, доступное для развала при $E = 0$, допускает скачок только второй производной.

Интересно также отметить, что фазовый сдвиг, соответствующий $L = 0$, начинается от 2π и стремится к нулю при $E \rightarrow \infty$. Рассматриваемая нами трехчастичная система имеет два связанных состояния (ср. с рис. 20). Поэтому кривая δ_0 согласуется с теоремой Левинсона [65], которая утверждает, что число связанных состояний (с данным угловым моментом L) n_L равно

$$n_L = \frac{\delta_L(0) - \delta_L(\infty)}{\pi}. \quad (5.90)$$

2.6. Модель Ватсона. Для экспериментаторов обращение к задаче трех тел обусловлено тем обстоятельством, что некоторые двухнуклонные данные довольно легко можно получить в трехчастичном эксперименте, тогда как в двухчастичном эксперименте их измерить трудно или невозможно. Например, трудно работать с частицами очень малых энергий и вследствие этого измерение длины рассеяния в двухчастичной системе связано с неопределенностью, обусловленной экстраполяцией. Или, поскольку не существует нейтронных мишеней, n - n -данные не могут быть измерены прямо.

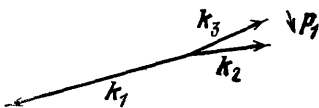


Рис. 24. Импульсная конфигурация с малым относительным импульсом в одной подсистеме.

В трехчастичном же эксперименте эти измерения не представляют никакой проблемы. Когда три частицы вылетают из области реакции, они могут иметь, например, импульсное распределение, подобное тому, что показано на рис. 24. Частицы 2 и 3 движутся почти параллельно с одной и той же скоростью и имеют относительный импульс

$$p_1 = \frac{1}{2}(k_2 - k_3),$$

близкий к нулю. Тем не менее эти две частицы легко зарегистрировать, поскольку их импульсы достаточно

велики. Кроме того, обе частицы могут быть нейтронами. Таким образом, нам становятся доступными данные при очень низких энергиях, а также нейтрон-нейтронные данные. Трудность в данном случае заключается в теоретической интерпретации такого эксперимента, т. е. в извлечении нужных данных из измеренных дифференциальных сечений.

До того как стали доступны уравнения Фаддеева, а также их решения для рассеяния с развалом, использовалась модель Ватсона [66], предназначенная главным образом для рассмотрения состояний с малым относительным импульсом p . Согласно этой модели конечное

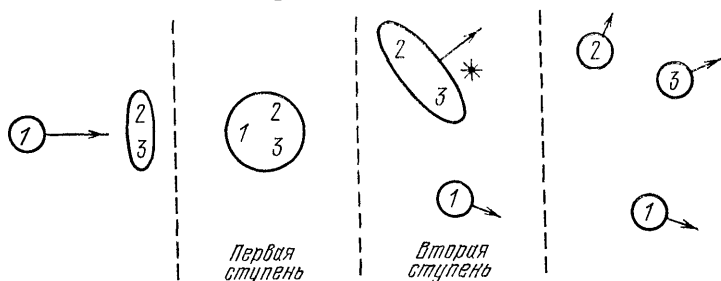


Рис. 25. Двухступенчатый механизм развала.

состояние, состоящее из трех свободных частиц, получается в два этапа (рис. 25). На первом этапе формируется трехчастичное компаунд-состояние (процесс образования). На втором этапе частицы разлетаются из области реакции, но из-за малого относительного импульса (что предполагается) частицы взаимодействуют еще в течение долгого времени. Такое взаимодействие называется взаимодействием в конечном состоянии. На этом втором этапе на трехчастичную амплитуду налагается сильно зависящая от импульса двухчастичная амплитуда. Импульсная зависимость трехчастичной амплитуды при этом считается относительно слабой или даже пренебрежимой. Тогда амплитуда развала записывается в виде

$$U_{0\alpha} = \text{const} \cdot t_{\gamma}, \quad (5.91)$$

где γ обозначает пару, участвующую во взаимодействии в конечном состоянии ($p_{\gamma} \approx 0$). Модель Ватсона можно

рассмотреть с помощью теории Фаддеева, которая дает точное выражение для этой амплитуды (ср. с уравнением (3.64)):

$$U_{0\alpha} = g_0^{-1} + \sum_{\gamma=1}^3 t_{\gamma} g_0 U_{\gamma\alpha}. \quad (5.92)$$

Во-первых, имеются три амплитуды, которые, складываясь когерентно, дают точное выражение, которое может исказить зависимость (5.91) от t_{γ} , во-вторых, амплитуда образования $U_{\gamma\alpha}$ (или $X_{\gamma\alpha}$ в сепарабельном случае) имеет настолько сильную зависимость от импульса (см.

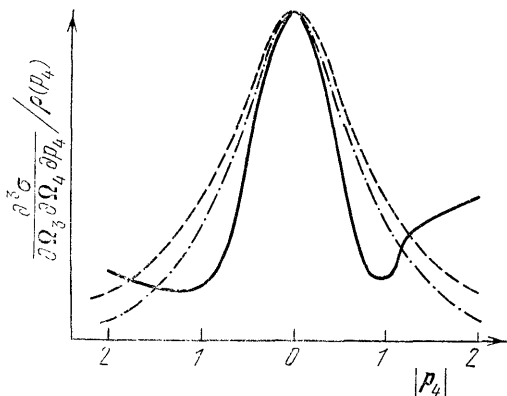


Рис. 26. Сечение трехчастичного развала, деленное на множитель, зависящий от фазового пространства, для трех одинаковых бозонов. Энергия и углы в лабораторной системе таковы: $E_{\text{лаб}} = 79,5$; $\theta_3 = 15^\circ$, $\theta_4 = 23^\circ$ (обозначения такие же, как на рис. 2, если налетающей частицей является связанное состояние двух бозонов; единицы: $\hbar = 2m = 1$, $E^B = -1,5$). Штриховая линия — модель Ватсона; штрихпунктирная — точное вычисление с учетом лишь ведущего члена в сумме (5.92); сплошная — точное вычисление с учетом всех членов в сумме (5.92). Пики нормированы на одну и ту же высоту (Ф. Соре и Х. Цигельман [63]).

рис. 21а), что приближение (5.91) становится сомнительным. Однако в случае реальных нуклонов два эффекта, оказывается, действуют в противоположных направлениях (см. раздел 2.7 и ссылку [56]), так что модель Ватсона не так уж плоха для анализа экспериментов. Ее применимости помогает также наличие в

двухнуклонной синглетной T -матрице полюса, очень близкого к порогу, что приводит при малых относительных импульсах к очень резкой зависимости от импульса. Рис. 26 демонстрирует сравнение модели Ватсона с теорией Фаддеева для трех одинаковых бозонов [63]. Дифференциальное сечение отложено здесь в зависимости от относительного импульса пары в конечном состоянии (в качестве параметра кинематической кривой; ср. с рис. 3). Штриховая линия показывает результаты для модели Ватсона (приближение (5.91)), штрих-пунктирная линия соответствует расчету лишь с ведущим членом в сумме (5.92), а сплошная кривая отвечает точному фаддеевскому расчету (5.92). В обсуждаемом случае различие между результатами, найденными с помощью теории Ватсона и теории Фаддеева, довольно значительное.

2.7. Результаты для трехнуклонной системы. Спиновая зависимость ядерных сил в простейшем приближении описывается двучленным потенциалом Ямагучи

$$v = \sum_{i=0}^1 \lambda_i |\chi_i\rangle \langle \chi_i|, \quad (5.93)$$

что приводит к двучленной сепарабельной T -матрице

$$t = \sum_{i=0}^1 |\chi_i\rangle \tau_i \langle \chi_i|. \quad (5.94)$$

Форм-факторы χ_i действуют на спиновые состояния таким образом, чтобы первый член действовал только в синглетном состоянии ($i=0$), а второй — только в триплетном ($i=1$). Зарядовая зависимость ядерных сил может быть учтена путем добавления в сумму третьего члена [55]. Форм-факторы при этом могли бы действовать и на изоспиновые состояния. При использовании T -матрицы (5.94) уравнения Фаддеева (3.62) приобретают вид, аналогичный (5.39) и после антисимметризации приобретают форму

$$X_{i1}^S = Z_{i1}^S + \sum_{j=0}^1 \eta_{ij}^S Z_{ij}^S X_{j1}^S. \quad (5.95)$$

Значок S сверху указывает на одно из двух возможных значений полного спина: $S = 1/2$ или $S = 3/2$, а индекс

сы i, j указывают перестановки между различными спиновыми состояниями подсистем.

В дублетном случае ($S = 1/2$) имеются два связанных уравнения, поскольку при образовании состояния с $S = 1/2$ спины трех нуклонов могут быть связаны двумя разными способами. В квартетном случае ($S = 3/2$) имеется только одно уравнение, поскольку $S = 3/2$ можно получить лишь одним способом (все три спина параллельны). Сложение спинов можно выразить спиновым множителем η^S . Этот множитель [8, 54, 55] равен

$$\eta^{1/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \eta^{3/2} = -1. \quad (5.96)$$

Для дублетной длины p — d -рассеяния $a^{1/2}$ и для энергии

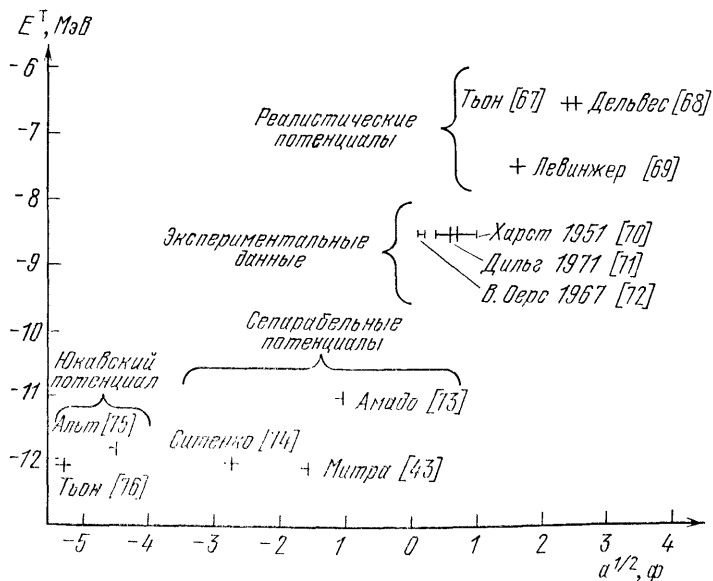


Рис. 27. Экспериментальные и теоретические результаты для энергии связи тритона, отложенные в сопоставлении с дублетной длиной рассеяния («график Филлипса»).

связи тритона E^T согласие между результатами решения уравнения (5.95) и экспериментальными данными получить трудно. Рис. 27 показывает ситуацию на

сегодняшний день*). Тритон оказывается связанным слишком сильно, что обусловлено игнорированием тензорных и отталкивающих сил (хотя второе связанное состояние, отмеченное в разделе 2.5, исчезает). На вычислениях с локальными потенциалами игнорирование отталкивания, вероятно, сказывается даже более сильно. Это может быть обусловлено тем обстоятельством, что s -фазы при высоких энергиях значительно лучше описываются сепарабельными, чем локальными потенциалами, хотя все параметры потенциалов подгоняются лишь по данным при низких энергиях. Потенциалы, являющиеся более реалистическими по отношению к двухнуклонным данным, дают лучшие трехчастичные результаты, однако и здесь согласие не идеальное.

Квартетная длина $n-d$ -рассеяния $a^{3/2}$, с другой стороны, хорошо согласуется с экспериментом. В квартетном случае (все спины параллельны) принцип Паули не позволяет частицам подходить близко друг к другу, и, следовательно, детали потенциала являются менее важными. Из уравнения (5.95) с двухчленным сепарабельным потенциалом Ямагучи [73] получаем $a^{3/2} = 6,32$ ф; экспериментальное значение [71] составляет $(6,35 \pm 0,02)$ ф.

На фоне неудовлетворительных результатов для дублетного случая удивительно обнаружить, насколько хорошим становится согласие между теорией и экспериментом для трехчастичного развала даже при простом выборе потенциала в виде (5.93). Частично это может быть обусловлено преобладающим влиянием полюса антисвязанного состояния в двухчастичной синглетной T -матрице при $E = -0,067$ МэВ, за счет чего даже использование модели Ватсона приводит здесь к хорошим результатам.

В этом контексте интересно отметить, что Амадо [77] нашел преобразование уравнений Фаддеева, под-

*) Со времени выхода в свет английского оригинала этой книги в 1974 г. в литературе появилось много новых результатов вычислений для трехнуклонной системы с учетом всей сложности ядерных сил (тензорных, спин-орбитальных компонент и высших моментов). Эти результаты также обнаруживают значительное расхождение между теорией и экспериментом, особенно для энергий связи ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ и поведения зарядового фактора при больших q^2 .—(Прим. перев.)

крепляющее модель Ватсона, т. е. соотношение (5.91). Амплитуда развала, как мы знаем, дается соотношением

$$U_{0\alpha} = \sum_{\gamma=1}^3 t_{\gamma} g_0 U_{\gamma\alpha} + z - h_0. \quad (5.97)$$

Как уже указывалось, можно было подозревать, что когерентное наложение трех амплитуд могло бы разрушить типичное ватсоновское поведение одной отдельно взятой амплитуды. Однако вычитание из уравнения (5.97) уравнения (3.61a) для амплитуд перестройки

$$U_{\beta\alpha} = \sum_{\gamma \neq \beta} t_{\gamma} g_0 U_{\gamma\alpha} + (1 - \delta_{\beta\alpha})(z - h_0), \quad (5.98)$$

дает

$$U_{0\alpha} - U_{\beta\alpha} = t_{\beta} g_0 U_{\beta\alpha} + \delta_{\beta\alpha}(z - h_0),$$

или

$$U_{0\alpha} = (1 + t_{\beta} g_0) U_{\beta\alpha} + \delta_{\beta\alpha}(z - h_0). \quad (5.99)$$

Согласно (2.84в) имеем

$$t_{\beta} = (1 + t_{\beta} g_0) v_{\beta},$$

или

$$1 + t_{\beta} g_0 = t_{\beta} v_{\beta}^{-1}. \quad (5.100)$$

Подставляя это уравнение в (5.99), получаем

$$U_{0\alpha} = t_{\beta} v_{\beta}^{-1} U_{\beta\alpha} + \delta_{\beta\alpha}(z - h_0). \quad (5.101)$$

Именно это уравнение и является очень похожим на модель Ватсона, т. е. на равенство (5.91). Амплитуда развала $U_{0\alpha}$ прямо пропорциональна двухчастичной T -матрице без всяких дополнительных членов, как в (5.97); член $\delta_{\beta\alpha}(z - h_0)$ на энергетической поверхности пропадает. Во всех тех конфигурациях, которые до сих пор исследовались как экспериментально, так и теоретически, амплитуда образования $v_{\beta}^{-1} U_{\beta\alpha}$ из (5.101), по-видимому, слабо зависела от импульсов по сравнению с t_{β} , и поэтому аппроксимация

$$U_{0\alpha} = \text{const} \cdot t_{\beta} \quad (5.102)$$

представляется оправданной. Для решения уравнения (5.95) это вполне ясно показал Эбенхой [56]. Он использовал нейтрон-нейтронный потенциал, отвечающий $n-n$ — n -длине рассеяния — 16 ф, и проанализировал свои точные теоретические результаты на основе модели Ватсона, т. е. на основе равенства (5.91), как если бы это были экспериментальные данные. При различных кинематических условиях он нашел для $n-n$ — n -длины рассеяния значения между 15,4 ф и 16,4 ф. Это означает, что при анализе экспериментальных данных с помощью модели Ватсона ошибка получается меньшей чем $\pm 0,5$ ф, т. е. меньше экспериментальной ошибки. Тем не менее эксперименты по развалу анализируются теперь на основе точных трехчастичных вычислений. Таким путем Зайтниц с сотрудниками [78] определил, что $n-n$ — n -длина рассеяния равна [79]

$$a_{nn} = (16,1 \pm 0,9) \text{ ф.} \quad (5.103)$$

Эта величина представляет интерес для теории ядерных сил. Ее значение, найденное Зайтницом с сотрудниками, подкрепляет гипотезу о зарядовой симметрии. Согласно этой гипотезе силы в $n-n$ — и в $p-p$ — системах должны быть одинаковые, за вычетом кулоновских эффектов. Действительно, различие между длиной $p-p$ — p -рассеяния

$$a_{pp} = -7,76 \text{ ф} \quad (5.104)$$

и длиной $n-n$ — n -рассеяния (5.103) почти полностью можно объяснить кулоновскими эффектами. Модельные вычисления, в которых кулоновские силы «выключены», дают длину рассеяния для незаряженных частиц [80]

$$a = -17,2 \text{ ф.} \quad (5.105)$$

Уравнение (5.95) описывает также реакцию развала $p+d \rightarrow 2p+n$ в тех кинематических областях, где кулоновское взаимодействие, не включенное в потенциал (5.93), играет лишь второстепенную роль. На рис. 28 показаны экспериментальные результаты Брюкмана с сотрудниками [1] вместе с теоретической кривой, полученной Эбенхойем [56]. На нем отложено дифференциальное сечение в зависимости от параметра кинематической кривой S (см. рис. 3). Согласие очень

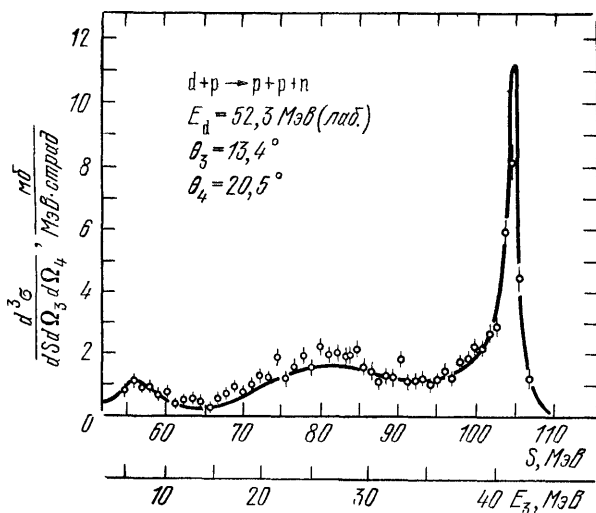


Рис. 28. Сечение процесса трехчастичного развала в зависимости от параметра кривой S ; см. рис. 2 и 3 (В. Эбенхой [56]).

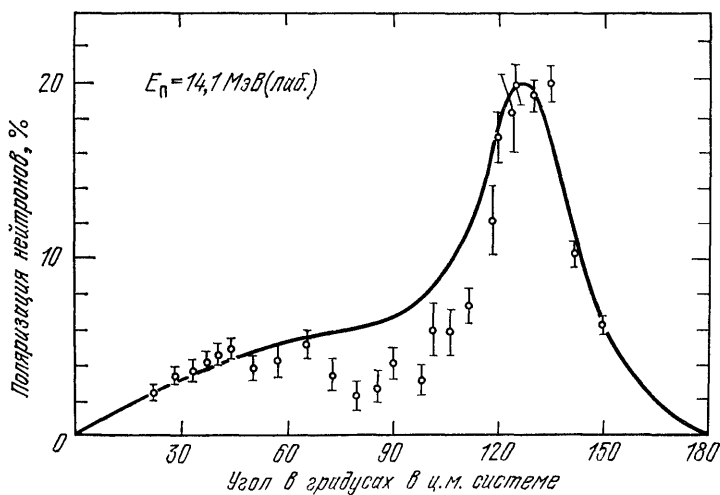


Рис. 29. Поляризация нейтронов в упругом канале $n-d$ -реакции (П. Долешалл [83]; экспериментальные данные получены Дж. Фейвре с сотр.).

хорошее*). Видно, что теория описывает эксперимент также и при больших относительных импульсах, где модель Ватсона не работает.

Одной из причин хорошего согласия между теорией и экспериментом является тот факт, что входящая с большим весом квартетная амплитуда, не чувствительная к деталям потенциала, заметно преобладает над дублетной амплитудой. Но как только эти две амплитуды разделены, достичь хорошего согласия становится сложнее, и для получения надежных результатов необходимо учитывать больше деталей нуклон-нуклонного потенциала. На рис. 29 результаты поляризационного эксперимента сравниваются с решением уравнения (5.95). Теоретическая кривая [83] рассчитана с сепарабельным потенциалом, который является несколько более сложным, чем потенциал (5.93). В дополнение к взаимодействию в S -состоянии учитывалось взаимодействие в P -состоянии, а также связь ${}^3S_1 - {}^3D_1$ -состояний.

*) Следует заметить, однако, что согласие не всегда такое хорошее. Особенно для абсолютной величины пиков, где расхождение иногда [81, 82] достигает 50%.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА
С ЛОКАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ *)1. Прямое решение уравнений Фаддеева
с локальным потенциалом

С помощью прямого использования метода (е) (стр. 82) уравнения Фаддеева с локальным потенциалом были решены лишь однажды [84] и то лишь для трех-бозонного связанного состояния и при некоторых упрощающих предположениях. Допускалось, что локальный потенциал

$$v(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(\hat{p} \cdot \hat{p}') v_l(p, p') \quad (6.1)$$

действует только в s -волне, т. е. все члены в сумме (6.1), кроме первого, отбрасывались:

$$v(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \approx v_0(p, p'). \quad (6.2)$$

Если бы мы еще предположили, что v_0 факторизуется,

$$v_0(p, p') \approx \lambda \chi(p) \chi(p'), \quad (6.3)$$

то мы вернулись бы обратно к сепарабельному приближению предыдущей главы. Из расчетов Осборна [84] можно увидеть, что «небольшое различие» между потенциалами (6.2) и (6.3) приводит к неприятным осложнениям практических вычислений. Поэтому этот способ прямого решения уравнений Фаддеева с локальными потенциалами в дальнейшем не был использован для исследования состояний рассеяния.

Как было отмечено ранее, уравнения Фаддеева с локальным потенциалом после разложения по угловым моментам представляют собой бесконечную систему зацепляющихся двумерных интегральных уравнений.

*) Детальное описание методов решения уравнений Фаддеева с локальными потенциалами и их сравнение по эффективности даются в Дополнении 1 к данной книге.— (Прим. перев.)

Для одинаковых частиц при допущении (6.2) они расцепляются. Осборн получил волновую функцию связанного состояния, решив (однородное) интегральное уравнение вида

$$F_0(q, Q) = \int_0^{\infty} dq' \frac{q^2 + q'^2 + qq'}{q^2 + q'^2 - qq'} \int dQ' K_0(q, Q; q', Q') F_0(q', Q') \quad (6.4)$$

с ядром

$$K_0(q, Q; q', Q') = \frac{2q'}{\pi q} \frac{\hat{t}_0 \left(\sqrt{Q^2 - \frac{3}{4}q^2}, \sqrt{Q'^2 - \frac{3}{4}q'^2}, z - \frac{3}{4m}q^2 \right)}{mz - Q'^2}$$

Аппроксимация этого двумерного интеграла суммой требует довольно большого времени на ЭВМ. Вторая проблема возникает из-за переменных пределов при интегрировании по Q' , что обусловлено δ -функциями в уравнении (4.8). Рис. 30 показывает область двумерного

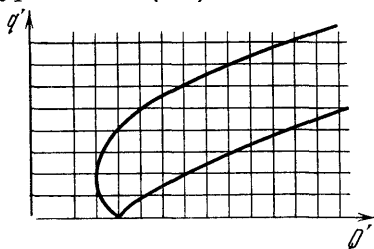


Рис. 30. Область и сетка интегрирования в уравнении (6.4).

интегрирования вместе с соответствующей двумерной сеткой*). Из-за особой формы области интегрирования будет «работать» лишь некоторая доля тех узлов, которые были введены для интегрирования на Q' , поэтому такая аппроксимация довольно плоха. Осборн решил эту трудность, приближая подынтегральную

функцию с помощью интерполяционного полинома (по переменной Q'), построенного по *всем* узлам. Этот полином затем интегрировался аналитически для каждого значения q' .

Интегральное уравнение, таким образом, аппроксимируется довольно точно матричным уравнением для значений волновой функции в узлах сетки. Осборн использовал семь точек по q' -координате и 15 точек по

*) Бесконечные пределы интегрирования не приводят к трудностям, так как их можно преобразовать к конечным пределам.

координате Q' , что дает матрицу 105×105 . Энергии, в которых детерминант матричного уравнения обращается в нуль, суть трехчастичные энергии связи, конечно, при условии, что эти энергии лежат ниже двухчастичной энергии связи. Волновые функции находят тогда из соответствующих собственных векторов. На рис. 31

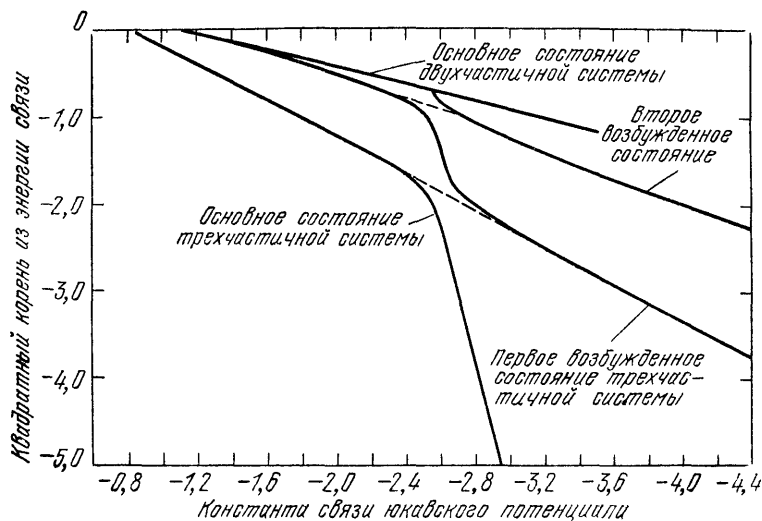


Рис. 31. Квадратный корень из энергии связи трехбозонной системы (единицы: $\hbar = m = 1$) отложен в зависимости от юкавской константы связи (Т. Осборн [84]).

показаны результаты для юкавского потенциала $V(r) = = g \cdot \exp(-0,633 r)/r$.

Трехчастичное связанное состояние появляется уже для значений константы связи $-0,8 \geq g \geq -1,1$, которые слишком малы, чтобы связать двухчастичную систему. Как только появляется двухчастичное связанное состояние ($g \leq -1,1$), возникает и второе трехчастичное связанное состояние. При $g = -2,5$, согласно интерпретации Осборна, появляется и третье трехчастичное связанное состояние. В то же самое время происходит и нечто странное. Основное и первое возбужденные состояния становятся очень чувствительны к малым изменениям констант связи. Такое поведение возникает, как

было показано в более поздних вычислениях [85—87], из-за неустойчивости матричной аппроксимации и вызвано ошибками интегрирования. Дельвес [88], изучая такие матричные аппроксимации, обнаружил, что вблизи точки первой неустойчивости низшее собственное значение теряет смысл, а его роль берет на себя второе собственное значение.

Если уравнение

$$A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \quad (6.5)$$

определяет точные собственные значения λ_i , а уравнение

$$\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}_i = \tilde{\lambda}_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (6.6)$$

дает собственные значения $\tilde{\lambda}_i$, которые искажены из-за ошибки интегрирования, то до момента, когда появляется неустойчивость, собственные значения $\tilde{\lambda}_i$ более или менее близки к точным собственным значениям в их естественном порядке,

$$\lambda_i \approx \tilde{\lambda}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

После того, как появляется первая неустойчивость, самое низкое собственное значение $\tilde{\lambda}_0$ не имеет уже ничего общего с точным спектром. Его существование целиком объяснено ошибкам интегрирования. Но если пренебречь $\tilde{\lambda}_0$ и положить

$$\lambda_i \approx \tilde{\lambda}_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8)$$

то спектр уравнения (6.6) все еще может быть разумным приближением.

Тот же самый эффект можно увидеть на рис. 31. Как показывают результаты более тщательных расчетов (штриховая линия), первое возбужденное состояние берет на себя роль основного состояния, а второе возбужденное состояние становится первым возбужденным. Эта интерпретация также подтверждается поведением волновой функции. В расчете Осборна волновая функция первого возбужденного состояния имеет два узла для $g > -2,5$ и только один узел для $g < -2,5$.

Мы видим, что прямое решение уравнений Фаддеева затруднительно даже для трехбозонного связанного состояния и при упрощающих предположениях. Тем не ме-

нее Ким с сотр. [85], используя новую технику интегрирования, смог решить уравнения Фаддеева с реалистическими потенциалами в задаче на связанные состояния *).

Другая возможность решать уравнения Фаддеева с локальным потенциалом — это использовать метод разложения [89—91], описанный в предыдущей главе (см. равенство (5.27)). Этот метод приводит к зацепляющейся системе одномерных интегральных уравнений. В общем случае при разложении локального потенциала на N независимых сепарабельных членов получится N интегральных уравнений. Если использовать правило интегрирования с сеткой из n узлов, то на ЭВМ необходимо обратить матрицу размерности $(n \times N)$. Также и в этом случае предел производительности ЭВМ исчерпывается очень быстро.

С этой точки зрения становится интересным процесс рассеяния, предложенный Эрхардом Шмидтом (см. гл. 4, раздел 2). Его использование приводит к малому числу связанных интегральных уравнений, тогда как более тонкие детали потенциала содержатся в быстро сходящемся ряде Неймана.

2. Метод Шмидта (вейнберговский метод квазичастиц)

Процедура рассеяния Шмидта [36] впервые была использована для задач рассеяния Вейнбергом [34] в 1963 г. Начиная с Вейнберга, этот метод обычно называют методом квазичастиц, так как Вейнберг назвал все двухчастичные связанные состояния и резонансы, препятствующие сходимости ряда Неймана (см. гл. 4, раздел 2, а), квазичастицами. Примем далее, что имеется только одна квазичастица, а именно — двухчастичное связанное состояние. Согласно главе 4 (раздел 2) обобщение на случай многих квазичастиц также возможно и не представляет особых трудностей.

*) Последние результаты, касающиеся решения трехчастичных интегральных уравнений для основного состояния ^3H с использованием реалистического NN-потенциала Рейда во всех парциальных волнах вплоть до $J = 2$ опубликованы в работе [130] (см. также [131] и обзор [Д1.5]).—(Прим. перев.)

Рассмотрим уравнение для двухчастичной T -матрицы и изучим его решение на основе разложения в ряд Неймана. Согласно (4.17а), (4.17б) ряд Неймана сходится, если все собственные значения ядра имеют абсолютную величину, меньшую единицы. Для левых собственных функций*) ядра имеем

$$\langle \varphi_\nu(z) | K(z) = \langle \varphi_\nu(z) | v g_0(z) = \eta_\nu(z) \langle \varphi_\nu(z) |. \quad (6.9)$$

Собственные функции и собственные значения зависят от энергии z , которая, вообще говоря, является комплексной. В практических применениях мы ограничиваемся следующими значениями z :

$$z = E \text{ для } E < 0 \quad (6.10a)$$

и

$$z = E + i\varepsilon \text{ для } E \geq 0, \quad (6.10б)$$

где E — энергия двухчастичной системы. Когда энергия z берется из области, заданной условиями (6.10), собственные функции будут нормируемыми. В пределе, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, это будет уже не так, но все утверждения, касающиеся собственных значений, остаются справедливыми также и в этом пределе.

Физический смысл собственных значений η_ν легко понять. Умножив (6.9) справа на $[\eta_\nu(z) g_0(z)]^{-1}$, найдем

$$\langle \varphi_\nu(z) | v \eta_\nu^{-1}(z) = \langle \varphi_\nu(z) | (z - h_0),$$

или

$$\langle \varphi_\nu(z) | (h_0 + v \eta_\nu^{-1}(z)) = z \langle \varphi_\nu(z) |. \quad (6.11)$$

Теперь видим, что собственные функции $\langle \varphi_\nu |$ уравнения (6.9) суть решения присоединенного уравнения Шредингера (6.11) с энергией z и потенциалом $v \eta_\nu^{-1}(z)$; при этом как энергия, так и потенциал могут быть действительными или комплексными. Величина $\eta_\nu^{-1}(z)$ играет роль константы связи, при которой уравнение Шредин-

*) Левые собственные функции $\langle \varphi_\nu | K = \eta_\nu \langle \varphi_\nu |$ и правые собственные функции $K | \bar{\varphi}_\nu \rangle = \eta_\nu | \bar{\varphi}_\nu \rangle$ различаются для несимметричного ядра K . Однако собственные значения η_ν одинаковы. Мы предпочитаем рассматривать левые собственные функции, так как их легче связать с уравнением Шредингера.

гера с необходимостью имеет нормируемое решение при (действительной или комплексной) энергии z .

На рис. 32 представлено поведение первых четырех собственных значений $\eta_\nu(z)$ для потенциала Хюльтена:

$$v(r) = \frac{2}{e^r - 1} \quad (6.12)$$

в случае s -волны. Аргумент z удовлетворяет условиям (6.10 а, б) и условию $-\infty < E < +\infty$. Стрелки на кривых указывают направление, в котором энергия растет.

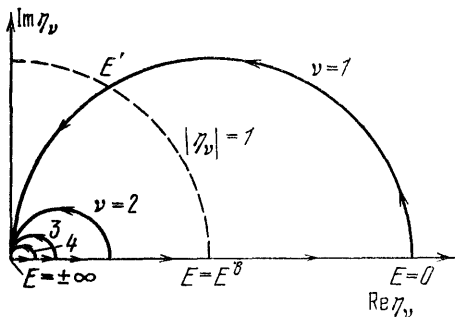


Рис. 32. Первые четыре s -волновых собственных значения $\eta_\nu(E + i0)$ для потенциала Хюльтена (6.12).

Преобразование уравнения (6.9) к форме (6.11) позволяет дать качественную интерпретацию этих кривых. Когда энергия E становится равной энергии связанного состояния E^B , первое собственное значение η_1 становится равным единице, и уравнение (6.11) превращается в уравнение Шредингера для связанного состояния с исходным потенциалом v . При $E < E^B$ собственное значение η_1 должно быть меньше единицы, поскольку для того, чтобы получить связанное состояние при энергии $E < E^B$, модифицированный потенциал $v\eta_1^{-1}$ должен быть более сильным. При $E \rightarrow -\infty$ все собственные значения стремятся к нулю, так как бесконечно большая энергия связи означает взаимодействие бесконечно большой интенсивности.

С другой стороны, для $E^B < E < 0$ мы находим $\eta_1 > 1$; поскольку нам нужна меньшая энергия связи,

то и интенсивность взаимодействия будет меньше. Наш потенциал (6.12) имеет только одно связанное состояние, так что высшие собственные значения не достигают значения $\eta = 1$. Для $E > 0$ собственные значения не могут быть действительными, поскольку ядро становится комплексным. Поэтому кривые $\eta_\nu(z)$ сходят с вещественной оси. При $E \rightarrow +\infty$ все они должны возвращаться к началу координат.

В данном случае ряд Неймана не сходится в энергетическом интервале

$$E^B \leq E \leq E',$$

так как здесь $|\eta_1(E + i\varepsilon)| \geq 1$. Чтобы получить сходимость, мы хотим теперь отщепить сепарабельное ядро таким образом, чтобы все собственные значения остаточного ядра лежали внутри единичного круга. Как сразу же видно из (5.27), этого можно добиться путем вычитания сепарабельного потенциала

$$v^s(z) = |\bar{\varphi}_1(z)\rangle\langle\bar{\varphi}_1(z^*)| \quad (6.13)$$

из исходного потенциала. Такое рассечение исключает собственное значение η_1 , в то время как все другие собственные значения не меняются. Разумеется, отщепление потенциала (6.13) — не единственная возможность. Любое вычитание сепарабельного потенциала

$$v' = v - v^s = v - \lambda|\chi\rangle\langle\chi| \quad (6.14)$$

приводит к сходящемуся ряду Неймана для остаточного ядра

$$\begin{aligned} K'(z) &= v'g_0(z) = (v - v^s)g_0(z) = \\ &= vg_0(z) - \lambda|\chi\rangle\langle\chi|g_0(z), \end{aligned} \quad (6.15)$$

если все собственные значения η'_ν этого ядра имеют абсолютные величины меньше единицы,

$$\begin{aligned} \langle\varphi'_\nu(z)|K'(z) &= \eta'_\nu(z)\langle\varphi'_\nu(z)|, \\ |\eta'_\nu(z)| &< 1. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Впрочем, в общем случае проверить выполнение условия (6.16) не так легко, как в случае «идеального выбора» (6.13).

Допустим теперь, что условие (6.16) выполнено для расщепления (6.14) и решим уравнение (2.56а) для двухчастичной T -матрицы*)

$$t = v' + \lambda |\chi\rangle\langle\chi| (1 + g_0 t) + v' g_0 t. \quad (6.17)$$

Переносим последний член в правой части налево и умножая слева на $(1 - v' g_0)^{-1} = 1 + t' g_0$ (ср. с равенством (2.59б)), найдем

$$t = t' + (1 + t' g_0) |\chi\rangle\lambda\langle\chi| (1 + g_0 t). \quad (6.18)$$

Мы ввели здесь T -матрицу для остаточного взаимодействия v' вида

$$t' = (1 - v' g_0)^{-1} v'. \quad (6.19)$$

Предполагая теперь, что t' известна, уравнение (6.18) можно решить. Для этого умножим его на $\langle\chi|g_0$ слева и добавим $\langle\chi|$ с обеих сторон:

$$\begin{aligned} \langle\chi| (1 + g_0 t) &= \langle\chi| (1 + g_0 t') + \\ &+ \langle\chi| g_0 (1 + t' g_0) |\chi\rangle\lambda\langle\chi| (1 + g_0 t), \end{aligned} \quad (6.20)$$

что дает для неизвестного состояния $\langle\chi| (1 + g_0 t)$ соотношение

$$\langle\chi| (1 + g_0 t) = \frac{\langle\chi| (1 + g_0 t')}{1 - \lambda \langle\chi| g_0 (1 + t' g_0) |\chi\rangle}. \quad (6.21)$$

Подставляя (6.21) в (6.18), окончательно получаем

$$t(z) = t'(z) + |\tilde{\chi}(z)\rangle\tau(z)\langle\tilde{\chi}(z^*)|, \quad (6.22)$$

где

$$|\tilde{\chi}(z)\rangle = (1 + t'(z) g_0(z)) |\chi\rangle \quad (6.23)$$

и

$$\begin{aligned} \tau(z) &= (\lambda^{-1} - \langle\chi| g_0(z) [1 + t'(z) g_0(z)] |\chi\rangle)^{-1} = \\ &= (\lambda^{-1} - \langle\chi| g_0(z) |\tilde{\chi}(z)\rangle)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Таким образом, T -матрицу можно записать в виде суммы сепарабельной T -матрицы и несепарабельного остатка.

*) Допускаем для простоты, что потенциал v имеет только одно связанное состояние и что форм-факторы χ не зависят от энергии z . Такую зависимость, однако, без труда можно учесть,

Отметим аналогию между полученным результатом и формулой (5.9) для чисто сепарабельного потенциала. Для $v=v^s$, т. е. при $v'=0$, имеем $t'=0$ и (6.22) переходит в (5.9).

Мы допустили, что матрица $t'(z)$ известна. Ее можно найти из ряда Неймана

$$t'(z) = \sum_{v=0}^{\infty} (v' g_0(z))^v v', \quad (6.25)$$

поскольку, согласно нашему предположению, все собственные значения ядра $v' g_0$ по абсолютной величине меньше единицы.

Исходя из выражения (6.22), можно вывести необходимое условие, которому должен удовлетворять сепарабельный потенциал. Мы знаем, что T -матрица имеет полюс при энергии связанного состояния (мы предполагаем здесь, что имеется всего одно связанное состояние). Этот полюс должен полностью содержаться в сепарабельной части T -матрицы, т. е. в члене $|\tilde{\chi}\rangle \tau \langle \tilde{\chi}|$, так как при наличии полюса в t' ряд Неймана для t' сходиться не будет. По этой причине необходимо постулировать, что при $z = E^B$ знаменатель функции $\tau(z)$ обращается в нуль. Таким образом, получается следующее соотношение для константы связи λ (по аналогии с (5.16а), (5.16б)):

$$\lambda^{-1} = \langle \chi | g_0(E^B) (1 + t'(E^B) g_0(E^B)) | \chi \rangle. \quad (6.26)$$

Это соотношение становится более ясным, если рассчитать связанное состояние для нашего потенциала методом квазичастиц. Как уже обсуждалось выше (ср. с уравнением (5.11)), волновая функция связанного состояния удовлетворяет уравнению

$$\langle \psi | = \langle \psi | v g_0(E^B). \quad (6.27)$$

При использовании расщепления (6.14) находим

$$\langle \psi | = \lambda \langle \psi | \chi \rangle \langle \chi | g_0(E^B) + \langle \psi | v' g_0(E^B).$$

Переносим второй член в правой части налево и умножая справа на $(1 - v' g_0)^{-1} = 1 + t' g_0$ (см. (2.59б)), получаем

$$\langle \psi | = \lambda \langle \psi | \chi \rangle \langle \chi | g_0(E^B) (1 + t'(E^B) g_0(E^B)). \quad (6.28)$$

С точностью до нормировочной постоянной N волновая функция связанного состояния имеет вид

$$\langle \psi | = N \langle \chi | g_0(E^B) (1 + t'(E^B) g_0(E^B)) = N \langle \chi | g_0(E^B). \quad (6.29)$$

Метод квазичастиц не работает, если не выполняется условие

$$\langle \psi | \chi \rangle \neq 0, \quad (6.30)$$

в противном случае $\langle \psi | (1 - v' g_0(E^B))$ обратилось бы в нуль и оператор $(1 - v' g_0(E^B))^{-1}$ не существовал бы.

С помощью (6.29) условие (6.26) для константы связи λ можно записать в виде

$$\lambda^{-1} = \langle \psi | \chi \rangle, \quad (6.31)$$

если форм-фактор χ нормирован так, что нормировочная постоянная N равна единице. В практических вычислениях можно учесть только небольшое число членов ряда Неймана (6.25). В нулевом приближении $t' \approx 0$, и, как уже указывалось, мы получаем сепарабельное приближение (5.9). В первом приближении из (6.22) — (6.25) находим

$$t(z) = v' + \frac{(1 + v' g_0(z)) | \chi \rangle \langle \chi | (g_0(z^*) v' + 1)}{\lambda^{-1} - \langle \chi | g_0(z) (1 + v' g_0(z)) | \chi \rangle}. \quad (6.32)$$

Скадрон и Вейнберг [92] использовали различные аппроксимации, чтобы найти такое значение константы связи g потенциала Юкавы

$$v(r) = g \frac{e^{-r}}{r}, \quad (6.33)$$

для которого длина рассеяния обращается в бесконечность (при этом значении g в двухчастичной системе имеется связанное состояние с нулевой энергией).

Если использовать так называемое борновское приближение

$$t(z) \approx v, \quad (6.34)$$

не обращая внимания на то, что ряд Неймана не сходится, то мы получили бы

$$g = \infty. \quad (6.35)$$

Нулевое приближение в равенствах (6.22) — (6.25), т. е. $t' \approx 0$, дает (для форм-фактора, использованного Скадром и Вейнбергом)

$$g = -2, \dots \quad (6.36)$$

В первом приближении, при использовании (6.32) с тем же самым форм-фактором константа g будет

$$g = -1,765 \dots, \quad (6.37)$$

тогда как точное значение

$$g = -1,6798 \dots \quad (6.38)$$

Как видим, первое приближение (иногда называемое квазиборновским приближением) дает довольно хороший результат там, где борновское приближение совершенно неприменимо.

3. Метод квазичастиц в задаче трех тел

3.1. Уравнения Альта — Грассбергера — Сандхаса. Упрощение уравнений Фаддеева, полученное нами для сепарабельного потенциала в главе 5, было связано двум причинам. Во-первых, T -матрица

$$t_\gamma = |\chi_\gamma\rangle \tau_\gamma \langle \chi_\gamma| \quad (6.39)$$

являлась проекционным оператором и можно было вывести простые уравнения для оператора $g_0 U_{\beta\alpha} g_0$, взятого в обкладках состояний, на которые мы проектируем,

$$X_{\beta\alpha} = \langle \chi_\beta | g_0 U_{\beta\alpha} g_0 | \chi_\alpha \rangle, \quad (6.40)$$

и, во-вторых, операторы $X_{\beta\alpha}$ уже содержали в себе достаточно информации, чтобы определить S -матрицу.

Аналогичным образом, применяя метод квазичастиц к уравнениям Фаддеева, мы должны попытаться сделать так, чтобы не вычислять «слишком много». При таком подходе у нас есть T -матрица, напоминающая оператор

(6.39), даже в случае локального потенциала, т. е. *)

$$t_{\gamma}(z) = |\tilde{\chi}_{\gamma}(z)\rangle \tau_{\gamma}(z) \langle \tilde{\chi}_{\gamma}(z^*)| + t'_{\gamma}(z) = t_{\gamma}^s(z) + t'_{\gamma}(z). \quad (6.41)$$

Мы не требуем теперь вычисления полных операторов $U_{\beta\alpha}$, а ограничиваемся лишь нахождением операторов

$$\langle \mathbf{q}'_{\beta} | X_{\beta\alpha}(E_{\alpha} + i0) | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle = \langle \Phi_{\beta} | U_{\beta\alpha}(E_{\alpha} + i0) | \Phi_{\alpha} \rangle, \quad (6.42)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

которые только и необходимы для расчета S -матрицы. Обобщая равенство (6.29) на трехчастичное пространство, для функций каналов Φ_{α} , Φ_{β} ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) можно записать:

$$|\Phi_{\alpha}\rangle = g_0(E_{\alpha})(1 + t'_{\alpha}(E_{\alpha})g_0(E_{\alpha}))|\chi_{\alpha}\rangle | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle = \\ = g_0(E_{\alpha})\tilde{\chi}_{\alpha}(E_{\alpha}) | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle. \quad (6.43)$$

Таким образом, даже в рассматриваемом случае локального потенциала операторы $X_{\beta\alpha}$ приобретают вид, аналогичный соотношению (5.36),

$$X_{\beta\alpha}(z) = \langle \tilde{\chi}_{\beta}(z^*) | g_0(z) U_{\beta\alpha}(z) g_0(z) | \tilde{\chi}_{\alpha}(z) \rangle, \quad (6.44)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Мы снова представили важные для нас операторы перехода $X_{\beta\alpha}$ в виде матричных элементов операторов $g_0 U_{\beta\alpha} g_0$ между состояниями, являющимися проекционными состояниями T -матрицы.

Для вывода интегрального уравнения для операторов $X_{\beta\alpha}$ необходимо теперь позаботиться о добавках t'_{γ} , которые как раз и выражают тот факт, что мы имеем дело с несепарабельным потенциалом.

Используем далее аналогию, отмеченную на стр. 66, между уравнением для двухчастичной T -матрицы и уравнениями Фаддеева для операторов $U_{\beta\alpha}$.

*) Это наша формула (6.22) в трехчастичном пространстве. Для сепарабельной части T -матрицы в импульсном представлении находим $\langle \mathbf{p}_{\gamma}, \mathbf{q}_{\gamma} | t_{\gamma}^s(z) | \mathbf{p}'_{\gamma}, \mathbf{q}'_{\gamma} \rangle = \delta(\mathbf{q}_{\gamma} - \mathbf{q}'_{\gamma}) \tilde{\chi}_{\gamma}(\mathbf{p}_{\gamma}; z - q_{\gamma}^2/2M_{\gamma}) \tau_{\gamma}(z - q_{\gamma}^2/2M_{\gamma}) \tilde{\chi}_{\gamma}(\mathbf{p}'_{\gamma}; z - q_{\gamma}^2/2M_{\gamma})$.

Определив величины (с $\alpha, \beta = 1, 2, 3$)

$$(\mathbf{G}_0^S)_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} g_0 t_{\beta}^s g_0, \quad (\mathbf{G}_0')_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} g_0 t_{\beta}' g_0, \quad (6.45)$$

мы вводим в уравнения Фаддеева (3.70) расщепление (6.41)

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0^S\mathbf{T} + \mathbf{V}\mathbf{G}_0'\mathbf{T}.$$

Теперь перенесем последний член в правой части этого уравнения налево и умножим на $(\mathbf{1} - \mathbf{V}\mathbf{G}_0')^{-1}$. С определением

$$\mathbf{T}' = (\mathbf{1} - \mathbf{V}\mathbf{G}_0')^{-1}\mathbf{V}, \quad (6.46)$$

находим

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}'\mathbf{G}_0^S\mathbf{T}. \quad (6.47)$$

Возвращаясь обратно к нашим явным обозначениям с индексами разбиений, для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ находим

$$U_{\beta\alpha} = U'_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma=1}^3 U'_{\beta\gamma} g_0 | \tilde{\chi}_{\gamma} \rangle \tau_{\gamma} \langle \tilde{\chi}_{\gamma} | g_0 U_{\gamma\alpha}, \quad (6.48)$$

где $U'_{\beta\alpha}$ определяется равенством

$$U'_{\beta\alpha} = (\mathbf{T}')_{\beta\alpha}.$$

Уравнение (6.48) соответствует уравнениям Фаддеева для сепарабельного потенциала, за исключением того, что появляется оператор $U'_{\beta\alpha}$, который содержит несепарабельную часть потенциала. Чтобы получить уравнение для нужных нам операторов (6.44), остается лишь взять матричные элементы от уравнения (6.48) между состояниями $\langle \tilde{\chi}_{\beta}(z^*) | g_0(z)$ и $g_0(z) | \tilde{\chi}_{\alpha}(z) \rangle$,

$$X_{\beta\alpha}(z) = X'_{\beta\alpha}(z) + \sum_{\gamma=1}^3 X'_{\beta\gamma}(z) \tau_{\gamma}(z) X_{\gamma\alpha}(z), \quad (6.49)$$

где

$$X'_{\beta\alpha}(z) = \langle \tilde{\chi}_{\beta}(z^*) | g_0(z) U'_{\beta\alpha}(z) g_0(z) | \tilde{\chi}_{\alpha}(z) \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Система уравнений (6.49) для операторов перехода и есть АГС-уравнения (Альт, Грассбергер, Сандхас [23]). Таким образом, фаддеевские уравнения свелись к систе-

ме более простых уравнений, так же как и в случае сепарабельного потенциала. Наша задача теперь — вычислить операторы $X'_{\beta\alpha}$ или $U'_{\beta\alpha} = (\mathbf{T}')_{\beta\alpha}$. Из определения (6.46) и после умножения на $(1 - \mathbf{V}G'_0)$ слева, находим уравнение

$$\mathbf{T}' = \mathbf{V} + \mathbf{V}G'_0\mathbf{T}', \quad (6.50a)$$

являющееся уравнением Фаддеева вида

$$U'_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\gamma=1}^3 (1 - \delta_{\beta\gamma}) t'_\gamma g_0 U'_{\gamma\alpha}, \quad (6.50b)$$

которое, по всей видимости, так же трудно решить, как и исходное уравнение (3.62). Однако нам и не требуется его решать! Суть метода квазичастиц и заключается в том, что достаточно лишь итеративного приближения для операторов, представляющих несепарабельный остаток потенциала,

$$U'_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\gamma \neq \alpha, \beta} t'_\gamma + \dots \quad (6.51)$$

Операторы, описывающие развал, получают аналогичным образом, как и для случая чисто сепарабельного потенциала. Уравнение (3.70) справедливо также и для $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$; в этом случае оно представляет уравнение не (3.62), а (3.61a). То же справедливо и для (6.48). Беря матричные элементы от этого уравнения между состояниями $\langle p_\alpha |$ и $g_0(z) | \tilde{\chi}_\alpha(z) \rangle$ и полагая $\beta = 0$, находим аналог соотношения (3.64), которое связывает операторы для развала $X_{0\alpha}$ с операторами для перестройки $X_{\beta\alpha}$.

3.2. Применение метода квазичастиц к уравнению для трехчастичной резольвенты. Эффективные двухчастичные уравнения, выведенные в последнем разделе с помощью метода квазичастиц из уравнений Фаддеева, можно получить также и без использования фаддеевской теории [93]. При выводе нам не приходилось использовать свойство компактности фаддеевского ядра, поскольку уравнения Фаддеева (6.50a), (6.50b) решались с помощью итераций. Поэтому становится понятно, что метод квазичастиц можно использовать также и для интеграль-

ных уравнений (подобных, например, уравнению для резольвенты), не имеющих компактного ядра.

В предыдущем разделе стало ясно, что сложность фаддеевского уравнения обусловлена тем обстоятельством, что это уравнение дает полный набор операторов перехода $U_{\beta\alpha}$. А так как для построения S -матрицы нужны только матричные элементы этих операторов между двухчастичными связанными состояниями, то становится возможным получить более простые уравнения. Прежде чем приступить к выводу квазичастичных уравнений для резольвенты, нужно определить, какие же матричные элементы нам в действительности нужны.

Согласно равенству (2.99) состояния рассеяния получают с помощью резольвенты посредством ε -предела. Из функции рассеяния мы находим S -матрицу переходом к пределу по времени согласно (3.40 а) — (3.40 в). Комбинируя эти два уравнения, находим

$$S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i(E_{\beta} - E_{\alpha})t} i\varepsilon \langle \mathbf{q}'_{\beta} | \langle \psi_{\beta} | G(E_{\alpha} + i\varepsilon) | \psi_{\alpha} \rangle | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle. \quad (6.52)$$

В дальнейшем окажется важным, что соотношение (6.52) остается справедливым, если двухчастичные связанные состояния ψ_{γ} заменить на состояния $\lambda_{\gamma} | \chi_{\gamma} \rangle$ [93] при условии, что

$$\lambda^{-1} = \langle \psi_{\gamma} | \chi_{\gamma} \rangle. \quad (6.53)$$

Состояние $\lambda_{\gamma} | \chi_{\gamma} \rangle$ тогда будет содержать связанное состояние $|\psi_{\gamma}\rangle$ с амплитудой 1 плюс компонента $|\varphi_{\gamma}\rangle$ двухчастичного континуума (как и выше, мы допускаем, что в каждой подсистеме имеется только по одному связанному состоянию)

$$\lambda_{\gamma} | \chi_{\gamma} \rangle = |\psi_{\gamma}\rangle + |\varphi_{\gamma}\rangle. \quad (6.54)$$

Волновая функция связанного состояния не обязательно должна быть известной. В S -матрицу входит только величина перекрывания (6.53)

$$S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}'_{\beta}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i(E_{\beta} - E_{\alpha})t} i\varepsilon \lambda_{\beta} \langle \mathbf{q}'_{\beta} | \langle \chi_{\beta} | G(E + i\varepsilon) | \chi_{\alpha} \rangle | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha}. \quad (6.55)$$

Для развала аналогично находим

$$\begin{aligned}
 S_{0\alpha}(\mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha}; \mathbf{q}_{\alpha}) = \\
 = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i \left(\frac{q_{\alpha}^{\prime 2}}{2M_{\alpha}} + \frac{p_{\alpha}^{\prime 2}}{2\mu_{\alpha}} - E_{\alpha} \right) t} i \varepsilon \langle \mathbf{q}'_{\alpha}, \mathbf{p}'_{\alpha} | G(E_{\alpha} + i\varepsilon) | \chi_{\alpha} \rangle | \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha}.
 \end{aligned}
 \tag{6.56}$$

Причина полученного упрощения заключается в том, что компонента $|\varphi_{\gamma}\rangle$ состояния $\lambda_{\gamma}|\chi_{\gamma}\rangle$, отвечающая континууму, не «выживает» в процессе предельного перехода в соотношениях (6.55) и (6.56). Эта компонента $|\varphi_{\gamma}\rangle$ не дает полюса, который необходим, чтобы получить вклад в S -матрицу (ср. с (2.48) — (2.50)).

Теперь мы покажем, что применение метода квазичастиц к уравнению для резольвенты (2.101a) дает в точности матричные элементы вида

$$\langle \chi_{\beta} | G(z) | \chi_{\alpha} \rangle, \tag{6.57}$$

необходимые для вычисления (6.55). Расцепим данный двухчастичный потенциал v_{γ} на сепарабельную часть v_{γ}^s и несепарабельный остаток v'_{γ}

$$v_{\gamma} = v_{\gamma}^s + v'_{\gamma} = \lambda_{\gamma} |\chi_{\gamma}\rangle \langle \chi_{\gamma}| + v'_{\gamma}. \tag{6.58}$$

Сепарабельный потенциал должен удовлетворять условию (6.53), а остаток v'_{γ} должен быть достаточно слабым, чтобы его можно было трактовать по теории возмущений. Каков точный смысл выражения «достаточно слабый», будет видно в процессе последующего вывода. Для трех частиц мы имеем потенциал

$$V = \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma} = \sum_{\gamma=1}^3 v_{\gamma}^s + \sum_{\gamma=1}^3 v'_{\gamma} = V^s + V', \tag{6.59}$$

который теперь вставляем в резольвентное уравнение (2.101a):

$$G(z) = g_0(z) + g_0(z) V^s G(z) + g_0(z) V' G(z), \tag{6.60}$$

или

$$(1 - g_0(z) V') G(z) = g_0(z) + g_0(z) V^s G(z). \tag{6.61}$$

Допустим, что обратный оператор от $(1 - g_0 V')$ можно вычислить с помощью соответствующего ряда Неймана

$$(1 - g_0(z) V')^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (g_0(z) V')^i. \quad (6.62)$$

Тогда после умножения (6.61) слева на $(1 - g_0 V')^{-1}$ находим

$$G(z) = G'(z) + G'(z) V^s G(z), \quad (6.63)$$

где

$$G'(z) = (1 - g_0(z) V')^{-1} g_0(z). \quad (6.64a)$$

Для остатка резольвенты G' путем алгебраических преобразований находим

$$(z - h_0 - V')^{-1} = G'(z) = g_0(z) + g_0(z) V' G'(z), \quad (6.64б)$$

или

$$G'(z) = g'_\beta(z) + g'_\beta(z) \bar{V}'_\beta G'(z), \quad (6.64в)$$

где

$$g'_\beta(z) = (z - h_0 - v'_\beta)^{-1}. \quad (6.64г)$$

Мы также имеем

$$G'(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_0(z) (V' g_0(z))^i, \quad (6.64д)$$

и

$$g'_\beta(z) = \sum_{i=0}^{\infty} g_0(z) (v'_\beta g_0(z))^i. \quad (6.64е)$$

В ядре уравнения (6.63), в отличие от исходного резольвентного уравнения, явно появляется только сепарабельный потенциал V^s . Остаточный потенциал V' содержится в резольвенте G' . Возьмем теперь матричные элементы от (6.63) между состояниями $\langle \chi_\beta |$ и $| \chi_\alpha \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \chi_\beta | G | \chi_\alpha \rangle &= \\ &= \langle \chi_\beta | G' | \chi_\alpha \rangle + \sum_{\gamma=1}^3 \langle \chi_\beta | G' | \chi_\gamma \rangle \lambda_\gamma \langle \chi_\gamma | G | \chi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Матричные элементы $\langle \chi_\beta | G | \chi_\alpha \rangle$ все еще являются операторами по отношению к состояниям $\langle \mathbf{q}_\beta |$ и $| \mathbf{q}_\alpha \rangle$.

Ядро уравнения (6.65) не компактно из-за δ -функций, содержащихся в операторе $\langle \chi_\beta | G' | \chi_\alpha \rangle$. Это можно увидеть из ряда Неймана для (6.64в):

$$G' = g'_\beta + \sum_{i=1}^{\infty} g'_\beta [(V' - v'_\beta) g'_\beta]^i. \quad (6.66)$$

После взятия матричных элементов между состояниями $\langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta |$ и $| \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle$ это уравнение дает

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta | G' (z) | \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle &= \langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta | g'_\beta (z) | \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta | g'_\beta (z) [(V' - v'_\beta) g'_\beta (z)]^i | \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Оператор $g'_\beta (z)$ действует только в подсистеме β (см. (6.64г)). Поэтому находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta | G' (z) | \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle &= \delta(\mathbf{q}_\beta - \mathbf{q}'_\beta) \langle \chi_\beta | \widehat{g}'_\beta \left(z - \frac{q_\beta^2}{2M_\beta} \right) | \chi_\beta \rangle + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{q}_\beta, \chi_\beta | g'_\beta (z) [(V' - v'_\beta) g'_\beta (z)]^i | \chi_\beta, \mathbf{q}'_\beta \rangle. \end{aligned} \quad (6.68)$$

В бесконечной сумме нет никаких δ -функций, которые могли бы скомпенсировать δ -функцию в первом члене правой части, так как оператор $(V' - v'_\beta)$ действует в той области трехчастичного пространства, которая не затрагивается g'_β .

Несмотря на описанную трудность, из (6.65) можно получить интегральное уравнение с компактным ядром. Нужно лишь перенести член, содержащий δ -функцию, в левую часть уравнения (ср. с преобразованием, которое привело нас к (3.7)!):

$$\begin{aligned} (\lambda_\beta^{-1} - \langle \chi_\beta | g'_\beta | \chi_\beta \rangle) \lambda_\beta \langle \chi_\beta | G | \chi_\alpha \rangle &= \langle \chi_\beta | G' | \chi_\alpha \rangle + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^3 \langle \chi_\beta | G' - \delta_{\beta\gamma} g'_\gamma | \chi_\gamma \rangle \lambda_\gamma \langle \chi_\gamma | G | \chi_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Эта процедура успешна по двум причинам. Во-первых, обратный оператор от

$$\lambda_{\beta}^{-1} - \langle \chi_{\beta} | g'_{\beta}(z) | \chi_{\beta} \rangle \equiv \Delta_{\beta}^{-1}(z) \quad (6.70)$$

легко вычисляется:

$$\langle \mathbf{q}_{\beta} | \Delta(z) | \mathbf{q}'_{\beta} \rangle = \frac{\delta(\mathbf{q}_{\beta} - \mathbf{q}'_{\beta})}{\lambda_{\beta}^{-1} - \langle \chi_{\beta} | \widehat{g}'_{\beta}(z - \mathbf{q}_{\beta}^2/2M_{\beta}) | \chi_{\beta} \rangle}. \quad (6.71)$$

Во-вторых, действие этого некомпактного оператора на компактное ядро уравнения (6.69) снова приводит к компактному ядру. Умножая теперь (6.69) на $\Delta_{\beta}\lambda_{\alpha}$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} &= \Delta_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G' | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^3 \Delta_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G' - \delta_{\beta\gamma} g'_{\beta} | \chi_{\gamma} \rangle \lambda_{\gamma} \langle \chi_{\gamma} | G | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Из этого уравнения с компактным ядром можно вычислить матричные элементы $\lambda_{\beta} \langle \mathbf{q}'_{\beta}, \chi_{\beta} | G | \chi_{\alpha}, \mathbf{q}_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha}$, которые мы ищем. Между этим уравнением и уравнением для двухчастичной резольвенты (2.22а) существует тесная связь, которая делается явной, если перейти к уравнению для следующей величины:

$$\lambda_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} + \delta_{\beta\alpha} \lambda_{\alpha}. \quad (6.73)$$

S-матрица для рассеяния с перестройкой может быть столь же успешно найдена и из величины (6.73), поскольку при выполнении предельных переходов в (6.55) постоянный член исчезает. Добавляя $\delta_{\beta\alpha}\lambda_{\alpha}$ к обеим сторонам равенства (6.72), после короткого вычисления находим

$$\begin{aligned} \lambda_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G(z) | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} + \delta_{\beta\alpha} \lambda_{\alpha} &= \delta_{\beta\alpha} \Delta_{\beta}(z) + \\ &+ \sum_{\gamma=1}^3 \Delta_{\beta}(z) \langle \chi_{\beta} | G'(z) - \delta_{\beta\gamma} g'_{\beta}(z) | \chi_{\gamma} \rangle \{ \lambda_{\gamma} \langle \chi_{\gamma} | G(z) | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} + \\ &+ \delta_{\gamma\alpha} \lambda_{\alpha} \}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Вводя определения *)

$$(\mathbf{G}(z))_{\beta\alpha} = \lambda_{\beta} \langle \chi_{\beta} | G(z) | \chi_{\alpha} \rangle \lambda_{\alpha} + \delta_{\beta\alpha} \lambda_{\alpha},$$

$$(\mathbf{G}_0(z))_{\beta\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \Delta_{\beta}(z), \quad (6.75)$$

*) Эти обозначения призваны напоминать нам «резольвенту» $(\mathbf{G})_{\beta\alpha}$ уравнения (3.73).

$$(\mathbf{V}(z))_{\beta\alpha} = \langle \chi_\beta | G'(z) - \delta_{\beta\alpha} g'_\beta(z) | \chi_\alpha \rangle \quad (6.75)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3),$$

найдем

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}_0(z) + \mathbf{G}_0(z) \mathbf{V}(z) \mathbf{G}(z). \quad (6.76)$$

Это и есть АГС-уравнение для резольвенты [93], которое является эффективным двухчастичным уравнением. Не только все входящие в него операторы действуют в двухчастичном пространстве (что важно для его численного решения!), но оно имеет ту же математическую форму, что и (2.22а). Это последнее обстоятельство представляет большую эвристическую ценность, поскольку можно просто перенести сюда рассуждения раздела 1.5 главы 2, которые позволяют нам выполнить предельные переходы в S -матрице. По аналогии с (2.46) определим T -оператор

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{V}(z) + \mathbf{V}(z) \mathbf{G}(z) \mathbf{V}(z) \quad (6.77)$$

и с помощью (6.76) найдем

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{G}_0(z) + \mathbf{G}_0(z) \mathbf{T}(z) \mathbf{G}_0(z). \quad (6.78)$$

Поскольку, как указано выше, постоянный член, входящий в (6.73), не вносит вклада в S -матрицу, то можно написать

$$S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t} i\varepsilon \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}(E_\alpha + i\varepsilon))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle, \quad (6.79)$$

или, используя (6.78),

$$S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t} i\varepsilon \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}_0(E_\alpha + i\varepsilon))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle +$$

$$+ \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t} i\varepsilon \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}_0 \mathbf{T} \mathbf{G}_0)_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle. \quad (6.80)$$

Чтобы выполнить предельные переходы, необходимо исследовать полюсное поведение $\mathbf{G}_0(z)$. Аналогия подсказывает нам искать полюс в точке

$$z - \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} = E_\beta^B. \quad (6.81)$$

Из уравнений (6.75) и (6.71) находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}_0(z))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle &= \\ &= \delta_{\beta\alpha} \delta(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\alpha) \left\{ \lambda_\beta^{-1} - \langle \chi_\beta | \widehat{g}'_\beta \left(z - \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} \right) | \chi_\beta \rangle \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Используя теперь (6.53) и соотношение (6.29)

$$\langle \psi_\beta | = \langle \chi_\beta | \widehat{g}'_\beta(E_\beta^B),$$

для двухчастичного связанного состояния, которое было выведено в последнем разделе методом квазичастиц, находим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}_0(z))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle &= \\ &= \delta_{\beta\alpha} \delta(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\alpha) \left\{ \langle \chi_\beta | \widehat{g}'_\beta(E_\beta^B) - g'_\beta \left(z - \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} \right) | \chi_\beta \rangle \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (6.83)$$

и с помощью (2.20а) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{G}_0(z))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle &= \delta_{\beta\alpha} \delta(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\alpha) \times \\ &\times \left\{ \left(z - \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} - E_\beta^B \right) \langle \chi_\beta | \widehat{g}'_\beta(E_\beta^B) \widehat{g}'_\beta \left(z - \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} \right) | \chi_\beta \rangle \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Как и ожидалось, здесь имеется полюс $z = E_\beta^B + q_\beta'^2/2M_\beta$. Теперь можно использовать равенство (2.50), чтобы выполнить предельные переходы в (6.80), после чего получаем

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha}(\mathbf{q}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) &= \delta_{\beta\alpha} \delta(\mathbf{q}'_\beta - \mathbf{q}_\alpha) - \\ &- 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) \langle \mathbf{q}'_\beta | (\mathbf{T}(E_\alpha + i0))_{\beta\alpha} | \mathbf{q}_\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Поскольку S -матрица непосредственно находится через матричные элементы \mathbf{T} , нет надобности сначала вычислять матрицу \mathbf{G} из уравнения (6.76) и затем переходить к оператору \mathbf{T} с помощью (6.77). Матрицу \mathbf{T} можно найти непосредственно. Из (6.76) и (6.77) по аналогии с соотношением (2.56а) получаем

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{V}(z) + \mathbf{V}(z) \mathbf{G}_0(z) \mathbf{T}(z). \quad (6.86)$$

Возникает вопрос, можно ли таким же образом найти амплитуду развала. Для построения S -матрицы (6.56) нам необходим оператор $G|\chi_\alpha\rangle$, тогда как уравнение (6.76) может дать только операторную матрицу $\langle\chi_\beta|G|\chi_\alpha\rangle$. Тем не менее эта матрица содержит достаточно информации для нахождения оператора $G|\chi_\alpha\rangle$. С этой целью мы используем выражение (6.63), которое можно записать в виде

$$G = \sum_{\gamma=1}^3 G' (|\chi_\gamma\rangle \lambda_\gamma \langle\chi_\gamma| G + \delta_{\gamma\alpha}). \quad (6.87)$$

Умножая справа на $|\chi_\alpha\rangle\lambda_\alpha$, найдем *)

$$\begin{aligned} G|\chi_\alpha\rangle\lambda_\alpha &= \sum_{\gamma=1}^3 G' |\chi_\gamma\rangle (\lambda_\gamma \langle\chi_\gamma| G|\chi_\alpha\rangle\lambda_\alpha + \delta_{\gamma\alpha}\lambda_\alpha) = \\ &= \sum_{\gamma=1}^3 G' |\chi_\gamma\rangle (G)_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Мы хотим и далее придерживаться наших символических обозначений для операторных матриц и определим векторы ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$(\mathfrak{G}(z))_\alpha \equiv g_0^{-1}(z) G(z) |\chi_\alpha\rangle\lambda_\alpha \quad (6.89a)$$

и

$$\mathfrak{M}(z)_\alpha \equiv g_0^{-1}(z) G'(z) |\chi_\alpha\rangle. \quad (6.89b)$$

Уравнение (6.88) теперь запишется в виде

$$g_0 \mathfrak{G} = g_0 \mathfrak{M} G. \quad (6.90)$$

Множитель g_0 был отщеплен с учетом предельного перехода, который должен быть выполнен в уравнении (6.56). Используя (6.78), можно записать:

$$g_0 \mathfrak{G} = g_0 \mathfrak{M} \{1 + G_0 T\} G_0 = g_0 \mathfrak{T} G_0, \quad (6.91)$$

где по определению

$$\mathfrak{T}(z) \equiv \mathfrak{M}(z) + \mathfrak{M}(z) \mathfrak{G}_0(z) T(z).$$

*) Таким же образом можно получить, конечно, и оператор $\lambda_\gamma \langle\chi_\gamma|G$ и, используя далее (6.63), найти полную резольвенту G , которая может быть необходима для описания переходов из трехчастичного континуума в трехчастичный континуум.

В этом выражении оператор \mathbf{T} входит вне массовой поверхности, а произведение $\mathfrak{W}\mathbf{G}_0\mathbf{T}$ вычисляется путем введения промежуточных состояний $|\mathbf{q}_\tau\rangle\langle\mathbf{q}_\tau|$ с последующим интегрированием по всем импульсам \mathbf{q}_τ . Если выражение (6.91) подставить в (6.56), то полюсное поведение g_0 и \mathbf{G}_0 позволяет выполнить предельные переходы, и тогда для S -матрицы находим

$$S_{0\alpha}(\mathbf{q}'_\beta, \mathbf{p}'_\beta; \mathbf{q}_\alpha) = -2\pi i \delta\left(\frac{p_\beta'^2}{2\mu_\beta} + \frac{q_\beta'^2}{2M_\beta} - E_\alpha\right) \times \\ \times \langle \mathbf{q}'_\beta, \mathbf{p}'_\beta | (\mathfrak{F}(E_\alpha + i0))_\alpha | \mathbf{q}_\alpha \rangle. \quad (6.92)$$

Таким образом, стало возможным свести общую задачу трех тел к эффективной задаче двух тел (см. (6.86)). Эффективный потенциал $\mathbf{V}(z)$, определяемый заданными двухчастичными потенциалами (см. (6.64а)–(6.64е) и (6.75)), описывает взаимодействие между частицей и квазичастицей (которая представляет собой пару частиц в определенном состоянии, задаваемом принятым форм-фактором). «Пропагатор» $\mathbf{G}_0(z)$ описывает свободное относительное движение частицы и квазичастицы, а взятая на массовой поверхности T -матрица $\mathbf{T}(z)$ описывает рассеяние (упругое или с перестройкой) этих двух «частиц». До сих пор в наших результатах не было ничего удивительного, поскольку фактически у нас была задача двухчастичного рассеяния, хотя одна из частиц была составной. Интересно, однако, то, что даже реакция развала, являющаяся настоящей задачей трех тел, также может быть рассмотрена как эффективная задача двух тел. Чтобы сделать это более ясным, введем графическое представление наших операторов [23]. Здесь уместно воспроизвести аргументацию, относящуюся к рис. 15 на стр. 98.

Движение свободной частицы в состоянии с определенным импульсом будем изображать простой линией —, а движение центра масс связанного состояния — двойной линией =. Форм-фактор изобразим полукругом, $|\chi\rangle \rightarrow \rightarrow \mathcal{D}$ ($\langle\chi| \rightarrow \mathcal{D}$), а остаточный потенциал v' изобразим волнистой линией}. Падающая волна будет стоять справа, так же как и в уравнениях. Таким образом, мы получаем для эффективного потенциала (равенство (6.75)) с $\beta \neq \alpha$ графическое представление, приведенное на

рис. 33. Если G' вычисляется с помощью своего ряда Неймана, то приходим к рис. 34. Первый график в правой части рис. 34 иллюстрирует обменный процесс в сепарабельной модели (рис. 15), тогда как следующие графики представляют собой поправки, которые следует добавить,

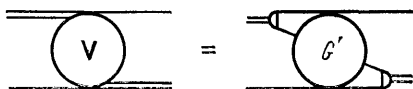


Рис. 33. Графическое представление эффективного потенциала в равенстве (6.75).

чтобы учесть несепарабельный остаток v' нашего потенциала.

Оператор \mathfrak{X} , из которого получают матричные элементы S -матрицы, описывающей развал, представлен на

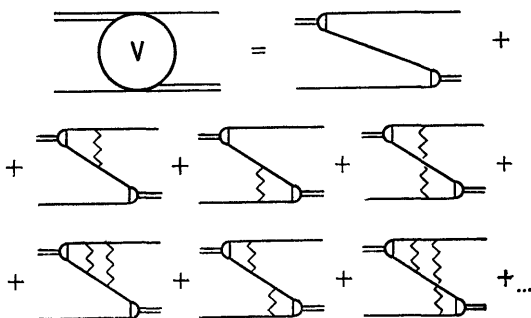


Рис. 34. Графическое представление эффективного потенциала в равенстве (6.75) с оператором G' , разложенным в ряд Неймана (см. соотношение (6.64д)).

рис. 35, где \mathfrak{W} , соответствующий (6.89б) и (6.64д), показан на рис. 36. На массовой поверхности первый график для эффективного взаимодействия \mathfrak{W} должен обращаться в нуль, так как он описывает развал без взаимодействия. Поэтому приходим к графическому представлению \mathfrak{X} , показанному на рис. 37.

Это графическое представление подсказывает следующую интерпретацию. В сепарабельной модели (график (а)) сначала получается двухчастичное состояние с положительной энергией (отмечено звездочкой), которое

затем распадается. Этот механизм делает ясным вывод, что развал действительно можно трактовать как эффективный двухчастичный процесс. Нам необходима лишь эффективная T -матрица \mathbf{T} вне массовой поверхности из

$$\Sigma = \mathbb{W} + \mathbb{W} \mathbf{T}$$

Рис. 35. Графическое представление оператора развала (6.91).

$$\mathbb{W} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

Рис. 36. Графическое представление «потенциала» \mathbb{W} , даваемого (6.89б).

(6.86). Квазичастичная модель дает поправки (б), (в), (г) и т. д. Кроме того, существует совершенно отличный процесс (графики (1), (2) и т. д.), в котором одна из связанных частиц не принимает участия во взаимодействии,

$$\Sigma = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots$$

$$+ \text{---} \mathbf{T} + \text{---} \mathbf{T} + \dots$$

$$+ \text{---} \mathbf{T} + \text{---} \mathbf{T} + \dots$$

Рис. 37. Графическое представление оператора развала (6.91), полученное посредством комбинации рис. 35 и 36.

за исключением взаимодействия со своим партнером в связанном состоянии. Развал вызывается остаточным взаимодействием падающей свободной частицы с одной из частиц связанного состояния. Такой процесс связан с «моделью зрителя» («spectator model»), т. е. «наблю-

дателя», которая уже много лет используется для описания развала при высоких энергиях. В настоящем описании модель спектатора следует из строгой теории и конкурирует с моделью взаимодействия в конечном состоянии (графики (а), (б), (в) и т. д.).

Остается показать, при каких условиях остаточные резольвенты G' и g_β могут быть найдены с помощью быстро сходящихся рядов. Другого способа их вычисления не существует, поскольку точное решение определяющих их интегральных уравнений (6.64 б), (6.64 в) было бы таким же трудным, как и точное решение исходного уравнения для резольвенты G : в обоих случаях ядра не компактны.

Остаточную резольвенту G' можно вычислить с помощью итераций, если операторная норма ядра уравнения (6.64 б) меньше единицы:

$$\|g_0(z) V'\| < 1. \quad (6.93)$$

Вейнберг [7] нашел для этой нормы оценку

$$\|g_0(z) V'\| < \sum_{\gamma=1}^3 \sigma_\gamma(z), \quad (6.94)$$

где функция $\sigma_\gamma(z)$ представляет собой верхнюю границу нормы Шмидта (2.28) оператора $\hat{g}_0 v'_\gamma$,

$$\|\hat{g}_0(z - E) v'_\gamma\|_S \leq \sigma_\gamma(z), \quad (6.95a)$$

для всех $E \geq 0$.

Норма (6.94) не может быть связана с нормой Шмидта для ядер подсистем, взятых лишь при одной энергии. При данной трехчастичной энергии z взаимодействие в подсистеме происходит при всех энергиях E_γ , удовлетворяющих условию $-\infty < E_\gamma \leq \text{Re } z$. Для действительных $z \geq 0$ норма Шмидта из (6.95a) не существует (ср. с (2.30)). Соотношение (6.95a) тогда можно заменить на условие

$$|\eta'_\gamma(z - E)| \leq \sigma_\gamma(z). \quad (6.95б)$$

Здесь η'_γ — наибольшее собственное значение остаточного ядра $\hat{g}_0(z - E) v'_\gamma$ (ср. с (6.16)). Согласно оценке (6.94) ряд Неймана для G' не обязательно сходится, если сходится ряд Неймана для g'_γ . Для того чтобы удовлетворить условию (6.93), может оказаться необходимым отще-

пить в соотношении (6.58) более чем один сепарабельный член даже тогда, когда имеется всего одно двухчастичное связанное состояние. При наличии нескольких связанных состояний в каждой подсистеме мы, очевидно, должны использовать несколько сепарабельных членов.

При введении большего числа членов сепарабельного потенциала общая форма уравнений не меняется. Растет лишь количество матричных элементов

$$\lambda_{\beta i} \langle \chi_{\beta i} | G(z) | \chi_{\gamma j} \rangle \lambda_{\gamma j}, \quad (6.96)$$

и соответственно больше будет связанных уравнений. Условия (6.53) принимают вид

$$\delta_{ij} \lambda_{\gamma i}^{-1} = \langle \psi_{\gamma i} | \chi_{\gamma j} \rangle. \quad (6.97)$$

Это означает, что все форм-факторы, которым не отвечают связанные состояния, должны быть ортогональны к связанным состояниям. Матричные элементы (6.96), содержащие такие форм-факторы, не дают прямого вклада в ту часть S -матрицы, которая отвечает перестройке, точно так же как не дают прямого вклада компоненты $|\varphi_i\rangle$, стоящие в (6.54) и отвечающие континууму. Однако эти компоненты через их связь в интегральном уравнении оказывают влияние на те матричные элементы, которые обязательно дают вклад в S -матрицу. Матричные элементы (6.96) с форм-фактором, отвечающим континууму, дают прямой вклад в развальную часть S -матрицы. При условии (6.97) соотношения (6.76) — (6.93) можно обобщить так, чтобы они стали справедливыми для произвольного числа форм-факторов. Индексы β следует при этом заменить на пару индексов (β, i) , где i означает i -й форм-фактор подсистемы β . Это обобщение включает в себя определенный метод сепарабельного разложения, поскольку мы можем ввести такое количество форм-факторов, какое необходимо, чтобы выполнилось условие

$$\|g_0 V'\| \leq 1. \quad (6.98)$$

Остаточным потенциалом V' тогда можно вовсе пренебречь. Однако на практике из-за ограничений в производительности компьютера желательно иметь небольшое число сепарабельных членов и учитывать более тонкие детали потенциала с помощью первых членов ряда Неймана.

3.3. Практические вычисления с помощью квазичастичного метода. Ниже мы рассмотрим применение метода квазичастиц к системе из трех одинаковых бозонов. В качестве взаимодействия выберем потенциал Юкавы

$$v(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

или

$$v(p, p') = \frac{g}{2\pi^2[(p - p')^2 + \mu^2]}. \quad (6.99)$$

Затем нам необходим сепарабельный потенциал, который приводит к остаточному потенциалу V' (см. (6.58)), достаточно слабому, чтобы его можно было в хорошем приближении учесть с помощью нескольких первых членов ряда Неймана (6.64 д). Альт, Грассбергер и Сандхас [94] выбрали с этой целью потенциал Ямагучи (5.31). Параметры этого потенциала Ямагучи были подогнаны к двухчастичной энергии связи и к длине рассеяния юкавского потенциала (6.99) с $\mu = 1$. В эффективном потенциале V (см. (6.75)) все члены ряда Неймана для G' , имеющие порядок по V' выше первого, были отброшены. Это приближение называется «первым квазиборновским приближением» (1.КБП). В численном расчете, по всей видимости, очень трудно учесть члены более высокого порядка по V' , так как произведения операторов вида $g_0(V'g_0)^t$ становятся интегралами высокой кратности.

Для одинаковых частиц, согласно разделу 2.3 главы 5 и равенству (6.75), эффективный потенциал приобретает вид

$$V = V_{\alpha\alpha} + 2V_{\beta\neq\alpha} = \langle \chi_1 | G' - g'_1 | \chi_1 \rangle + 2 \langle \chi_2 | G' | \chi_1 \rangle. \quad (6.100)$$

Остаточные резольвенты в 1.КБП (см. (6.64 д), (6.64 е))

$$G' \approx g_0 + g_0 \sum_{\gamma=1}^3 v'_\gamma g_0 \quad (6.101a)$$

и

$$g'_\beta \approx g_0 + g_0 v'_\beta g_0. \quad (6.101b)$$

Вводя эти величины в (6.100), находим

$$V = 2 \{ \langle \chi_2 | g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 v'_2 g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 v'_1 g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_2 | g_0 v'_3 g_0 | \chi_1 \rangle + \langle \chi_1 | g_0 v'_2 g_0 | \chi_1 \rangle \}. \quad (6.102)$$

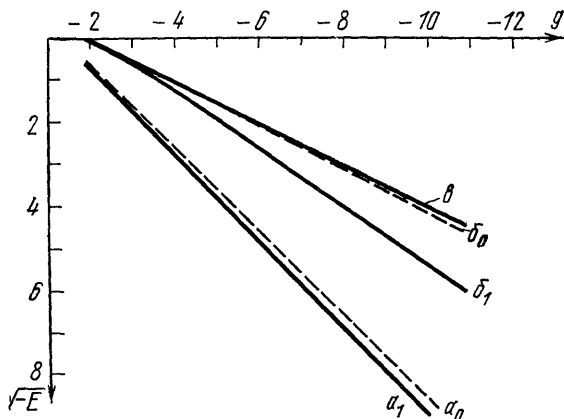


Рис. 38. Квадратный корень из энергии связи для системы трех бозонов (в единицах $\hbar = m = 1$) в зависимости от юкавской константы связи. Штриховая линия — нулевое квазиборновское приближение; сплошная — первое квазиборновское приближение; индекс a относится к основному состоянию, индекс b — к первому возбужденному; сплошная линия ϵ указывает двухчастичное основное состояние (Е. Альт с сотр. [94]).

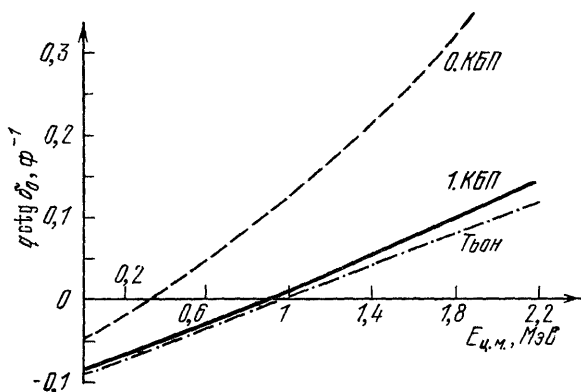


Рис. 39. Графики зависимости $q \operatorname{ctg} \delta_0$ от энергии в системе центра масс для юкавской константы связи $g = -2,373$ в нулевом и первом квазиборновском приближениях по сравнению с результатом Тьона (Е. Альт с сотр. [94]).

Первый член представляет собой чисто сепарабельное взаимодействие ($v' = 0$); назовем его нулевым квазиборновским приближением (0.КБП). Важность несепарабельной части потенциала можно, таким образом, проверить, сравнивая результаты, полученные в нулевом и первом квазиборновских приближениях. Такое сравнение показано на рис. 38 для трехчастичных энергий связи. Разница между двумя приближениями не очень велика для основного состояния. Положение совершенно меняется для возбужденного состояния и для случая упругого рассеяния (рис. 39). Как можно увидеть из рис. 39, различие между 0.КБП и 1.КБП очень велико, и лишь 1.КБП согласуется с решением фаддеевских уравнений, найденных Тьоном [95]. Это последнее решение было получено с помощью падé-приближения, которое будет обсуждаться ниже в главе 7. Различие дифференциальных сечений для 0.КБП и 1.КБП (рис. 40) вполне заметно. Так как сепарабельное приближение соответствует обменному процессу (см. стр. 112), то 0.КБП дает отчетливый максимум главным образом в направлении назад, между тем как 1.КБП имеет также сильный максимум и в направлении вперед. Выше порога развала в 1.КБП по сравнению с 0.КБП возникают дополнительные осложнения, обязанные появлению сингулярного оператора $v'g_0$ [96]. Также и в этом случае результаты указывают на довольно большое отличие 1.КБП от 0.КБП (рис. 41 и 42). Дифференциальные сечения развала пока не были рассчитаны. Здесь можно ожидать некоторой информации, касающейся конкурирующих процессов взаимодействия в конечном состоянии и модели спектратора.

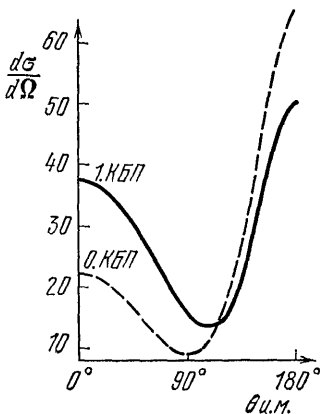


Рис. 40. Дифференциальное сечение упругого рассеяния при $q^2 = 0,06$ (единицы: $\hbar = m = 1$) для юкавской константы связи $g = -2,373$ в нулевом и первом квазиборновских приближениях (Е. Альт с сотр. [94]).

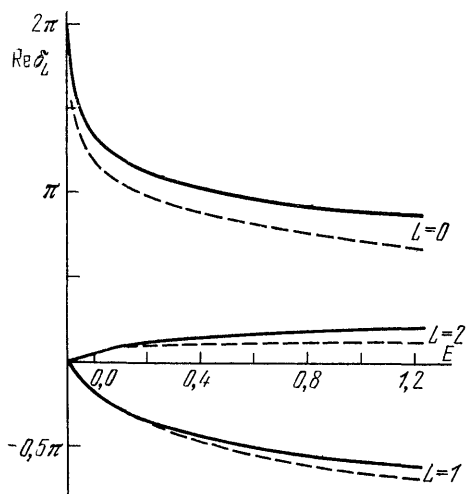


Рис. 41. Действительная часть фазового сдвига δ_L в зависимости от полной энергии E (единицы: $\hbar = m = 1$). Штриховая кривая — нулевое квазиборновское приближение, сплошная линия — первое квазиборновское приближение (X. Цигельман [96]).

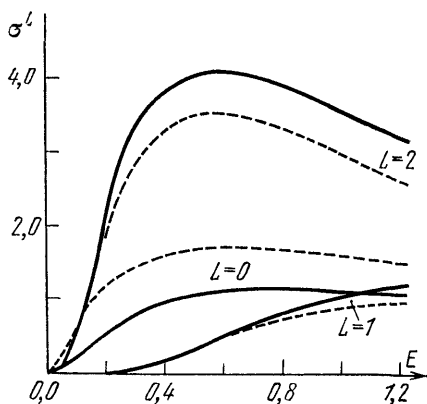


Рис. 42. Энергетическая зависимость полного сечения развала σ^L (единицы: $\hbar = m = 1$). Штриховая кривая — нулевое квазиборновское приближение, сплошная линия — первое квазиборновское приближение (X. Цигельман [96]).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА
С ПОМОЩЬЮ ПАДЁ-ПРИБЛИЖЕНИЯ

1. Метод падё-приближения

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности $z = 0$. Ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} z^v f_v \quad (7.1)$$

сходится внутри круга, охватывающего точку $z = 0$ и проходящего через ближайшую к этой точке сингулярность $f(z)$.

Вне этого круга функция $f(z)$ не может быть вычислена посредством своего ряда Тейлора, хотя она однозначно и определяется коэффициентами f_v .

Падё-аппроксимация дает возможность приближенно продолжить функцию $f(z)$ в область вне круга сходимости, используя информацию, содержащуюся в конечном числе коэффициентов f_v .

Функция $f(z)$ при этом аппроксимируется рациональной функцией вида

$$f(z) \approx f^{[N, M]}(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} = \frac{\sum_{v=0}^M P_{M, v} z^v}{\sum_{v=0}^N Q_{N, v} z^v} \quad (7.2)$$

так, чтобы $N + M$ низших производных от $f(z)$ и от $[N, M]$ -аппроксиманта совпадали в точке $z = 0$. Это условие приводит к системе линейных уравнений для коэффициентов $P_{M, v}$ и $Q_{N, v}$. Решение этой системы по правилу Крамера дает падё-аппроксиманты, выраженные через определители (см. (7.3), где $f_v \equiv 0$ для $v < 0$).

Аппроксимант $[N, M]$ использует информацию, содержащуюся в коэффициентах ряда Тейлора до порядка $N + M$ включительно. Преимущество указанного подхода заклю-

чается в том, что он позволяет аппроксимировать сингулярности и разрывы функции $f(z)$ нулями $Q_N(z)$

$$f^{[N, M]}(z) = \frac{\begin{vmatrix} f_{M-N+1} & f_{M-N+2} & \cdots & f_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_M & f_{M+1} & \cdots & f_{M+N} \\ \sum_{j=N}^M f_{j-N} z^j & \sum_{j=N-1}^M f_{j-N+1} z^j & \cdots & \sum_{j=0}^M f_j z^j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{M-N+1} & f_{M-N+2} & \cdots & f_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_M & f_{M+1} & \cdots & f_{M+N} \\ z^N & z^{N-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}. \quad (7.3)$$

Для $N = M = 1$ находим

$$f^{[1, 1]}(z) = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_0 z & f_0 + f_1 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ z & 1 \end{vmatrix}} = \frac{f_0 f_1 + f_1^2 z - f_0 f_2 z}{f_1 - f_2 z}. \quad (7.4)$$

Рассмотрим $[1, 1]$ -аппроксимант для функции

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} z^v \sim f_v = 1.$$

Тогда

$$f^{[1, 1]}(z) = (1 - z)^{-1}.$$

В этом простом примере первый паде-аппроксимант точно воспроизводит ряд Тейлора. Для

$$f(z) = \ln(1 + z) = - \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{z^v}{v}$$

имеем

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = -1/2$$

и

$$f^{[1, 1]}(z) = \frac{z}{1 + \frac{z}{2}}.$$

Первый падё-аппроксимант даёт лучшее приближение внутри круга сходимости $|z| < 1$, чем три первых члена тейлоровского ряда и даже довольно хорошее приближение вне этого круга, что можно усмотреть из следующей таблицы.

z	Ряд Тейлора до $\nu=2$	Падё-аппроксимант $f_{[1,1]}(z)$	Точные значения $\ln(1+z)$
1	0,5	0,67	0,69
2	0	1,00	1,10

2. Падё-приближение и интегральные уравнения

Здесь мы хотим применить технику падё-приближения для решения интегральных уравнений путем использования информации, содержащейся в соответствующих рядах Неймана (4.16) даже тогда, когда эти ряды не сходятся. Чтобы сделать это, нам нужно связать решение нашего интегрального уравнения (4.14)

$$f = h + Kf \quad (7.5)$$

с некоторой аналитической функцией. Мы получим такую функцию, введя комплексный параметр λ ,

$$f(\lambda) = h + \lambda Kf(\lambda). \quad (7.6)$$

Решение f зависит, таким образом, от комплексного параметра λ (мы опускаем в наших обозначениях зависимость от переменных интегрирования). Согласно теории интегральных уравнений [7, 22, 35, 97] оно является мероморфной функцией λ . Пока ядро K компактно, сингулярности могут иметь предельную точку только на бесконечности. В окрестности начала $\lambda = 0$ функция $f(\lambda)$ аналитична и может быть вычислена посредством своего ряда Тейлора

$$f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K^{\nu} h. \quad (7.7)$$

При $\lambda = 1$ ряд Тейлора будет совпадать с рядом Неймана уравнения (7.5), и мы видим, что ряд Неймана не сходится, если $f(\lambda)$ имеет сингулярность внутри единичного круга $|\lambda| \leq 1$.

Сингулярности $f(\lambda)$ связаны с собственными значениями (4.17а) ядра соотношением

$$\lambda_\nu = \eta_\nu^{-1}. \quad (7.8)$$

В двухчастичном случае величины λ_ν суть константы связи, приводящие к нормируемым решениям уравнения Шредингера при заданных энергиях (см. стр. 128). Ряд Неймана не сходится при некоторых интересующих нас энергиях, а именно, в окрестности связанных и антисвязанных состояний и вблизи резонансов (ср. с (5.28)). Однако при этих энергиях для нахождения решения нашего интегрального уравнения можно использовать падё-приближение. В частном случае вырожденного ядра ранга N $[N, N]$ -аппроксимант приводит к точному решению, так как это решение будет рациональной функцией порядка N . Таким образом, сходимость падё-приближений становится весьма вероятной, поскольку каждое компактное ядро можно аппроксимировать рядом вырожденных ядер. Тем не менее на многие вопросы, касающиеся сходимости, пока нельзя дать ответа. Например, до сих пор нет возможности доказать равномерную сходимость, так как предельные положения полюсов аппроксимантов неизвестны; $[N, M]$ -аппроксимант имеет N полюсов, обязанных нулям знаменателя Q_N , и не все они должны быть связаны с полюсами истинного решения.

3. Падё-приближение и уравнения Фаддеева

Запишем уравнения Фаддеева (3.10) в виде

$$\mathcal{T}(\lambda) = t + \lambda \mathcal{K}_F \mathcal{T}(\lambda), \quad (7.9)$$

где мы ввели, согласно предыдущему разделу 2, комплексный параметр λ . Решение $\mathcal{T}(\lambda)$ является мероморфной функцией λ (см. стр. 52), и поэтому аналитическое продолжение к точке $\lambda = 1$ можно сделать посредством падё-приближения.

Трудность метода заключается в вычислении матричных элементов от операторов $t_i g_0 t_j \dots g_0 t_n$. Эти матричные элементы являются интегралами высокой кратности, а подынтегральные функции могут стать сингулярными из-за полюсов g_0 и t_i (см. стр. 51). Тем не менее вычисления оказываются намного проще, чем прямое решение

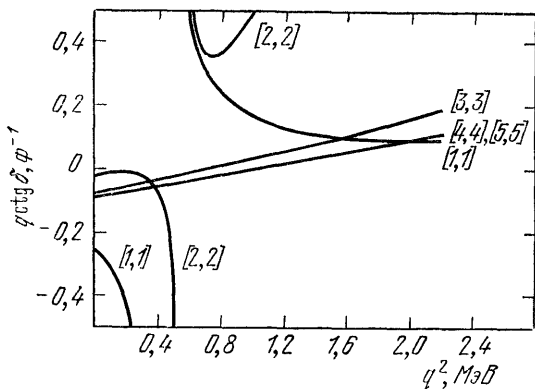


Рис. 43. Падё-аппроксиманты различных порядков для $q \operatorname{ctg} \delta_0$ (Дж. Тьон [95]).

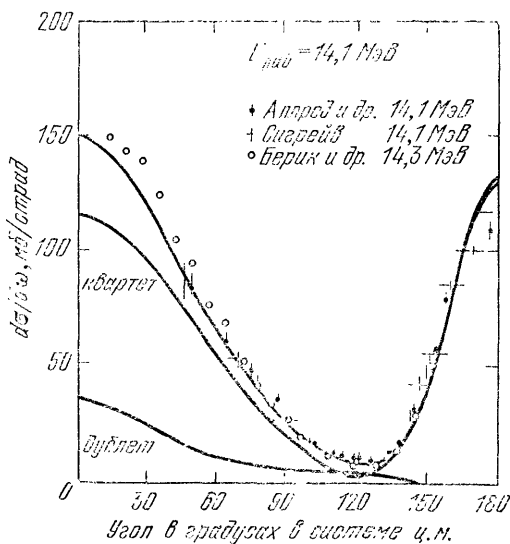


Рис. 44. Экспериментальное и теоретическое дифференциальные сечения упругого нейтрон-дейтронного рассеяния (В. Клоэ и Дж. Тьон [98]).

сингулярных многомерных уравнений Фаддеева. Более того, падё-аппроксиманты сходятся очень быстро, как можно увидеть из рис. 43. В указанном примере вычислялось упругое рассеяние частицы на двухчастичном связанном состоянии [95]; см. также рис. 39. Аппроксиманты [4, 4] и [5, 5] дают почти совпадающие результаты.

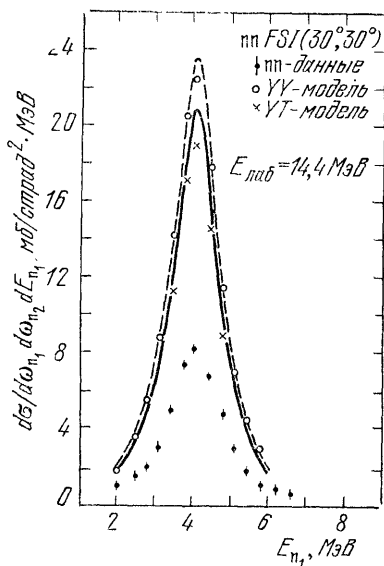


Рис. 45. Экспериментальные и теоретические дифференциальные сечения реакции развала $p + d \rightarrow 2p + p$; схема эксперимента такая же, как на рис. 2 в работе В. Клоэ и Дж. Тьона [82]. Сплошная кривая соответствует результатам для локального потенциала I—III, а штриховая линия — для локального потенциала I—IV из работы [76]. Экспериментальные значения, так же как и результаты для различных сепарабельных моделей, взяты из работы [81].

Аппроксиманты [1, 1] и [2, 2] приводят к ложным резонансам, возникающим благодаря сингулярностям, отмеченным выше и не имеющим отношения к истинному решению. В большинстве расчетов этого рода учитывалось лишь двухчастичное взаимодействие с $l = 0$ с целью уменьшить машинное время. Только в одном вычислении было учтено взаимодействие с $l = 2$.

Рис. 44 показывает дифференциальное сечение нейтрон-дейтронного рассеяния при энергии 14,1 МэВ (лаб.). Это вычисление было проделано с зависящим от спина локальным потенциалом, включающим также и отталкивание [98]. Согласие с экспериментом очень хорошее. В особенности приличным является согласие в направлении вперед. В этой области расчеты с сепарабельным потенциалом дают дифференциальное сечение, заниженное на 25%. На рис. 44 можно также видеть, насколько велик вклад квартетного канала, что уже было отмечено на стр. 122.

С тем же потенциалом [82] было также рассчитано дифференциальное сечение развала. Разница между этим результатом и результатом Кахилла с сотрудниками [81], найденным с сепарабельным потенциалом, мала. Форма экспериментального сечения воспроизводится довольно хорошо (рис. 45). Однако по абсолютной величине теоретические кривые идут на 50% выше.

Приближенное решение уравнения Шредингера можно найти также и с помощью вариационных методов. Для связанных состояний эти методы, по-видимому, более эффективны, чем интегральные уравнения, ибо довольно точные результаты расчета энергии связи трития с реалистическими потенциалами известны уже давно. Вариационные методы были также с успехом применены к упругому и к многоканальному рассеянию. Эти методы были предложены и для трехчастичного развала, однако до сих пор никаких впечатляющих результатов получено не было. Судя по полученным результатам, можно думать, что метод интегральных уравнений неоправданно сложен для задач с простыми граничными условиями, как это имеет место при расчете связанных состояний, в то время как для реакций развала применение вариационных методов сталкивается с трудностями, обусловленными сложными граничными условиями.

В этой главе мы обсудим вариационные методы для связанных состояний, для упругого рассеяния и для рассеяния с перестройкой, а также для реакции развала. В конце мы изложим перспективный вариационный метод для решения уравнений Фаддеева.

1. Вариационные методы для связанных состояний

Здесь имеются в основном два метода: вариационный принцип Релея — Ритца для основного состояния и принцип Хиллерааса для дискретного спектра.

Граничное условие для задачи на связанные состояния является очень простым. Требуется лишь, чтобы волновая функция была нормируемой; это означает, что она должна достаточно быстро убывать при больших расстояниях между частицами.

Вариационный принцип Ритца утверждает, что математическое ожидание от гамильтонова оператора H с

произвольной нормированной волновой функцией $|\psi\rangle$ есть верхняя граница \bar{E}_0 для энергии основного состояния E_0

$$E_0 \leq \bar{E}_0 = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \quad (8.1)$$

Это утверждение легко проверить путем разложения $|\psi\rangle$ по нормированным собственным состояниям H :

$$|\psi\rangle = \sum_{(\nu)} a_{\nu} |\varphi_{\nu}\rangle. \quad (8.2)$$

Условие нормировки имеет вид

$$\sum_{(\nu)} |a_{\nu}|^2 = 1, \quad (8.3)$$

и математическое ожидание от гамильтониана становится равным

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{(\nu)} |a_{\nu}|^2 E_{\nu} \geq \sum_{(\nu)} |a_{\nu}|^2 E_0 = E_0. \quad (8.4)$$

Принцип Ритца особенно подходит для вариации по нелинейным параметрам. Используя интуицию и физические соображения, можно выбрать такую пробную функцию, которая содержит небольшое число эффективных нелинейных параметров таких, например, как ширину и константу асимптотического убывания двухчастичных корреляционных функций. Затем с такой пробной функцией вычисляется значение математического ожидания от гамильтониана, и параметры варьируются либо вручную, либо с помощью программы поиска до достижения наименьшего значения ожидания в пространстве параметров. Для энергии связи трития с зависящим от спина экспоненциальным потенциалом необходимо, например, шесть параметров, чтобы получить значение энергии связи, отличающейся меньше чем на 0,2 МэВ от точного значения, равного примерно 7,9 МэВ [99].

Как можно видеть из соотношения (8.4), принцип Ритца можно применить и для возбужденных состояний в том случае, когда имеется возможность сконструировать пробные функции, ортогональные всем собственным функциям нижележащих состояний. Практически это

возможно лишь тогда, когда возбужденное состояние отличается хорошими квантовыми числами от всех нижележащих состояний.

Нижнюю границу E_0 величины E_0 можно вычислить по формуле Темпла [100]. Эта формула, в дополнение к величине ожидания гамильтониана, содержит ожидание от квадрата гамильтониана и энергию E_1 первого возбужденного состояния. В сокращенном виде (опуская нормированную пробную функцию ψ) ее можно записать так:

$$E_0 \geq \underline{E}_0 = \frac{\langle H^2 \rangle - E_1 \langle H \rangle}{\langle H \rangle - E_1}. \quad (8.5)$$

Эту формулу также легко проверить, используя разложение (8.2) и условие (8.3).

Энергия первого возбужденного состояния E_1 (с теми же квантовыми числами, что и для основного состояния!) известна обычно совсем не так хорошо, как энергия основного состояния. Однако неравенство (8.5) остается справедливым и в том случае, когда вместо E_1 используется ее оценка, которая меньше E_1 , но больше $\langle H \rangle$. Если континуум начинается от E_1 , как это имеет место для тритона, то указанная оценка E_1 нам не нужна, поскольку энергию связи дейтрона, определяющую упругий порог, найти относительно просто.

Формула Темпла дает наилучшую нижнюю границу, которую можно получить из $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$ и E_1 . Это можно увидеть из следующего рассуждения.

Допустим, что для данного гамильтониана H и определенной пробной функции ψ мы имеем неравенства

$$\underline{E}_0 < E_0 < \langle H \rangle < E_1.$$

Предположим далее, что имеется формула

$$g = g(E_1, \langle H \rangle, \langle H^2 \rangle),$$

дающая лучшую нижнюю границу, чем формула Темпла, т. е.

$$\underline{E}_0 < g \leq E_0.$$

Новая формула должна давать нижние границы для основных состояний всех операторов Гамильтона U и всех пробных функций v . Сконструируем теперь оператор U , имеющий в качестве своих собственных значений для

основного и первого возбужденного состояний энергии E_0 и E_1 . Соответствующими нормированными собственными функциями будут u_0 и u_1 . В качестве пробной функции возьмем

$$v = \sqrt{1 - c^2} u_0 + c u_1$$

с

$$c^2 = \frac{\langle H \rangle - E_0}{E_1 - E_0}.$$

Для такой пробной функции можно показать, что

$$\langle v | U | v \rangle = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

и

$$\langle v | U^2 | v \rangle = \langle \psi | H^2 | \psi \rangle;$$

это означает, что

$$g(E_1, \langle \psi | H | \psi \rangle, \langle \psi | H^2 | \psi \rangle) = g(E_1, \langle v | U | v \rangle, \langle v | U^2 | v \rangle).$$

В результате для энергии основного состояния оператора U мы получаем ту же нижнюю границу g , что и для энергии основного состояния оператора H , хотя энергия основного состояния оператора U строго совпадает с нижней границей E_0 , найденной согласно Темплу. Это противоречит нашему предположению, что g есть «улучшенная» нижняя граница. Тем не менее нижняя граница по Темплу является обычно очень плохой по сравнению с верхней границей Релея — Ритца. На практике обычно получается отношение 100:1 для расстояний от границ до истинного собственного значения, в особенности для потенциалов с твердой сердцевинной. По этой причине Дельвес и Хеннел [68], выполнившие наиболее точные на сегодняшний день расчеты энергии связи трития*), не уделяли много внимания нижним границам. Вместо этого они изучали детали сходимости для верхней границы и экстраполировали результаты к бесконечному числу параметров.

) Со времени выхода английского оригинала настоящей книги было выполнено большое количество новых расчетов для основного состояния трития (см., например, работы [130—135*]).— (Прим. перев.)

Систематическая вариация параметров наиболее проста, если пробная функция зависит от параметров линейным образом. В этом случае можно использовать метод Хиллерааса, который идентичен с диагонализацией гамильтониана в ограниченном гильбертовом пространстве.

Возьмем пространство базисных функций

$$\mathcal{H}_t \equiv \{\psi_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

состоящее из нормируемых, линейно независимых функций ψ_n . Для системы фермионов, например, можно было бы использовать слетеровские детерминанты, составленные из осцилляторных функций. Пробную функцию запишем в виде

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |\psi_n\rangle. \quad (8.6)$$

Коэффициенты c_n суть линейные вариационные параметры. Они находятся из уравнения на собственные значения

$$\sum_{n=0}^N (H - \Lambda B)_{mn} c_n = 0, \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad (8.7)$$

где H_{mn} есть матрица $\langle \psi_m | H | \psi_n \rangle$, а B_{mn} — матрица $\langle \psi_m | \psi_n \rangle$. Из (8.7) видно, что метод Хиллерааса — это и есть диагонализация гамильтониана в функциональном пространстве \mathcal{H}_t . Мы получаем в результате собственные значения Λ_i и собственные векторы $c_i \equiv \{c_{i0}, \dots, c_{iN}\}$. Низшее собственное значение Λ_0 строго совпадает с верхней границей \bar{E}_0 , которая получилась бы на основе принципа Ритца с пробной функцией (8.6):

$$\Lambda_0 = \bar{E}_0. \quad (8.8a)$$

Состояние

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{n=0}^N c_{0n} |\psi_n\rangle \quad (8.8b)$$

будет оптимальным основным состоянием в смысле принципа Ритца.

Для принципа Хиллерааса, как можно показать в общем виде, выполняются неравенства

$$\Lambda_i \geq E_i, \quad (8.9)$$

это означает, что все собственные значения уравнения (8.7) являются верхними границами соответствующих собственных значений гамильтониана; в этом отношении принцип Хиллерааса превосходит принцип Ритца. Состояния

$$|\Psi_i\rangle = \sum_{n=0}^N c_{in} |\psi_n\rangle \quad (8.10)$$

в определенном смысле являются приближенными для собственных функций уравнения Шредингера. Мерой качества такой аппроксимации является величина перекрытия состояний (8.10) с истинными собственными состояниями. Для дискретной части спектра H величина перекрытия стремится к единице, когда пространство базисных функций расширяется до полного гильбертова пространства.

В непрерывной части спектра собственные значения Λ_i и собственные функции $|\Psi_i\rangle$ не имеют отношения к делу; однако уравнение (8.9) остается справедливым в том смысле, что все собственные значения суть верхние границы для упругого порога, а состояния $|\Psi_i\rangle$ дают ортогональный набор волновых пакетов с возрастающим значением средней энергии.

В принципе Хиллерааса можно, конечно, использовать также и нелинейные параметры, вводя такие параметры в каждую базисную функцию $|\psi_n\rangle$ разложения (8.6). При этом задача на собственные значения решается для каждого набора нелинейных параметров для нахождения наименьшего значения верхних границ.

Дельвес и Хеннел [68] использовали этот метод для вычисления энергии связи трития для очень сложных реалистических потенциалов, подобных потенциалу Хамады — Джонстона. Такие потенциалы включают зависящий от спина центральный потенциал с кором, тензорный и спин-орбитальный потенциалы, а также квадратичный спин-орбитальный потенциал. Эти авторы использовали до 70 линейных параметров и экстраполировали энергию

связи к ее истинному значению, которое для потенциала Хамады — Джонстона оказалось равным $6,5 \pm 0,2$ МэВ. Использование таких сложных потенциалов все еще немыслимо в рамках, подобных расчету Осборна *) (см. гл. 6). Преимуществом вариационного расчета и является то, что необходимо вычислить лишь матричные элементы $\langle \psi_m | H - E | \psi_n \rangle$. При этом интегрирование можно выполнить с помощью очень точных квадратурных формул [88], дающих от 6 до 8 верных десятичных знаков при использовании всего 12 узлов по каждому измерению. Численное же решение уравнения на собственные значения не представляет никаких проблем (за исключением численной устойчивости (см. гл. 6, разд. 1)).

2. Вариационные методы для упругого и многоканального рассеяния

Вариационные методы для состояний рассеяния также характеризуются ограничением функционального пространства, используемого для построения приближенного решения уравнения Шредингера. Будем называть наши (ограниченные) функциональные пространства «гильбертовыми» пространствами даже в том случае, когда имеются «несобственные» гильбертовы состояния, т. е. ненормируемые функции; хотя такая терминология не вполне верна, она принята в литературе. Состояния рассеяния всегда имеют асимптотически не исчезающие компоненты, описывающие систему до и после рассеяния. Допустим, что они нам известны с точностью до некоторого комплексного множителя. Для волновой функции рассеяния задаем анзац следующего вида

$$\psi = \sum_i S(\varphi_i \chi_i) + \sum_j a_j h_j. \quad (8.11)$$

Первая сумма включает все открытые каналы, в которых система описывается связанной парой и частицей, дви-

*) Сейчас это утверждение авторов не соответствует действительности, поскольку уже сделан целый ряд расчетов трехчастичных ядер на основе уравнений Фаддеева с использованием полностью реалистических NN-потенциалов. (См. литературу, добавленную при переводе.) — (Прим. перев.)

жущимися относительно друг друга. При этом функция связанного состояния ψ_i считается известной, а функция относительного движения χ_i варьируется свободно. Оператор S обозначает симметризацию для бозонов и антисимметризацию для фермионов. Вторая сумма включает в себя набор квадратично интегрируемых волновых функций трехчастичной системы h_j , имеющих правильную симметрию. Их называют искажающими функциями, и они используются для того, чтобы подправить первую сумму, которая удовлетворяет уравнению Шредингера лишь асимптотически. Параметры a_j варьируются. В нашем анзаце учитываются только каналы с двухчастичной фрагментацией; это означает, что мы либо находимся ниже порога развала, либо пренебрегаем этим каналом.

Мы хотим ввести надлежащее разложение по парциальным волнам, и поэтому с самого начала должны сформулировать анзац (8.11) несколько аккуратнее. Функции канала будем снабжать набором квантовых чисел

$$c = \{\alpha, l, m, \mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2\}. \quad (8.12)$$

Индекс α означает все внутренние квантовые числа в канале c для двух партнеров, участвующих в реакции, включая их спин и изоспин; l и m — это орбитальный момент относительного движения и его z -компонента; μ_1 и μ_2 — это z -компоненты двух спинов, а τ_1, τ_2 — третьи компоненты двух изоспинов. Функции канала с этими индексами образуют базисный набор, из которого с помощью суммирования с коэффициентами Клебша — Гордана можно перейти к функциям каналов с данным спином (изоспином) канала и данным полным угловым моментом. Таким путем получаем неприводимое представление для конечных вариационных уравнений; это означает, что уравнения расщеплены максимально возможным образом. Здесь, однако, не стоит останавливаться на деталях такого расщепления, и поэтому мы оставим базис, задаваемый квантовыми числами (8.12).

Функция канала ψ_c , т. е. один из членов первой суммы (8.11), запишется в виде

$$\psi_c = S\{\lambda_c \chi_c(\eta_c)\}, \quad (8.13)$$

где функция относительного движения $\chi_c(\eta_c)$ теперь является радиальной функцией. Функция λ_c называется поверхностной функцией и имеет вид

$$\lambda_c = Y_{lm}(\vartheta_c, \phi_c) \eta_c^{-1} \Phi_{1, \alpha\mu_1\tau_1} \Phi_{2, \alpha\mu_2\tau_2}. \quad (8.14)$$

Функции Φ_1 и Φ_2 описывают внутреннее движение партнеров, участвующих в реакции, включая спин и изоспин; одна из Φ , скажем Φ_2 , описывает только спин и изоспин, поскольку один из партнеров — единичный нуклон. Координаты η_c , ϑ_c и ϕ_c являются полярными координатами относительного расстояния партнеров реакции в канале c . Функции канала должны быть асимптотически ортогональными, что выражается условием

$$\int S\{\lambda_c^*\} S\{\lambda_{c'}\} d\mathbf{r} = \delta_{cc'}. \quad (8.15)$$

Интеграл, включающий сумму по спиновым и изоспиновым компонентам, берется по всем координатам, кроме η_c или $\eta_{c'}$, которые, как предполагается, фиксированы и велики. Можно сказать также, что область интегрирования представляет собой большую поверхность, проходящую через все каналы.

Для каждого канала c гамильтониан можно разложить на внутреннюю часть $H_{i,c}$ и часть, отвечающую относительному движению, $H_{r,c}$

$$H = H_{i,c} + H_{r,c}. \quad (8.16)$$

Функция внутреннего движения $\Phi_{1, \alpha\mu_1\tau_1}$ является собственной функцией гамильтониана $H_{i,c}$ с собственным значением $E_{i,c}$

$$(H_{i,c} - E_{i,c}) \Phi_{1, \alpha\mu_1\tau_1} = 0.$$

Как отмечено выше, функция $\Phi_{2, \alpha\mu_2\tau_2}$ описывает спин-изоспиновое состояние. Полная энергия системы E есть сумма

$$E = E_{i,c} + \varepsilon_c, \quad (8.17)$$

где ε_c — асимптотическое значение кинетической энергии в канале c и называется энергией канала.

Для больших расстояний η_c уравнение Шредингера для функции относительного движения $\chi_c(\eta_c)$ можно

записать так:

$$\left[-\frac{1}{2M_c} \left(\frac{d^2}{d\eta_c^2} - \frac{l(l+1)}{\eta_c^2} \right) + V_{\text{кул}} \right] \chi_c(\eta_c) = \varepsilon_c \chi_c(\eta_c). \quad (8.18)$$

Здесь мы сделали допущение о наличии кулоновского потенциала $V_{\text{кул}}$. Если он отсутствует, то приходим к некоторым хорошо известным упрощениям. Величины s и l связаны друг с другом через уравнение (8.12), а M_c — приведенная масса партнеров реакции.

Решения (8.18) представляют собой регулярную и нерегулярную кулоновские функции f_l и g_l или сходящиеся и расходящиеся кулоновские волны. Кулоновские функции имеют следующую асимптотическую форму:

$$f_l \rightarrow \sqrt{\frac{M_c}{q_c}} \sin \left(q_c \eta_c - \frac{1}{2} l \pi + \zeta_l - \beta \ln(2q_c \eta_c) \right), \quad (8.19a)$$

$$g_l \rightarrow \sqrt{\frac{M_c}{q_c}} \cos \left(q_c \eta_c - \frac{1}{2} l \pi + \zeta_l - \beta \ln(2q_c \eta_c) \right), \quad (8.19b)$$

с

$$q_c = \sqrt{2M_c \varepsilon_c}, \quad (8.20)$$

$$\zeta_l = \arg \Gamma(l+1+i\beta), \quad (8.21)$$

$$\beta = \frac{Z_c Z'_c e^2 M_c}{q_c}, \quad (8.22)$$

где $Z_c e$ и $Z'_c e$ — электрические заряды партнеров реакции в канале c . Сходящиеся и расходящиеся волны имеют асимптотики

$$g_l - i f_l \rightarrow \sqrt{\frac{M_c}{q_c}} \exp i \left(-q_c \eta_c + \frac{1}{2} l \pi - \zeta_l + \beta \ln 2q_c \eta_c \right) \quad (8.23a)$$

$$g_l + i f_l \rightarrow \sqrt{\frac{M_c}{q_c}} \exp i \left(+q_c \eta_c - \frac{1}{2} l \pi + \zeta_l - \beta \ln 2q_c \eta_c \right). \quad (8.23b)$$

Мы обсудили здесь наиболее общий случай функций канала, включающего два фрагмента с тремя элементарными частицами. В качестве примера мы хотим указать

теперь те упрощения, которые получаются для нейтрон-дейтронной системы. Здесь имеется только одно двухчастичное связанное состояние, а именно — дейтрон со спином 1 и изоспином 0. Нейтрон имеет спин $1/2$ и изоспин $1/2$. В неприводимом представлении имеется, прежде всего, два сорта каналов: дублетные каналы, где спин свободного нейтрона антипараллелен спину дейтрона, и квинтетные каналы, где спин свободного нейтрона параллелен спину дейтрона. Все разнообразие каналов в каждом случае дается возможными значениями угловых моментов и направлениями спина в канале.

Теперь можно переписать наш анзац (8.11) с использованием точных определений и получить разложение

$$\psi = \sum_c S \{ \lambda_c \chi_c(\eta_c) \} + \sum_j a_j h_j. \quad (8.24)$$

Континуальное варьирование функции относительного движения χ_c и варьирование по линейным параметрам a_j в вариационном принципе, излагаемом ниже, приводят к системе интегро-дифференциальных уравнений, которую надо решать совместно с системой линейных уравнений. Такая система уравнений решается на практике либо итерациями, либо посредством аппроксимации интегро-дифференциальных уравнений линейными уравнениями. В любом случае континуально варьированный параметр $\chi_c(\eta_c)$ заменяется конечным набором значений дискретной функции. Можно с самого начала перейти надлежащим образом к дискретным параметрам, разлагая функцию $\chi_c(\eta_c)$ на асимптотические решения $f_l(\eta_c)$ и $g_l(\eta_c)$ и сумму квадратично-интегрируемых функций от η_c . Квадратично-интегрируемые члены такого разложения после умножения на поверхностные функции λ_c и (анти-)симметризации можно добавить во вторую сумму (8.24). Затем необходимо выбрать граничное условие, и мы хотим выбрать его таким образом, чтобы можно было избежать использования комплексных функций настолько, насколько это возможно.

Решение задачи рассеяния асимптотически представляет собой суперпозицию функций канала. Амплитуды определяются свойствами системы в том объеме, где происходит реакция, и граничными условиями. Для n каналов можно постулировать n различных граничных усло-

внй, ибо в принципе падающий поток можно свободно выбирать в различных каналах. Физически разумно было бы потребовать, чтобы падающий поток был равен единице в одном из каналов и нулю — во всех других каналах. Но такое граничное условие влечет за собой комплексные функции относительного движения. Легче найти набор линейно независимых решений с действительными функциями относительного движения и получить физическое решение путем их суперпозиции. Действительные функции относительного движения получаются с помощью условия, чтобы в i -м канале регулярная кулоновская функция имела амплитуду, равную единице, а все другие регулярные кулоновские функции имели нулевые амплитуды. Для n каналов, когда i пробегает значения от 1 до n , мы получаем n различных граничных условий этого типа. Для i -го граничного условия имеем, таким образом, следующий анзац

$$\Psi_i(E, \mathbf{r}) = F_i(\epsilon_i, \mathbf{r}) + \sum_{j=1}^n a_{ij} G_j(\epsilon_j, \mathbf{r}) + \sum_{j=n+1}^N a_{ij} h_j(\mathbf{r}) \quad (8.25)$$

с

$$F_i(\epsilon_i, \mathbf{r}) = S \{ \lambda_i f_l(q_i \eta_i) \}, \quad (8.26a)$$

$$G_j(\epsilon_j, \mathbf{r}) = S \{ \lambda_j [1 + (q_j \eta_j)^{-l-1}]^{-1} g_l(q_j \eta_j) \}. \quad (8.26b)$$

Индексы i , j и l снова связаны посредством равенства (8.12), где i и j обозначают индекс канала c . Без обрезającego множителя функция G_j была бы сингулярной при $\eta_j=0$. Мы ввели поэтому множитель $[1 + (q_j \eta_j)^{-l-1}]^{-1}$, понимая конечно, что его можно заменить на практике на любую похожую функцию. Вторая сумма в (8.25) содержит члены, описывающие искажение, а также квадратично-интегрируемые компоненты функций канала, т. е. функции, представляющие собой (анти-) симметризованные произведения поверхностных функций и квадратично-интегрируемых функций относительного движения.

Как было отмечено в начале этого раздела, вариационные методы для состояний рассеяния характеризуются ограничением функционального пространства, используемого для построения приближенного решения уравнения Шредингера. Теперь же мы можем ясно уви-

деть, что представляет собой наше ограниченное функциональное пространство. Прежде всего мы имеем конечное пространство квадратично-интегрируемых функций

$$\mathcal{H}^{(1)} = \{h_{\mu}^{(1)}\}. \quad (8.27)$$

В дополнении к этому имеются ненормируемые асимптотические решения G_j , которые умножаются на вариационные параметры, тогда как функции F_i имеют фиксированные параметры и не варьируются. Таким образом, вариация ограничена следующим пространством:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \{h_{\nu}^{(2)}\} \equiv \{G_j, h_{\mu}^{(1)}\}. \quad (8.28)$$

Здесь введены новые обозначения $h_{\nu}^{(2)}$, которые позволяют записать вариационные уравнения в сокращенном виде. При использовании новых обозначений анзац (8.25) примет вид

$$\Psi_i(E, \mathbf{r}) = F_i(\epsilon_i, \mathbf{r}) + \sum_{\nu=1}^N a_{i\nu} h_{\nu}^{(2)}(\mathbf{r}). \quad (8.29)$$

Здесь уместно поставить вопрос, как определить параметры. Мы хотим использовать свободу, предоставляемую линейными параметрами $a_{i\nu}$, чтобы получить «наилучшее» приближение к точному решению уравнения Шредингера.

Решение предингервовского уравнения в ограниченном пространстве вместо полного означает, что вектор $(H - E) | \Psi_i \rangle$ имеет нулевые компоненты в пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$. Таким образом, мы получаем набор линейных уравнений, который представляет собой часть вариационного принципа Кона — Хюльтена [101, 102]

$$\sum_{\nu=1}^N \langle h_{\mu}^{(2)} | H - E | h_{\nu}^{(2)} \rangle a_{i\nu} = - \langle h_{\mu}^{(2)} | H - E | F_i \rangle. \quad (8.30)$$

Это уравнение, однако, приводит к ложным резонансам двух разных типов [103—105]. Первый возникает от канальных компонент в пространстве (8.27). Это — типичные ложные резонансы Кона. Второй тип обусловлен искажающими функциями. Эти резонансы появляются выше порога первого канала, не учтенного в нашем анзаце (например, вроде канала развала), и они остались бы даже и в том случае, если бы мы применили подход с интегро-дифференциальными уравнениями [106, 107].

Формально ложные резонансы появляются из-за нулей детерминанта матрицы коэффициентов. Более внимательное рассмотрение показывает, что подобные ложные резонансы обусловлены особым методом минимизации невязки, выбранным в уравнении (8.30). Используя анзац в ограниченном пространстве, строго удовлетворить уравнению Шредингера $(H - E) |\Psi_i\rangle = 0$ невозможно. Вместо нуля в правой стороне будет некоторая невязка δ , которую каким-то способом нужно минимизировать. Мы потребовали, чтобы эта невязка имела нулевые компоненты в пространстве $\mathcal{H}^{(2)}$ и никакие компоненты вне $\mathcal{H}^{(2)}$ не учитывались. Оказывается, что ложные резонансы обусловлены как раз этими последними компонентами. Таким образом, если мы не хотим иметь дело с ложными резонансами, то нужно изменить способ минимизации невязки.

Мы хотим теперь рассмотреть компоненты невязки $(H - E) |\Psi_i\rangle$ вне пространства $\mathcal{H}^{(2)}$ и введем поэтому пространство немного большее чем $\mathcal{H}^{(2)}$:

$$\mathcal{H}^{(3)} = \{h_v^{(3)}\} \equiv \{G_j, h_\mu^{(1)}, \omega_\rho\}.$$

Дополнительные функции ω_ρ могут быть как нормируемыми, так и ненормируемыми. Их особенности несущественны, пока они являются линейно независимыми от функций h_v и не обращаются в нуль в той области конфигурационного пространства, где функции h_μ спадают до нуля. Мы хотим далее оставить анзац (8.29) неизменным, но вместо $\mathcal{H}^{(2)}$ выполнять минимизацию невязки в $\mathcal{H}^{(3)}$. Мы не можем больше требовать, чтобы компоненты невязки обращались в нуль в $\mathcal{H}^{(3)}$, так как это означало бы, что условий имеется больше чем степеней свободы. Но можно потребовать, чтобы сумма квадратов компонент $(H - E) |\Psi_i\rangle$ в $\mathcal{H}^{(3)}$ становилась минимальной. Такое условие по методу наименьших квадратов приводит к уравнению

$$A^\dagger A a = A^\dagger b; \quad (8.31)$$

здесь A — прямоугольная матрица $\langle h_\mu^{(3)} | H - E | h_\nu^{(2)} \rangle$; a — вектор-столбец a_ν , где ν — индекс вектора; b — вектор-столбец $-\langle h_\mu^{(3)} | H - E | F_i \rangle$, где μ — индекс вектора; а A^\dagger — матрица эрмитово сопряженная A . Если функции

ω_0 выбраны хотя бы мало-мальски разумно, уравнение (8.31) больше не приводит к ложным резонансам*). Как было ранее установлено, выбор этих функций не критичен. В одноканальном тестовом расчете [103] единственная функция $\omega_1 = F_1$ оказывается уже достаточно хорошей для подавления ложных резонансов первого рода. В трехбозонной системе ложные резонансы второго рода довольно хорошо подавляются путем выбора ω , равной константе или равной полной гауссовой функции большого радиуса [107].

Фазы, рассчитанные с помощью (8.31), больше не могут проходить через $\pi/2$ (по модулю π), так как гауссова трансформанта матрицы $A^\dagger A$ положительно (полу-)определенная. И фазы, прежде чем достичь значения $\pi/2$, будут иметь резкий излом и будут продолжаться дальше сдвинутыми на π . Если бы мы выбрали граничное условие, фиксирующее амплитуды функций G_i вместо F_i , то то же самое произошло бы при нулевом значении фазы (по модулю π), а не при $\pi/2$. Лучший способ избежать такого поведения — сделать амплитуды как F_i , так и G_i свободными и решать уравнения на собственные значения вместо линейного уравнения (8.31). В этом случае условие наименьших квадратов удовлетворяется путем отыскания собственных решений с наименьшими собственными значениями [104, 105]. Но поскольку решать линейные уравнения на практике несколько легче, чем уравнения на собственные значения, то обычно оставляют уравнение (8.31) и игнорируют странное поведение фаз вблизи $\pi/2$.

Уравнение (8.31) представляет собой систему линейных уравнений для каждого значения i от 1 до n . Решения всех уравнений образуют матрицу a_{iv} . Информация о сечениях рассеяния содержится в квадратной части a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) этой матрицы. С помощью так на-

*) Здесь автор излагает свой собственный подход к подавлению ложных резонансов (см. работы [103, 107]). Однако более широко распространен другой подход, заключающийся в том, что сравниваются результаты разных вариационных методов (например, Кона, Хюльтена и Рубинова), и ложные резонансы, в отличие от истинных, в разных методах получаются при существенно различных энергиях, что и позволяет их отбросить.— (Прим. перев.)

зывается поправкой Като эту матрицу a_{ij} можно улучшить [109]. Для этого изучим выражение

$$\langle \Psi_i^t | H - E | \Psi_j \rangle - \langle \Psi_j | H - E | \Psi_i^t \rangle, \quad (8.32)$$

где Ψ_i^t — истинное решение уравнения Шредингера, удовлетворяющее i -му граничному условию, тогда как Ψ_j — приближенное решение, удовлетворяющее j -му граничному условию. Теперь в качестве приближенного решения подставим разложение (8.25) с коэффициентами a_{ij} , определяемыми из (8.31). Вместо истинного решения Ψ_i^t также подставим разложение (8.25) с истинными коэффициентами a_{ij}^t ($j = 1, \dots, n$, а вторая сумма в (8.25) не относится к делу). Используя далее следующие соотношения, которые легко проверяются с помощью определений (8.26а), (8.26б):

$$\langle F_i | H - E | F_k \rangle - \langle F_k | H - E | F_i \rangle = 0, \quad (8.33а)$$

$$\langle F_i | H - E | G_k \rangle - \langle G_k | H - E | F_i \rangle = 1/2 \delta_{ik}, \quad (8.33б)$$

$$\langle F_i | H - E | h_v^{(1)} \rangle - \langle h_v^{(1)} | H - E | F_i \rangle = 0, \quad (8.33в)$$

$$\langle G_i | H - E | h_v^{(1)} \rangle - \langle h_v^{(1)} | H - E | G_i \rangle = 0, \quad (8.33г)$$

находим

$$\langle \Psi_i^t | H - E | \Psi_j \rangle - \langle \Psi_j | H - E | \Psi_i^t \rangle = 1/2 (a_{ji} - a_{ij}^t). \quad (8.34)$$

Введем разность W_i между истинным и приближенным решением

$$W_i = \Psi_i^t - \Psi_i,$$

и, учтя, что $(H - E) | \Psi_i^t \rangle = 0$, найдем тождество Като,

$$1/2 (a_{ji} - a_{ij}^t) = \langle \Psi_i | H - E | \Psi_j \rangle - \langle W_i | H - E | W_j \rangle. \quad (8.35)$$

Второй член в правой части будет второго порядка по W_i , которая предполагается малой. Если этот член отбросить, то получится уравнение, определяющее новые амплитуды a_{ij} ,

$$a_{ij}' = a_{ji} - 2 \langle \Psi_i | H - E | \Psi_j \rangle. \quad (8.36)$$

Это уравнение, часто называют формулой поправки Като. Амплитуды a_{ij} обычно дают значительно лучшее приближение, чем амплитуды a_{ij} . Поправка Като, однако, может компенсировать лишь отсутствующие канальные компоненты во второй сумме (8.25), но не отсутствующие члены, описывающие искажения.

Теперь нужно выполнить переход от нашего граничного условия, которое было математически удобным, к физическому граничному условию. Для этого решения Ψ_i (с коэффициентами a_{ij} вместо a_{ij}) складываются таким образом, чтобы кулоновские функции (8.19а), (8.19б) стали сходящимися и расходящимися волнами, а сходящиеся волны имели бы нулевой поток во всех каналах, кроме одного. Эта процедура дает хорошо известную формулу, связывающую S -матрицу с матрицей реакции a_{ij}

$$S = [1 + i(a'_{ij})][1 - i(a'_{ij})]^{-1}. \quad (8.37)$$

За ее выводом мы отсылаем читателя к учебникам по квантовой механике [6].

Здесь нужно отметить, что если для двухчастичных связанных состояний, входящих в функции канала, используются приближения, то возникают определенные трудности. В этом случае не будет никакой сходимости по отношению к увеличению числа искажающих членов [110]*). Функции, описывающие искажения, будут «стремиться» подправить также и функции внутреннего движения в каналах. Однако, будучи квадратично интегрируемыми, они оказывают влияние лишь в конечной области. Рассогласование появляется на краю этой области, и это рассогласование всегда можно сильнее всего образом изменять добавлением новых искажающих функций.

*) Следует отметить, что указанная трудность будет весьма существенной при расчете реакций между сложными частицами, состоящими из 3—6 нуклонов, для которых неизвестны точные волновые функции. В случае же трехчастичной задачи, где функции двухчастичных связанных состояний легко найти, указанная трудность при практических расчетах мало существенна.— (Прим. перев.)

3. Вариационные методы для многоканального рассеяния с учетом трехчастичного развала

Для того чтобы учесть реакцию развала, необходимо расширить функциональное пространство $\mathcal{H}^{(2)}$ путем включения функций, асимптотически описывающих три свободные частицы и удовлетворяющих определенным граничным условиям*).

При достаточно низких энергиях, где сечение развала мало, представляется разумным вовсе пренебречь развалом и использовать метод, описанный в предыдущем разделе. Ложные резонансы второго типа, которые возникают из виртуальных состояний, образуемых искажающими функциями в той области, где канал развала не учитывается, подавляются с помощью принципа наименьших квадратов. Этот принцип, однако, не может заменить неучтенные каналы. Он может лишь сгладить нежелательные побочные эффекты, такие, например, как ложные резонансы. Поэтому необходимо исследовать, насколько большое влияние на амплитуды других функций канала оказывает пренебрежение каналом развала и к какой потере точности приводит такое пренебрежение. На рис. 46 показано сравнение вариационного результата [108] с решением АГС-уравнения (6.86) [96]. В обоих случаях были вычислены упругие фазовые сдвиги для рассеяния бозона на связанной паре бозонов. Считаем, что бозоны взаимодействуют посредством юкавских потенциалов. В вариационном расчете канал развала не учитывался, в то время как АГС-результаты включают влияние реакции развала выше порога $E = 0$. Вариационный результат и первое квазиборновское приближение отличаются на 6 градусов (для $L = 0$). Но эта разница проявляется уже ниже порога развала, где вариационный результат дает нижнюю границу к истинному фазовому сдвигу и, вероятно, очень близок к этому последнему. Поэтому АГС-результат не противоречит вариационному результату и их сравнение в этом частном примере (потенциал Ямагучи в качестве приближения нулевого порядка) скорее может служить проверкой качества первого квазиборновского приближения.

*) См. сноску к стр. 191.— (Прим. перев.)

На рис. 47 снова показана фаза для трехбозонной системы при $L = 0$. Однако в этом случае был использован сепарабельный потенциал Ямагучи, а штриховая кривая показывает результат точного фаддеевского расчета. Сплошная кривая

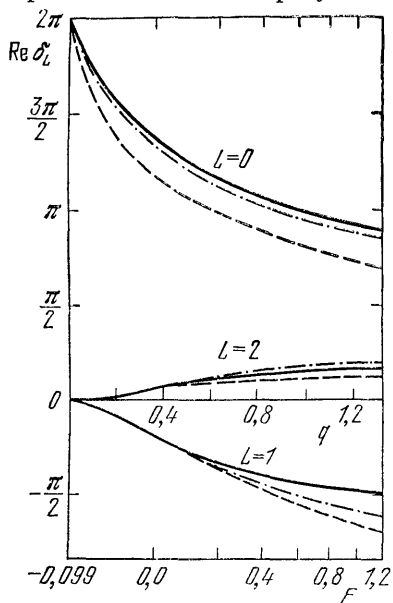


Рис. 46. Сравнение вариационного результата Дж. Швагера [108] для действительной части фазовых сдвигов δ_L для трех одинаковых бозонов, взаимодействующих посредством потенциала Юкавы, с расчетом на основе метода квазичастиц (Х. Цигельман [96], см. рис. 41). Штриховые кривые представляют 0.К.Б.П., штрихпунктирные — 1.К.Б.П., а сплошные кривые — вариационные результаты.

показывает результат вариационного расчета, в котором развалом пренебрегалось [111]. Видно, что и в самом деле имеется лишь небольшое отличие двух кривых выше порога развала, и разность меньше 1,5 градуса вплоть до 4,5 МэВ (в системе центра масс). Поэтому использование вариационного метода последнего раздела кажется перспективным для расчетов упругих фаз в системе трех нуклонов даже выше развального порога.

Вернемся теперь снова к проблеме учета реакции развала в вариационном расчете.

Во Введении уже были отмечены появляющиеся при этом трудности. Три частицы, испускаемые в реакции развала, свободны, но коррелированы друг с другом. Как мы уже видели, полная энергия может распределяться между тремя частица-

ми непрерывным образом. Если, например, одна частица приобретает в четыре раза большую кинетическую энергию, чем другая, то она будет двигаться вдвое быстрее и спустя несколько наносекунд будет примерно вдвое дальше от рассеивающего центра. Поэтому приближенное

описание такого свободного движения плоскими волнами невозможно. При двухчастичном распаде расходящаяся сферическая волна представляет собой приближенно плоскую волну там, где в эксперименте располагается счетчик частиц; сферическая структура волны не регистрируется счетчиком. В трехчастичном же распаде корреляция частиц является важной измеримой величиной.

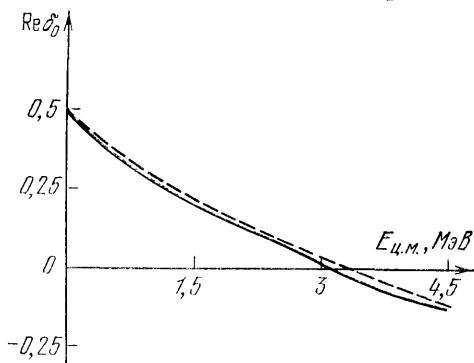


Рис. 47. Сравнение вариационного результата (сплошная кривая, Ф. Соре и Э. Шмид [111]) для действительной части фазового сдвига δ_0 в случае трех одинаковых бозонов, взаимодействующих через потенциал Ямагучи, с точным решением фаддеевского уравнения (штриховая кривая, Ф. Соре и Х. Цигельман [63]). Шкала энергий начинается от порога развала, а константа связи подгоняется под энергию связи дейтрона 2,2 МэВ.

Если бы для описания свободного движения использовались плоские волны, то указанная корреляция должна была бы описываться сложной суперпозицией волн.

Вторая трудность, помимо асимптотической корреляции, — это бесконечность объема реакции. Из-за возможности перерасеяния двухчастичный потенциал взаимодействия может оказаться существенным на произвольном расстоянии от рассеивающего центра (см. рис. 8).

Третья трудность возникает из-за необходимости введения граничного условия, не зависящего от времени. Такое условие можно было бы сформулировать, если бы нам удалось описать состояния трехчастичного развала в виде чисто расходящихся волн. Чтобы проиллюстрировать указанную трудность, во Введении был поставлен вопрос, какого характера будет состояние —

расходящегося или сходящегося типа,— когда одна из частиц приближается к общему центру масс, а две другие — удаляются от него. Построение состояний чисто расходящегося характера представляется трудным, но возможным. То, что в принципе это возможно, можно увидеть из следующего рассуждения. Введем координату ρ , которая описывает размер треугольника, образуемого тремя частицами. Волновая функция будет чисто расходящегося характера, если волны движутся в направлении увеличения ρ . Поскольку форма треугольника может изменяться, то может случиться, что одна частица приближается к общему центру масс на короткое время, т. е. в определенном интервале ρ . Но для $\rho \rightarrow \infty$ все расстояния будут беспредельно увеличиваться, и поэтому мы получим асимптотически расходящееся состояние. Таким образом, видно, что корреляция свободных частиц играет решающую роль также и в формулировке граничного условия.

Ниже мы обсудим две возможности построения трехчастичных состояний расходящегося типа. Первая возможность приводит к гиперсферическим функциям, которые называются также «гиперсферическими гармониками» или « K -гармониками». Вторая возможность — это введение не зависящих от времени волновых пакетов, для которых положение третьей частицы заменяет временную шкалу. Система функций из K -гармоник подходит главным образом для описания внезапного распада, тогда как описание через волновые пакеты можно использовать также и для реакций развала с сильным взаимодействием в конечном состоянии.

Система вариационных уравнений не меняется при учете развала. Просто к пространству пробных функций $\mathcal{H}^{(2)}$ добавляется набор состояний, описывающих развал. Имеются лишь некоторые сложности с поправкой Като, которые все еще находятся в процессе изучения (см. также Либер, Розенберг и Спрач [125]).

Прежде чем рассматривать две упомянутые системы функций, которые можно использовать для описания развала, мы хотим отметить два других метода, которые обходят проблемы, возникающие в асимптотической области, с помощью введения комплексных энергий [112] или комплексных координат [113]. Эти методы имеют

некоторое сходство с методом интегрирования Хезерингтона и Шика, в котором сингулярности фаддеевских уравнений обходятся с помощью сдвига контура интегрирования в комплексную плоскость. И в самом деле, между сингулярностями в фаддеевских уравнениях и сложным асимптотическим поведением волновой функции выше порога развала имеется некоторая связь, которую можно ослабить введением комплексных энергий или комплексных координат.

Для всех приближенных схем желательна проверка путем сопоставления с известными точными решениями. Любопытно, что уже в 1951 г. Вильдермут [114] предложил модель, позволяющую исследовать проблему развала путем аналитического решения уравнения Шредингера. С точки зрения физического смысла эта модель не реалистична, но она полезна для проверки приближенных методов.

3.1. Гиперсферические функции. Прежде всего нам нужно ввести так называемые гиперсферические координаты; одна из них — уже упомянутая выше координата ρ . Переопределим теперь наши координаты Якоби без изменения обозначений:

$$\xi = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^{1/2} (r_1 - r_2) \quad (8.38a)$$

и

$$\eta = \left(\frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{1/2} \left(\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} - r_3 \right). \quad (8.38b)$$

Координата ξ снова по существу есть расстояние между частицами 1 и 2, а η — по существу расстояние между частицей 3 и центром масс частиц 1 и 2. Единственное различие между новыми и старыми координатами Якоби — это массовый множитель, равный квадратному корню из соответствующей приведенной массы. Благодаря этому множителю выражение для кинетической энергии в новых координатах есть сумма вторых производных, умноженных на $(-1/2)$. В старых же координатах часть вторых производных умножалась на $(-1/2\mu)$, а часть на $(-1/2M)$. Новые координаты Якоби называются рационализированными координатами Якоби. Как и в (2.71), имеются три разных набора этих координат в зависимости

от того, какая частица выбирется в качестве третьей. При внезапном развале ни одна из подсистем не выделена, и поэтому достаточно иметь один набор рационализованных координат Якоби.

Гиперсферические функции диагонализуют свободный трехчастичный гамильтониан h_0 . В рационализованных координатах Якоби этот оператор имеет простой вид

$$h_0 = -\frac{1}{2}(\Delta_\xi + \Delta_\eta) = -\frac{1}{2}\Delta, \quad (8.39)$$

где Δ — шестимерный оператор Лапласа.

Гиперсферические координаты

$$\rho = (\rho, \hat{\rho}) = (\rho, \alpha, \vartheta_\xi, \varphi_\xi, \vartheta_\eta, \varphi_\eta) \quad (8.40)$$

теперь определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \rho \cos \alpha \sin \vartheta_\xi \cos \varphi_\xi, \\ \xi_y &= \rho \cos \alpha \sin \vartheta_\xi \sin \varphi_\xi, \\ \xi_z &= \rho \cos \alpha \cos \vartheta_\xi, \\ \eta_x &= \rho \sin \alpha \sin \vartheta_\eta \cos \varphi_\eta, \\ \eta_y &= \rho \sin \alpha \sin \vartheta_\eta \sin \varphi_\eta, \\ \eta_z &= \rho \sin \alpha \cos \vartheta_\eta, \\ d\rho &= \rho^5 d\rho \, d\hat{\rho}, \quad d\hat{\rho} = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \, d\alpha \, d\hat{\xi} \, d\hat{\eta}, \\ 0 &\leq \alpha \leq \pi/2, \quad 0 \leq \vartheta_\xi \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_\xi \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \vartheta_\eta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi_\eta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Их довольно легко себе уяснить. Координаты ϑ_ξ и φ_ξ суть вторая и третья полярные координаты вектора

$$\xi = (\xi, \vartheta_\xi, \varphi_\xi), \quad (8.42)$$

и аналогично для ϑ_η и φ_η . Для обеих абсолютных величин ξ и η полярные координаты вводятся так:

$$\xi = \rho \cos \alpha, \quad \eta = \rho \sin \alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi/2, \quad (8.43)$$

где

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (8.44)$$

Взяв ρ в качестве длины шестимерного вектора (ξ, η) ,

мы получаем важную координату, измеряющую размер треугольника, образованного тремя частицами. Остальные координаты определяют форму треугольника и его пространственную ориентацию.

В гиперсферических координатах свободный гамильтониан принимает вид

$$h_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{5}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{K^2}{\rho^2} \right). \quad (8.45)$$

Оператор K^2 действует только на пять угловых координат. Член K^2/ρ^2 играет ту же роль, что и член L^2/r^2 в трехмерном разложении по угловым моментам. Поэтому оператор K^2 иногда называют оператором «гиперуглового момента». Его собственные значения равны $K(K+4)$, что аналогично собственным значениям $L(L+1)$ оператора L^2 . Но вместо одного магнитного квантового числа M теперь у нас есть четыре «магнитных» квантовых числа. Будем обозначать их совокупность одним символом q .

Собственные функции свободного гамильтониана h_0 факторизуются на радиальную часть $R_K(\rho)$ и угловую часть $Y_K^q(\hat{\rho})$:

$$\psi(\rho) = R_K(\rho) Y_K^q(\hat{\rho}). \quad (8.46)$$

Радиальная часть имеет следующую асимптотическую форму:

$$R_K(\rho) \rightarrow a \frac{e^{-i k \rho}}{\rho^{5/2}} + b \frac{e^{i k \rho}}{\rho^{5/2}}, \quad (8.47)$$

которая означает, что радиальная часть состоит из сходящихся и расходящихся волн. Выбрав $a = 0$, из (8.46) можно получить базис для свободных трехчастичных состояний с чисто расходящимися волнами.

Форма функции $R_K(\rho)$ для малых значений ρ не важна в вариационном расчете, поскольку она всегда исправляется добавлением квадратично-интегрируемых функций. Угловые функции Y_K^q имеют довольно громоздкий вид [115]

$$Y_K^q(\hat{\rho}) \equiv Y_K^{l m \lambda \mu}(\hat{\rho}) = Y_l^m(\hat{\xi}) Y_\lambda^\mu(\hat{\eta}) H_K^{l \lambda}(\alpha), \quad (8.48)$$

где

$$H_K^{l\lambda}(\alpha) = N_K^{l\lambda} \cos^l \alpha \sin^\lambda \alpha P_x^{(l+1/2, \lambda+1/2)}(-\cos 2\alpha), \quad (8.49)$$

$$N_K^{l\lambda} = \left[\frac{2\kappa! 4^{K+2} (K+2)(l+\lambda+\kappa+1)(l+\kappa+1)(\lambda+\kappa+1)!}{\pi (2l+2\kappa+2)!(2\lambda+2\kappa+2)!} \right]^{1/2} \quad (8.50)$$

и

$$\kappa = (K - l - \lambda)/2. \quad (8.51)$$

Функции Y_l^m суть обычные сферические гармоники, а функции $P_x^{(\mu, \nu)}$ — полиномы Якоби. При внезапном распаде наиболее важными функциями будут функции с $l = \lambda = 0$ (и с малыми значениями K). В этом случае мы имеем

$$Y_K^{000}(\hat{\rho}) = \pi^{-3/2} C_{K/2}^1(-\cos 2\alpha), \quad (8.52)$$

где C_μ^ν — полиномы Гегенбауэра.

Существует и другой, более систематический способ введения гиперсферических функций Y_K^q [126]. В нем выбирается определенная алгебра операторов, коммутирующих со свободным гамильтонианом h_0 , а гиперсферические функции получаются как базис неприводимого представления этой алгебры. Выбор алгебры основывается на интуиции, которая играет ведущую роль при выборе пространства пробных функций. Остальное делается автоматически. Если генераторы поворотов в шестимерном координатном пространстве (ξ, η) выбираются так, что они образуют алгебру, то в качестве пространства представления получаем гиперсферические функции, точно так же как сферические гармоники Y_l^m получаются через генераторы поворотов в трехмерном пространстве.

Для получения неприводимой формы вариационных уравнений необходимо построить собственные состояния полного углового момента и изоспина. Это делается путем умножения функций Y_K^q на спиновые и изоспиновые векторы и последующего сложения с подходящими коэффициентами. У нас нет желания углубляться в эти подробности, а вместо этого мы предпочитаем обсудить физический смысл базиса гиперсферических функций,

Каков смысл квантового числа K ? Чтобы понять эту величину, используем аналогию с обычным угловым моментом. Когда частица рассеивается на потенциале $V(\mathbf{r})$, то разложением решения задачи рассеяния $\psi(\mathbf{r})$ по угловым моментам будет разложение на компоненты с различными параметрами столкновения p . На классическом языке параметр столкновения — это наименьшее расстояние, на котором частица с данным угловым моментом и данной скоростью v проходит от рассеивающего центра. В квантовой механике параметр столкновения не имеет определенного значения. Но приближенно все же можно записать:

$$p \approx \frac{L\hbar}{v}, \quad (8.53)$$

и поэтому разложение по квантовым числам углового момента L — это разложение по параметрам столкновения. Когда потенциал $V(r)$ является короткодействующим, а скорость v не слишком велика, в процесс рассеяния будут давать вклад лишь несколько первых членов разложения.

Квантовое число K имеет вполне аналогичный смысл. Мы могли бы назвать его трехчастичным параметром столкновения. На языке классических орбит большое значение K означает, что три частицы не могут одновременно подходить близко друг к другу. Либо все три частицы далеки друг от друга, либо, если две частицы близки, то третья далека от них. С другой стороны, если K равно нулю, то все три частицы встречаются в рассеивающем центре. Минимальное значение p связано с K точно так же, как минимальное значение r связано с L . При $K = 0$ частицы как бы выходят из рассеивающего центра. Для более высоких значений K они как бы должны разлетаться от рассеивающего центра по все более и более «запутанным орбитам». Для описания внезапного распада (со слабым взаимодействием в конечном состоянии) следует ожидать, что важными будут только функции с малыми значениями K .

В разложении волновой функции рассеяния по гиперугловому моменту отсутствуют преимущества, имеющиеся при разложении по собственным состояниям углового момента. Во-первых, сумма двухчастичных потенциалов

взаимодействия не является сферически симметричной в шестимерном координатном пространстве (ξ, η) . Поэтому оператор K не коммутирует с гамильтонианом H , в то время как для сферически симметричного потенциала $V(r)$ оператор L коммутирует с H . Разные гиперсферические состояния связаны друг с другом посредством взаимодействия. Во-вторых, и это может быть даже более важно, члены высокого порядка разложения по гиперсферическим функциям становятся мало существенными только в определенных частных случаях (внезапный распад без перерасеяния). Сумма двухчастичных потенциалов взаимодействия имеет бесконечный радиус в ρ -пространстве, т. е. $V(\rho)$ не стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. Объем «потенциальных желобков», по которым интегрируют и которые тянутся до бесконечности, достаточно мал, хотя матричные элементы $\langle h_{\mu}^{(2)} | H - E | h_{\nu}^{(2)} \rangle$ существуют даже и тогда, когда и $h_{\mu}^{(2)}$ и $h_{\nu}^{(2)}$ — гиперсферические функции*). Разложение сходится медленно, особенно в том случае, когда в распаде необходимо учитывать двухчастичные возбужденные состояния с большим временем жизни.

Чтобы проиллюстрировать понятие о трехчастичных параметрах столкновения, мы рассмотрим рассеяние трех частиц, движущихся в одномерном пространстве. В этом случае разложение по гиперсферическим функциям становится довольно простым и его физический смысл легко понять.

В качестве рационализованных координат Якоби с $m = 1$ в данном случае примем

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ \eta &= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3\right), \end{aligned} \quad (8.54)$$

где x_1, x_2, x_3 обозначают положения трех частиц. Рис. 48 показывает область взаимодействия в двумерном (ξ, η) -

*) Это верно лишь для трех частиц в трехмерном пространстве. Аналогичные функции можно построить для трех частиц, движущихся в одномерном пространстве. Однако в этом случае объем желобков, по которым интегрируют, сравнительно больше, и матричные элементы расходятся.

пространстве. В каждой заштрихованной канавке один из двухчастичных потенциалов взаимодействия отличен от нуля. В центре же рисунка две или три пары взаимодействий отличны от нуля. В (ξ, η) -плоскости гиперсферическими координатами являются просто полярные координаты (ρ, α) . В отличие от (8.43) угол α изменяется от нуля до 2π , поскольку как ξ , так и η оба могут принимать отрицательные значения. Гиперсферические функции будут собственными состояниями углового момента на плоскости, т. е. они имеют вид

$$Y_m(\alpha) = e^{im\alpha},$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.55)$$

Радialная функция имеет асимптотическую форму

$$R_m(\rho) \rightarrow a \frac{e^{-ih\rho}}{\rho^{1/2}} + b \frac{e^{ih\rho}}{\rho^{1/2}}. \quad (8.56)$$

Уравнение Шредингера для трехчастичной системы есть

$$\left[-1/2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + V(\xi, \eta) \right] \psi = E\psi, \quad (8.57)$$

или

$$\left[-1/2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) + V(\rho, \alpha) \right] \psi = E\psi \quad (8.58)$$

и означает, что движение трехчастичной системы в конфигурационном пространстве будет таким же, как движение одной частицы в (ξ, η) -плоскости.

Гиперсферические функции «канала»

$$\psi_m = R_m(\rho) Y_m(\alpha) \quad (8.59)$$

удовлетворяют свободному шредингеровскому уравнению ($V=0$). Соответствующее этим функциям классическое движение представлено стрелками на рис. 49а при $a=0$ и $m=0$ и на рис. 49б при $a=0$ и $m=+1$.

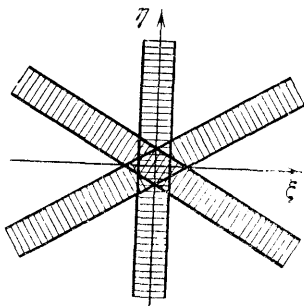


Рис. 48. Области взаимодействия в плоскости (ξ, η) .

При $m = 0$ система разлетается от центра рассеяния, где все три частицы имеют одно и то же положение ($x_1 = x_2 = x_3$). При $m = 1$ система разлетается с периферии круга. Радиус этого круга является трехчастичным параметром столкновения. Возвращаясь к координатам x_1, x_2, x_3 легко усмотреть смысл этого параметра.

3.2. Состояния с последующим распадом. Потенциальные желобки рис. 48 и соответствующие желобки для

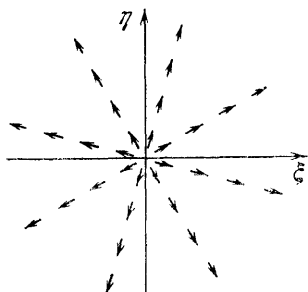


Рис. 49а. Вид классического движения, соответствующего гиперсферической функции канала (см. (8.59)) при $a = 0, m = 0$.

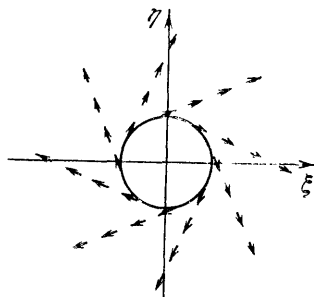


Рис. 49б. То же, что на рис. 49а, но при $a = 0, m = 1$.

задачи рассеяния в трехмерном пространстве не только ответственны за существование двухчастичных связанных состояний, присутствующих в упругом канале и каналах перестройки, но и приводят также к взаимодействию в конечном состоянии в канале развала. Когда компаунд-состояние внезапно распадается на три свободные частицы, можно ожидать, что потенциальные желобки не оказывают большого влияния на асимптотическое состояние для большинства углов рассеяния и энергий свободных частиц. Для хорошего описания распада будет достаточно нескольких членов разложения по гиперсферическим волнам. Если, однако, пара частиц взаимодействует на достаточно больших расстояниях от центра — либо через образование долгоживущего двухчастичного возбужденного состояния, либо благодаря случайно полученному малому относительному импульсу, — то для хорошего описания может потребоваться очень много гиперсфери-

ческих волн. В этом случае более предпочтительно ввести другой тип трехчастичных состояний расходящегося характера, описывающих распад; их можно назвать состояниями распадающихся волновых пакетов [103, 116].

Этот второй тип состояний описывает развал как последовательный двухчастичный распад. Первоначально образуется возбужденное двухчастичное состояние вместе со свободной третьей частицей. Затем возбужденное двухчастичное состояние распадается на свободные частицы. В вариационном расчете двухчастичные состояния можно выбирать произвольно. Они могут быть волновыми пакетами, которые описывают долгоживущее резонансное состояние, или волновыми пакетами, которые довольно быстро распадаются. В этом последнем случае внезапный распад также можно описать посредством распадающихся волновых пакетов.

Здесь имеется существенное отличие от гиперсферического подхода, описанного в последнем разделе. Двухчастичные волновые пакеты обычно записываются в виде суперпозиции состояний рассеяния соответствующего двухчастичного гамильтониана. Это означает, что один из потенциальных желобков учитывается точно; это приводит к более быстрой сходимости разложения по (дискретным) каналам развала. В принципе можно было бы использовать также и состояния рассеяния свободного двухчастичного гамильтониана, но тогда новый подход означал бы лишь перегруппировку членов внутри некоторого конечного гиперсферического разложения. И, наконец, третьей альтернативой было бы построение точных асимптотических решений для полного трехчастичного гамильтониана, как это было в случае упругого канала и канала перестройки. Однако в случае развала это не легко, поскольку для нахождения этих состояний нужно было бы решить почти полную трехчастичную задачу рассеяния *). Напомним, что потенциальные же-

) Проблема нахождения строгих асимптотик трехчастичных волновых функций разрешена в работах Нэттолла и Уэбба [136], Меркурьева [137*], Симонова и Бадалян [138*], а также в ряде работ других авторов. Вариационный и дисперсионный N/D -подход к расчету трехчастичных резонансов был существенно развит в работах Симонова (см., например, [139*]), а общие кинематические особенности трехчастичных процессов исследованы в работах [140*].—(Прим. перев.)

лобки должны рассматриваться в качестве «объема реакции» даже в области, далекой от рассеивающего центра!

Состояния распадающегося волнового пакета строятся аналогично состояниям канала, которые обсуждались в разделе 2. Здесь снова канал характеризуется индексом «с», который содержит информацию о выделенной подсистеме и об относительном движении:

$$c = \{\alpha, l, m, \mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2\}. \quad (8.60)$$

Смысл квантовых чисел $l, m, \mu_1, \mu_2, \tau_1, \tau_2$ — тот же самый что и в (8.12). Изменяется лишь смысл индекса α . Раньше этот индекс содержал информацию о типе связанных частиц, о характеристиках связанного состояния, а также о квантовых числах полного спина S_1, S_2 и изоспина T_1, T_2 , двух фрагментов реакции. Теперь вместо функции связанного состояния $\varphi_{1,\alpha\mu,\tau_1}$ у нас есть волновой пакет. Он описывается амплитудой суперпозиции*) $D(p_c, \eta_c)$. Так как волновой пакет распадается, амплитуда D зависит не только от относительного импульса p_c подсистемы, но также от расстояния η_c до третьей частицы. Эта зависимость от η_c будет обсуждена ниже. Поскольку волновой пакет образуется при $\eta_c = 0$, назовем функцию $D(p_c, 0)$ просто $D(p_c)$. Тогда при $\eta_c = 0$ имеем вместо функции связанного состояния волновой пакет вида

$$\varphi_{1,\alpha\mu,\tau_1}(\xi_c) = \int D(p_c) \varphi(S_1, \mu_1, T_1, \tau_1, p_c, \xi_c) dp_c \quad (8.61)$$

где ξ_c — относительная координата подсистемы. Внутренние свойства волнового пакета, кроме спина и изоспина, определяются еще функцией $D(p_c)$. Индекс α поэтому должен содержать информацию о ней

$$\alpha = \{\dots D\dots\}. \quad (8.62)$$

Функция $\varphi(S_1, \mu_1, T_1, \tau_1, p_c, \xi_c)$ является регулярным решением шредингеровского уравнения для подсистемы с данным полным угловым моментом S_1, μ_1 , данным изоспином T_1, τ_1 и данной энергией $p_c^2/2\mu_c$. Функцию кана-

*) В английском оригинале использован термин «superposition amplitude». — (Прим. перев.)

ла последовательного распада теперь можно записать в виде

$$\psi_c = \int S \{ \lambda_c (\dots p_c \dots) \chi_c (q_c, \eta_c) \} dp_c, \quad (8.63)$$

где

$$\lambda_c = Y_l^m (\theta_c, \phi_c) \eta_c^{-1} D(p_c) \varphi(S_1, \mu_1, T_1, \tau_1 p_c, \xi_c). \quad (8.64)$$

Аналогия с соотношениями (8.13) и (8.14) теперь только внешняя. Не существует больше *единственной* поверхностной функции, поскольку волновой пакет распадается. Распад выражается зависимостью функции $D(p_c, \eta_c)$ от η_c ; расстояние η_c до третьей частицы некоторым образом заменяет временную шкалу процесса распада. Нам необходимо сконструировать поверхностную функцию $\lambda_c(\dots p_c \dots)$ для каждой компоненты $D(p_c)\varphi(S_1, \mu_1, T_1, \tau_1, p_c, \xi_c)$. Затем каждая из этих поверхностных функций умножается на соответствующую функцию относительного движения $\chi_c(q_c, \eta_c)$. Посредством (анти-)симметризации и интегрирования по p_c получаем дискретное состояние канала распадающегося волнового пакета.

Из (8.63) и (8.64) видно, что зависящая от η_c амплитуда суперпозиции $D(p_c, \eta_c)$, содержащая распад волнового пакета, имеет вид

$$D(p_c, \eta_c) = D(p_c) \chi(q_c, \eta_c). \quad (8.65)$$

Чтобы иметь асимптотическую ортогональность функций канала ψ_c , потребуем ортогональности разных волновых пакетов

$$\int D_i^*(p) D_j(p) dp = \delta_{ij}. \quad (8.66)$$

Асимптотическая корреляция трех частиц следует из сохранения энергии. Функция относительного движения $\chi_c(q_c, \eta_c)$ здесь снова кулоновская функция (или функция Бесселя) (см. (8.19) и (8.23)), но для каждой компоненты волнового пакета эта функция имеет свое значение q_c . Из асимптотического сохранения энергии получаем условие

$$\frac{p_c^2}{2\mu_c} + \frac{q_c^2}{2M_c} = E, \quad (8.67)$$

так что кулоновская функция должна иметь волновое число, равное

$$q_c = \sqrt{2M_c \left(E - \frac{p_c^2}{2\mu_c} \right)}. \quad (8.68)$$

Это условие обеспечивает также, чтобы функция канала ψ_c была точной собственной функцией гамильтониана канала. В зависимости от того, какого вида кулоновскую функцию мы выбираем, функция канала ψ_c имеет характер сходящейся, расходящейся или стоячей волны. Нерегулярную кулоновскую функцию нужно снова умножить на обрезающий фактор. Отметим близкую аналогию между соотношением (8.65) и уравнением, описывающим временную эволюцию волнового пакета:

$$D(p, t) = D(p) \exp\left(-i \frac{p^2}{2\mu} t\right). \quad (8.69)$$

Расстояние η_c до третьей частицы можно и в самом деле рассматривать как заменитель временной шкалы; только **множители перед t и η_c имеют разную p -зависимость, что отражает тот факт, что «стрелки наших часов» движутся с разной скоростью при разных значениях p . Следует также отметить, что состояния, отвечающие распадающемуся волновому пакету, представляют собой волновые пакеты только по отношению к внутреннему движению подсистемы. В целом же они являются не нормируемыми состояниями канала. При выборе функций $D_c(p_c)$ используются интуитивные соображения. Область изменения p_c определяется уравнением (8.67). Для больших значений p_c функцию $D(p_c)$ целесообразно взять равной нулю*). Если двухчастичные резонансы оказываются существенными, распределение $D_c(p_c)$ выбирается узким в согласии с ожидаемым временем жизни виртуального состояния. С другой стороны, очень широкое распределение**

*) Это условие не является необходимым. Согласно (8.68) для $p_c^2/2\mu_c > E$ волновое число q_c становится чисто мнимым. При выборе положительного знака у квадратного корня мы получаем квадратично-интегрируемый вклад от (8.63). Только ради удобства мы хотим разделить квадратично-интегрируемые функции (искажения) и ненормируемые функции (состояния канала) в вариационном анзаце для функции рассеяния.

$D_c(p_c)$ описывает процесс внезапного распада. Непрерывное множество каналов распада сводится, таким образом, к конечному числу функций $D_c(p_c)$.

Чтобы в максимальной степени избежать использования в вариационном расчете комплексных функций, можно снова ввести состояния канала

$$F_i = \int S \{ \lambda_i (\dots p_i \dots) f_i (q_i \eta_i) \} dp_i, \quad (8.70a)$$

$$G_j = \int S \{ \lambda_j (\dots p_j \dots) [1 + (q_j \eta_j)^{-l-1}]^{-1} g_i (q_j \eta_j) \} dp_j$$

$$(i, j = n + 1, n + 2, \dots, n'), \quad (8.70b)$$

где λ_i берется из (8.64), а волновые числа p_i и q_i связаны посредством (8.67). Состояния G_j добавляются к пространству пробных функций $\mathcal{H}^{(2)}$, описанному в разделе 2, и тогда мы снова приходим к вариационному анзацу (8.29) с граничными условиями в виде стоячей волны

$$\Psi_i = F_i + \sum_{v=1}^N a_{iv} h_v^{(2)}, \quad (8.71)$$

где i теперь пробегает значения от 1 до n' . Квадратично-интегрируемые состояния из $\mathcal{H}^{(2)}$ теперь также должны подправить распадные состояния. Эффекты же перерасеяния учитываются лишь в той области, которая захватывается квадратично-интегрируемыми поправками. Анзац (8.71) не описывает перерасеяние с большим радиусом, поскольку квадратично-интегрируемые функции имеют лишь конечный радиус, а набор состояний канала является далеко не полным. Пространство $\mathcal{H}^{(3)}$ содержит, как и раньше, все функции $h_{\mu}^{(2)}$, и дополнительно одну или несколько функций ω_r . Уравнение метода наименьших квадратов, которое определяет линейные параметры a_{iv} , есть снова уравнение (8.31)

$$A^\dagger A a = A^\dagger b$$

с определениями, аналогичными данным в разделе 2.

Волновые пакеты, распадаясь, движутся вдоль потенциальных желобков. Если они за время своего распада не попадают в другие желобки, то на асимптотике функции канала совпадают с собственными состояниями пол-

ного гамильтониана, так что формула (8.36) для поправки Като остается формально правильной. Но поскольку учитывается лишь конечный набор дискретных каналов распада, то имеются открытые каналы в тех «членах второго порядка» тождества Като, которыми мы пренебрегли, и неясно поэтому, дает ли поправка Като реальное улучшение.

S -матрица находится из улучшенной или неулучшенной матрицы реакции согласно (8.37). Благодаря условию (8.66) у нас есть ортогональный базис состояний расходящегося (сходящегося) характера также и для той части S -матрицы, которая отвечает развалу.

3.3. Метод Пайпера — Шлезингера — Райта [118]. В заключение мы хотим обсудить метод, который сочетает преимущества уравнений Фаддеева с преимуществами вариационных методов. В вариационном принципе Кона и в его варианте, основанном на наименьших квадратах, пробная функция должна асимптотически удовлетворять уравнению Шредингера и подчиняться определенным граничным условиям. Для многоканального рассеяния удовлетворить этим условиям несложно, за исключением того, что получение точных функций внутреннего движения может оказаться сложным делом. В рассеянии же с развалом были необходимы дополнительные усилия, чтобы ввести граничное условие и связанные с ним асимптотические корреляции частиц. В гиперсферическом подходе мы даже отказались от требования иметь асимптотические шредингеровские решения, поскольку K -гармоники удовлетворяют только свободному уравнению Шредингера. Этот подход сходится лишь благодаря тому, что потенциальные желобки покрывают очень малую долю асимптотической области. В меньшей степени то же самое относится и к подходу, основанному на волновых пакетах, поскольку состояния, отвечающие распадающемуся волновому пакету, являются собственными состояниями лишь гамильтониана канала, а не полного гамильтониана.

Поэтому особый интерес представляет тот факт, что для описания процессов рассеяния можно построить вариационные методы, в которых асимптотическое поведение пробной функции несущественно. Впервые такой метод предложил Швингер [117], имея в виду решение

уравнения Липшмана — Швингера. Пайпер, Шлезингер и Райт [118] приспособили швингеровский метод к уравнениям Фаддеева.

Сначала обсудим вариационный принцип Швингера, а затем метод Пайпера — Шлезингера — Райта (ПШР). Особое внимание уделим вопросу о том, как появляется свобода в выборе пробной функции и нужно ли для этого чем-либо пожертвовать. В вариационных методах, описанных в предыдущих разделах, важная информация о задаче рассеяния, как, например, полная энергия и граничное условие, содержалась в асимптотическом поведении пробной функции. В обсуждаемом же здесь методе эта информация должна входить некоторым иным путем, и мы хотим исследовать, как именно.

В этом разделе мы будем следовать рассмотрению, данному Грассбергером, Альтом и Сандхасом [119], где эффективным способом выводится несколько вариационных методов из одного фундаментального уравнения. Фундаментальное уравнение получается следующим образом. Допустим, что нас интересует оператор A (или матричные элементы от A), для которого мы знаем обратный оператор A^{-1} . Очевидно, справедливо следующее уравнение:

$$A = 2A - AA^{-1}A. \quad (8.72)$$

Это уравнение имеет то замечательное свойство, что когда A в его правой части (но не A^{-1} !) изменяется на δA , приращение его левой части будет порядка $(\delta A)^2$. Поэтому в качестве вариационного принципа можно записать

$$[A] = 2A' - A'A^{-1}A', \quad (8.73)$$

где A' — пробный оператор, а $[A]$ — вариационное приближение для A . Наше утверждение теперь можно проверить, взяв $A' = A + \delta A$. Если можно найти такой пробный оператор A' , для которого левая часть (8.73) становится стационарной для всех вариаций δA , мы имеем $A' = [A] = A$. На практике «все вариации» следует заменить на конечное число вариаций. В большинстве случаев пробный оператор является линейной суперпозицией некоторых операторов, а коэффициенты варьируются. Соотношение (8.73) тогда используется в два этапа. Сначала берем производные по определенным параметрам

от $[A]$ и, приравнявая эти производные нулю, получаем систему линейных уравнений. Эта система уравнений определяет параметры. Затем, снова используя (8.73), находим поправку, аналогичную поправке Като. Когда величина A^t со значениями параметров, определенных из системы уравнений на первом этапе, подставляется в (8.73), то оператор $[A]$ будет, вообще говоря, лучшим приближением к A , чем A^t .

В качестве альтернативы к (8.73) можно также использовать формулу

$$\langle A \rangle = \frac{\langle A^t \rangle \langle A^t \rangle}{\langle A^t A^{-1} A^t \rangle}. \quad (8.74)$$

Угловые скобки показывают, что вместо абстрактных операторов следует подставлять матричные элементы. Вариационный принцип (8.74) имеет то преимущество, что в него не входит нормировка A^t . Однако для трехчастичного рассеяния соотношение (8.74) еще не было использовано.

Чтобы увидеть, как может быть использован принцип (8.73), рассмотрим сначала двухчастичное или потенциальное рассеяние. В качестве оператора A возьмем T -матрицу $t(z)$, определенную уравнением (2.56а). Используя (2.61), можно найти обратный оператор $t^{-1}(z)$, и тогда (8.73) можно записать как

$$[t] = 2t^t - t^t(v^{-1} - g_0)t^t. \quad (8.75)$$

Это и есть вариационный принцип Швингера в формулировке Шварца [120]. Для S -матрицы, согласно (2.51), нам необходимы матричные элементы $\langle p' | t | p \rangle$. Используя теперь соотношения

$$\begin{aligned} t(E + i0) | p \rangle &= v | p \rangle^{(+)}, \\ \langle p' | t(E + i0) &= \langle p' |^{(-)} v, \end{aligned} \quad (8.76)$$

которые следуют из (2.25) и (2.58), мы получаем принцип Швингера в его первоначальной формулировке

$$\begin{aligned} \langle p' | t | p \rangle &= \langle p' | v | \psi_i^{(+)} \rangle + \langle \psi_i^{(-)} | v | p \rangle - \\ &- \langle \psi_i^{(-)} | v | \psi_i^{(+)} \rangle + \langle \psi_i^{(-)} | v g_0 v | \psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.77)$$

Здесь $|\psi_i^{(+)}\rangle$ и $\langle \psi_i^{(-)}|$ — пробные функции для решений, отвечающих рассеянию: $|p\rangle^{(+)}$ и $\langle p'|^{(-)}$. Из (8.77) видно,

что для короткодействующего потенциала v асимптотическое поведение функций $\psi_i^{(\pm)}$ становится несущественным. Вместо этого вариационный принцип содержит функции Грина $g_0(z)$. Однако представление свободной функции Грина содержит асимптотические решения уравнения Шредингера. Граничное условие учитывается предписанием того, каким образом комплексный аргумент $g_0(z)$ приближается к вещественной оси.

В рассматриваемом случае потенциального рассеяния вполне понятно важное отличие вариационного принципа Кона и его варианта, основанного на наименьших квадратах, от принципа Швингера. В принципе Кона *) пробная функция является суперпозицией точных асимптотических решений, содержащих граничное условие, и квадратично-интегрируемых функций. В принципе Швингера в качестве пробной функции достаточно хорошей является уже одна только суперпозиция квадратично-интегрируемых функций. Асимптотические решения и граничное условие входят через свободную функцию Грина.

Шварц [120] на численном примере показал, что для потенциального рассеяния принцип Швингера не имеет преимуществ перед принципом Кона. Количество вычислений в обоих методах примерно то же самое, если величина $t^t v^{-1} t^t$ рассматривается в конфигурационном, а $t^t g_0 t^t$ — в импульсном пространствах (для того чтобы избежать двойного интегрирования). В выбранном им примере метод Кона сходится намного быстрее, но неясно, справедливо ли это в более общем случае. Из-за этого было бы интересно исследовать вопрос о том, дает ли какое-либо преимущество обобщение принципа Швингера для задачи трехчастичного рассеяния с развалом.

Впервые обобщение принципа Швингера для трехчастичного рассеяния было предложено Пайпером, Шлезингером и Райтом [118]. Согласно Грассбергеру, Альту и Сандхасу [119], вариационный принцип ПШР можно довольно легко вывести из (8.73).

*) Принцип Кона можно также вывести из (8.72) (см. ссылку [119]). В этом выводе используется условие на массовой поверхности вместе с условием, чтобы пробная функция была точным асимптотическим решением уравнения Шредингера.

В качестве оператора A выбираем оператор $M_{\beta\alpha}$ из уравнения (3.75). Обратный оператор от него можно получить с помощью формализма, описанного на странице 66 и след. Используя (3.73) — (3.75), получим

$$(M^{-1})_{\rho\sigma} = -(1 - \delta_{\rho\sigma}) g_\nu + \delta_{\rho\sigma} t_\sigma^{-1}. \quad (8.78)$$

Подставив это в вариационный принцип (8.73), найдем

$$[M_{\gamma\delta}] = 2M_{\gamma\delta}^t + \sum_{\rho \neq \sigma} \sum M_{\gamma\rho}^t g_\sigma M_{\sigma\delta}^t - \sum_{\rho} M_{\gamma\rho}^t t_\rho^{-1} M_{\rho\delta}^t. \quad (8.79)$$

Матричные элементы, необходимые для вычисления S -матрицы по формуле (3.50), даются в случае рассеяния с перестройкой следующим выражением:

$$R_{\beta n, \alpha m}^{(+)} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \phi_{\beta n} | v_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle + \sum_{\gamma \neq \beta} \sum_{\delta \neq \alpha} \langle \phi_{\beta n} | M_{\gamma\delta} | \phi_{\alpha m} \rangle, \quad (8.80)$$

где были использованы (3.51a) и (3.75). Введем в это уравнение вариационное выражение (8.79) для $M_{\gamma\delta}$ и получим

$$[R_{\beta n, \alpha m}^{(+)}] = (1 - \delta_{\beta\alpha}) \langle \phi_{\beta n} | v_\alpha | \phi_{\alpha m} \rangle + \sum_{\delta \neq \alpha} \langle \chi_{\beta n, \delta} | \phi_{\alpha m} \rangle + \sum_{\gamma \neq \beta} \langle \phi_{\beta n} | \chi_{\gamma, \alpha m} \rangle + \sum_{\rho \neq \sigma} \sum \langle \chi_{\beta n, \rho} | g_\sigma | \chi_{\sigma, \alpha m} \rangle - \sum_{\rho} \langle \chi_{\beta n, \rho} | t_\rho^{-1} | \chi_{\rho, \alpha m} \rangle \quad (8.81)$$

с

$$\langle \chi_{\beta n, \rho} | = \sum_{\gamma \neq \beta} \langle \phi_{\beta n} | M_{\gamma\rho}^t, \quad (8.82a)$$

$$| \chi_{\sigma, \alpha m} \rangle = \sum_{\delta \neq \alpha} M_{\sigma\delta}^t | \phi_{\alpha m} \rangle \quad (8.82b)$$

в качестве пробных функций. Уравнение (8.81) и есть вариационный принцип ПШР [118]. Пробные функции варьируются. Все суммирования идут от 1 до 3. Уравнение (8.81), однако, справедливо также и для $\beta = 0$. В этом случае получаются матричные элементы для развала.

При $\beta = 0$ в (8.82a) в пределе $M^t \rightarrow M$ возникает δ -функция

$$\langle \chi_{0, \rho} | = \sum_{\gamma} \langle \phi_0 | M_{\gamma\rho} = \langle \phi_0 | (v_\rho + VGv_\rho) = \langle \phi_0 | (v_\rho + v_\rho g_0 v_\rho + \dots). \quad (8.83)$$

Поэтому мы модифицируем эту пробную функцию и запишем

$$\langle \tilde{\chi}_{0,\rho} | = \sum_{\gamma} \langle \phi_0 | M_{\gamma\rho} - \langle \phi_0 | t_{\rho}. \quad (8.84)$$

Введение этой модификации в уравнение (8.81) при $\beta = 0$ дает вариационный принцип ПШР для случая развала [127].

Исследуем теперь связь между пробными функциями и волновой функцией рассеяния. Из (2.99), (2.1016), (2.104) и (3.75) при $M_{\sigma\delta}^{\dagger} = M_{\sigma\delta}$ находим

$$|\chi_{\sigma, \alpha m}\rangle = v_{\sigma} (\psi_{\alpha m}^{(+)} - \delta_{\sigma\alpha} |\phi_{\alpha m}\rangle). \quad (8.85)$$

Потенциал v_{σ} в (8.85) отсекает большую часть асимптотики функции рассеяния $|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle$. Вклад в асимптотической области получается только при $\sigma = \alpha$

$$\langle \xi_{\alpha}, \eta_{\alpha} | \chi_{\alpha, \alpha m}\rangle \underset{\eta_{\alpha} \rightarrow \infty}{\sim} v_{\alpha} (\xi_{\alpha}) \hat{\psi}_{\alpha m} (\xi_{\alpha}) \frac{e^{iq_{\alpha}\eta_{\alpha}}}{\eta_{\alpha}}. \quad (8.86)$$

Далее, если потенциал квадратично-интегрируемый, то остаток тоже квадратично-интегрируем. Упругий канал и канал с перестройкой не приводят к каким-либо трудностям в принципе Кона, и эти каналы следует учитывать в принципе ПШР также посредством введения точных асимптотических решений. Сложная часть состояния $|\psi_{\alpha m}^{(+)}\rangle$, описывающая конфигурацию с тремя свободными частицами, частично подавляется в равенстве (8.85) потенциалом v_{σ} . В пробной функции $|\chi_{\sigma, \alpha m}\rangle$ эту часть можно аппроксимировать суперпозицией квадратично-интегрируемых функций при условии, что потенциалы являются короткодействующими. Используя (8.47) с $a = 0$ для асимптотического поведения трех свободных частиц, которые испускаются в реакции развала, можно для $\rho \rightarrow \infty$ записать

$$\langle \xi_{\sigma}, \eta_{\sigma} | \chi_{\sigma, \alpha m}\rangle \sim v_{\sigma} (\xi_{\sigma}) \frac{e^{ik\rho}}{\rho^{5/2}}, \quad (8.87)$$

что дает (ср. с (8.41))

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\alpha m, \sigma} | \chi_{\sigma, \alpha m} \rangle &\sim \int d\rho \frac{v_{\sigma}^2(\rho \cos \alpha)}{\rho^5} = \\ &= \int d\hat{\xi}_{\sigma} d\hat{\eta}_{\sigma} \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \int_0^{\infty} d\rho v_{\sigma}^2(\rho \cos \alpha) = \\ &= \int d\hat{\xi}_{\sigma} d\hat{\eta}_{\sigma} \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin^2 \alpha \cos \alpha \int_0^{\infty} dx v^2(x) < \infty, \quad (8.88) \end{aligned}$$

так что вклад, возникающий от трех частиц в континууме, является квадратично-интегрируемым. Аналогичное утверждение можно сделать для пробных функций $\langle \chi_{\beta n, \rho} |$.

Поэтому асимптотические корреляции частиц и граничные условия для состояний развала не представляют никаких трудностей в принципе ПШР. Поскольку сам принцип основан на формализме Фаддеева, то физическое граничное условие трехчастичного рассеяния учитывается автоматически. Включение этого граничного условия в формализм представляет обычно главную трудность и является главной заслугой теории Фаддеева. Принцип ПШР, будучи обобщением швингеровского принципа на уравнения Фаддеева, использует преимущество последних и поэтому предпочтительнее принципа Кона. Он, т. е. принцип ПШР, сводит задачу развала к расчету матричных элементов. Единственная трудность возникает из-за сингулярной структуры свободной функции Грина в матричных элементах $\langle \chi | g_0 | \chi \rangle$.

Функции упругого канала и канала перестройки были нарочно опущены в формализме ПШР. Это дает то преимущество, что резольвенты каналов $g_{\gamma}(z)$ не появляются. Грассбергер, Альт и Сандхас показали, что функции двухчастичных каналов можно легко исключить, выбирая величину

$$U_{\beta\alpha} = (1 - \delta_{\beta\alpha}) g_0^{-1} + \sum_{\gamma \neq \beta} t_{\gamma} g_0 U_{\gamma\alpha} \quad (8.89)$$

в качестве оператора A в основном уравнении (8.73). Однако в этом случае, как и ожидалось, появляются резольвенты каналов.

Пайпер, Шлезингер и Райт применили свой метод к рассеянию трех различных частиц и к рассеянию трех

одинаковых бозонов [121]. В обоих случаях использовались сепарабельные потенциалы Ямагучи и рассматривалось рассеяние только в s -волне. Была получена быстрая сходимость по отношению к числу параметров. В примере с различными частицами 40 параметров было достаточно, чтобы получить результат с точностью до 5 десятичных знаков. В примере с одинаковыми частицами для получения той же точности была необходима примерно одна треть от вышеуказанного числа параметров. Объем вычислений был достаточно малым, что делает несложным учет спина, изоспина, а также дополнительных сепарабельных членов в потенциале. Это и было сделано Пайпером [122] в расчете нуклон-дейтронной поляризации.

Для локальных потенциалов потребуется еще одно численное интегрирование, а пробные функции должны быть более гибкими. Пайпер, Шлезингер и Райт полагают, что и такой расчет также возможен на современных ЭВМ. Но здесь можно быстро достичь предела производительности, и, следовательно, принцип Кона с волновыми пакетами или гиперсферическими функциями тоже по-видимому имеет шансы на успех, в особенности для задач, подобных взаимодействию в конечном состоянии или резонансам.

Отметим, наконец, другой интересный метод, аналогичный методу ПШР. Обобщение (8.73) с использованием двух разных пробных операторов t_1 и t_2 для двухчастичной T -матрицы

$$[A] = A_1^t + A_2^t - A_2^t A^{-1} A_1^t, \quad (8.90a)$$

$$A_1^t = v + v g_0 t_1, \quad (8.90б)$$

$$A_2^t = t_2, \quad (8.90в)$$

привело Слоана и Бреди [122] к вариационному принципу

$$[t] = v + v g_0 t_1 + t_2 g_0 v - t_2 g_0 t_1 + t_2 g_0 v g_0 t_1. \quad (8.91)$$

Они с успехом применили этот принцип к уравнению Липпмана — Швингера для двухчастичной T -матрицы [123] и к уравнению (5.39) типа уравнения Липпмана — Швингера для задачи трех тел с сепарабельным потенциалом [124].

Д о п о л н е н и е 1

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МНОГОЧАСТИЧНОГО РАССЕЯНИЯ

В этом дополнении мы дадим более детальное, чем в основном тексте, описание развитых к настоящему времени методов решения задач теории многочастичного рассеяния (уравнений типа Лишмана — Швингера и Фаддеева). Ряд этих методов лишь упомянут в основном тексте книги, а некоторые из них были развиты уже после выхода английского оригинала книги. Поскольку часть этих методов широко используется для решения практических задач теории рассеяния, а остальные представляются нам весьма перспективными, то мы сочли целесообразным дать их более подробное описание.

Все приближенные методы, используемые для решения интегральных уравнений теории рассеяния, можно несколько условно разделить на две категории (мы не рассматриваем здесь прямые методы превращения интегральных уравнений в алгебраические — см. об этом основной текст):

А. Методы факторизации интегральных ядер или входящих в них операторов рассеяния.

Б. Итерационные методы (и методы, использующие итерации ядер, например метод моментов Воробьева [1]).

Общее представление об этих методах дано в главах 4, 6, 7 основного текста; однако наибольший интерес для практических применений представляют не эти общие сведения, а конкретные реализации каждого подхода, а также сравнение эффективности различных подходов, что и составляет основное содержание данного приложения.

А. Сепарабельные разложения операторов рассеяния

Существует много методов сепарабельного разложения потенциалов и t -операторов. Отметим среди прочих метод квазичастиц Вейнберга (см. основной текст); под-

ход, основанный на методе Бубнова — Галеркина [2], методы Бейтмана [3] и фурье-разложения [4], унитарно-полюсное разложение [5], метод Адхикари — Слоана [6], Ковальского — Нойеса [7] и др. Однако среди всего разнообразия подходов чаще используемыми и, вероятно, наиболее физически и математически обоснованными являются следующие методы, которые и будут рассмотрены ниже: метод Адхикари — Слоана (АС), унитарно-полюсное разложение (УПР), метод Бейтмана и в меньшей степени — подход Ковальского — Нойеса (КН). Каждый из указанных подходов основывается на прозрачной идее и опробован в большом количестве частных случаев. Более того, указанные подходы допускают достаточно простое обобщение на системы из трех и большего числа частиц.

1. Унитарно-полюсное разложение (УПР).

Унитарно-полюсное разложение, развитое Хармсом [8] и широко использованное для $3N$ -расчетов группой Левинжера, является особым случаем метода квазичастиц или метода Гильберта — Шмидта, когда энергия z не является переменной, как в подходе Вейнберга, а фиксируется при каком-либо удобном значении. При этом t -матрица будет унитарной при положительных энергиях, но само сепарабельное разложение теряет свой диагональный вид, свойственный разложению Гильберта — Шмидта. Обычно значение энергии в УПР берется равным либо нулю, либо энергии двухчастичного связанного состояния — E_B . При этом ядро уравнения Липпмана — Швингера $G_0(-E_B)V$ можно симметризовать и получить ядро типа Гильберта — Шмидта

$$K_l = G_0^{1/2}(-E_B) V_l G_0^{1/2}(-E_B).$$

Если теперь определить систему собственных функций этого ядра (опускаем для простоты индекс l)

$$K\chi_n = \lambda_n \chi_n \quad (\text{Д1.1})$$

и разложить потенциал V и само ядро по этой системе функций, то t -матрица также будет сепарабельной (но недиагональной) в этом базисе:

$$t_{\text{УПР}}(s) = \sum_{n,m=1}^N |\chi_n\rangle \Delta_{nm}(s) \langle \chi_m|, \quad (\text{Д1.2})$$

где

$$(\Delta^{-1}(s))_{nm} = \lambda_n^{-1} \delta_{nm} + \langle \chi_n | G_0(s) | \chi_m \rangle.$$

Если ограничиться одним членом в этом разложении, то получим известное унитарно-полюсное приближение (УПП), которое широко использовалось на ранних этапах 3N-вычислений. Это приближение в случае, когда в данной подсистеме доминирует околороговое связанное (или резонансное) состояние, имеет то большое достоинство, что построенная на его основе сепарабельная t -матрица имеет ту же энергию и волновую функцию связанного состояния, что и соответствующая точная t -матрица (и аналогично для резонансного или виртуального состояний), т. е. $t_{\text{УПП}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, s)$ весьма удовлетворительно воспроизводит точные значения t -матрицы вне массовой поверхности вблизи полюса $s = -E_b$. Однако при удалении от полюса качество приближения быстро ухудшается. Хорошей иллюстрацией сказанного служит *) табл. 1, где приводится сравнение $t_{\text{УПП}}$ с соответствующей точной t -матрицей для притягивающего потенциала Юкавы:

$$V(r) = -V_0 \exp(-\mu r) / \mu r$$

при следующих значениях констант:

$$\mu = 0,633 \text{ ф}^{-1}, \quad V_0 = 0,9950 \text{ ф}^{-2},$$

что дает $E_b = 2,225 \text{ МэВ}$.

Особенно хорошо УПП работает в том случае, когда исходный потенциал имеет наряду с притягивающей периферией сильную отталкивающую сердцевину, подобно так называемым NN-реалистическим потенциалам (потенциал Рейда, Хамады — Джонстона и др.). В табл. 2 приводится сравнение УПП и точной t -матрицы, рассчитанных для 1S_0 потенциала Рейда [9] *). Хорошо видно превосходное согласие приближенных и точных t -матриц при малых энергиях. Причем при умеренных импульсах p и k (не превосходящих 2ф^{-1}) УПП работает для сложного потенциала Рейда лучше, чем для простого чисто притягивающего потенциала Юкавы. Причина этого такая. Для чисто притягивающих потенциалов все собственные значения λ_n (Д1.1) имеют одинаковые знаки, и

*) Данные в таблице взяты из работы Хармса [9].

Таблица 1
УПН для потенциалов Юкавы

p	k	$V(p, k)$	$t_y(p, k; -0, 1)$	$t(p, k; -0, 1)$	$t_y(p, k; -0, 5)$	$t(p, k; -0, 5)$	$t_y(p, k; -3)$	$t(p, k; -3)$
0,003	0,003	-2,49799	-14,0242	-14,4024	-3,4755	-4,0667	-1,9775	-2,7962
0,104	0,003	-2,43296	-13,9119	-14,2520	-3,4477	-3,9934	-1,9617	-2,7298
0,953	0,003	-0,76491	-8,5849	-8,3264	-2,4275	-1,8734	-1,2105	-0,9980
0,953	0,104	-0,76443	-8,5161	-8,2747	-2,4105	-1,8685	-1,2008	-0,9970
4,665	0,003	-0,04517	-0,9751	-0,9368	-0,2417	-0,1979	-0,1375	-0,0885
4,665	0,104	-0,04518	-0,9673	-0,9310	-0,2397	-0,1975	-0,1364	-0,0885
4,665	0,385	-0,04527	-0,8792	-0,8648	-0,2179	-0,1920	-0,1240	-0,0881
4,665	0,953	-0,04576	-0,5969	-0,6372	-0,1479	-0,1692	-0,0842	-0,0861
4,665	2,092	-0,04824	-0,2546	-0,3287	-0,0631	-0,1251	-0,0359	-0,0809
4,665	4,665	-0,06194	-0,0678	-0,1476	-0,0168	-0,0930	-0,0096	-0,0797

Импульсы p и k даны в ϕ^{-1} . Юкавский потенциал в s -волне $V(p, k)$ выражен в ϕ^{-2} . $t_y(p, k; s)$ — t -матрица вне массовой поверхности (в ϕ^{-2}) в унитарно-полномном приближении, s — энергии в ϕ^{-2} , $t(p, k; s)$ — t -матрица, найденная путем численного решения уравнения Липшмана — Швингера.

Таблица 2
УПП для потенциала Рейда в состоянии 1S_0 . Смысл величин тот же, что и в табл. 1

p	k	$V(p, k)$	$t_y(p, k; 0)$	$t(p, k; 0)$	$t_y(p, k; -0,5)$	$t(p, k; -0,5)$	$t_y(p, k; -3)$	$t(p, k; -3)$
0,004	0,004	0,81769	-10,9533	-10,9529	-1,5391	-1,5908	-1,1588	-1,2341
0,153	0,004	0,86926	-10,7799	-10,7642	-1,5147	-1,5561	-1,1404	-1,2031
0,567	0,004	1,12867	-8,9424	-8,8170	-1,2566	-1,2311	-0,9460	-0,9224
0,567	0,153	1,13907	-8,8008	-8,6774	-1,2367	-1,2161	-0,9311	-0,9105
1,405	0,153	1,71159	-3,1385	-2,9299	-0,4410	-0,3945	-0,3320	-0,2597
1,405	0,567	1,73413	-2,6036	-2,4363	-0,3658	-0,3457	-0,2754	-0,2243
1,405	1,405	1,85721	-0,9285	-0,8258	-0,1305	-0,1112	-0,0982	-0,0433
6,878	0,004	1,33278	-0,6971	0,7706	0,0979	0,1038	0,0737	0,0921
6,878	0,567	1,33120	0,5991	0,6398	0,0800	0,0998	0,0602	0,0921
6,878	3,084	1,27858	-0,2374	-0,1750	-0,0334	0,0699	-0,0251	0,0988
6,878	6,878	1,01729	-0,0444	0,0294	-0,0062	0,0794	-0,0047	0,0902

добавление следующих членов в УПР увеличивает притяжение приближенного потенциала. В случае же взаимодействий типа NN-потенциала Рейда собственные значения λ_n имеют чередующиеся знаки, так что, начиная с $n = 2$, последующие сепарабельные члены в значительной степени компенсируют друг друга. Именно благодаря этому обстоятельству (и доминирующему вкладу от полюсов как в триплетном, так и в синглетном каналах с $l = 0$ для NN-рассеяния) УПП обеспечивает хорошую точность и для 3N-задачи (энергии связи ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ и низкоэнергетическое nd-рассеяние) — см. ниже. Сепарабельные члены в УП-разложении, отвечающие притяжению, называются A -членами, а члены, отвечающие отталкиванию, R -членами. Численные расчеты, проведенные Аффаном с сотрудниками [10], а также другими исследователями, показывают, что для достижения необходимой точности в 3N-задаче с потенциалом Рейда необходимо взять около четырех сепарабельных членов ($2A + 2R$) в каждом существенном NN-канале, так что размерность получающейся системы одномерных уравнений Фаддеева для 3N-системы оказывается значительной (≥ 15).

Теперь кратко опишем УП-разложение для связанных каналов, например ${}^3S - {}^3D$ при наличии тензорного взаимодействия [10]. Симметризованное ядро системы уравнений Липпмана — Швингера будет

$$K_{ll'} = G_0^{1/2}(-E_B) V_{ll'} G_0^{1/2}(-E_B) = \sum_{mm'=1}^{\infty} |\phi_l^m\rangle \Delta_{ll'}^{mm'} \langle \phi_{l'}^{m'}|, \quad (\text{Д1.3})$$

где, как обычно, состояния $|\phi_l^m\rangle$ суть решения однородной системы уравнений Липпмана — Швингера:

$$-\sum_{l'} K_{ll'} |\phi_{l'}^m\rangle = \lambda_m |\phi_l^m\rangle \quad (\text{Д1.4})$$

с нормировкой $\sum_l \langle \phi_l^m | \phi_{l'}^{m'} \rangle = \delta_{mm'}$.

Тогда обрезание суммы в (Д1.3) дает N -членный сепарабельный потенциал

$$V_{ll'}^s = \sum_{mm'=1}^N |\chi_l^m\rangle \Delta_{ll'}^{mm'} \langle \chi_{l'}^{m'}| \quad (\text{Д1.5})$$

с форм-факторами

$$|\chi_i^m\rangle = G_0^{1/2}(-E_B)|\phi_i^m\rangle$$

и обобщенной матрицей пропагатора

$$\Delta_{ll'} = A_l^{-1} B_{ll'} A_{l'}^{-1}, \quad (D1.6)$$

где $N \times N$ -матрицы A и B будут

$$[A_l]_{mm'} = \langle \phi_i^m | \phi_i^{m'} \rangle \quad \text{и} \quad [B_{ll'}]_{mm'} = \langle \phi_i^m | K_{ll'} | \phi_i^{m'} \rangle.$$

Для центрального потенциала $V_{ll'} = \delta_{ll'} V_l$ матрица $\Delta_{ll'}$ диагональна по l, l' .

Используя разложение (D1.5), элемент полной t -матрицы для связанных каналов запишем как

$$t_{ll'}(p, p'; E) = \sum_{mm'=1}^N \chi_i^m(p) D_{ll'}^{mm'}(E) \chi_i^{m'}(p'), \quad (D1.7)$$

где матрица $D^{-1}(E) = \Delta^{-1} + \langle \chi | G_0(E) | \chi \rangle$ и матрица Δ дается выражением (D1.6), $|\chi\rangle$ — матричный столбец размерности $2N$ формы:

$$|\chi\rangle \equiv \begin{bmatrix} |\chi_0^1\rangle \\ |\chi_0^2\rangle \\ \dots \\ |\chi_0^N\rangle \\ |\chi_2^1\rangle \\ \dots \\ |\chi_2^N\rangle \end{bmatrix}, \quad (D1.8)$$

а $\langle \chi |$ — соответствующая строка.

Существенным моментом здесь является зависимость матрицы пропагатора $D_{ll'}$ от индексов углового момента (т. е. для 3S — 3D связанных каналов получаем фактически четыре отдельные матрицы D). Это приводит к неоправданному увеличению размерности системы фаддеевских уравнений при использовании УПР в реалистической $3N$ -задаче [10].

Если оставить в разложении потенциала (D1.5) по одному члену в каждом элементе $V_{ll'}$, то получим УПП для связанных каналов. Сравнение приближенных и точных значений t -матрицы вне массовой поверхности

$t_{ll}(p, q; E)$, рассчитанной для NN-потенциала Рейда показывает [5], что аппроксимация t_{00} так же хороша, как и для синглетного случая, тогда как аппроксимация величин t_{02} и t_{22} менее удовлетворительна. Аналогичное сравнение на массовой поверхности удобно сделать путем сопоставления УПР и точных фазовых сдвигов. Такое сопоставление показывает [5], что s -фаза при низких энергиях хорошо воспроизводится УПП, а при высоких (> 100 МэВ) значительно хуже (УПП-фазовый сдвиг при энергиях выше 150 МэВ не меняет знака, в отличие от точной 3S -фазы). Параметр смешивания ϵ неудовлетворительно воспроизводится УП-приближением (точные и приближенные значения ϵ имеют даже разные знаки). D -фаза также воспроизводится не вполне удовлетворительно, хотя и лучше, чем для стандартных сепарабельных потенциалов типа Ямагучи. Тем не менее, поскольку 3N-результаты для УП-приближения довольно близки к точным, 3N-задача (по крайней мере при низких энергиях) малочувствительна к точным значениям t_{02} и t_{22} , хотя общее поведение этих t -матриц, вероятно, имеет значение.

Резюмируя, можно сказать, что УПР-метод сепарабилизации t -матрицы очень хорош для знакопостоянных потенциалов, где достигается быстрая сходимость разложения с форм-факторами, не зависящими от энергии, и t -матрица во всех порядках является унитарной. Для реалистических же NN-потенциалов типа потенциала Рейда, УПР-метод скорее всего оправдан только в виде УПП, т. е. при использовании лишь полюсных членов в соответствующей t -матрице. Улучшение же УПП-результатов путем увеличения числа сепарабельных членов, т. е. переход от УПП к УПР представляется мало оправданным.

2. Метод Бейтмана.

Метод Бейтмана [3] основывается на совершенно других предпосылках, нежели УПП и УПР. Поскольку общая схема хорошо изложена в известных математических руководствах [11], мы изложим лишь применения метода к задачам теории рассеяния (мы будем следовать работам Беляева с сотрудниками [12, 13] и Харченко с сотрудниками [14]).

Фактически метод Бейтмана представляет собой метод приближенной сепарабилизации функции двух

переменных

$$F_{[N]}(x, y) = \sum_{n=1}^N A_n(x, s_n) \frac{1}{A_n(s_n, s_n)} A_n(s_n, y), \quad (\text{Д1.9})$$

где

$$A_1(x, y) = F(x, y),$$

.....

$$A_n(x, y) = A_{n-1}(x, y) - \frac{A_{n-1}(x, s_{n-1}) A_{n-1}(s_{n-1}, y)}{A_{n-1}(s_{n-1}, s_{n-1})}, \quad (\text{Д1.10})$$

$$n = 2, 3, \dots,$$

а $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots$ — некоторые точки в интервале изменения переменных x и y . Согласно (Д.1.10) $A_n(s_i, y) = = A_n(x, s_i) = 0$ для $i < n$.

В частности, для $N = 1$ (одна бейтмановская точка) имеем

$$F_{[1]}(x, y) = \frac{F(x, s_1) F(s_1, y)}{F(s_1, s_1)}$$

и т. д.

Вместо рекуррентных соотношений для функций A_n можно записать явные формулы для $A_n(x, y)$ через определители [14]

$$A_1(x, y) = F(x, y),$$

$$A_2(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} F(s_1, s_1) & F(s_1, y) \\ F(x, s_1) & F(x, y) \end{vmatrix}}{F(s_1, s_1)},$$

.....

$$A_n(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} F(s_1, s_1) & F(s_1, s_2) & \cdots & F(s_1, s_{n-1}) & F(s_1, y) \\ F(s_2, s_1) & F(s_2, s_2) & \cdots & F(s_2, s_{n-1}) & F(s_2, y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F(s_{n-1}, s_1) & F(s_{n-1}, s_2) & \cdots & F(s_{n-1}, s_{n-1}) & F(s_{n-1}, y) \\ F(x, s_1) & F(x, s_2) & \cdots & F(x, s_{n-1}) & F(x, y) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F(s_1, s_1) & F(s_1, s_2) & \cdots & F(s_1, s_{n-1}) \\ F(s_2, s_1) & F(s_2, s_2) & \cdots & F(s_2, s_{n-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F(s_{n-1}, s_1) & F(s_{n-1}, s_2) & \cdots & F(s_{n-1}, s_{n-1}) \end{vmatrix}},$$

(Д1.11)

причем для симметричной функции $F(x, y)$ все функции $A_n(x, y)$ также симметричны.

Идея, стоящая за этими достаточно громоздкими формулами, очень проста: функции $A_n(x, y)$ определяются так, чтобы приближенное (факторизованное) выражение (Д1.9) для функции $F(x, y)$ совпадало с $F(x, y)$ на семействе $2N$ взаимно ортогональных прямых:

$$x = s_1, \quad x = s_2, \dots, x = s_N, \quad y = s_1, \dots, y = s_N.$$

Действительно, вместо однократной суммы (Д1.9) разложение Бейтмана можно записать в следующем наглядном виде:

$$V(p, q) = \sum_{ij} V(p, s_i) D_{ij} V(s_j, q),$$

где $(D^{-1})_{ij} = V_{ij}$, т. е. D_{ij} есть матричный элемент от обратной матрицы потенциала.

Таким образом, требуется хорошая поточечная аппроксимация потенциала в импульсном представлении $V_i(k, q)$ как функции двух переменных. В данном случае это представляется, вообще говоря, излишним, поскольку для решения уравнений Фаддеева требуется хорошая сепарабельная аппроксимация не двухчастичного потенциала, а t -матрицы или даже оператора $G_0 t$, что совсем не одно и то же.

Отметим, что УП-аппроксимация использует для сепарабельного разложения аналитические особенности именно t -матрицы, а не потенциала. Поэтому сепарабельные разложения, найденные по методу Бейтмана, по-видимому, не будут самыми оптимальными в смысле количества сепарабельных членов, необходимых для достижения заданной точности (в разложении t -матрицы), хотя, конечно, хорошая аппроксимация потенциала достаточна для хорошей аппроксимации t -матрицы. Перейдем теперь к результатам конкретных применений метода Бейтмана. Наиболее полные расчеты 3N-систем на основе бейтмановских разложений потенциала были проделаны Беляевым с сотрудниками [12, 13]. Не вдаваясь в детали этих расчетов, отметим лишь, что точность бейтмановского разложения, которую в работах [12] предлагается оценивать по норме разности приближенного и точного

потенциалов

$$\chi^2 = \frac{\int |V(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - V_B(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\tau}{\int |V(\mathbf{p}, \mathbf{q})|^2 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) d\tau}, \quad (\text{Д1.12})$$

существенно зависит от выбора узловых точек s_i . А поскольку сколько-нибудь строго обоснованных правил для выбора узловых точек не существует, то приходится проводить численную оптимизацию на ЭВМ нормы разности (Д1.12), что представляет собой весьма трудоемкую процедуру численной минимизации сложной функции от многих переменных (s_1, s_2, \dots, s_N). Заметим, правда, что подобную процедуру для данного потенциала необходимо провести всего один раз (при заданном числе бейтмановских узлов N), а дальше уже однажды найденный приближенный потенциал можно использовать для многих трехчастичных расчетов.

В последующем метод Бейтмана был применен для решения еще двух классов задач теории рассеяния.

Во-первых, Беляев с сотрудниками [13] применили его для решения трехмерного уравнения Липпмана — Швингера, т. е. без разложения его на парциальные волны. При этом вместо скалярных промежуточных точек s_i вводятся промежуточные векторы ξ_i (расположенные в плоскости рассеяния, задаваемой начальным и конечным импульсами), с помощью которых сепарабилизируется потенциал $V(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Следует при этом иметь в виду, что локальный потенциал в импульсном представлении зависит только от разности аргументов ($\mathbf{p} - \mathbf{q}$) и, строго говоря, сепарабельное разложение такой функции не будет сходиться. Этот дефект, однако, относится к области больших значений импульсов p и q и практически не существен. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Во-вторых, Харченко с сотрудниками [14] с успехом применили этот метод для решения задачи трех, а затем и четырех частиц. В трехчастичной задаче бейтмановское разложение используется для сепарабельного разложения ядра уравнения Фаддеева $U(p, p'; K)$ (такое трехчастичное ядро получается при использовании в двухчастичной системе сепарабельных потенциалов). В четырехчастичной задаче бейтмановская сепарабилизация используется для разложения трехчастичной ампли-

туды вне массовой поверхности, входящей в ядра четырехчастичных уравнений (см. Дополнение 2). Поскольку такой подход является весьма перспективным для решения интегральных уравнений многочастичного рассеяния (с $N > 3$), приведем некоторые подробности [14].

При использовании в качестве двухчастичного взаимодействия сепарабельного потенциала

$$V(k, k') = - \frac{\lambda}{M} g(k) g(k'),$$

трехчастичное уравнение для системы трех одинаковых бесспиновых частиц (для простоты рассмотрим задачу на связанные состояния) будет

$$a(p) = \frac{4\pi\lambda}{d(\sqrt{K^2 + 3/4p^2})} \int_0^\infty U(p, p'; K) a(p') p'^2 dp',$$

где

$$d(q) = 1 - 4\pi\lambda \int_0^\infty \frac{g^2(k) k^2 dk}{k^2 + q^2},$$

а ядро

$$U(p, p'; K) = \int_{-1}^1 \frac{g(\sqrt{V^{1/4}p^2 + p'^2 + pp'x}) g(\sqrt{V^{p^2+1/4}p'^2 + pp'x})}{K^2 + p^2 + p'^2 + pp'x} dx. \tag{Д1.13}$$

Затем это трехчастичное ядро сепарабилизируется согласно методу Бейтмана (Д1.9) — (Д1.10), и в результате интегральное уравнение сводится к алгебраической системе небольшой размерности. В частности, энергии связанных состояний находятся из условия обращения в нуль детерминанта полученной алгебраической системы:

$$\Delta(K) \equiv \det |\delta_{mn} - R_{mn}(K)|; \quad m, n = 1, \dots, N;$$

где

$$R_{mn}(K) = \frac{4\pi\lambda}{A_n(s_n, s_n; K)} \int_0^\infty \frac{A_m(p, s_m; K) A_n(p, s_n; K)}{d(\sqrt{K^2 + 3/4p^2})} p^2 dp.$$

Некоторой особенностью бейтмановской процедуры здесь является то, что приближаемое ядро зависит еще

и от полной трехчастичной энергии $W = K^2/M$, причем при $W > 0$ ядро имеет неаналитическую особенность (см. основной текст). Поэтому, хотя в области $W < 0$ метод весьма эффективен [14] — единственное отличие от стандартной процедуры заключается в появлении энергетической зависимости в бейтмановских форм-факторах $A_n(p, s_n; K)$, — но при положительных энергиях применимость вышеописанной процедуры может быть сомнительной.

Тем не менее процедура сепарабилизации Бейтмана была с успехом применена Савицким [15] в сложной задаче о развале $4N$ -системы в рамках четырехчастичных интегральных уравнений Грассбергера — Сандхаса для сепарабилизации $3N$ -амплитуд при положительных энергиях.

Совершенно аналогичный подход был предложен в работах [4,16]. Единственное отличие этого подхода от процедуры Бейтмана заключается в том, что в качестве базиса сепарабельного разложения здесь используются не сечения самой приближаемой функции $U(s_i, p, K)$, а какая-либо полная система функций $\{\varphi_n(p)\}$, не обязательно ортонормированная, по которой осуществляется фурье-разложение:

$$V(p, q) = \sum_{n,m}^N C_{n,m} \varphi_n(p) \varphi_m(q) \quad \text{для потенциала,}$$

и

$$U_{ij}(p, p'; K) = \sum_{n,m}^N C_{nm}^{(ij)}(K) \bar{\varphi}_n(p) \bar{\varphi}_m(p')$$

для трехчастичного ядра;

здесь $U_{ij}(p, p'; K)$ — матричное трехчастичное ядро, получаемое при сепарабельном разложении двухчастичного потенциала. В работе [4] показано, что в ряде случаев удобный базис разложения $\{\varphi_n(p)\}$ можно прямо найти среди формул теории специальных функций. В простых случаях, в частности для гауссовских двухчастичных потенциалов, оказывается достаточным взять базис из четырех функций как для двух- так и для трехчастичной системы, т. е. 4×4 -разложение как для $V(p, q)$, так и для $U_{ij}(p, p'; K)$ [4,16]. Это дает при ре-

шении трехчастичной задачи простую алгебраическую систему размерности 16×16 , причем, в отличие от процедуры Бейтмана, не требуется отыскивать узловые точки s_n , это экономит много усилий в сложных случаях. Описанный метод фурье-разложений представляется простым для реализации и весьма эффективным, однако его применимость в области положительных энергий $W > 0$ для разложения трехчастичного ядра (Д1.13) также может оказаться проблематичной.

Некоторые надежды на успех, однако, вселяет работа Осборпа [16], который на примере двухчастичного рассеяния показал, как можно учесть появляющиеся сингулярности по энергии.

3. Метод Адхикари — Слоана [6].

Подход Адхикари — Слоана (Adhikari — Sloan) основывается на следующих не вполне строгих, но разумных соображениях. Рассмотрим интегральное уравнение

$$t = V + Kt \quad (\text{Д1.14})$$

и приблизим ядро K оператором конечного ранга

$$K_s = \sum_{n,m}^N K |u_n\rangle d_{nm} \langle v_m|. \quad (\text{Д1.15})$$

При подстановке K_s вместо K в (Д1.14) находим, что в приближенное решение входят только проекции точного решения на подпространство $\{v\} = \{\langle v_1|, \langle v_2|, \dots, \langle v_N|\}$, и поэтому качество приближения зависит фактически не столько непосредственно от свойств ядра, сколько от свойств решения, которое в конечном итоге также определяется ядром. В частности, ядро уравнения Липпмана — Швингера $G_0 V$ сингулярно при положительных энергиях, решение же будет гладкой функцией. Следовательно, более разумно при выборе базиса сепарабельного разложения исходить из свойств решения, а не ядра. Выбор же базиса для аппроксимации решения уравнения равнозначен выбору некоторого конечномерного пространства, в котором и рассматриваются операторы. В частности, из разложения (Д1.15) следует равенство

$$K_s |u_n\rangle = K |u_n\rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, при действии приближенного оператора K_s на произвольную линейную комбинацию, составленную из векторов базиса $|u_n\rangle$, получается точно тот же результат, что и при действии точного оператора K , т. е. приближенный оператор K_s совпадает с точным в подпространстве, натянутом на векторы $|u_n\rangle$. Если теперь допустить, что

$$\langle v_m| = \langle w_m|K, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

где векторы $\langle w_m|$ пока не определены, то из (Д1.15) также следует, что для произвольной функции $|u\rangle$ (если только $K|u\rangle$ существует) проекция вектора $K_s|u\rangle$ на подпространство $\{\langle w_m|\}$ также является точной (т. е. совпадает с проекцией точной величины $K|u\rangle$).

Иными словами, в АС-методе основной упор делается на аппроксимацию потенциалов и ядер уравнений в операторном смысле, а не в смысле поточечной аппроксимации, как в методе Бейтмана. В определенном смысле УПП-метод также основывается на свойствах решения, а не ядра. Например, вблизи полюса t -матрицы УП-приближение является очень хорошим, хотя аппроксимация потенциала одним УП-сепарабельным членом является плохой (см. табл. 1 и 2).

Более того, подход Адхикари — Слоана представляет перспективным и с той точки зрения, что он обеспечивает удобный переход к проблеме трех, четырех и так далее частиц, поскольку в ядра интегральных уравнений для N частиц входят, в качестве основной части решения уравнений с меньшим числом частиц. Причем АС-подход допускает либо сепарабельное разложение только ядра, без сепарабилизации неоднородного члена, либо сепарабилизацию и того и другого (это зависит от цели аппроксимации). Преимуществом АС-подхода является также большая гибкость при выборе базиса (см. ниже) и то, что при определенных частных выборах базиса мы можем получить другие методы аппроксимации (метод Вейсберга, Бейтмана и т. д.).

Итак, в методе Адхикари — Слоана исходят из разложения потенциала общего вида

$$V \Rightarrow V_s = \sum_{n,m=1}^N V |u_n\rangle D_{nm} \langle v_m|, \quad (\text{Д1.16})$$

где $(D^{-1})_{mn} = \langle v_m | u_n \rangle$; $n, m = 1, 2, \dots, N$, а $\langle v_1 |$, $\langle v_2 |$, \dots , $\langle v_N |$ — второй набор функций, выбор которых подчинен первоначально лишь требованию, чтобы $N \times N$ -матрица D^{-1} была несингулярной. Как уже отмечалось, при этом справедливо равенство

$$V_s |u_n\rangle = V |u_n\rangle, \quad n = 1, \dots, N.$$

Выбор функций $|u_n\rangle$ (и это существенно) определяется целями аппроксимации, а не делается «универсальным образом», как например, в методе Бейтмана. Например, в ядре уравнения Липпмана — Швингера оператор V действует на произведение $G_0 t$, где t — плавная функция импульса. Следовательно, в этом случае удобно выбрать базис так:

$$|u_n\rangle = G_0 |f_n\rangle,$$

где $|f_n\rangle$ — плавная функция импульса.

При таком выборе получаем

$$V_s = \sum_{n,m=1}^N V G_0 |f_n\rangle D_{nm} \langle v_m |, \quad (\text{Д1.17})$$

где

$$(D^{-1})_{nm} = \langle v_m | G_0 |f_n\rangle \text{ и } V_s G_0 |f_n\rangle = V G_0 |f_n\rangle.$$

Такой базис приводит к зависящему от энергии разложению для потенциала. Однако эта энергетическая зависимость может быть как раз пужной (или удобной) для сепарабельной аппроксимации t -матрицы.

После введения разложения (Д1.17) в уравнение Липпмана — Швингера

$$t = V + V G_0 t,$$

находим выражение сепарабельной t -матрицы

$$t_s = \sum_{n,m=1}^N T G_0 |h_n\rangle J_{nm} \langle v_m |, \quad (\text{Д1.18})$$

где

$$(J^{-1})_{nm} = \langle v_m | G_0 |h_n\rangle$$

и новый набор базисных функций

$$|h_n\rangle = |f_n\rangle - V G_0 |f_n\rangle.$$

Из (Д1.18) теперь находим

$$t_s G_0 |h_n\rangle = t G_0 |h_n\rangle; \quad (\text{Д1.19})$$

т. е., учитывая, что ядро уравнений Фаддеева есть оператор tG_0 , заключаем, что выбор разложения в виде (Д1.17) дает аппроксимацию трехчастичного интегрального ядра, которая точна в пространстве, натянутом на векторы $|h_n\rangle$, хотя аппроксимация (Д1.17) для потенциала в смысле поточечной аппроксимации может быть неудовлетворительной.

До сих пор выбор второго базиса $\langle v_m |$ никак не детализировался. Используем теперь свободу в выборе этого базиса. Адхикари и Слоан исследовали пять возможных выборов бра-векторов $\langle v_m |$

$$\langle v_m | = \langle f_m |, \quad (\text{а})$$

$$\langle v_m | = \langle f_m | G_0 V, \quad (\text{б})$$

$$\langle v_m | = \langle f_m | G_0^\dagger V, \quad (\text{в})$$

$$\langle v_m | = \langle f_m | V \text{ и заменой } |u_n\rangle \text{ на } |f_n\rangle, \quad (\text{г})$$

$$\langle v_m | = \langle p_m | t, \quad (\text{д})$$

где p_1, \dots, p_N — некоторые выбранные значения импульса. Выбор (а) является самым простым и требует меньше интегрирований, чем другие варианты, однако при этом приближенный потенциал не является симметричным (как исходный) и поэтому t -матрица не удовлетворяет правильному соотношению унитарности. Тем не менее Адхикари и Слоан [6] показали, что этот простой базис очень удобен при аппроксимации ядра уравнения Липмана — Швингера. Выбор (б) делает t -матрицу симметричной (для действительных $|f_n\rangle$), а вариант (в) приводит к явно эрмитовскому приближенному потенциалу, и следовательно, к t -матрице, удовлетворяющей правильному соотношению унитарности. Случай (г) дает действительный и эрмитов потенциал и наиболее употребителен. Наконец, выбор (д) является наиболее интересным, хотя и наиболее трудным для реализации, поскольку этот вариант приводит к важному свойству приближенного t -оператора:

$$\langle p_m | t_s = \langle p_m | t, \quad m = 1, \dots, N.$$

Это означает, что матричный элемент $\langle p | t_s | p' \rangle$ совпадает с точным матричным элементом в N разных точках p_m , т. е. является односторонним аналогом метода Бейтмана, но уже не для потенциала, а прямо для t -матрицы. Если, в частности, одно из значений p_m совпадает с импульсом на массовой поверхности, т. е. $p_i = k$, то приближенная t -матрица будет совпадать с точной на «полувнемассовой» поверхности, когда один из импульсов лежит на, а другой вне массовой поверхности. Это дает односторонний аналог известного приближения Ковальского — Нойеса (см. ниже). Важно добавить, что указанное полезное свойство приближенной t -матрицы дополняется соотношением (Д1.19), которое все еще справедливо.

В практических расчетах вариант (д) удобно комбинировать с более простыми вариантами, например (г). Это обеспечивает хорошую аппроксимацию t -матрицы как вблизи полюса (где используется именно разложение (д)), так и вдали от него, где разложение типа (г) хорошо сходится. Причем точную t -матрицу, необходимую для аппроксимации (д), тоже удобно вычислять через разложение типа (г), но взяв в нем больше членов. Как показывают конкретные расчеты [6], такой гибридный базис обеспечивает наиболее экономную сепарабельную аппроксимацию t -оператора среди всех использованных методов (см. ниже).

Укажем другие частные случаи, следующие из общих формул, приведенных выше. Если в качестве $|f_n\rangle$ в разложении (Д1.17) взять правые собственные функции $|\psi_n\rangle$ ядра VG_0 , а вместо $\langle v_n|$ — левые собственные функции $\langle \bar{\psi}_n|$ ядра G_0V , т. е.

$$VG_0(E) |\psi_n\rangle = \eta_n(E) |\psi_n\rangle, \tag{Д1.20}$$

$$\langle \bar{\psi}_m | G_0(E) V = \eta_m(E) \langle \bar{\psi}_m |,$$

то соотношение биортогональности

$$\langle \bar{\psi}_m | G_0 | \psi_n \rangle = \delta_{mn} \langle \bar{\psi}_n | G_0 | \psi_n \rangle$$

приводит сепарабельное разложение (Д1.18) к ряду Вейнберга

$$t_s = \sum_{n=1}^N \frac{\eta_n}{1 - \eta_n} \frac{|\psi_n\rangle \langle \bar{\psi}_n|}{\langle \bar{\psi}_n | G_0 | \psi_n \rangle}.$$

Если теперь в (Д1.20) энергию E выбрать постоянной и равной энергии связанного состояния, то получим унитарно-полюсное разложение Хармса, описанное выше. Если же в качестве базисных функций $|u_n\rangle$ в (Д1.16) взять собственные состояния полного гамильтониана $H_0 + V$ (как дискретного, так и непрерывного спектра), а в качестве $\langle v_m|$ взять функции

$$\langle v_m| = \langle u_m|V,$$

делающие потенциал V_s симметричным, то получим сепарабельное разложение, предложенное Эрнстом с соотр. [17]. Это разложение, хотя его и сложно получить, также обладает рядом привлекательных черт, приводя, например, к сепарабельной t -матрице, совпадающей с точной при заданных энергиях E_1, E_2, \dots, E_N .

И, наконец, выбирая в качестве $\langle p|u_n\rangle$ дельта-функции, т. е.

$$\langle p|u_n\rangle = \delta(p - p_n), \quad n = 1, \dots, N,$$

и делая V_s симметричным, приходим точно к разложению Бейтмана для потенциала. Детальное изучение разных вариантов (а) — (д), сделанное в работах [6] для синглетного 1S_0 NN-потенциала Рейда, показало, что при выборе в качестве $|u_n\rangle$ функций типа $1/(p^2 + \beta^2)C_n(p)$, где $C_n(p)$ — ортогональные полиномы, шесть членов разложения обеспечивают высокую точность аппроксимации t -матрицы при всех изученных энергиях ($0 \leq E < < 300$ МэВ), причем путем улучшения аппроксимации вблизи нулевой энергии с помощью варианта (д), число членов можно еще уменьшить. Аналогичные результаты были найдены Адхикари и Слоаном [6] и при анализе сепарабельного разложения в связанных $^3S_1 - ^3D_1$ -каналах для NN-потенциала Рейда.

Резюмируя, можно сказать, что подход Адхикари — Слоана весьма эффективен для широкого круга задач, причем достоинствами метода являются гибкость базиса, его аналитический вид и возможность использовать гибридный базис, т. е. разные аппроксимации при низких и высоких энергиях. Более того, именно использование АС-метода для сепарабельной аппроксимации t -операторов позволило недавно Афшану и Биреллу [10, 18] довести, наконец, точность 3N-результатов до уровня точ-

ности, полученной на основе прямых методов решения системы двумерных уравнений Фаддеева (см. ниже). Недостатком АС-метода, в отличие от метода Бейтмана, является необходимость изобретения удобного аналитического базиса операторного разложения.

4. О сходимости сепарабельных разложений операторов теории рассеяния.

В этом разделе мы кратко обсудим с несколько более строгих позиций сходимость сепарабельных разложений, основываясь в основном на работах Осборна [19] и группы Левинжера [5, 20].

Из основного текста книги известно, что оператор конечного ранга может аппроксимировать (по норме) с наперед заданной точностью лишь компактный оператор. Оператор же локального потенциала или потенциала, содержащего локальную часть, есть оператор умножения (в координатном пространстве) и, следовательно, некомпактен. Это означает, что норма Гильберта — Шмидга (см. основной текст) разности между точным и приближенными операторами расходится, т. е.

$$\|V - V_s^{(N)}\|_{\text{Г.-Ш}} = \infty$$

для всех $V_s^{(N)}$, где N — ранг аппроксимации.

Если же использовать операторную норму, определяемую в гильбертовом пространстве \mathcal{H} как

$$\|A\| = \inf_{f \in \mathcal{H}} \frac{\|Af\|_{\mathcal{H}}}{\|f\|_{\mathcal{H}}},$$

где $\|f\|_{\mathcal{H}}$ — обычная норма функции в гильбертовом пространстве, то и в операторной норме сходимость $V_s^{(N)}$ к V невозможна, т. е. нельзя найти такую последовательность $V_s^{(N)}$ ($N = 1, \dots, \infty$), чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|V - V_s^{(N)}\| = 0.$$

Все эти факты, являющиеся прямым следствием некомпактности оператора локального потенциала, были известны уже давно. Заслужой же Осборна было доказательство (впрочем, довольно простое) того, что и t -матрица, соответствующая локальному потенциалу, также

является некомпактным оператором, и следовательно, как и потенциал, не допускает сходящейся по норме сепарабельной аппроксимации, т. е.

$$\|t(z) - t_s^{(N)}(z)\|_{\Gamma.-\text{ш}} = \infty \quad \text{для всех } t_s^{(N)}(z),$$

и аналогично для операторной нормы. Ход доказательства Осборна «на пальцах» выглядит так: оператор $t(z)$, удовлетворяющий уравнению Липпмана — Швингера

$$t(z) = V + VG_0(z)t(z)$$

является суммой некомпактного оператора V и произведения компактного оператора VG_0 на t . Если допустить, что $t(z)$ — компактный оператор, то приходим к противоречию, поскольку компактный оператор при этом оказывается равным сумме некомпактного и компактного операторов. Значит, $t(z)$ некомпактен. И хотя более строгое доказательство требует более длинного рассуждения, общий вывод его тот же.

После опубликования работы Осборна возникла некоторая неясность относительно самого смысла сепарабельных разложений. Разрешение парадокса было дано в работах группы Левинжера [20], а также в статье Слоана и Грея [21] и заключается в следующем. Расходимость нормы Гильберта — Шмидта для потенциала означает, что

$$\text{Sp}(VV^\dagger) = \int \langle p | V | p' \rangle^2 dp dp' = \int [f(q)]^2 d^3q \int d^3Q = \infty,$$

где $q = p - p'$ и $Q = p + p'$. И ясно, что расходимость возникает благодаря очень большим значениям $Q = p + p'$. Поэтому если ограничиться конечными (хотя и большими) значениями Q , то норма станет конечной, а соответствующий оператор компактным. Вместе с тем также ясно, что 3N-данные при низких энергиях: энергия связи трития, длины nd-рассеяния и т. д. — нечувствительны к поведению двухчастичной t -матрицы при очень больших импульсах (это было непосредственно показано в работах [22]). Следовательно, для одной цели (например, для расчета 3N-энергий связи) сепарабельная аппроксимация t -матрицы может быть очень хорошей, а для другой — скажем, для изучения поведения электрического форм-фактора основного состояния ${}^3\text{H}$ при больших q^2 — весьма плохой. Поэтому изучение качества се-

парабельной аппроксимации само по себе имеет мало смысла как и соответствующие численные критерии, если не иметь при этом в виду какую-либо конкретную цель. Заметим, что именно это положение и лежит в основе подхода Адхикари — Слоана.

5. Сравнение результатов, полученных в 3N-системе с разными сепарабельными разложениями.

В этом разделе мы сопоставим несколько результатов, полученных для 3N-системы с помощью разных сепарабельных разложений одних и тех же NN-потенциалов. Поскольку это сопоставление имеет лишь иллюстративную цель, то ограничимся сравнением результатов лишь для одной величины — энергии связи ${}^3\text{H}$. Мы рассмотрим два хорошо исследованных случая:

1) центральный потенциал Мальфлие — Тьона (MT) [23] (номер 5 в классификации авторов), имеющий вид суперпозиции двух юкавских потенциалов разного знака, и

2) реалистический NN-потенциал Рейда, где учитываются лишь два канала: 1S_0 — синглет, и ${}^3S_1 - {}^3D_1$ — триплет.

Для MT-потенциала в табл. 3 сравниваются результаты УПП, УПР (см. п. 1 настоящего Дополнения) с двумя значениями E_B найденными с помощью:

Таблица 3

Сопоставление значений E_B для потенциала Мальфлие — Тьона (учитываются только S-волны)

Метод	E_B , МэВ
УПР	7,44
УПП	7,56
Прямое решение уравнений Фаддеева	7,3±0,1
Теория возмущений для t -матрицы	7,539

а) прямого решения двумерных уравнений Фаддеева [23, 24];

в) теории возмущений для t -матрицы [25].

Таблица наглядно иллюстрирует хорошую точность унитарно-полюсного приближения при расчете энергии

связи и малое отличие в результатах полного разложения (УПР) и первого члена (УПП). Вообще, многочисленные расчеты группы Левинжера показали весьма высокую точность УП-аппроксимации в $3N$ -задаче в случае центральных потенциалов с отталкивающим кором. В частности, для центрального двухчленного сепарабельного потенциала Табакина было найдено [5]

$$E_B \text{ (УПП)} \quad - 8,60 \text{ МэВ};$$

$$E_B \text{ (точное значение)} - 8,40 \text{ МэВ};$$

то же заключение следует и из прямого сравнения при отрицательных энергиях точных и УПП значений t -матрицы для синглетного потенциала Рейда (см. табл. 2). Для связанных же ${}^3S_1 - {}^3D_1$ каналов точность УПП несколько хуже, что уже обсуждалось выше. Это подтверждается и приводимой ниже табл. 4.

Таблица 4

Сопоставление величин E_B (3N), найденных с помощью различных сепарабельных разложений для NN -потенциала Рейда

Метод	E_B , МэВ
УПП	7,45
1A-приближение	7,15
1A+теория возмущений	6,95
1A+1R	6,99
1A+1R+теория возмущений	7,03
2A+1R+теория возмущений	7,02
УПР	$7,02 \pm 0,2$
АС-метод	$6,97 \pm 0,03$
Прямое решение уравнения Фаддеева	7,0

Из этой таблицы следует, что УПП-результат примерно на 0,5 МэВ отклоняется от точного, а точность полного разложения (УПР) около 0,2 МэВ. Точность же метода Адхикари — Слоана (0,03 МэВ) существенно выше, хотя размерность системы уравнений, подлежащей решению в АС-методе, ниже, чем в УПП [10, 18]. Нам неизвестно никаких других расчетов $3N$ -системы, сделанных с потенциалом Рейда на основе сепарабилизации t -матри-

цы, однако и имеющиеся данные позволяют заключить, что для реалистической $3N$ -задачи АС-метод даст более экономное и точное разложение t -оператора, чем другие предложенные подходы.

Б. Итерационные методы

Итерационные методы в целом представляются более предпочтительными для решения сложных задач теории рассеяния по сравнению с другими имеющимися методами решения. Это обусловлено как общими преимуществами итерационных процессов (см. учебники по вычислительной математике, например книгу Бахвалова [26]), так и характерными особенностями квантовой механической теории рассеяния. Среди этих последних отметим следующие:

1) итерации интегральных уравнений теории рассеяния (Липпмана — Швингера, Фаддеева и т. д.) соответствуют борновскому ряду или ряду многократного рассеяния (см. основной текст) и допускают ясную физическую интерпретацию;

2) хорошая сходимость подобных рядов при высоких энергиях, где часто 1—2 члена дают удобное и простое описание процесса; причем ряды теории многократного рассеяния при высоких энергиях прямо приводят к широко используемым в физике приближениям типа импульсного, Глаубера и т. д.;

3) итерации многомерных интегральных уравнений сводятся к расчету многократных интегралов, вычисление которых значительно проще решения многомерного интегрального уравнения.

Имеются также и другие соображения, свидетельствующие в пользу итерационных подходов. В частности, во многих случаях, особенно при средних и высоких энергиях, в процессе рассеяния дает вклад много парциальных волн, причем в каждой волне нет ярко выраженных резонансов или околопороговых связанных состояний, управляющих процессом рассеяния (как это было в $3N$ -задаче при низких энергиях). Типичным примером является интегральная теория прямых ядерных реакций типа (d, p) , т. е. описание прямых ядерных процессов в рамках трехчастичной модели с использованием трех-

частичных интегральных уравнений, где исходные двухчастичные взаимодействия нуклона с ядром близки к оптическим потенциалам или хорошо моделируются этими потенциалами, и необходимо учитывать много парциальных волн. Ясно, что сепарабельные разложения в таких задачах неэффективны. Еще одним соображением в пользу итерационных подходов служит аргумент быстроты сходимости, отмеченный в докладе Фаддеева на повосибирском симпозиуме по ядерной физике [27]. Суть дела в том, что сходимость сепарабельных разложений в лучшем случае степенная, тогда как сходимость итерационного процесса экспоненциальная [27].

Поэтому, вероятно, наилучшим способом решения сложных задач теории многочастичного рассеяния является гибридный метод, когда характерные особенности типа узких резонансов и связанных или виртуальных состояний учитываются с помощью сепарабельных членов в соответствующих амплитудах, а остаток итерируется [27]. Именно на этой идее основан метод Вейнберга и АГС (см. основной текст).

И, наконец, наиболее убедительным аргументом в пользу итеративного подхода к решению обсуждаемых проблем служит тот факт, что наиболее точные (и одновременно наиболее ранние) расчеты 3N-системы с реалистическими потенциалами были сделаны именно итеративными методами [23, 24]. Более того, единственные до сих пор расчеты при средних и высоких энергиях в 3N-задаче (упругое рассеяние и особенно реакция развала $n + d \rightarrow n + n + p$) с реалистическими NN-потенциалами сделаны также на основе итерационной техники [28, 29].

Однако итеративные методы удобны в том случае, когда итерации сходятся, а это выполняется далеко не всегда. В частности, для nd-рассеяния итерации уравнений Фаддеева начинают сходиться лишь при энергии порядка 100 МэВ [30]. Для преодоления этой трудности было предложено два метода (см. основной текст): аналитическое продолжение по константе связи с помощью паде-аппроксимантов и метод моментов Воробьева, примененный для решения уравнений Фаддеева Хармсом [31]. В настоящем разделе мы обсудим два других метода улучшения сходимости борновских рядов, которые были предложены в последнее время: метод ортогонального проек-

тирования и вычитательная процедура, основанная на редукции Фредгольма, развитая Сасакава — Ковальским — Нойесом [7, 32] и исследованная Фудой [33].

1. Метод ортогонального проектирования.

Метод ортогонального проектирования в теории рассеяния, предложенный в работах [34—37], позволяет решать ряд задач собственно теории рассеяния, а также задачи атомной и ядерной физики; в частности, техника ортогонального проектирования позволяет учитывать принцип Паули при столкновении сложных ядерных частиц, а также при расчете систем, включающих несколько составных частиц [36]. При перестройке борновских рядов на основе метода ортогонального проектирования используется хорошо известный факт ортогональности функций дискретного и непрерывного спектра эрмитова гамильтониана для любого числа частиц. Кроме того, используется другое хорошо известное положение, что норма оператора, вообще говоря, уменьшается при сужении пространства, в котором он рассматривается, в частности норма интегрального ядра уменьшается при рассмотрении интегрального уравнения в ортогональном подпространстве некоторого полного пространства.

Рассмотрим для примера уравнение Липпмана — Швингера для волновой функции рассеяния в том случае, когда при отрицательных энергиях имеется связанное состояние

$$\psi_E = \phi_E + G_0(E) V \psi_E, \quad (Д1.21)$$

где ϕ_E — свободное решение. Точное решение этого уравнения ψ_E должно быть, очевидно (для действительного потенциала V), ортогонально функции связанного состояния ψ_0 , являющейся решением соответствующего однородного уравнения.

Если теперь итерировать уравнение (Д1.21), т. е. записать бесконечный итеративный ряд для решения

$$\psi_E = \sum_{n=0} (G_0(E) V)^n \phi_E, \quad (Д1.22)$$

то при низких энергиях борновский ряд (Д1.22) будет расходиться, поскольку наибольшее собственное значение ядра $G_0 V$ будет при малых энергиях больше едини-

цы. Заметим при этом, что хотя сумма ряда ортогональна к ψ_0 , но *каждый член не обладает этим свойством*. Разумно предположить теперь, что если перестроить борновский ряд (Д1.22) таким образом, чтобы *каждый член* ряда был ортогонален к функции связанного состояния, т. е. записать итеративный ряд в подпространстве, ортогональном ψ_0 , то сходимость ряда (Д1.22) должна существенно улучшиться. Действительно, полную функцию Грина рассматриваемой задачи можно записать, используя спектральное представление, в виде

$$G(E) = \frac{|\psi_0\rangle\langle\psi_0|}{E - E_0} + \int \frac{|\psi_\varepsilon\rangle\langle\psi_\varepsilon| d\varepsilon}{E - \varepsilon} = G_D(E) + G_C(E), \quad (\text{Д1.23})$$

где два вклада G_D и G_C , отвечающие соответственно дискретной и непрерывной частям спектра, определены в ортогональных подпространствах полного пространства. Хорошо известно далее, что расходимость борновского ряда (Д1.22) при малых энергиях обусловлена по существу полюсом, имеющимся в G_D , поскольку ряд теории возмущений (Д1.22) не может воспроизвести близкий полюс в точке связанного состояния. Поэтому, если построить итеративный ряд в подпространстве, ортогональном $|\psi_0\rangle$, т. е. построить ряд лишь для части (G_C) полной функции Грина, то такой ряд будет сходиться гораздо быстрее исходного и будет сходиться даже там, где исходный ряд расходится. Строгая теория, кратко изложенная ниже, подтверждает эти интуитивные соображения [34, 35].

Известно, что представления такого рода весьма широко используются в современной теории рассеяния и помогают преодолеть во многих случаях затруднения со сходимостью рядов. Хорошим примером такого типа является K -матричный подход в теории рассеяния и реакций [38], который использует другое свойство точного решения уравнений Липпмана — Швингера, а именно тот факт, что точное решение дает унитарную S -матрицу; другими словами, оператор рассеяния должен удовлетворять хорошо известному соотношению унитарности (см. основной текст и книгу [38]). Поэтому в K -матричном подходе итеративный ряд для t -оператора перестраивают так, чтобы приближение любого порядка приводило к

унитарной амплитуде рассеяния, тогда как обычный борновский ряд для t -матрицы не обладает этим свойством. В результате такой перестройки, как хорошо известно [38], сходимость приближенных амплитуд к точным значительно улучшается. На соображениях подобного рода основан также метод Сасакавы [32] перестройки борновских рядов теории рассеяния (см. ниже).

Возвращаясь теперь к методу ортогонального проектирования, отметим, что стандартная проекционная техника Фешбаха мало подходит для нашей цели, поскольку не дает предписаний для нахождения операторов рассеяния в ортогональном подпространстве (заметим, что предписания типа QtQ , где Q — проектор, не годятся для указанной цели, как не годится и базис из ортогонализированных плоских волн [37]). Весьма удобной техникой для построения нужных операторов оказался метод ортогонализирующих псевдопотенциалов [34], заключающийся в следующем.

Пусть нам необходимо решить уравнение Шредингера с эрмитовым гамильтонианом

$$(H - E)\psi_E = 0, \quad (D1.24a)$$

с дополнительным условием ортогональности

$$\langle \varphi | \psi_E \rangle = 0. \quad (D1.24b)$$

Ради общности предположим, что φ — произвольный нормированный вектор. Задачу (D1.24) нужно понимать как нахождение решения уравнения Шредингера в подпространстве, ортогональном $|\varphi\rangle$. Ее удобно решать путем перехода к псевдогамильтониану [34]

$$\tilde{H} \equiv H + \lambda\Gamma, \quad \Gamma = |\varphi\rangle\langle\varphi|,$$

причем сначала следует решить задачу в полном пространстве с псевдогамильтонианом \tilde{H} , а в окончательном решении действительную константу λ следует устремить к бесконечности. Сепарабельный потенциал $\lambda\Gamma$ ($\lambda \rightarrow \infty$) будем называть ортогонализирующим псевдопотенциалом (ОПП). Решение $\tilde{\psi}_E$ уравнения Шредингера с псевдогамильтонианом \tilde{H} , т. е.

$$(E - H) |\tilde{\psi}_E\rangle = \lambda |\varphi\rangle\langle\varphi| \tilde{\psi}_E,$$

имеет вид

$$\tilde{\psi}_E = \psi_E + C(\lambda)G(E)|\varphi\rangle,$$

где $G(E) = (E - H)^{-1}$ есть функция Грина исходного гамильтониана. Купстапта

$$C(\lambda) = \frac{\lambda \langle \varphi | \psi_E \rangle}{1 - \lambda \langle \varphi | G(E) | \varphi \rangle},$$

а примесь состояния φ в решении $\tilde{\psi}_E$ равна

$$\langle \varphi | \tilde{\psi}_E \rangle = \frac{\langle \varphi | \psi_E \rangle}{1 - \lambda \langle \varphi | G(E) | \varphi \rangle}.$$

Очевидно, в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(\lambda) = - \frac{\langle \varphi | \psi_E \rangle}{\langle \varphi | G | \varphi \rangle} \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle \varphi | \tilde{\psi}_E \rangle = 0.$$

Поэтому при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет место строгая ортогональность, т. е. $\Gamma \tilde{\psi}_E = 0$ и

$$\tilde{\psi}_E = \psi_E - \frac{G\Gamma\psi_E}{\Gamma G\Gamma}. \quad (\text{Д1.25})$$

С помощью известных резольвентных тождеств легко найти функцию Грина псевдогамильтониана \tilde{H} [34]

$$\tilde{G} \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (E - \tilde{H})^{-1} = G - G\Gamma(\Gamma G\Gamma)^{-1}\Gamma G, \quad (\text{Д1.26})$$

где оператор $(\Gamma G\Gamma)^{-1}$ определен только в подпространстве, натянутом на векторы, входящие в Γ . Если рассматривать случай так называемого собственного проектирования (в этом случае Γ — проектор на собственные функции связанных состояний гамильтониана H), то Γ коммутирует с H и проектированная функция Грина равна, как легко убедиться,

$$\tilde{G} = (1 - \Gamma)G = G(1 - \Gamma) \equiv G_c,$$

т. е. получается путем исключения из полной функции Грина полюсов, отвечающих связанным состояниям, включенным в проектор Γ . Другими словами, в спектральном разложении (Д1.23) остается часть G_c . Далее, поскольку функции рассеяния ортогональны функциям

связанных состояний, то, очевидно, они не изменяются при замене H на \tilde{H} (при любом λ). Действительно, при этом из (Д1.25) получаем $\tilde{\psi}_E = \psi_E$.

Пусть теперь $H = H_0 + V$, тогда легко получим уравнение

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 + \tilde{G}_0 V \tilde{G}, \quad (\text{Д1.26a})$$

где

$$\tilde{G}_0 = (E - H_0 - \lambda \Gamma)^{-1} = G_0 - G_0 \Gamma (\Gamma G_0 \Gamma)^{-1} \Gamma G_0. \quad (\text{Д1.26б})$$

Из уравнения (Д1.26) следует искомое модифицированное уравнение Липпмана — Швингера для волновой функции $\tilde{\psi}$

$$\tilde{\psi} = \tilde{\phi} + \tilde{G}_0 V \tilde{\psi}; \quad (\text{Д1.27})$$

здесь

$$\tilde{\phi} = \phi - G_0 \Gamma (\Gamma G_0 \Gamma)^{-1} \Gamma \phi, \quad (\text{Д1.27a})$$

а ϕ — решение уравнения $(E - H_0) \phi = 0$.

Свободный член перестроенного уравнения (Д1.27) есть плоская волна в подпространстве, ортогональном функции (или функциям) связанного состояния. Эта «плоская» волна совсем не похожа на обычную ортогонализированную плоскую волну, поскольку она приводит к унитарной амплитуде рассеяния, т. е. включает фазовый сдвиг. Такое рассеяние, обусловленное целиком условием ортогональности, называется в литературе [39] ортогональным рассеянием, а сами функции $\tilde{\phi}$ называются волновыми функциями ортогонального рассеяния. Ядро перестроенного уравнения

$$\tilde{G}_0 V = G_0 V - G_0 \Gamma (\Gamma G_0 \Gamma)^{-1} \Gamma G_0 V$$

получается из исходного ядра $G_0 V$ путем вычитания некоторого члена, так что ортогонализированное ядро имеет меньшую норму, чем исходное. Поэтому итерации перестроенного уравнения (Д1.27) будут сходиться гораздо быстрее, чем итерации исходного уравнения.

При строгом подходе [38] за сходимость итераций отвечает величина наибольшего по модулю собственного значения ядра (в данном случае ядра $\tilde{G}_0 V$). Можно

доказать [35, 37], что при включении в проектор Γ всех связанных состояний исходного гамильтониана (и при отсутствии отрицательных собственных значений, по модулю больших единицы) борновский ряд для уравнения (Д1.27) будет сходиться, начиная с нулевой энергии. Изложенное выше наглядно иллюстрирует удобство использования ОПП для построения операторов рассеяния в ортогональных подпространствах. Действительно, при этом все построение осуществляется при конечном λ , т. е. в *полном* пространстве, а проектированные операторы получаются в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ уже в окончательных результатах.

Укажем теперь два случая, когда проектирование на собственный дискретный спектр может оказаться неэффективным:

а) если ядро G_0V имеет большие по модулю отрицательные собственные значения, что будет при наличии в потенциале сильной отталкивающей части (например, кора), и

б) если в задаче нет связанных, но имеются околопороговые виртуальные или резонансные состояния.

В этом последнем случае перестроенный ряд при малых энергиях сходится, а в области резонанса будет расходящимся. При дальнейшем повышении энергии ряд опять будет сходящимся. Для получения хорошо сходящихся рядов в указанных случаях была разработана процедура несобственного проектирования [37], где в проектор Γ включаются уже не собственные функции дискретного спектра задачи, а какие-либо подходящие функции, обеспечивающие наиболее быструю сходимость проектированного ряда. В частности, в случае (а) хорошим базисом, как известно [38], будут собственные функции зеркального гамильтониана $H_0 - V$, а в случае (б) — квадратично-интегрируемые функции, «похожие» на волновые функции в области резонанса [40]. Подобный метод был широко использован [41] для нахождения параметров резонансов, а также для решения других задач теории рассеяния [37, 40].

До сих пор мы обсуждали проектированные уравнения для волновой функции и резольвенты. Легко, однако, написать соответствующие уравнения для t -матрицы [37]. Это можно сделать несколькими способами. В част-

ности, проектированную t -матрицу \tilde{t} можно определить через соотношение [34]

$$\tilde{t} = -G_0^{-1} + G_0^{-1}\tilde{G}G_0^{-1}, \quad (\text{Д1.28})$$

где \tilde{G} находится из (Д1.26).

Легко показать, что при собственном проектировании на массовой поверхности $\tilde{t} = t$. Проектированная t -матрица удовлетворяет уравнению

$$\tilde{t} = (V\tilde{G}_0G_0^{-1} - \Gamma(\Gamma G_0\Gamma)^{-1}\Gamma G_0G_0^{-1}) + V\tilde{G}_0\tilde{t},$$

и при собственном проектировании второй член превращается в $-\Gamma G_0^{-1}$, т. е. на массовой поверхности вклада не дает. Поэтому окончательно приходим к следующему уравнению:

$$\tilde{t} = V\tilde{G}_0G_0^{-1} + V\tilde{G}_0\tilde{t},$$

где проектированное ядро $V\tilde{G}_0$ опять меньше (по норме) исходного. Итерации этого уравнения дают несимметричные члены, если же итерировать прямо уравнение (Д1.28) с помощью (Д1.26), то получаем симметричный ряд. В частности, в нулевом приближении получаем t -матрицу чисто ортогонального рассеяния

$$\tilde{t}_0 = -\Gamma(\Gamma G_0\Gamma)^{-1}\Gamma, \quad (\text{Д1.29})$$

куда вообще не входит оператор взаимодействия (а входит лишь проектор на дискретный спектр Γ).

В первом приближении, как легко показать, получаем

$$\tilde{t}_1 = V - (\Gamma G_0\Gamma)^{-1}\Gamma G_0V - VG_0\Gamma(\Gamma G_0\Gamma)^{-1} + \\ + (\Gamma G_0\Gamma)^{-1}\Gamma G_0VG_0\Gamma(\Gamma G_0\Gamma)^{-1},$$

и тогда матричный элемент в базисе плоских волн от t_1 будет

$$\langle \mathbf{k}' | \tilde{t}_1 | \mathbf{k} \rangle = \langle \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}'} | V | \tilde{\Phi}_{\mathbf{k}} \rangle,$$

т. е. получаем борновскую амплитуду, взятую на ортогонализированных волнах (напоминаем, что $\tilde{\Phi}_{\mathbf{k}}$ есть «свободная» ортогонализованная волна, см. (Д1.27 а)). Численные расчеты, сделанные для ряда типичных случаев [40], показывают, что сходимость такого перестроенного

ряда будет гораздо лучше первоначального борновского ряда, причем для притягивающих потенциалов в s -волне ортогонализированный ряд сходится при *всех* положительных и отрицательных энергиях.

Теперь перейдем к проектированию трехчастичных уравнений. Здесь можно проектировать как на двухчастичные связанные состояния — эту процедуру удобно использовать для исключения занятых состояний в системе трех составных частиц и, в частности, для интегрального описания прямых ядерных реакций, — так и на трехчастичные связанные состояния — с целью ускорения сходимости борновского ряда для уравнений Фаддеева. При этом снова используем резольвентное тождество (Д1.26) и после стандартной редукции Фаддеева:

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 + \tilde{G}^{(1)} + \tilde{G}^{(2)} + \tilde{G}^{(3)},$$

где

$$\tilde{G}^{(i)} = \tilde{G}_0 V_i \tilde{G},$$

получаем проектированную систему трехчастичных уравнений

$$\tilde{G}^{(i)} = \tilde{G}_i - \tilde{G}_0 + \tilde{G}_i V_i (\tilde{G}^{(j)} + \tilde{G}^{(k)}), \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (\text{Д1.30})$$

где $G_i = (E - H_0 - V_i)^{-1}$ — «двухчастичная» функция Грина, а все функции Грина со знаком \sim определены через соответствующие непомеченные функции Грина соотношением (Д1.26). Подчеркнем, что все проекторы Γ , включенные в (Д1.30), суть трехчастичные проекторы на дискретный спектр трехчастичной системы.

В матричных обозначениях ядро системы (Д1.30) можно записать так:

$$\tilde{K} = \hat{G} \hat{V} A = (1 - \hat{\Gamma}) \hat{G} \hat{V} A = (1 - \hat{\Gamma}) G_0 \hat{T} A = (1 - \hat{\Gamma}) K,$$

где K — матричное ядро исходной системы, а трехрядные матрицы \hat{G}_2 , \hat{V} , \hat{T} , \hat{G} диагональны и их элементы равны G_i , V_i , T_i , \tilde{G}_i соответственно. Элементы диагональной матрицы $\hat{\Gamma}$ суть

$$\Gamma_i = G_i \Gamma (\Gamma G_i \Gamma)^{-1} \Gamma,$$

Γ — N -мерный трехчастичный проектор, A — числовая эрмитова матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из трехчастичных уравнений для резольвент, легко обычным образом (см. основной текст) перейти к проектированной системе уравнений для волновых функций.

О сходимости проектированных уравнений можно доказать следующую теорему [37].

Если в Γ включены все связанные состояния трехчастичной системы и только они, то итерационный ряд системы (Д1.30) будет сходиться при всех энергиях ниже (наинизшего) двухчастичного порога, а также и при достаточно малых энергиях выше этого порога при условии, что собственные значения ядра исходной системы уравнений Фаддеева удовлетворяют неравенству

$$\alpha_n > -1.$$

Отметим, что выше сформулированы лишь условия, при которых сходимость рядов была доказана достаточно строго. Фактически же сделанные расчеты [40] показывают, что сходимость имеет место при *всех энергиях* — как положительных, так и отрицательных — по крайней мере для исследованных частных случаев. При отсутствии связанных и наличии околопороговых виртуальных или резонансных трехчастичных состояний вся техника собственного проектирования может быть эффективно использована и в трехчастичной системе, хотя вычисления (в отличие от случая собственного проектирования) становятся гораздо более громоздкими.

Обсудим далее кратко весьма важные и интересные особенности проекционной техники, возникающие при рассмотрении систем, включающих тождественные частицы. В этом случае было показано [40] что расходимость борновских рядов в трехчастичном и в многочастичном рассеянии тесно связана с принципом Паули и наличием так называемых *духовых* (запрещенных принципом Паули) состояний. Используем в качестве модели квартетное nd -рассеяние с s -взаимодействиями в каждой np -паре и выключенным взаимодействием между нейтронами (что

хорошо оправдано при низких энергиях, поскольку состояния с четными l для нейтронов с параллельными спинами запрещены принципом Паули. При этом можно ввести два канала:

а) физический, в котором орбитальная функция антисимметрична по перестановке P_{12} двух тождественных нейтронов, и

б) духовый (т. е. физически не реализуемый), в котором орбитальная функция симметрична по P_{12} . При этом мы имеем две фаддеевские компоненты $\psi_{s,a}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), связанные соотношением

$$\psi_{s,a}^{(2)} = \pm P_{12}\psi_{s,a}^{(1)},$$

где индексы s и a означают симметричный и антисимметричный канал соответственно.

Для компонент $\psi_{s,a}^{(i)}$ имеем скалярное уравнение

$$\psi_{s,a}^{(i)} = \varphi^{(i)} \pm G_0 T_i P_{12} \psi_{s,a}^{(i)}, \quad (Д1.31)$$

где знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к s - и a -каналам. Теперь ясно, что если в духовом (т. е. симметричном) канале имеется связанное состояние с энергией E_G , т. е. одно из собственных значений ядра $G_0 T_i P_{12}$ при энергии E_G равно $+1$, то в физическом канале ядро $-G_0 T_i P_{12}$ имеет собственное значение -1 при этой же энергии и, следовательно, итерационный ряд при положительных энергиях для уравнения (Д1.31) в физическом канале будет расходиться. Отметим для большей ясности, что ситуация целиком аналогична потенциальному рассеянию на сильном отталкивающем потенциале $V > 0$. Хорошо известно, что борновский ряд для такой задачи будет расходиться при малых энергиях, если зеркальный гамильтониан $H_0 - V$ имеет связанные состояния. Это очевидно, поскольку в уравнении Липпмана — Швингера ядра, отвечающие прямому и зеркальному гамильтонианам, будут $\pm G_0 V$, и при наличии связанных состояний в зеркальном гамильтониане некоторые собственные значения будут по абсолютной величине больше единицы. В этом случае ряд для отталкивающего потенциала будет расходиться с той же скоростью, что и для такого же притягивающего потенциала. Добавим, что взаимодействие между нейтроном и дейтроном в квартетном канале носит отталкивающий

характер, что обусловлено принципом Паули, так что аналогия с потенциальным рассеянием — почти полная.

Духовое связанное состояние в данном случае есть запрещенный принципом Паули квартетный тритон. Для NN-потенциала с параметрами, соответствующими триплетным пр-низкоэнергетическим данным (длине рассеяния и эффективному радиусу) его энергия связи оказывается около 5 МэВ по сравнению с 8,5 МэВ для реального тритона. Это духовое связанное состояние есть собственное состояние полного гамильтониана системы (и в этом смысле оно никак не отличается от физически разрешенных связанных состояний) с симметрией, запрещенной принципом Паули. И мы видели, что это запрещенное связанное состояние вызывает такую же расходимость борновского ряда, как и физически реализуемое связанное состояние*). И, как обычно, волновая функция рассеяния в физическом канале будет ортогональна духовому связанному состоянию. И более того, функция рассеяния, будучи антисимметричной относительно перестановки P_{12} , будет ортогональна произвольной симметричной относительно P_{12} функции. Поэтому и здесь итерационный ряд для трехчастичного рассеяния можно перестроить с помощью ортогонального проектирования и получить сходящийся от порога итеративный ряд; однако теперь уже $\tilde{\psi}^{(i)} \neq \psi^{(i)}$, т. е. хотя полная шредингеровская функция $\psi = \psi^{(1)} \pm \psi^{(2)}$ при проектировании на духовое состояние не меняется, но (в отличие от собственного проектирования) отдельные фаддеевские компоненты уже не ортогональны духовому состоянию. И, следовательно, найдя обычным путем проектированные функции $\tilde{\psi}^{(i)}$, затем необходимо еще по ним восстановить исходные компоненты $\psi^{(i)}$, что делается довольно просто [40].

Окончательное выражение для амплитуды рассеяния в рассматриваемой модели имеет вид

$$F_a = -\frac{\mu}{2\pi} \langle \varphi^{(i)} | G_i^{-1} \cdot (-K_i) | \tilde{\psi}_a^{(i)} \rangle + \frac{\mu}{2\pi} \langle \varphi^{(i)} | \Gamma (G_i \Gamma)^{-1} \Gamma | \varphi^{(i)} - K_i \tilde{\psi}^{(i)} \rangle. \quad (Д1.32)$$

*) Можно показать, что совершенно аналогичная ситуация возникает и в интегральных уравнениях для четырех частиц, например в dd-рассеянии, и, вероятно, для общей проблемы рассеяния N тождественных частиц.

Здесь $K_i = G_0 T_i P_{12}$ — ядро уравнения (Д1.31), $\varphi^{(i)}$ — функция начального состояния, а $\tilde{\psi}^{(i)}$ удовлетворяет проектированному уравнению, совпадающему по виду с (Д1.31):

$$\tilde{\psi}_a^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i)} - \tilde{K}_i \tilde{\psi}_a^{(i)}$$

где $\tilde{\varphi}^{(i)} = \varphi^{(i)} - G_i \Gamma (G G_i \Gamma)^{-1} \Gamma \varphi^{(i)}$, итерации которого сходятся в s -волне при всех энергиях. В частности, как показывают конкретные расчеты, амплитуда нулевого приближения для (Д1.32)

$$\tilde{F}_0 = \frac{\mu}{2\pi} \langle \varphi^{(i)} | \Gamma (G G_i \Gamma)^{-1} \Gamma | \varphi^{(i)} \rangle \quad (\text{Д1.33})$$

с $\Gamma = |\Phi_G\rangle \langle \Phi_G|$ очень хорошо (точность выше 7%) описывает s -фазы низкоэнергетического pd -рассеяния в квартетном канале, и для квартетной трехчастичной амплитуды получается простая *аналитическая* формула

$$\tilde{F}_0(E) = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{\langle \varphi^{(i)} | \Phi_G \rangle \langle \Phi_G | \varphi^{(i)} \rangle}{\langle \Phi_G | G_i(E) | \Phi_G \rangle}$$

где Φ_G — пространственно-симметричная функция дѣхового состояния, причем качество описания мало ухудшается, даже если вместо функции Грина G_i взять ее полюсную часть (т. е. дейтронный полюс).

Аналогичные формулы можно с успехом использовать и во многих других случаях, поскольку в них входит лишь неоднородный член уравнения и не входит ядро; в частности, во всех тех случаях рассеяния, где доминирует принцип Паули, амплитуда \tilde{F}_0 будет хорошим приближением к истинной амплитуде (например, для низкоэнергетического dd -рассеяния в квинтетном состоянии, для $n^3\text{H}({}^3\text{He})$ -рассеяния с $ST = 01, 10, 11$; для ряда задач атомной физики и т. д.).

Резюмируя наше описание метода ортогонального проектирования, можно добавить, что он не только дает эффективное средство для удобного итеративного решения интегральных уравнений многочастичного рассеяния, но и позволяет сформулировать ряд новых моделей для задач рассеяния, позволяющих заменить недостающую информацию о природе гамильтониана системы информацией о структуре связанных состояний, которую

можно извлечь из экспериментальных данных, например по электромагнитным форм-факторам и т. д. [37]. Кроме того, в отличие от ряда других используемых методов — например метода Альта—Грассбергера—Сандхаса — здесь во многих случаях сходимость ряда можно строго доказать [40], что дает хорошую математическую основу для численных расчетов.

Переходим теперь к другой группе методов, которые также позволяют получить сходящийся итеративный ряд для задач рассеяния, и основанных на редукции интегральных уравнений с сингулярным ядром путем процедуры вычитания.

2. Метод Сасакавы — Нойеса — Ковальского.

В 1963 г. Сасакава [32] предложил оригинальную процедуру перестройки уравнения Липпмана—Швингера, имеющую ясный физический смысл и позволяющую получить сходящийся итеративный ряд для волновой функции рассеяния. Идея метода Сасакавы вкратце сводится к следующему. Перепишем уравнение Липпмана — Швингера для радиальной волновой функции рассеяния

$$\psi = u + G_0 V \psi, \quad (Д1.34 а)$$

где u — регулярное решение, w — нерегулярное (в нуле) решение и $G_0 = -u(r_>)w(r_<)$, в виде

$$\psi = u + A w + K V \psi, \quad (Д1.34 б)$$

где $A = -\langle u | V | \psi \rangle$ — точная амплитуда рассеяния, а $K = G_0 + |w\rangle\langle u|$ или, в r -представлении:

$$\langle r | K | r' \rangle = -\theta(r' - r) [u(r)w(r') - w(r)u(r')];$$

неоднородный член уравнения (Д1.34б) уже включает в себя всю асимптотическую часть полного решения исходного уравнения, и поэтому интегральный член дает вклад только в области взаимодействия. Поскольку точная амплитуда A неизвестна, то для нее пишется итеративный ряд, использующий последующие итерации уравнения (Д1.34б) для волновой функции. Таким образом, получается итеративный ряд для амплитуды рассеяния A . Почти очевидно, что метод Сасакавы дает более быстро сходящийся итеративный ряд, чем борновский

для исходного уравнения; причем за счет включения асимптотики решения в неоднородный член ядро уравнения Сасакавы будет несингулярным, в отличие от ядра исходного уравнения Липпмана—Швингера. Прделанные в последующие годы расчеты подтвердили более быструю сходимость (Д1.34б) по сравнению с исходным уравнением (Д1.34а).

С другой стороны, в 1965 г. одновременно и независимо друг от друга Ковальский и Нойес [7] совсем для другой цели предложили вычитательную процедуру, которая оказалась очень близкой к процедуре Сасакавы, так что весь подход теперь часто называют процедурой Сасакавы—Ковальского—Нойеса (СКН).

Собственно метод Ковальского—Нойеса предназначен для устранения известной сингулярности, связанной со свободной функцией Грина, в ядре уравнения Липпмана—Швингера в импульсном представлении. Заодно получается очень полезное представление для t -матрицы вне энергетической поверхности.

Ниже приводится редукция Ковальского—Нойеса в несколько более общем виде, чем в их оригинальном подходе. Рассмотрим уравнение Липпмана—Швингера для «полувномассовой» t -матрицы $t(p, k; k^2) \equiv t(p, k)$

$$t(p, k) = V(p, k) + \int dq V(p, q) \frac{\lambda q^2}{k^2 - q^2} t(q, k), \quad (\text{Д1.35})$$

где используется система единиц с $\hbar = 2m = 1$ и константа λ зависит от принятой нормировки в парциальном разложении. Введем действительную функцию $\gamma(k, q)$ такую, чтобы $\gamma(k, k) = 1$. При этом (Д1.35) можно переписать в виде

$$t(p, k) = V(p, k) \left[1 + \int dq \frac{\lambda q^2}{k^2 - q^2} \gamma(k, q) t(q, k) \right] + \int dq A(p, q; k^2) t(q, k), \quad (\text{Д1.36})$$

где

$$A(p, q; k^2) = [V(p, q) - V(p, k) \gamma(k, q)] \frac{\lambda q^2}{k^2 - q^2} \quad (\text{Д1.36a}).$$

— несингулярное ядро. Решение уравнения (Д1.36) можно выразить [33] через функцию $\Gamma(p, k)$

$$t(p, k) = \Gamma(p, k) / \left[1 - \int dq \frac{\lambda q^2}{k^2 - q^2} \gamma(k, q) \Gamma(q, k) \right], \quad (\text{Д1.37})$$

которая удовлетворяет несингулярному интегральному уравнению с ядром $A(p, q; k^2)$

$$\Gamma(p, k) = V(p, k) + \int dq A(p, q; k^2) \Gamma(q, k). \quad (\text{Д1.38})$$

Изложенная выше редукция дает ряд очевидных преимуществ при нахождении t -матрицы. Во-первых, от уравнения Липпмана—Швингера с сингулярным ядром мы приходим к уравнению (Д1.38) с несингулярным ядром $A(p, q; k^2)$. Более того, как показал Кестер [42] итерации (Д1.38) сходятся для любого локального потенциала при весьма слабых ограничениях на потенциал (в отличие от итераций исходного уравнения (Д1.35)). Во-вторых, поскольку мнимая часть знаменателя в (Д1.37) с точностью до коэффициента равна числителю (при этом k^2 понимается на верхнем берегу разреза, т. е. $k^2 \Rightarrow k^2 + i\epsilon$), то в любом приближении для $\Gamma(p, k)$ получаем унитарную t -матрицу $t(p, k)$.

Вышеприведенный вывод имеет дело с «полувнемассовой» t -матрицей. В уравнения многочастичного рассеяния же входят t -матрицы целиком вне массовой поверхности. Поэтому в оригинальном подходе Ковальского—Нойеса вместо $t(p, k)$ вводится новая («полувнемассовая») действительная функция

$$f(p, k) = \frac{t(p, k; k^2)}{t(k, k; k^2)}, \quad (\text{Д1.39})$$

так что на массовой поверхности $f(k, k) = 1$. Тогда t -матрицу вне массовой поверхности можно записать в виде суммы сепарабельной и несепарабельной частей: $t(p, q; k^2) = f(p, k) t(k, k; k^2) f(k, q) + R(p, q; k^2)$, (Д1.40)

где несепарабельная часть R обращается в нуль, если хотя бы один из импульсов p или q находится на массовой поверхности. Действительная функция R удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма с несингу-

лярным вещественным ядром

$$R(p, p'; k^2) = \Lambda(p, p'; k^2) + \int dq \Lambda(p, q; k^2) R(q, p'; k^2), \quad (\text{Д1.41})$$

а функция $f(p, k)$ удовлетворяет также несингулярному уравнению, аналогичному (Д1.38):

$$f(p, k) = \frac{V(p, k)}{V(k, k)} + \int dq \Lambda(p, q; k^2) f(q, k), \quad (\text{Д1.42})$$

где ядро

$$\Lambda(p, q; k^2) = \left[V(p, q) - V(p, k) \frac{V(k, q)}{V(k, k)} \right] \frac{\lambda q^2}{q^2 - k^2}. \quad (\text{Д1.43})$$

Зная $f(p, k)$, t -матрицу на массовой поверхности легко найти из соотношения, аналогичного (Д1.37),

$$t(k, k; k^2) = \frac{V(k, k)}{1 - \int dq \frac{\lambda q^2}{k^2 - q^2} V(k, q) f(q, k)}.$$

Сравнение выражений для $A(p, q; k^2)$ $\Lambda(p, q; k^2)$ показывает, что в оригинальном подходе Ковальского — Нойеса используется следующий выбор функции $\gamma(q, k)$:

$$\gamma(q, k) = \frac{V(q, k)}{V(k, k)},$$

удовлетворяющий с очевидностью условию $\gamma(k, k) = 1$.

Отметим, что представление t -матрицы (Д1.40) весьма полезно, поскольку первый, т. е. сепарабельный член совпадает с точной «полувнемассовой» t -матрицей, а остаток R , который, как отмечено выше, отличен от нуля, только, когда оба импульса находятся вне массовой поверхности, дает внемассовые поправки.

Теперь обсудим связь между подходом Ковальского — Нойеса и процедурой Сасакавы. Запись уравнения Липпмана—Швингера (Д1.35) в виде (Д1.36) означает по существу перенесение сингулярности из ядра, которое становится при этом несингулярной функцией $A(p, q; k^2)$ в неоднородный член, а это и есть прием Сасакавы, только записанный в импульсном представлении. Если теперь учесть, что в работе Сасакавы рассматривалось уравнение для радиальной волновой функции рассеяния $\psi_l(k, r)$,

а «полувнемассовая» t -матрица $t_l(p, k)$, фигурирующая в (Д1.36), пропорциональна фурье-образу от $\psi_l(k, r)$, то сходство между двумя подходами становится очевидным. В последующие годы вычислительная СКН-процедура была развита и обобщена в нескольких направлениях. Прежде всего, Остерн [43] и Сопер [44] показали, что при решении задач многоканального двухчастичного рассеяния методом Сасакавы число подлежащих решению уравнений сокращается в несколько раз по сравнению с обычным подходом. Причем Остерн применил СКН-процедуру для трактовки прямых ядерных реакций. Затем Ковальский [45] и Фуда [33] обобщили вычислительную процедуру на задачу трех тел, причем Ковальский рассматривал *двухчастичные* уравнения Липпмана—Швингера, возникающие при применении АГС-подхода (с квазичастицами) к уравнениям Фаддеева (см. основной текст), а Фуда применил процедуру Сасакавы непосредственно к *трехчастичным* уравнениям для волновой функции. Поскольку переход от одного уравнения к системе уравнений Липпмана—Швингера представляется почти очевидным, мы изложим здесь кратко лишь обобщение, предложенное Фудой.

Рассмотрим ради простоты систему трех тождественных бесспиновых частиц в состоянии с нулевым полным моментом и s -взаимодействием между частицами. Если $u(p)$ — двухчастичная функция связанного состояния с энергией связи E_B , то уравнение Фаддеева для рассеяния частицы на связанном состоянии $u(p)$ можно записать в виде

$$\Phi(p, q) = u(p) \delta(p - q)/k^2 + \int_0^\infty dq'^2 \int_{(q^{-1/2}q')^2}^{(q^{+1/2}q')^2} dp'^2 \frac{t(p, p_1; s - {}^3/4q^2)}{2q(s - p^2 - {}^3/4q^2)} \Phi(p', q'), \quad (\text{Д1.44})$$

где $p_1^2 = p'^2 + {}^3/4q'^2 - {}^3/4q^2$; $s = E + i\epsilon = E_B + {}^3/4k^2 + i\epsilon$, $t(p, q; s)$ — двухчастичная t -матрица, а E — полная трехчастичная энергия.

При $s \rightarrow E_B$ t -матрица имеет полюс, отвечающий связанному состоянию $u(p)$:

$$t(p, p'; s) \underset{s \rightarrow E_B}{\Rightarrow} \frac{g(p)g(p')}{s - E_B},$$

причем

$$g(p) = (E_n - p^2)u(p).$$

Амплитуду упругого рассеяния теперь можно записать в виде [33]

$$X(k) = \frac{1}{2k} \int_0^\infty dq'^2 \int_{(k-i/2q')^2}^{(k+i/2q')^2} dp'^2 g(p_2) \Phi(p', q')$$

с $p_2^2 = p'^2 + 3/4q'^2 - 3/4k^2$.

Делая затем вычитание в ядре уравнения (Д1.44) и перенося сингулярность в неоднородный член (точно так же, как это сделано в (Д1.36)), найдем

$$\begin{aligned} \Phi(p, q) = & u(p) \frac{\delta(p-k)}{k^2} + \frac{u(p) \gamma(p, q) X(k)}{3/4k^2 + i\varepsilon - 3/4q^2} + \\ & + \int_0^\infty dq'^2 \left[\int_{(q-i/2q')^2}^{(q+i/2q')^2} dp'^2 \frac{t(p, p_1; E - 3/4q^2)}{2q(E - p^2 - 3/4q^2)} - \right. \\ & \left. - \int_{(k-i/2q')^2}^{(k+i/2q')^2} dp'^2 \frac{u(p) \gamma(p, q) g(p_2)}{2k(3/4k^2 - 3/4q^2)} \right] \Phi(p', q'), \end{aligned} \quad (\text{Д1.45})$$

где $\gamma(p, q)$ — любая гладкая функция, обладающая свойством $\gamma(p, k) = 1$. Очевидно, переход от (Д1.44) к (Д1.45) представляет собой опять процедуру Сасакавы, но уже для трехчастичной задачи. По аналогии с (Д1.37) и (Д1.38) легко показать, что искомая волновая функция $\Phi(p, q)$ находится из соотношения

$$\Phi(p, q) = Y(p, q; k^2) + \int_0^\infty Y(p, q; q''^2) \frac{q''^2 dq''}{3/4k^2 + i\varepsilon - 3/4q''^2} X(k). \quad (\text{Д1.46})$$

а Y удовлетворяет интегральному уравнению с несингулярным (ниже трехчастичного порога) ядром:

$$Y(p, q; q'') = u(p) \gamma(p, q) \frac{\delta(q - q'')}{q''^2} + \int_0^\infty dq'^2 [\dots] Y(p', q'; q''), \quad (\text{Д1.47})$$

где квадратные скобки те же, что и в (Д1.45).

Выражение для упругой амплитуды $X(k)$ легко найти, если подставить формулу (Д1.46) в определение $X(k)$, что дает окончательное выражение

$$X(k) = Z(k, k) / \left(1 - \int_0^\infty \frac{Z(k, q) q^2 dq}{3/4 k^2 + i\varepsilon - 3/4 q^2} \right), \quad (\text{Д1.48})$$

где функция Z выражается через двойной интеграл от Y

$$Z(k, q) = \frac{1}{2k} \int_0^\infty dq'^2 \int_{(k^{-1/2}q')^2}^{(k+1/2q')^2} dp'^2 g(p_2) Y(p', q'; q). \quad (\text{Д1.49})$$

Итак, в результате вычитательной процедуры мы приходим к несингулярному уравнению (Д1.47), через решение которого с помощью (Д1.48) и (Д1.49) строится амплитуда упругого трехчастичного рассеяния. Подчеркнем, что благодаря унитарности выражения (Д1.48) любое приближенное решение уравнения (Д1.47) дает ниже порога развала унитарную амплитуду $X(k)$. Из (Д1.48) получаем условие пормирровки для амплитуды $X(k)$

$$X(k) = -\frac{3}{2k\pi} e^{i\delta(k)} \sin \delta(k),$$

где $\delta(k)$ — s -волновой фазовый сдвиг. В случае сепарабельной двухчастичной t -матрицы вся вычитательная процедура значительно упрощается, как показано в работе Ковальского [45], и сводится фактически к описанной выше редукции для одномерного уравнения Липпмана — Швингера.

Теперь кратко обсудим недостатки вычислительных процедур описанного типа. Основным недостатком подобного подхода является то, что он позволяет исключать из ядра лишь неподвижные сингулярности, связанные с полюсами двухчастичной амплитуды рассеяния, поэтому выше трехчастичного порога, где в трехчастичных интегральных ядрах появляются движущиеся сингулярности, подобный подход не приводит к цели. Отметим, что метод ортогонального проектирования, описанный в предыдущем разделе, свободен от этого недостатка и работает

как ниже, так и выше порога развала. Другим слабым местом вычитательной процедуры является то, что для многих типов потенциалов, в частности для широко используемых сепарабельных потенциалов, итерации регуляризованных уравнений часто не сходятся, причем для указанных типов взаимодействий пока неизвестны критерии сходимости перестроенных уравнений, за исключением стандартных общих критериев.

Укажем теперь дальнейшие обобщения СНК-процедуры. Долешалл и Реваи [46] предложили схему редукции, позволяющую свести уравнение с ядром $K(p, q)t(q)$, где весовая функция $t(q)$ имеет полюсы в точках q_1, q_2, \dots, q_n , к уравнению с несингулярным ядром вида $L_m(p, q)t(q)$, где $L_m(p, q) = K(p, q) - K_m(p, q)$, а ядро конечного ранга m

$$K_m(p, q) = \sum_{i,j=1}^m K(p, x_i) M_{ij}^{-1} K(x_j, q) \quad (\text{Д1.50})$$

с $M_{ij} \equiv K(x_i, x_j)$. Произвольно выбранная система точек x_1, x_2, \dots, x_m ($m \geq n$) должна включать полюсы q_1, \dots, q_n весовой функции. Функция $K_m(p, q)$ является m -точечной аппроксимацией Бейтмана (см. раздел о методе Бейтмана настоящего Дополнения) ядра $K(p, q)$ и совпадает с точным ядром на прямых $q = x_i$. Поэтому функция $L_m(p, q)$ в полюсах весовой функции $t(q)$ обращается в нуль, так что новое ядро $L_m(p, q)t(q)$ свободно от указанных сингулярностей.

Наконец, в самое последнее время Карлссон [47] по аналогии с процедурой Ковальского — Нойеса для двух частиц развил метод, позволяющий в уравнении Фаддеева для трехчастичных t -матриц отделить многократное рассеяние на массовой поверхности от немассовых эффектов. При этом в нулевом приближении Карлссон получил уравнение Фаддеева, включающее только операторы на массовой поверхности, а также удобную параметризацию для немассовых эффектов. Основная идея, которой руководствовался Карлссон, — по существу та же, что у Сасакавы: использование конфигурационного пространства (а не импульсного представления, как обычно) и разделение вкладов от внутренней и внешних (асимптотических) областей. При этом вклад внешней области

прямо связан с выходом на массовую поверхность в промежуточных состояниях, а вклад от немассовых эффектов, как можно ожидать во многих случаях, является малым.

Недавно Ковальский предложил общую классификацию подобных процедур [48], из которой описанные выше методы следуют как некоторые частные случаи.

Заключение

Здесь уместно еще раз кратко остановиться на общей оценке разнообразных методов, предложенных для решения интегральных уравнений многочастичной теории рассеяния. Как это обычно бывает, не существует, скорее всего, единого универсального метода, превосходящего по эффективности все остальные, а каждый из предложенных методов имеет свою сферу применимости, где его использование наиболее оправдано. Сказанное, конечно, не исключает того, что один из методов может иметь гораздо более широкую область применимости, нежели другие подходы. Попытаемся поэтому, хотя бы грубо, обозначить круг задач, где применение того или другого подхода является наиболее оправданным.

1. Методы, основанные на сепарабельных разложениях t -матрицы (УПР, метод Бейтмана, фурье-разложение и подход Адхикари — Слоана), по-видимому, наиболее эффективны при низких энергиях, — т. е. для расчетов связанных состояний и низкоэнергетического рассеяния. Это связано с тем обстоятельством, что сепарабельные аппроксимации наиболее точны вблизи особенностей подамплитуд, обусловленных связанными состояниями или резонансами в подсистемах. При этом метод Бейтмана более удобен в тех случаях, когда собственные значения и собственные функции соответствующих интегральных ядер очень сложно вычислить. С другой стороны, подход Адхикари — Слоана, по-видимому, более универсален, чем УПР или метод Бейтмана, однако, за счет либо увеличения числа членов разложения, либо за счет увеличения сложности каждого члена.

2. Итерационные методы: суммирование борновских рядов с помощью падé-аппроксимантов, метод ортогонального проектирования, подход Сасакавы — Ковальско-

го — Нойеса и его обобщения имеют, вообще говоря, более широкую область применимости, поскольку хорошо работают как при низких, так и при высоких энергиях (за исключением собственно СКН-процедуры). Однако эта универсальность сопровождается гораздо более сложной расчетной схемой, поскольку при этом необходимо итерировать многомерные интегральные уравнения. Из-за этого обстоятельства применение итеративных методов при низких энергиях вряд ли оправдано в тех системах, где во взаимодействии доминируют связанные состояния и ярко выраженные резонансы. Напротив, при исследованиях в интегральной теории прямых ядерных реакций, где в подсистемах необходимо учитывать много парциальных волн, итеративные методы наиболее адекватны. И, наконец, при совсем высоких (в соответствующем масштабе) энергиях хорошо работает метод прямой итерации уравнений Фаддеева, который дает важные поправки ко многим широко используемым в физике приближениям, основанным на интуитивных соображениях, например поправки к импульсному приближению или к методу Глаубера и др. [49].

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ РАССЕЯНИЯ N ЧАСТИЦ ($N > 3$)**

В этом приложении мы кратко изложим обобщения теории Фаддеева на случай бóльшего числа частиц, а также приведем сводку последних результатов по численному решению интегральных уравнений для четырех частиц, вместе с библиографией по указанным вопросам. Во-первых, этот материал является естественным дополнением и обобщением теории трехчастичного рассеяния, изложенной в основном тексте, а во-вторых, в последнее время проблема рассеяния в системе четырех частиц, а также различные аспекты задачи N тел привлекают внимание все бóльшего числа исследователей, так что мы сочли полезным включить в книгу настоящее дополнение.

А. Интегральные уравнения для четырех частиц

Хотя к настоящему времени предложен целый ряд уравнений, описывающих рассеяние в системе N частиц (часть из них перечислена в предисловии автора к книге), и в частности уравнений для четырех частиц, практически используются главным образом уравнения, предложенные Якубовским и Фаддеевым [1, 2]. Причиной этого является, на наш взгляд, два обстоятельства: во-первых, уравнения Якубовского получены путем непосредственного обобщения трехчастичных уравнений Фаддеева с использованием тех же приемов (см. ниже); а, во-вторых, для уравнений Якубовского доказана их эквивалентность уравнению Шредингера, что представляется совсем не тривиальным и выгодно отличает уравнения Фаддеева — Якубовского от многих других многочастичных интегральных уравнений, предложенных к настоящему времени. При изложении указанных вопросов мы будем следовать докладу Фаддеева [2], а также работам [3, 4]. Напомним, что трехчастичные уравнения Фаддеева содержат (в ядрах) амплитуды рассеяния вне массовой поверхности для всех двухчастичных подсистем

входящих в рассматриваемую систему. Аналогично для системы четырех частиц (или вообще N частиц) правильные уравнения получаются при учете всех возможных подамплитуд, отвечающих разбиению полной системы на подсистемы из $N - 1$, $N - 2$, ..., 3, частиц. При этом необходимо учитывать каждую последовательность включения взаимодействия (предполагается, что в системе имеются лишь парные взаимодействия V_{ij}). Скажем, процесс, начавшийся с взаимодействия частиц 1 и 2, может продолжиться тремя способами: либо частицы 3 или 4 последовательно присоединяются к выбранной паре, либо сначала начинают взаимодействовать между собой. И каждому из трех способов связи должна соответствовать своя подамплитуда.

Итак, для $N = 4$ полное взаимодействие V состоит из шести слагаемых:

$$V = V_{12} + V_{13} + V_{14} + V_{23} + V_{24} + V_{34}.$$

И первому этапу включения взаимодействия отвечает разбиение полной T -матрицы на шесть слагаемых:

$$T = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34},$$

для которых совершенно аналогично трехчастичному случаю получается следующая система уравнений:

$$W_{12} = T_{12} + T_{12}G_0(W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}), \quad (\text{Д}2.1)$$

и аналогично для W_{13} , W_{14} и других.

Однако однократное применение фаддеевского приема — перенесения диагональной части ядра налево и последующее обращение ее — здесь недостаточно, ибо система (Д 2.1) еще не фредгольмовская и ее следует повторно преобразовать таким же способом, с учетом второго этапа включения взаимодействия. Для этого удобно перейти к амплитудам $U_\alpha = W_\alpha - T_\alpha$ с $\alpha = 12, 13, \dots, 34$, которые удовлетворяют тем же уравнениям, что и W_α , но с другими свободными членами, например:

$$U_{12} = T_{12}G_0(T_{13} + T_{14} + T_{23} + T_{24} + T_{34}). \quad (\text{Д}2.2)$$

Теперь в соответствии с тремя отмеченными возможностями подключения взаимодействия в системе сделаем

следующее разбиение:

$$U_{12} = U_{12}^{123} + U_{12}^{124} + U_{12}^{34}, \quad (\text{Д}2.3)$$

где

$$U_{12}^{123} = T_{12}G_0(T_{13} + T_{23}) + T_{12}G_0(U_{13} + U_{23}), \quad (\text{Д}2.4)$$

$$U_{12}^{124} = T_{12}G_0(T_{14} + T_{24}) + T_{12}G_0(U_{14} + U_{24}), \quad (\text{Д}2.5)$$

$$U_{12}^{34} = T_{12}G_0T_{34} + T_{12}G_0U_{34}, \quad (\text{Д}2.6)$$

и аналогично для U_{13} и других.

Теперь, следуя стандартной фаддеевской технике, подставим разбиение вида (Д2.3) (и аналогичные разбиения для других операторов U_{ij}) в правые части уравнений (Д2.4) — (Д2.6), после чего получим, как легко подсчитать, систему из 18 уравнений для операторов U_{ij}^{jkl} и U_{ij}^{hkl} ($kl \neq ij$). Причем имеется два типа операторов — с тремя и двумя верхними индексами. Операторы первого типа отвечают выделению трехчастичных подамплитуд, а второго — пары двухчастичных. Имеются четыре группы первого типа и три второго в соответствии с числом сочетаний $\binom{4}{3}$ и $\binom{4}{2}/2$. Теперь надо диагональную часть полученной системы перенести, как обычно, налево, и обратить. Однако здесь обращать надо не один оператор (точнее диагональную матрицу), а целую операторную матрицу, перепутывающую амплитуды внутри каждой группы, скажем, группы из трех амплитуд U_{12}^{123} , U_{13}^{123} и U_{23}^{123} . При этом в ядрах естественно возникают трехчастичные подамплитуды $M_{\alpha\beta}$, совершенно аналогично тому, как в ядрах трехчастичных уравнений возникают двухчастичные t -матрицы t_α при обращении диагональной части трехчастичной системы. Эти трехчастичные подамплитуды удовлетворяют трехчастичным уравнениям Фаддеева вида

$$M_{\alpha\beta} = T_\alpha \delta_{\alpha\beta} + T_\alpha G_0 \sum_{\gamma \neq \alpha} M_{\gamma\beta}, \quad (\text{Д}2.7)$$

где индексы α , β , γ принимают три значения, например $\alpha = 12, 13, 23$. Таким же образом обращение диагонали для $2+2$ подамплитуды U_{ij}^{hkl} приводит к операторам $N_{\alpha\beta}$, удовлетворяющим также системе (Д2.7), но индексы α , β , γ принимают теперь два значения: 12 и 34. При

этом решении системы уравнений для $N_{\alpha\beta}$ можно в явном виде выразить через решение задачи двух частиц. Поскольку полная система уравнений размерности 18×18 является весьма громоздкой, выпишем лишь два типичных уравнения системы:

$$\begin{aligned}
 U_{12}^{123} = & M_{12}^{12} + M_{12}^{13} + M_{12}^{23} - T_{12} + \\
 & + M_{12}^{12} G_0 (U_{23}^{234} + U_{13}^{134} + U_{23}^{14} + U_{13}^{24}) + \\
 & + M_{12}^{13} G_0 (U_{12}^{124} + U_{23}^{234} + U_{12}^{34} + U_{23}^{14}) + M_{12}^{23} G_0 (U_{12}^{124} + \\
 & + U_{13}^{134} + U_{12}^{34} + U_{13}^{24}), \quad (D2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{12}^{34} = & N_{12}^{12} + N_{12}^{34} - T_{12} + N_{12}^{12} G_0 (U_{34}^{134} + U_{34}^{234}) + \\
 & + N_{12}^{34} G_0 (U_{13}^{123} + U_{12}^{124}). \quad (D2.9)
 \end{aligned}$$

Остальные 16 уравнений получаются простой заменой индексов в (D2.8) и (D2.9) и приведены в [3]. Из общего числа 18, 12 уравнений имеют структуру (D2.8), а 6 уравнений — структуру (D2.9). Ядра полученных уравнений включают δ -функции, которые, однако, исчезают после двух итераций. Якубовский [1] показал, что полученные уравнения относятся к типу Фредгольма и имеют единственное решение.

Зная уравнения для операторов перехода $\mathcal{T}(z)$, можно получить уравнения для волновой функции четырех частиц [3]. Для этого сначала нужно записать систему уравнений для компонент функции Грина $\mathcal{G}(z)$, что легко сделать, используя связь $\mathcal{T}(z)$ и $\mathcal{G}(z)$:

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z) \mathcal{T}(z) \mathcal{G}_0(z),$$

а затем использовать известное общее соотношение

$$\Psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i\varepsilon \mathcal{G}(E + i\varepsilon) \Phi,$$

где Φ — асимптотическая функция, которая, например, для случая рассеяния одной частицы на трехчастичном связанном состоянии равна произведению волновой функции связанного состояния на плоскую волну по относительному движению четвертой частицы. Подробный вывод и исследование соответствующих уравнений для операторов перехода, функций Грина и волновых функций четырехчастичной системы для разных начальных

условий: упругое рассеяние в каналах $3 + 1$, $2 + 2$ и реакции перестройки $2 + 2 \rightleftharpoons 3 + 1$ дан в диссертации [4] и работе [3], где содержится подробная библиография по указанным вопросам. Мы приведем здесь только уравнения для четырех тождественных частиц без спина. В этом случае все волновые функции и операторы перехода должны быть соответствующим образом симметризованы, так что вместо 18 уравнений в общем случае получаем систему двух уравнений. Поскольку практически важен именно случай тождественных частиц, то приведем соответствующие уравнения.

Вместо 12 компонент $\Psi^{(ijk,l)}$ и 6 компонент $\Psi^{(ij,\kappa)}$ здесь появляются всего две функции, соответственно $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ и $\chi(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{s})$. Здесь $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$ — координаты Якоби, отвечающие «дереву» $(2 + 1) + 1$, а $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{s})$ — координаты Якоби отвечающие «дереву» $(2 + 2)$. При этом полная волновая функция есть симметричная комбинация вида

$$\Psi = \sum_{ij\kappa,l} \psi(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{p}_{ij,\kappa}, \mathbf{q}_{ij\kappa,l}) + \sum_{ij,\kappa l} \chi(\mathbf{k}_{ij}, \mathbf{k}'_{\kappa l}, \mathbf{s}_{ij,\kappa l}).$$

Система четырехчастичных интегральных уравнений при этом приводится к виду [3]

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = & \psi_0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) + (z - k^2/m - 3p^2/4m - 2q^2/3m)^{-1} \times \\ & \times \int \{ M_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathcal{H}', \mathcal{P}'; z - 2q^2/3m) \psi(\mathbf{k}', \mathbf{q} + \mathbf{q}'/3, \mathbf{q}') + \\ & + M_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathcal{H}' - 3\mathbf{q}/4, \mathcal{P}' + \mathbf{q}/2; z - 2q^2/3m) \times \\ & \times \chi(\mathbf{k}', \mathbf{q} - \mathbf{q}'/2, \mathbf{q}') \} \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6}, \quad (\text{Д2.1 0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s}) = & \chi_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s}) + (z - k^2/m - \boldsymbol{\kappa}^2/m - s^2/2m)^{-1/2} \times \\ & \times \int N_s(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{s}/2 + \mathbf{q}', \mathbf{k}'; z - s^2/2m) \times \\ & \times \psi(\mathbf{k}', -\mathbf{s} - 2\mathbf{q}'/3, \mathbf{q}') \frac{d\mathbf{k}' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^6}, \end{aligned}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\mathcal{H}' \equiv \mathbf{k}'/2 + \mathbf{q}/4 + 3\mathbf{q}'/4; \quad \mathcal{P}' \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{q}/6 - \mathbf{q}'/2;$$

$$\begin{aligned} M_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z) = & M(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z) + \\ & + M(\mathbf{k}, \mathbf{p}; -\mathbf{k}', \mathbf{p}'; z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_s(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; z) = & N(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; z) + N(\dots - \mathbf{k}' \dots) + \\ & + N(\dots - \boldsymbol{\kappa}' \dots) + N(\dots - \mathbf{k}', -\boldsymbol{\kappa}', \dots), \end{aligned}$$

а функции M и N определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z) &= \langle \mathbf{k}, \mathbf{p} | M_{ij}^{ij}(z) | \mathbf{k}', \mathbf{p}' \rangle + \\
 &+ \langle \mathbf{k}, \mathbf{p} | M_{ij}^{jk}(z) | \mathbf{k}', \mathbf{p}' \rangle + \langle \mathbf{k}, \mathbf{p} | M_{ij}^{ki}(z) | \mathbf{k}', \mathbf{p}' \rangle; \\
 N(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; z) &= \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} | N_{ij}^{ij}(z) | \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}' \rangle + \\
 &+ \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa} | N_{ij}^{kl}(z) | \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}' \rangle.
 \end{aligned}$$

При этом функции M_s и N_s удовлетворяют следующим интегральным уравнениям с симметризованными неоднородными членами и ядрами:

$$\begin{aligned}
 M_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z) &= (2\pi)^3 t_s(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; z - 3p^2/4m) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \\
 &+ \int (z - (p^2 + \mathbf{p}\mathbf{p}'' + p''^2)/m)^{-1} t_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}/2 + \mathbf{p}'', z - 3p^2/4m) \times \\
 &\times M_s(\mathbf{p} + \mathbf{p}''/2, \mathbf{p}'', \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z) \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^3}; \quad (\text{Д}2.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_s(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; z) &= (2\pi)^3 t_s(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; z - \boldsymbol{\kappa}^2/m) [\delta(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}') + \\
 &+ \delta(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\kappa}')] + \frac{1}{2} \int (z - \boldsymbol{\kappa}^2/m - k''^2/m)^{-1} \times \\
 &\times t_s(\mathbf{k}, \mathbf{k}''; z - \boldsymbol{\kappa}^2/m) N_s(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{k}''; \mathbf{k}', \boldsymbol{\kappa}'; z) \frac{d\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}, \quad (\text{Д}2.12)
 \end{aligned}$$

и где $t_s(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; z) \equiv \langle \mathbf{k} | t(z) | \mathbf{k}' \rangle + \langle \mathbf{k} | t(z) | -\mathbf{k}' \rangle$. Уравнения (Д2.11) и (Д2.12), как и уравнение Липпмана — Швингера для двух частиц, определяет продолжение амплитуд M_s и N_s вне энергетической поверхности. Свойства симметрии этих амплитуд по импульсным переменным определяются симметрией t -матрицы $t_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}, z)$. В частности, функция $M_s(\mathbf{k}, \mathbf{p}; \mathbf{k}', \mathbf{p}'; z)$ инвариантна при замене \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$ или \mathbf{k}' на $-\mathbf{k}'$ и при одновременной замене \mathbf{p} и \mathbf{p}' на $-\mathbf{p}$ и $-\mathbf{p}'$. Функция N_s инвариантна при инверсии любого из своих аргументов.

Вид неоднородных членов ψ_0 и χ_0 в уравнениях (Д2.10) определяется начальными условиями. В случае рассеяния частицы на трехчастичном связанном состоянии $\psi_0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0) \psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$, где $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{p})$ — фаддеевская компонента трехчастичной волновой функции связанного состояния, а $\chi_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, s) = 0$. При рассеянии одной пары частиц в связанном состоянии на

другой связанной паре

$$\psi_0(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$$

а

$$\chi_0(\mathbf{k}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{s}) = (2\pi)^3 [\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + \delta(\mathbf{s} + \mathbf{s}_0)] (k^2/m + \boldsymbol{\kappa}^2/m + 2\varepsilon_n)^{-1} (k^2/m + \varepsilon_n) \psi(\mathbf{k}) \psi(\boldsymbol{\kappa}),$$

ε_n — двухчастичная энергия связи, а $\psi(\mathbf{k})$ — соответствующая двухчастичная волновая функция. Дальнейшие подробности, касающиеся структуры решений написанных уравнений, можно найти в работах [3—5]. Здесь же кратко обсудим методы решения четырехчастичных уравнений. Простой взгляд на уравнения (Д2.10) показывает, что эти уравнения слишком сложны для их прямого численного решения, ибо даже после разложения по парциальным волнам, размерность уравнений оказывается слишком большой для современных ЭВМ. Поэтому был предложен ряд приближенных схем, позволяющих уменьшить размерность уравнений.

Одним из полезных методов является метод последовательной сепаратизации интегральных ядер [4]. Так, если в качестве двухчастичного взаимодействия использовать сепаратный потенциал, то это позволяет уменьшить, как и в задаче трех тел, размерность уравнений на единицу. В этом случае уравнения (Д2.10) сводятся к бесконечной системе двумерных интегральных уравнений, которые даже после обрезания по угловому моменту, все еще слишком сложны для прямого решения. Затем ядра этих двумерных уравнений вновь сепаратизируются каким-либо из методов, описанных в Дополнении 1. После такой повторной сепаратизации приходят к системе одномерных уравнений, которая решается уже непосредственно, т. е. с помощью матричного обращения.

К настоящему времени реализовано две схемы такого рода: в одном подходе для сепаратизации интегральных ядер использован метод Бейтмана [4, 5], а в другом — метод Гильберта — Шмидта [6]. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства и недостатки, уже обсуждавшиеся нами в предыдущем Дополнении. В течение 72—74 годов на основе этих подходов были сделаны первые расчеты связанных состояний и реакций ниже трехчастичного порога в системе четырех нуклонов

[4, 6]. В этих расчетах в качестве NN-взаимодействий использовались простые сепарабельные потенциалы (типа Ямагучи), а при повторной сепарабилизации четырехчастичных ядер учитывалось 1—2 члена. В целом «физический» уровень этих исследований аналогичен первым расчетам в 3N-системе 62—64 годов [7], однако математическая реализация для 4N-системы является несравненно более сложной. Несмотря на упрощенный вид используемых взаимодействий и ряд сильных приближений, полученные результаты оказались весьма обнадеживающими в нескольких отношениях. Прежде всего удалось объяснить ряд экспериментальных данных для 4N-системы (в основном связанных с низкоэнергетическим $p^3\text{H}$ - и $p^3\text{He}$ -рассеянием). Во-вторых, были выявлены интересные характерные особенности спектра 4N-системы, вероятно, не связанные непосредственно с конкретным видом парных взаимодействий. И, наконец, был накоплен ценный опыт обращения с многомерными сингулярными интегральными уравнениями. Этот опыт был весьма эффективно использован в последующих 4N-расчетах Тьона [8] и Савицкого [9]. Тьон использовал подход Гильберта — Шмидта, развитый Народецким с сотр. [6, 10], и рассчитал связанные 4N-состояния и низкоэнергетическое $p^3\text{H}$ - (и $p^3\text{He}$ -) рассеяние с локальным NN-потенциалом, включающим сильный отталкивающий кор. Было показано, что использованный NN-потенциал Мальфлие — Тьона хорошо воспроизводит энергию связи α -частицы и низкоэнергетические $p^3\text{H}$ и $p^3\text{He}$ фазовые сдвиги, кроме канала с $S = T = 0$, где имеется околороговое виртуальное состояние, положение которого очень чувствительно к числу учитываемых членов в сепарабельном разложении ядра. Несмотря на эти успехи, трудно ожидать, что методы такого рода окажутся эффективными при более высоких энергиях, где в интегральных ядрах появляются дополнительные сингулярности, а сходимость сепарабельных разложений заметно ухудшается. В этой области, как указывалось выше, должны хорошо работать итеративные методы, подобные методу ортогонального проектирования, K -матричному подходу и др.

Действительно, совсем недавно K -матричный метод был использован Савицким [9] для расчета сечений

сложных многочастичных процессов развала типа ${}^3\text{He}(p, pp)d$ и ${}^3\text{He}(p, pd)p$ при достаточно высоких энергиях $E_p \sim 35-50$ МэВ, а также группой советских исследователей [11] для процессов упругого рассеяния $p\text{ }^3\text{He}$, $p\text{ }^3\text{H}$ и рассеяния с перестройкой $p + {}^3\text{H} \rightarrow n + {}^3\text{He}$ и $d + d \rightarrow p + {}^3\text{H}$ в большом интервале энергий падающих частиц от 10 до 150 МэВ. Хотя эти работы представляют по существу первые попытки математически корректного расчета сложных многочастичных процессов с участием сильно взаимодействующих частиц, они приводят к вполне разумным результатам и намечают пути для дальнейших исследований в этой области.

Б. Интегральные уравнения для N частиц *)

Приведенный способ редукции четырехчастичных уравнений может быть непосредственно обобщен для любого числа N (см. работу Якубовского [1]). Однако в общем случае подобная схема оказывается очень громоздкой, потому что в ядра N -частичной системы входят величины, удовлетворяющие таким же уравнениям для подсистем. Более того, при самом выводе N -частичных уравнений Якубовского необходимо использовать уравнения для $N-1$, $N-2$ и т. д. числа частиц при обращении диагональной части системы. Мы приведем здесь другую более простую схему редукции N -частичных уравнений, предложенную Альтом, Грассбергом и Сандхасом (АГС) [12], следуя работе Ванзани [13]. Следует подчеркнуть, что сами уравнения АГС ничуть не проще уравнений Якубовского.

Рассмотрим систему N частиц с гамильтонианом $H = H_0 + V \equiv \equiv H_0 + \sum_{i < j}^N V_{ij}$. Пусть a_i — разбиение N частиц на i групп (кластеров), т. е. i -кластерный канал. Обозначим через V_{a_i} сумму внутренних взаимодействий между частицами каждого кластера данного канала, а через $V^{a_i} = V - V_{a_i}$ — сумму внешних взаимодействий для канала a_i . Очевидно, что $V_{a_1} \equiv V$, $V^{a_1} = 0$, $V_{a_N} = 0$, $V^{a_N} = V$. Далее, $V_{b_j a_i}$ означает взаимодействия, внутренние по отношению к каналу a_i и каналу b_j , а $V_{a_i}^{b_j}$ — взаимодействия, внутренние относительно a_i и внешние относительно b_j . Легко убедиться, что

$$V_{a_i} = V_{b_j a_i} + V_{a_i}^{b_j}, \quad V^{a_i} = V_{b_j}^{a_i} + V^{b_j a_i}.$$

*) Этот раздел написан В. Н. Померанцевым.

Введем гамильтонианы каналов $H_{a_i} = H_0 + V_{a_i}$ и соответствующие функции Грина $G_{a_i} = (z - H_{a_i})^{-1}$. Запись $a_{i+1} \subset a_i$ означает, что разбиение a_{i+1} содержится в a_i , т. е. a_{i+1} получается в результате дальнейшего разбиения любого кластера из a_i на два.

АГС-уравнения пишутся для операторов перехода, определяющих амплитуду $a_i \rightarrow b_j$ (смысл операторов U тот же, что и в основном тексте):

$$U^{b_j a_i} = G_{a_i}^{-1} \bar{\delta}_{b_j a_i} + V^{b_j} G G_{a_i}^{-1}, \quad (\text{Д2.13})$$

где $G = (E - H)^{-1}$, $\bar{\delta}_{\alpha\beta} = 1 - \delta_{\alpha\beta}$.

Выражение (Д2.13) эквивалентно обычной записи:

$$U^{b_j a_i} = -G_{a_i}^{-1} \delta_{b_j a_i} + G_{b_j}^{-1} G G_{a_i}^{-1}.$$

Цель редукции АГС — получить замкнутую систему уравнений со связным ядром для операторов перехода $U^{b_2 a_2}$ между *двухкластерными* каналами, аналогичную системе уравнений Фаддеева для U_{ij} (см. основной текст). Для этого используются лишь уравнения Липпмана — Швингера, соответствующие *всем* двухкластерным каналам:

$$G = G_{a_2} + G_{a_2} V^{a_2} G, \quad (\text{Д2.14})$$

которые содержат все необходимые граничные условия. При этом нет необходимости использовать замкнутую систему уравнений для $(N-1)$ частиц, как в схеме Якубовского. Основная идея редукции состоит в том, чтобы выразить внешние взаимодействия V^{b_2} , входящие в (Д2.13), через внутренние относительно всех двухкластерных каналов — V_{c_2} , а затем использовать уравнения Липпмана — Швингера (Д2.14). Это, очевидно, позволит замкнуть систему уравнений для $U^{b_2 a_2}$. Такое расщепление V^{b_2} можно сделать двумя способами.

а) Прямая редукция

$$V^{b_2} = \sum_{b_3 c_2} V_{c_2}^{b_3},$$

причем $b_3 \subset c_2 (c_2 \neq b_2)$, $b_3 \subset b_2$, и сумма не зависит от выбора $b_3 \subset b_2$. Далее используется тождество

$$V_{c_2}^{b_3} = \sum_{b_4 c_3} V_{c_3}^{b_4},$$

где $b_4 \subset c_3 (c_3 \neq b_3)$, $b_4 \subset b_3$, $c_3 \subset c_2$, и сумма не зависит от b_4 и т. д., пока не появится парное взаимодействие $V_{c_{N-1}}$:

$$V^{b_2} = \sum_{c_{N-1}} V_{c_{N-1}}, \quad (\text{Д2.15})$$

где следует учесть, что $c_2 \supset c_3 \supset \dots \supset c_{N-1}$ и $b_{i+1} \subset c_i (c_i \neq b_i)$ для $i = 2, 3, \dots, N-1$. Поскольку сумма (Д2.15) не зависит от

выбора последовательности вложенных разбиений $b_3 \supset b_4 \supset \dots \supset b_{N-1}$ при условии, что $b_2 \supset b_3$, то имеется столько различных способов расщепления V^{b_2} , сколько существует подобных цепочек, содержащихся в b_2 . Последовательности разбиений будем в дальнейшем обозначать греческими буквами, например $\beta = \{b_3 \supset b_4 \supset \dots \supset b_{N-1}\}$, причем $\beta \subset b_2$ означает, что $b_3 \subset b_2$. Кроме того, всегда будет предполагаться, что разбиения, обозначенные одинаковыми буквами, вложены друг в друга, т. е. что всегда $a_{i+1} \subset a_i$, $b_{i+1} \subset b_i$, $c_{i+1} \subset c_i$, и всегда $\alpha \subset a_2$, $\beta \subset b_2$, $\gamma \subset c_2$. Таким образом, для каждого b_2 получим столько уравнений, сколько существует цепочек $\beta \subset b_2$, поэтому величины $U^{b_2 a_2}$ снабжаются дополнительным индексом β . Подставляя (Д2.15) в (Д2.13) и используя уравнения Лишмана — Швингера (Д2.14), получим систему уравнений АГС для операторов перехода

$$U^{b_2 a_2}_{(\beta)} = (G_{a_2}^{-1} + V_{a_2}^{b_2} \delta_{b_2 \subset a_2}) \bar{\delta}_{b_2 a_2} + \sum V_{c_{N-1}} G_{c_2} U^{c_2 a_2}(\gamma), \quad (Д2.16)$$

где сумма берется с учетом соотношений: $c_i \supset b_{i+1}$, $b_i \neq c_i$ для $i = 2, \dots, N-1$.

Фактически все величины $U^{b_2 a_2}_{(\beta)}$ с различными β совпадают, так что число уравнений в (Д2.16) больше числа неизвестных. Следует отметить, что идея редукции АГС очень похожа на идею редукции Якубовского. Так, в схеме АГС для каждого b_2 перебираются все возможные цепочки разбиений вплоть до b_{N-1} , а в схеме Якубовского наоборот — к каждому b_{N-1} , соответствующему одному парному взаимодействию $V_{b_{N-1}}$, последовательно подсоединяются взаимодействующие частицы всеми возможными способами вплоть до образования двухкластерного канала b_2 . Ясно поэтому, что число уравнений в обеих схемах одно и то же и равно $\sum_{b_2} N_{b_2}$, где N_{b_2} — число способов полного расщепления канала b_2 на b_{N-1} .

б) Последовательная редукция

$$V^{b_2} = \sum_{c_{N-1} \not\subset b_2} V_{c_{N-1}}, \quad V^{c_{N-1}} = \sum_{c_{N-1} \not\subset c_{N-2}} V_{c_{N-2}}^{c_{N-1}} \text{ и т. д.,}$$

пока не появится V_{c_2} . При этом на каждом шаге используется уравнение Лишмана — Швингера

$$G = G_{c_i} + G_{c_i} V^{c_i} G.$$

В результате такой редукции получаются уравнения Слоана — Бензе — Редина [14]. Они имеют более сложную структуру, чем (Д2.16), в частности в ядро входят произведения $V_{c_{N-1}} G_{c_{N-1}} V_{c_{N-2}}^{c_{N-1}} \dots \dots V_{c_2}^{c_3} G_{c_2}$, содержащие функции Грина всех каналов входящих в c_2 . Однако число уравнений минимально и равно числу двухкластерных каналов $[N/2]$.

Вернемся теперь к схеме прямой редукции АГС. Из вывода, приведенного в п. а), видно, что структура уравнений (Д2.16) не затрагивает индекса начального канала a_2 , поэтому можно написать подобную систему для величин с одним индексом, например для компонент функции Грина $V^{b_2}G$. (Подобные произведения будем называть компонентами.) Удобнее, однако, записать уравнения для величин

$$T_{\beta}^{b_2} = V_{b_{N-1}} G_{b_2} V^{b_2} G, \quad (\text{Д2.17})$$

$$T_{\beta}^{b_2} = V_{b_{N-1}} G_{b_2} \sum (V_{c_{N-1}} G_{c_2} + T_{\gamma}^{c_2}), \quad (\text{Д2.18})$$

где опять сумма берется лишь по разбиениям, удовлетворяющим условиям $b_{i+1} \subset c_i$, $c_i \neq b_i$ для $i = 2, \dots, N-1$.

Аналогичная, даже более простая, система уравнений получается из (Д2.18) для величин

$$\Omega_{\beta}^{b_2} = T_{\beta}^{b_2} + V_{b_{N-1}} G_{b_2}, \quad (\text{Д2.19})$$

$$\Omega_{\beta}^{b_2} = V_{b_{N-1}} G_{b_2} + V_{b_{N-2}} G_{b_2} \sum \Omega_{\gamma}^{c_2}, \quad (\text{Д2.20})$$

с учетом условий $b_{i+1} \subset c_i$, $c_i \neq b_i$ для $i = 2, \dots, N-1$. Ядро систем (Д2.18) и (Д2.20) полностью аналогично по структуре ядру уравнения Фаддеева для функции Грина и равно произведению диагональной матрицы, содержащей $V_{b_{N-1}} G_{b_2}$, на числовую, состоящую из нулей и единиц (см. ниже). Число неизвестных в системе (Д2.20) больше числа уравнений, так как величины $\Omega_{\beta}^{b_2}$ совпадают с компонентами полной функции Грина G

$$\Omega_{\beta}^{b_2} = V_{b_{N-1}} G, \quad (\text{Д2.21})$$

так что Ω с различными b_i , $i \neq N-1$, но с одинаковыми b_{N-1} совпадают. Полная функция Грина, согласно (Д2.21), выражается через сумму различных Ω

$$G = G_0 + G_0 \sum_{b_{N-1}} \Omega_{\beta}^{b_2}. \quad (\text{Д2.22})$$

Из (Д2.20) стандартным образом следует система уравнений для компонент волновой функции $V_{b_{N-1}} \Psi$, снова содержащая больше уравнений, чем неизвестных. Отмеченное свойство переопределенности является, возможно, недостатком подобной схемы редукции по сравнению со схемой Якубовского, где полная функция Грина и полная волновая функция включает сумму *всех* компонент, входящих в систему уравнений. Ядро системы (Д2.16) или (Д2.20) после $(N-2)$ итераций становится связным [13], однако более детальные свойства его, в частности фредгольмовость, не установлены.

Рассмотрим частные случаи. При $N = 3$ имеем $b_2 = b_{N-1} = b$, поэтому система (Д2.20) после умножения на G_0 сводится к си-

стеме уравнений Фаддеева для компонент функции Грина $G^{(b)} = G_0 \Omega^b$

$$G^{(b)} = G_0 V_b G_b + G_b V_b \sum_{c \neq b} G^{(c)}$$

(здесь использовано тождество $G_0 V_b G_b = G_b V_b G_0$).

Заметим, что при $N = 3$ все способы редукции эквивалентны и приводят к уравнениям Фаддеева. При $N = 4$ цепочки разбиений β , γ и т. д. сводятся к одному разбиению $b_3 = b_{N-1}$. Система уравнений АГС, например, для операторов перехода выглядит таким образом:

$$U_{(b_3)}^{b_2 a_2} = (G_{a_2}^{-1} + V_{a_2}^{b_3} \delta_{b_3 \subset a_2}) \bar{\delta}_{b_2 a_2} + \sum \sum V_{c_3} G_{c_2} U_{(c_3)}^{c_2 a_2}, \quad (\text{Д2.23})$$

где суммы включают разбиения, удовлетворяющие условиям: $b_3 \subset \subset c_2$ ($c_2 \neq b_2$), $c_2 \supset c_3$ ($c_3 \neq b_3$). Всего имеется 18 уравнений, как и в схеме Якубовского: для каждого из четырех разбиений b_2 типа $[3, 1]$ имеется три различных разбиения b_3 , а для каждого из трех разбиений $[2, 2]$ — два разбиения b_3 . Как указано выше, структура уравнений (см. (Д2.20)) полностью определяется числовой матрицей. Вид матрицы показывает, что уравнения первого типа связывают 4 компоненты (в уравнениях Якубовского — 7 компонент), а уравнения второго типа — 5 компонент. Система (Д2.23) использована в расчетах Савицкого [9].

Следует отметить, что многочастичные уравнения АГС, так же как и уравнения Якубовского, составляют иерархию, т. е. в ядро системы входят величины $V_{b_{N-1}} G_{b_2}$, которые могут быть найдены из аналогичной системы уравнений (см. (Д2.20)) для подсистем с числом частиц $N - 1$, $N - 2$ и т. д. Уравнения АГС удобны для различных формальных преобразований, ибо в них входят лишь функции Грина G_{b_2} двухкластерных каналов, однако в практическом отношении обе рассмотренные схемы редукции — АГС и Якубовского, по-видимому, равноценны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brückmann H., Kluge W., Matthäy H., Schänzler L., Wick K. — Nucl. Phys., 1970, v. A 157, p. 209.
2. Goldberger M. L., Watson K. M. Collision Theory, Ch.3 & 5. John Wiley & Sons. — N. Y., 1964. (См. перевод: Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. — М.: ИЛ, 1964.)
3. Существование сильного предела в (2.10) было доказано для большого класса потенциалов, спадающих на больших расстояниях быстрее кулоновского потенциала. См. например:
Cook J. M. — J. Math. and Phys., 1957, v. 36, p. 82;
Hack M. N. — Nuovo Cim., 1958, v. 9, p. 734; 1959, v. 13, p. 231;
Kupsch J., Sandhas W. — Commun. Math. Phys., 1966, v. 2, p. 147;
Фаддеев Л. Д., ссылка [4];
Kuroda S. T. — Nuovo Cim., 1959, v. 12, p. 431; J. Math. Phys. 1962, v. 3, p. 933;
Dollard J. D. — J. Math. Phys., 1964, v. 5, p. 729.

Для кулоновского потенциала также было показано, что предел, аналогичный (2.11), существует (необходимо было лишь ввести небольшую модификацию для учета дальнего действия характера кулоновского взаимодействия).

Простой пример, когда этот предел не существует, дан в работе: Jauch J. M., Zinnes I. I. — Nuovo Cim., 1959, v. 11, p. 553.

Если $h = h_0 + cI$ (I — единичный оператор), мы получаем

$$e^{iht} e^{-iht} = e^{ict} I$$

и предел (2.11) не существует. Это, конечно, очевидно, поскольку потенциал cI имеет бесконечный радиус.

4. Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы из трех частиц: труды МИАН им. Стеклова, 1963, т. 69.
5. Jauch J. M. — Helv. Phys. Acta, 1958, v. 31, p. 127.
6. См., например, книгу: Roman P. Advanced Quantum Theory: Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1965.
7. Относительно определения «компактных операторов» см. Weinberg S. — Phys. Rev., 1964, v. B133, p. 233.
8. Lovelace C. — Phys. Rev., 1964, v. B135, p. 1225;
Hunziker W. — Helv. Phys. Acta, 1961, v. 34, p. 593.
9. Sandhas W. — Acta Physica Austriaca, 1972, Suppl. IX, 57.
10. Roman P., ссылка [6], гл. 4/4а.

Отметим различную нормировку плоских волн и соответствующее изменение в определении T -матрицы.

11. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР: сер. физ., 1963, т. 7, с. 600;
Фаддеев Л. Д., ссылка [4], гл. 11;
Sandhas W.— Commun. Math. Phys., 1966, v. 3, p. 358;
Hunziker W.— Helv. Phys. Acta, 1967, v. 40, p. 1052.
12. *Фаддеев Л. Д.*, ссылка [4], гл. 9. Операторы Мёллера выражаются там посредством не зависящих от времени величин.
13. *Ekstein H.*— Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 880;
Фаддеев Л. Д., ссылка [4], гл. 9.
14. *Фаддеев Л. Д.*— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1459.
15. *Glöckle W.*— Nucl. Phys., 1970, v. A141, p. 620.
16. *Фаддеев Л. Д.*, ссылка [4].

Неоднозначность уравнения Липпмана—Швингера была также отмечена в работе: *Foldy L. L., Tobocean W.*— Phys. Rev., 1957, v. 105, p. 1099.

17. *Фаддеев Л. Д.*— ДАН СССР: сер. физ., 1961, т. 6, с. 384 и ссылка [4] гл. 5—7.
18. *Фаддеев Л. Д.*, см. ссылку [4]. Теоремы 7.1 и 7.2.
19. *Yosida K.*— Functional Analysis, гл. 10: Springer,— Berlin, 1966. (См. перевод: *Иошида К.* Функциональный анализ.— М.: Мир, 1970).
20. *Фаддеев Л. Д.*— В сб.: Three-Body Problem in Nuclear and Particle Physics/Ed. by *J. S. C. McKee and P. M. Rolph*: North-Holland Publ. Comp.,— Amsterdam, 1970.
21. *Watson K. M.*— Phys. Rev., 1953, v. 89, p. 575.
22. *Lovelace C.*— In: Strong Interactions and High Energy Physics, / Ed. by *R. G. Moorhouse*: Oliver and Boyd.— London, 1964.
23. *Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.*— Nucl. Phys., 1967, v. B2, p. 167.
24. *Sandhas W.* см. [9]; *Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.* Preprint 1972, Universities Bonn and Mainz.
25. *Фаддеев Л. Д.*, см. [4], гл. 3.
26. *Ahmadzadeh A., Tjon J. A.*— Phys. Rev., 1965, v. B139, p. 1085.
El-Baz E., Fayard C., Lamot G. H., Pigeon J.— Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 1973, v. 33, p. 243.
27. *Balian R., Brezin E.*— Nuovo Cim., 1969, v. 61B, p. 403.
28. Симметричный выбор координат был сделан в работе: *Omnès R. L.*— Phys. Rev., 1964, v. B134, p. 1358.

В этом случае разложение по угловым моментам приводит к конечной системе трехмерных интегральных уравнений.

29. *Osborn T., Noyes H. P.*— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 215.
30. *Malfliet R. A., Tjon J. A.*— Ann. Phys., 1970, v. 61, p. 425.
31. *Harper E. P., Kim Y. E., Tubis A.*— Phys. Rev., 1970, v. C2, p. 877; 1972, v. C6, p. 126.
32. *Noyes H. P., Fiedeldey H.*— In: Three Particle Scattering in Quantum Mechanics/ Ed. by *J. Gillespie and J. Nuttal*: W. A. Benjamin.— N. Y., 1968.
33. *Gignoux G., Laverne A.*— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 436.
34. *Weinberg S.*— Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 440.
35. *Kanwal R. P.* Linear Integral Equations: Academic Press.— N. Y., 1971;
Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics: Interscience Publishers, N. Y., 1953. (См. перевод: *Курант Р. и*

- Гильберт Д.* Методы математической физики.— М.: Гостехиздат, 1954);
Smithies F. Integral Equations: Cambridge Univ. Press, 1965.
36. *Schmidt E.*— Math. Ann., 1907, v. 63, p. 433.
 37. *Padé H.*— Ann. Ecole Nor., 1892, v. 9, p. 1.
 38. The Padé Approximant in Theoretical Physics / Ed. by *G. A. Baker, Jr.*, and *J. L. Gammel*: Academic Press.— N. Y., 1970.
 39. *Harms E.*— Phys. Lett., 1972, v. 41B, p. 26.
 40. *Фаддеев Л. Д.*, ссылка [4], лемма 7.2.
 41. *Yataguchi Y.*— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1628.
 42. *Črepinsek L.*, *Lang C. B.*, *Oberhammer H.*, *Plessas W.*, *Zingl H. F. K.*— Acta Physica Austriaca, 1975, v. 42, p. 139.
 43. Обзор этих исследований дан в работе: *Mitra A. N.*— Advances in Nuclear Physics, 1969, v. 3, p. 1.
 44. *Noyes H. P.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 538;
Kowalski K. L.— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 798;
Sasakawa T.— Progr. Theoret. Phys. (Kyoto), Suppl., 1963, v. 27, p. 1;
Coester F.— Phys. Rev., 1971, v. C3, p. 525.
 45. *Mongan T. R.*— Nuovo Cim., 1969, v. 63B, p. 539.
 46. *Sloan I. H.*— J. Comp. Phys., 1968, v. 3, p. 332.
 47. *Крылов В. И.*, *Пальцев А. А.* Таблицы для численного интегрирования.— М.: Наука, 1969.
 48. *Sohre F.*, *Ziegelmann H.*— Phys. Lett. 1971, v. 34B, p. 579.
 49. *Atkinson K.*— Num. Math. 1972, v. 19, p. 248.
 50. *Antes H.*— Num. Math. 1972, v. 19, p. 116.
 51. *Doleschall P.*— Nucl. Phys., 1972, v. A201, p. 264.
 52. *Беляев В. Б.*, *Ефимов В. Н.*, *Шульц Г.*, *Ткаченко Е. Г.*— В сб.: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction/Ed. by *I. Slaus* et al.: North-Holland Publ. Comp. — Amsterdam, 1972.
 53. *Hetherington J. H.*, *Schick L. H.*— Phys. Rev., 1965, v. B137, p. 935.
 54. *Aaron R.*, *Amado R. D.*— Phys. Rev., 1966, v. 150, p. 857.
 55. *Cahill R. T.*, *Sloan I. H.*— Nucl. Phys., 1971, v. A165, p. 161.
 56. *Ebenhöh W.*— Nucl. Phys., 1972, v. A191, p. 97.
 57. *Brayshaw D. D.*— Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 1855.
 58. *Avishai Y.*— Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 3232.
 59. *Aaron R.*, *Amado R. D.*, *Yam Y. Y.*— Phys. Rev., 1964, v. B136, p. 650.
 60. *Sohre F.*— Thesis, University of Tübingen, 1972.
 61. *Amado R. D.*— Phys. Rev., 1963, v. 132, p. 485.
 62. Детальное изложение этого метода дано в работе: *Duck I.*— Advances in Nuclear Physics, 1968, v. 1, p. 343.
 63. *Sohre F.*, *Ziegelmann H.*— Proceedings of the Symposium on the Nuclear Three-Body Problem.— Budapest, 1971.
 64. *Delves L. M.*, *Phillipps A. C.*— Rev. Mod. Phys., 1969, v. 41, p. 497.
 65. *Levinson N.*— Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat. Fys. Medd. 1949, v. 25, No. 9.

Обобщение на задачу трех тел дано в работе: *Wright J.*— Phys. Rev., 1965, v. B139, p. 137.

- К сожалению, в обобщенную теорему Левинсона входит информация о трехчастичных свободно-свободных переходах.
66. *Watson K. M.* — Phys. Rev., 1952, v. 88, p. 1163;
Мугдал А. Б., — ЖЭТФ, 1955, т. 28, с. 3.
 67. *Malfliet R. A., Tjon J. A.* — Ann. Phys., 1970, v. 61, p. 425.
 68. *Delves L. M., Hennell M. A.* — Nucl. Phys., 1971, v. A168, p. 347.
 69. *Bhatt S. C., Levinger J. S., Harms E.* — Phys. Lett., 1972, v. 40B, p. 23.
 70. *Hurst D., Alcock J.* — Can. J. Phys., 1951, v. 29, p. 36.
 71. *Dilg W., Koester L., Nistler W.* — Phys. Lett., 1971, v. 36B, p. 208.
 72. *van Oers W. T. H., Seagrave J. D.* — Phys. Lett., 1967, v. 24B, p. 562.
 73. *Aaron R., Amado R. D., Yam Y. Y.* — Phys. Rev., 1965, B140, p. 1291.
 74. *Сутенко А. Г., Харченко В. Ф.* — Nucl. Phys., 1963, v. 49, p. 15.
 75. *Alt E. O.* — Acta Physics Austriaca, Suppl., 1972, v. IX, p. 139.
 76. *Malfliet R. A., Tjon J. A.* — Nucl. Phys., 1969, v. A127, p. 161.
 77. *Amado R. D.* — Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 1414.
 78. *Zeitnitz B., Maschuw R., Shur P., Ebenhöf W.* — In: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction / Ed. by *I. Slaus, S. A. Moszkowski, R. P. Haddock, W. T. H. van Oers*: North-Holland Publ. Comp. — Amsterdam, 1972.
 79. Аналогичный анализ (см. [81]), однако, дает
$$a_{nn} \approx a_{np} \approx = -23\phi!$$
 80. *Heller L., Signell P., Yoder N. R.* — Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 577;
Oberhammer H., Urban P., Zingl H. F. K. — Acta Physica Austriaca, 1971, v. 33, p. 115.
 81. *Bouchez R., Desreumaux S., Gondrand J. C., Perrin C., Perrin P., Cahill R. T.* — Nucl. Phys., 1972, v. A185, p. 166.
 82. *Kloet W. M., Tjon J. A.* — In: Few Particle Problems in the Nuclear Interaction / Ed. by *I. Slaus, S. A. Moszkowski, R. P. Haddock, and W. T. H. van Oers*: North-Holland Publ. Comp. — Amsterdam, 1972.
 83. *Doleschall P.* — Phys. Lett., 1972, v. 40B, p. 443.
 84. *Osborn T. A.* — Slac Report, 1967, № 79.
 85. *Kim Y. E.* — J. Math. Phys., 1969, v. 100, p. 1491; — Phys. Lett., 1969, v. 29B, p. 441;
Tubis A., Kim Y. E. — Phys. Lett., 1972, v. 38B, p. 354; — Phys. Rev., 1970, v. C1, p. 1627; 1971, v. C4, p. 693;
Harper E. P., Kim Y. E., Tubis A. — Phys. Rev. 1972, v. C6, p. 1601.
 86. *Humberston J. W., Hall R. L., Osborn T. A.* — Phys. Lett., 1968, v. 27B, p. 195.
 87. *Afnan I. R., Tang Y. C.* — Phys. Rev., 1968, v. 176, p. 1232.
 88. *Delves L. M.*, — Advances in Nuclear Physics, 1972, v. 5, p. 1.
 89. *Ball J. S., Wong D.* — Phys. Rev., 1968, v. 169, p. 1362.
 90. *Fuda M. G.* — Phys. Rev., 1971, v. C3, p. 485.
 91. *Harms E.* — Phys. Lett., 1969, v. 30B, p. 448; — Phys. Rev., 1970, v. C1, p. 1667; — Nucl. Phys., 1970, v. A159, p. 545.

92. *Scadron M., Weinberg S.*— Phys. Rev., 1964, v. B133, p. 1589.
93. *Grassberger P., Sandhas W.*— Z. Phys., 1968, v. 217, p. 9.
94. *Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.*— Phys. Rev., v. D1, p. 2581.
95. *Tjon J. A.*— Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 2109.
96. *Ziegelmann H.*— Nucl. Phys., 1972, v. A192, p. 426.
97. *Chisholm J. S. R.*, ссылка [38], гл. 5.
98. *Kloet W. M., Tjon J. A.*— Phys. Lett., 1971, v. 37B, p. 460; —Ann. Phys., 1973, v. 79, p. 407.
99. *Tang Y. C., Schmid E. W., Herndon R. C.*— Nucl. Phys., 1965, v. 65, p. 203.
100. *Temple G.*— Proc. Roy. Soc., 1928, v. 119, p. 276.
101. *Hulthen L.*— Kgl. Fys. Sällskap Lund Förh., 1944, v. 14, p. 21.
102. *Kohn W.*— Phys. Rev., 1948, v. 74, p. 1763.
103. *Schmid E. W.*— Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft, Forschungsberich K 70-32, 1970; *Schmid W. E., Hoffmann K. H.*— Nucl. Phys., 1971, v. A175, p. 443.
104. *Ladanyi K.*— Nuovo Cim., 1969, v. 61A, p. 173. *Ladanyi K., Szondy T.*— Nuovo Cim., 1971, v. 5B, p. 70.
105. *Harris F. E., Michels H. H.*— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 22, p. 1036.
106. *Schmid E. W.*— Acta Physica Austriaca, Suppl. 1972, v. IX, p. 44.
107. *Schmid E. W.*— Nuovo Cim., 1973, v. 18A, p. 771; *Schwager J.*— Nuovo Cim., 1973, v. 18A, p. 787.
108. *Schwager J.*— Nucl. Phys. 1974, v. A221, p. 371.
109. *Kato T.*— Progr. Theor. Phys. (Kyoto), 1951, v. 6, p. 394; *Schmid E. W., Schwager J.*— Nucl. Phys., 1972, v. A180, p. 434.
110. *Schwager J., Schmid E. W.*— Nucl. Phys., 1973, v. A205, p. 168.
111. *Sohre F., Schmid E. W.*— Z. Naturforsch., 1975, v. 30a, p. 271.
112. *McDonald, Nuttal J.*— Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 361.
113. *Nuttal J., Cohen H. L.*— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 1542; *McDonald F. A., Nuttal J.*— Phys. Rev., 1972, v. C6, p. 121; *Hendry J. A.*— Nucl. Phys., 1972, v. A198, p. 391.
114. *Wildermuth K.*— Acta Physica Austriaca, 1953, v. VII, p. 299;
115. *Morse P. M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics: McGraw-Hill.— N. Y., 1953, гл. 12, уравнения (8.48)—(8.52).
116. *Schmid E. W., Schwager J.*— Proc. of the Symposium on the Nuclear three-Body Problem, Budapest, 1971.
117. *Schwinger J.*, см. ссылку в работе [120].
118. *Pieper S. C., Schlessinger L., Wright J.*— Phys. Rev., 1970, v. D1, p. 1674.
119. *Grassberger P., Alt E. O., Sandhas W.*— Preprint, Universities of Mainz and Kabul, 1970.
120. *Schwartz C.*— Phys. Rev., 1966, v. 141, p. 1468.
121. *Pieper S. C., Wright J., Schlessinger L.*— Phys. Rev., 1970, v. D2, p. 1561.
122. *Pieper S. C.*— Nucl. Phys., 1972, v. A193, p. 529.
123. *Sloan I. H., Brady T. J.*— Phys. Rev., 1972, v. C6, p. 701.
124. *Brady T. J., Sloan I. H.*— В сб.: «Few Particle Problems in the Nuclear Interaction» / Ed. by *I. Slaus, S. A. Moszkowski,*

R. P. Haddock, W. T. H. van Oers: North-Holland Publ. Comp.— Amsterdam, 1972.

125. *Lieber M., Rosenberg L., Spruch L.— Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 1330.*
 126. *Smith F. T.— Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1058.*
 127. *Lieber M., Rosenberg L., Spruch L.— Phys. Rev., 1972, v. D5, p. 1347.*

В этой работе авторы предложили вычитать в (8.84) также (в дополнение к сингулярным членам, отвечающим однократному рассеянию) и сингулярные члены, отвечающие двукратному рассеянию.

128. *Brayshaw D. D.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 382.*

Дополнительная литература

- 129*. *Базь А. И., Демин В. Ф., Кузьмин А. И.— ЯФ, 1966, т. 4, с. 737.*
 130*. *Brandenburg R. A., Kim Y. E., Tubis A.— Phys. Lett., 1974, v. 49B, p. 205;— Phys. Rev., 1975, v. C12, p. 1368.*
 131*. *Afnan I. R., Birrell N. D.— Preprint Flinders Univ., 1977, Fias-R-17.*
 132*. *Jackson A. D., Lande A., Sauer P. U.— Nucl. Phys., 1970, v. A156, p. 43; Strayer M. R., Sauer P. U.— Nucl. Phys., 1974, v. A231, p. 1.*
 133*. *Afnan I. R., Read J. M.— Phys. Rev., 1975, v. C12, p. 293.*
 134*. *Nunberg P., Prospéri D., Pace E.— Nucl. Phys., 1977, v. A285, p. 58.*
 135*. *Демин В. Ф., Покровский Ю. Ф., Эфрос В. Д.— Phys. Lett., 1973, v. 44B, p. 227.*
 136*. *Nuttall J.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 473; Webb J. G.— Phys. Rev., 1969, v. 178, p. 2226.*
 137*. *Меркурьев С. П.— ТМФ, 1972, т. 32, с. 187; — ЯФ, 1976, т. 24, с. 289;— В сб.: Proc. Int. Conf. Few-Body Problem, Potsdam, 1977.*
 138*. *Симонов Ю. А., Бадалли А. М.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 890.*
 139*. *Симонов Ю. А.— ЯФ, 1975, т. 22, с. 845;— В сб.: Proc. Int. Conf. Few-Body Problem, Potsdam, 1977.*
 140*. *Базь А. И., Меркурьев С. П.— ТМФ, 1976, т. 27, с. 67;— ТМФ, 1977, т. 31, с. 48.*

Литература к дополнению 1

1. *Воробьев Ю. В. Метод моментов в прикладной математике.— М.: Физматгиз, 1958.*
2. *Ефимов В. Н.— Препринты ОИЯИ, P-2546, P-2890, 1966, Дубна.*
3. *Bateman H.— Proc. Roy. Soc., 1922, v. A100, p. 441.*
4. *Кукулин В. И.— ЯФ, 1971, т. 14, с. 862;— Czechoslovak J. Phys., 1971, v. B21, p. 923.*
5. См. обзор: *Levinger J. The two- and three-body problem.— In: Springer Tracts in Mod. Phys., 1974, v. 71, p. 88. Springer.— Berlin—Heidelberg — N. Y.*

6. *Adhikari S. K.*— Phys. Rev., 1974, v. C10, p. 1623;
Sloan I. H., Adhikari S. K.— Nucl. Phys., 1974, v. A235, p. 352.
Adhikari S. K., Sloan I. H.— Nucl. Phys., 1975, v. A241, p. 429;
1975, v. A251, p. 297;— Phys. Rev., 1975, v. C11, p. 1133; 1975,
v. C12, p. 1152.
7. *Kowalski K. L.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 798; *Noyes H. P.*— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 538.
8. *Harms E.*— Phys. Rev., 1970, v. C1, p. 1667;— Nucl. Phys.,
1970, v. A159, p. 545.
9. *Harms E.* Докторская диссертация, Rensselaer Polytechnic
Institute, 1969; см. также обзор Левинжера [5].
10. *Afnan I. R., Birrel N. D.*, Preprint, The Flinders Univ., 1977,
Fias-R-17.
11. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего
анализа.— М.—Л.: Физматгиз, 1962;
Березин И. С., Жидков И. П. Методы вычислений.— М.: Физ-
матгиз, 1960, т. II.
12. *Беляев В. Б., Воеционко Е.*— Препринт ОИЯИ, P4-4144, 1968,
Дубна;
Ахмадходжаев Б. А., Беляев В. Б., Воеционко Е.— Пре-
принт ИТФ-69-49, 1969, К.;
Ахмадходжаев Б. А., Беляев В. Б., Зубарев А. Л.— Пре-
принт ОИЯИ, P4-5318.
13. *Беляев В. Б. и др.*—Препринт ОИЯИ, E4-8819, 1975; E4—7535,
1973; E4-9270, 1975.
14. *Харченко В. Ф., Петров Н. М., Кузьмичев В. Е.*— Препринт
ИТФ-70-22, 1970, К.;— Phys. Lett., 1970, v. 32B, p. 19.
15. *Sawicki M.*— Phys. Lett., 1977, v. 68B, p. 43;— Preprint Univ.
Bonn, 1977.
16. *Osborn T. A.*— Nucl. Phys., 1973, v. A211, p. 211.
17. *Ernst D. J. et al.*— Phys. Rev., 1973, v. C8, p. 46; 1974, v. C9,
p. 1780; v. C8, p. 2056.
18. *Birrell N. D.* Докторская диссертация, Flinders Univ. 1976.
19. *Osborn T. A.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 373; 1973, v. 14,
p. 1485.
20. *Levinger J. S.*— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1314.
21. *Sloan I. H., Gray J. D.*— Phys. Lett., 1973, v. 44B, p. 354.
22. *Lavine J. P. et al.*— Phys. Rev., 1973, v. C7, p. 968;
Fuda M.— Phys. Rev., 1968, v. 166, p. 1064.
23. *Malfliet L. A., Tjon I. A.*— Nucl. Phys., 1969, v. A127, p. 161.
24. *Malfliet L. A.* Докторская диссертация, University of Utrecht,
1969.
25. *Afnan I. R., Read J. M.*— Phys. Rev., 1973, v. C8, p. 1294.
26. *Бахвалов Н. С.* Численные методы.— М.: Наука, 1973, т. I.
27. *Фаддеев Л. Д.* Доклад на Втором проблемном симпозиуме по
физике ядра, Новосибирск, 1970.—В сб.: Проблемы современ-
ной ядерной физики, М.: Наука, 1973.
28. *Kloet W. H., Tjon J. A.*— Ann. Phys., 1973, v. 79, p. 407;—
Nucl. Phys., 1973, v. A210, p. 380;
Tjon J. A.— In: Few-Body Dynamics (Proc. VII Int. Conf.
on Few-Body Problem in Nucl. and Part. Physics, Delhi, 1975—
1976),— Amst. North-Holl., 1976, p. 507.

29. *Stolk C., Tjon J. A.*— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 985.
30. *Sloan I.*— Phys. Rev., 1969, v. 185, p. 1361.
31. *Harms E.*— Phys. Lett., 1972, v. 41B, p. 26.
32. *Sasakawa T.*— Progr. Theor. Phys. Suppl., 1963, v. 27, p. 1.
33. *Fuda M. G.*— Nucl. Phys., 1975, v. A245, p. 461;
Whiting J., Fuda M. G.— Phys. Rev., 1975, v. C12, p. 320.
34. *Кукудин В. И., Краснопольский В. М.*— ЯФ, 1974, т. 20, с. 883;
Кукудин В. И., Померанцев В. Н.— ТМФ, 1976, т. 27, с. 373.
35. *Померанцев В. Н.*— ТМФ, 1976, т. 29, с. 94.
36. *Кукудин В. И., Неудачин В. Г., Померанцев В. Н.*— ЯФ, 1976, т. 24, с. 298;— *J. Phys. G*, 1978, v. 4, p. 1409.
37. *Кукудин В. И., Померанцев В. Н.*— Ann. Phys. (N. Y.) 1978, v. 111, p. 330.
38. *Ньютон Р.* Теория рассеяния волн и частиц.— М.: Мир, 1968.
39. *Shakin C. M., Thaler R. M.* Phys. Rev., 1973, v. C7, p. 494;
Scheerbaum R. R., Shakin C. M.— Phys. Rev., 1974, v. C9, p. 116.
40. *Померанцев В. Н.*—Кандидатская диссертация, МГУ, 1978;
Кукудин В. И., Померанцев В. Н.— ЯФ, 1978, т. 27, с. 1611.
41. *Wang W. L., Shakin C. M.*— Phys. Lett., 1970, v. 32B, p. 421;
Lev A., Beres W. P.— Phys. Rev., 1976, v. C14, p. 354.
42. *Coester F.*— Phys. Rev., 1971, v. C3, p. 525.
43. *Austern N.*— Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 1595.
44. *Soper P. J. R.*— Phys. Rev., 1974, v. 10, p. 1282; см. также работу
Blaszczak D., Fuda M.— Phys. Rev., 1973, v. 8, p. 1665.
45. *Kowalski K. L.*— Nucl. Phys. 1972, v. A190, p. 645.
46. *Doleshall P., Revai J.*— J. Math. Phys., 1970, v. 11, p. 1001.
47. *Karlsson B. R.*— Preprint CERN TH. 2281, 1977;— Nucl. Phys., 1978, v. A295, p. 463.
48. *Kowalski K. L.*— Preprint: Subtraction Techniques in Three — Particle Scattering, Case Western Reserve Univ. Cleveland, 1977.
49. *Osborn T. A.*— Ann. Phys. 1970, v. 58, p. 417;
Osborn T. A., Kowalski K. L.— Ann. Phys., 1971, v. 68, p. 361.

Литература к дополнению 2

1. *Якубовский О. А.*— ЯФ, 1967, т. 5, с. 1312.
2. *Фаддеев Л. Д.*— В сб.: Труды проблемного симпозиума по физике ядра.— Тбилиси, 1967, т. I.
3. *Харченко В. Ф., Кузьмичев В. Е.*— Препринт ИТФ-71-99 Е, 1971, К; *Харченко В. Ф., Шадчин С. А.*,— ЯФ, 1975, т. 22, с. 632.
4. *Кузьмичев В. Е.*, Кандидатская диссертация, ИТФ, 1977, К.
5. *Харченко В. Ф., Кузьмичев В. Е.*— Phys. Lett., 1972, v. 42B, p. 328;—ЯФ, 1973, т. 17, с. 975.
Харченко В. Ф., Левашев В. П.— Phys. Lett., 1976, v. 60B, p. 317;
6. *Народецкий И. М.*— ЯФ, 1974, т. 19, с. 552.
7. *Харченко В. Ф.*—Укр. физ. журнал, 1962, т. 7, с. 573; с. 582;

- Ситенко А. Г., Харченко В. Ф.* — Nucl. Phys., 1963, v. 49, p. 15;
Mitra A. N., Bhasin V. S. — Phys. Rev., 1963, v. 131, p. 1265.
8. *Tjon J. A.* — Phys. Lett. 1975, v. 56B, p. 217; — Phys. Lett. 1976, v. 63B, p. 391.
 9. См. ссылку [15] к Дополнению 1.
 10. *Пародецкий И. М., Грач И. М.* — ЯФ, 1973, т. 186, с. 667.
 11. *Барышников А. Г., Блохинцев Л. Д., Пародецкий И. М.* — ЯФ, 1977, т. 25, с. 1167.
 12. *Alt E. O., Grassberger P., Sandhas W.* — Preprint JINR, E4-6688, 1972, Dubna; — In: Few Particle Problem in the Nuclear Interaction, — Amsterdam, 1972, p. 299.
 13. *Van zani V.* — Lett. Nuovo Cim., 1976, v. 16, p. 1.
 14. *Sloan I.* — Phys. Rev., 1972, v. C6, p. 1945;
Bencze Gy. — Nucl. Phys., 1973, v. A210, p. 568;
Redich E. F. — Nucl. Phys., 1974, v. A225, p. 16; 1974, v. A235, p. 82; — Phys. Rev., 1974; v. C10, p. 1291.