Э. В. ШПОЛЬСКИЙ

АТОМНАЯ ФИЗИКА

ТОМ ПЕРВЫЙ

ВВЕДЕНИЕ В АТОМНУЮ ФИЗИКУ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

530.3
Ш 84
УДК 539.1 (075.8)

© Издательство «Наука», 1974, с изменениями

Ш $\frac{20408-043}{053(01)-74}$ 98-74

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к шестому изданию 7

Из предисловия ко второму изданию 8

Из предисловия к первому изданию 9

Глава I. **Электрон, его заряд и масса** 11

§ 1. Открытие электрона (11). § 2. Определение заряда электрона (12). § 3. Практическое осуществление опыта Милликэна (14). § 4. Движение электрона в электрическом и магнитном полях (19). § 5. Электрон в продольном электростатическом поле (23). § 6. Экспериментальные методы определения удельного заряда (25). § 7. Определение удельного заряда электрона по методу двух конденсаторов (27). § 8. Определение удельного заряда электрона по методу фокусировки продольным магнитным полем (29). § 9. Фокусировка и монохроматизация пучков заряженных частиц (32). § 10. Зависимость массы электрона от его скорости (35).

Глава II. **Атомы. Изотопы** 42

§ 11. Введение (42). § 12. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева (42). § 13. Определение истинных масс атомов. Метод парабол (50). § 14. Масс-спектрографы (53). § 15. Масс-спектрометры и масс-спектрографы с двойной фокусировкой (61). § 16. Массы и процентное содержание изотопов (66). § 17. Разделение изотопов с помощью методов, основанных на диффузии (67). § 18. Разделение изотопов методом термодиффузии (73). § 19. Разделение изотопов с помощью электромагнитных методов (78). § 20. Разделение изотопов с помощью методов фракционированной перегонки и обменных реакций (82). § 21. Разделение изотопов методом центрифугирования (84). § 22. Получение тяжелого изотопа водорода (дейтерия) и тяжелой воды (86).

Глава III. **Ядерное строение атома** 92

§ 23. Эффективное сечение для рассеяния частиц (92). § 24. Зондирование атомов электронами (95). § 25. Свойства α-частиц (97). § 26. Теория рассеяния α-частиц (101). § 27. Экспериментальная проверка формулы Резерфорда (104). § 28. Определение заряда ядра (106).

Глава IV. **Рентгеновские лучи и их применение к определению атомных констант** 108

§ 29. Рентгеновские лучи (108). § 30. Поглощение рентгеновских лучей (112). § 31. Рассеяние рентгеновских лучей (116). § 32. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллической решетке (118). § 33. Экспе-

риментальное осуществление дифракции рентгеновских лучей (124). § 34. Определение длины волны рентгеновских спектральных линий (129). § 35. Спектры рентгеновских лучей (130). § 36. Закон Мозели (133). § 37. Абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей (137). § 38. Определение постоянной Авогадро и заряда электрона (140). § 39. Удельный заряд электрона (143).

Глава V. **Строение атома и классическая физика** 145

А. Классическая механика и строение атома 145

§ 40. Атомные модели (145). § 41. Закон сохранения энергии в механике (146). § 42. Потенциальные кривые (149). § 43. Закон сохранения импульса (152). § 44. Соударения (154). § 45. Центр инерции (157). § 46. Линейный гармонический осциллятор (160). § 47. Комплексное представление колебаний (163). § 48. Разложение в спектр (165). § 49. Центральные силы. Кинетическая энергия в полярных координатах (170). § 50. Движение в центральном поле (172). § 51. Кеплерова задача (173). § 52. α-частица в поле ядра (178). § 53. Приведенная масса (180). § 54. Обобщенные координаты. Состояние системы (181). § 55. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа (182). § 56. Применение уравнений Лагранжа к задаче о центральном движении (185). § 57. Обобщенные импульсы (188). § 58. Гамильтоновы канонические уравнения (190). § 59. Физический смысл функции Гамильтона (192). § 60. Циклические координаты (194). § 61. Скобки Пуассона. Законы сохранения (196). § 62. Движение в электромагнитном поле (200). § 63. Механика быстродвижущихся частиц. Преобразования Лоренца (204). § 64. Основы релятивистской динамики частицы (210). § 65. О связи между массой и энергией (217).

Б. Классическая теория электромагнитного излучения 223

§ 66. Элементарные центры испускания света (223). § 67. Электромагнитное излучение линейного осциллятора (224). § 68. Полное и среднее излучение осциллятора (227). § 69. Электромагнитный спектр негармонического осциллятора (229). § 70. Затухание колебаний (231). § 71. Лучистое трение (233). § 72. Интеграл Фурье и сплошной спектр (237). § 73. Естественная ширина спектральных линий (241). § 74. Другие примеры спектрального разложения непериодических процессов (243). § 75. Планетарная модель атома (247). § 76. Орбитальный магнитный момент и теорема Лармора (248). § 77. Эффект Зеемана (251). § 78. Эффект Зеемана. Общий случай (254). § 79. Излучение Вавилова — Черенкова (257).

Глава VI. **Излучение абсолютно черного тела и гипотеза квантов энергии** 267

§ 80. Классическая физика и проблема теплового излучения (267). § 81. Равновесное излучение в полости (270). § 82. Закон Кирхгофа (272). § 83. Законы излучения абсолютно черного тела (274). § 84. Экспериментальное исследование законов теплового излучения (276). § 85. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы (278). § 86. Формула Рэлея — Джинса (281). § 87. «Ультрафиолетовая катастрофа» (286). § 88. Формула Планка (288). § 89. Гипотеза квантов энергии (290).

Глава VII. **Уровни энергии атомов** 294

§ 90. Планетарная модель атома и квантовые постулаты Бора (294). § 91. Опыты Франка и Герца (295). § 92. Упругие соударения (299). § 93. Неупругие соударения. Критические потенциалы (301). § 94. Усовершенствование экспериментальной методики (303). § 95. Одновременное определение всех ступеней возбуждения (304). § 96. Определение ионизационных потенциалов (307). § 97. Излучение возбужденных атомов (311). § 98. Спонтанное испускание (312). § 99. Поглощение и вынужденное испускание (316). § 100. Вывод формулы Планка по Эйнштейну (317). § 101. Свойства индуцированного испускания (320). § 102. Генераторы света (324).

Глава VIII. **Спектральные серии и уровни энергий водородного атома** 329

§ 103. Серия Бальмера (329). § 104. Серии Лаймана, Пашена и др. Обобщенная формула Бальмера (332). § 105. Спектральные термы. Комбинационный принцип (334). § 106. Квантование круговых орбит (336). § 107. Теория Бора (339). § 108. Серия Пикеринга и спектры водородоподобных ионов (342). § 109. Применение предыдущей теории. Открытие тяжелого изотопа водорода (345). § 110. О спектроскопическом определении удельного заряда электрона (347). § 111. Диаграммы уровней энергии (349). § 112. Граничный сплошной спектр атомного водорода (350). § 113. Квантование водородоподобного атома по Бору — Зоммерфельду (352). § 114. Принцип соответствия (361). § 115. Кризис теории Бора (366).

Глава IX. **Световые кванты** 368

§ 116. Флуктуации светового поля (368). § 117. Фотоэффект и уравнение Эйнштейна (374). § 118. Экспериментальная проверка уравнения Эйнштейна (377). § 119. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра (380). § 120. Точное определение постоянной Планка (381). § 121. Другие опыты, обнаруживающие корпускулярные свойства света (383). § 122. Флуктуации светового потока (385). § 123. Рассеяние рентгеновских лучей (волновая теория) (388). § 124. Эффект Комптона (393). § 125. Элементарная теория эффекта Комптона (395). § 126. Электроны отдачи (400). § 127. Элементарные акты рассеяния и законы сохранения (403). § 128. Экспериментальное подтверждение применимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния (405). § 129. Эффект Мёссбауэра (408). § 130. Некоторые применения эффекта Мёссбауэра (414).

Глава X. **Волны и частицы** 420

§ 131. Введение (420). § 132. Плоская монохроматическая волна в однородной среде (420). § 133. Волновое уравнение (423). § 134. Суперпозиция плоских волн (425). § 135. Волновой пакет (427). § 136. Фазовая и групповая скорости (431). § 137. Корпускулярно-волновой дуализм. Преломление света (433). § 138. Корпускулярно-волновой дуализм. Эффект Допплера (438). § 139. Корпускулярно-волновой дуализм. Дифракционная решетка (440). § 140. Гипотеза де-Бройля (442). § 141. Свойства волн де-Бройля (443). § 142. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Бройля. Метод Брэгга (445). § 143. Преломление электронных волн и внутренний потенциал металла (450). § 144. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Бройля. Методы Лауэ и Дебая — Шеррера (453). § 145. Интерференционные явления с молекулярными пучками и с нейтронами (459). § 146. Волновой пакет и частица (463). § 147. Статистическое истолкование волн де-Бройля (465). § 148. Соотношения неопределенности (467). § 149. Определение места и импульса микрочастицы (470). § 150. Ошибочные толкования соотношений неопределенности (477). § 151. Соотношения неопределенности и принцип причинности (482).

Глава XI. **Уравнение Шрёдингера** 487

§ 152. Уравнение Шрёдингера и физический смысл его решений (487). § 153. Отражение и прохождение через потенциальный барьер (493). § 154. Потенциальный барьер конечной ширины (502). § 155. Колебания струны (506). § 156. Частица в потенциальном ящике (511). § 157. Электрон в потенциальной яме (515). § 158. Линейный гармонический осциллятор (521). § 159. Нормальное и возбужденные состояния линейного осциллятора (527). § 160. Связанные осцилляторы. Силы Ван-дер-Ваальса (535). § 161. Частица в трехмерном потенциальном ящике (544).

Приложения 549

I. Вычисление средних значений 549
II. Вывод распределения Больцмана для квантовых систем 554
III. К классической теории эффекта Зеемана 557
IV. Формула средней квадратичной флуктуации 559
V. Ортогональность и нормирование собственных функций осциллятора 564
VI. Теорема вириала 568

Предметный указатель 571

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Шестое издание первого тома, по сравнению с пятым изданием, выходит почти без изменений: материал данного тома образуют в основном вопросы настолько прочно установившиеся, что не было необходимости подвергать этот материал сколько-нибудь существенной переработке. При подготовке к печати исправлены замеченные неточности, произведены небольшие сокращения. Особо следует оговорить два обстоятельства. Во-первых, наряду с постоянной Планка h, там где это было целесообразно, введена постоянная $\hbar = h/2\pi$; во-вторых, несмотря на то, что в большинстве отделов физики введена международная система единиц СИ, в данной книге, как и в предшествующих изданиях ее, сохранена система СГС (точнее — гауссова система единиц). Причина этого состоит в том, что для квантовой механики система СИ не только не нужна, но и крайне неудобна. Это обстоятельство специально подчеркивал А. Зоммерфельд — инициатор введения международной системы в электродинамике.

При подготовке к печати этого тома большую помощь оказала мне Т. Н. Болотникова, которой я выражаю здесь искреннюю благодарность.

Москва — Узкое, июль 1973 г. *Э. Шпольский*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Со времени выхода первого издания этой книги прошло уже четыре года. В течение этого периода я имел возможность проверить доступность изложения и целесообразность построения книги, пользуясь ею в преподавании в двух московских высших учебных заведениях. Ценным материалом для меня были также письма читателей, часть которых самостоятельно изучала атомную физику по этой книге или систематизировала ранее приобретенные разрозненные знания. Итог всех этих наблюдений оказался в пользу выбранного характера изложения и плана книги. В частности, общее одобрение вызвало параллельное рассмотрение экспериментальной и теоретической сторон вопроса, а также введение вспомогательных глав или параграфов, излагающих некоторые необходимые сведения из других разделов теоретической физики. Все это побудило меня полностью сохранить характер книги также и во втором издании.

Тем не менее книга подверглась весьма существенной переработке. Без преувеличения можно сказать, что она в значительной степени написана заново. Я старался прежде всего устранить все замеченные неточности, неясности и, по возможности не расширяя содержания, сделать изложение более отчетливым. Добавления, сделанные в первой половине книги, почти исключительно относятся к экспериментальным основаниям атомной физики, так как изложение некоторых экспериментов в первом издании мне теперь кажется чрезмерно элементарным. Кроме того, необходимо было подробнее осветить те вопросы, которые за истекший период выдвинуты самим развитием науки.

Выходящий сейчас первый том в основном посвящен экспериментальным основаниям ядерной теории атома и квантовой физики. Он заканчивается рассмотрением волновых свойств материи, а в последней главе, по примеру предыдущего издания, устанавливается уравнение Шрёдингера и рассматриваются его простейшие применения — почти исключительно к одномерным задачам. Таким образом, этот том представляет собой довольно законченное целое и для некоторых категорий читателей может иметь самостоятельный интерес.

Э. Шпольский

Москва, 1948 г.

ГЛАВА I

ЭЛЕКТРОН, ЕГО ЗАРЯД И МАССА

§ 1. Открытие электрона

Открытие дискретной структуры электрических зарядов было сделано как вывод из законов Фарадея об электролизе. Напомним ход рассуждений, приведший к этому открытию.

Из законов Фарадея следует, что если пропускать одно и то же количество электричества через различные электролиты, то количества вещества, выделяемые в растворах одновалентных ионов, будут пропорциональны атомным весам ионов. Если это количество электричества как раз таково, что оно выделяет один грамм-атом определенных ионов (т. е. количество граммов вещества, равное его атомному весу, например 107,88 *г* серебра, 35,45 *г* хлора и т. д.), то в любом другом электролите, содержащем одновалентные ионы, оно выделит тоже один грамм-атом ионов. Так как электрический ток в электролите обусловлен движением ионов, то мы можем формулировать установленный факт, утверждая, что один грамм-атом любых одновалентных ионов несет с собою всегда одно и то же количество электричества, вне зависимости от природы этих ионов. Это количество электричества, называемое числом Фарадея F, равно 96 491 кулону, или $2{,}892 \cdot 10^{14}$ абсолютных электростатических единиц. Если теперь пропускать ток через растворы двухвалентных ионов, то оказывается, что один фарадеев заряд переносится половиной грамм-атома двухвалентного иона, а в трехвалентных электролитах — одной третью грамм-атома, или, иначе говоря, один грамм-атом двухвалентных ионов несет с собой удвоенный фарадеев заряд, а один грамм-атом трехвалентных ионов — утроенный. Так как, с другой стороны, по закону Авогадро один грамм-атом любого вещества всегда содержит одно и то же количество частиц N и так как мы с полным основанием можем предположить, что весь заряд, переносимый одним грамм-атомом, равномерно распределяется на все эти N частиц, то заряд, переносимый каждым одновалентным ионом, будет иметь совершенно определенную величину e, равную

$$e = F/N. \tag{1.1}$$

заряд, переносимый каждым двухвалентным ионом, будет

$$2e = 2F/N,$$

и вообще k-валентным ионом

$$ke = kF/N.$$

Итак, мы видим, что различные ионы могут нести на себе заряды, равные e, $2e$, $3e$, ..., но не встречаются ионы с зарядом, равным $1{,}5e$ или $2{,}5e$. Отсюда и следует вывод, с особенной отчетливостью сформулированный Гельмгольцем в речи, произнесенной в честь Фарадея: «Если мы принимаем существование атомов элементов, то мы не можем избежать и дальнейшего следствия, — что и электричество, как положительное, так и отрицательное, разделено на определенные элементарные количества, которые ведут себя, как атомы электричества».

Особенно существенную роль в познании атомистической природы электричества сыграло изучение прохождения электричества в газах. В частности, исследование разряда в разреженных газах и изучение свойств возникающих при этом катодных лучей показали, что атомы отрицательного электричества могут быть легко получены в свободном состоянии, не связанными с обычными атомами вещества. За этими атомами отрицательного электричества исторически утвердилось название электронов.

§ 2. Определение заряда электрона

Прямое доказательство дискретности электрических зарядов и первые точные определения величины заряда электрона путем нахождения зарядов отдельных частиц были выполнены Милликэном в 1911 г. Определение заряда электронов, освобождаемых действием света (фотоэффект), по методу, аналогичному методу Милликэна, было выполнено в 1918 г. А. Ф. Иоффе.

Экспериментальный метод, примененный Милликэном, заключался в непосредственном измерении заряда очень маленьких капелек масла. Представим себе такую капельку между обкладками горизонтально расположенного конденсатора. Если на пластины конденсатора не наложено поле, то капля будет свободно падать. Вследствие малых размеров капля будет падать равномерно, так как ее вес mg уравновешивается силой сопротивления воздуха, равной по закону Стокса

$$F = 6\pi\eta a v_g, \tag{2.1}$$

где v_g — скорость падения, η — коэффициент внутреннего трения воздуха и a — радиус капли. Условие

$$mg = 6\pi\eta^2 a v \tag{2.2}$$

дает возможность вычислить радиус капли. В самом деле, обозначим плотность вещества капли через σ, плотность воздуха через ρ. Тогда, принимая во внимание, что на шарик с весом $mg = \frac{4}{3}\pi a^3\sigma g$, падающий в воздухе, действует по закону Архимеда еще сила, направленная вверх и равная $\frac{4}{3}\pi a^3\rho g$, мы можем переписать равенство (2.2) в виде

$$\frac{4}{3}\pi a^3(\sigma - \rho)\, g = 6\pi\eta a v_g,$$

откуда

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\frac{\eta^{1/2} v_g^{1/2}}{(\sigma-\rho)^{1/2}\, g^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Представим себе теперь, что на пластины конденсатора наложена разность потенциалов, величина и направление которой подобраны так, чтобы капелька под действием электрического поля поднималась вверх. Обозначая через v_E скорость этого подъема, который, как и падение, будет происходить равномерно, мы можем написать

$$\mathscr{E}e - mg = 6\pi\eta a v_E, \tag{2.4}$$

где $\mathscr{E}$ — напряженность поля внутри конденсатора. Из (2.2) и (2.4) получаем

$$e = \frac{6\pi\eta a}{\mathscr{E}}(v_g + v_E),$$

или, заменив недоступный непосредственному измерению радиус капли a его выражением (2.3) через v_g,

$$e = 9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathscr{E}(\sigma-\rho)^{1/2}\, g^{1/2}}(v_g + v_E). \tag{2.5}$$

Ионизуя воздух между пластинами конденсатора (например, при помощи рентгеновских лучей), можно изменить заряд капли. Если при этом величину напряженности поля оставить прежней, то скорость капли изменится и станет равной v_E'; мы имеем

$$e_1 = 9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathscr{E}(\sigma-\rho)^{1/2}\, g^{1/2}}(v_g + v_E').$$

Комбинируя это выражение с (2.5), найдем

$$\Delta e = e - e_1 = 9\sqrt{2}\,\frac{\pi v_g^{1/2}\eta^{3/2}}{\mathscr{E}(\sigma-\rho)^{1/2}\, g^{1/2}}(v_E - v_E'). \tag{2.6}$$

Изменяя несколько раз заряд, можно с одной и то же каплей произвести большое число измерений.

§ 3. Практическое осуществление опыта Милликэна

Тщательно отшлифованные пластины конденсатора P_1 и P_2 (рис. 1) удерживаются на определенном расстоянии точно параллельно друг другу при помощи изолирующей прокладки JJ. Верхняя пластина P_1 имеет в середине отверстие O, через которое внутрь конденсатора попадают испытуемые капельки масла, распыляемого при помощи пульверизатора в цилиндр C. Известно, что при распылении жидкостей образующиеся капли несут электрический заряд, так что внутрь конденсатора попадают уже заряженные капли. Через окошко F_1 капелька освещается обычно светом дуги;

Рис. 1. Схема конденсатора Милликэна.

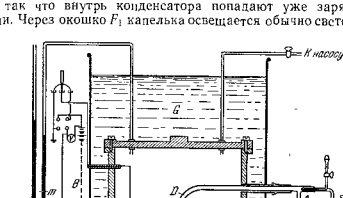


Рис. 2. Схема установки Милликэна: a — источник света; w, d — фильтры для поглощения тепловых лучей; P_1P_2 — конденсатор; AD — пульверизатор для получения капелек масла; G — масляная ванна (термостат); B — батарея; m — манометр; R — рентгеновская трубка.

наблюдение же ведется при помощи микроскопа через окошко F_3. Так как наблюдение происходит в направлении, перпендикулярном к освещающему пучку света, то выбранная капелька в поле

зрения микроскопа видна, как яркая звездочка на темном фоне (как в ультрамикроскопе). Окно F_2 служит для выхода пучка света, так как, поглощаясь стенками камеры, свет вызвал бы внутри нее неравномерное нагревание и потоки воздуха, мешающие наблюдениям. Через то же окошко F_2 внутрь конденсатора могут быть пропущены рентгеновские лучи, создающие ионизацию воздуха, в результате которой заряд капельки может быть изменен. Полная схема установки Милликэна приведена на рис. 2.

Измерение скорости падения или подъема капельки производилось путем определения промежутка времени, необходимого для прохождения между двумя нитями, расположенными в фокальной плоскости микроскопа; за меру скорости бралась обратная величина этого промежутка времени. В таблице I приведено несколько результатов измерений Милликэна. Согласно (2.6) изменение величины заряда при перезарядке должно быть пропорционально разности скоростей $v_E - v'_E$. Если эта разность окажется целым кратным одной и той же величине, то можно утверждать, что изменение заряда происходит не непрерывно, а конечными порциями. Четвертый и пятый столбцы таблицы показывают, что это имеет место на самом деле: с точностью до нескольких единиц в пятом знаке заряд изменяется на 6, 7, 1, ... единиц, причем сама единица перезарядки (пятый столбец таблицы) имеет постоянное значение (в пределах ошибки опыта).

Таблица I

Время подъема в электрическом поле t_E, сек	Обратное время подъема в электрическом поле $\frac{1}{t_E}$	Разность обратных времен подъема после перезарядки $\frac{1}{t'_E}-\frac{1}{t_E}$	Число единиц перезарядки n'	Относительная величина единицы перезарядки $\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{t'_E}-\frac{1}{t_E}\right)$	Сумма обратных времен падения и подъема $\left(\frac{1}{t_g}\text{*)}\right)+\frac{1}{t_E}$	Число единиц заряда $n=n'$	Относительная величина единицы заряда $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t'_E}+\frac{1}{t_E}\right)$
80,708	0,01236	0,03234	6	0,005390	0,09655	18	0,005366
22,375	0,04470				0,12887	24	+6 0,005371
140,565	0,00719	0,03751	7	0,005358	0,09138	17	−7 0,005375
79,600	0,01254	0,005348	1	0,005348	0,09673	18	+1 0,005374
34,785	0,02870	0,01616	3	0,005387	0,11289	21	+3 0,005376

*) Среднее $t_g = 11,880$, где t_g — время падения в поле силы тяжести.

Формула (2.5) показывает, что абсолютная величина заряда капли должна быть пропорциональна сумме $v_g + v_E$ (шестой столбец таблицы). Если эти суммы окажутся кратными одной и той же величине, то это означает, что заряд складывается из дискретных единиц. Седьмой и восьмой столбцы показывают, что и это имеет место в действительности. Наконец, из сравнения пятого и восьмого столбцов видно, что единица перезарядки и единица заряда между собой совпадают, опять-таки с точностью до нескольких единиц в пятом знаке. Таким образом, анализ таблицы дает полное и непосредственное доказательство дискретной природы электрического заряда — атомистики электрических явлений.

Для точного определения абсолютной величины заряда электрона в числа, полученные при помощи формулы (2.5), необходимо внести существенную поправку. В самом деле, оказалось, что если определять заряд капелек различного радиуса, то при уменьшении последнего вначале получаются постоянные значения e, но для очень маленьких капелек e быстро возрастает с уменьшением радиуса. Таким образом, выходит, что заряд электрона не имеет постоянного значения, а может зависеть от размеров капельки.

Милликэн объяснил этот явно несообразный результат тем, что закон Стокса нельзя применять к движению очень маленьких капелек. Действительно, закон Стокса выводится в предположении, что движущееся тело имеет форму шара и что среда, в которой происходит движение, — непрерывна. Последнее предположение заведомо не оправдывается, когда при движении в газе размеры капельки становятся сравнимыми со средней длиной свободного пути газовых молекул. Таким образом, отношение λ/a средней длины свободного пути к радиусу капли может служить критерием применимости или неприменимости закона Стокса: если это отношение мало ($\lambda/a \ll 1$), то закон Стокса применять можно, в противоположном случае — закон Стокса неприменим.

Для того чтобы учесть отступления от закона Стокса для очень маленьких капелек, было предложено пользоваться вместо (2.1) следующим исправленным выражением для стоксовой силы:

$$F = \frac{6\pi\eta a v_g}{1 + A\frac{\lambda}{a}}, \tag{3.1}$$

где A — некоторая постоянная. Как видно, это выражение построено так, что при $A\frac{\lambda}{a} \to 0$ оно переходит в формулу Стокса (2.1). При помощи этой исправленной формулы мы получаем

для абсолютной величины заряда вместо (2.5) следующее выражение:

$$e_0 = \frac{9\sqrt{2}\,\pi\eta^{3/2} v_g^{3/2}}{(\sigma - \rho)^{1/2} g^{1/2}} \frac{(v_E + v_g)}{E\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right)^{3/2}}. \tag{3.2}$$

Чтобы найти абсолютную величину заряда по этой формуле, надо знать постоянную A. Однако Милликэн показал, каким образом можно найти истинную величину заряда, не прибегая к определению этой постоянной.

Из сопоставления формул (2.5) и (3.2) легко найти отношение величины e_0 к заряду, вычисленному без поправки:

$$\frac{e_0}{e} = \frac{1}{\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right)^{3/2}};$$

или

$$e_0^{2/3}\left(1 + A\frac{\lambda}{a}\right) = e^{2/3}.$$

Но длина свободного пробега λ обратно пропорциональна давлению газа p, поэтому

$$e_0^{2/3}(1 + B/pa) = e^{2/3}, \tag{3.3}$$

где B — некоторая новая постоянная.

Если изменять давление p и для каждого значения давления вычислять кажущуюся величину заряда e (без поправки), то согласно формуле (3.3) между $e^{2/3}$ и $1/pa$ должна иметь место линейная зависимость.

При этом, так как член B/pa в формуле (3.3) играет роль малой поправки, то в качестве радиуса капли a можно взять величину, вычисляемую по неисправленной формуле Стокса [см. формулу (2.3)]. В самом деле, константа B, согласно измерениям Милликэна, равна

$$B = 0{,}000617,$$

если p измерено в сантиметрах ртутного столба и a — в сантиметрах.

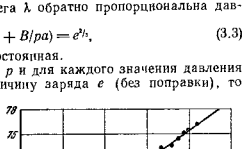


Рис. 3.

Рис. 3, где на оси абсцисс отложены значения $1/pa$, а на оси ординат $e^{2/3}\cdot 10^8$, показывает, что требуемая формулой (3.3) линейная зависимость существует в действительности.

Полагая в формуле (3.3) $1/p = 0$ или $a = \infty$, т. е. переходя к предельному случаю, когда закон Стокса должен быть справедлив (радиус частицы бесконечно велик по сравнению со средней длиной свободного пути), найдем $e^{2/3} = e_0^{2/3}$, или $e = e_0$. Таким образом, для нахождения истинного значения заряда электрона e_0 достаточно экстраполировать прямую до пересечения ее с осью ординат.

На рис. 4 приведены четыре прямые, построенные таким же способом для частиц различной природы: *I* — капельки масла в воздухе, *II* — капельки масла в водороде, *III* — капельки ртути в воздухе, *IV* — частицы шеллака в воздухе. Все четыре прямые пересекают ось ординат в одной точке: заряд электрона не зависит ни от природы частиц, ни от природы газа, окружающего частицы.

Рис. 4.

Опыты Милликена имеют большое принципиальное значение, так как они с полной очевидностью доказывают атомистическую природу электрического заряда. Что же касается абсолютного значения e, то, как видно из формулы (3.2), точность его определения существенно зависит от точности определения коэффициента внутреннего трения воздуха η. Среднее из новых наиболее точных измерений дает для η величину $\eta = 1832 \cdot 10^{-7}$. С этим значением η для заряда электрона получается $e = 4{,}805 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ. Однако наиболее точное значение заряда электрона получается косвенным путем — при помощи абсолютных измерений длины волны рентгеновских лучей (см. §§ 37—38).

Упражнения: 1. Какую разность потенциалов нужно наложить на пластины конденсатора, расстояние между которыми равно 5 *мм*, для того чтобы уравновесить масляную капельку, несущую заряд, равный 5 зарядам электрона? Масса капли равна $3{,}119 \cdot 10^{-13}$ *г*. (*Ответ*: 19,2 *в*.)

2. Вычислить скорость падения капли масла плотностью 0,98 с радиусом 10^{-4} *см* в воздухе при давлении 76 *см*. Коэффициент внутреннего трения воздуха 0,0001832. (*Ответ*: 0,017 *см/сек*.)

3. Разность потенциалов в 31,5 *в*, приложенная к пластинам конденсатора, отстоящим на 1 *см*, заставляет заряженную каплю масла двигаться вверх со скоростью 10 делений в 10 *сек* (50 делений = 1 *мм*). Скорость падения под действием силы тяжести — 10 делений в 100 *сек*. Коэффициент внутреннего трения воздуха 0,00018. Плотность капли 0,9. Давление воздуха 76 *см. рт. ст.* Сколько электронов несет капля? (*Ответ*: один).

§ 4. Движение электрона в электрическом и магнитном полях

Наряду с зарядом основной константой, характеризующей электрон, является его масса. Эта масса очень мала, что следует хотя бы из того, что при наблюдениях в конденсаторе Милликена потеря или приобретение нескольких электронов при перезарядке не оказывает заметного влияния на скорость падения частицы, хотя по формуле (2.2) скорость равномерного падения пропорциональна массе. Наличие инертной массы у электрона сказывается, однако, в тех случаях, когда электрону сообщается ускорение под действием электрического или магнитного поля. Поэтому все методы определения массы электрона основаны на изучении его движения в электрических и магнитных полях, и наша ближайшая задача заключается в том, чтобы рассмотреть влияние того и другого полей на движение электрона.

Как известно *), сила, действующая со стороны электромагнитного поля на частицу, несущую заряд e (так называемая сила Лоренца), выражается формулой

$$\mathbf{F} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \tag{4.1}$$

Здесь первый член представляет силу, действующую со стороны электрического поля, второй — со стороны магнитного **). Предполагается, что заряд e выражен в электростатической системе единиц. Дальнейшие рассуждения мы проведем для положительно заряженной частицы, однако они применимы и к движению отрицательно заряженных частиц. Надо только помнить, когда речь идет об электроне, что он несет отрицательный заряд и направление его отклонения всегда будет противоположно направлению отклонения положительно заряженной частицы.

Согласно второму закону Ньютона, сила $\mathbf{F}$ равна произведению массы m на ускорение $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}. \tag{4.1'}$$

Приравнивая правые части (4.1) и (4.1′), получаем

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \tag{4.2}$$

Рассмотрим теперь отдельно действие электрического и магнитного полей. Полагая в (4.2) $\mathcal{E} = 0$, получаем

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \tag{4.3}$$

*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.

**) В дальнейшем мы будем иногда называть силой Лоренца второй член формулы (4.1), связанный с магнитным полем.

Очень часто при рассмотрении движения заряда в магнитном поле пользуются электромагнитной системой единиц. Тогда (4.3) принимает вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e[\mathbf{v}\mathcal{H}],$$

откуда

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \tag{4.4}$$

Так как сила, действующая со стороны магнитного поля, выражается векторным произведением, то три вектора $\mathcal{H}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{F}$ образуют правовинтовую систему (рис. 5).

Векторное уравнение (4.4) эквивалентно следующим трем скалярным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m}(v_y\mathcal{H}_z - v_z\mathcal{H}_y),\\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{e}{m}(v_z\mathcal{H}_x - v_x\mathcal{H}_z),\\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{e}{m}(v_x\mathcal{H}_y - v_y\mathcal{H}_x). \end{aligned}\right\} \tag{4.4'}$$

Интегрирование этой системы уравнений в большинстве случаев представляет собой трудную математическую задачу. Решение ее для ряда случаев было дано С. А. Богуславским.

Рис. 5.

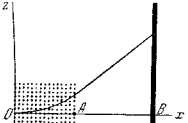


Рис. 6. Положительно заряженная частица в магнитном поле.

Мы рассмотрим простейший случай, условия которого, однако, отвечают обычной постановке лабораторных экспериментов, и не будем заниматься вычислением траектории, а найдем лишь величину отклонения параллельного пучка заряженных частиц в магнитном поле. Предположим, что в момент $t = 0$ скорость частицы направлена по оси x, т. е. что при $t = 0$ $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$. Относительно магнитного поля мы положим, что оно постоянно во времени, направлено по оси y, но, вообще говоря, неоднородно, т. е. может быть записано как $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x)$. Таким образом, $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_z = 0$, $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}(x) = \mathcal{H}$. Допустим, что поле действует на протяжении $OA = l$ (рис. 6) и что на расстоянии

$OB = l$, вообще говоря, не равном OA, помещается флуоресцирующий экран, на котором производится измерение отклонения. Так как поле на всем протяжении направлено по оси y, то составляющая силы $F_y = e(v_z\mathcal{H}_x - v_x\mathcal{H}_z)$ равна нулю ($v_y = 0$), и движение происходит в плоскости xz. Поскольку нас интересует отклонение частицы z при $x = l$, а не ее траектория, мы воспользуемся только третьим из уравнений (4.4'). Если отклонение мало, то с точностью до величин второго порядка малости можно на всем протяжении пути положить $v = v_x = \frac{dx}{dt}$; действительно,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = v_x\left[1 + \left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2\right]^{1/2} = v_x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_z}{v_x}\right)^2 + \dots\right] \approx v_x.$$

Интересующее нас третье из уравнений (4.4'), очевидно, дает

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}\frac{dx}{dt}\mathcal{H}, \tag{4.5}$$

так как второй член справа равен нулю.

Далее, принимая во внимание, что $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$, мы можем переписать (4.5) в виде

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{e}{m}\frac{dx}{dt}\mathcal{H}.$$

Производя сокращение и заменив снова $\frac{dx}{dt}$ через v, получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{e}{mv}\mathcal{H}.$$

Интересующее нас отклонение z мы найдем отсюда двукратным интегрированием. Первое интегрирование в пределах от 0 до x дает

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e}{mv}\int_0^x \mathcal{H}\,dx.$$

Второе интегрирование от нуля до l (расстояние от начала поля до экрана) дает

$$z = \frac{e}{mv}\int_0^l dx\int_0^x \mathcal{H}\,dx.$$

Выполним интегрирование по частям, полагая $u = \int_0^x \mathcal{H}\,dx$ и $dv = dx$; получим

$$z = \frac{e}{mv}\left\{l\int_0^l \mathcal{H}\,dx - \int_0^l \mathcal{H}x\,dx\right\} = \frac{e}{mv}\int_0^l \mathcal{H}(l-x)\,dx. \tag{4.6}$$

В этой формуле интеграл

$$A = \int_0^l \mathscr{H}(l - x)\,dx \tag{4.7}$$

есть, очевидно, постоянная прибора, так как его величина зависит только от напряженности поля $\mathscr{H}$ и расстояния l от места входа электронов до экрана. Пользуясь обозначением (4.7), находим

$$z = A\frac{e}{mv}. \tag{4.8}$$

В частности, если поле однородно ($\mathscr{H} = \text{const}$) и простирается от $x = 0$ до $x = a$, а в интервале от $x = a$ до $x = l$ $\mathscr{H} = 0$, то

$$A = a\left(l - \frac{a}{2}\right)\mathscr{H}.$$

Наконец, если экран расположен вплотную у конца полюсов магнита, то $l = a$ и

$$A = \frac{a^2}{2}\mathscr{H}.$$

В однородном поле, направленном перпендикулярно к скорости, легко найти и траекторию частицы. В самом деле, так как сила Лоренца всегда перпендикулярна к $\mathbf{v}$, то она меняет только направление скорости, но не ее величину; поэтому электрон будет двигаться по окружности, радиус которой ρ мы найдем, приравнивая лоренцову силу $ev\mathscr{H}$ центробежной силе инерции:

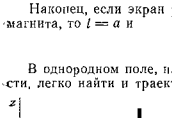


Рис. 7. Положительно заряженная частица в электростатическом поле.

$$ev\mathscr{H} = \frac{mv^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{mv}{e}\frac{1}{\mathscr{H}}. \tag{4.9}$$

Вычислим теперь отклонение заряженной частицы в поперечном электростатическом поле. Пусть по-прежнему скорость частицы в момент входа ее в пространство между пластинами конденсатора будет направлена по оси x, а поле конденсатора — направлено по оси z. Все остальные условия мы сохраняем прежними (рис. 7). Так как $\mathscr{H} = 0$, то (4.2) дает

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathscr{E}.$$

Принимая во внимание, что $\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_y = 0$, $\mathscr{E}_z = \mathscr{E}_z$, получаем

В атомной физике энергию очень часто выражают в электронвольтах: 1 *эв* есть та энергия, которую приобретает электрон, пробегая ускоряющую разность потенциалов в 1 *в*. Из (5.4′) получаем

$$1 \text{ электрон-вольт} = \frac{4{,}80 \cdot 10^{-10} \cdot 1}{300} = 1{,}60 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Энергия в 1 *эв*, рассчитанная на $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ (1 моль) электронов, равна

$$\begin{aligned} 1 \text{ электрон-вольт} \cdot \text{моль}^{-1} &= 9{,}64 \cdot 10^{11} \text{ эрг} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 2{,}304 \cdot 10^4 \text{ кал} \cdot \text{моль}^{-1} = \\ &= 23{,}04 \text{ ккал} \cdot \text{моль}^{-1}. \end{aligned}$$

Если известна энергия электронов, выраженная в электронвольтах, то скорость v в *см/сек* можно непосредственно вычислить из (5.4′):

$$v = \sqrt{\frac{e}{m}\frac{V}{150}} = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{V\,(\text{вольт})} \text{ см/сек}. \tag{5.5}$$

§ 6. Экспериментальные методы определения удельного заряда

В основе экспериментальных методов определения e/m лежат результаты исследования движения электрона в электрических и магнитных полях, выполненного нами в предшествующих двух параграфах.

Необходимо, однако, иметь в виду, что как в случае электрического, так и в случае магнитного поля отклонение в поперечном поле зависит не только от e/m, но и от v: магнитное отклонение определяется фактором e/mv, а электрическое — фактором e/mv^2. Поэтому опыт с отклонением в каком-либо одном поле еще не дает возможности найти e/m.

В первых работах обычно последовательно измеряли отклонение в том и другом полях и из двух уравнений (4.8) и (4.11) сразу вычисляли e/m и v. При этом пучки электронов осуществлялись в виде катодных лучей в трубках с разреженными газами (давление порядка нескольких сотых *мм рт. ст.*). Развитие техники получения вакуума за последние десятилетия позволяет производить эти измерения в более определенных и лучше контролируемых условиях. На рис. 8 представлена схема современного прибора для определения e/m и v. Накаливаемый катод K, помещенный в трубку, откачанную до предела, допускаемого современной техникой вакуума, является обильным источником электронов. Эти электроны ускоряются батареей B_1, положительный полюс которой присоединен к металлической пластинке (аноду) A, в центре которой имеется отверстие. Электроны,

прошедшие через это отверстие, двигаясь прямолинейно, дают на стенке трубки S, покрытой флуоресцирующим веществом, светлое пятнышко F, расположенное против отверстия в аноде A. На пути между A и F электроны проходят между пластинами конденсатора CD, к которым может быть приложено напряжение от батареи B_2. Если включить батарею B_2, то пучок электронов отклоняется электрическим полем, возникающим между пластинами, и пятнышко перемещается в положение F'.

Создавая между пластинами конденсатора CD также и однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа (на рисунке показано точками), можно вызвать отклонение

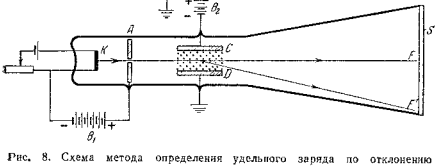


Рис. 8. Схема метода определения удельного заряда по отклонению в электрическом и магнитном полях.

пятнышка в том же или в обратном направлении. Если измерить оба отклонения, то при помощи уравнений (4.8) и (4.11) можно вычислить e/m и v. Практически удобнее просто скомпенсировать магнитным полем первоначальное электростатическое отклонение. В этом случае необходимые измерения сводятся к точному определению напряженностей обоих полей — электрического и магнитного.

Как сказано выше, начальные скорости электронов, освобождаемых из горячего катода, малы. Например, если катодом служит вольфрамовая спираль, нагретая до 2400° К, то всего лишь 0,1% электронов обладают энергией, превосходящей 1,42 электрон-вольта, и 0,0001% — энергией, превосходящей 2,85 электрон-вольта. Если поэтому ускоряющее поле не слишком слабо, то можно считать с достаточной точностью, что начальная скорость освобождаемых электронов равна нулю. Пусть разность потенциалов между катодом и анодом (например, между K и A на рис. 8) равна V вольт. Тогда окончательную скорость электронов мы находим из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}. \qquad (5.4')$$

Поэтому, зная V, мы уже знаем и скорость электронов. Это освобождает нас от необходимости использовать и электрическое, и магнитное отклонение для нахождения e/m и v. Достаточно воспользоваться либо электрическим, либо магнитным полем; второе уравнение всегда дает формулу (5.4').

В следующих параграфах мы приведем из большого числа современных методов определения удельного заряда два наиболее характерных. В первом применяется электрическое поле, во втором — магнитное.

§ 7. Определение удельного заряда электрона по методу двух конденсаторов

Одним из самых точных современных методов определения отношения e/m является метод двух конденсаторов. Электроны от нити накала F (рис. 9) ускоряются полем между катодом F и анодом A. Пройдя через отверстие в аноде A и диафрагму D_1,

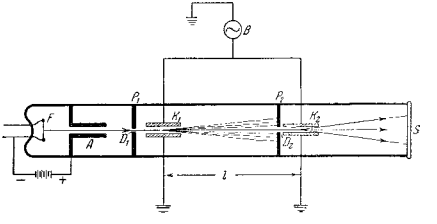


Рис. 9. Схема метода определения удельного заряда при помощи двух конденсаторов.

пучок электронов попадает в первый конденсатор K_1, на который накладывается переменная разность потенциалов от высокочастотного генератора B. Под влиянием этого переменного поля периодически изменяется направление пучка, и, вообще говоря, пучок задерживается экраном P_2. Только те электроны, которые пролетают через конденсатор K_1 в момент, когда кривая потенциала проходит через нуль (рис. 10), оказываются способными пройти через малое отверстие D_2 в экране P_2. Эти электроны попадают затем в конденсатор K_2, присоединенный к тому же

генератору, что и K_1, вследствие чего поля в обоих конденсаторах всегда находятся в одинаковой фазе. Таким образом, два раза в течение каждого периода в конденсатор K_2 попадают электроны и отклоняются в большей или меньшей степени вверх или вниз в зависимости от фазы генератора в момент прохождения электронов через конденсатор K_2. Нетрудно убедиться в том, что имеется только два симметричных направления, в которых могут отклониться электроны при прохождении через второй конденсатор K_2. Если, например, промежуток времени, необходимый электрону, чтобы пролететь от конденсатора K_1 до конденсатора K_2, равен $t_1 = OA$ (рис. 10), то во втором конденсаторе K_2 одни электроны застанут потенциал $AB = +V_1$, а другие — потенциал $A'B' = -V_1$. Поэтому на флуоресцирующем экране S появятся два симметрично расположенных пятна.

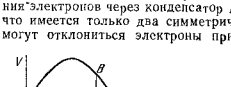


Рис. 10.

Варьируя скорость электронов изменением ускоряющего потенциала, можно добиться того, чтобы время t_1 сделалось равным полупериоду генератора $T/2$ или вообще $nT/2$. При этом условии электроны пролетят и второй конденсатор без отклонения, и два пятна на флуоресцирующем экране сольются в одно. Если расстояние между K_1 и K_2 равно l, а частота генератора f, то скорость таких электронов будет

$$v = 2l/T = 2lf$$

или, вообще,

$$v = 2l/nT = 2lf/n. \tag{7.1}$$

С другой стороны,

$$eV = \frac{mv^2}{2}, \tag{5.4}$$

где V — ускоряющий потенциал, приложенный между F и A. Из (7.1) и (5.4) получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{v^2}{2V} = \frac{2l^2f^2}{n^2V}. \tag{7.2}$$

Большое преимущество метода двух конденсаторов состоит в том, что он является своего рода «нулевым» методом и не требует никаких измерений отклонения, обычно связанных с трудно устранимыми ошибками. Величина удельного заряда, полученная таким способом, после внесения всех поправок равна *)

$$\frac{e}{m} = (1{,}7590 \pm 0{,}0015) \cdot 10^7 \text{ СГСМ} \cdot \text{г}^{-1}.$$

§ 8. Определение удельного заряда электрона по методу фокусировки продольным магнитным полем

Другой точный метод определения e/m связан с применением продольного магнитного поля.

Рассмотрим прежде всего действие магнитного поля на расходящийся пучок электронов, выходящий из одной точки (отверстия диафрагмы). Сила, действующая на электрон со стороны магнитного поля, равна (предполагается, что e выражено в электромагнитных единицах)

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v}\mathcal{H}].$$

Если электрон летит под углом α, не равным 0 или 90°, к направлению магнитных силовых линий, то его скорость можно разложить на две компоненты: продольную v_l и поперечную v_ρ:

$$v_l = v\cos\alpha, \quad v_\rho = v\sin\alpha. \tag{8.1}$$

Рассмотрим влияние магнитного поля на каждую из этих компонент отдельно. На электрон, летящий перпендикулярно к полю со скоростью v_ρ, действует сила $F_\rho = ev_\rho\mathcal{H}$. Так как сила F_ρ везде перпендикулярна к v_ρ, то электрон опишет окружность, радиус которой мы найдем, приравняв F_ρ центробежной силе инерции:

$$ev_\rho\mathcal{H} = \frac{mv_\rho^2}{\rho},$$

откуда

$$\rho = \frac{v_\rho}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}, \quad v_\rho = \frac{e}{m}\mathcal{H}\rho.$$

Время t, необходимое для того, чтобы электрон описал полную окружность, будет

$$t = \frac{2\pi\rho}{v_\rho} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m}\mathcal{H}}. \tag{8.2}$$

*) В соответствии с исторически установившейся практикой мы выражаем удельный заряд электрона e/m в единицах СГСМ·г$^{-1}$, тогда как заряд электрона e обычно выражается в единицах СГСЭ. В тех случаях, когда обе величины e и e/m входят в формулы в каких-нибудь комбинациях, вместо e/m следует писать e/mc.

Оказывается, следовательно, что t не зависит от радиуса ρ. Таким образом, если представить себе несколько электронов, одновременно выходящих из одной точки с различными скоростями v_ρ, перпендикулярными к $\mathscr{H}$, то все эти электроны, описав окружности различного радиуса, одновременно вернутся в исходную точку. Это показано на рис. 11 справа, где изображены проекции путей электронов, обладающих различными составляющими скорости v_ρ, на плоскость, перпендикулярную к направлению магнитного поля.

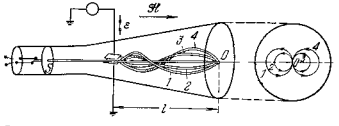


Рис. 11. Схема метода определения удельного заряда с помощью продольного магнитного поля.

На продольную компоненту скорости магнитное поле не оказывает влияния. Поэтому за промежуток времени t электроны продвинутся вдоль оси соленоида, создающего поле, на расстояние

$$l = v_l t = \frac{2\pi v \cos\alpha}{\frac{e}{m}\mathscr{H}}. \tag{8.3}$$

Если угол α мал, то $\cos\alpha \approx 1$, и (8.3) принимает вид

$$l = \frac{2\pi v}{\frac{e}{m}\mathscr{H}}, \tag{8.4}$$

т. е. все электроны, вылетающие из отверстия диафрагмы с одной и той же абсолютной величиной скорости v, за промежуток времени, в течение которого проекции этих электронов на плоскость, перпендикулярную к оси соленоида, описывают полную окружность, продвигаются вдоль оси соленоида на одно и то же расстояние l. Отсюда следует, что расходящийся пучок электронов одинаковой энергии под действием продольного магнитного поля сфокусируется на расстоянии l.

Это фокусирующее действие соленоида и лежит в основе метода продольного магнитного поля. Электроны, выходящие из отверстия диафрагмы S (рис. 11) и развернутые предварительно в расходящийся пучок переменным электрическим полем $\mathscr{E}$, по-

падают внутрь соленоида. Подбирая соответствующую величину напряженности поля $\mathscr{H}$, можно добиться того, чтобы пучок электронов фокусировался как раз у противоположного к диафрагме конца соленоида, где помещен флуоресцирующий экран. Зная необходимое для этого поле, можно сейчас же вычислить e/m. Действительно, из (8.4) находим

$$v = \frac{l}{2\pi}\frac{e}{m}\mathscr{H}.$$

Подставляя это выражение для скорости в уравнение энергии

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \tag{5.4}$$

легко получим

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{\mathscr{H}^2 l^2}. \tag{8.5}$$

Результат последних (1939 г.) измерений, выполненных этим методом, таков:

$$\frac{e}{m} = (1{,}7586 \pm 0{,}0023)\cdot 10^7 \text{ СГСМ}\cdot г^{-1}.$$

Наиболее точное значение удельного заряда электрона, полученное в результате критической оценки измерений, выполненных различными методами, есть

$$\frac{e}{m} = (1{,}7592 \pm 0{,}0005)\cdot 10^7 \text{ СГСМ}\cdot г^{-1}. \tag{8.6}$$

Сравним теперь массу электрона с массой водородного атома. Для этого нужно прежде всего найти величину $e/m_{\text{Н}}$, т. е. отношение заряда электрона к массе атома водорода. Легко видеть, что это последнее отношение равно отношению числа Фарадея F к атомному весу водорода H^1. Действительно, так как $F = Ne$ (N — постоянная Авогадро) и $\text{H}^1 = Nm_{\text{Н}}$, то $F/\text{H}^1 = e/m_{\text{Н}}$. Из наиболее точных измерений F и H^1 получается

$$\frac{e}{m_{\text{Н}}} = (9573{,}5 \pm 1) \text{ СГСМ}\cdot г^{-1}. \tag{8.7}$$

Комбинируя (8.6) и (8.7), находим

$$\frac{m_{\text{Н}}}{m} = 1837{,}5.$$

Итак, масса электрона в 1837,5 раза меньше массы водородного атома.

§ 9. Фокусировка и монохроматизация пучков заряженных частиц

Рассмотрим здесь попутно методы получения пучков частиц постоянной скорости (монохроматизация, фильтры скоростей) и методы фокусировки пучков заряженных частиц. Знакомство с этими методами понадобится нам в дальнейшем.

Самый простой фильтр скоростей устроен так: пучок заряженных частиц пропускается одновременно через электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг к другу и притом так, что они дают отклонения в противоположных направлениях.

Рис. 12. Схема фильтра скоростей заряженных частиц.

На рис. 12 магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости чертежа и действует на положительно заряженную частицу с силой $ev\mathcal{H}$, лежащей в плоскости чертежа. В той же плоскости лежит и сила $e\mathcal{E}$, с которой действует на заряд электрическое поле конденсатора AB. Если выбрать направление полей так, чтобы обе силы были направлены в противоположные стороны, то результирующая сила будет $ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}$. Под влиянием этой силы частица движется, вообще говоря, по кривой с радиусом кривизны ρ. Приравнивая силу, действующую на частицу, центробежной силе инерции, получаем

$$ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}=\frac{mv^2}{\rho}. \qquad (9.1)$$

Очевидно, что через конденсатор пройдут только частицы, скорость которых такова, что обе силы $ev\mathcal{H}$ и $e\mathcal{E}$ друг друга скомпенсируют. В этом случае

$$ev\mathcal{H}-e\mathcal{E}=0 \quad \text{и} \quad v=\mathcal{E}/\mathcal{H}. \qquad (9.2)$$

Частицы со скоростями, не удовлетворяющими соотношению (9.2), будут притянуты пластинами конденсатора и удалены из пучка, или, во всяком случае, задержаны диафрагмой D.

Для фокусировки частиц очень часто пользуются действием однородного поперечного магнитного поля.

Пусть источник частиц находится в S (рис. 13) и пусть все частицы характеризуются одной и той же величиной mv/e. Частица, вылетающая вертикально вверх, опишет полуокружность

диаметром $SA=2\frac{mv}{e\mathcal{H}}=2\rho$; какая нибудь другая частица, вылетающая под углом α к первой, тем же радиусом опишет дугу

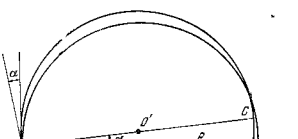


Рис. 13. Фокусировка поперечным однородным магнитным полем.

круга, которая пересечет прямую SA в точке B. Легко видеть, что

$$AB=2\rho(1-\cos\alpha).$$

Если угол α достаточно мал, то можно воспользоваться разложением косинуса в степенной ряд $\cos\alpha=1-\alpha^2/2+\ldots$ и взять только первые два члена; тогда

$$AB=\rho\alpha^2.$$

Например, если $\rho=5$ *см*, $\alpha=3^\circ=0{,}05$, то $AB=1{,}25\cdot10^{-2}$ *см*. Очевидно, что все частицы, направления которых при вылете из S лежат в пределах угла α, описав соответствующую дугу, пересекут SA между A и B. Поэтому, если источником S служит щель, через которую проходят частицы, то AB будет «изображением» этой щели в виде узкой линии; поперечное однородное магнитное поле действует, таким образом, как цилиндрическая линза.

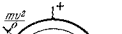


Рис. 14. Положительно заряженная частица в радиальном электрическом поле цилиндрического конденсатора.

Другой тип фильтров, получивший в последнее время широкое распространение, основан на действии радиального электрического поля в цилиндрическом конденсаторе. Рассмотрим частицу с зарядом e, попадающую в цилиндрический конденсатор (рис. 14). Очевидно, что частица беспрепятственно пройдет через конденсатор в том случае, если действующая на нее со стороны поля сила $e\mathcal{E}$ будет равна центробежной силе инерции:

$$e\mathcal{E}=\frac{mv^2}{\rho}.$$

В цилиндрическом конденсаторе поле обладает радиальной симметрией, и потому

$$\mathscr{E} = -\frac{dV}{d\rho}.$$

Следовательно, условие беспрепятственного прохождения частицы через конденсатор будет

$$e\frac{dV}{d\rho} = \frac{mv^2}{\rho}. \qquad (9.3)$$

Выражая кинетическую энергию $mv^2/2$ через ускоряющий потенциал: $mv^2 = 2eV_0$, и разделяя переменные в уравнении (9.3), получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0}dV.$$

Полагая радиусы внешней и внутренней обкладок равными соответственно ρ_2 и ρ_1, потенциал внешней обкладки — равным

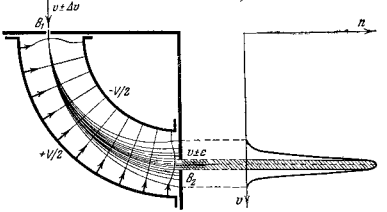


Рис. 15. Цилиндрический конденсатор как фильтр скоростей. (Стрелками обозначены силовые линии электрического поля; справа на графике n — число частиц, v — их скорость.)

$V_к$, а внутренней — равным 0 и интегрируя при этих условиях, получим

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2V_0}\int_0^{V_к} dV,$$

откуда

$$V_к = 2V_0 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (9.4)$$

Мы видим, таким образом, что каждой разности потенциалов $V_к$ на обкладках конденсатора соответствует энергия электронов V_0, при которой они могут пройти через конденсатор.

На рис. 15 изображена схема действия цилиндрического конденсатора как фильтра скоростей. Видно, что если через щель B_1 поступает пучок электронов, скорости которых лежат в интервале $v \pm \Delta v$, то через щель B_2 пройдут электроны со скоростями, лежащими в более узком интервале $v \pm \varepsilon$. В правой части рисунка дано графическое изображение распределения электронов по скоростям до фильтрации и после нее (заштрихованная часть).

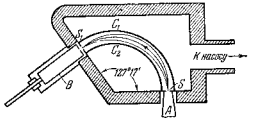


Рис. 16. Фокусирующее действие радиального электрического поля: A — источник заряженных частиц; B — фарадеев цилиндр; C_1, C_2 — пластины цилиндрического конденсатора; S, S_1 — щели.

Наиболее замечательная особенность рассматриваемого фильтра состоит в том, что он обладает способностью фокусировать расходящиеся пучки. Юз и Рожанский показали теоретическим расчетом и подтвердили экспериментально, что расходящийся пучок, выходящий из щели S, вновь фокусируется, описав в цилиндрическом конденсаторе дугу $\alpha/\sqrt{2} = 127°\,17'$ (рис. 16).

Таким образом, радиальное электрическое поле цилиндрического конденсатора действует на расходящийся поток заряженных частиц совершенно так же, как поперечное однородное магнитное поле. В некоторых отношениях, однако, применение электрического поля вместо магнитного представляет преимущества. Например, при помощи экранов гораздо легче ограничить электрическое поле, чем магнитное.

§ 10. Зависимость массы электрона от его скорости

При скоростях электронов, близких к скорости света, обнаруживается зависимость массы от скорости. Первое экспериментальное доказательство этого важнейшего факта принадлежит Кауфману, работа которого была опубликована в 1901 г., т. е. еще за четыре года до появления теории относительности, согласно которой любая масса, независимо от того, несет ли она электрический заряд или нет, должна зависеть от скорости по формуле

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где c — скорость света в пустоте. Хотя работа Кауфмана в настоящее время имеет только исторический интерес, мы познакомимся с идеей его метода, так как эта идея получила широкие применения в опытах с заряженными частицами. В частности, на аналогичном принципе основан «метод парабол» Дж. Дж. Томсона (§ 13), впервые примененный для определения истинных масс атомов.

Сущность метода Кауфмана состоит в том, что электроны пропускаются одновременно через поперечные электрическое и магнитное поля, расположенные параллельно или антипараллельно, так что отклонения в том и другом полях перпендикулярны друг к другу. Параллельный пучок электронов, обладающих одной и той же скоростью, проходит между пластинками конденсатора, в пространстве между которыми возбуждено также и магнитное поле (рис. 17). Направления полей показаны на рисунке стрелками.

Рис. 17. Электроны в поперечных электрическом и магнитном полях.

Отклонение в электрическом поле будет направлено вправо и равно, например, $OA = x$; отклонение в магнитном поле будет направлено вверх и равно, например, $OB = z$ (следует помнить, что электроны несут отрицательный заряд; поэтому отклонения положительно заряженных частиц были бы, соответственно, влево и вниз). Формулы § 4 дают

$$z = A\frac{e}{mv}, \tag{4.8}$$

$$x = B\frac{e}{mv^2}, \tag{4.11}$$

где A и B — постоянные прибора. Все электроны, имеющие постоянную скорость, будут попадать после прохождения через оба поля в точку C фотопластинки. Пусть теперь пучок неоднороден и содержит электроны всевозможных скоростей. В этом случае следы электронов на фотопластинке расположатся по некоторой кривой, форму которой мы найдем, исключив из (4.8) и (4.11) скорость v. Возведя первое из них в квадрат и разделив на второе, получаем

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B}\frac{e}{m}. \tag{10.1}$$

Если e/m постоянно и, следовательно,

$$\frac{A^2}{B}\frac{e}{m} = K = \text{const},$$

то

$$z^2 = Kx, \tag{10.2}$$

и искомая кривая должна быть отрезком параболы. Переключая электрическое поле то в одну, то в другую сторону, при неизменном направлении магнитного поля мы должны были бы получить два отрезка параболы, расположенных так, что общей касательной их в точке O служит ось z (рис. 18, *а*). В опытах Кауфмана, выполненных с таким расположением и с препаратом радия в качестве источника электронов, обнаружилось, что отрезки кривых, полученные в результате опыта, не являются отрезками параболы. Уже это показывает, что e/m в (10.1) не остается постоянным, т. е. что масса зависит от скорости. На рис. 18, *б* схематически представлен вид фотографии, полученной Кауфманом. Пятно, вызванное неотклоняемыми в магнитном и электрическом полях γ-лучами радия, фиксирует начало координат. Видно, однако, что отрезки кривых не доходят до начала координат, несмотря на то, что в пучке присутствовали электроны со скоростями, мало отличающимися от скорости света. Видно также, что касательные, проведенные к продолжениям обоих отрезков в точке O, не совпадают с осью z, но образуют с ней угол α, отличный от нуля. Поэтому z/x имеет конечное значение при $z=0$, а следовательно, $\frac{z^2}{x} = \frac{z}{x}z = 0$. Такие фотографии позволяют найти e/m для различных скоростей электронов, какова бы ни была форма следов. В самом деле, измерив координаты какой-либо точки кривой, можно вычислить e/m и v при помощи формул (4.8) и (4.11). Ввиду того, что следы, получаемые на фотопластинке, довольно размыты, большой точности такие измерения дать не могут; однако они качественно показывают вне всякого сомнения, что масса возрастает со скоростью. Например, Кауфман получил следующие результаты (см. табл. II).

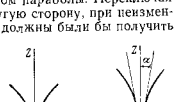


Рис. 18.

Таблица II

v, см/сек	e/m, СГСМ·$г^{-1}$
$2{,}36 \cdot 10^{10}$	$1{,}31 \cdot 10^7$
$2{,}59 \cdot 10^{10}$	$0{,}97 \cdot 10^7$
$2{,}83 \cdot 10^{10}$	$0{,}63 \cdot 10^7$

Для количественного установления вида зависимости массы от скорости точность опыта Кауфмана недостаточна.

В то время, когда он производил свои опыты, речь могла идти о выборе между двумя формулами: 1) формулой Абрагама, в основе вывода которой лежало представление об электроне как о жестком и несжимаемом шарике:

$$m = m_0 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{\beta}\left(\frac{1+\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1-\beta}{1+\beta} - 1\right),$$

и 2) формулой Лоренца

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right),$$

отвечающей представлению об электроне, сжимающемся по направлению движения; последняя формула вытекает также из теории относительности. Ввиду большой принципиальной важности решения вопроса о том, какая из этих двух формул лучше соответствует действительности, за работой Кауфмана последовал длинный ряд других работ и возникла полемика Причина этого заключается в исключительной трудности соответствующих экспериментов и малой разнице в численных данных, даваемых обеими формулами.

Не останавливаясь на истории вопроса, мы рассмотрим только результаты последних работ, в которых учтены все возражения, сделанные по поводу предшествующих исследований. В опытах Триккера была использована схема, предложенная П. Л. Капицей для анализа электронов по скоростям. Схема эта по существу представляет собой «фокальный монохроматор» для электронов, аналогичный монохроматорам того же названия, применяемым для монохроматизации света. Рис 19, *а* поясняет

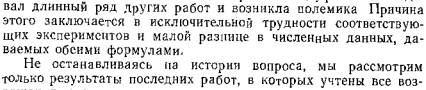


Рис. 19. *а*) «Фокальный монохроматор» для света. *б*) Схема опыта Капицы—Триккера.

действие этого монохроматора в оптическом случае. Расходящийся пучок лучей от источника света S проходит через линзу L, перед которой помещена кольцевая диафрагма AB. Назначение этой диафрагмы состоит в том, чтобы убирать параксиальные лучи и оставлять лучи, падающие на края линзы, т. е. расходящиеся под достаточно большим углом. Вследствие хромати-

ческой аберрации линзы лучи с различными длинами волн фокусируются в различных точках оптической оси S', S'', S''', ...: коротковолновые лучи фокусируются ближе к линзе, длинноволновые — дальше от нее. Перемещая диафрагму C, можно выпускать из ее отверстия лучи любой длины волны.

В методе Капицы — Триккера роль линзы выполняет продольное магнитное поле с осевой симметрией, т. е. соленоид. Соленоид в данном случае является длинной магнитной линзой. Как мы видели в § 8, электроны фокусируются такой линзой на расстоянии l, равном

$$l = \frac{2\pi v \cos\alpha}{\frac{e}{m}\mathscr{H}}. \tag{8.3}$$

При заданных $\mathscr{H}$ и α расстояние l зависит от v и e/m. Схема «фокального монохроматора» для электронов изображена на рис. 19, б. Расходящийся пучок электронов от источника S, которым служил радиоактивный препарат, испускавший электроны со скоростями до $\beta = 0{,}8$, проходил через кольцевую диафрагму AB и фокусировался продольным магнитным полем соленоида. При этом, как и в случае оптической линзы, электроны с различными скоростями фокусировались в разных местах оптической оси. F — свинцовый блок для защиты от попадания рентгеновских лучей, возникающих при торможении электронов в диафрагмах. Диафрагму D можно было заряжать до ± 5000 *в* и тем самым ускорять или замедлять электроны. При скорости $\beta = 0{,}8$, которой соответствует ускоряющий потенциал $340{,}5 \cdot 10^3$ *в*, отношение m/m_0 по формуле Лоренца — Эйнштейна равно 1,666. Изменение ускоряющего потенциала на 5000 *в* вызывает изменение массы всего на 0,06%, что лежит за пределами ошибок опыта. Поэтому поле в 5000 *в* заметно ускоряет или тормозит электроны, но практически не изменяет их массы. Из формулы (8.3) следует, что изменение скорости на Δv смещает фокус на

$$\Delta l = \frac{2\pi\,\Delta v \cos\alpha}{\frac{e}{m}\mathscr{H}}.$$

Зная Δv и $\mathscr{H}$ и измеряя Δl, можно вычислить величину e/m для данной скорости.

Измерения Триккера показали, что при скоростях электронов вплоть до 0,8 скорости света изменение массы со скоростью следует формуле Лоренца — Эйнштейна с точностью 1—2%, тогда как разница между результатами, даваемыми формулами Абрагама и Лоренца — Эйнштейна, составляет при этих условиях около 5%.

Другой метод определения зависимости массы от скорости был применен Цаном и Списсом (1938 г.). Идея этого метода состоит в следующем.

Пусть в A (рис. 20) расположен источник электронов. Если имеется однородное магнитное поле $\mathscr{H}$, перпендикулярное к плоскости рисунка, то щели S_1 и S_2 выделят из пучка те электроны, скорости которых удовлетворяют условию

$$\frac{mv^2}{\rho} = ev\mathscr{H}, \tag{10.3}$$

где ρ — радиус кривизны траектории, определяемой расположением щелей S_1, S_2, S_3. Электроны, прошедшие через щели S_1 и S_2,

Рис. 20. Схема опыта Цана и Списса.

попадают затем в конденсатор C. Ввиду наличия магнитного поля, перпендикулярного к электрическому, этот конденсатор служит фильтром (см. § 9), который производит более точную монохроматизацию скоростей электронов. В G расположен воспринимающий прибор, при помощи которого можно считать отдельные электроны, прошедшие через все щели и конденсатор. Опыт состоит в том, что при данной величине магнитного поля подбирают разность потенциалов на пластинах конденсатора так, чтобы число электронов, регистрируемых счетчиком G, было максимальным. Если $\mathscr{E}$ — напряженность поля в конденсаторе, то согласно формуле (9.2) через него пройдут только те электроны, скорости которых удовлетворяют требованию

$$v = \frac{\mathscr{E}}{\mathscr{H}}. \tag{9.2}$$

Комбинируя эту формулу с (10.3), получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{\mathscr{E}}{\rho\mathscr{H}^2}. \tag{10.4}$$

Опыты Цана и Списса, так же как и опыты Кауфмана — Трикера, показали, что расхождение между результатами, вычисленными по формуле Лоренца — Эйнштейна, и результатами эксперимента не превосходят 1,5% для скоростей электронов $\beta = 0{,}745$.

В настоящее время вопрос о зависимости массы быстро движущихся частиц от скорости приобрел огромное техническое значение, так как самый факт зависимости массы от скорости и формула, которой количественно выражается эта зависимость, лежат в основе современных циклических ускорителей элементарных частиц, представляющих собой грандиозные технические сооружения. В них ускоряемые частицы пробегают по кругу радиусом до 100 метров и приобретают энергии порядка десятков миллиардов электрон-вольт. При расчете этих машин основную роль играет зависимость массы от скорости, и самое ничтожное отступление от используемой формулы Лоренца — Эйнштейна привело бы к полной невозможности работы машины. Таким образом, в данное время эта формула должна считаться подтвержденной во всем интервале доступных скоростей.

ГЛАВА II

АТОМЫ. ИЗОТОПЫ

§ 11. Введение

Предыдущая глава была посвящена электрону как одной из важнейших элементарных частиц. Мы рассмотрели доказательства реальности электрона, а также непосредственные определения величины его заряда и массы. В настоящей главе мы переходим к рассмотрению атомов вещества. Доказательства реальности атомов хорошо известны из элементарных курсов физики и химии, поэтому мы не будем останавливаться на них и сосредоточим внимание прежде всего на важнейшей характеристике атома — его массе.

В химии обычно пользуются не абсолютными, а относительными атомными массами или атомными весами, причем за условную единицу берется 1/12 массы атома изотопа углерода C^{12}. Определение атомных весов производится с макроскопическими количествами вещества при посредстве химических анализов. Получаемые таким путем числа имеют огромное практическое значение и лежат в основе всех химических расчетов. Если предположить, как это и делалось до сравнительно недавнего времени, что все атомы данного элемента имеют одинаковую массу, то, пользуясь законом Авогадро, согласно которому в одном моле любого вещества содержится одно и то же количество молекул, можно при помощи химического атомного веса вычислить и абсолютную массу атома.

В этой главе мы увидим, однако, что химические атомные веса не дают возможности вычислять абсолютные массы атомов. Тем не менее исторические знания химических атомных весов было важно не только с практической точки зрения, но и потому, что с их помощью была открыта важнейшая закономерность, связывающая атомы различных элементов между собою. Эта закономерность проявляется в периодической системе элементов Д. И. Менделеева, с рассмотрения которой мы и начнем эту главу.

§ 12. Периодическая система элементов Д. И. Менделеева

К середине XIX в. было открыто большое количество химических элементов, и, естественно, возник вопрос — связаны ли эти элементы как-нибудь между собой или их свойства совер-

шенно случайны и не зависят друг от друга. Различные частные закономерности были открыты сравнительно рано, но только Д. И. Менделееву удалось впервые найти общий закон, связывающий все элементы в единую систему, которая является наиболее ярким выражением общности в строении атомов. Для того чтобы правильно оценить гениальную интуицию, благодаря которой Менделеев открыл свою систему, необходимо напомнить некоторые факты.

Первая таблица была опубликована Менделеевым в 1869 г. К этому времени было известно около 63 элементов. Однако при расположении их в систему выяснилось, что только 35 элементов можно разместить уверенно в соответствии с их атомными весами. Положение 8 элементов вызывало недоумение. Например, было непонятно, почему Zn, Cd и Hg попадают в одну группу с Mg, Ca, Sr, Ba; еще большее недоумение вызывало помещение Mn в одну группу с галогенами (т. е. в VII группу периодической системы). Наконец, для остальных 20 элементов Менделееву пришлось изменить либо их атомные веса, либо порядок следования. Нередко эти изменения были весьма существенными: так, например, атомный вес церия считался равным 92; Менделеев приписал ему атомный вес 138 (современное значение 140,12); атомные веса тория и урана, по данным того времени, были соответственно 116 и 120. Менделеев же указал, что эти атомные веса должны быть 232 и 240. Наконец, некоторые места в таблице Менделеев оставил пустыми, указав на то, что эти места должны быть заняты еще не открытыми элементами. В частности, он предсказал существование трех элементов, которые он назвал экабором, экаалюминием и экасилицием, и описал их свойства. Вскоре после этого, в 1875 г., был открыт элемент, названный галлием. Менделеев тотчас же указал на то, что галлий и есть предсказанный им экаалюминий и что он должен иметь атомный вес около 68, удельный вес 6,0—5,9 и атомный объем 11,5. На самом деле атомный вес галлия оказался равным 69,7, удельный вес 5,96 и атомный объем 11,7.

Основной факт, из которого исходил Д. И. Менделеев при построении системы элементов, состоит в том, что если расположить элементы в порядке возрастания атомных весов, то элементы с аналогичными свойствами периодически повторяются. Исходя из этого, ему удалось построить «естественную систему элементов», которая оказалась правильной, несмотря на то, что атомный вес, как выяснилось впоследствии, не может считаться константой, однозначно определяющей индивидуальные свойства атома. Действительно, ниже мы увидим, что существуют вещества, которые в химическом отношении ведут себя практически одинаковым образом, несмотря на то, что их атомные веса различны. Такие вещества называются *изотопами*, так как вследствие

их химической тождественности их необходимо помещать на одно и то же место в периодической системе (слово «изотопы» в буквальном переводе с греческого означает «занимающие одно и то же место»). Химические элементы на самом деле являются смесями изотопов, а их атомные веса, определяемые обычными химическими методами, — средними из атомных весов всех образующих их изотопов. Наряду с атомами, обладающими очень близкими свойствами при различных атомных весах, существуют также атомы, обладающие различными свойствами при одинаковых атомных весах (изобары).

Несмотря на эти факты, созданная Д. И. Менделеевым периодическая система элементов является правильной и ее следует поэтому рассматривать как *фундаментальный закон природы*.

Поскольку химический атомный вес в действительности не есть существенный признак *атома*, основной характеристикой элемента является его положение в периодической системе, а это положение определяется номером места, занимаемого данным элементом в таблице Менделеева. Глубокая причина важности этого числа, называемого *атомным номером*, состоит в том, что оно является на самом деле не просто порядковым номером, но одной из основных *физических* констант атома, как это будет показано ниже.

Возможность расположения элементов в правильную систему при помощи атомных весов основана на следующем замечательном факте: если характеризовать данный элемент атомным весом, определяемым химическими методами и являющимся средним из атомных весов всех изотопов данного элемента, то между этим средним атомным весом и атомным номером существует простая монотонная зависимость (рис. 21). В немногих случаях, когда это соответствие нарушается (K—Ar, Te—I, Co—Ni), Менделеев с гениальной интуицией расположил элементы правильно, вопреки их атомным весам.

На рис. 22 и 23 приведены некоторые примеры периодического повторения свойств атомов. Рис. 22 представляет кривую атомных объемов: по оси абсцисс отложены атомные номера, по оси ординат — атомные объемы $\left(=\frac{\text{атомный вес}}{\text{плотность}}\right)$; на рис. 23 представлен на одной диаграмме ход нескольких физических свойств в зависимости от атомного номера, а именно — верхняя кривая дает ход обратных величин температуры плавления, средняя кривая — ход коэффициентов линейного расширения и нижняя — сжимаемости. Видно, что все эти свойства не только периодически изменяются при монотонном возрастании атомного номера (среднего атомного веса), но что максимумы и минимумы у всех кривых приходятся на одни и те же значения атом-

ного номера, т. е. что все эти свойства обнаруживают *одинаковую* периодичность.

Внешние формы, которые могут быть приданы естественной системе элементов, весьма разнообразны. Наиболее распространенными являются таблицы двух видов — с длинными

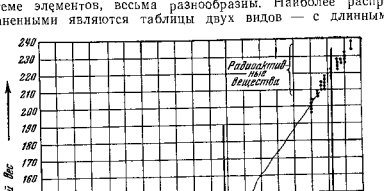


Рис 21. Атомный вес как функция атомного номера.

и короткими периодами. Теоретически более обоснована таблица с длинными периодами (таблица III на стр. 48).

Рассмотрим последовательные ряды этой таблицы. Первый ряд состоит всего из двух элементов: он начинается одновалентным элементом водородом и заканчивается благородным газом гелием. Третий элемент — литий — снова одновалентен; он является типичным металлом и обладает резко выраженными

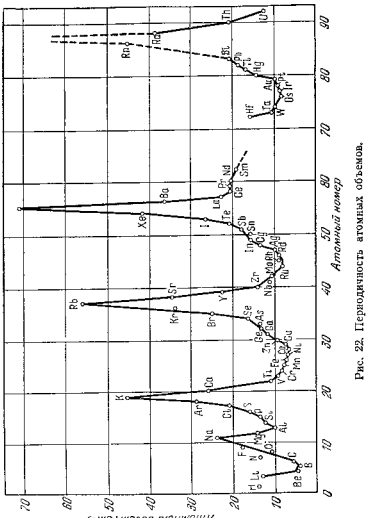


Рис. 22. Периодичность атомных объемов.

щелочными свойствами. По мере продвижения вправо оба эти свойства заметно ослабляются и постепенно проявляются свойства противоположные; наконец, девятый элемент — фтор — оказывается антиподом лития: он является типичным металлоидом и обладает резко выраженными кислотными свойствами. Далее следует благородный газ неон, а за ним щелочной металл натрий

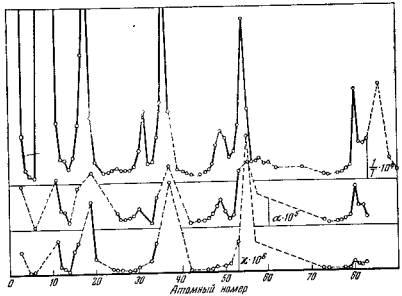


Рис. 23. Периодичность физических свойств. Верхняя кривая — обратные температуры плавления $(1/T) \cdot 10^4$, средняя кривая — коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^3$; нижняя кривая — коэффициент сжимаемости $\varkappa \cdot 10^6$. В местах, обозначенных пунктиром, достоверных сведений нет.

(№ 11), и вся картина предыдущего периода повторяется, так что через восемь элементов (считая и натрий) мы вновь встречаем щелочной металл калий, которому предшествует благородный газ аргон (№ 18).

Переход от типичных металлов к типичным металлоидам происходит через «амфотерный» элемент — кремний (№ 14), который обладает двумя модификациями: металлической и неметаллической. Следующий, четвертый, период, начинающийся калием, состоит уже не из 8, а из 18 элементов, так как следующий за калием щелочной металл — рубидий — стоит уже на 37-м месте. За рубидием следует новый большой период, также состоящий из 18 элементов и заканчивающийся на 54-м месте благородным газом ксеноном. Далее снова идет щелочной металл

Таблица III

1 H 1,0080																	2 He 4,0026
3 Li 6,939	4 Be 9,0122										5 B 10,811	6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984		10 Ne 20,183
11 Na 22,9898	12 Mg 24,312										13 Al 26,9815	14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,064	17 Cl 35,453		18 Ar 39,948
19 K 39,102	20 Ca 40,08		21 Sc 44,956	22 Ti 47,90	23 V 50,942	24 Cr 51,996	25 Mn 54,938	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71	29 Cu 63,54	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,909	36 Kr 83,80
37 Rb 85,47	38 Sr 87,62		39 Y 88,905	40 Zn 91,22	41 Nb 92,906	42 Mo 95,94	43 Tc 99	44 Ru 101,07	45 Rh 102,905	46 Pd 106,4	47 Ag 107,87	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,9044	54 Xe 131,30
55 Cs 132,905	56 Ba 137,34	57 La 138,92	58—71 см. ряд La	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,86	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po 210	85 At (210)	86 Rn 222
87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac 227	90—103 см. ряд Ac	104 Ku 261														

Ряд лантанидов	58 Ce 140,12	59 Pr 140,907	60 Nd 144,24	61 Pm (150,35)	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
Ряд актинидов	90 Th 232,38	91 Pa 231	92 U 238,03	93 Np 237	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (249)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lw (256)

Таблица IV

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
1	1 H 1,0080										2 He 4,0026
2	3 Li 6,939	4 Be 9,0122	5 B 10,811	6 C 12,011	7 N 14,0067	8 O 15,9994	9 F 18,9984				10 Ne 20,183
3	11 Na 22,9898	12 Mg 24,312	13 Al 26,9815	14 Si 28,086	15 P 30,9738	16 S 32,064	17 Cl 35,453				18 Ar 39,948
4	19 K 39,102	20 Ca 40,08	21 Sc 44,956	22 Ti 47,90	23 V 50,942	24 Cr 51,996	25 Mn 54,938	26 Fe 55,847	27 Co 58,9332	28 Ni 58,71	
	29 Cu 63,54	30 Zn 65,37	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,9216	34 Se 78,96	35 Br 79,909				36 Kr 83,80
5	37 Rb 85,47	38 Sr 87,62	39 Y 88,905	40 Zr 91,22	41 Nb 92,906	42 Mo 95,94	43 Tc 99	44 Ru 101,07	45 Rh 102,9	46 Pd 106,4	
	47 Ag 107,87	48 Cd 112,40	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,9044				54 Xe 131,30
6	55 Cs 132,905	56 Ba 137,34	57 La * 138,92	72 Hf 178,49	73 Ta 180,948	74 W 183,85	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	
	79 Au 196,967	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po 210	85 At 210				86 Rn 222
7	87 Fr 223	88 Ra 226,05	89 Ac ** 227	104 Ku (261)							

* 58—71 Ряд лантанидов	58 Ce 140,12	59 Pr 140,97	60 Nd 144,24	61 Pm 150,35	62 Sm 150,35	63 Eu 151,96	64 Gd 157,25	65 Tb 158,924	66 Dy 162,50	67 Ho 164,93	68 Er 167,26	69 Tm 168,934	70 Yb 173,04	71 Lu 174,97
** 90—98 Ряд актинидов	90 Th 232,038	91 Pa 231	92 U 238,03	93 Np 237	94 Pu (242)	95 Am (243)	96 Cm (247)	97 Bk (249)	98 Cf (251)	99 Es (254)	100 Fm (257)	101 Md (258)	102 No (255)	103 Lw (256)

цезий (№ 55), который открывает самый длинный период, содержащий 32 элемента. Среди этих 32 элементов особую группу образуют следующие за лантаном 14 элементов от 58-го до 71-го — редкие земли или «лантаниды», — обладающие столь близкими химическими свойствами, что разделение их представляет для химика очень трудную задачу. Именно вследствие этой близости химических свойств лантанидов в таблице им уделена одна клетка, а весь ряд приводится отдельно. Последний период, открывающийся 87-м элементом, состоит из неустойчивых естественно радиоактивных элементов. Самый тяжелый из встречающихся в природе элементов — уран (№ 92) до недавнего времени был и последним элементом периодической системы. В последние годы, однако, удалось искусственно получить ряд более тяжелых — «трансурановых» — элементов вплоть до элемента с номером 104. Исследование их химических свойств и пересмотр химических свойств предшествующих элементов привели к заключению, что следующий за актинием (№ 89) элемент торий (№ 90) открывает группу близких по химическим свойствам элементов — «актинидов», подобную группе редкоземельных металлов — «лантанидов».

Значительно более распространенной является другая форма естественной системы элементов — таблица с короткими периодами (таблица IV на стр. 49). Ее главным преимуществом является компактность, недостаток — в том, что распределение всех элементов в восемь групп осуществляется довольно искусственным путем введения подгрупп и «триад» (в VIII группе).

§ 13. Определение истинных масс атомов. Метод парабол

Из предыдущего параграфа следует, что определение истинных, а не средних атомных масс является очень важной задачей. Наиболее точные современные определения атомных масс, основанные исключительно *на различии масс* индивидуальных атомов и не зависящие от каких бы то ни было других их свойств, осуществляются при помощи отклонения ионов различных газов в электрических и магнитных полях. Впервые такой метод был предложен Дж. Дж. Томсоном.

Если в катоде разрядной трубки, работающей при пониженном давлении (сотые доли *мм рт. ст.*), сделать отверстие, то ионы, направляющиеся к катоду, проходят через это отверстие и образуют за катодом поток лучей, называемых *каналовыми*. Эти каналовые лучи состоят в основном из положительных ионов тех газов, остатки которых находятся в разрядной трубке; в их состав входят в меньшем числе также нейтральные частицы и отрицательные ионы, возникающие при рекомбинациях положительных ионов и электронов в пространстве за катодом.

Метод Томсона позволяет определять относительные массы отдельных частиц, входящих в состав пучка каналовых лучей, следующим образом. Каналовые лучи получаются путем прохождения ионов, которые возникают и ускоряются в разрядной

Рис. 24. Схема метода парабол.

трубке, через канал K (рис. 24) длиною в 2 *см* и диаметром в 0,1 *мм*. Благодаря значительной длине канала пучок получается почти параллельным; он содержит частицы различных энергий вплоть до максимальной, определяемой напряжением на трубке. Пучок каналовых частиц подвергается затем действию поперечных полей — электрического и магнитного, направленных параллельно или антипараллельно. При этом заряженные частицы отклоняются электрическим и магнитным полями во взаимно перпендикулярных направлениях, и, как мы видели в § 10, если пучок состоит из частиц одинаковой массы, но различных скоростей, то электрическое и магнитное поля развертывают его так, что, падая на флуоресцирующий экран, поставленный перпендикулярно к первоначальному направлению пучка или на фотопластинку, он оставляет след в виде отрезка параболы, более подробно изображенной на рис. 25.

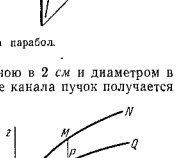


Рис. 25.

Пусть электрическое отклонение направлено по оси x, а магнитное — по оси z. Тогда, как было показано в § 10, между z и x должно иметь место соотношение

$$\frac{z^2}{x} = \frac{A^2}{B}\,\frac{e}{m}, \tag{10.1}$$

где A и B — постоянные прибора (см. § 4). Из (10.1) получаем

$$z^2\,\frac{m}{e} = \frac{A^2}{B}\,x. \tag{13.1}$$

Заряд иона может быть только целым кратным заряда электрона (т. е. может быть равен $+e$, $+2e$, ...) Если все ионы заряжены однократно, то, как показывает формула (13.1), при постоянном значении абсциссы x массы ионов обратно пропорциональны квадратам ординат (см. рис. 25).

Начало координат фиксируется на фотопластинке незаряженными частицами, которые не отклоняются в электрическом и магнитном полях, но никаких осей координат на пластинке, конечно, не имеется. Для того чтобы сделать возможным промер ординат, необходимый для определения масс, направление магнитного поля в течение опыта меняется (в отличие от опыта по определению зависимости массы электрона от скорости, описанного в § 10, где переключается электрическое поле), и таким путем, кроме отрезков парабол MN, PQ, получаются еще симметричные отрезки $M'N'$, $P'Q'$.

Если в пучке наряду с однократно заряженными ионами встречаются и двукратно заряженные (например, O^+ и O^{++}), то последние дают параболу, соответствующую половинной массе (например, парабола O^{++} соответствует массе 8). Однако существуют внешние признаки, при помощи которых можно отличать параболы многократно заряженных частиц от парабол частиц, заряженных однократно.

На рис. 26 приведены две фотографии парабол, полученные этим методом, но на современной усовершенствованной установке. На левой фотографии отчетливо видны две параболы, образованные однократно заряженными ионами одного и того же вещества — неона, — с очевидностью указывающие на существование у него изотопов с массами 20 и 22. Эти фотографии показывают, что при соответствующей конструкции деталей и правильном расчете прибора можно получать параболы в виде очень тонких следов, разделенных достаточно большими промежутками при небольшом различии масс. Максимальная разрешающая способность, которая была получена таким образом, равна $1/600$, т. е. две линии, соответствующие массам, различающимся на $1/600$ своей величины, еще видны раздельно (при 20-кратном увеличении). Однако существенный недостаток при-

бора заключается в его крайне малой «светосиле»: для получения резких линий приходится делать очень узкие щели, а электрическое и магнитное поля растягивают, кроме того, поток частиц, вследствие чего интенсивность следа оказывается очень малой. Условия эти несколько напоминают то, что имеет место

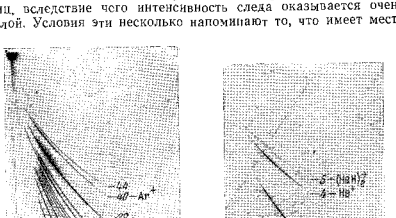


Рис. 26. Параболы ионов различных газов.

в фотографической камере с малым отверстием без объектива: уменьшая диаметр отверстия, можно получить сколь угодно резкое изображение, но экспозиция при этом увеличивается до практически неприемлемой длительности

§ 14. Масс-спектрографы

Большим преимуществом перед методом парабол обладают те методы, в которых при помощи различных комбинаций электрических и магнитных полей достигается фокусировка заряженных частиц. Устроенные таким образом приборы называются масс-спектрографами; первый из них был осуществлен Астоном.

Этот спектрограф имеет следующее устройство. Положительно заряженные ионы получаются при разряде в трубке с пониженным давлением. Через отверстие в катоде эти ионы попадают в закатодную часть в виде пучка канальных частиц и подвергаются анализу. С этой целью пучок прежде всего делается параллельным при помощи двух коллиматорных щелей B_1 и B_2

шириной 0,02 *мм* (рис 27). Конденсатор P_1P_2 развертывает этот пучок, давая частицам отклонение, пропорциональное e/mv^2. Часть этого развернутого пучка, выделенная экраном C со щелью B_3, попадает затем в магнитное поле, создаваемое электромагнитом с полюсными наконечниками M. В отличие от метода Томсона, где магнитное поле направлено параллельно или антипараллельно электрическому, в приборе Астона магнитное поле направлено *перпендикулярно* к электрическому. Ввиду

Рис. 27. Схема масс-спектрографа Астона.

этого отклонение частиц под действием магнитного поля здесь происходит в той же плоскости, что и электрическое отклонение, а сторона, в которую направлено магнитное поле, выбирается так, чтобы частицы в нем отклонялись в направлении, противоположном их электрическому отклонению. При таких условиях магнитное поле, в конце концов, собирает частицы, обладающие одинаковой массой (точнее, одинаковой величиной отношения e/m), но различными скоростями, в общем фокусе на фотопластинке S. В самом деле, отклонение, испытываемое ионами в конденсаторе, пропорционально e/mv^2, а радиус кривизны траектории в магнитном поле по формуле (4.9) пропорционален mv/e. Поэтому те частицы, которые испытали большее отклонение в электрическом поле, будут описывать в магнитном поле траекторию с меньшим радиусом кривизны (рис. 27). В результате магнитное поле сведет расходящийся пучок ионов в общем фокусе. Показанная на чертеже специальная форма полюсных наконечников улучшает фокусировку.

Следующая оптическая аналогия позволяет лучше понять действие прибора: параллельный пучок лучей белого света (рис. 28), пройдя через призму P_1, развертывается в спектр. Вторая призма P_2, расположенная вершиной в сторону, противоположную первой, и имеющая бо́льшую дисперсию, вновь собирает все различно окрашенные лучи в белый «фокус». Здесь первая призма отвечает электрическому полю, вторая — магнитному; лучи различной длины волны — частицам различных скоростей.

Точная теория прибора Астона довольно сложна. Мы приведем здесь только некоторые простые соображения, разъясняющие условия фокусировки частиц. Пусть $d\theta$ будет угловая ширина пучка, развернутого электрическим полем и пропущенного щелью B_3. Если l есть расстояние от середины конденсатора до центра магнитного поля, а r — расстояние от центра магнитного поля до фокуса, то в отсутствие магнитного поля пучок, развернутый электрическим полем на расстоянии $l+r$, приобрел бы

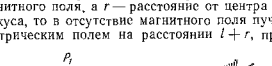


Рис 28. Оптическая эквивалентная схема масс-спектрографа.

ширину $(l+r)\,d\theta$. Для того чтобы осуществлялась фокусировка, эта ширина должна быть компенсирована магнитным отклонением, направленным в противоположную сторону. Если $d\varphi$ есть угловая ширина, которую приобретает пучок вследствие магнитного отклонения, то $r\,d\varphi$ будет его линейной шириной на расстоянии r. Для фокусировки требуется, чтобы отклонение в электрическом поле компенсировалось отклонением в магнитном поле. Это дает условие

$$(l+r)\,d\theta - r\,d\varphi = 0. \tag{14.1}$$

Рассмотрим сначала пучок, однородный по массам, т. е. положим, что для всех частиц пучка $e/m = \text{const}$. Отклонение z параллельного пучка частиц в однородном электрическом поле по формулам (4.11) и (4.12) будет

$$z = \frac{e}{2mv^2}\,\mathscr{E}a^2,$$

где a — длина конденсатора. Отсюда для малых углов отклонения θ имеем

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{z}{a} = \frac{e}{2mv^2}\,\mathscr{E}a$$

и, следовательно,

$$\theta v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{e}{m}\,\mathscr{E}a = \text{const}.$$

Дифференцируя, получаем $v^2 d\theta + 2v\theta\,dv = 0$ или

$$\frac{d\theta}{\theta} = -2\,\frac{dv}{v}. \tag{14.2}$$

Радиус кривизны траектории в однородном магнитном поле по (4.9) равен

$$\rho = \frac{mv}{e}\cdot\frac{1}{\mathscr{H}}.$$

Отсюда угол отклонения φ в магнитном поле

$$\varphi = \frac{L}{\rho} = \frac{e}{mv} L\mathscr{H},$$

где L — длина пути в магнитном поле. Так же, как и раньше, получаем $qv = \frac{e}{m} L\mathscr{H} = \text{const}$, $\varphi\, dv + v\, d\varphi = 0$,

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = -\frac{dv}{v}. \tag{14.3}$$

Подставляя $d\theta$ и $d\varphi$ из (14.2) и (14.3) в (14.1), находим

$$\frac{dv}{v}\,[(\varphi - 2\theta)\,r - 2l\theta] = 0.$$

Так как $dv/v \neq 0$, то это условие будет выполнено, если выражение в скобках равно нулю, т. е.

$$(\varphi - 2\theta)\,r = 2l\theta. \tag{14.4}$$

Геометрический смысл этого соотношения можно пояснить при помощи рис. 29. Пусть Z — середина электрического поля

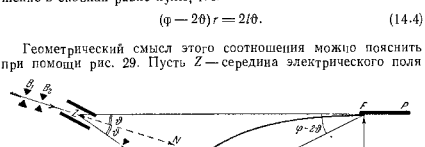


Рис. 29. К условию фокусировки в масс-спектрографе Астона.

конденсатора, O — середина магнитного поля, F — фокус, в котором собираются частицы выбранной нами массы. ZN есть направление полета каналовых частиц до того, как они испытали отклонение. Если в треугольнике OZF угол при Z равен 2θ, как показано на чертеже, то на основании тригонометрической «теоремы синусов» получаем, принимая во внимание, что $ZO = l$ и $OF = r$ (см. рис. 27),

$$\frac{r}{\sin 2\theta} = \frac{l}{\sin(\varphi - 2\theta)}. \tag{14.5}$$

Для малых углов соотношение (14.5) сразу дает (14.4).

До сих пор мы имели в виду частицы с определенным значением e/m. Оказывается, однако, что если расположить фотопластинку FP так, чтобы прямая ZF лежала в ее плоскости, то на пластинке одновременно расположатся фокусы для различных e/m. В самом деле, выберем за полярную ось прямую OX, параллельную ZF. Тогда радиус-вектор, проведенный к F, будет равен r, а полярный угол ψ, как видно из чертежа, равен $\varphi - 2\theta$. Расстояние a между ZP и OX будет равно $r\sin(\varphi - 2\theta)$, или по (14.5)

$$a = r\sin(\varphi - 2\theta) = l\sin 2\theta \approx 2l\theta.$$

Но так как угол θ фиксирован расположением щели B_3 (рис. 27), то *a есть постоянная величина*. Пользуясь обозначениями $\varphi - 2\theta = \psi$, $2l\theta = a$, из (14.4) получаем

$$r = \frac{a}{\psi}. \tag{14.6}$$

Ввиду того, что a — постоянная величина, (14.6) есть уравнение гиперболической спирали*). Эта спираль делает бесконечное число оборотов, приближаясь к началу координат, но не попадая в него; она имеет асимптоту, параллельную полярной оси и отстоящую от нее на расстоянии a. Поэтому, если расположить фотопластинку так, чтобы эта асимптота находилась в ее плоскости, то все фокусы, которым соответствуют углы ψ, меньшие некоторой определенной величины, будут лежать в плоскости фотопластинки, чем и обеспечивается резкость линий в масс-спектре.

На рис. 30 приведено несколько масс-спектров, снятых прибором описанного типа. Видно, насколько резки линии этих спектров. Расстояния между ними (дисперсия прибора) настолько велики, что измерения масс и разделение близких масс можно производить с высокой степенью точности. В самом деле, при длине спектра в 16 *см* на нем укладываются линии атомов, которым соответствуют массы, различающиеся немного более чем в два раза; изменение массы на один процент соответствует расстоянию линий от 1,5 до 3 *мм* (в разных частях пластинки).

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. I, «Наука», 1967, стр. 191

Для определения масс по этим спектрам поступают следующим образом. Во-первых, нужно выбрать какую-нибудь определенную массу в качестве «стандарта», так как при помощи масс-спектров могут быть определены только *относительные* величины масс. В так называемой физической шкале масс за основу берется масса изотопа углерода $C^{12} = 12$. Во вторых, для определения неизвестных масс следует построить градуировочную

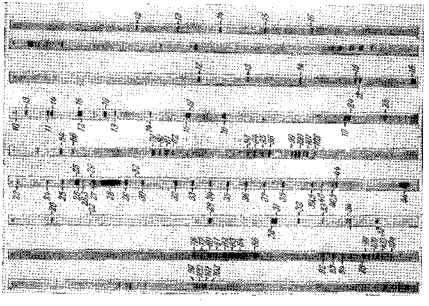


Рис. 30. Несколько типичных масс-спектров.

кривую, откладывая на оси абсцисс расстояние линий от одной определенной точки на фотопластинке, а на оси ординат — соответствующие массы. Эта шкала масс может быть установлена при помощи линий, связанных с массами, отношение которых точно известно. Например, линиям атома и молекулы кислорода, O и O_2, следует приписать массы 16 и 32; одно- и двухзарядным ионам O^+ и O^{++} надо приписать массы 16 и 8 и т. д.

На рис. 31 приведен пример градуировочной кривой спектрографа Астона. Как видно, она мало отличается от прямой, что облегчает достижение высокой точности. Для получения максимальной точности применяются более сложные методы, на описании которых мы останавливаться не будем *).

*) См Т. Р Р и к, Масс спектроскопия, Гостехиздат, 1953.

Бэйнбридж использовал в своем приборе совершенно иную комбинацию электрического и магнитного полей. Построенный им масс-спектрограф характеризуется чрезвычайной простотой конструкции, но дает результаты не менее, а в некоторых случаях даже более точные, нежели спектрограф Астона. Схема прибора Бэйнбриджа такова: пучок каналовых лучей делается параллельным при помощи двух коллиматорных щелей S_1 и S_2 (рис. 32). Этот параллельный пучок, содержащий ионы различных масс и различных скоростей, поступает затем в конденсатор

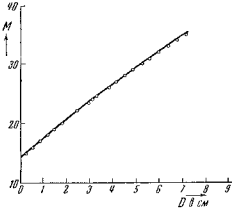


Рис. 31. Градуировочная кривая спектрографа Астона.

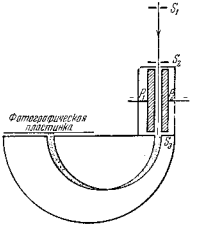


Рис. 32. Схема масс-спектрографа Бэйнбриджа с фильтром скоростей.

P_1P_2, который находится в поперечном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости чертежа. Такая система, как было показано в § 9, представляет собой фильтр скоростей. Присутствие этого фильтра в огромной степени упрощает дело. Действительно, фильтр пропускает через щель S_3 ионы различных масс, но одной и той же скорости v_0. Пройдя через щель S_3, эти ионы описывают круговые траектории в поперечном однородном магнитном поле. Радиусы кривизны этих траекторий по формуле (4.9) пропорциональны количествам движения ионов:

$$\rho = \frac{mv_0}{eH}, \tag{4.9}$$

а так как скорость v_0 у всех ионов одинакова, то радиусы кривизны ионов различных масс будут пропорциональны массам:

$$\rho = \text{const} \cdot m.$$

Поэтому расстояние линий от некоторой линии, выбранной на фотопластинке за начало отсчета, будет также строго пропорционально массе. Линейность шкалы этого прибора, а также особенно симметричная форма линий, позволяющая производить сравнение линий, даже сильно отличающихся друг от друга по интенсивности, дают этому прибору большие преимущества перед спектрографом Астона.

Рис. 33. Примеры масс-спектров, снятых спектрографом Бэйнбриджа. Слева даны изотопы цинка, германия и теллура; справа — спектры, подтверждающие существование изотопа водорода с массой 2. Нижний спектр подтверждает отсутствие изотопов у бериллия.

На рис. 33 приведено несколько масс-спектров, снятых прибором Бэйнбриджа. Высокая разрешающая способность этого спектрографа видна из того, что линии молекулы водорода и двухзарядного иона гелия He^{++} далеко отстоят друг от друга.

Простой по идее спектрограф Бэйнбриджа на самом деле представляет собой громоздкое сооружение. Его главная особенность — огромный электромагнит, дающий однородное магнитное поле в 15 000 эрстед на площади полукруга диаметром 40 *см* при расстоянии между полюсами в 1,8 *см*.

§ 15. Масс-спектрометры и масс-спектрографы с двойной фокусировкой

Описанные в предыдущем параграфе масс-спектрографы позволяют производить определения атомных масс индивидуальных типов атомов с огромной степенью точности (с пятью десятичными знаками). Пользуясь методами фотографической фотометрии, можно, конечно, по величине почернения фотопластинки в определенных линиях спектра производить также сравнение процентного содержания масс, соответствующих этим линиям. Однако, во-первых, методы фотографической фотометрии крайне кропотливы и не дают точных результатов, а во-вторых, определение процентного содержания изотопов можно производить гораздо быстрее и точнее с помощью приборов, называемых масс-спектрометрами. В этих приборах регистрация ионов определенной массы производится всегда не фотографическим, но электрическим путем — по величине заряда, переносимого ионами определенной массы, или по силе ионного тока. Благодаря этому определение процентного содержания не требует дополнительных измерений: показания электроизмерительного прибора просто пропорциональны числу ионов данного типа.

Масс-спектрометры позволяют определять также и атомные массы, но с меньшей точностью, нежели масс-спектрографы. Они приобрели за последнее время большое практическое значение в связи с развивающимися применениями их для химического газового анализа (например, для анализа углеводородов), а также и потому, что установки для электромагнитного разделения изотопов, о которых речь будет ниже (§ 19), представляют собой масс-спектрометры большой мощности.

Одной из существенных особенностей масс-спектрометров является фокусировка расходящихся ионных пучков. При рассмотрении масс-спектрографа Астона мы видели, что под фокусировкой в этом приборе разумеют собирание в фокусе частиц одинаковой массы, но различных скоростей. С этой целью, однако, пучок ионов прежде всего делают параллельным, пропуская его через две узкие щели, расположенные на большом расстоянии друг от друга (B_1 и B_2 на рис. 27). Но это ведет к потере большого количества ионов; говоря языком оптики прибор выигрывает в резкости изображения, но проигрывает в светосиле. Для конструкций масс-спектрометров характерно использование самых разнообразных методов фокусировки расходящихся ионных пучков, т. е. методов фокусировки направлений, а не одних только скоростей, как в масс-спектрографе Астона.

Решение этой задачи в настоящее время значительно облегчается благодаря развитию так называемой электронной геометрической оптики, т. е. использованию замечательной аналогии

между механикой и геометрической оптикой для расчета путей заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Метод этот достиг за последнее время большого развития благодаря разнообразным практическим потребностям, в том числе потребностям телевидения, построения электронных микроскопов и т. п.

Наиболее старый и широко применяемый в конструкциях масс-спектрометров метод фокусировки направлений есть фокусировка поперечным магнитным полем на расстоянии 180° (или π радиан). В § 9 мы видели, что слабо расходящийся пучок ионов с определенным значением e/m фокусируется, описав полуокружность в однородном поперечном магнитном поле, действующем на всем протяжении пути ионов. На этом основана следующая конструкция масс-спектрометра, впервые построенного Демстером (рис. 34) почти одновременно с масс-спектрографом Астона (в 1918 г.). Ионы, создаваемые источником A (на самом деле ионы получаются путем нагревания соли исследуемого металла *)), приобретают все одинаковую энергию под действием разности потенциалов V, приложенной между A и C. Через щель S_1 расходящийся пучок ионов попадает в область, где действует поперечное однородное магнитное поле $\mathscr{H}$. Ионы, обладающие различными e/m, фокусируются, как показано на чертеже, в различных местах. Если, как это имеет место в данном случае, энергия ионов одна и та же, то между радиусом кривизны, определяющим положение фокуса, и массой (точнее, m/e) легко установить простое соотношение. В самом деле, мы имеем

Рис. 34. Схема масс-спектрометра с фокусировкой на π радиан.

$$\frac{mv^2}{2} = eV, \tag{5.4}$$

$$\rho = \frac{mv}{e\mathscr{H}}. \tag{4.9}$$

*) Если на анод нанести соль металла и подогреть ее, то при разряде в разреженном газе от анода идет поток положительных ионов металла в виде так называемых анодных лучей, причем, и это особенно важно, энергия образующихся ионов очень мала; во всяком случае, она значительно меньше той, которую ионы приобретают при последующем ускорении, благодаря чему все ионы получаются с одинаковой энергией, так как небольшие различия в первоначальной энергии оказываются несущественными.

откуда сразу получается

$$\frac{m}{e} = \frac{\mathscr{H}^2\rho^2}{2V},$$

или

$$\rho^2 = \frac{2\frac{m}{e}}{\mathscr{H}^2}V.$$

Подбирая величину ускоряющего потенциала так, чтобы при данном m/e радиус кривизны ρ приобретал определенное значение, например 5 *см*, как на рис. 34, можно выпустить через выходную щель S_2 ионы любой массы. Потенциал, до которого заряжается при этом коллектор P (или сила тока ионов на этот коллектор), служит мерой количества ионов данной массы.

Усовершенствования, сделанные за последние годы в этом методе, связаны со стремлением получать возможно бо́льшие количества ионов. Например, в масс-спектрометре Блэкни, который послужил прототипом для ряда позднейших конструкций, это достигается следующим образом. Ионы создаются в пространстве между электродом P_1 и щелью P_2 (рис. 35) потоком электронов, перпендикулярным к плоскости рисунка и пересекающим ее в S. Соленоид J создает поперечное однородное магнитное поле, также перпендикулярное к плоскости чертежа (т. е. параллельное пучку электронов), не позволяющее пучку электронов расширяться. Образовавшиеся ионы вытягиваются слабым электрическим полем между P_1 и P_2 в пространство между щелями P_2 и P_3, где действует более сильное электрическое поле. Пройдя через щель P_3, ионы фокусируются магнитным полем на расстоянии π радиан, как это было разъяснено выше. Подбирая соответствующую величину магнитного поля, можно заставить ионы пройти через щель P_4 в цилиндр Фарадея F, заряд которого служит мерой силы тока ионов данной массы. Все щели имеют большую длину для увеличения числа проходящих через них ионов.

Рис. 35. Схема масс-спектрометра Блэкни.

На рис. 36 приведен в качестве примера анализ изотопного состава кадмия, выполненный усовершенствованным спектрометром описанного типа. Цифры на оси абсцисс представляют собой округленные атомные массы изотопов; резкие максимумы соответствуют изотопам кадмия с массами 106, 108, 110, 111,

112, 113, 114 и 116. Отношения ионных токов, величины которых отсчитываются по оси ординат, сразу дают процентное содержание изотопов. Оно таково:

Массовое число	106	108	110	111	112	113	114	116
Процентное содержание	1,215	0,875	12,39	12,75	24,07	12,26	28,86	7,58

Поперечное однородное магнитное поле, действующее на протяжении всей полукруговой траектории ионов, с точки зрения электронной оптики является цилиндрической линзой, дающей

Рис. 36. Изотопный состав кадмия.

«изображение» щели S_1. В электронной оптике доказывается, однако, что цилиндрической линзой является также и однородное поперечное магнитное поле, действующее в ограниченной области, оформленной в виде сектора с углом θ, при условии, если центральный луч расходящегося пучка ионов входит в поле и выходит из него нормально к границам поля (рис. 37). При этом фокусировка имеет место, каков бы ни был угол сектора, но углы β, γ и θ должны быть связаны соотношением $\beta + \gamma + \theta = \pi$. Это соотношение выполняется, когда источник

ионов, вершина сектора и фокус лежат на одной прямой. В частности, когда $\theta = \pi$, мы получаем уже рассмотренный случай фокусировки круговых траекторий.

Радиальное электрическое поле цилиндрического конденсатора также может быть использовано для фокусировки расходящихся пучков ионов; в этом случае, как мы видели в § 9,

Рис. 37. Фокусировка направлений ограниченным магнитным полем.

фокус отстоит от источника на $127°17'$, или $\pi/\sqrt{2}$ радианов. Особенно эффективной является комбинация радиального электрического и поперечного магнитного полей, применяемая в некоторых масс-спектрометрах (рис. 38).

Рис. 38. Масс-спектрометр со скрещенными электрическим и магнитным полями.

Рис. 39. Схема усовершенствованного масс-спектрографа по Бейнбриджу и Джордану.

Двойная фокусировка радиальным электрическим и секторным магнитным полями была использована Бэйнбриджем и Джорданом для построения масс-спектрографа большой светосилы и особенно высокой разрешающей способности. В этом приборе (рис. 39) расходящийся пучок ионов сначала

фокусируется радиальным электрическим полем, а затем секторное магнитное поле с углом в 60° дает на фотопластинке плоский спектр масс. «Светосила» этого прибора такова, что для ярких линий время экспозиции может быть доведено до 1—5 *сек*, а для самых слабых увеличивается до 180 *сек*. Разрешающая способность, т. е. отношение минимальной разницы масс ΔM, при которой линии видны раздельно, к самой массе M в зависимости от ширины щели колеблется от $^1/_{6000}$ до $^1/_{16000}$.

§ 16. Массы и процентное содержание изотопов

При изучении химических свойств радиоактивных элементов уже в 1906—1910 гг. было обнаружено, что существуют элементы, которые не удается разделить химическим путем, хотя атомные веса их различны. Таковы, например, пары элементов — ионий и торий, мезоторий и радий. Дж. Дж. Томсон, пользуясь открытым им методом парабол, в 1913 г. показал, что нерадиоактивный газ неон представляет собой также смесь двух химически неразличимых, т. е. изотопных, сортов атомов с массами 20 и 22 (см. рис. 26, *а*), тогда как принятый в химии атомный вес неона есть 20,2. Отсюда следовало заключить, что этот «химический» атомный вес 20,2 на самом деле является средним из атомных весов обоих изотопов 20 и 22. Астон, применяя построенный им масс-спектрограф, обнаружил впоследствии, что элементы, имеющие два или несколько изотопов, вовсе не являются исключением; как раз наоборот — исключениями являются те немногие элементы (натрий, фтор и т. д.), у которых не обнаружено изотопов. Но даже и в этих случаях открытие искусственной радиоактивности показало, что на самом деле отсутствуют *стабильные* (т. е. нерадиоактивные), но всегда имеются изотопы радиоактивные (радиоактивные Na^{22}, Na^{24} наряду со стабильным изотопом Na^{23} и т. д.).

Точное определение атомных масс изотопов производится при помощи масс-спектрографов. Пользуясь методами фотографической фотометрии, можно определять также и процентное содержание изотопов по интенсивности почернения фотопластинки. Однако точнее и проще производить определения процентного содержания масс-спектрометрами, рассмотренными в предыдущем параграфе. Для всех них характерно то, что процентное содержание определяется с их помощью быстро и с высокой точностью.

Уже первые определения истинных атомных масс, произведенные Астоном с точностью до 0,001, показали, что массы атомов всегда выражаются почти целыми числами по отношению к массе кислорода, принятой за 16,000. Исключением является водород, атомная масса которого в указанных пределах

точности резко отличается от единицы и равна 1,008. *Химические* атомные веса являются средними из масс всех изотопов данного элемента, и этим объясняются значительные отступления химических атомных весов некоторых (впрочем, немногих) элементов от целых чисел. Так, например, магний имеет следующий изотопный состав:

Изотопы	24	25	26
Процентное содержание	78,60	10,11	11,29

Отсюда получается средняя масса 24,33, в то время как химический атомный вес магния равен 24,31. Аналогичная таблица для кадмия была приведена раньше.

Определение атомных масс с четырьмя или пятью десятичными знаками производится с помощью усовершенствованных масс-спектрографов. При такой точности получающиеся цифры обнаруживают небольшие отступления от целых чисел.

§ 17. Разделение изотопов с помощью методов, основанных на диффузии

Химические элементы, существующие в природе, представляют собой смеси устойчивых изотопов. При этом, за очень немногими исключениями, состав этих смесей строго постоянен. Конечно, существенный интерес представляет получение отдельных изотопов в чистом виде. Эта задача имеет в настоящее время очень важное научное и техническое значение. Ее значение особенно возросло в самые последние годы в связи с развитием ядерной энергетики.

Задача получения чистых изотопов или даже существенного обогащения смеси изотопов одним из них очень трудна. В самом деле, для разделения изотопов приходится пользоваться теми свойствами их, которые зависят от массы. Но процентная разница в массах имеет заметные значения только для изотопов самых легких элементов. Например, для водорода разница в массах тяжелого (H^2 или D) и легкого (H^1) изотопа составляет 100%, но уже для изотопов углерода C^{12} и C^{13} эта разница равна 8,35%, а для изотопов урана U^{238} и U^{235} — всего 1,2%.

Прежде чем переходить к рассмотрению различных методов разделения изотопов, условимся о терминах, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Пусть разделению подвергается смесь двух изотопов различной массы и пусть σ будет часть всего числа атомов, которая приходится на долю одного из

изотопов до разделения, а $\lambda = 1 - \sigma$ — доля другого изотопа также до разделения; соответственно, пусть будет Σ и $\Lambda = 1 - \Sigma$ те же доли после разделения. Величину q, определяемую равенством

$$q = \frac{\Sigma/\Lambda}{\sigma/\lambda}, \tag{17.1}$$

мы будем называть коэффициентом разделения. Например, неон, встречающийся в природе, состоит из 90% атомов с массой 20 и 10% — с массой 22. Если мы хотим обогатить эту смесь тяжелой компонентой так, чтобы ее доля в смеси стала равной 50%, то коэффициент разделения должен быть равен

$$q = \frac{0{,}5/0{,}5}{0{,}1/0{,}9} = 9.$$

Из процессов, зависящих от массы, а потому пригодных для разделения изотопов, рассмотрим прежде всего диффузию. Пусть мы имеем газ, представляющий собой смесь частиц двух сортов, различающихся своей массой. Так как газ находится в температурном равновесии, то средние кинетические энергии частиц обоих сортов одинаковы: $\overline{m_1 v_1^2} = \overline{m_2 v_2^2}$, а потому средние скорости обратно пропорциональны корням квадратным из масс

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Ввиду этого более легкие частицы при диффузии будут забегать вперед, а более тяжелые — отставать.

Возможность разделения смеси двух газов путем диффузии через пористую перегородку теоретически рассматривалась Рэлеем уже в 1896 г. Пусть в начальный момент по одну сторону перегородки находится газ, состоящий из молекул двух сортов, различающихся массой, а по другую сторону — вакуум. В результате диффузии газ будет обогащаться легкой компонентой по одну сторону перегородки и тяжелой — по другую. Условия, при которых достигается наибольшее разделение, по Рэлею, состоят в том, чтобы, во-первых, величина пор была значительно меньше средней длины свободного пробега молекул, и, во-вторых, чтобы медленнее диффундирующая компонента не скоплялась на поверхности пористой перегородки.

Кроме того, следует иметь в виду, что состав продиффундировавшей смеси зависит не только от соотношения скоростей тяжелых и легких молекул, но и от относительной концентрации этих молекул в первоначальной смеси. Это обстоятельство очень существенно, так как в процессе диффузии исходная смесь будет постепенно обедняться легкими молекулами, и потому со-

став газа, проходящего через пористую перегородку, будет все меньше отличаться от исходного.

Пусть теперь диффундирующий газ представляет собой смесь двух изотопов, различающихся по массе незначительно (как это и бывает на самом деле); тогда, по Рэлею, коэффициент обогащения тяжелой компонентой непродиффундировавшего газа выражается формулой

$$q = \sqrt[\nu]{\frac{\text{начальный объем}}{\text{конечный объем}}}, \tag{17.1'}$$

где $\nu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}$ (m_1 и m_2 — массы атомов обоих изотопов). Применим эту формулу к случаю неона. Массы его изотопов $m_2 = 20$ и $m_1 = 22$; следовательно, $\nu = 21$. В ранних опытах по разделению изотопов неона, выполненных Астоном, отношение объемов было, наверное, больше 500 и меньше 10 000. По формуле (17.1′) для коэффициента разделения получается число между 1,3 и 1,5, т. е. в 6—7 раз меньше того, какое необходимо, чтобы смесь обогатилась тяжелой компонентой до 50%. В случае изотопов хлора с массами 36 и 38 диффузии подвергается HCl; для этого случая показатель ν в формуле (17.1′) равен уже 37, и при изменении объема в 10^4 раз коэффициент обогащения получается равным 1,3.

Рассмотренные примеры показывают, что путем однократной диффузии можно осуществить лишь небольшое изменение состава смеси изотопов. Совершенно иной результат получается при использовании многоступенчатого или каскадного метода, впервые разработанного Г. Герцем. Аппаратура, примененная им, состоит из ряда последовательно соединенных звеньев, из которых каждое разлагает входящий в него поток газа на две части, немного различающиеся по составу. Для того чтобы понять устройство и работу этого каскада, необходимо сначала рассмотреть его отдельное разделительное звено.

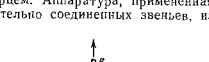


Рис. 40. Простейшая схема разделительной ячейки.

Простейшее устройство такого звена изображено на рис. 40. Оно состоит из внутренней трубки, сделанной из пористого материала и помещенной внутрь более широкой стеклянной трубки. Если справа в A подтекает газ, состоящий из двух сортов частиц различной массы, то часть его, продиффундировавшая во внешнюю трубку, будет слегка обогащена легкой компонентой; эту часть можно при помощи насоса перекачать через B в соседнее правое звено, а остальная часть, обогащенная

тяжелой компонентой, поступит через D в соседнее левое звено. Таким образом, отдельное звено действительно будет разлагать поток газа на две части, немного различающиеся по составу: влево будет подаваться газ, обогащенный тяжелой компонентой, а вправо — легкой. Недостаток этого устройства состоит, однако, в следующем. Газ, текущий внутри пористой трубки, по мере продвижения вперед обогащается тяжелой компонентой. Поэтому газ, диффундирующий в левом конце звена (вблизи D), будет по составу уже мало отличаться от газа, поступающего через A.

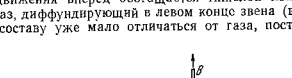


Рис. 41. Усовершенствованная разделительная ячейка.

Для того чтобы преодолеть этот недостаток, Герц разделил каждое звено на две части, как показано на рис. 41. Только та часть газа, которая диффундирует через R и обогащается легкой компонентой, откачивается через B в соседнее правое звено. Остальная часть поступает в T, и так как согласно сказанному диффундирующая здесь часть обладает примерно тем же составом, что и поступающая в звено, то она откачивается насосом P через C и вновь подается у A к началу звена с тем, чтобы вновь подвергнуться диффузии и соответствующему обогащению.

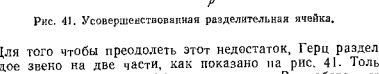


Рис. 42. Каскад диффузионных ячеек.

На рис. 42 изображен небольшой каскад, состоящий из трех разделительных ячеек. V_1 и V_2 — баллоны, в которых скопляется газ с преобладанием соответственно легкой или тяжелой компоненты. Через эти баллоны газ снова возвращается в разделительные ячейки, благодаря чему в конце концов устанавливается стационарное состояние. Небольшая глиняная трубка слева от баллона V_2 действует не как разделительная ячейка, но служит

для регулирования скорости газа, циркулирующего через баллон и поступающего обратно в соседнюю разделительную ячейку.

Действие установки поясняется схематическим рис. 43. Здесь каждая ячейка обозначена квадратиком. В начальном состоянии весь каскад заполнен смесью нормального состава. В результате диффузии каждая ячейка будет подавать направо газ, обогащенный легкой компонентой, а налево — газ, обогащенный тяжелой компонентой. На рис. 43 поток смеси, обогащенной

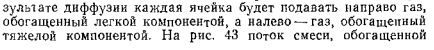


Рис. 43. Схема работы каскада диффузионных ячеек: *а*) начальное состояние; *б*) установившееся состояние.

легкой компонентой, обозначен пунктиром, а поток смеси, обогащенной тяжелой компонентой, — сплошной линией. Из рис. 43, *а*, изображающего начальное состояние, видно, что вследствие работы разделительных ячеек в системе устанавливается два потока: вправо — поток, обогащенный легкой компонентой, влево — поток, обогащенный тяжелой компонентой. В результате этого движения состав газа в баллонах V_1 и V_2 соответственным образом изменяется. Изменение состава смеси будет происходить до тех пор, пока не установится стационарное состояние, при котором состав газа, получаемого каждой ячейкой от соседних, становится одинаковым с составами смесей, передаваемых этой ячейкой обеим соседним. Но так как при этом оба потока, передаваемых каждой ячейкой вправо и влево, по-прежнему отличаются по содержанию легкой и тяжелой компонент на некоторый коэффициент q, то в стационарном состоянии состав газа, циркулирующего между парами последовательных звеньев, отличается от соседнего именно на этот коэффициент q. Это показано на рис. 43, *б* различной густотой штрихов: справа смесь, циркулирующая между последней ячейкой и баллоном V_1, в наибольшей степени обогащена легкой компонентой — штриховка самая редкая; относительная концентрация тяжелой компоненты в составе смеси, циркулирующей между последней и предпоследней ячейками справа, в q раз больше

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

— штриховка более густая; для следующей пары:

$$\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-2} = q\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_{n-1} = q^2\left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)_n$$

и т. д. Очевидно, что если каскад содержит z звеньев, то состав смеси в левом баллоне V_s будет отличаться от состава смеси в правом баллоне V_l уже на коэффициент q^z. Таким образом, полный коэффициент разделения всего каскада Q равен

$$Q = q^z. \tag{17.2}$$

Для вычисления q необходимо знать, какая доля f потока, поступающего в разделительную ячейку, диффундирует через пористую трубку R (рис. 41). Вообще говоря, поток, поступающий в разделительное звено, разделился на три части: одна диффундирует через R и откачивается через B в соседнее правое звено, другая — диффундирует через T и откачивается насосом P для рециркуляции в той же ячейке и третья — через D поступает в соседнюю левую ячейку. Если длины R и T одинаковы, то все три части потока между собой равны и $f = 1/3$. Если же R и T неодинаковы, то f зависит от соотношения их длин l_R и l_T. Именно, в общем случае, как показывает простой расчет,

$$f = \frac{1}{2 + l_R/l_T} \tag{17.3}$$

(при $l_T = l_R$, очевидно, получается по-прежнему $f = 1/3$). Выведенная Герцем формула для коэффициента разделения отдельного звена такова:

$$q = \frac{f^{\mu}}{1-(1-f)^{\mu}}, \tag{17.4}$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (m_1 < m_2),$$

а потому полный коэффициент разделения каскада по (17.2) будет

$$Q = \left(\frac{f^{\mu}}{1-(1-f)^{\mu}}\right)^z \tag{17.5}$$

где z — число звеньев в каскаде.

Для пояснения рассмотрим вновь пример неона. В первой установке Герца длины трубок R и T были одинаковы, ввиду чего $f = 1/3$. Так как $\mu = \sqrt{\frac{20}{22}} = 0{,}954$, то по формуле (17.4) находим $q = 1{,}089$. Если каскад состоит из 24 звеньев, то для Q уже получается

$$Q = (1{,}089)^{24} = 7{,}73,$$

а для каскада из 48 звеньев

$$Q = (1{,}089)^{48} = 59{,}75.$$

Мы видим, таким образом, что благодаря использованию каскада коэффициент разделения возрастает настолько, что становится возможным далеко идущее разделение изотопов.

Описанный метод был с самого начала применен к разделению изотопов ряда легких элементов. Для разделения изотопов неона был использован каскад из 24 звеньев. Равновесие установилось через 4 часа. При этом вместо нормального состава $Ne^{20} : Ne^{22} = 9 : 1$ в резервуаре на «тяжелом конце» установки скопилась смесь состава $Ne^{20} : Ne^{22} = 1{,}25 : 1$. Количество этого конечного продукта при атмосферном давлении составляло 4 *см*³. С каскадом из 48 звеньев был получен чистый Ne^{22}. Были полностью разделены также изотопы водорода и произведено обогащение тяжелыми компонентами углерода и азота (изотопами C^{13} и N^{15}).

Для работы каскада очень важное значение имеет пористая перегородка, через которую идет диффузия. Как уже указывалось, наиболее благоприятные для разделения условия требуют специального выбора пористой перегородки. Герц пользовался особо приготовленными глиняными трубками. Однако они не вполне удовлетворяли требованиям, ввиду чего он видоизменил метод таким образом, что диффузия происходила не через пористую перегородку, но в струю паров ртути, которые уносили с собой газ, обогащенный легкой компонентой. Разделительное звено этого второго метода можно охарактеризовать как диффузионный насос, откачивающий преимущественно одну компоненту смеси. Из подобных звеньев также составляются каскады, содержащие несколько десятков звеньев (до 50). Преимущество этого метода перед первым состоит в более быстром установлении равновесия. При его помощи Герц и ряд других исследователей произвели разделение или обогащение ряда изотопов легких элементов (неон, кислород, аргон и углерод).

Упражнение. Вычислить полные коэффициенты разделения установки Герца, состоящей из 24 звеньев, полагая $f = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$; $0{,}4$, $0{,}5$, и построить кривую зависимость Q от f.

§ 18. Разделение изотопов методом термодиффузии

Один из наиболее эффективных методов разделения изотопов связан со своеобразным явлением, называемым термодиффузией. Для того чтобы понять, в чем заключается это явление, необходимо прежде всего уяснить себе его отличие от обычной диффузии. Классический опыт, демонстрирующий диффузию, состоит, как известно, в следующем. Представим себе замкнутое пространство, в которое в начальный момент введены два газа с различными молекулярными весами и притом так, чтобы более тяжелый газ находился внизу, а более легкий — наверху.

В таком случае вследствие диффузии молекулы более тяжелого газа будут перемещаться вверх (т. е. против действия силы тяжести), а молекулы более легкого — вниз. Через некоторый промежуток времени получится совершенно однородная смесь обоих газов. Таким образом, действие обычной диффузии сводится к смешиванию газов, которые в начальный момент были разделены.

Явление термодиффузии оказывает *обратное действие*: вследствие термодиффузии при наличии в смеси газов градиента температуры происходит частичное разделение смеси. Это можно пояснить примером, представленным на рис. 44. Представим себе ящик, в котором находится совершенно однородная смесь молекул кислорода и азота: 50% O_2 + + 50% N_2. Если теперь поддерживать нижнюю стенку ящика при температуре 0° С, а верхнюю — при 500° С, то, как показывает опыт, у верхней, т. е. более нагретой, стенки состав газа будет 50,27% N_2 + 49,73% O_2, а у нижней, более холодной, стенки 49,73% N_2 + 50,27% O_2. Таким образом, вследствие термодиффузии у более нагретой стенки оказывается избыток легких молекул, а у холодной — избыток тяжелых: термодиффузия нарушает однородность смеси и вызывает частичное разделение ее тяжелой и легкой компонент.

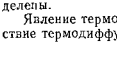


Рис. 44.

Обозначим концентрацию одной из компонент смеси (например, более легкой) через c. Тогда избыток этой концентрации у более нагретой стенки связан с температурами обеих стенок T_2 и T_1 следующим соотношением:

$$\Delta c = \varkappa \ln \frac{T_2}{T_1}, \tag{18.1}$$

где коэффициент $\varkappa$ называется *коэффициентом термодиффузии*.

Существование термодиффузии было сначала предсказано теоретически, а затем и подтверждено экспериментально. Теория этого явления вскрыла следующее интересное обстоятельство. В кинетической теории газов соударения между молекулами газа иногда рассматриваются просто как удар идеально упругих шаров. Однако такое представление заведомо страдает чрезмерной упрощенностью. Гораздо правильнее вместо простых «ударов» рассматривать взаимодействия между молекулами, которые проявляются в отталкивании при их сближении на очень малые расстояния. Закон этого взаимодействия можно представить в виде const/r^{ν}, где r — расстояние и ν — некоторый показатель степени. Оказывается, что для термодиффузии теоретически получаются существенно различные результаты в за-

висимости от величины показателя ν. Так, например, при некоторых значениях ν термодиффузия может изменить свой знак или даже совсем отсутствовать. В частности, последнее имеет место при $\nu = 5$.

Этот результат интересен с исторической точки зрения, так как Максвелл, развивая кинетическую теорию газов, воспользовался гипотезой, согласно которой отталкивание между молекулами подчиняется именно закону const/r^{-5}, и поэтому не обнаружил необходимости термодиффузии.

Из сказанного при описании процесса термодиффузии уже ясно, что это явление можно использовать для разделения изотопов. В случае, когда температурное поле устанавливается в кубическом ящике, противоположные стенки которого поддерживаются при температурах T_2 и T_1, для коэффициента разделения получается следующая простая формула:

$$q = 1 + \frac{2}{3}\,\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

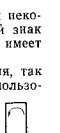


Рис. 45.

Применяя эту формулу к случаю неона ($m_1 = 22$, $m_2 = 20$) и полагая $T_1 = 900°$ и $T_2 = 300°$, получаем

$$Q = 1{,}035.$$

Эта величина того же порядка, что и для одного звена в каскаде Герца, откуда следует, что термодиффузия может быть использована для разделения изотопов. Пользуясь каскадом из z звеньев, получаем, как всегда, полный коэффициент разделения $Q = q^z$.

Для усиления эффекта разделения используется наряду с термодиффузией еще и конвекция. Рассмотрим узкий прямоугольный ящик (рис. 45), стенки которого имеют различную температуру, как показано на рисунке. У более теплой стенки газ будет расширяться и подниматься вверх; у более холодной — опускаться вниз. То же самое можно осуществить, если вместо прямоугольного ящика воспользоваться цилиндром радиуса R_a, внутри которого коаксиально помещен другой цилиндр радиуса R_i, нагретый до более высокой температуры (проволока, нагреваемая электрическим током, рис. 46).

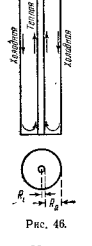


Рис. 46.

Итак, в результате *конвекции* создаются два потока, идущие в противоположных направлениях. Если в ящике или в трубке имеется смесь двух газов различного молекулярного

веса, то термодиффузия вызывает, кроме того, поток, направленный перпендикулярно к конвекционному так, чтобы концентрация более легких молекул у нагретой стенки была больше, нежели у холодной. Совместное действие обоих эффектов приводит к тому, что между верхом и низом возникает значительная разность концентраций.

Разберем это явление несколько подробнее. Представим себе вновь прямоугольный ящик (рис. 47), противоположные стенки которого поддерживаются при различных температурах ($T_2 > T_1$). Расположение осей координат возьмем такое, как показано на рис. 47, и будем рассматривать сначала только поток, обусловленный термодиффузией и обыкновенной диффузией. Если в ящике находится смесь двух газов различного молекулярного веса и если c, как и раньше, будет концентрацией более легкой компоненты, то термодиффузия вызовет перенос вещества, причем количество переносимого вещества будет пропорционально $\frac{\partial \ln T}{\partial x}$ [см. формулу (18.1)]. Сила термодиффузионного тока, т. е. количество вещества, переносимого в единицу времени через площадь, перпендикулярную к потоку, будет равна

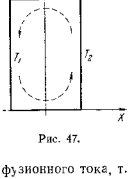


Рис. 47.

$$\rho D \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}, \tag{18.2}$$

где ρ — плотность газа и D — коэффициент диффузии. В результате термодиффузии между нагретой и холодной стенками возникает разность концентраций тяжелой и легкой компонент. Эта разность концентраций вызовет появление направленного в обратную сторону тока обыкновенной диффузии, стремящейся выравнять концентрации во всей массе газа. Сила этого последнего тока, очевидно, равна

$$-\rho D \frac{\partial c}{\partial x}. \tag{18.3}$$

Полную силу тока J получим, учитывая оба процесса, т. е. пользуясь формулами (18.2) и (18.3):

$$J = \rho D \left(\varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial x} \right). \tag{18.4}$$

В установившемся состоянии полная сила тока, обусловленного термодиффузией и диффузией, равна нулю, и мы получаем из (18.4)

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial \ln T}{\partial x}. \tag{18.5}$$

Итак, совместное действие термодиффузии и обыкновенной диффузии при наличии градиента температуры между стенками вызывает появление *градиента концентрации* компонент смеси. Пусть теперь в ящике каким-либо образом вызвана циркуляция газа в направлении, показанном на рис. 47 стрелками. При этом количество газа, поднимающегося вверх у правой стенки, будет равно количеству газа, опускающегося вниз у левой стенки. Ввиду этого полный поток *вещества* через любое горизонтальное сечение будет равен нулю.

Однако поток различных *компонент* смеси газов будет *отличен от нуля*, так как согласно формуле (18.5) вследствие термодиффузии в стационарном состоянии должен существовать градиент концентрации легкой компоненты, направленный в сторону нагретой стенки. Поэтому циркуляция поднимает вверх большее количество легкой компоненты у нагретой стенки, нежели опускает вниз у холодной стенки. Это ведет к тому, что постепенно устанавливается *вертикальный* градиент концентрации, причем вверху получается избыток легкой компоненты, а внизу — избыток тяжелой.

Ценность описанного метода состоит в том, что циркуляция газа, значение которой выяснено изложенными соображениями, устанавливается сама собой под действием силы тяжести. Разумеется, все сказанное до сих пор о смеси газов с различными молекулярными весами целиком относится и к смеси изотопов с различными массами.

На рис. 48 показано устройство трубки, применявшейся для разделения изотопов хлора. Трубка действует по принципу цилиндрической разделительной ячейки, поясняемому рис. 46. Внутренним цилиндром служит нагреваемая током платиновая проволока толщиной 0,4 *мм*; диаметр внешней трубки равен 8,4 *мм*. Всего для разделения изотопов хлора было использовано 5 соединенных каскадом трубок. Длина их была 7 *м*, 8 *м*, 2 трубки по 6 *м* и одна в 9 *м*. Общая длина трубок составляет, таким образом, 36 *м*. Для разделения был использован хлористый водород, представляющий собой смесь молекул HCl^{35} и HCl^{37}. При этом на тяжелом конце получалось ежедневно 8 *см*³ HCl с содержанием 99,4% Cl^{37}, а на легком — 25 *см*³ HCl с содержанием

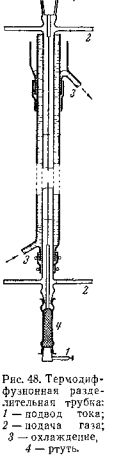


Рис. 48. Термодиффузионная разделительная трубка: 1 — подвод тока; 2 — подача газа; 3 — охлаждение; 4 — ртуть.

96,6% Cl^{35}. Впоследствии удалось получить HCl с содержанием в 99,6% Cl^{35} при общей длине труб в 20 *м*.

Тот же метод был применен к разделению изотопов неона, причем удалось получить несколько литров чистого Ne^{20}. Было достигнуто также обогащение углерода тяжелой компонентой C^{13} до 6,6% (нормальный состав углерода $C^{12}:C^{13}=99{,}1$) с выходом в несколько *мг* продукта в день.

Метод термодиффузии оказался также пригодным для разделения жидких смесей изотопов. Так, например, был подвергнут термодиффузии раствор $ZnSO_4$, причем раствор помещался между двумя пластинками длиной в 90 *см*, расположенными на расстоянии 0,025 *см*; между пластинками поддерживалась разность температур в 50°. Нормально отношение содержаний изотопов цинка 64 и 68 равно 2,93; после термодиффузии на тяжелом конце оказалось $Zn^{64}:Zn^{68}=2{,}7$, на легком $Zn^{64}:Zn^{68}=3{,}2$.

Процесс установления равновесия в случае жидких систем идет медленно, но для разделения требуются колонки меньшей длины, нежели в случае газов.

Несмотря на крайнюю простоту описанного устройства, оно оказалось чрезвычайно эффективным для разделения изотопов. Для сравнения этого метода с диффузионным методом были произведены опыты с разделением изотопов тяжелого газа ксенона при помощи разделительной трубки длиной в 2,5 *м* и диаметром в 5 *мм* с центральной проволокой, нагревавшейся до 1200—1750° C, и одновременно при помощи каскада из 12 диффузионных ячеек. Оказалось, что эффективность трубки длиною в 1 *м* такая же, как у 12 диффузионных ячеек.

§ 19. Разделение изотопов с помощью электромагнитных методов

Весьма эффективным средством для разделения изотопов являются электромагнитные методы. В самом деле, каждый масс-спектрограф или, в особенности, масс-спектрометр в сущности является прибором для полного разделения изотопов. Если представить себе на рис. 34 в местах, соответствующих положениям фокусов для нужных масс, щели, за которыми расположены приемники, то в этих приемниках будут собираться чистые изотопы.

Вследствие малой силы ионного тока количество вещества, которое может быть собрано таким приемником, ничтожно: в обычных масс-спектрометрах скорость накопления вещества — порядка тысячных долей микрограмма (10^{-9} *г*) в час.

Таким образом, метод масс-спектрографа является идеальным в тех случаях, когда достаточно получать очень малые количества разделенных изотопов, но для получения больших количеств при помощи этого метода встречается два главных затруднения. Во-первых, поскольку вещество в масс-спектрографе переносится ионным током, для получения больших количеств изотопов токи должны быть очень сильными. Это выдвигает проблему построения мощного источника ионов. Во-вторых, даже в том случае, когда имеется достаточно мощный источник ионов, увеличение силы тока выше некоторого предельного значения оказывается нецелесообразным, так как пространственный заряд, возникающий при сильном ионном токе, резко понижает разрешающую способность масс-спектрографа, и увеличение силы тока не дает выигрыша в скорости накопления разделенных изотопов.

Разберем этот вопрос несколько подробнее. Пусть мы имеем поток, состоящий из ионов двух изотопов с массами (в граммах) M_1 и M_2. Однородное поперечное магнитное поле, как мы знаем (§ 15), будет фокусировать каждый из изотопов в своем фокусе, причем положение этого фокуса определяется радиусом кривизны круговой траектории, описываемой ионом данного сорта. Для вычисления этого радиуса кривизны мы пользовались в § 15 формулой (4.9), вытекающей из условия равенства между лоренцевой силой $\mathscr{H}ev$ и центробежной силой инерции mv^2/ρ:

$$\frac{mv^2}{\rho}=\mathscr{H}ev. \quad (19.1)$$

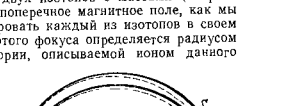


Рис. 49. Пути ионов двух изотопов с мало различающимися массами в электромагнитном сепараторе.

Посмотрим теперь, какое влияние на остроту фокуса оказывает пространственный заряд. На рис. 49 воспроизведены сплошными и пунктирными линиями пути ионов с мало различающимися массами в поперечном однородном магнитном поле. Для упрощения расчетов мы предположим, что протяжение ионных пучков в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, очень велико. Если полная сила ионного тока на единицу длины перпендикулярно к плоскости чертежа равна J, то количество электричества, приходящееся на единицу длины перпендикулярно к плоскости чертежа, будет, очевидно, J/v, где v — скорость ионов. Создаваемый таким путем пространственный заряд в свою очередь действует на ионы.

Рассмотрим теперь два крайних пути ионов в каждом из пучков. Предполагая, что изменение кривизны пути невелико при

переходе от одного пучка к другому, получим, применяя теорему Гаусса — Остроградского, следующее выражение для силы, действующей на ионы на том и другом пути со стороны пространственного заряда:

$$F = 2\pi \frac{J}{v} e, \tag{19.2}$$

где e — заряд иона. Эта сила всегда будет направлена наружу по отношению к пучку, т. е. на ион, движущийся по верхнему пути, будет действовать сила, направленная от центра траектории (окружности), а на ион, движущийся по нижнему пути, — к центру. Именно поэтому пространственный заряд будет размывать фокус, получаемый в его отсутствии. Для вычисления ширины пучка в фокусе нужно вместо соотношения (19.1) написать условие равенства между центробежной силой инерции и силой Лоренца *плюс сила, действующая со стороны пространственного заряда*. Принимая во внимание сказанное относительно направления этой силы, получим следующие уравнения для ионов, движущихся по крайним траекториям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Mv^2}{\rho_1} &= \mathscr{H}ev + 2\pi \frac{Je}{v}, \\ \frac{Mv^2}{\rho_2} &= \mathscr{H}ev - 2\pi \frac{Je}{v}, \end{aligned}\right\} \tag{19.3}$$

откуда получаем

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{4\pi Je}{Mv^3}.$$

Обозначая через ρ радиус пути в отсутствии пространственного заряда и полагая $\rho_1\rho_2 \approx \rho^2$, получим для ширины пучка на расстоянии 180°

$$\Delta s = 2(\rho_2 - \rho_1) = \frac{8\pi e}{M} \frac{J\rho^2}{v^3}. \tag{19.4}$$

Так как разница масс рассматриваемых двух изотопов мала, то соответствующие им фокусы у B (рис. 49) лежат очень близко друг к другу. Поэтому можно считать, что пути их ионов почти на всем протяжении совпадают, а потому и считать также, что ширина пучков около B для обоих сортов ионов будет одинакова и равна Δs.

В отсутствии пространственного заряда расстояние между фокусами ионов с массами M_1 и M_2 будет

$$\Delta x = \frac{|M_2 - M_1|}{M_1} \rho. \tag{19.5}$$

Очевидно, что эффективность устройства для получения чистых изотопов определяется соотношением между Δx и Δs. Можно

показать, что наиболее благоприятные условия будут в том случае, если $\Delta x = \Delta s$. В самом деле, для увеличения скорости накопления вещества естественно повышать силу тока J. Но и ширина фокуса Δs будет одновременно увеличиваться пропорционально J. Если Δs станет больше Δx, то скорость накопления *чистых* изотопов на единицу ширины пучка в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, будет пропорциональна $\frac{\Delta x}{\Delta s} J$. Так как ширина Δs, в свою очередь, пропорциональна J, то, очевидно, мы ничего не выиграем, увеличивая J так, чтобы Δs стала больше Δx. Из условия $\Delta x = \Delta s$ при помощи (19.4) и (19.5) получаем

$$J = \frac{M_1 v^3}{8\pi e\rho} \frac{|M_2 - M_1|}{M_1}. \tag{19.6}$$

Воспользовавшись теперь соотношениями $M_1 v^2/\rho = \mathscr{H}ev/e$ (e — в электростатических единицах) и $M_1 v^2/2 = eV$, где V — ускоряющий потенциал ионов, после некоторых преобразований получим для количества накопляемого вещества

$$\mu \left[\frac{мг}{час}\right] = 3{,}19 \cdot 10^{-8} \eta \frac{|A_2 - A_1|}{A_1} V\mathscr{H}, \tag{19.7}$$

где η — отношение концентраций изотопов в веществе, A_2 и A_1 — округленные до целых чисел их атомные массы; V — в вольтах и $\mathscr{H}$ — в эрстедах. Выбрав для примера случай разделения изотопов кальция Ca^{44} и Ca^{40}, где $\eta = 1/20$, получим даже при очень высоких значениях V и $\mathscr{H}$, например при $V = 50\,000$ *в*, $\mathscr{H} = 15\,000$ *эрстед*

$$\mu = 0{,}12 \frac{мг}{час},$$

а соответствующая полная сила тока оказывается равной всего 1,6 *ма* на *см*; дальнейшее ее повышение, по сказанному, нецелесообразно. Из этого следует, что метод масс-спектрографа для получения чистых изотопов в больших количествах может стать практически пригодным лишь при условии нейтрализации пространственного заряда, до крайности снижающего эффективность этого метода.

Возможность нейтрализации пространственного заряда, однако, имеется. Представим себе, что внутрь ионного пучка введено некоторое количество электронов. Легко видеть, что эти электроны будут оставаться внутри пучка и своим отрицательным зарядом нейтрализовать часть положительного заряда ионов. В самом деле, пространственный заряд, как уже указывалось, создает поле, направленное наружу по отношению к ионному пучку. Поэтому на отрицательные электроны будет

действовать сила, направленная внутрь пучка, которая не позволит электронам покидать пучок в поперечном направлении. Электроны могут двигаться только вдоль оси пучка. Однако потенциалы электродов могут быть выбраны так, чтобы не позволять электронам уходить и в этом направлении. Так как, кроме

Рис. 50. Путь электронов внутри ионного пучка (F — сила, действующая на электрон).

того, имеется еще поперечное магнитное поле, то электроны будут двигаться по замкнутым циклоидообразным траекториям, как показано на рис. 50, и при этом будут весьма эффективно компенсировать пространственный заряд ионов.

§ 20. Разделение изотопов с помощью методов фракционированной перегонки и обменных реакций

Разделение смесей двух жидкостей путем фракционированной перегонки — процесс, давно известный и широко применяемый в лабораторной и заводской практике. При перегонке в первую очередь дистиллируется та жидкость, у которой температура кипения ниже (упругость пара выше); поэтому дистиллят будет обогащаться более легко кипящей жидкостью, а остаток — жидкостью с меньшей упругостью пара. Повторяя эту операцию несколько раз, можно разделить обе жидкости.

Упругость пара изотопов зависит от их массы, поэтому метод фракционированной перегонки в принципе применим для разделения изотопов. Однако различие в упругости пара в данном случае настолько мало, что применение этого метода обычным способом совершенно нецелесообразно. На практике лучшие результаты дает «метод противотока», который состоит в том, что в разделительной колонке идут навстречу друг другу: снизу вверх — пар, а сверху вниз — жидкость; при этом принимаются меры к тому, чтобы поверхность соприкосновения жидкости и пара была возможно большей. При обмене молекулами между жидкостью и паром молекулы жидкости, имеющей большую упругость пара, обнаруживают бо́льшую тенденцию концентрироваться в газовой фазе. Метод этот применим только

к тем изотопам, которые обладают не слишком малой разницей в температурах кипения.

По существу близок к методу фракционирования, но значительно эффективнее, метод обменных реакций, который состоит в следующем. Рассмотрим двухфазную систему: жидкость и над ней газ. Пусть, например, это будет газообразный аммиак NH_3 и раствор аммиака в воде или в алкоголе или, наконец, раствор азотнокислого аммония NH_4NO_3 (диссоциированный в растворе на NH_4^+ и NO_3^-). В таком случае будет происходить обменная реакция: азот газообразного аммиака будет меняться местами с азотом аммиака в растворе. Эта реакция может идти в ту и другую сторону и дает равновесие. Если меняются местами изотопы одинаковой массы, то реакцию вообще никак обнаружить нельзя. Но может случиться, что N^{14} будет становиться на место N^{15} или наоборот, так что реакция будет идти по уравнению

$$N^{15}H_3\ (\text{газ}) + N^{14}H_3\ (\text{раствор}) \rightleftarrows N^{14}H_3\ (\text{газ}) + N^{15}H_3\ (\text{раствор}).$$

Теория и опыт показывают, что в этом случае легкий изотоп будет иметь тенденцию концентрироваться в газовой фазе, а тяжелый — в жидкой. Это скажется в том, что константа равновесия реакции, определяемая по закону действующих масс

$$K = \frac{[N^{14}H_3]\ \text{газ}\ [N^{15}H_3]\ \text{раствор}}{[N^{15}H_3]\ \text{газ}\ [N^{14}H_3]\ \text{раствор}},$$

будет отличаться от единицы, тогда как в случае обмена атомами одинаковой массы она должна быть в точности равна 1. В случае равновесия аммиака $K = 1{,}033$. Легко видеть, что это и будет коэффициентом разделения данного процесса. В самом деле, K может быть записано в виде

$$K = \frac{\dfrac{[N^{15}H_3]}{[N^{14}H_3]}\ \text{раствор}}{\dfrac{[N^{15}H_3]}{[N^{14}H_3]}\ \text{газ}},$$

т. е. по определению $K = q$, а поскольку $K > 1$, это и означает, что тяжелый изотоп будет иметь тенденцию концентрироваться в жидкой фазе.

Существуют и другие обменные реакции, пригодные для разделения изотопов, например

$$S^{34}O_2\ (\text{газ}) + HS^{32}O_3\ (\text{раствор}) \rightleftarrows S^{32}O_2\ (\text{газ}) + HS^{34}O_3\ (\text{раствор});$$

для этой реакции $q = K = 1{,}012$.

Как и в случае газовой диффузии, коэффициент разделения очень мал, однако и тут он может быть значительно повышен путем использования каскада: если каскад состоит из z звеньев,

то полный коэффициент разделения, как и в случае диффузии, будет $Q = q^z$.

В колонке, использовавшейся для концентрирования изотопов кислорода O^{18} и азота N^{15}, было 621 звено. Вся колонка представляла собой стальную трубу с внутренним диаметром в 15 *м* и высотой 10,7 *м*. Был использован метод противотока — жидкость падала вниз, а пар направлялся вверх.

Оказалось, что этот метод может давать концентраты изотопов C^{13}, N^{15}, O^{18}, S^{34} в количестве порядка одного грамма в сутки.

§ 21. Разделение изотопов методом центрифугирования

Для разделения изотопов можно воспользоваться тем фактом, что сила тяготения пропорциональна массе. Поэтому в газе, являющемся смесью изотопов, при равновесии концентрация атомов с большей массой будет относительно большей внизу. Правда, напряженность земного поля тяготения слишком мала для того, чтобы можно было как-нибудь практически использовать это различие. Однако можно воспользоваться искусственными полями, в которых напряженность в сотни тысяч раз больше, нежели в земном гравитационном поле. Так как центробежные силы, как и силы тяготения, пропорциональны массе, то искомые искусственные или псевдогравитационные поля осуществляются в центрифуге.

Найдем распределение частиц в центрифуге на различных расстояниях от оси. Пусть ρ будет плотность газа, r — расстояние от оси, ω — угловая скорость вращения. Рассчитаем давление на расстоянии r от оси. Центробежное ускорение равно $r\omega^2$, а масса слоя газа сечением в 1 $см^2$ и толщиной dr будет $\rho\, dr$. Поэтому давление слоя с радиусами r и $r + dr$ будет

$$dp = \rho\, dr \cdot r\omega^2. \tag{21.1}$$

С другой стороны, по законам идеальных газов

$$p = \frac{RT}{M}\rho, \tag{21.2}$$

где M — молекулярный (атомный) вес. Из (21.1) и (21.2) получаем

$$\frac{dp}{p} = \frac{M\omega^2}{RT} r\, dr,$$

или, интегрируя,

$$p = p_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}},$$

а так как, с другой стороны, давление пропорционально числу частиц в 1 $см^3$, то для распределения числа частиц на различных расстояниях получаем

$$n = n_0 e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}}. \tag{21.3}$$

Предположим теперь, что наш газ является смесью частиц легких M_L, n_L и тяжелых M_S, n_S. При равновесии соотношение (21.3) будет иметь место для частиц каждого сорта, а потому на расстоянии r от оси отношение чисел частиц будет

$$\frac{n_L}{n_S} = \left(\frac{n_L}{n_S}\right)_0 e^{\frac{(M_L - M_S)\omega^2 r^2}{2RT}}, \tag{21.4}$$

где $(n_L)_0$ и $(n_S)_0$ — числа частиц того и другого сорта на оси. Коэффициентом разделения будет служить отношение чисел n_S/n_L на границе поля ($r = r_0$) и на оси ($r = 0$), т. е.

$$q = \frac{(n_S/n_L)}{(n_S/n_L)_0} = e^{\frac{(M_S - M_L)\omega^2 r_0^2}{2RT}}. \tag{21.5}$$

Замечательно, что в отличие от других методов, где коэффициент разделения зависит в той или иной форме от *отношения* масс $\left(\text{например, в методе диффузии — от } \sqrt{\frac{M_S}{M_L}}\right)$, в данном случае он определяется *разностью* масс $M_S - M_L$. Это является большим преимуществом метода центрифугирования. Во-первых, коэффициент разделения, очевидно, будет одинаков вне зависимости от того, в какое соединение входят изучаемые изотопы, ввиду чего всегда можно подобрать такое соединение, работа с которым всего удобнее. Во-вторых, в случае тяжелых элементов это свойство благоприятно сказывается и на величине коэффициента разделения. Например, при разделении изотопов урана газообразным соединением является шестифтористый уран UF_6; квадратный корень из отношения молекулярных весов $U^{238}F_6$ и $U^{235}F_6$ равен $\sqrt{\frac{352}{349}} = 1{,}0043$, в то время как для метода центрифугирования в случае, когда разность $M_S - M_L = 3$ при линейной скорости на периферии центрифуги в $5 \cdot 10^4$ *см/сек* и при температуре 300° К, коэффициент разделения равен 1,16.

Далее, как видно из формулы (21.5), q сильно зависит от температуры и возрастает при понижении температуры.

Например, при $v = 5 \cdot 10^4$ *см/сек* и $M_B - M_L = 3$, q имеет следующие значения при разных температурах:

T, °C	300	200	90	20
q	1,16	1,25	1,65	9,68

Бимс построил быстроходные центрифуги специально для разделения изотопов. Центрифуга представляет собой цилиндр из хромомолибденовой стали; внешний диаметр цилиндра 10 *см*, толщина стенок 12 *мм*. Цилиндр приводится во вращение сжатым воздухом. Максимальная скорость вращения, допускаемая прочностью материала, соответствует линейной скорости $v = 8 \cdot 10^4$ *см/сек*.

Эффективность центрифуги для разделения изотопов может быть повышена путем комбинирования ее псевдогравитационного поля с диффузией. С этой целью поток пара направляется во внешней части цилиндра вниз, а в аксиальной — вверх. На границе между двумя потоками происходит непрерывная диффузия молекул из одного потока в другой. Центробежное поле усиливает переход более тяжелых молекул по направлению к периферии. Поэтому концентрация тяжелого изотопа на периферии будет больше, чем в центре. Для легкого изотопа имеет место обратная картина.

Упражнение. Рассчитать коэффициенты разделения для центрифуги при следующих условиях: линейная скорость $v = 5 \cdot 10^4$ *см/сек*; разности масс изотопов $M_B - M_L = 1, 2, 3, 4$. Температуры 300, 200, 90 °C (для разности $M_B - M_L = 3$ проверить цифры, приведенные в тексте).

§ 22. Получение тяжелого изотопа водорода (дейтерия) и тяжелой воды

Тяжелый изотоп водорода — дейтерий (D) — играет такую большую роль в современной физике и химии, что на его получении следует остановиться отдельно. Особое значение тяжелого изотопа водорода связано, между прочим, с тем, что он является единственным изотопом, масса которого отличается от массы основного изотопа на 100%, ввиду чего эти две разновидности водорода в различных химических и физических процессах ведут себя существенно неодинаковым образом.

В обычном водороде, встречающемся в природе, процентное содержание тяжелого водорода составляет всего 0,02%. В концентрированном виде дейтерий получается в виде *тяжелой воды*. Так как не только водород, но и кислород имеет изотопы (O^{16}, O^{17}, O^{18}), то среди молекул воды встречаются различные комбинации изотопов, например D_2O^{16}, HDO^{16}, H_2O^{18} D_2O^{18} и т. д. Однако под именем тяжелой воды разумеют воду, молекулы которой имеют состав D_2O^{16}. Физические свойства тяжелой воды отличаются от свойств обыкновенной, или легкой, воды, как это видно из таблицы V.

Таблица V

Некоторые физические свойства тяжелой (D_2O) и легкой (H_2O) воды

Свойства	D_2O	H_2O
Плотность d_4^{20}	1,1059	0,9982
Температура замерзания	3,82° C	0,00° C
Температура кипения	101,42° C	100,00° C
Максимум плотности при	11,60° C	4,00° C
Вязкость 10^3 CGC	12,60	10,09
Поверхностное натяжение в *дин/см*	67,8	72,75
Показатель преломления n_D^{20}	1,32844	1,33300

Вскоре после открытия тяжелого водорода было обнаружено, что при электролизе водных растворов вода обогащается дейтерием, тогда как освобождаемый газообразный водород обогащается легким изотопом. На этом был основан метод получения практически чистой тяжелой воды (с содержанием D_2O в 99,9%) путем электролиза.

В настоящее время тяжелая вода изготовляется в больших количествах заводским способом, причем используется комбинированный процесс электролиза и обменной реакции (см. § 20). Если обменная реакция, при которой водород воды обменивается на дейтерий из газообразного водорода, ведется в присутствии катализатора, то при равновесии концентрация дейтерия в воде примерно в три раза больше, нежели в газовой фазе.

Схема процесса получения тяжелой воды такова: вода подается на верх колонки и стекает вниз навстречу поднимающемуся пару, смешанному с водородом. В присутствии катализатора между водородом и паром происходит обменная реакция, при которой часть дейтерия концентрируется в паре и затем переходит в воду. Внизу колонки вода разлагается электрическим током, причем в неразложившейся воде происходит дальнейшая концентрация дейтерия, а водород вместе с паром поднимается вверх навстречу потоку воды. Подобного рода колонки располагаются каскадом. Получение тяжелой воды связано с потреблением больших количеств электричества, ввиду чего заводы для получения тяжелой воды располагаются в местах, где имеется дешевая электроэнергия (гидроэлектрические установки).

В заключение мы приводим таблицу стабильных изотопов с указанием их распространенности (табл. VI).

Таблица VI

Стабильные изотопы и их распространенность

Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %	Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %
H	1	1	99,986	Ca	20	40	96,92
D		2	0,014			42	0,64
T		3				43	0,129
He	2	3	$1,3 \cdot 10^{-4}$			44	2,13
		4	100			46	0,003
Li	3	6	7,30			48	0,178
		7	92,70	Sc	21	45	100
Be	4	9	100	Ti	22	46	7,95
B	5	10	18,83			47	7,75
		11	81,17			48	73,45
C	6	12	98,892			49	5,51
		13	1,108			50	5,34
		14	10^{-10}	V	23	51	0,23
N	7	14	99,635			51	99,77
		15	0,365	Cr	24	50	4,312
O	8	16	99,759			52	83,76
		17	0,0374			53	9,55
		18	0,2036			54	2,38
F	9	19	100	Mn	25	55	100
Ne	10	20	90,92	Fe	26	54	5,81
		21	0,257			56	91,64
		22	9,823			57	2,2
Na	11	23	100			58	0,34
Mg	12	24	78,98	Co	27	59	100
		25	10,05	Ni	28	58	67,77
		26	10,97			60	26,16
Al	13	27	100			61	1,25
Si	14	28	92,18			62	3,66
		29	4,71			64	1,16
		30	3,12	Cu	29	63	68,94
P	15	31	100			65	31,06
S	16	32	95,018	Zn	30	64	48,89
		33	0,750			66	27,81
		34	4,215			67	4,07
		36	0,017			68	18,61
Cl	17	35	75,40			70	0,62
		37	24,60	Ga	31	69	60,16
Ar(A)	18	36	0,337			71	39,84
		38	0,063	Ge	32	70	20,52
		40	99,600			72	27,43
K	19	39	93,800			73	7,76
		40	0,0119			74	35,54
		41	6,9081			76	7,76

Продолжение

Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %	Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %
As	33	75	100	Pd	46	102	0,80
Se	34	74	0,87			104	9,30
		76	9,02			105	22,60
		77	7,58			106	27,10
		78	23,52			108	26,70
		80	49,82			110	13,50
		82	9,19	Ag	47	107	51,92
Br	35	79	50,53			109	48,08
		81	49,47	Cd	48	106	1,215
Kr	36	78	0,354			108	0,875
		80	2,266			110	12,39
		82	11,56			111	12,75
		83	11,55			112	24,07
		84	56,90			113	12,26
		86	17,37			114	28,86
Rb	37	85	72,20			116	7,78
		87	27,80	In	49	113	4,23
Sr	38	84	0,55			115	95,77
		86	9,75	Sn	50	112	0,94
		87	6,96			114	0,65
		88	82,74			115	0,33
Y	39	89	100			116	14,36
Zn	40	90	51,46			117	7,51
		91	11,23			118	24,21
		92	17,11			119	8,45
		94	17,40			120	33,11
		96	2,80			122	4,51
Nb	41	93	100			124	5,83
Mo	42	92	15,84	Sb	51	121	57,25
		94	9,04			123	42,75
		95	15,72	Te	52	120	0,09
		96	16,53			122	2,43
		97	9,46			123	0,85
		98	23,78			124	4,59
		100	9,63			125	6,98
Te	43	99	—			126	18,70
Ru	44	96	5,68			128	31,85
		98	2,22			130	34,58
		99	12,81	I	53	127	100
		100	12,70	Xe	54	124	0,096
		101	16,98			126	0,020
		102	31,4			128	1,919
		104	18,27			129	26,44
Rh	45	103	100			130	4,075
						131	21,13
						132	26,89
						134	10,44
						136	8,87

Продолжение

Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %
Cs	55	133	100
Ba	56	130	0,102
		132	0,98
		134	2,42
		135	6,59
		136	7,81
		137	11,32
		138	71,66
La	57	138	0,089
		139	99,911
Ce	58	136	0,19
		138	0,25
		140	88,49
		142	11,07
Pr	59	141	100
Nd	60	142	26,80
		143	12,12
		144	23,91
		145	8,35
		146	17,35
		148	5,78
		150	5,69
Pm	61	141	—
Sm	62	144	2,95
		147	14,62
		148	10,97
		149	13,56
		150	7,27
		152	27,34
		154	23,29
Eu	63	151	47,77
		153	52,23
Gd	64	152	0,2
		154	2,16
		155	14,68
		156	20,36
		157	15,64
		158	24,95
		160	22,11
Tb	65	159	100
Dy	66	156	0,0525
		158	0,0905
		160	2,297
		161	18,88
		162	25,53
		163	24,97
		164	28,18
Ho	67	165	100
Er	68	162	0,154
		164	1,606
		166	33,36
		167	22,82
		168	27,02
		170	15,04
Tm	69	169	100
Yb	70	168	0,13
		170	3,03
		171	14,27
		172	21,77
		173	16,08
		174	31,92
		176	12,80
Lu	71	175	97,40
		176	2,60
Hf	72	174	0,199
		176	5,23
		177	18,56
		178	27,23
		179	13,73
		180	35,07
Ta	73	180	0,0123
		181	99,988
W	74	180	0,16
		182	26,35
		183	14,32
		184	30,63
		186	28,49
Re	75	185	37,07
		187	69,93
Os	76	184	0,018
		186	1,582
		187	1,64
		188	13,27
		189	16,14
		190	26,38
		192	40,97
Ir	77	191	38,5
		193	61,5
Pt	78	190	0,012
		192	0,8
		194	30,2
		195	35,2
		196	26,6
		198	7,2
Au	79	197	100

Продолжение

Символ	Атомный номер	Массовое число	Относительная распространенность, %
Hg	80	196	0,15
		198	10,12
		199	17,04
		200	23,25
		201	13,18
		202	29,54
		204	6,72
Tl	81	203	29,46
		205	70,54
Pb	82	204	1,54
		206	22,62
		207	22,62
		208	53,22
Bi	83	209	100
Po	84	210	—
At	85	210	—
Rn	86	222	—
Fr	87	223	—
Ra	88	226	—
Ac	89	227	—
Th	90	232	100
Pa	91	231	100
U	92	234	0,006
		235	0,720
		238	99,274

ЯДЕРНОЕ СТРОЕНИЕ АТОМА

§ 23. Эффективное сечение для рассеяния частиц

До сих пор мы рассматривали атом как целое. Теперь мы сопоставим те факты, на которых основаны современные представления об атоме как о системе, состоящей из тяжелого ядра и окружающих его электронов.

Один из лучших способов исследования структуры атома заключается в «зондировании» его быстрыми частицами — электронами больших скоростей или α-частицами радиоактивных веществ. Процессы, которые происходят при прохождении потока быстрых частиц через вещество, вообще говоря, разнообразны и сложны. Нас будут интересовать в этом и в ближайших следующих параграфах только явления рассеяния частиц, т. е. явления, обусловленные отклонением частиц от их первоначального пути. Рассмотрение этих явлений позволит нам судить о степени заполнения веществом пространства, занятого атомом, и о распределении в нем положительного и отрицательного электричества. Однако прежде всего мы рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с рассеянием частиц.

Рассмотрим частицу, движущуюся среди неподвижных хаотически распределенных шаров, с которыми она может испытывать соударения. Соударение движущейся частицы с каким либо шаром есть явление случайное. Очевидно, однако, что вероятность пройти расстояние x, *не испытав соударения*, есть какая-то функция этого расстояния $f(x)$. С другой стороны, мы можем считать, что вероятность *испытать* соударение на бесконечно малом отрезке dx пропорциональна dx, т. е. равна $a\,dx$, а вероятность пройти без соударения этот отрезок равна поэтому $1 - a\,dx$. Вероятность пройти без соударения расстояние $x + dx$ мы можем теперь выразить двумя способами: с одной стороны, это есть функция $f(x + dx)$; с другой стороны, можно рассматривать прохождение отрезка длины $x + dx$ как событие сложное, состоящее из двух этапов: прохождения расстояния x и дальнейшего расстояния от x до $x + dx$. Вероятность такого сложного события равна произведению вероятностей обоих событий, т. е. равна $f(x)\,(1 - a\,dx)$. Мы имеем, таким образом,

$$f(x + dx) = f(x)\,(1 - a\,dx),$$

или с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$f(x) + \frac{df(x)}{dx}\,dx = f(x) - af(x)\,dx,$$

откуда после небольших преобразований

$$df/f = -a\,dx,$$

или, интегрируя,

$$f = ce^{-ax}.$$

Постоянную интегрирования найдем из очевидного условия, что вероятность пройти без соударения путь $x = 0$ есть достоверность, т. е. 1. Это дает $c = 1$ и окончательно

$$f(x) = e^{-ax}. \tag{23.1}$$

Итак, вероятность пройти какой-либо слой вещества без соударения убывает экспоненциально с увеличением толщины слоя.

Выясним теперь физический смысл постоянной a. Заметим прежде всего, что эта величина имеет размерность обратной длины, так как показатель степени ax должен быть безразмерной величиной. Для установления физического смысла a мы вычислим среднюю длину свободного пробега частицы, пользуясь формулой (23.1). Частицы, которые испытывают соударение на отрезке между x и $x + dx$, прошли без соударения отрезок x. Вероятность пройти без соударения путь x есть по предыдущему e^{-ax}, а вероятность испытать соударение между x и $x + dx$ есть $a\,dx$. Поэтому вероятность того, что длина свободного пути есть x, равна произведению

$$ae^{-ax}\,dx.$$

Средняя длина свободного пути λ по формуле для средних значений *) равна

$$\lambda = \bar{x} = \int_0^\infty xae^{-ax}\,dx = a\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx. \tag{23.2}$$

Интегрированием по частям найдем

$$\lambda = a\left[\left(-\frac{1}{a}xe^{-ax}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx\right] = \frac{1}{a}.$$

Таким образом, постоянную a мы можем истолковать как обратную величину средней длины свободного пути

$$a = 1/\lambda \tag{23.3}$$

*) См. приложение I в конце книги.

и формулу (23.1) переписать в виде

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\lambda}}. \tag{23.4}$$

Мы можем дать постоянной a еще одно, особенно интересное для нас сейчас, истолкование. Размерность a, как мы знаем, есть $см^{-1}$; можно ее представить еще и так:

$$[a] = см^2/см^3 \equiv см^{-1}.$$

Пусть число неподвижных рассеивающих частиц в единице объема будет n. Заменим каждую рассеивающую частицу мишенью в виде кружка радиусом r_0 и площадью σ, выбранной таким образом, что каждая движущаяся частица, которая пройдет внутри этой мишени, испытает отклонение («соударение»). Легко видеть, что размерность $n\sigma$ равна $см^{-1}$

$$[n\sigma] = \frac{1}{см^3} \cdot см^2 = см^{-1}.$$

Площадь σ называется «эффективным сечением» для рассеяния и, соответственно, r_0 — радиусом эффективного сечения. Произведение $n\sigma$ называется макроскопическим сечением; оно представляет собой сумму эффективных сечений в единице объема. Ввиду того, что размерность a совпадает с размерностью $n\sigma$, мы можем истолковать a так же, как сумму эффективных сечений в единице объема и представить в виде $n\sigma$.

Статистический смысл эффективного сечения можно пояснить следующим образом. Пусть плотность потока рассеивающихся частиц N_0 равна 1, т. е. пусть через 1 $см^2$ в 1 $сек$ проходит 1 частица. Число рассеивающих центров в единице объема, n, пусть также равно 1. Тогда вероятность испытать рассеяние можно выразить как отношение площади эффективного сечения σ к сечению «потока», т. е. к 1 $см^2$. Итак, σ есть вероятность испытать рассеяние при прохождении слоя толщиной в 1 $см$, содержащего одну частицу, а $n\sigma$ — вероятность испытать рассеяние, если плотность частиц в слое равна n.

Рассмотрим теперь ослабление потока частиц при прохождении сквозь слой любой толщины, имея в виду, что каждая частица, испытавшая «соударение» (т. е. прошедшая внутри кружка радиусом, равным эффективному сечению σ), выйдет из параллельного потока и не будет зарегистрирована приемным устройством. Разобьем весь слой на бесконечно тонкие слои dx. Число рассеивающих частиц, приходящихся на каждый $см^2$, будет $n\,dx$; сумма их эффективных сечений равна $\sigma n\,dx$.

Если на переднюю поверхность нашего бесконечно тонкого слоя падает параллельный поток частиц плотностью N, то ослабление потока будет

$$-dN = N\sigma n\,dx, \tag{23.5}$$

откуда, интегрируя, получаем

$$N = N_0 e^{-n\sigma x} = N_0 e^{-ax} = N_0 e^{-\frac{x}{\lambda}},$$

где N_0 — плотность потока частиц, входящих в толстый слой.

§ 24. Зондирование атомов электронами

Обратимся теперь к рассмотрению рассеяния электронов. При прохождении пучка электронов через вещество пучок ослабляется, т. е. число электронов в нем убывает, по двум причинам. Во-первых, электроны могут терять свою энергию, расходуя ее на различные процессы, возникающие при прохождении быстрого электрона через атом (ионизация и возбуждение, см. гл. VII); во-вторых, они могут испытывать упругие соударения, в результате которых энергия не теряется, но электрон в некоторый момент резко изменяет свое направление и выбывает из пучка. Ослабление пучков электронов вследствие рассеяния изучалось еще в начале 90-х годов прошлого столетия Ленардом, который показал, что при прохождении через слой вещества толщины x интенсивность потока электронов уменьшается с увеличением x по экспоненциальному закону:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\alpha x},$$

где N_0 — интенсивность падающего пучка, N — интенсивность пучка, прошедшего слой x, а коэффициент α характеризует ослабление пучка вследствие рассеяния на единице длины пути.

Легко видеть, что коэффициент α имеет тот же смысл, что и коэффициент a предыдущего параграфа: его можно истолковать как сумму эффективных сечений атомов вещества для рассеяния электронов.

Изучение свойств этого коэффициента при всевозможном варьировании условий опыта обнаружило замечательный факт: оказалось, что при определенной скорости электронов α не зависит ни от индивидуальных свойств рассеивающего вещества, ни от его агрегатного состояния, а зависит только от его плотности ρ; при этом α с большой точностью пропорционально ρ, так что отношение α/ρ при данной скорости электронов остается постоянным. Однако α/ρ не остается постоянным при изменении скорости электронов, а быстро уменьшается при увеличении скорости электронов (грубо говоря, обратно пропорционально четвертой степени скорости).

В таблице VII приведено несколько цифр, иллюстрирующих это резкое увеличение прозрачности вещества для электронов при возрастании их скорости.

Таблица VII

$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho}\left(в\ г^{-1}\cdot см^2\right)$	$\beta = \frac{v}{c}$	$\frac{\alpha}{\rho}\left(в\ г^{-1}\cdot см^2\right)$
0,90	6	0,40	$2,4\cdot 10^2$
0,80	13	0,20	$360\cdot 10^2$
0,70	29	0,10	$8\cdot 10^3$
0,60	83	0,01	$58\cdot 10^3$
0,50	$2,2\cdot 10^2$		

Пользуясь таблицей VII, можно подсчитать величину α для различных скоростей электронов. Для $\beta = v/c = 0,04$, т. е. для $v = \beta c = 1,2\cdot 10^9$ *см/сек*, из таблицы находим $\alpha/\rho = 58\cdot 10^3$. Так как это отношение не зависит от природы поглощающего вещества, то по величине α/ρ можно вычислить сумму эффективных сечений молекул воздуха при нормальных условиях (0 °C и 760 *мм рт. ст.*) В этом случае $\rho = 0,00129$ и, следовательно,

$$\alpha = n\sigma = 58\cdot 10^5\cdot 1,29\cdot 10^{-3} = 7,5\cdot 10^3\ см^2/см^3.$$

Эта величина близка к сумме сечений газовых молекул в 1 $см^3$ газа при нормальных условиях, вычисленной из данных кинетической теории газов (диффузия, теплопроводность). В самом деле, число молекул газа в 1 $см^3$ при нормальных условиях равно $2,7\cdot 10^{19}$; при $r_0 = 10^{-8}$ находим

$$n\sigma = 2,7\cdot 10^{19}\cdot 3,14\cdot 10^{-16} = 8,5\cdot 10^3\ см^2/см^3.$$

При больших скоростях электронов α/ρ резко падает, например, для $v/c = 0,9$, т. е. $v = 2,7\cdot 10^{10}$ *см/сек*, $\alpha/\rho = 6$, откуда $\alpha = 6\cdot 1,29\cdot 10^{-3} = 7,7\cdot 10^{-3}$, т. е. приблизительно в 10^6 раз меньше, чем в рассмотренном ранее случае.

Это означает, что истинный объем, занятый *веществом*, т. е. электронами и положительно заряженными частицами, в сфере радиуса $r_0 = 10^{-8}$ *см* (сфера атома по кинетической теории газов) совершенно ничтожен.

В начале этого параграфа было указано, что рассмотренные результаты имеют место для не слишком быстрых и не слишком медленных электронов. В этих крайних случаях сказывается целый ряд факторов, существенно меняющих картину прохождения электронов через вещество. Именно, в случае очень медленных электронов (энергия порядка долей электрон-вольта) на первый план выступают явления, обусловленные волновой природой электрона, с которой мы ознакомимся в главе X (в частности, так называемый эффект Рамзауэра, состоящий в увеличении прозрачности атома для медленных электронов). Напротив, в случае очень быстрых электронов (с энергией порядка 10^7—10^8 *эв*) преобладающее значение имеет целый ряд весьма сложных процессов, связанных со структурой элементарных частиц, из которых построено вещество.

§ 25. Свойства α-частиц

Еще более определенные результаты относительно роли положительного электричества в атоме были получены при «зондировании» атомов α-частицами. Приведем некоторые основные данные, касающиеся их природы.

α-частицы испускаются многими радиоактивными веществами (например, радием). То, что они представляют собой поток *частиц*, непосредственно видно на фотографиях их путей в камере Вильсона, пример которых приведен на рис. 51. α-частицы

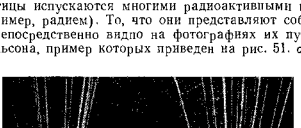


Рис. 51. Пути α-частиц в камере Вильсона.

отклоняются в электрических и магнитных полях, откуда следует, что они несут электрический заряд. Направление, в котором происходит это отклонение, указывает на то, что заряд этот *положителен*. Однако поля, которые вызывают заметное отклонение электронов, не оказывают влияния на траекторию α-частиц, откуда следует, что они обладают большой массой по сравнению с массой электрона. Действительно, для того чтобы сфотографировать траектории α-частиц, искривленные магнитным полем, понадобилось поместить камеру Вильсона в очень сильное магнитное поле Впервые это удалось сделать П. Л. Капице; одна из фотографий, полученных им с магнитным полем в 43 000 *эрстед*, приведена на рис. 52.

Количество α-частиц, испускаемых радиоактивными веществами, было измерено путем непосредственного подсчета числа вспышек на флуоресцирующем экране (сцинтилляций), вызываемых пучком α-частиц с очень малым телесным углом. Полное число α-частиц, испускаемых 1 *г* радия в 1 *сек*, оказалось равным $Q = 3{,}7 \cdot 10^{10}$. Заряд, переносимый одной α-частицей, был измерен также самым непосредственным образом: α-частицы препарата определенной силы попадали в металлический коллектор (фарадеев цилиндр), заряд которого определялся с помощью электрометра. Число α-частиц можно было определить, зная Q и геометрию расположения опыта (расстояние между источником и круглой диафрагмой, расположенной перед коллектором, размеры диафрагмы). Эти опыты показали, что *заряд, переносимый α-частицей, равен* $+2e$, т. е. удвоенной абсолютной величине заряда электрона. Наконец, из опытов с магнитным отклонением (пропорциональным e/mv) и электрическим (пропорциональным e/mv^2, где e — заряд α-частицы) можно было определить массу и скорость α-частиц.

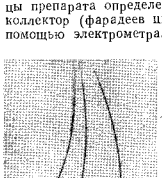


Рис. 52. Пути α-частиц в камере Вильсона, помещенной в сильное магнитное поле (П. Л. Капица).

Для скорости α-частиц радия C при этом получилось

$$v = 1{,}992 \cdot 10^9 \ см/сек,$$

а для e/m_α

$$\frac{e}{m_\alpha} = 1{,}446 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ} \cdot г^{-1}.$$

Сравним эту величину с отношением F/H^1, т. е. с отношением заряда Фарадея к массе грамм-атома водорода:

$$\frac{F}{H^1} = 2{,}88 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ} \cdot г^{-1}.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что $e = 2e$ и умножая числитель и знаменатель отношения $2e/m_\alpha$ на постоянную Авогадро N_0, получаем

$$\frac{e}{m_\alpha} = \frac{2e}{m_\alpha} = \frac{2F}{M_\alpha} = 1{,}44 \cdot 10^{14} \text{ СГСЭ} \cdot г^{-1},$$

где $M_\alpha = m_\alpha \cdot N_0$ — масса грамм-атома α-частиц и $F = e \cdot N_0$ —

заряд Фарадея. Поэтому

$$\frac{F}{H^1} : \frac{2F}{M_\alpha} = \frac{M_\alpha}{2H^1} = \frac{2{,}88 \cdot 10^{14}}{1{,}44 \cdot 10^{14}} = 2,$$

откуда

$$\frac{M_\alpha}{H^1} = 4,$$

т. е. α-частица имеет массу атома гелия.

То, что α-частицы по своей природе тождественны с гелием, было показано также следующим опытом Резерфорда и Ройдса (рис. 53).

Большое количество радиоактивного газа радона было введено в тонкостенную стеклянную трубочку A, толщина стенок которой была такова, что большинство α-частиц проходило

Рис. 53. Опыт Резерфорда и Ройдса.

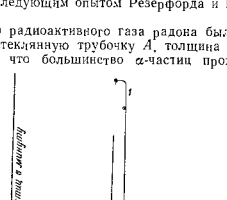


Рис. 54. Частота рассеяния α-частиц на малые углы. Для характеристики рассеяния подсчитывалось число частиц, попадающих в разные точки флуоресцирующего экрана: *1* — рассеяние α-частиц в воздухе; *2* — рассеяние α-частиц тонким золотым листочком; *3* — рассеяние двумя золотыми листочками.

сквозь них. Эта трубочка была окружена более широкой трубкой T, к которой была припаяна разрядная трубочка V со впаянными электродами. Трубка T была перед началом опыта тщательно откачана. α-частицы, скоплявшиеся в T, образовывали газ, который путем поднятия уровня ртути мог быть сжат и переведен в капилляр V. Пропуская разряд через V, можно было через два дня после начала опыта обнаружить в испускаемом

свете желтую линию гелия, а через шесть дней — полный спектр гелия.

Параллельный пучок α-частиц, пройдя сквозь слой вещества, рассеивается: α-частицы несколько изменяют свое направление. Исследование рассеяния тонкими металлическими листочками показало, что очень часто наблюдается отклонение α-частиц на небольшие углы, в среднем 2—3°, и распределение α-частиц по углам в точности следует статистической кривой случайных явлений (рис. 54). Наряду с таким рассеянием на малые углы сотрудники Резерфорда Гейгер и Марсден обнаружили, что некоторое число α-частиц (приблизительно 1 на 8000) рассеивается на очень большие углы, иногда превышающие 90° и доходящие в некоторых случаях почти до 180°. Объяснить эти большие углы рассеяния накоплением случайных малых отклонений оказалось невозможным, так как из статистической кривой рассеяния следует, что число частиц, которые могли бы испытать столь значительное отклонение, должно быть во много раз меньше, чем 1 на 8000.

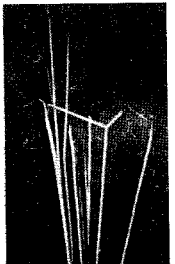


Рис. 55. Рассеяние α-частиц в кислороде.

Большие углы рассеяния наблюдаются как при прохождении α-частиц через металлические листочки, так и в газах, и их можно обнаружить на фотографиях путей α-частиц в камере Вильсона. Одна из таких фотографий приведена на рис. 55, где изображен след α-частицы в кислороде: короткий след принадлежит атому кислорода, приведенному в быстрое движение, более длинный — α-частице, отклоненной от первоначального направления на угол около 90°. Эта фотография ясно показывает, что большие углы отклонения получаются отнюдь не в результате накопления малых отклонений, но в результате одного-единственного соударения.

Резерфорд указал на то, что это возможно, если внутри атома имеется чрезвычайно сильное электрическое поле, которое создается положительным зарядом, связанным с большой массой и сконцентрированным в очень малом объеме (радиус порядка 10^{-13} *см*). Отсюда и возникла «ядерная» модель атома, согласно которой атом устроен наподобие планетной системы: малое по размерам, положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена почти вся масса атома, и отрицательные электроны, обращающиеся около этого ядра по замкнутым орбитам.

§ 26. Теория рассеяния α-частиц

На основании этих представлений Резерфорд развил количественную теорию рассеяния α-частиц.

Пусть в O (рис. 56) помещается рассеивающее ядро. Очевидно, что заряд его по абсолютной величине должен быть равен целому кратному заряда электрона, так как в нейтральном

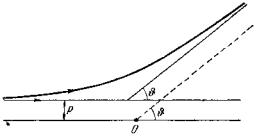


Рис. 56.

атоме положительный заряд ядра должен в точности компенсироваться суммой отрицательных зарядов электронов.

Обозначим заряд ядра, помещающегося в O, через $+Ze$, где Z — целое число, и предположим, что масса этого ядра настолько больше массы α-частицы, что при взаимодействии с последней ядро можно считать неподвижным. Предположим, наконец, что сила взаимодействия между ядром и α-частицей подчиняется закону Кулона, т. е. что эта сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между обеими частицами. Необходимо дать себе ясный отчет в том, что это последнее предположение на первых порах является только гипотезой и оправдывается лишь последующим согласием теории с экспериментом. В самом деле, у нас нет никаких оснований заранее считать, что взаимодействие очень малых частиц, сближающихся на ничтожно малые расстояния, должно управляться законом Кулона, справедливость которого безупречно установлена только для макроскопических тел.

Классическая механика показывает, что при всех этих предположениях α-частица должна описывать относительно ядра O

гиперболу. Обозначим массу α-частицы через M, ее скорость на большом расстоянии от рассеивающего ядра — через v. Если бы α-частица не взаимодействовала с ядром, то она прошла бы на расстоянии p (рис. 56) от ядра (так называемое «прицельное расстояние»). Вычисление, которое мы отложим до § 53, показывает, что ϑ — угол отклонения α-частицы, отталкивающейся от ядра по закону Кулона, выражается через указанные параметры следующим образом:

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{Mv^2p}{2Ze^2}. \qquad (26.1)$$

Было бы бесполезно пытаться проверить эту формулу непосредственно экспериментом, так как в нее входит недоступное измерению прицельное расстояние p.

Мы можем, однако, положить формулу (26.1) в основу статистической теории, которая даст нам выражение для эффективного сечения рассеяния в зависимости от параметров, доступных экспериментальному определению.

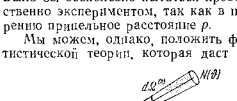


Рис. 57.

Представим себе сферу, в центре которой расположен рассеивающий листок F (рис. 57). Пусть на этот листок в единицу времени падает N_0 α-частиц. При наиболее детальном изучении рассеяния определяется среднее число частиц, $N(\vartheta)$, рассеянных в пределах телесного угла $d\Omega^{(2)}$ в направлении, характеризуемом углами ϑ и φ. Величина телесного угла $d\Omega^{(2)}$ равна отношению элемента поверхности сферы к квадрату радиуса

$$d\Omega^{(2)}=\frac{R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{R^2}=$$
$$=\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \qquad (26.2)$$

Рис. 58.

В опытах Резерфорда и его сотрудников чаще изучалось среднее число частиц, рассеяваемых в пределах области, лежащей между двумя телесными углами, характеризуемыми отверстиями ϑ и $\vartheta+d\vartheta$ (рис. 58). Очевидно, что соответствующий этому случаю телесный угол $d\Omega^{(1)}$ (или просто $d\Omega$) получится путем интегрирования (26.2) по φ в пределах от 0 до 2π:

$$d\Omega=d\Omega^{(1)}=2\pi\sin\vartheta\,d\vartheta. \qquad (26.3)$$

Эффективное сечение для рассеяния в пределах $d\Omega$ мы и будем вычислять.

Положим, что α частицы до рассеяния летят параллельным потоком. Так как при прочих равных условиях угол отклонения α частицы по формуле (26.1) определяется прицельным расстоянием p, то, очевидно, на угол, лежащий в пределах между ϑ и $\vartheta+d\vartheta$, отклонятся α-частицы, у которых прицельное расстояние лежит между p и $p-dp$, т. е. α-частицы, пролетающие внутри колец между кругами с радиусами, заключенными между p и $p-dp$, описанными около каждого из рассеивающих центров (рис. 59). Площадь каждого такого кольца равна $2\pi p\,dp$, и мы можем утверждать, что среднее число α-частиц, отклоненных на угол между ϑ и $\vartheta+d\vartheta$, т. е. летящих после рассеяния внутри телесного угла $d\Omega$, пропорционально $2\pi p\,dp$.

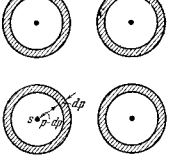


Рис. 59.

Итак, эффективное сечение ядра $d\sigma$ для рассеяния α-частиц равно

$$d\sigma=2\pi p\,dp. \qquad (26.4)$$

Если мы теперь найдем p из (26.1) и возведем в квадрат, то получим

$$p^2=\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2\operatorname{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Дифференцируя, находим следующее выражение:

$$p\,dp=-\frac{1}{2}\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

и, подставляя в (26.4) *), получаем

$$d\sigma=2\pi\,\frac{1}{2}\left(\frac{2Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

Введем еще сюда телесный угол $d\Omega$ по формуле (26.3):

$$d\sigma=\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2\frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \qquad (26.5)$$

*) Знак минус не имеет существенного значения: он указывает лишь на то, что с увеличением прицельного расстояния p угол ϑ уменьшается (и наоборот). Поэтому в дальнейшем используется только абсолютное значение $p\,dp$.

Это и есть формула Резерфорда для рассеяния α-частиц.

Для сравнения с результатами эксперимента нужно найти макроскопическое сечение Σ, т. е. сумму эффективных сечений всех рассеивающих ядер в 1 *см*³. Если допустить, что все ядра в листке распределены равномерно и не перекрывая друг друга, то очевидно, что

$$\Sigma = n\,d\sigma,$$

где n — число рассеивающих ядер в 1 *см*³. Пользуясь (26.5), получаем:

$$\Sigma = n\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \qquad (26.6)$$

Если теперь обозначить через N число α-частиц, падающих в 1 *сек* на поверхность рассеивающего листка, то среднее число α-частиц, рассеянных на угол ϑ в пределах телесного угла $d\Omega$, будет, очевидно,

$$dN = N\Sigma = nN\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}. \qquad (26.7)$$

Как видим, число рассеянных α-частиц очень сильно зависит от угла ϑ и быстро возрастает с уменьшением ϑ.

§ 27. Экспериментальная проверка формулы Резерфорда

Формула Резерфорда была подвергнута тщательной экспериментальной проверке. Из (26.7) следует

$$dN \cdot \sin^4\frac{\vartheta}{2} = nN\left(\frac{Ze^2}{Mv^2}\right)^2 d\Omega.$$

Таким образом, если, сохраняя все остальные условия, изменять только угол ϑ, то должно быть

$$dN \cdot \sin^4\frac{\vartheta}{2} = \text{const}.$$

Этот вывод и был проверен в первую очередь. С этой целью применялся следующий прибор (рис. 60). Металлическая коробка B в форме цилиндра укреплялась на круге A, снабженном делениями. Коробка вместе с кругом могла вращаться на шлифе C. Радиоактивный препарат R и рассеивающий листок F устанавливались на особой трубке T независимо от коробки; этим достигалась неизменяемость положения R и F при поворотах остальной системы. Экран S (прозрачный) устанавливался перед микроскопом M, неподвижно скрепленным с коробкой B. Поворачивая круг A, можно было устанавливать микроскоп для измерения числа рассеянных α-частиц при любом угле рассеяния. Коробка закрывалась сверху стеклянной пластинкой P и откачивалась через трубку T для того, чтобы избежать дополнительного рассеяния в воздухе. В течение всей работы было подсчитано свыше 100 000 сцинтилляций.

Полученные результаты для рассеяния в золоте приведены в таблице VIII, из которой видно, что, несмотря на то, что величина $1/\sin^4(\vartheta/2)$ и число сцинтилляций изменялись в очень широких пределах, произведение $dN\sin^4(\vartheta/2)$ оставалось приблизительно постоянным в согласии с требованием теории*).

Рис. 60. Прибор для изучения зависимости числа рассеянных α-частиц от угла рассеяния.

Аналогичным образом была изучена зависимость рассеяния от толщины листков и от скорости α-частиц. Во всех случаях для рассеяния в листочках из тяжелых металлов установлено хорошее согласие экспериментальных результатов с требованиями теории. Это согласие одновременно является доказательством применимости закона Кулона к взаимодействию между α-частицами и рассеивающими ядрами при тех условиях, в которых были произведены опыты, т. е. для тяжелых ядер и не слишком быстрых α-частиц.

Таблица VIII

Рассеяние α-частиц золотыми листочками

Угол отклонения (ϑ °)	$\frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$	Число сцинтилляций	$dN\sin^4(\vartheta/2)$
150	1,15	33,1	28,8
135	1,38	43,0	31,2
120	1,79	51,9	29,0
105	2,53	69,5	27,5
75	7,25	211	29,1
60	16,0	477	29,8
45	46,6	1 435	30,8
30	223	7 800	35,0
15	3445	132 000	38,4

Другой способ экспериментальной проверки теории специально для случая рассеяния в газах состоит в том, что

*) В самом деле, таблица показывает, что в то время как $1/\sin^4(\vartheta/2)$ изменяется примерно в 3500 раз, $dN\sin^4(\vartheta/2)$ изменяется только на 30%.

производится большое количество вильсоновских фотографий путей α-частиц в газе, измеряются углы отклонения и подсчитывается, как часто встречаются определенные углы рассеяния. Такой метод был применен Блэкетом главным образом с целью изучения границ применимости закона Кулона. Оказалось, что для аргона в пределах расстояний между центрами ядра и α-частицы от $7 \cdot 10^{-12}$ до 10^{-8} *см* и для воздуха в пределах от $3 \cdot 10^{-12}$ до $5 \cdot 10^{-10}$ *см* закон Кулона имеет место.

Из этого, однако, не следует делать вывода об универсальной применимости закона Кулона для ядерных взаимодействий. Напротив, изучение рассеяния α-частиц *легкими* ядрами показало, что когда расстояние между взаимодействующими частицами уменьшается до 10^{-12} *см*, наблюдаются резкие отклонения от закона Кулона, а на расстояниях, меньших 10^{-12} *см*, обнаруживается действие быстро убывающих с расстоянием *сил притяжения*, перекрывающих действие кулоновских сил отталкивания между одинаково заряженными частицами.

§ 28. Определение заряда ядра

Формула Резерфорда позволяет экспериментальным путем найти число Z, т. е. число элементарных положительных зарядов ядра. В самом деле, подсчитывая на флуоресцирующем экране число сцинтилляций N, создаваемых падающими α-частицами, и число сцинтилляций dN, создаваемых α-частицами, рассеянными на угол θ, мы будем знать величину $d\sigma = dN/N$. В правую же часть формулы Резерфорда входят, кроме искомой величины Z, либо величины известные (n, e), либо величины доступные экспериментальному определению (Mv^2, θ). Таким образом, для отыскания Z нужно произвести подсчет числа сцинтилляций N и dN. Главная трудность эксперимента обусловлена тем, что эти числа очень сильно различаются между собой. В первых опытах числа N и dN измерялись на разных установках, т. е. в разных условиях, что являлось источником значительных ошибок.

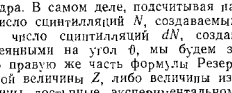


Рис. 61. Схема опыта Чадвика.

Чадвик использовал расположение опыта, при котором оба числа N и dN могут быть измерены на одной и той же установке, вследствие чего ему удалось определить Z с большей точностью. Идея опыта Чадвика заключается в следующем. Рассеивающая фольга имеет вид кольца AA' (рис. 61); препарат R и экран S из ZnS

устанавливаются на одинаковом расстоянии r от AA'. Измеряется число α-частиц, рассеянных на один определенный угол θ, выбранный (для упрощения расчета) так, чтобы он был вдвое больше угла между осью RS и направлением лучей, идущих от R к фольге (рис. 61). Располагая внутри кольца между R и S экран, непрозрачный для α-частиц, можно было считать один только рассеянные α-частицы; наоборот, закрывая экраном кольцо AA', можно было считать число частиц N в падающем пучке. Так как это число слишком велико для того, чтобы можно было непосредственно подсчитывать сцинтилляции первичных α-частиц на экране (например, для того, чтобы число сцинтилляций от рассеянных α-частиц составляло 30 в минуту, N должно быть равно 20 000 в минуту), то перед S располагался вращающийся диск с узким вырезом, при помощи которого число сцинтилляций можно было произвольно уменьшать в любое число раз.

Таким путем Чадвик нашел следующие значения Z для платины, серебра и меди: Pl(78) — 77,4; Ag(47) — 46,3; Cu(29) — 29,3. Числа, стоящие в скобках после химических символов элементов, означают номер места соответствующего элемента в периодической системе Менделеева (атомный номер). Таким образом, опыты Чадвика показывают, что число элементарных положительных зарядов ядра равно атомному номеру соответствующего элемента. Это правило, подтвержденное другими исследователями для целого ряда элементов, сводит задачу об определении заряда ядра к точной фиксации атомных номеров всех элементов. Средство для этого дают нам рентгеновские спектры, с которыми мы и познакомимся в следующей главе.

РЕНТГЕНОВСКИЕ ЛУЧИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ АТОМНЫХ КОНСТАНТ

Рентгеновские лучи играют важную роль в изучении атома. В § 28 уже указывалось, например, что спектры рентгеновских лучей позволяют точно фиксировать атомные номера всех элементов, т. е. определять заряды их ядер. Кроме того, методы рентгеновской спектроскопии с большим успехом применялись для получения наиболее точных значений постоянной Авогадро, заряда электрона e, а также удельного заряда электрона e/m. В дальнейших главах мы нередко будем обращаться также к рассмотрению различных явлений, связанных с рентгеновскими лучами. Ввиду этого нам необходимо с самого начала ознакомиться с их природой и свойствами.

§ 29. Рентгеновские лучи

Рентгеновские лучи возникают под действием быстрых электронов. В так называемых рентгеновских трубках против катода располагается металлическая пластинка (в трубках, применяемых в медицине и для технических просвечиваний, — вольфрамовая), при бомбардировке которой электронами и возникают рентгеновские лучи. Энергия возбуждающих электронов в обычных технических установках порядка 100 000 *эв*. Существуют также установки, дающие рентгеновские лучи при энергии электронов в миллион электрон-вольт, а для целей ядерной физики в последнее время построены специальные ускорители электронов, позволяющие получать рентгеновские лучи при торможении электронов с энергией до 100 миллионов электрон-вольт.

Рентгеновские лучи, невидимые для глаза, обладают способностью вызывать яркую видимую флуоресценцию в некоторых естественных кристаллических веществах (платиносинеродистый барий, цинковая обманка и др.) и в искусственно изготовляемых порошках (люминофорах). Они действуют на фотографическую пластинку и вызывают ионизацию в газах. Всеми этими явлениями пользуются для обнаружения и исследования рентгеновских лучей.

По своей природе рентгеновские лучи тождественны со светом и отличаются от него только тем, что имеют меньшие длины волн. Так же как и свет, рентгеновские лучи обладают волновыми свойствами, которые обнаруживаются опытами с интерференцией и дифракцией. Впервые интерференционный опыт, аналогичный опыту с зеркалами Френеля, с рентгеновскими лучами был осуществлен советским физиком В. П. Линником. На рис. 62 приведена фотография дифракционной картины, полученной при прохождении рентгеновских лучей через узкую щель. Эти опыты очень трудны, так как вследствие малой длины волны щель должна быть очень узкой и фотографию, кроме того, приходится подвергать последующему увеличению для того, чтобы выявить светлые и темные полосы. Фотография, приведенная на рис. 62, была получена со щелью шириной в 6 *мкм* и подвергнута 26-кратному увеличению. Зная геометрические условия опыта (расстояние от щели до фотопластинки) и измеряя расстояние между последовательными светлыми полосами, можно вычислить длину волны рентгеновских лучей совершенно так же, как это делается в оптике *). Из фотографии, приведенной на рис. 62, для длины волны получилось 8,33 Å с точностью в 0,5% (напоминаем, что длина волны крайних еще видимых глазу фиолетовых лучей — 4000 Å). Это — случай длинноволнового рентгеновского излучения. Длины волн рентгеновских лучей, которыми пользуются для медицинских просвечиваний, — порядка единицы ангстрема.

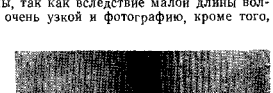


Рис. 62. Дифракция рентгеновских лучей при прохождении через узкую щель (ширина щели 0,006 *мм*; увеличение в 26 раз).

Различают два типа рентгеновских лучей. Если энергия электронов, испытывающих торможение на антикатоде, не превышает определенной, характерной для вещества антикатода величины, то возникающее излучение называется *тормозным*. Оно разлагается в сплошной спектр наподобие белого света, ввиду чего тормозное излучение называют иногда «белым» рентгеновским излучением. Сплошной спектр тормозного излучения имеет следующие характерные особенности. Распределение интенсивности в зависимости от длины волны в этом спектре представляется кривой, имеющей максимум при определенной длине волны (см. рис. 178, стр. 380). Спадание интенсивности от этого

*) См., например, Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 64.

максимума в сторону длинных и в сторону коротких волн происходит различным образом: в сторону длинных волн кривая спадает полого, асимптотически приближаясь к нулю по мере увеличения длины волны, напротив, спадание в сторону коротких волн происходит круто, и спектр резко обрывается при некоторой определенной длине волны. Эта критическая длина волны — коротковолновая граница сплошного спектра — зависит от ускоряющего потенциала электронов. Именно, если этот потенциал равен V *киловольтам*, то длина волны границы, выраженная в единицах ангстрема, равна

$$\lambda = \frac{12{,}315}{V}\ \text{Å}. \qquad (29.1)$$

Таким образом, при $V = 100$ *кв* наиболее короткая длина волны в сплошном спектре есть 0,123 Å. Существенно, то что характер сплошного спектра не зависит от природы антикатода, но определяется только ускоряющим потенциалом.

Как уже сказано, сплошной спектр возникает в тех случаях, когда энергия возбуждающих электронов не превосходит некоторой критической величины. Если же энергия электронов равна или больше этой критической величины, то возникает излучение, называемое *характеристическим*, так как оно характеризует вещество антикатода в такой же степени, в какой оптический спектр испускания газа или пара характерен для вещества. Спектр характеристического излучения — линейный. Замечательно при этом, что каждый элемент дает определенный, присущий ему спектр независимо от того, возбуждается ли этот элемент к рентгеновскому излучению в свободном состоянии или входит в химическое соединение. Этим рентгеновские спектры существенно отличаются от оптических, так как одно и то же вещество дает различные оптические спектры в атомном и в молекулярном состояниях (например, оптические спектры атома O, молекулы O_2 и молекулы H_2O совершенно различны и отнюдь не складываются аддитивно из спектров атомов, входящих в состав молекулы).

На рис. 63 приведен интересный пример изменения рентгеновского спектра при возникновении характеристического излучения. Здесь по оси абсцисс нанесены длины волн, по оси ординат — интенсивности; различные кривые сняты при разных энергиях возбуждающих электронов. Антикатод во всех случаях — родиевый. Видно, что при 23,2 *кв* спектр еще сплошной, но при 31,8 *кв* на сплошной спектр накладывается линейный, состоящий из резко выраженных спектральных линий; при 40,0 *кв* характер спектра остается без изменения, но интенсивность линий возрастает настолько, что самая яркая из них не укладывается на чертеже в принятом масштабе.

Этот линейный спектр и принадлежит характеристическому излучению вещества антикатода, в данном случае — родия (Rh).

Спектральные линии характеристического излучения образуют закономерные последовательности или серии, расположен-

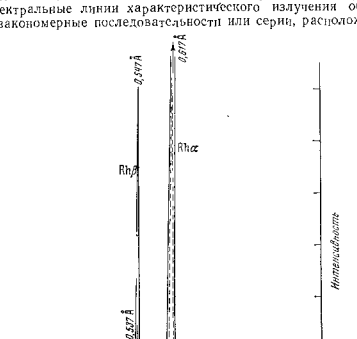


Рис. 63. Возникновение K-серии характеристического излучения родиевого антикатода. По оси абсцисс отложена длина волны рентгеновского излучения и указаны длины волн коротковолновой границы каждого спектра (Линия α — Ru принадлежит рутению, находящемуся в образце родия в виде примеси.)

ные в различных частях рентгеновского спектра. По историческим причинам эти серии обозначаются буквами K, L, M, N. Серия K — самая коротковолновая, следующая в сторону длинных волн — серия L, далее идут серии M и N, наблюдаемые, впрочем, только у тяжелых элементов. Подробнее эти серии будут рассмотрены в § 35.

§ 30. Поглощение рентгеновских лучей

К числу наиболее замечательных особенностей рентгеновских лучей относится их своеобразный закон поглощения. Оказывается, прежде всего, что поглощение рентгеновских лучей веществом совершенно не зависит от его оптических свойств. Так, например, бесцветное и прозрачное для света свинцовое стекло практически полностью поглощает рентгеновские лучи и потому используется для защиты персонала, обслуживающего рентгеновские установки. Наряду, тонкий листок алюминия, непрозрачный для света, очень мало поглощает рентгеновские лучи и для лучей, испускаемых техническими рентгеновскими трубками (при потенциалах порядка 100 *кв*), почти совершенно прозрачен.

Применение рентгеновских лучей для медицинских или технических просвечиваний основано на законах поглощения рентгеновских лучей, с которыми мы сейчас и ознакомимся. Если параллельный пучок рентгеновских лучей проходит через слой вещества, то пучок испытывает ослабление, т. е. интенсивность его уменьшается. Это ослабление является результатом двух процессов: 1) рассеяния и 2) поглощения. Эти два процесса существенно различны:

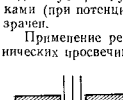


Рис. 64. Рассеяние рентгеновских лучей при прохождении через вещество.

1) Ослабление вследствие рассеяния обусловлено тем, что часть лучей отклоняется в сторону (рис. 64) и потому выводится из параллельного пучка. Явление это совершенно аналогично рассеянию, которое испытывает свет при прохождении через мутную среду. Разница только в том, что мутность среды для света обусловлена взвешенными в ней достаточно крупными частицами с показателем преломления, отличным от показателя преломления среды. Для рентгеновских же лучей вследствие их малой длины волны любая прозрачная для света среда является «мутной». В этом случае рассеивающими центрами являются сами атомы или молекулы вещества. Аналогичное молекулярное рассеяние наблюдается и для света. Но оно представляет собой в случае света очень слабый эффект. Для сравнения можно привести следующие цифры. Параллельный пучок *света* вследствие рассеяния ослабляется в e ($\approx 2{,}7$) раз слоем чистой воды толщиной в 1 *км*; пучок *рентгеновских лучей* ослабляется в то же число раз путем одного только рассеяния (т. е. исключая поглощение) слоем воды в 5 *см*. Для того чтобы молекулярное рассеяние *света* стало легко заметным, необходимо, чтобы в

среде возникали в большом количестве местные уплотнения и разрежения (флуктуации плотности), как это имеет место, например, для всякого вещества вблизи его критической температуры (так называемая «критическая опалесценция»).

2) Ослабление вследствие поглощения или абсорбции обусловлено тем, что часть энергии рентгеновских лучей испытывает истинное поглощение в веществе, т. е. в конечном счете превращается в тепло.

Если параллельный пучок рентгеновских лучей монохроматичен, т. е. состоит из лучей одной определенной длины волны, то ослабление его бесконечно тонким слоем вещества толщиной dx подчиняется простому закону

$$-dJ = \mu J\,dx,$$

где J — интенсивность пучка, падающего на слой, а μ — коэффициент, характеризующий ослабление. Интегрируя это уравнение (см. аналогичное уравнение в § 23), получаем закон ослабления рентгеновских лучей слоем конечной толщины d:

$$J = J_0 e^{-\mu d}, \tag{30.1}$$

где J_0 — интенсивность параллельного пучка при $d = 0$. Размерность коэффициента поглощения μ есть [*см*$^{-1}$], так как показатель степени μd должен быть безразмерной величиной.

Поскольку ослабление пучка происходит как за счет истинного поглощения, так и за счет рассеяния, — коэффициент ослабления μ является суммой двух коэффициентов: коэффициента истинного поглощения τ и коэффициента рассеяния σ:

$$\mu = \tau + \sigma. \tag{30.2}$$

Оба коэффициента τ и σ, а следовательно и μ, пропорциональны массе вещества. Ввиду этого удобнее пользоваться так называемыми «массовыми коэффициентами», т. е. отношениями μ/ρ, τ/ρ и σ/ρ, где ρ — плотность вещества. Очевидно, что формула (30.1) может быть переписана в виде

$$J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho}\rho d}. \tag{30.3}$$

Произведение ρd есть масса вещества в столбе сечением в 1 *см*^{2} и толщиной d; μ/ρ имеет размерность [*см*^{2} *г*$^{-1}$].

Если $\rho d = 1$, то $J = J_0 e^{-\frac{\mu}{\rho}}$, откуда следует, что μ/ρ характеризует ослабление рентгеновских лучей слоем, содержащим 1 *г* вещества на каждый квадратный сантиметр.

Для теоретических расчетов еще удобнее пользоваться так называемыми *атомными коэффициентами* μ_a, τ_a, σ_a, которые получаются из значений μ/ρ, τ/ρ и σ/ρ для определенного

элемента путем умножения на абсолютную массу атома, т. е. на отношение грамм-атома данного элемента A к постоянной Авогадро N:

$$\mu_a = \frac{\mu}{\rho}\frac{A}{N}, \quad \tau_a = \frac{\tau}{\rho}\frac{A}{N}, \quad \sigma_a = \frac{\sigma}{\rho}\frac{A}{N}. \tag{30.4}$$

Таким образом, например, μ_a характеризует ослабление в слое, содержащем 1 атом на *см*². Стоит отметить также, что размерность атомных коэффициентов μ_a, τ_a и σ_a, как легко убедиться, есть [*см*²]. Поэтому их можно истолковать как эффективные сечения атома соответственно для ослабления, поглощения или рассеяния рентгеновских лучей.

Эмпирически установлено и довольно точно соблюдается следующее соотношение:

$$\tau_a = cZ^4\lambda^3, \tag{30.5}$$

где c — некоторая постоянная, Z — атомный номер вещества и λ — длина волны. Отсюда при помощи определений (30.4) для массового коэффициента поглощения получается

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{\tau_a N}{A} = \frac{cN}{A} Z^4\lambda^3, \tag{30.6}$$

или

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{c'}{A} Z^4\lambda^3 \quad (c' = cN). \tag{30.6'}$$

Из этих формул видно, что поглощение лучей определенной длины волны очень быстро возрастает с увеличением атомного номера (пропорционально *четвертой* степени Z).

Вторая замечательная особенность поглощения рентгеновских лучей состоит в том, что оно является чисто атомным свойством: поэтому *молекулярный коэффициент* поглощения аддитивно складывается из атомных коэффициентов элементов, входящих в состав молекулы. Благодаря этому для вычисления молекулярных коэффициентов всего бесконечного многообразия химических соединений достаточно знать атомные коэффициенты поглощения элементов.

Формулы (30.6) и (30.6′) и аддитивность поглощения рентгеновских лучей лежат в основе их применения для просвечивания. Сравним, например, коэффициенты поглощения костей и тканей человеческого тела. Вещество кости есть фосфорнокислый кальций $Ca_3(PO_4)_2$; поглощение ткани главным образом обусловлено входящей в ее состав водой (H_2O). Учитывая, что атомные номера Ca, P, O и H соответственно равны 20, 15, 8 и 1, находим, что отношение атомных коэффициентов поглощения обоих веществ будет равно

$$\frac{3\cdot 20^4 + 2\cdot 15^4 + 8\cdot 8^4}{2 + 8^4} \approx 3\left(\frac{5}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{15}{8}\right)^4 + 8,$$

т. е. коэффициент поглощения $Ca_3(PO_4)_2$ примерно в 150 раз больше атомного коэффициента поглощения воды (ткани). Для практических целей, однако, важное отношение *массовых* коэффициентов. Если применить к интересующему нас случаю формулу (30.6), то отношение получится равным примерно 68, что уже вполне объясняет, почему на рентгенограммах тень от костей так резко выделяется.

Формулы (30.5) и (30.6) показывают также, что поглощение рентгеновских лучей быстро возрастает при увеличении длины волны. Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше проникающая способность рентгеновских лучей, тем больше их жесткость. Если отложить по оси абсцисс длины волн, а по оси ординат $\sqrt[3]{\tau/\rho}$, то в соответствии с формулами (30.5) и (30.6) для данного элемента ход поглощения в зависимости от λ изобразится прямой (рис. 65). Однако при определенной длине

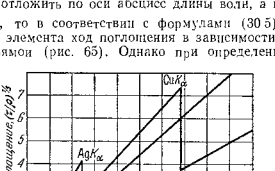


Рис. 65. Зависимость поглощения рентгеновских лучей от длины волны (K_α-линия серебра и меди).

волны поглощение испытывает резкий скачок, а затем снова изменяется линейно. Как видно из рис. 65, для меди такой скачок наблюдается при $\lambda = 1{,}3785$ Å, для серебра — при $\lambda = 0{,}485$ Å. Эти критические длины волн имеют следующее значение. Если освещать какой-либо элемент (например, Cu или Ag) монохроматическими рентгеновскими лучами убывающей длины волны, то, начиная со строго определенной длины волны возбуждающих рентгеновских лучей, элемент начинает и при дальнейшем уменьшении длины волны продолжает испускать свое собственное характеристическое излучение в виде *излучения флуоресценции*. Критические длины волн, при которых

наблюдается скачок поглощения, как раз совпадают с критическими длинами волн для возбуждения характеристического излучения флуоресценции данной длины волны. Возникновение скачка поглощения учитывается в формулах (30.5) и (30.6) тем, что коэффициент c имеет разные значения по ту и другую стороны критической длины волны.

λ (Å)	μ/ρ		
	Al	Ag	Pb
0,1	0,16	1,4	3,8
0,5	2,0	11	54
1,0	15	73	—

Упражнения: 1. Ослабление рентгеновских лучей при прохождении через вещество часто характеризуют указанием толщины слоя вещества, ослабляющего рентгеновские лучи в два раза (толщина половинного поглощения, $d_{1/2}$). Доказать, что $d_{1/2}$ выражается через μ/ρ формулой $d_{1/2} = \frac{0{,}693}{(\mu/\rho)\,\rho}$.

2 Массовые коэффициенты абсорбции в алюминии, серебре и свинце для некоторых длин волн даны в таблице.

Вычислить эффективные сечения атомов для поглощения указанных длин волн и толщины слоев половинного поглощения.

§ 31. Рассеяние рентгеновских лучей

Рассеяние рентгеновских лучей обнаруживает закономерности, отличные от закономерностей рассеяния света в оптической части спектра (т. е. в области видимых или ультрафиолетовых лучей). Как известно, в оптической части спектра, где длина волны порядка 10^{-5} *см*, т. е. значительно больше атомных размеров (порядка 1 Å $= 10^{-8}$ *см*), рассеяние обратно пропорционально четвертой степени длины волны (закон Рэлея, объясняющий голубой цвет неба). В области рентгеновских лучей длина волны того же порядка величины, что и размеры атома. Оказывается, что и закон рассеяния здесь иной. Именно, *рассеяние рентгеновских лучей не зависит от длины волны*. Рассматривая рассеяние как результат вынужденных колебаний электронов под действием электромагнитного поля падающей рентгеновской волны, Дж. Дж. Томсон еще в ранний период изучения рентгеновских лучей вывел следующую формулу для атомного коэффициента рассеяния:

$$\sigma_a = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^4}\,Z, \tag{31.1}$$

где e и m — заряд и масса электрона, c — скорость света. Атомный номер элемента Z, входящий в эту формулу, равен числу электронов в нейтральном атоме. С другой стороны, σ_a, как уже указывалось, имеет размерность площади. Таким образом,

$\frac{\sigma_a}{Z} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^4}$ можно рассматривать как эффективное сечение одного электрона для рассеяния рентгеновских лучей. Подставляя сюда известные значения

$$e = 4{,}80\cdot 10^{-10},\quad \frac{e}{mc} = 1{,}759\cdot 10^{7},\quad c = 2{,}997\cdot 10^{10},$$

получаем эффективное сечение электрона

$$\sigma_a = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^4} = 6{,}57\cdot 10^{-25}\ см. \tag{31.2}$$

Радиус этого эффективного сечения равен

$$r_0 = 4{,}57\cdot 10^{-13}\ см. \tag{31.3}$$

Эта величина того же порядка, что и так называемый «классический радиус электрона».

Формула (31.1) была использована Томсоном для определения числа электронов в атоме (равного заряду ядра Z) следующим интересным способом.

Так как по определению атомных коэффициентов (30.4)

$$\sigma_a = \frac{\sigma}{\rho}\,\frac{A}{N},$$

то для массового коэффициента рассеяния формула (31.1) дает

$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^4}\,\frac{NZ}{A}; \tag{31.4}$$

пользуясь результатом вычислений (31.2), имеем

$$\frac{\sigma}{\rho} = 6{,}57\cdot 10^{-25}\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}\cdot\frac{Z}{A} \approx 0{,}40\cdot\frac{Z}{A}. \tag{31.5}$$

Экспериментальная проверка формулы Томсона показала, что для легких элементов она довольно хорошо оправдывается. Найденная из опыта величина σ/ρ оказалась не зависящей от длины волны и равной 0,20. Подставляя это значение в (31.5), получаем

$$0{,}20 = 0{,}40\cdot\frac{Z}{A}$$

или

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2}, \tag{31.6}$$

т. е. у легких элементов (за исключением водорода) атомный номер должен быть равен половине атомного веса. Это соотношение на самом деле приближенно оправдывается в начале периодической системы [He ($Z = 2$, $A = 4$), Li ($Z = 3$, $A = 7$),

С ($Z = 6$, $A = 12$), и т. д.]. Физические причины, ведущие к соотношению (31.6), связаны с природой ядерных сил. К рассмотрению интересных и важных свойств рассеянного рентгеновского излучения мы еще вернемся в §§ 123 и 124.

Упражнение. Пользуясь формулой (31.1) и экспериментальным значением e/p, вычислить число электронов в 1 грамм-атоме.

При помощи этого числа определить, далее, число электронов в 1 атоме кислорода, азота и углерода.

§ 32. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллической решетке

В § 31 мы видели, что с рентгеновскими лучами можно осуществлять те же дифракционные явления, что и со светом. Однако наиболее простой и практически наиболее важный способ получения дифракции рентгеновских лучей основан на применении *кристалла* в качестве дифракционной решетки. Причина легкости осуществления дифракции рентгеновских лучей с помощью кристаллов состоит в том, что порядок величины междуатомных

Рис. 66. Кубическая решетка.

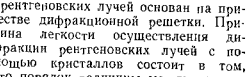


Рис. 67. Дифракция на линейной решетке.

расстояний в кристалле — тот же, что и порядок длины волны рентгеновских лучей (1Å). Как известно, именно при прохождении рентгеновских лучей через кристаллы была впервые обнаружена дифракция рентгеновских лучей (Лауэ, 1912 г.), окончательно доказавшая тождество их природы со светом.

Кристалл представляет собой совокупность закономерно распределенных в пространстве атомов, групп атомов или ионов («пространственная решетка», например, рис. 66, где изображена простейшая кристаллическая решетка). Для того чтобы найти условия дифракции на таких правильных трехмерных структурах, мы рассмотрим последовательно одномерную (линейную), двумерную и трехмерную решетку.

Пусть мы имеем ряд рассеивающих центров *0, 1, 2, 3, 4, 5* (атомов), расположенных на одной прямой (рис. 67), и пусть на эту линейную решетку падает плоская волна под углом α_0.

Каждый из рассеивающих центров *0, 1, 2, 3, ...* является источником новой сферической волны, и эти когерентные сферические волны расходятся во всех направлениях. Рассмотрим какое-нибудь произвольное направление, характеризуемое углом α. Разность хода двух лучей, проходящих через каждую пару соседних атомов (0, 1; 1, 2; ...), как видно из рис. 67, равна $a(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$. Для того чтобы в направлении α получился дифракционный максимум, необходимо выполнение условия

$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = h\lambda, \tag{32.1}$$

где h — целое число. Из (32.1) следует

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 + h\frac{\lambda}{a}. \tag{32.2}$$

Это показывает, что линейная решетка действует как спектральный прибор, так как для каждой длины волны λ получается свое значение угла α. При $h = 1$ возникает, таким образом, спектр первого порядка, при $h = 2$ — второго порядка,

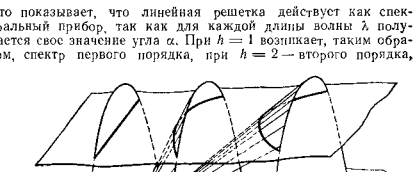


Рис. 68. Интерференционные полосы линейной решетки.

и т. д. В симметричных направлениях при $h = -1$, -2 и т. д. возникают также спектры — 1-го, —2-го и т. д. порядков. Совокупность их образует, таким образом, одномерное многообразие.

Если мы теперь примем во внимание, что каждый рассеивающий центр является источником *сферической* волны, то направления, соответствующие максимуму интерференции определенного (например, первого) порядка для данной длины волны, в *пространстве* лежат на поверхности конуса с углом при вершине α. На рис. 68 буквой L обозначена линейная решетка.

Очевидно, что если расположить флуоресцирующий экран или фотопластинку на некотором расстоянии от решетки, то следы интерференционных конусов дадут на этом экране гиперболы, по которым будут расположены максимумы интерференции для определенной длины волны.

Рис. 69. Плоская решетка.

Рассмотрим теперь плоскую, т. е. двумерную решетку (рис. 69). Ясно, что эту решетку можно рассматривать как двойное многообразие линейных решеток, расположенных параллельно осям x и y. Пусть теперь на эту решетку падает плоская волна, нормаль к которой образует с осями x и y углы α_0 и β_0. Рассматривая, как и раньше, каждый центр решетки как источник сферической волны, мы видим, что направления, в которых получается интерференционные максимумы, будут характеризоваться углами α и β, удовлетворяющими двум условиям:

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= h_1\lambda, \\ a(\cos\beta - \cos\beta_0) &= h_2\lambda, \end{aligned}\right\} \qquad (32.3)$$

где h_1 и h_2 — целые числа. Первое из этих условий есть, очевидно, условие максимума интерференции для линейных решеток, параллельных оси x, второе — то же условие для решеток, параллельных оси y. Если расположить на некотором расстоянии от плоской решетки флуоресцирующий экран, то каждая из систем линейных решеток, на которые мы разбиваем плоскую решетку, даст на экране свою систему гипербол и, очевидно, оба условия (32.3) будут удовлетворены для точек, лежащих на пересечении этих гипербол (рис. 70). Определяя из (32.3) $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, находим

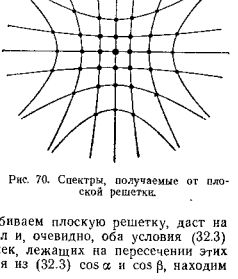


Рис. 70. Спектры, получаемые от плоской решетки.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\alpha_0 + h_1\frac{\lambda}{a}, \\ \cos\beta &= \cos\beta_0 + h_2\frac{\lambda}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.4)$$

Отсюда следует, что для каждой длины волны λ получаются свои значения α и β, т. е. и плоская решетка разлагает излучение в спектр. При этом, однако, в отличие от линейной решетки получается не простое, но *двойное* многообразие спектров. В самом деле, определенный спектр характеризуется *парой* чисел (h_1, h_2). Таким образом, получаются, например, спектры порядков $(+1, +1)$, $(+1, +2)$, ..., а также порядков $(+1, -1)$, $(+1, -2)$ и т. д. Это хорошо видно на рис. 70.

Рассмотрим, наконец, *пространственную* решетку. Ее можно разбить на три системы линейных решеток, параллельных осям x, y и z. Интерференционные максимумы в этом случае получаются в направлениях, характеризуемых углами α, β, γ, которые должны удовлетворять одновременно трем условиям:

$$\left.\begin{aligned} a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) &= h_1\lambda, \\ a(\cos\beta - \cos\beta_0) &= h_2\lambda, \\ a(\cos\gamma - \cos\gamma_0) &= h_3\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (32.5)$$

Определим из этих условий направляющие косинусы для интерференционных максимумов

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \cos\alpha_0 + h_1\frac{\lambda}{a}, \\ \cos\beta &= \cos\beta_0 + h_2\frac{\lambda}{a}, \\ \cos\gamma &= \cos\gamma_0 + h_3\frac{\lambda}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad (32.6)$$

Здесь, как видно, порядок интерференции определяется уже тремя числами (h_1, h_2, h_3). Вместе с тем обнаруживается и новое обстоятельство, а именно, что интерференционные максимумы возможны не для любых длин волн, а только для некоторых, совершенно определенных. В самом деле, наряду с условиями (32.5) для *любого* направления в пространстве автоматически удовлетворяются еще условия

$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0 = 1, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (32.7)$$

Поэтому из (32.5) определяются не только направляющие косинусы максимума интерференции, но и *длина волны*, для которой эта интерференция имеет место. Действительно, возводя в квадрат равенства (32.6), складывая их и принимая во внимание формулы (32.7), найдем

$$1 = 1 + \frac{\lambda^2}{a^2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) + 2\frac{\lambda}{a}(h_1\cos\alpha_0 + h_2\cos\beta_0 + h_3\cos\gamma_0),$$

откуда

$$\lambda = -2a\frac{h_1\cos\alpha_0 + h_2\cos\beta_0 + h_3\cos\gamma_0}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \qquad (32.8)$$

Это и означает, что при данном направлении падающей плоской волны (заданные α_0, β_0, γ_0) максимум интерференции определенного порядка (h_1, h_2, h_3) получается *только* для длины волны, удовлетворяющей равенству (32.8).

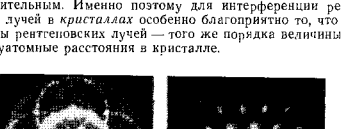
Геометрическая иллюстрация, которой мы пользовались при рассмотрении линейной и плоской решеток, позволяет легко понять причину этого ограничения. Предположим для простоты, что нормаль к падающей плоской волне направлена по оси z и что экран расположен также нормально к оси z. Тогда направления максимумов интерференции для линейных решеток, параллельных оси z, расположатся по поверхности конусов, которые дадут на экране систему кругов*) (рис. 71), причем каждый круг будет соответствовать определенной длине волны λ и определенному порядку интерференции $h_3 = \text{const}$. С другой стороны, каждая из плоских решеток, параллельных плоскости xy, даст для данной длины волны совокупность интерференционных максимумов, лежащих на пересечении двух систем гипербол (см. рис. 70). Для того чтобы при $\lambda = \text{const}$ были удовлетворены все три условия (32.6), нужно, чтобы круги рис. 71 прошли через точки пересечения гипербол, что при наличии одной определенной длины волны крайне маловероятно. Таким образом, при освещении пространственной решетки монохроматическим излучением или излучением с линейным спектром возникновение интерференции крайне маловероятно. Напротив, при освещении решетки излучением со сплошным спектром всегда найдется подходящая длина волны, удовлетворяющая всем условиям интерференции. Таким образом, после прохождения через пространственную решетку волна, обладающая сплошным спектром, разбивается на систему монохроматических интерференционных лучей, дающих на экране (фотопластинке) совокупность симметрично расположенных интерференционных пятен, и если бы

Рис. 71. Геометрическая иллюстрация условия интерференции в пространственной решетке.

*) Если бы направление решеток не совпадало с осью z или экран был расположен под любым углом к этой оси, то вместо кругов получились бы эллипсы, но все рассуждения остаются в силе и для этих случаев.

мы могли их непосредственно воспринимать глазом, то они представились бы нам различно окрашенными.

Заметим в заключение, что предыдущие рассуждения применимы для любой длины волны и для решеток с любым расстоянием между центрами со следующими ограничениями: длина волны λ должна быть меньше параметра решетки a, так как при $\lambda \geqslant a$ $h\frac{\lambda}{a} > 1$, и условия (32.2), (32.7) и (32.6) не могут быть удовлетворены ни для какой длины волны (косинус не может быть больше 1!). С другой стороны, если $\lambda \ll a$, то условия интерференции могут быть удовлетворены, но углы α, β, γ оказываются очень малыми и наблюдение интерференции становится затруднительным. Именно поэтому для интерференции рентгеновских лучей в *кристаллах* особенно благоприятно то, что длина волны рентгеновских лучей — того же порядка величины, что и междуатомные расстояния в кристалле.



а) *б)*

Рис. 72. Дифракция света на пространственной решетке, образованной в кристалле тремя ультразвуковыми волнами, направленными под углом 90° (*а*), углом 120° (*б*).

Для получения пространственной решетки с периодом a, подходящим для дифракции видимого света, пользуются ультразвуковыми волнами. Ультразвуковые волны в жидкостях и твердых телах могут быть получены с длиной волны порядка 10^{-4}—10^{-5} *см*, близкой к длинам волн видимого спектра ($7 \cdot 10^{-5}$—$4 \cdot 10^{-5}$ *см*). Поэтому, если образовать стоячие плоские ультразвуковые волны в жидкости или в твердом теле, то возникающая система уплотнений и разрежений создает прекрасную дифракционную решетку для света. Естественно ожидать, что три ультразвуковые волны, направленные взаимно перпендикулярно или под какими-нибудь другими углами, дадут пространственную

решетку с периодом, подходящим для дифракции видимого света. Это ожидание действительно оправдывается. На рис. 72 приведены два примера фотографий, полученных при пропускании света через жидкость (ксилол), в которой возбуждались три ультразвуковые волны одинакового периода. Дифракционные пятна видны здесь очень хорошо. Сравнение с рис. 74 (см. ниже), где приведена так называемая дифракционная картина Лауэ, полученная при пропускании рентгеновских лучей через кристалл кварца, показывает, что дифракция света на искусственной пространственной решетке кристалла (a — порядка 10^{-6} *см*, т. е. порядка длины волны рентгеновских лучей) дает совершенно аналогичные картины.

§ 33. Экспериментальное осуществление дифракции рентгеновских лучей

В предыдущем параграфе мы рассмотрели дифракцию рентгеновских лучей при помощи метода Лауэ. Экспериментальная установка для наблюдения дифракции по этому методу очень проста. Узкий пучок рентгеновских лучей, выделяемый круглым отверстием в толстом свинцовом экране B (рис. 73), проходит через кристалл K. Возникающие при этом дифракционные пучки фиксируются в виде пятен на фотопластинке P, расположенной перпендикулярно к пучку лучей. В качестве примера фотографий, получаемых по этому методу, на рис. 74 приведена картина дифракции в кристалле кварца. На основании сказанного в предыдущем параграфе для получения дифракции по методу Лауэ необходимо пользоваться тормозным рентгеновским излучением, имеющим сплошной спектр.

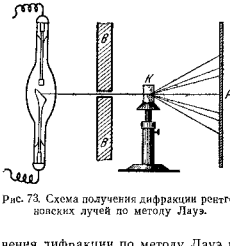


Рис. 73. Схема получения дифракции рентгеновских лучей по методу Лауэ.

У. Г. Брэгг и У. Л. Брэгг (отец и сын), а также, независимо от них, русский физик-кристаллограф Ю. В. Вульф предложили другой метод рассмотрения и расчета дифракции рентгеновских лучей. Коротко говоря, этот метод состоит в том, что каждое пятно рентгенограммы Лауэ рассматривается как результат *интерференционного отражения* рентгеновских лучей. Обратимся к простейшему случаю кубической кристаллической решетки, изображенной на рис. 76.

Представим себе оси координат, проведенные так, чтобы оси x, y, z были направлены вдоль ребер куба; тогда расположение атомов в плоскости xy представится рис. 75. Любая плоскость, пересекающая кристалл перпендикулярно к плоскости xy, оставит в этой плоскости след в виде прямой (например, 1 или $1'$, 2 или $2'$). Очевидно, прежде всего, что мы можем разбить всю кристалл на ряд плоскостей $1, 1', \ldots$ или $2, 2', \ldots$, параллельных его естественным граням. Эти плоскости будут одинаково густо усеяны атомами и будут отстоять друг от друга на одинаковое расстояние d равное ребру элементарной кубической ячейки. Однако из того же рисунка видно, что аналогичное разбиение можно осуществить множеством других способов. Таковы, например, плоскости $3, 3', \ldots$; $4, 4', \ldots$; они отличаются от плоскостей $1, 1', \ldots$ и $2, 2', \ldots$ только густотой заполнения атомами и межплоскостным расстоянием.

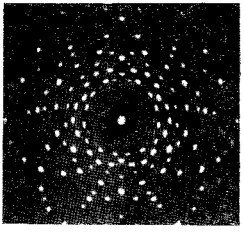


Рис. 74. Дифракция рентгеновских лучей в кристалле кварца.

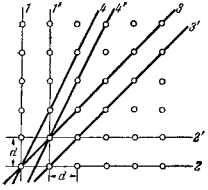


Рис. 75. Сетчатые плоскости.

Рассмотрим теперь одну из таких систем плоскостей, например плоскости, параллельные естественной грани (т. е. $1, 1', \ldots$ или $2, 2', \ldots$). Пусть на них падает параллельный пучок монохроматических лучей с длиной волны λ. Рассматривая атомы как центры новых когерентных элементарных волн, мы получаем для каждой из плоскостей отражение нулевого порядка под углом, равным углу падения. При этом отражение для одной единственной плоскости будет происходить совершенно одинаково для любой длины волны, так

как длины путей для всех лучей между собой равны, а следовательно, и разности хода всегда равны нулю. Примем теперь во внимание, что отражение происходит не от одной плоскости, но от системы равноотстоящих плоскостей. В этом случае картина осложняется интерференцией когерентных лучей, отраженных от *различных* плоскостей, и отражение на самом деле получится не для любой длины волны, а только для некоторых, вполне определенных. Действительно, лучи *1* и *2* (рис. 76), отраженные от плоскостей *I* и *II*, имеют разность хода, равную, как легко усмотреть из чертежа, $2d \sin \theta$, где θ — угол скольжения, т. е. дополнение до 90° к углу падения. Поэтому отражение будет иметь место только для тех волн, для которых эта разность хода равна целому числу длин волн. Итак, для интерференционного отражения рентгеновских лучей должно быть соблюдено условие

Рис. 76. К выводу уравнения Вульфа — Брэгга.

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{33.1}$$

Это и есть *формула Вульфа — Брэгга*, лежащая в основе всей спектроскопии рентгеновских лучей.

В действительности отражение происходит от многих плоскостей, т. е. интерферируют между собой не два пучка, но много пучков. Однако влияние этих многократных отражений не меняет условия максимума интерференции, а совершенно так же, как в оптике *), сказывается только в том, что вместо широких интерференционных полос получаются узкие линии, т. е. оказывается очень благоприятным для применения этого метода в спектроскопии рентгеновских лучей. Условие же (33.1) для отражения остается без изменения.

Мы рассматривали до сих пор отражение от системы плоскостей, параллельных естественной грани кристалла. Ничто не мешает нам, однако, рассматривать с теми же результатами и отражения от других систем плоскостей, вроде *3*, *3'*, ...; *4*, *4'*, ... и т. д. Можно показать совершенно строго **), что каждое пят-

*) См., например, теорию интерферометра Фабри — Перо или пластинки Луммера — Герке в книге Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 111.

**) Доказательство дается в курсах рентгеноструктурного анализа (см., например, Г. Б. Бокий, М. А. Порай-Кошиц, Рентгеноструктурный анализ, Изд во МГУ, 1964, стр. 182).

но рентгенограммы Лауэ является результатом интерференционного отражения от определенной системы сетчатых плоскостей. Таким образом, метод Вульфа — Брэгга, как способ рассмотрения, эквивалентен методу Лауэ. Однако метод Вульфа — Брэгга имеет и большое самостоятельное значение ввиду того, что он, как уже указывалось, лежит в основе спектроскопии рентгеновских лучей, а также — одного из наиболее плодотворных методов анализа кристаллов.

Простейшая схема рентгеновского спектрографа изображена на рис. 77. Параллельный пучок рентгеновских лучей падает на кристалл K, расположенный на вращающемся столике; FPF' — фотопленка. Вместо фотопленки иногда применяется ионизационная камера, поворачивающаяся одновременно с кристаллом на двойной угол (объяснить почему!). Сила ионизационного тока, возникающего в камере под действием рентгеновских лучей, является мерой интенсивности этих лучей. Если излучение обладает линейным спектром и состоит из нескольких длин волн λ_1, λ_2 ..., то каждая длина волны будет отражаться при своем угле θ, определяемом формулой Вульфа — Брэгга. Таким образом, кривая интенсивности рентгеновских лучей в зависимости от угла поворота кристалла будет иметь ряд максимумов, которые должны повториться в различных порядках отражения. На рис. 78 приведен пример такой кривой, полученной при отражении от кристалла NaCl излучения рентгеновской трубки с платиновым антикатодом.

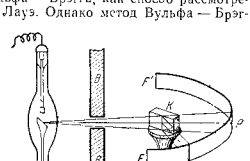


Рис. 77. Схема рентгеновского спектрографа.

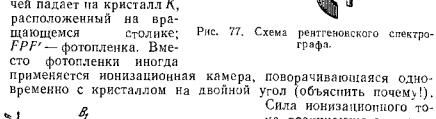


Рис. 78. Кривая отражения рентгеновских лучей от кристалла NaCl.

Три резких максимума этой кривой A_1, B_1, C_1, последовательно повторяющихся в трех порядках отражения, соответствуют трем спектральным линиям платины K_α, K_β и K_γ. То обстоятельство, что интенсивность отражения вне линий не равна нулю, но систематически возрастает при уменьшении угла отражения, имеет следующую простую причину: при бомбардировке платинового антикатода электронами, кроме характеристического излучения, возникает еще и тормозное излучение, которое имеет сплошной спектр. Благодаря этому спектральные линии платины накладываются на сплошной фон.

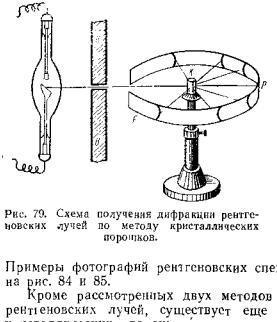


Рис. 79. Схема получения дифракции рентгеновских лучей по методу кристаллических порошков.

Примеры фотографий рентгеновских спектров приведены ниже на рис. 84 и 85.

Кроме рассмотренных двух методов получения дифракции рентгеновских лучей, существует еще третий метод — метод кристаллических порошков, получивший весьма широкое применение в анализе строения твердых тел при помощи рентгеновских лучей. В этом методе, предложенном Дебаем и Шеррером, вместо больших кристаллов, необходимых для применения методов Лауэ и Вульфа — Брэгга, используется по возможности мелко растертый кристаллический порошок, спрессованный в цилиндрический столбик (K на рис. 79).

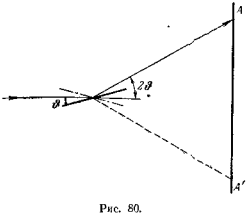


Рис. 80.

Если пропустить через такой столбик монохроматическое рентгеновское излучение, то вследствие полной хаотичности в ориентировке микрокристаллов порошка в столбике всегда найдутся

кристаллики, расположенные по отношению к лучу под углом, удовлетворяющим условию Вульфа — Брэгга для данной длины волны. При этом отраженные лучи идут по поверхности конуса с углом при вершине, равным 2θ (рис. 80). Если окружить столбик фотопленкой, как показано на рис. 79, то эти конусы оставят на пленке следы в виде кривых линий, каждая из которых соответствует определенной длине волны и определенному порядку отражения. Пример такой фотографии, полученной по методу кристаллических порошков, приведен на рис. 81.

Рис. 81. Дифракция рентгеновских лучей в кристаллическом порошке NaCl.

Огромное преимущество метода кристаллических порошков состоит именно в том, что он не требует больших кристаллов безукоризненного качества. Лишь немногие вещества в природе встречаются в виде таких кристаллов, а выращивание кристаллов удается далеко не во всех случаях.

Упражнение. Отражение первого порядка спектральной линии меди с длиной волны 1,542 Å (линия K_α меди) от естественной грани кристалла каменной соли происходит при угле скольжения 15° 15′. Определить величину d для NaCl

§ 34. Определение длины волны рентгеновских спектральных линий

Уравнение Вульфа — Брэгга (33.1) позволяет определить длину волны рентгеновских лучей по углу отражения θ, если известна величина d — расстояние между соседними атомными плоскостями в кристалле. Эта величина может быть вычислена независимым путем следующим образом. Пусть мы имеем кристалл правильной системы, т. е. такой, элементарная ячейка которого имеет форму куба. Примером может служить кристалл каменной соли (NaCl). Одна грамм-молекула NaCl имеет массу $M = 58{,}454$ $г$ и в ней заключается число молекул NaCl, равное постоянной Авогадро N; поэтому число ионов Na^+ и Cl^- в ней будет равно $2N$.

Рассмотрим элементарную ячейку кристалла NaCl. Изучение структуры этого кристалла показало, что в вершинах элементарного куба располагаются не молекулы NaCl, но ионы Na^+ и Cl^- (рис. 82). Таким образом, в 8 вершинах кубической ячейки помещаются 8 ионов, но так как каждая из вершин является общей для 8 соседних ячеек (это хорошо видно на рис. 82 для

центрального иона O), то на каждую ячейку приходится по одному иону. Если длина ребра ячейки равна d, то объем ее будет d^3, а весь объем одной грамм-молекулы, заключающей $2N$ ионов, будет $2Nd^3$. С другой стороны, тот же объем равен отношению массы M к плотности кристалла ρ, и мы получаем $2Nd^3 = \frac{M}{\rho}$ или

$$d = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{N\rho}}. \qquad (34.1)$$

Из этой формулы видно, что правильность определения d, а следовательно, и λ существенно зависит от достоверности знания постоянной Авогадро. Вопрос этот имеет большое значение для атомной физики, и мы к нему еще вернемся в § 38. Пока же заметим, что если принять для d_{NaCl} стандартное значение

$$d = 2{,}81400\ \text{Å},$$

то для длины волны линии K_α меди получается

$$\lambda = (1{,}537302 \pm 0{,}000031) \cdot 10^{-8}\ см.$$

Рис. 82. Кристаллическая решетка хлористого натрия. Светлые кружки — ионы хлора (Cl^-); черные кружки — ионы натрия (Na^+).

Как видно, точность настолько высока, что 1 Å ($= 10^{-8}$ *см*) оказывается здесь неудобной единицей, так как число достоверных десятичных знаков получается слишком большим *). Поэтому в спектроскопии рентгеновских лучей в большинстве случаев применяется другая единица, называемая X-единицей:

$$1\text{X} = 10^{-3}\ \text{Å} = 10^{-11}\ см. \qquad (34.2)$$

В этих единицах написанная выше длина волны изобразится числом

$$\lambda = (1537{,}302 \pm 0{,}031)\ \text{X}.$$

§ 35. Спектры рентгеновских лучей

На рис. 83 дана схема рентгеновских спектров элементов, от кислорода до урана. Уже беглый взгляд на этот рисунок обнаруживает замечательную особенность рентгеновских спектров —

*) Следует, однако, заметить, что приведенное число заключает в себе некоторую систематическую погрешность, о которой речь будет в § 37. Здесь длина волны K_α линии меди приводится лишь для характеристики числа знаков, с которыми могут быть указаны длины волн в спектроскопии рентгеновских лучей.

их простоту и единообразие. В то время как оптические спектры нередко очень сложны и иногда состоят из сотен или даже тысяч линий (например, спектр железа), рентгеновские спектры характеризуются малым числом линий. При переходе от элемента к элементу оптические спектры резко изменяются, обнаруживая в своей структуре периодичность, идущую параллельно

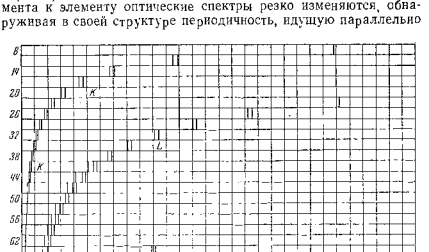


Рис. 83. Схема рентгеновских спектров различных элементов. (По оси ординат отложены атомные номера элементов.)

с периодичностью остальных свойств элементов; напротив, рентгеновские спектры построены совершенно однотипно, никакой периодичности не показывают и единственное изменение, которое наблюдается при переходе от легких элементов к тяжелым, заключается в монотонном смещении линий в сторону коротких волн. Наконец, как уже было указано в § 29, рентгеновские спектры являются чисто атомным свойством и в первом приближении вовсе не меняются, когда атом вступает в какое-либо соединение.

Как мы увидим далее, эта резкая разница в характере оптических и рентгеновских спектров обусловлена тем, что те и другие спектры возникают в разных частях атома: оптические спектры обусловлены движениями периферических электронов, в то

время как рентгеновские спектры возникают во внутренних частях атома.

Рис. 83 показывает также, что линии в рентгеновских спектрах собраны в несколько групп или серий. Самая коротковолновая из этих серий называется серией K, следующая в сторону длинных волн — серией L, далее идут серии M и N, наблюдаемые, впрочем только у тяжелых элементов. В действительности, оказывается, что все эти серии имеют естественное продолжение в оптической части спектра, однако соответствующие линии возбуждаются лишь при совершенно особых условиях. Из всех серий рентгеновских спектров наиболее простой структурой характеризуется серия K. Она состоит из трех линий, которые принято называть K_α, K_β и K_γ. Линия K_α — самая длинноволновая и вместе с тем наиболее яркая. Она является отчетливо разделяющимся дублетом и состоит из двух компонент α_1 и α_2. Линия K_β — следующая по длине волны и по интенсивности; она также является дублетом, но очень тесным и не во всех случаях разрешенным. Линия K_γ — самая коротковолновая.

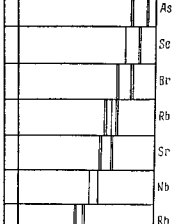


Рис. 84. Спектры K-серии некоторых элементов.

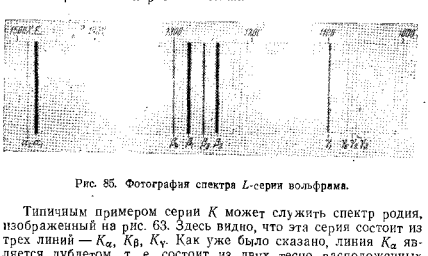


Рис. 85. Фотография спектра L-серии вольфрама.

Типичным примером серии K может служить спектр родия, изображенный на рис. 63. Здесь видно, что эта серия состоит из трех линий — K_α, K_β, K_γ. Как уже было сказано, линия K_α является дублетом, т. е. состоит из двух тесно расположенных

и закономерно связанных между собой линий. Однако на рис. 63 эта «тонкая структура» линий не видна вследствие малой разрешающей способности прибора. На рис. 84 приведено несколько фотографий серии K различных элементов. На рис. 85 в качестве примера приведена фотография серии L вольфрама. Видно, что эта серия имеет значительно более сложную структуру, нежели серия K, хотя все еще состоит из небольшого числа линий.

§ 36. Закон Мозели

При исследовании рентгеновских спектров элементов Мозели (1913—1914 гг.) установил простой закон, связывающий частоту спектральных линий с атомным номером испускающего их элемента.

Эта закономерность бросается в глаза при простом рассмотрении рис. 83. Здесь спектры расположены по шкале длин волн, которые нанесены на горизонтальной оси, а по вертикальной оси отмечены атомные номера. Так как все спектры совершенно однотипны, то можно проследить смещение какой-нибудь определенной линии (например, одной из линий серии K) при увеличении атомного номера. При этом легко заметить, что кривая, представляющая зависимость длины волны от атомного номера, имеет вид параболы. Более простая закономерность получается, если вместо длин волн рассматривать частоты c/λ или просто обратные длины волн $1/\lambda$. Тогда оказывается, что квадратный корень из обратной длины волны, $\sqrt{1/\lambda}$, связан с атомным номером *линейной* зависимостью. Особенно интересный и теоретически важный вид приобретает эта закономерность, если ввести в рассмотрение еще универсальную константу, входящую во все спектральные законы, — так называемую постоянную Ридберга R, равную 109 737,42 $см^{-1}$ (см. гл. VIII). Мозели показал, что, например, для линии K_α число Q_{K_α}, построенное следующим образом:

$$Q_{K_\alpha} = \sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{{}^3/_4 R}}, \tag{36.1}$$

где $\nu_{K_\alpha} = \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}$, на единицу меньше атомного номера

$$Q_{K_\alpha} = Z - 1. \tag{36.2}$$

Это видно из таблицы IX.

Из (36.1) и (36.2) получаем $\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{{}^3/_4 R}} = Z - 1$, что можно представить в виде

$$\nu_{K_\alpha} = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right). \tag{36.3}$$

Таблица IX

Элемент	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{^3/_4 R}}$	Z	Элемент	$\sqrt{\frac{\nu_{K_\alpha}}{^3/_4 R}}$	Z
Ca	19,00	20	Fe	24,99	26
Ti	20,99	22	Co	26,00	27
V	21,96	23	Ni	27,04	28
Cr	22,98	24	Cu	28,01	29
Mn	23,99	25	Zn	29,01	30

Аналогичные соотношения имеют место и для линий других серий рентгеновского спектра. Например, для серии L соотношение Мозели имеет вид

$$\nu_L = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right), \qquad (36.4)$$

где σ — некоторое постоянное число.

Формулы (36.3) и (36.4) уже своим симметричным видом показывают, что мы имеем дело с какой-то существенной закономерностью принципиального характера. В дальнейшем мы увидим, что эти формулы являются частными случаями общих формул спектральных серий, имеющих ясное теоретическое истолкование. Здесь же важно отметить, что закон Мозели для всех серий рентгеновского спектра устанавливает линейную связь между квадратным корнем из обратной длины волны спектральных линий и атомным номером (рис. 86). Эта связь позволяет по измеренной длине волны точно установить атомный номер данного элемента, а следовательно, — заряд его ядра.

Значение этого закона сделается особенно ясным, если принять во внимание, что расположение элементов в периодической системе, основанное на атомных весах и химических свойствах элементов, далеко не во всех случаях было сделано с полной уверенностью. В различных частях периодической таблицы были пустые места, отвечающие неоткрытым элементам; далее, участок от $Z=58$ до $Z=71$ (во время Мозели считалось до $Z=72$) занят элементами редких земель, химические свойства которых различаются настолько мало и атомные веса которых нередко были настолько недостоверны, что правильность их расположения по порядку возбуждала большие сомнения. Закон Мозели устранил все эти затруднения. Он показал с полной определенностью, что между водородом и ураном должно существовать ровно 92 типа атомов с различными атомными номерами, и тем самым точно указал число еще неоткрытых в то

время элементов. Кроме того, он устранил также всякие сомнения в правильности размещения тех элементов, которые были расположены Менделеевым в порядке, противоречившем значениям их атомных весов (Co—Ni, Ar—K, Te—I). Вместе с тем этот закон впервые показал, что не атомный вес, но атомный номер, равный заряду ядра, определяет химическую индивидуальность атома. Этот вывод нашел замечательное подтверждение в открытии изотопов.

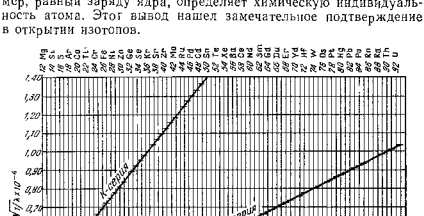


Рис. 86. Диаграмма Мозели.

Заметим в заключение, что в этом законе очень отчетливо выражена одна существенная особенность, характерная для рентгеновских лучей: рентгеновские спектры изменяются *монотонно* при изменении атомного номера Z. С этим следует сопоставить тот факт, что многие свойства атома, как, например, химическая валентность, удельный объем и ряд других свойств, указанных в § 12, изменяются *периодически* с увеличением Z.

Рис. 87, где на одном чертеже представлены прямые, выражающие закон Мозели, и кривая атомных объемов, имеющая ряд резких максимумов и минимумов, подчеркивает эту особенность рентгеновских лучей особенно ярко.

Объяснение этого различия состоит в том, что рентгеновские спектры, как мы увидим в главе второго тома, возникают во внутренних частях атома и показывают, таким образом, что эти

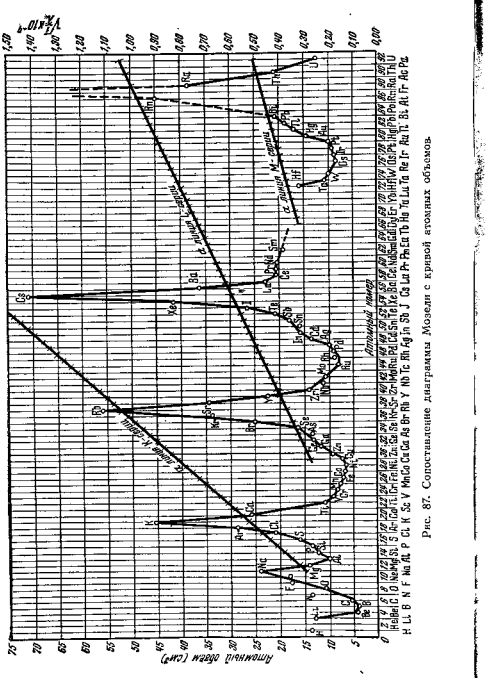


Рис. 87. Сопоставление диаграммы Мозели с кривой атомных объемов

внутренние, ближайшие к ядру области атома обладают у различных атомов *одинаковой структурой*, в то время как внешние, периферические части атома характеризуются периодически повторяющейся структурой.

§ 37. Абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей

Показатель преломления рентгеновских лучей очень мало отличается от 1. Долгое время думали даже, что рентгеновские лучи вообще не преломляются. Однако было замечено, что для рентгеновских лучей большой длины волны (2—3 Å) наблюдаются систематические отступления от формулы Вульфа — Брэгга, которые были истолкованы как следствие того, что рентгеновские лучи испытывают преломление в кристалле (при выводе формулы Вульфа — Брэгга показатель преломления принимается равным 1!). Характер этих отступлений указывал на то, что показатель преломления рентгеновских лучей при переходе из воздуха в кристалл *меньше* 1. Из этого следовало, что рентгеновские лучи при переходе из воздуха в твердое тело могут испытывать *полное отражение* совершенно аналогично тому, как свет при переходе из стекла в воздух при углах падения, больших критического, испытывает полное отражение, называемое обычно внутренним. А. Комптон в 1923 г. показал, что полное отражение рентгеновских лучей при переходе из воздуха в твердое тело действительно наблюдается, и, определив критический угол, нашел показатель преломления. Для длины волны 1,279 Å критический угол в случае кронгласа с плотностью 2,52 оказался равным 11′, что соответствует показателю преломления, меньшему 1 на $5 \cdot 10^{-6}$ (т. е. $\mu = 0{,}999995$).

Это открытие показало, что возможно получение спектров рентгеновских лучей от обыкновенной дифракционной решетки, если ею пользоваться как отражательной решеткой при углах падения, больших критического, т. е. при очень малых углах скольжения. Так как максимальный угол полного отражения для различных длин волн и различных веществ меняется в пределах от 10′ до 3°, то дифракционные решетки, которыми надлежит пользоваться в случае рентгеновских лучей, должны быть грубее, нежели решетки, обычно применяемые в оптике. Это может показаться на первый взгляд парадоксальным, однако, следует иметь в виду, что при малых углах скольжения θ решетка с периодом d действует как решетка с периодом $d \sin \theta$ при нормальном падении лучей*). Так как синус 10′ равен

*) См., например, Г. С Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 167.

$3 \cdot 10^{-3}$, то эффективный период даже очень грубой решетки при таких углах скольжения становится настолько малым, что получается возможность наблюдать дифракцию рентгеновских лучей. Так, например, при таком угле решетка всего с 50 линиями на *мм* действует, как решетка с 17 000 линий на *мм*, а лучшие современные решетки имеют 1200 линий на *мм*!

Рис. 88. Схема опыта для получения спектров рентгеновских лучей от дифракционной решетки. (Ширина щелей S_1 и S_2 равна 0,01 *мм*, расстояние между ними 42 *см*.)

На рис. 88 изображена схема опыта для получения дифракционных спектров от оптической решетки, а на рис. 89 приведены фотографии спектров серии *K* меди (длины волн 1,392 Å и 1,542 Å) и хрома (длины волн 2,084 Å и 2,291 Å), полученные с решетками с числом линий, указанных в подписи (наибольшее число линий — 287 на *мм*). Цифры 1, 2, 3, ... означают порядок спектра.

Для определения длин волн по этим спектрам пользуются уравнением дифракционной решетки при косом падении лучей *)

$$d(\sin i - \sin r) = n\lambda,$$

где i — угол падения, а r — угол дифракции. Заменяя углы i и r углами скольжения θ и α, показанными на рис. 88, получаем уравнение решетки в том виде, в каком им практически пользуются в спектроскопии рентгеновских лучей,

$$d[\cos\theta - \cos(\theta + \alpha)] = n\lambda, \tag{37.1}$$

или

$$2d \sin\frac{2\theta + \alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} = n\lambda. \tag{37.1'}$$

Это уравнение позволяет производить абсолютное определение длины волны рентгеновских лучей, т. е. определение, не зависящее от знания каких-либо констант, получаемых косвенным образом (ср. § 34). Действительно, постоянная дифракционной

*) Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 167.

решетки d может быть либо измерена непосредственно компаратором, либо определена обычным в оптике способом, т. е. путем градуировки решетки по одному из спектроскопических стандартов, а углы θ и α непосредственно измеряются с высокой степенью точности. Практически для определения d пользовались зеленой линией спектра паров меди $\lambda = 5153{,}25$ Å. Точность таких абсолютных измерений длин волн рентгеновских лучей была оценена в 0,002—0,004%.

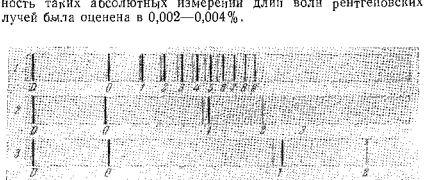


Рис. 89. Типичные рентгеновские спектры от дифракционной решетки (увеличенные примерно в 2 раза): *D* — прямой луч; 0 — нулевой порядок (луч, испытавший полное отражение). Фотографии *1—4* рентгеновские спектры *K*-серии меди, полученные с помощью решеток, имеющих 50; 287; 60 и 143 линии на 1 *мм*. Фотография *5* — *K*-серия хрома; решетка с 387 линиями на 1 *мм*.

К изумлению исследователей оказалось, что для одних и тех же спектральных линий длины волн, измеренные с помощью кристаллов, отличаются от длин волн, измеренных абсолютно, в одну и ту же сторону в среднем на 0,15%, т. е. на величину, превосходящую ошибку измерения почти в 100 раз!

После длительных безуспешных попыток отыскать источник ошибки в измерениях длин волн по методу кристаллов, рентгеноспектроскописты пришли к заключению, что источник этот — не в измерениях, а в принятом в то время (1931—1935 гг.) значении постоянной Авогадро, знание которой необходимо для вычисления постоянной кристалла d по формуле (34.1). Целесообразно поэтому рассмотреть методы определения постоянной Авогадро, что и будет сделано в следующем параграфе.

§ 38. Определение постоянной Авогадро и заряда электрона

Прямой метод определения постоянной Авогадро N основан на изучении броуновского движения. При этом обычно либо находится распределение по высоте микроскопических частиц эмульсии, либо измеряется средний квадрат смещения частицы, совершающей броуновское движение в жидкости или в газе (в частности, такие определения производились с маслянными капельками в конденсаторе Милликэна). Однако точность этих определений невелика: значение N, полученное в классических работах Перрена, отличается от современного стандартного значения на 25%. Гораздо более точные результаты были получены при изучении вращательного броуновского движения. Если подвесить очень легкое зеркальце на тонкой кварцевой нити и наблюдать на достаточно удаленной шкале за отраженным от зеркальца лучом света (рис. 90), то зайчик не остается на месте, но совершает нерегулярные колебания около положения равновесия. Это «непостоянство нуля» подвешенной системы есть результат вращательного броуновского движения под действием ударов со стороны молекул воздуха. Так, например, с зеркальцем размером 0,8×1,6 *мм*, подвешенным на кварцевой нити толщиной в несколько десятых микрона, на шкале, отстоящей от зеркальца всего на 1,5 *м*, наблюдались смещения зайчика в несколько сантиметров.

Рис. 90. Наблюдение непостоянства нулевого положения подвешенного зеркальца вследствие броуновского вращательного движения.

Согласно одной из важнейших теорем классической статистической механики — так называемой теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы (см. § 85) — средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы, равна $\frac{1}{2}kT$, где k — постоянная Больцмана, равная универсальной газовой постоянной R, деленной на постоянную Авогадро N:

$$k = R/N. \qquad (38.1)$$

При этом совершенно безразлично, какова именно эта степень свободы: для одноатомной молекулы газа, совершающей поступательное движение, степени свободы суть декартовы координаты центра тяжести молекулы, а для системы, способной совершать вращательные колебания около неподвижной оси, единственная степень свободы характеризуется углом закручивания φ. При тепловом равновесии при температуре T средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы воздуха, приходящаяся на одну степень свободы, и средняя энергия броуновских вращательных колебаний зеркальца, подвешенного в воздухе, одна и та же и равна $\frac{1}{2}kT$. Кинетическая энергия этих вращательных колебаний равна $\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$, где I — момент инерции. При закручивании нити на угол φ возникает потенциальная энергия, равная $\frac{1}{2}A\varphi^2$, где A — некоторая упругая константа нити. Для малых колебаний средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной (см. § 46), так что

$$\frac{1}{2}I\overline{\dot{\varphi}^2} = \frac{1}{2}A\overline{\varphi^2}. \qquad (38.2)$$

По теореме о равномерном распределении энергии

$$\frac{1}{2}A\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2}kT. \qquad (38.3)$$

Таким образом, зная упругую константу A и среднее значение $\overline{\varphi^2}$, можно непосредственно найти k, а отсюда по (38.1) вычислить N.

Опыты с вращательным броуновским движением для точного определения N были произведены с большой тщательностью Капплером. Отклонения зеркальца регистрировались фотографически на движущейся фотопленке. Примеры таких регистрационных кривых, полученных в различных условиях, приведены на рис. 91. Интересно отметить, что при атмосферном давлении (кривая 91, *а*) колебания зеркальца совершенно хаотичны, но по мере понижения давления (кривые 91, *б* и 91, *в*) колебания все более приближаются к синусоидальным с периодом, соответствующим собственным колебаниям крутильного маятника, каковым является зеркальце. Существенно, однако, что во всех случаях средняя величина $\overline{\varphi^2}$ остается одной и той же.

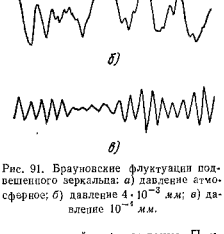


Рис. 91. Броуновские флуктуации подвешенного зеркальца: *а*) давление атмосферное; *б*) давление $4\cdot10^{-2}$ *мм*; *в*) давление 10^{-4} *мм*.

Регистрируя подобным образом колебания зеркальца в течение 101 часа при температуре 287° К, Капплер нашел, что $\overline{\varphi^2}$ при этих условиях равен $4{,}178\cdot10^{-6}$ радиан. Постоянная кручения нити A была определена в отдельном опыте с точностью до

$\pm 0{,}2\%$. В результате было получено для N значение $N = 6{,}059 \cdot 10^{23}$ с точностью, которая была оценена в $\pm 1\%$.

Эта точность, однако, не удовлетворяет тем высоким требованиям, которые предъявляются в настоящее время к значениям основных универсальных констант. Более точное стандартное значение N находится, однако, косвенным путем. Заряд электрона может быть выражен как частное от деления заряда Фарадея F на постоянную Авогадро N (см. § 1):

$$e = \frac{F}{N}.$$

Так как из опытов Милликэна заряд e считался известным с достаточной точностью, то N находилось по данным e и F:

$$N = \frac{F}{e}.$$

Таким образом, точность определения N зависела от точности, с какой известен заряд электрона. Систематическое расхождение величин λ, найденных при помощи дифракционной решетки и при помощи кристалла, дало толчок к проверке результатов Милликэна, так как в формулу (34.1), при помощи которой вычисляется постоянная кристалла d, входит N. Оказалось, как уже было указано в § 3, что результаты Милликэна испорчены недостаточно точным значением вязкости воздуха η, которое он использовал в своих расчетах.

Единственный выход из затруднения состоял в том, чтобы постоянную кристалла d определить экспериментально по абсолютному значению длины волны, подобно тому как в оптике градуируются дифракционные решетки.

В самом деле, если известна абсолютная длина волны λ, найденная при помощи отражательной решетки, и если определить при помощи рентгеновского спектрографа с кристаллом угол φ, при котором получается отражение этой длины волны в первом порядке, то по формуле Вульфа — Брэгга

$$\lambda = 2d \sin\varphi$$

можно определить постоянную кристалла d. Подобное определение постоянной решетки кальцита ($CaCO_3$), обычно применяемого в рентгеновской спектроскопии, после внесения необходимых поправок (в том числе поправки на показатель преломления рентгеновских лучей) дало величину d для 18° С:

$$d = 3{,}03560 \cdot 10^{-8}\ см.$$

Зная эту величину, можно найти постоянную Авогадро следующим образом: из формулы (34.1) следует, что для кристалла

правильной системы (NaCl)

$$N = \frac{M}{2d^3\rho}. \tag{38.4}$$

В случае кальцита, у которого элементарной ячейкой является не куб, а ромбоэдр, формулу (38.4) следует немного изменить. Если β есть тупой угол между ребрами ромбоэдра, $\beta \approx 101°54'$, то объем элементарной ячейки будет $d^3\Phi(\beta)$, где

$$\Phi(\beta) = \frac{(1+\cos\beta)^2}{\sin\beta\,(1+2\cos\beta)},$$

и формула (38.4) примет вид

$$N = \frac{M}{2d^3\Phi(\beta)\,\rho}. \tag{38.5}$$

Если подставить сюда точные данные для всех величин $M = 100{,}090$ (по химической шкале); $d_{18°} = 3{,}0356 \cdot 10^{-8}$ *см*; $\rho_{20°} = 2{,}71025$ и $\Phi(\beta) = 1{,}00595$, то для N получается

$$N = (6{,}0228 \pm 0{,}0011) \cdot 10^{23} \tag{38.6}$$

— величина, существенно отличающаяся от принятого ранее стандартного значения ($6{,}06 \cdot 10^{23}$).

Зная постоянную Авогадро, можно вычислить и заряд электрона по формуле $e = F/N$. Заряд Фарадея, т. е. количество электричества, переносимое при электролизе одним грамм-эквивалентом любых ионов, по наиболее точным определениям равен (по химической шкале)

$$F = (2{,}89247 \pm 0{,}00030) \cdot 10^{14}\ СГСЭ \cdot г\text{-}экв^{-1}.$$

Комбинируя это число со значением N (39,6), получаем точное значение заряда электрона

$$e = (4{,}8025 \pm 0{,}0010) \cdot 10^{-10}\ СГСЭ.$$

§ 39. Удельный заряд электрона

Изучение рентгеновских спектров открывает новую возможность и для точного определения удельного заряда электрона e/m. Электронная теория дисперсии приводит к следующему выражению для показателя преломления в случае слабо связанных электронов и достаточно жестких рентгеновских лучей:

$$\mu = 1 - \frac{ne^2}{2\pi m\nu^2}, \tag{39.1}$$

где n — число электронов в 1 *см*³ и ν — частота рентгеновских лучей. Число электронов n можно выразить следующим

образом: число электронов в одном моле вещества с атомным номером Z равно NZ, а в 1 *см*³

$$n = \frac{NZ}{M}\rho, \tag{39.2}$$

где M — атомный вес. Если e выражено в электростатических, а F — в электромагнитных единицах, то $Ne = Fc$; заменяя ν через c/λ, получаем из (39.1) и (39.2)

$$\mu = 1 - \frac{FZ\rho\lambda^2}{2\pi M}\cdot\frac{e}{mc},$$

откуда, обозначая $\delta = 1 - \mu$, находим

$$\frac{e}{m} = \frac{2\pi M}{FZ\rho}\cdot\frac{\delta}{\lambda^2}\ \text{СГСМ}\cdot e^{-1}. \tag{39.3}$$

Отсюда следует, что для определения e/m (т. е. удельного заряда в электромагнитных единицах) достаточно определить точно δ и абсолютную длину волны рентгеновских лучей. Для этой цели был использован спектр рентгеновских лучей, полученный с помощью призмы, которой служил большой алмаз (весом 13 карат). На рис. 92 приведен спектр излучения K-серии меди, полученный с такой призмой. Определение длин волн по этим спектрам дало результаты, хорошо согласующиеся с найденными из измерений с дифракционной решеткой. Определив, кроме того, точнейшим образом плотность алмаза [при этом получилось

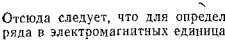


Рис. 92. Призматический спектр K-серии меди.

$$\rho = (3{,}5154 \pm 0{,}0001)\ г\cdot см^{-3}]$$

и воспользовавшись формулой (39.3), Бэрден нашел для e/m

$$\frac{e}{m} = (1{,}7601 \pm 0{,}0003)\cdot 10^7\ \text{СГСМ}\cdot e^{-1}$$

— число, близкое к полученному из непосредственных определений (см. §§ 7, 8).

ГЛАВА V

СТРОЕНИЕ АТОМА И КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И СТРОЕНИЕ АТОМА

§ 40. Атомные модели

В предыдущих главах мы привели доказательства того, что атом представляет собою сложную систему, состоящую из положительного электричества и Z электронов. На первых стадиях развития теории строения атома предполагалось, что вся эта система является статической. Для того чтобы можно было рассматривать электроны как частицы, находящиеся в равновесии, пришлось допустить, что положительное электричество распределено сплошным образом и занимает сферу с радиусом порядка радиуса всего атома, т. е. 10^{-8} *см*, а электроны как бы плавают в «облаке» положительного электричества. Испускание света атомом рассматривалось как результат малых колебаний электронов около их положений равновесия (модель Дж. Дж. Томсона). Однако опыты с рассеянием α-частиц, для объяснения которых потребовалось введение гипотезы о существовании очень малого положительного ядра (порядка 10^{-12}—10^{-13} *см*), где сосредоточена почти вся масса атома, заставили совершенно отказаться от статической модели и перейти к модели планетарной, т. е. рассматривать электроны как частицы, обращающиеся вокруг ядра по определенным орбитам.

В этой главе мы займемся рассмотрением того формального аппарата, который дает классическая физика, — а именно, классическая механика и электродинамика, — для теоретического изучения проблемы строения атома, и, кроме того, рассмотрим основные выводы, к которым она приводит. При этом вместо того, чтобы рассматривать атомные системы во всей их сложности, мы будем пользоваться простейшими механическими моделями. Образцом системы, совершающей колебания, будет для нас служить частица, колеблющаяся по прямой — *линейный осциллятор*; образцом системы, в которой происходит обращение около неподвижного центра, будет служить электрон, обращающийся вокруг положительного ядра.

§ 41. Закон сохранения энергии в механике

В основе классической механики лежат ньютоновы «аксиомы, или законы движения». Математическая формулировка в виде уравнений движения вытекает, как известно, из второго закона, согласно которому производная по времени от количества движения равна приложенной силе. Для одной частицы этот закон дает три дифференциальных уравнения

$$\frac{dp_x}{dt} = X, \quad \frac{dp_y}{dt} = Y, \quad \frac{dp_z}{dt} = Z, \tag{41.1}$$

где X, Y и Z — проекции силы на оси координат. Эти три скалярных уравнения можно заменить одним векторным

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \tag{41.2}$$

(производную по времени мы будем обозначать точкой).

Уравнение движения, написанное в форме (41.2) с производной от *количества движения* в левой части, пригодно как для случая малых скоростей (по сравнению со скоростью света), так и для больших ($v/c \sim 1$). Но только в том случае, когда $v/c \ll 1$, массу можно считать не зависящей от скорости, и производная $\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$ в этом случае есть просто $m\dot{\mathbf{v}}$ или $m\ddot{\mathbf{r}}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение частицы. При этом условии для малых скоростей три скалярных уравнения (41.1) можно написать в обычном виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z, \tag{41.1'}$$

а векторное уравнение (41.2) — в виде

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \tag{41.2'}$$

Умножим теперь уравнение (41.2′) *скалярно* на скорость $\dot{\mathbf{r}}$:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}. \tag{41.3}$$

Левую часть полученного равенства преобразуем так:

$$m\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

Величина

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{41.4}$$

называется *кинетической энергией*. Итак, в левой части (41.3) мы имеем производную по времени от кинетической энергии

$$m\ddot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} = \frac{dT}{dt}. \tag{41.5}$$

Из (41.3) и (41.5) получаем

$$dT = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}\,dt = \mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \tag{41.6}$$

Но $\mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ есть работа силы на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$, следовательно, работа силы равна приращению кинетической энергии.

Во многих случаях составляющие силы могут быть выражены как взятые со знаком минус частные производные по координатам от некоторой функции координат U *):

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{41.7}$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U. \tag{41.7'}$$

В этом случае

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right). \tag{41.8}$$

Если U есть функция одних только координат, то в правой части (41.8) мы имеем полный дифференциал

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt}. \tag{41.9}$$

Работа силы на элементарном перемещении $d\mathbf{r}$ будет тогда

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}}\,dt = -\frac{dU}{dt}\,dt = -dU,$$

а работа силы на конечном пути от точки A до точки B

$$\int_A^B \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B.$$

Если U есть, кроме того, функция однозначная, то работа силы, как видно, не зависит от пути и равна разности значений U в начальной и конечной точках пути. Функция U, обладающая свойством, выраженным равенствами (41.7), вообще называется потенциальной функцией. Если она не зависит явно от времени и является однозначной функцией координат, то она называется потенциальной энергией.

*) Простейшим примером может служить сила тяжести, равная mg. В этом случае $U = -mgz$, и составляющие будут

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} = mg.$$

Из (41.3), (41.5) и (41.9) следует

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(T+U) = 0, \tag{41.10}$$

откуда

$$T + U = \text{const} \equiv E. \tag{41.11}$$

Это и есть механический закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная. Поле сил, имеющих потенциал U, не зависящий явно от времени, называется консервативным.

Бывают, однако, случаи, когда функция U, обладающая свойством (41.7), существует, но она зависит от времени *). Рассмотрим, например, движение заряженной частицы внутри конденсатора, между пластинами которого имеется разность электрических потенциалов V, периодически меняющаяся со временем, например по закону косинуса $V = V_0 \cos \omega t$. Произведение заряда e на V

$$U = eV = eV_0 \cos \omega t$$

обладает тем свойством, что сила, действующая на частицу со стороны поля в каждый момент, есть градиент U:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U,$$

но функция U, а вместе с ней и сила $\mathbf{F}$ явно зависят от времени. Сумма $T + U$ в этом случае не имеет постоянного значения. В самом деле,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right).$$

Следовательно, (41.8) теперь дает

$$\mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} = -\frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t},$$

и вместо (41.10) мы получаем

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Это показывает, что система «незамкнута», т. е. что она представляет только часть большей системы, для которой в целом закон сохранения энергии, конечно, имеет место.

Встречаются случаи, когда силы зависят от скорости. Примером может служить сопротивление среды движущимся телам:

*) По поводу возможности использования зависящего от времени потенциала, который целесообразно называть «обобщенным потенциалом», см. Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957, стр. 32 и след.

такова стоксова сила сопротивления воздуха $F = 6\pi\eta a v$, с которой мы встретились в § 2 при рассмотрении падения масляных капелек. Обозначив коэффициент при v через k и принимая во внимание, что сила сопротивления R всегда направлена противоположно скорости, можно написать вообще

$$R = -kv.$$

Уравнение движения частицы под действием силы $\mathbf{F}$ в среде с сопротивлением $\mathbf{R}$ будет

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}.$$

Умножая обе части на $\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v}$, получаем

$$m\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{r}}.$$

На основании формул (41.1) и (41.2) и принимая во внимание, что $\mathbf{R}\dot{\mathbf{r}} = -kv^2$, получаем $\frac{d}{dt}(T+U) = -kv^2$.

Мы видим, что, как и в предыдущем случае, сумма $T + U$ не остается постоянной; так как, далее, v^2 всегда >0, то $-kv^2 < 0$ и, следовательно, $T + U$ со временем убывает: силы трения неконсервативны.

Важным случаем сил, зависящих от скорости, является сила, действующая со стороны магнитного поля на движущуюся заряженную частицу. Эта сила, выражающаяся векторным произведением

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}],$$

перпендикулярна к скорости и потому *не производит никакой работы*.

В заключение напомним, что так как потенциал определяется через свои производные [формулы (41.7)], — только разность потенциалов имеет определенную величину. Абсолютное же значение потенциала включает некоторую произвольную постоянную, вследствие чего нуль потенциала может быть выбран произвольно.

§ 42. Потенциальные кривые

Закон сохранения энергии дает соотношение между первыми производными координат по времени, которое может быть использовано при решении механических задач. Особенно удобно пользоваться им в случае одномерного движения частицы, когда этого одного соотношения и достаточно. Положим, что частица движется по прямой. Если мы выберем эту прямую за ось x,

то потенциальная энергия будет функцией только одной координаты $U = U(x)$. Закон сохранения энергии дает тогда

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = E,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)},$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}} + t_0, \tag{42.1}$$

где t_0 — произвольная постоянная.

Зная явное выражение потенциальной энергии, мы можем при помощи формулы (42.1) найти закон движения. Положим, например, что $U = {}^1/_2 fx^2$, где f — некоторая положительная постоянная. Тогда формула (42.1) дает

$$t - t_0 = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2} fx^2\right)}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{f} - x^2}}. \tag{42.1'}$$

Положительное число $2E/f$ мы можем обозначить через a^2 (легко видеть, что a имеет размерность длины), и тогда

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{f}} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{m}{f}} \arcsin \frac{x}{a},$$

откуда

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{f}{m}}\, t - \sqrt{\frac{f}{m}}\, t_0\right),$$

или, обозначая постоянную $\sqrt{\frac{f}{m}}\, t_0$ через δ,

$$x = a \sin\left(\sqrt{\frac{f}{m}}\, t - \delta\right).$$

Итак, при $U = fx^2/2$ движение представляет собой гармоническое колебание.

Знание потенциальной энергии в случае одномерного движения позволяет установить качественный характер движения, совсем не пользуясь аналитическими средствами. Для этого достаточно построить кривую, изображающую потенциальную энергию в зависимости от координаты. Такие кривые называются потенциальными кривыми.

Пусть, например, потенциальная кривая имеет вид, изображенный на рис. 93. Тогда мы можем, не вычисляя интеграла, стоящего в правой части (42.1) (и даже не зная точного аналитического выражения потенциальной энергии), установить некоторые важные особенности движения. Возьмем какое-нибудь значение полной энергии, например E_1, и проведем на чертеже прямую, параллельную оси абсцисс, на расстоянии E_1 от нее. Эта прямая пересекает нашу потенциальную кривую в точках B, C, D с абсциссами x_1, x_2, x_3. Очевидно, что формула (42.1) имеет физический смысл (с точки зрения классической механики) только в том случае, когда радикал $\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}$ действителен, т. е. когда $E \geqslant U$. Из рисунка мы видим, что это осуществляется при условии, если

Рис. 93. Пример потенциальной кривой.

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \tag{I}$$

или при условии

$$x \geqslant x_3. \tag{II}$$

Таким образом, когда частица находится в области I, — ее движение таково, что она не может выйти за пределы этой области. В самом деле, ее абсцисса не может стать меньше x_1 и больше x_2, так как в этом случае ее потенциальная энергия стала бы больше полной, а скорость $\dot{x}$ сделалась бы мнимой. Из этого следует, что движение частицы в области I есть колебание. Крайние положения достигаются при $x = x_1$ и $x = x_2$, когда U становится равным E. *Период* колебания, очевидно, равен

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U)}}.$$

В область II частица проникнуть не может. Но если, обладая полной энергией E_1, она находится в точке $x = x_3$, то ее абсцисса может возрастать до бесконечности, так как при всех значениях $x \geqslant x_3$ потенциальная энергия меньше полной.

Пусть теперь частица обладает запасом энергии $E_2 > E_1$. Проводя, как раньше, на чертеже прямую на высоте E_2, мы видим, что вправо от A частица может перемещаться до бесконечности, так как там ее полная энергия всюду больше

потенциальной. Влево же от A движению частицы препятствует непреодолимый барьер (область $E < U$).

Качественный характер движения можно установить при помощи потенциальной кривой, пользуясь следующей наглядной иллюстрацией. Представим себе идеально гладкую дорожку, сделанную так, что ее профиль как раз совпадает с потенциальной кривой. В случае кривой рис. 93 это будет спуск, сменяющийся небольшим подъемом и затем снова продолжающийся. Положим на эту дорожку тяжелый шарик на высоте E и предоставим его самому себе. Шарик покатится вниз, и его движение будет почти точно представлять движение интересующей нас частицы. Если поднять его на высоту E_1, то он будет кататься взад и вперед в углублении I и не сможет «перескочить» через бугор II; если поднять его выше до уровня E_2, то он свободно перекатится через бугор II и уйдет в бесконечность.

Причина, позволяющая нам пользоваться этой иллюстрацией, состоит в том, что потенциальная энергия тяжелого шарика пропорциональна его высоте. Небольшая неточность иллюстрации обусловлена тем, что часть энергии шарика расходуется на создание его вращения.

§ 43. Закон сохранения импульса

До сих пор мы рассматривали движение одной частицы в поле каких-либо сил. Рассмотрим теперь простейшую систему, состоящую из двух частиц, и предположим, что эти частицы находятся только под действием сил, действующих между ними. Такие силы называются внутренними в отличие от сил, которые действуют на частицы системы извне и называются поэтому внешними. Будем отмечать параметры, относящиеся к частицам соответственно индексами 1 и 2. Положение первой частицы относительно произвольного центра O характеризуется радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$, а положение второй — радиусом вектором $\mathbf{r}_2$ (рис. 94). Уравнения движения обеих частиц будут

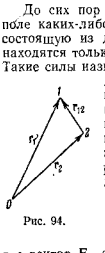


Рис. 94.

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12}, \tag{4.31}$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}, \tag{43.2}$$

где вектор $\mathbf{F}_{12}$ означает силу, действующую на первую частицу со стороны второй, а $\mathbf{F}_{21}$ — силу, действующую на вторую частицу со стороны первой. По третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению, так что

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \tag{43.3}$$

Складывая (43.1) и (43.2) и учитывая (43.3), получаем

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2) = 0.$$

Откуда следует, что

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}, \tag{43.4}$$

или, что то же самое,

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{const}.$$

Векторная величина $m_i\dot{\mathbf{r}}_i = m_i\mathbf{v}_i$ называется *импульсом*, или *количеством движения частицы*.

Равенство (43.4) выражает закон сохранения импульса, имеющий место в системе двух частиц, находящихся под действием любых внутренних сил. Легко обобщить этот закон на систему n частиц, находящихся под действием одних только внутренних сил. Уравнение движения k-й частицы есть

$$m_k\ddot{\mathbf{r}}_k = \sum_i{}' \mathbf{F}_{ki}, \tag{43.5}$$

где правая часть означает сумму всех сил, действующих на k-ю частицу со стороны остальных частиц системы. Штрих у знака суммы означает, что сумма берется по всем значениям i, за исключением $i = k$. Написав уравнения движения для всех частиц системы и взяв их сумму, получим, представляя левую часть в виде первой производной по времени:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i,j}{}' \mathbf{F}_{ij}.$$

Легко видеть, однако, что правая часть равна нулю. В самом деле, в правой части для каждого члена $\mathbf{F}_{ki}$ найдется соответствующий ему $\mathbf{F}_{ik}$. По третьему закону Ньютона для каждой пары

$$\mathbf{F}_{ki} + \mathbf{F}_{ik} = 0,$$

а поэтому

$$\frac{d}{dt} m_i\dot{\mathbf{r}}_i = 0,$$

или

$$\sum_i m_i\dot{\mathbf{r}}_i = \text{const}, \tag{43.6}$$

что и требовалось доказать.

§ 44. Соударения

Применим законы сохранения импульса и энергии к решению задачи о соударениях двух частиц. Пусть скорости частиц с массами m_1 и m_2 будут до соударения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а после соударения $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$.

Выше мы видели, что закон сохранения импульса должен иметь место при любом характере сил взаимодействия. Согласно этому закону, полный импульс системы сохраняется, т. е. сумма импульсов обеих частиц до соударения должна равняться сумме их импульсов после соударения.

Обозначая импульсы частиц до соударения через $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, а после соударения, соответственно, через $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$, имеем

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'. \tag{44.1}$$

Что касается закона сохранения механической энергии, то он будет иметь место только в том случае, если при соударении не выделяется и не поглощается энергия, точнее говоря, если в результате соударения не изменяется внутренняя энергия частиц.

Это условие часто не соблюдается. Например, при соударениях атомных ядер, ведущих к ядерным реакциям, обычно выделяются (реже — поглощаются) большие количества энергии; при соударении электронов с атомами при определенных условиях (см. § 91 и следующие) часть или вся кинетическая энергия относительного движения обеих частиц может перейти в энергию возбуждения атома, т. е. будет иметь место поглощение энергии. В настоящем параграфе мы будем рассматривать только упругие соударения, т. е. такие, при которых имеет место сохранение механической энергии. Это дает в добавление к векторному уравнению (44.1) еще скалярное уравнение, которое мы напишем, выражая кинетические энергии через импульсы.

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}. \tag{44.1'}$$

Пусть частица *2* до соударения покоилась, т. е. пусть $\mathbf{p}_2 = 0$. Это условие в большинстве случаев с достаточной точностью осуществляется в опытах, выполняющихся в атомной физике. Например, при изучении соударений между электронами и атомами обычно обстреливают атомы пучком электронов, ускоренных приложенным напряжением. При этом скорость электронов настолько больше газокинетических скоростей обстреливаемых атомов, что последние скорости можно положить равными нулю. То же самое еще в большей степени имеет место при изучении рассеяния ядерных частиц или при ядерных реакциях.

При $\mathbf{p}_2 = 0$ уравнение (44.1) переходит в векторное равенство

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'. \tag{44.2}$$

Чтобы это равенство было удовлетворено, три вектора $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_1'$ и $\mathbf{p}_2'$ должны образовывать замкнутый треугольник OBA (рис. 95). Покажем теперь, что, каково бы ни было направление полета частицы *2* после соударения, точка B — конец вектора импульса этой частицы $\mathbf{p}_2'$ после соударения лежит на окружности. Координаты точки B относительно системы с началом в O удовлетворяют уравнению

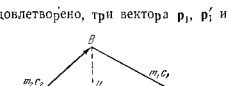


Рис. 95.

$$x^2 + y^2 = p_2'^2. \tag{44.3}$$

Далее, из треугольника BCA имеем

$$(p_1 - x)^2 + y^2 = p_1'^2. \tag{44.4}$$

Закон сохранения энергии требует, чтобы при $p_2 = 0$

$$\frac{p_1^2}{m_1} = \frac{p_1'^2}{m_1} + \frac{p_2'^2}{m_2}. \tag{44.5}$$

Подставляя в (44.4) выражение $p_1'^2$ из (44.5) и пользуясь (44.3), получаем после простых алгебраических преобразований

$$x^2 + y^2 - 2\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 x = 0. \tag{44.6}$$

Это уравнение легко может быть приведено к виду

$$\left(x - \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1\right)^2. \tag{44.6'}$$

Но это — уравнение окружности, проходящей через точку B и имеющей радиус

$$r = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1 = \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} p_1. \tag{44.7}$$

Рассмотрим теперь некоторые интересные частные случаи. Пусть $m_1 = m_2$, такой случай осуществляется при соударении α-частицы с ядром гелия или протона с ядром легкого водорода. Из (44.7) имеем при $m_1 = m_2$ $r = \frac{1}{2} p_1$.

В этом случае диаметр окружности равен импульсу налетающей частицы, т. е. окружность проходит не только через точку B, но и через точку A. Из этого следует (рис. 96), что после соударения частицы разлетаются под прямым углом друг к другу. На рис. 97 приведена стереоскопическая фотография соударения α-частицы с ядром гелия. Видно, что после удара обе частицы разлетаются под прямым углом. Исключением является случай, когда $p_1' = 0$ («лобовой удар»). В этом случае из закона сохранения импульса получаем, выписывая явные выражения для импульсов:

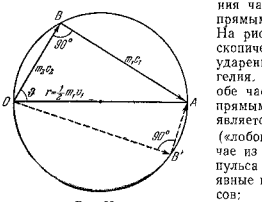


Рис. 96.

$$m_1v_1 = m_2c_2,$$

что дает (при $m_1 = m_2$) $c_2 = v_1$. Это означает, что при лобовом ударе налетающая частица останавливается и передает свой импульс обстреливаемой частице.

Рис. 97.

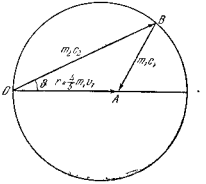


Рис. 98.

В качестве второго примера рассмотрим случай, когда $m_2/m_1 = 4$. Этот случай осуществляется при соударении протона с ядром гелия или α-частицы с ядром кислорода.

Из (44.7) получаем

$$r = {}^4/_5\, p_1.$$

Рис. 98 дает построение, позволяющее рассчитать углы полета обеих частиц после соударения при известной величине импульса налетающей частицы после соударения.

Интерес представляет также случай обратной величины соотношения масс $m_2/m_1 = {}^1/_4$ (например, соударение α-частицы

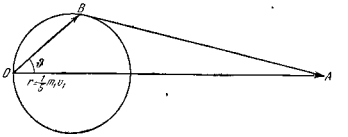


Рис. 99.

с протоном). В этом случае по (44.7)

$$r = {}^1/_5\, p_1.$$

Как видно из рис. 99, в этом случае p_2' всегда значительно меньше p_1.

§ 45. Центр инерции

Во всякой системе двух частиц существует замечательная точка, называемая *центром инерции*. Ее радиус-вектор определяется следующим образом (рис. 100):

$$\mathbf{r}_C = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (45.1)$$

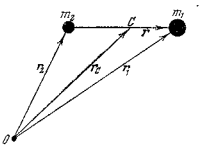


Рис. 100.

Легко показать, что в системе двух частиц центр инерции лежит на прямой, соединяющей обе частицы, и делит эту прямую в отношении, обратном отношению масс. В самом деле, из (45.1) следует, что

$$m_1(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1) = m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C), \quad (45.2)$$

но это означает, что векторы $\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_2$ параллельны, а так как они имеют общую точку C, то три точки m_1, C и m_2 лежат на одной прямой. Таким образом, первая половина нашего утверждения доказана. Вторая часть видна непосредственно из равенства (45.2), которое можно переписать в виде

$$\frac{|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_C|} = \frac{m_2}{m_1}. \qquad (45.3)$$

Обратимся теперь к рассмотрению свойств центра инерции. Закон сохранения импульса в системе двух частиц в векторной форме выражается равенством

$$m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \text{const}. \tag{45.4}$$

Найдем производную по времени радиуса-вектора центра инерции

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}.$$

Сравнивая это выражение с (45.4), видим, что

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \text{const}. \tag{45.4'}$$

Итак, в системе двух частиц, не подверженных действию внешних сил, центр инерции движется прямолинейно и равномерно.

Систему координат, в которой имеет место (45.4′), в атомной физике обычно называют «лабораторной», потому что оси декартовых координат в данном случае определяются, например, пересечением плоскостей двух стен лабораторной комнаты с плоскостью пола. Мы можем, однако, ввести систему координат, поместив ее начало в центре инерции. Такая система координат, называемая *системой центра инерции*, обладает, как мы сейчас увидим, рядом преимуществ.

Скорость центра инерции в лабораторной системе координат равна

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2},$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — скорости обеих частиц также в лабораторной системе координат. Чтобы найти скорости частиц в системе центра инерции, нужно из $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ вычесть скорость центра инерции $\mathbf{v}_C$. Итак,

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tag{45.5}$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_2 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \tag{45.6}$$

Полный импульс в системе центра инерции будет

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'$$

и, принимая во внимание (45.5) и (45.6), видим, что

$$\mathbf{P} = 0.$$

Итак, в системе координат центра инерции полный импульс системы частиц не только постоянен, но и равен нулю. Переход к системе координат центра инерции во многих случаях целесообразен, так как в этих координатах мы рассматриваем относительные движения внутри системы частиц, отвлекаясь от движения системы как целого. Однако при энергетических расчетах, как мы сейчас увидим, нельзя забывать о движении самого центра инерции.

В самом деле, вычислим полную кинетическую энергию системы двух частиц. Для этого, очевидно, надо скорости частиц отнести к лабораторной системе координат. Итак,

$$E_{\text{лаб}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_C)^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2' + \mathbf{v}_C)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2 + (m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2')\mathbf{v}_C.$$

Последний член равен нулю вследствие (45.5) и (45.6); мы получаем

$$E_{\text{лаб}} = E_{\text{ц. и}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_C^2. \tag{45.7}$$

Эта формула очень важна. Рассмотрим какой-нибудь процесс, происходящий в результате неупругого соударения двух частиц. Это может быть, например, ионизация атома или диссоциация молекулы под действием соударения с электроном или ядерная реакция под действием быстрой частицы или какой-нибудь другой аналогичный процесс. Критическая энергия, необходимая для осуществления процесса (энергия ионизации, энергия диссоциации и т. п.), очевидно, равна $E_{\text{ц. и}}$. Но формула (45.7) показывает, что энергия налетающей частицы (электрона, протона и т. п.) должна быть больше $E_{\text{ц. и}}$ на величину кинетической энергии центра инерции, в котором сосредоточена вся масса системы.

Расчет $E_{\text{лаб}}$ выполняется особенно просто, когда можно положить равной нулю $\mathbf{v}_2$ — скорость обстреливаемой частицы (мишени). В этом случае

$$E_{\text{лаб}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2, \quad E_{\text{ц. и}} = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_1^2,$$

так как $v_2 = 0$. Таким образом,

$$\frac{E_{\text{лаб}}}{E_{\text{ц. и}}} = \frac{m_1 + m_2}{m_2}, \quad E_{\text{лаб}} = E_{\text{ц. и}}\frac{m_1 + m_2}{m_2}.$$

Отсюда следует, что только в том случае, когда $m_2 \gg m_1$, можно считать $E_{\text{лаб}} = E_{\text{ц. и}}$.

Упражнение. Энергия ядерной реакции $N^{14} + He^4 \to O^{17} + H^1$ равна 1,13 *Мэв* (1 *Мэв* $= 10^6$ *эв*). Какова должна быть минимальная энергия α частицы для того, чтобы эта реакция осуществилась (*Ответ:* 1,45 *Мэв*)

§ 46. Линейный гармонический осциллятор

Пусть частица с массой m движется по прямой под действием силы, пропорциональной отклонению частицы от положения равновесия и направленной всегда к положению равновесия. Такая колебательная система называется линейным гармоническим осциллятором. Образцом ее может служить тяжелый шарик, подвешенный на упругой пружине (рис. 101). Электрон, совершающий колебания под действием электрического поля, также является линейным гармоническим осциллятором при условии, что сила, действующая на электрон со стороны поля, пропорциональна первой степени его удаления от положения равновесия и направлена к этому положению. По аналогии с упругой силой все силы, удовлетворяющие указанному выше требованию, называются *квазиупругими*.

Рис. 101. Модель линейного гармонического осциллятора.

Так как движение частицы в линейном осцилляторе происходит по прямой, то мы всегда можем взять эту прямую за ось координат. Пусть это будет ось x, и пусть начало координат совпадает с положением равновесия частицы (рис. 102). Уравнение движения в этом случае таково:

$$m\ddot{x} = -fx, \tag{46.1}$$

где f — постоянный коэффициент пропорциональности, равный силе, возникающей при отклонении $x = 1$; он называется «постоянной квазиупругой силы». Перепишем уравнение (46.1) следующим образом:

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}x = 0, \tag{46.2}$$

Рис. 102.

или, принимая во внимание, что $f/m > 0$, и вводя обозначение

$$f/m = \omega^2, \tag{46.3}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{46.4}$$

Частными решениями уравнения (46.4) будут

$$x_1 = \cos\omega t, \quad x_2 = \sin\omega t, \tag{46.5}$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой их в (46.4).

По известному свойству линейных дифференциальных уравнений общее решение будет линейной комбинацией частных решений (46.5):

$$x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t, \tag{46.6}$$

с двумя произвольными постоянными c_1 и c_2. Эти постоянные можно найти из начальных условий: если, например, при $t = 0$ $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, то, как легко убедиться, $c_1 = x_0$, $c_2 = v_0/\omega$, и поэтому (46.6) принимает вид

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t. \tag{46.7}$$

Для наших целей общее решение (46.6) удобнее представить в несколько ином виде. Перепишем (46.6), вынеся за скобки c_1:

$$x = c_1\left(\cos\omega t + \frac{c_2}{c_1}\sin\omega t\right).$$

Полагая $c_2/c_1 = \operatorname{tg}\delta$, получим

$$x = c_1(\cos\omega t + \operatorname{tg}\delta \cdot \sin\omega t) = \frac{c_1}{\cos\delta}\cos(\omega t - \delta) =$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \cdot \cos(\omega t - \delta),$$

или, пользуясь обозначением $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = a$, получим окончательно

$$x = a\cos(\omega t - \delta), \tag{46.8}$$

где a и δ — новые произвольные постоянные.

Движение, описываемое формулой (46.8), будет, очевидно, периодическим, так как время входит в (46.8) через периодическую функцию. Это значит, что существует такой промежуток времени T, что

$$\cos(\omega t - \delta) = \cos[\omega(t + T) - \delta].$$

Из этого следует, что

$$\omega T = 2\pi, \quad \omega = 2\pi/T;$$

ω называется угловой частотой, а обратная величина периода T — линейной частотой ν:

$$\nu = 1/T = \omega/2\pi.$$

Согласно (46.3)

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{m}}, \tag{46.9}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}. \tag{46.10}$$

Вычислим теперь *энергию осциллятора*. Кинетическая энергия равна $E_k = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, или, так как $\dot{x} = -a\omega\sin(\omega t - \delta)$, то

$$E_k = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \sin^2(\omega t - \delta). \qquad (46.11)$$

Если за нулевое значение потенциальной энергии принять ее величину в тот момент, когда частица находится в положении равновесия, то потенциальная энергия в некотором положении с координатой x будет

$$E_p = -\int_0^x F\,dx = f\int_0^x x\,dx = \frac{fx^2}{2}. \qquad (46.12)$$

Подставив сюда x из (46.8) и приняв во внимание, что по (46.9) $f = m\omega^2$, найдем

$$E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t - \delta). \qquad (46.13)$$

При помощи (46.11) и (46.13) находим полную энергию:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 [\sin^2(\omega t - \delta) + \cos^2(\omega t - \delta)] = \frac{1}{2} ma^2\omega^2. \qquad (46.14)$$

Формулы (46.11) и (46.13) показывают, что кинетическая и потенциальная энергии меняются во времени как квадраты синуса и косинуса. Поэтому для отыскания средних значений энергии за полный период достаточно вычислить средние квадратов косинуса и синуса. При этом наличие фазовой постоянной δ, не зависящей от времени, очевидно, не играет никакой роли. По определению среднего значения за период T мы имеем

$$\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,dt = \frac{1}{2}, \qquad (46.15)$$

$$\overline{\sin^2\omega t} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \sin^2\omega t\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \frac{1-\cos^2\omega t}{2}\,dt = \frac{1}{2}. \qquad (46.16)$$

Заметим еще, что средние значения $\cos^2\omega t$ и $\sin^2\omega t$ за промежуток времени, очень большой по сравнению с периодом, также равны половине. Пусть t_1 будет таким промежутком времени: $t_1 \gg T$. Мы имеем

$$\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} \frac{1+\cos 2\omega t}{2}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega t_1}\sin 2\omega t.$$

Но $\omega t_1 = 2\pi\frac{t_1}{T}$, и если $t_1 \gg T$, то ωt_1 есть очень большое число, а потому второй член очень мал и им можно пренебречь. Итак, для достаточно большого промежутка времени

$$\overline{\cos^2\omega t} = 1/2.$$

Точно так же

$$\overline{\sin^2\omega t} = 1/2.$$

Таким образом, для средней кинетической энергии за период или за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с периодом, из (46.11) и (46.15) получаем

$$\overline{E}_k = \frac{1}{4} a^2 m\omega^2 \qquad (46.17)$$

и для средней потенциальной энергии

$$\overline{E}_p = \frac{1}{4} a^2 m\omega^2. \qquad (46.18)$$

Сравнение (46.17), (46.18) и (46.14) дает

$$\overline{E}_k = \overline{E}_p = \frac{1}{2} E, \qquad (46.19)$$

Рис. 103. Потенциальная кривая гармонического осциллятора.

т. е. для линейного гармонического осциллятора средняя за большой промежуток времени кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, и обе равны половине полной энергии.

Так как потенциальная энергия U пропорциональна квадрату смещения $U = fx^2/2$, то потенциальная кривая гармонического осциллятора есть парабола (рис. 103).

§ 47. Комплексное представление колебаний

Общее решение уравнения колебаний гармонического осциллятора

$$x = a\cos(\omega t - \delta) \qquad (46.8)$$

мы можем написать в несколько ином виде, представляющем большие преимущества с формальной точки зрения. Для этого мы прежде всего вспомним, что по известной теореме анализа всякое комплексное число

$$u = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (47.1)$$

можно представить в виде экспоненциальной функции с мнимым показателем

$$u = re^{i\varphi}, \tag{47.2}$$

где r называется модулем комплексного числа и обозначается также через $|u|$, φ — аргумент или фаза. Если мы заменим в (47.1) и (47.2) i на $-i$, то получим комплексное число

$$u^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}, \tag{47.3}$$

которое называется комплексно сопряженным с u. Произведение двух комплексно сопряженных чисел равно квадрату их общего модуля, так как

$$uu^* = re^{i\varphi}\cdot re^{-i\varphi} = r^2 = |u|^2.$$

Легко видеть, что комплексное выражение

$$x = a(\cos\omega t + i\sin\omega t) = ae^{i\omega t} \tag{47.4}$$

и с ним комплексно сопряженное

$$x^* = a(\cos\omega t - i\sin\omega t) = ae^{-i\omega t} \tag{47.5}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению гармонического осциллятора (46.4), так как они содержат линейные комбинации его частных решений. Поэтому *формально* мы имеем право писать формулу колебаний не только в тригонометрическом, но и в экспоненциальном виде (47.4) или (47.5). Такая замена целесообразна потому, что во многих случаях математические операции с экспоненциальными функциями выполняются значительно проще, чем с тригонометрическими. Однако с физической точки зрения формула $x = ae^{i\omega t}$ содержит противоречие, потому что в левой части ее стоит действительная величина (координата), а в правой — комплексная. Для того чтобы, несмотря на это, сохранить возможность оперирования с экспоненциальными функциями, ставится условие — пользоваться этими функциями, но в окончательном результате брать только действительную часть полученного комплексного числа. Эта действительная часть в тех случаях, когда может возникнуть сомнение, обозначается символом Re, поставленным перед комплексным числом:

$$\mathrm{Re}\, e^{i\varphi} = \cos\varphi.$$

Очевидно,

$$\mathrm{Re}\, e^{i\omega t} = \mathrm{Re}\, e^{-i\omega t} = \cos\omega t,$$

вследствие чего с одинаковым правом можно пользоваться любым из двух комплексно сопряженных чисел.

Общий интеграл уравнения линейного осциллятора

$$x = a\cos(\omega t - \delta)$$

напишется при этом условии в виде

$$x = \mathrm{Re}\, ae^{i(\omega t - \delta)}.$$

Еще большее упрощение достигается введением *комплексной амплитуды*. Заметив, что $ae^{i(\omega t-\delta)} = ae^{-i\delta}\cdot e^{i\omega t}$, введем комплексную амплитуду $A = ae^{-i\delta}$. Комплексно сопряженная амплитуда будет $A^* = ae^{i\delta}$, а квадрат действительной амплитуды a найдется как произведение

$$AA^* = ae^{-i\delta}\cdot ae^{i\delta} = a^2 = |A|^2.$$

Пользуясь комплексными амплитудами, формулу гармонических колебаний можно всегда писать в виде

$$x = \mathrm{Re}\, Ae^{i\omega t}$$

или просто

$$x = Ae^{i\omega t},$$

помня, что начальная фаза δ включается в комплексную амплитуду.

Указанный в этом параграфе способ комплексного представления колебаний дает правильные результаты лишь до тех пор, пока мы имеем дело с линейными выражениями. Если же периодически меняющаяся величина входит в квадрате или в более высокой степени, или, наконец, если мы имеем дело с произведениями таких величин, то необходимо вновь переходить к тригонометрическим функциям. Это следует из того, что действительная часть квадрата комплексного числа не равна квадрату его действительной части:

$$(a + bi)^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + i2ab,$$

так что

$$\mathrm{Re}\,(a + bi)^2 \neq a^2.$$

Точно так же действительная часть произведения комплексных чисел не равна произведению их действительных частей. Если, однако, желательно и в этом случае пользоваться экспоненциальными функциями, то необходимо заменять косинусы полусуммой комплексно сопряженных функций по известной формуле Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}).$$

§ 48. Разложение в спектр

Колебания линейного гармонического осциллятора представляют собою простейший случай периодического процесса. Очень часто встречаются процессы, которые являются периодическими, но не гармоническими. Так, например, процесс, изображаемый

неограниченным повторением влево и вправо сплошной кривой рис. 104, есть, несомненно, процесс периодический, но он не является гармоническим. На рис. 104, однако, показано, что сплошная кривая может быть получена путем суммирования двух синусоид с частотами ω и 2ω, а именно,

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Рис. 104. Пример негармонического периодического процесса.

Можно также сказать, что колебание, изображенное на рис. 104, разлагается в *спектр*, в котором имеется две спектральные линии с частотами ω и 2ω (или ν и 2ν, если предпочтительно пользоваться линейными, а не угловыми частотами).

В математическом анализе доказывается, что *любая* кривая *), изображающая периодический процесс частоты ω, может быть представлена как результат наложения бесконечного числа синусоид и косинусоид с частотами ω, 2ω, 3ω, ... Подобное разложение периодических, но не гармонических процессов на чисто гармонические есть известное разложение в ряд Фурье. Условия сходимости этих рядов исследуются в математических руководствах **). Мы здесь заметим только, что для функций, интересующих нас в этой книге, ряды Фурье сходятся повсюду равномерно, так что их можно почленно перемножать, дифференцировать и интегрировать. Для определенности будем предполагать, что нашей функцией является смещение $x(t)$. Тогда

$$x(t) = {}^1/_2 b_0 + b_1 \cos \omega_0 t + b_2 \cos 2\omega_0 t + \ldots$$
$$\ldots + c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \sin 2\omega_0 t + \ldots \qquad (48.1)$$

Коэффициент $^1/_2$ в первом члене введен из соображений удобства и симметрии формул, как это будет видно из дальнейшего.

*) Условия, которым должна удовлетворять функция, изображающая периодический процесс, для того чтобы ее можно было подвергнуть разложению в ряд Фурье, настолько широки, что им практически удовлетворяет любая функция, изображающая реальный физический процесс.

**) См. И. И. Привалов, Ряды Фурье, Госиздат, 1930, или любой учебник математического анализа, например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967, стр. 435.

Напомним простой способ вычисления коэффициентов ряда Фурье. Он основан на следующих формулах, легко оправдываемых непосредственным вычислением:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \cos m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{при } m = n; \end{cases} \qquad (48.2)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \sin n\omega_0 t \, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{1}{2} T & \text{при } m = n; \end{cases} \qquad (48.3)$$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \sin m\omega_0 t \cdot \cos n\omega_0 t \, dt = 0. \qquad (48.4)$$

Для отыскания коэффициента b_m умножим обе части (48.1) на $\cos m\omega_0 t$ и проинтегрируем от $-T/2$ до $+T/2$. Тогда все интегралы правой части на основании формул (48.2) и (48.4) будут равны нулю, за исключением интеграла, умножающегося на коэффициент b_m, который равен $T/2$. Таким образом, получаем

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cos m\omega_0 t \, dt. \qquad (48.5)$$

Точно так же для отыскания коэффициента c_m умножаем обе части (48.1) на $\sin m\omega_0 t$ и интегрируем от $-T/2$ до $+T/2$. В результате получаем

$$c_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \sin m\omega_0 t \, dt. \qquad (48.6)$$

Наконец, для отыскания b_0 интегрируем (48.1) от $-T/2$ до $+T/2$ и получаем

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt.$$

Очевидно, что постоянный член разложения

$$\frac{1}{2} b_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, dt$$

есть среднее значение функции $x(t)$ за период, и если кривая $x(t)$ симметрична относительно оси t (как, например, кривая рис. 104), то $\frac{1}{2} b_0 = 0$.

Отметим здесь еще две другие формы ряда Фурье. Объединяя попарно члены с синусами и косинусами $b_k \cos k\omega_0 t + c_k \sin k\omega_0 t$ в члены вида $a_k \cos(k\omega_0 t + \delta_k)$ (см. § 46) и обозначая свободный член через $^1/_2 a_0$, получим

$$x(t) = {}^1/_2 a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t + \delta_1) + a_2 \cos(2\omega_0 t + \delta_2) + \\ + a_3 \cos(3\omega_0 t + \delta_3) + \ldots \qquad (48.7)$$

Особенно удобна для наших целей комплексная форма ряда Фурье. Заменим в (48.7) косинусы полусуммами комплексно сопряженных экспоненциальных функций

$$\cos(s\omega_0 t + \delta_s) = {}^1/_2 \left[e^{i(s\omega_0 t + \delta_s)} + e^{-i(s\omega_0 t + \delta_s)}\right] = \\ = {}^1/_2 \left(e^{is\omega_0 t} \cdot e^{i\delta_s} + e^{-is\omega_0 t} \cdot e^{-i\delta_s}\right)$$

и введем комплексные амплитуды, обозначая их, соответственно, через A_1 и A_{-1}, A_2 и A_{-2} и т. д.:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = {}^1/_2 a_1 e^{i\delta_1}, & A_{-1} = {}^1/_2 a_1 e^{-i\delta_1}, \\ A_2 = {}^1/_2 a_2 e^{i\delta_2}, & A_{-2} = {}^1/_2 a_2 e^{-i\delta_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_s = {}^1/_2 a_s e^{i\delta_s}, & A_{-s} = {}^1/_2 a_s e^{-i\delta_s}, \\ & A_0 = {}^1/_2 a_0. \end{array}\right\} \qquad (48.8)$$

Тогда ряд (48.7) примет вид

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{i2\omega_0 t} + \ldots \\ \ldots + A_{-1} e^{-i\omega_0 t} + A_{-2} e^{-i2\omega_0 t} + \ldots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t} \qquad (48.9)$$

или, если с помощью соотношения $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ заменить угловые частоты линейными:

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i2\pi\nu_0 t} + A_2 e^{i4\pi\nu_0 t} + \ldots \\ \ldots + A_{-1} e^{-i2\pi\nu_0 t} + A_{-2} e^{-i4\pi\nu_0 t} + \ldots = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s\nu_0 t}. \qquad (48.10)$$

Для отыскания коэффициентов поступаем следующим образом: умножим обе части (48.10) на $e^{-i2\pi r\nu_0 t}$ и проинтегрируем от $-T/2$ до $+T/2$:

$$\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \cdot e^{-i2\pi r\nu_0 t}\, dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\, dt.$$

Легко убедиться в том, что в правой части все члены обращаются в нуль за исключением члена номер r. Действительно,

а) при $s \neq r$

$$\int_{-T/2}^{+T/2} A_s e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\, dt = \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0} \left(e^{i2\pi(s-r)\nu_0 t}\right)\Big|_{-T/2}^{+T/2} = \\ = \frac{A_s}{i2\pi(s-r)\nu_0}\left[e^{i\pi(s-r)} - e^{-i\pi(s-r)}\right] = 0,$$

б) при $s = r$

$$\sum_{-T/2}^{+T/2} A_r\, dt = A_r T.$$

Из этого следует, что

$$A_r = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-i2\pi r\nu_0 t}\, dt. \qquad (48.11)$$

Аналогично этому для отыскания коэффициента A_{-r} умножаем обе части (48.10) на $e^{i2\pi r\nu_0 t}$ и интегрируем от $-T/2$ до $+T/2$. В результате получаем

$$A_{-r} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{i2\pi r\nu_0 t}\, dt. \qquad (48.12)$$

При $r = 0$ получаем

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, dt. \qquad (48.13)$$

Заметим еще, что если $x(t)$ — функция действительная, то коэффициенты Фурье A_m и A_{-m} обязательно комплексно сопряжены:

$$A_m^* = A_{-m}$$

[см. формулы (48.10)], так как только в этом случае и правая часть (48.10) будет действительна.

Мы видим, таким образом, что если функция $x(t)$ представляет периодический процесс, то ее всегда можно разложить на гармонические составляющие. На языке физики это означает, что периодический процесс можно *разложить в спектр*. Этот спектр будет дискретным, т. е. он будет состоять из отдельных идеально тонких линий, частоты которых образуют арифметический ряд ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... Очень часто пользуются терминологией акустики и называют ν_0 *основной частотой*, а $2\nu_0$, $3\nu_0$, ... — ее *обертонами*.

Очевидно, что коэффициенты Фурье представляют амплитуды соответствующих обертонов. В то время как амплитуда может быть положительной или отрицательной, *интенсивность* есть величина существенно положительная; она измеряется квадратом амплитуды. Таким образом, квадраты коэффициентов Фурье представляют интенсивности гармонических составляющих периодического процесса или, что то же самое, интенсивности спектральных линий.

В заключение заметим, что разложение Фурье может быть применено также и к непериодическому процессу, заданному, однако, в *ограниченном интервале* (например, в ограниченном интервале времени от t_0 до t_1). В этом случае мы можем кривую, изображающую процесс, рассматривать как один период периодической функции. Так как, однако, разложение Фурье будет представлять функцию периодическую, то оно будет правильно изображать ход процесса только в пределах заданного интервала *).

§ 49. Центральные силы. Кинетическая энергия в полярных координатах

Изучив свойства линейного осциллятора, мы переходим к рассмотрению модели, состоящей из электрона, обращающегося около неподвижного центра. Такое движение является частным случаем движения в поле центральных сил, т. е. сил, направление которых все время проходит через одну точку, а величина является функцией только расстояния от этой точки.

При решении всякой механической задачи очень большое значение имеет рациональный выбор системы координат. Обычно задача легче всего решается в такой системе координат, которая отвечает симметрии самой задачи. Поэтому следует ожидать, что для движения в центральном поле наиболее подходящей будет полярная система координат.

При рассмотрении планетарной модели атома (§ 51) мы воспользуемся законами сохранения энергии и момента количества движения. В качестве подготовки к этому рассмотрению мы выведем выражение для энергии в полярных координатах.

Положение точки на плоскости определяется двумя полярными координатами r и φ, связанными с декартовыми соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{49.1}$$

Кинетическая энергия в декартовых координатах выражается в виде

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \tag{49.2}$$

*) См., однако, § 72.

Но из (49.1) следует, что

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \tag{49.3}$$

Подставляя это в (49.2), найдем после простых вычислений

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2). \tag{49.4}$$

Это и есть выражение кинетической энергии в полярных координатах на плоскости.

Комбинируя формулы (49.1) и (49.3), легко получим

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi}. \tag{49.5}$$

Это соотношение нам понадобится впоследствии.

Сферическими полярными координатами точки P в пространстве служат (рис. 105): радиус-вектор r, полюсное расстояние ϑ (дополнение к широте до 90°) и долгота φ, отсчитываемая от какого-нибудь первого меридиана. Соотношение между декартовыми и полярными координатами видно непосредственно из чертежа:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta.$$

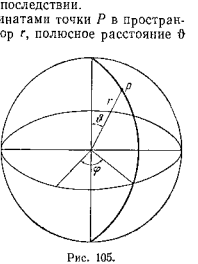


Рис. 105.

Отсюда получаем

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta.$$

Подставляя это в выражение кинетической энергии через декартовы координаты в пространстве

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{49.6}$$

найдем после упрощений

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\varphi}^2) \tag{49.7}$$

— выражение для кинетической энергии в сферической полярной системе координат.

§ 50. Движение в центральном поле

Для описания центрального движения большое значение имеет динамическая величина, называемая моментом количества движения. Возьмем ньютоново уравнение движения в векторной форме

$$\dot{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$$

и умножим его *векторно слева* на радиус-вектор $\mathbf{r}$:

$$[\mathbf{r}m\dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{rF}]. \tag{50.1}$$

Замечая, что

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] = \frac{d}{dt}[\mathbf{r}m\mathbf{v}] = m[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{v}] + m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] = m[\mathbf{vv}] + [\mathbf{r}m\dot{\mathbf{v}}] = [\mathbf{r}m\dot{\mathbf{v}}]$$

($[\mathbf{vv}] = 0$ как произведение коллинеарных векторов!), можем переписать (50.1) в виде

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{rp}] = [\mathbf{rF}]. \tag{50.2}$$

Вектор

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] \tag{50.3}$$

называется моментом количества движения материальной точки относительно точки O (рис. 106). Его составляющие по декартовым осям координат таковы:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= (yp_z - zp_y) = m(y\dot{z} - z\dot{y}),\\ L_y &= (zp_x - xp_z) = m(z\dot{x} - x\dot{z}),\\ L_z &= (xp_y - yp_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned}\right\} \tag{50.4}$$

Рис. 106.

Уравнение (50.2) теперь принимает вид

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{rF}]. \tag{50.5}$$

Если, однако, движение — *центральное*, то $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ направлены одинаково или прямо противоположно, так что в этом случае $[\mathbf{rF}] = 0$, и уравнение (50.5) дает

$$\mathbf{L} = \text{const}, \tag{50.6}$$

т. е. при центральном движении момент количества движения *как вектор* сохраняется. Из этого следует, в частности, что траектория частицы при центральном движении лежит в одной плоскости, так как только в этом случае вектор $\mathbf{L}$ будет сохранять одно и то же направление во все время движения.

Если плоскость орбиты выбрать за плоскость xy, то очевидно, что вектор $\mathbf{L}$ будет направлен по оси z, и тогда

$$L_x = L_y = 0, \quad L_z = L,$$

так что

$$L = L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \tag{50.7}$$

Во многих случаях при рассмотрении центральных движений удобнее пользоваться полярными координатами. Принимая во внимание, что [см. (49.5)]

$$x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varphi},$$

можем представить выражение момента количества движения (50.7) в виде

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \tag{50.8}$$

Момент количества движения может быть выражен через кинематическую величину $\mathbf{c}$, называемую секториальной скоростью. По определению

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2}[\mathbf{rv}]$$

и следовательно,

$$\mathbf{L} = 2m\mathbf{c}.$$

Из закона сохранения момента количества движения непосредственно следует второй закон Кеплера. В самом деле, если $\mathbf{L} = \text{const}$, то, очевидно, и $\mathbf{c} = \text{const}$, а это и есть второй закон Кеплера.

§ 51. Кеплерова задача

Рассмотрим движение электрона, обращающегося около ядра с зарядом $+Ze$ и массой, настолько большой по сравнению с массой электрона, что само ядро можно считать неподвижным центром. Так как опыты Резерфорда с рассеянием α-частиц показали, что вплоть до расстояний порядка 10^{-12} *см* закон Кулона имеет место, то сила взаимодействия между ядром и электроном будет Ze^2/r^2, а потенциальная энергия

$$U = -\frac{Ze^2}{r}. \tag{51.1}$$

Очевидно, что при таких условиях наша задача тождественна с задачей о движении планеты вокруг солнца, почему ее и называют кеплеровой задачей. Для решения этой задачи мы воспользуемся законами сохранения энергии и момента количества движения. В полярных координатах [см. формулы (49.4) и (50.8)] эти законы дают

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{Ze^2}{r} = E, \tag{51.2}$$

$$mr^2\dot{\varphi} = P, \tag{51.3}$$

где E и P — постоянные; из (51.3) имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}. \tag{51.4}$$

Далее мы перейдем от производных по времени к производным по углу φ и с этой целью воспользуемся соотношением

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{51.5}$$

Подставляя (51.4) и (51.5) в (51.2), найдем

$$\frac{m}{2}\left[\frac{P^2}{m^2r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{P^2}{m^2r^2}\right] = E + \frac{Ze^2}{r}$$

или, после небольших преобразований,

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}. \tag{51.6}$$

Введем новую переменную, положив $\rho = \frac{1}{r}$. Так как $\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$, то (51.6) примет вид

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mE}{P^2} + \frac{2mZe^2}{P^2}\rho - \rho^2. \tag{51.7}$$

Для интегрирования уравнения (51.7) удобно его еще раз продифференцировать:

$$2\frac{d\rho}{d\varphi}\cdot\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{d\rho}{d\varphi} - 2\rho\frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Это уравнение мы перепишем в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi}\left(\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{mZe^2}{P^2}\right) = 0.$$

Так как $d\rho/d\varphi$, *вообще говоря*, $\neq 0$, то должно быть равно нулю выражение в скобках *). Мы получаем, таким образом, для ρ

*) Как будет видно из дальнейшего [см формулу (51.14) и следующий за ней текст] $d\rho/d\varphi$ обращается в нуль, вообще говоря, только в двух точках траектории, соответствующих (при $E < 0$) афелию и перигелию орбиты. Уравнение же $d\rho/d\varphi = 0$ дало бы решение $\rho = \text{const}$ для любых значений φ. Это, очевидно, имеет место только в случае круговой орбиты. Нетрудно, однако, убедиться в том, что в случае круговой орбиты (т. е. при условии $\rho = \text{const}$ во всех точках орбиты) для ρ получается выражение

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2}.$$

Но, как видно из текста, это — частное решение ρ_1 неоднородного уравнения, получаемого приравниванием нулю выражения в скобках. Таким образом, условие $d\rho/d\varphi = 0$ не дает нового решения по сравнению с решениями уравнения (51.8).

следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{mZe^2}{P^2}. \tag{51.8}$$

Общий интеграл его, как известно, равен частному решению неоднородного уравнения плюс общий интеграл соответствующего однородного. Сразу видно, что частным решением неоднородного уравнения будет

$$\rho_1 = \frac{mZe^2}{P^2};$$

общий же интеграл однородного уравнения

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$$

есть

$$\rho_2 = A\cos\varphi + B\sin\varphi,$$

где A и B — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Итак,

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2} + A\cos\varphi + B\sin\varphi. \tag{51.9}$$

Если мы условимся отсчитывать угол φ от того положения радиуса-вектора, при котором r имеет минимальное значение: $r = r_{\min}$, а следовательно, $\rho = 1/r = \rho_{\max}$, то мы получим

$$\text{для } \varphi = 0 \quad \frac{d\rho}{d\varphi} = 0, \tag{51.10}$$

и так как по (51.9)

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -A\sin\varphi + B\cos\varphi,$$

то условие (51.10) дает $B = 0$. Решение (51.9) при этом принимает вид

$$\rho = \frac{mZe^2}{P^2} + A\cos\varphi. \tag{51.11}$$

Это и есть уравнение орбиты электрона. Сравним его с уравнением конических сечений в полярных координатах относительно фокуса:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \tag{51.12}$$

где a — большая полуось и ε — эксцентриситет. Мы находим отсюда для $\rho = 1/r$ выражение

$$\rho = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}. \tag{51.13}$$

Очевидно, что (51.11) и (51.13) совпадают, если положить

$$\frac{mZe^2}{P^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad A = \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Это означает, что траекторией электрона является коническое сечение (первый закон Кеплера).

Для того чтобы найти условие, при котором это коническое сечение будет эллипсом, отыщем условие максимума и минимума ρ. Необходимое условие экстремума ρ есть

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0.$$

Полагая в (51.7) $d\rho/d\varphi = 0$, получим квадратное уравнение

$$\rho^2 - 2\frac{mZe^2}{P^2}\rho - \frac{2mE}{P^2} = 0. \qquad (51.14)$$

По свойству корней квадратного уравнения из (51.14) находим

$$\rho_{\max} + \rho_{\min} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \quad \rho_{\max}\rho_{\min} = -\frac{2mE}{P^2}. \qquad (51.15)$$

Если энергия E отрицательна ($E < 0$), то $\rho_{\max}\rho_{\min} > 0$, и, следовательно, существуют два положительных значения ρ (а значит, и r), при которых $d\rho/d\varphi$ обращается в нуль; из них одно соответствует максимуму ρ (минимуму r, перигелий), а другое — минимуму ρ (максимуму r, афелий). Итак, при $E < 0$ орбитой будет *эллипс*.

Напротив, при $E > 0$ $\rho_{\max}\rho_{\min} < 0$. Это значит, что двух *положительных* значений ρ, соответствующих максимуму и минимуму r, не существует, но одно из них положительно, а другое отрицательно. Положительные и отрицательные значения радиуса-вектора соответствуют двум различным ветвям *гиперболы*. Итак, при $E > 0$ орбитой будет гипербола.

Найдем еще полезное соотношение, связывающее энергию с большой полуосью. Из (51.13), принимая во внимание, что при $\varphi = 0$ $\rho = \rho_{\max}$, а при $\varphi = \pi$ $\rho = \rho_{\min}$, получаем

$$\rho_{\max} = \frac{1+\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1-\varepsilon)}, \quad \rho_{\min} = \frac{1-\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{1}{a(1+\varepsilon)}.$$

Подставляя это в левую часть (51.15), находим

$$\frac{2}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{2mZe^2}{P^2}, \qquad (51.16)$$

$$\frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)} = -\frac{2mE}{P^2}; \qquad (51.17)$$

из (51.16) и (51.17) следует:

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \qquad (51.18)$$

Разделив (51.16) на (51.17), найдем:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}. \qquad (51.19)$$

Соотношение (51.19) показывает, что энергия электрона при данном заряде зависит только от большой полуоси его орбиты, но не зависит от эксцентриситета: всем орбитам с одинаковой большой полуосью соответствует и одинаковая энергия.

Выведем, наконец, при помощи найденных соотношений третий закон Кеплера. Если секториальная скорость электрона равна c, то за полный период обращения T радиус-вектор опишет площадь

$$S = cT.$$

Но так как секториальная скорость может быть выражена через момент количества движения $c = L/2m$ (см. § 50), то, полагая $L = P$, получаем

$$S = \frac{1}{2}\frac{P}{m}T. \qquad (51.20)$$

С другой стороны, S как площадь эллипса с полуосями a и b выразится в виде

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad (51.21)$$

так как $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Сравнивая (51.20) и (51.21), получаем

$$PT = 2\pi ma^2\sqrt{1-\varepsilon^2}. \qquad (51.22)$$

Соотношение (51.16) дает возможность выразить P^2:

$$P^2 = mZe^2a(1-\varepsilon^2). \qquad (51.23)$$

Возводя в квадрат (51.22) и подставляя (51.23), получим после простых сокращений и преобразований

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}, \qquad (51.24)$$

или, так как $1/T$ равно числу обращений ν в единицу времени,

$$a^3\nu^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \qquad (51.25)$$

Поскольку в правой части (51.24) стоит величина, постоянная при данном заряде ядра Ze, мы находим

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const}.$$

Это и есть третий закон Кеплера.

§ 52. α-частица в поле ядра

Рассмотрим теперь движение α-частицы в поле неподвижного ядра в случае, когда *отталкивающая* сила подчиняется закону Кулона. Пусть заряд ядра будет по-прежнему $+Ze$; заряд α-частицы, как мы знаем, равен $+2e$, и потенциальная энергия будет поэтому

$$U = \frac{2Ze^2}{r}. \tag{52.1}$$

Законы сохранения энергии и момента количества движения дают

$$\frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} = E, \tag{52.2}$$

$$Mr^2\dot{\varphi} = P, \tag{52.3}$$

где M — масса α-частицы. Схема дальнейшего решения задачи полностью совпадает со схемой, использованной в предыдущем параграфе, так как исходные уравнения с точностью до знака потенциальной энергии в том и другом случаях одинаковы [см формулы (51.1)—(51.3)]. Поэтому мы не будем повторять деталей вычислений и сразу напишем результат, к которому приводят уравнения (52.2) и (52.3) после преобразований и введения новой переменной $\rho = \frac{1}{r}$:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2ME}{P^2} - 2\frac{MZe^2}{P^2}\rho - \rho^2.$$

Дифференцируя это уравнение еще раз, производя различные сокращения и перестановки, получаем

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = C, \tag{52.4}$$

где

$$C = -\frac{2MZe^2}{P^2}. \tag{52.5}$$

Общее решение уравнения (52.4) таково:

$$\rho = C + A\cos\varphi + B\sin\varphi. \tag{52.6}$$

Используем теперь начальные условия. Очевидно (рис. 107), что при $\varphi = \pi$ $r = \infty$ и, следовательно, $\rho = 0$. Это даст при подстановке в (52.6)

$$A = C. \tag{52.7}$$

Второе условие мы получим следующим образом. Ордината любой точки траектории связана с r и φ очевидным соотношением $y = r\sin\varphi$ или

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{r\sin\varphi} = \frac{\rho}{\sin\varphi}.$$

Воспользовавшись (52.6) и (52.7), найдем

$$\frac{1}{y} = \frac{C(1+\cos\varphi)}{\sin\varphi} + B.$$

При $\varphi = \pi$ ордината y равна «прицельному расстоянию» p, а первый член в правой части обращается в нуль. Мы получаем,

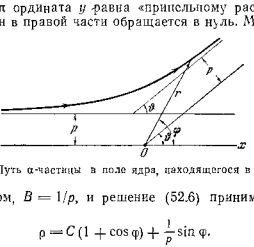


Рис. 107. Путь α-частицы в поле ядра, находящегося в точке O.

таким образом, $B = 1/p$, и решение (52.6) принимает окончательный вид

$$\rho = C(1+\cos\varphi) + \frac{1}{p}\sin\varphi. \tag{52.8}$$

Отклонение α-частицы, φ, очевидно, равно углу ϑ между асимптотами гиперболы, а для направления полета после отклонения $\rho = 0$. Поэтому из (52.8) мы получаем

$$-\frac{1}{Cp} = \frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} \tag{52.9}$$

или, принимая во внимание значение C из (52.5),

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{P^2}{2MZe^2p}. \tag{52.10}$$

Наконец, момент количества движения P можно выразить через прицельное расстояние P и скорость v:

$$P = Mpv.$$

Подставив это в (52.10), получим

$$\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{Mv^2p}{2Ze^2}. \tag{52.11}$$

Это и есть формула для угла отклонения α частицы, которой мы уже воспользовались в § 26.

§ 53. Приведенная масса

Выше мы видели (§ 45), что в системе двух частиц, находящихся только под действием сил взаимодействия, обе частицы движутся относительно их центра инерции. Покажем теперь, что изучение движения такой системы двух частиц можно заменить рассмотрением движения одной фиктивной частицы, расположенной на расстоянии от неподвижного центра, равном расстоянию между частицами и обладающей массой

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из уравнений движения обеих частиц имеем

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12}, \tag{53.1}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}. \tag{53.2}$$

Вычтем (53.2) из (53.1)

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\mathbf{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\mathbf{F}_{21}.$$

Но так как по третьему закону Ньютона

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12},$$

то

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{12}.$$

Полагая

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu} \tag{53.3}$$

и принимая во внимание, что разность векторов $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ (см. рис. 100) есть вектор $\mathbf{r}$, направленный от m_2 к m_1, получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu}\mathbf{F}_{12},$$

или

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{12}, \tag{53.4}$$

причем по (53.3)

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{53.5}$$

Мы видим, что задача о движении системы двух частиц эквивалентна задаче о движении одной частицы, находящейся на расстоянии $\mathbf{r}$ от неподвижного центра и обладающей массой, выраженной через массы обеих частиц формулой (53.5). Масса μ называется *приведенной массой*.

Теперь ясно, что результаты, которые мы получали до сих пор, рассматривая например, движение электрона с массой m относительно ядра с массой M, считая последнее неподвижным, не точны, так как на самом деле надо было рассматривать движение и электрона, и ядра относительно их общего центра инерции. Однако, согласно уравнению (53.4), результаты будут вполне точными, если рассматривать движение относительно неподвижного ядра фиктивной частицы с массой, равной приведенной массе μ ядра и электрона.

Оценим ошибку, которую мы вносим, пренебрегая собственным движением ядра. Приведенная масса ядра M и электрона m выразится так:

$$\mu = \frac{Mm}{M+m} = \frac{m}{1+\frac{m}{M}}.$$

Так как $M/m = 1836{,}1$, то в формулы, в которые входит масса электрона, следует вместо m подставить μ, причем в результате появится поправочный фактор

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1836{,}1}}.$$

Как мы увидим впоследствии (§ 107), в вопросах спектроскопии, где точность измерений очень высока, такой поправочный фактор, несмотря на свою малую величину, вносит в результат вычислений изменение, лежащее вне пределов ошибки эксперимента.

Отметим, в заключение, что при учете движения ядра выражение третьего закона Кеплера

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m} \tag{51.24}$$

должно быть уточнено путем замены массы электрона m на приведенную массу μ:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

§ 54. Обобщенные координаты. Состояние системы

До сих пор мы имели дело с двумя системами координат: декартовой и полярной. В механике, однако, большую пользу приносит пользование так называемыми *обобщенными координатами*, под которыми разумеются любые параметры, полностью определяющие «конфигурацию» системы. Так, например, система из двух взаимодействующих частиц может быть охарактеризована тремя декартовыми координатами их общего центра

инерции, расстоянием частиц и двумя углами, определяющими положение прямой, соединяющей частицы.

Выбранные обобщенные координаты обыкновенно обозначаются одной и той же буквой q с различными индексами: $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Преимущество такого способа заключается, между прочим, в том, что число обобщенных координат в некоторых случаях может быть и меньше полного числа декартовых или полярных координат. Например, если мы имеем систему из двух точечных масс, находящихся на неизменном расстоянии d друг от друга, то между шестью декартовыми координатами этих частиц имеется одно соотношение (условие связи)

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = d^2,$$

из которого может быть определена одна координата в функции пяти остальных. Таким образом, в этом случае конфигурация системы полностью определяется пятью *независимыми* параметрами, а потому и достаточно пяти обобщенных координат. Вообще, если система из n частиц подчинена k условиям связи *между координатами* частиц, то из $3n$ координат независимыми будут

$$f = 3n - k$$

координат; остальные k координат определятся из условий связи. Это число f независимых параметров, необходимое для полного определения мгновенной конфигурации системы, называется *числом степеней свободы*. Если заданы все обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$ и все обобщенные скорости, т. е. производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f$, то тем самым полностью определено состояние системы. В классической механике, таким образом, *мгновенное состояние системы* определяется $2f$ независимыми параметрами.

§ 55. Функция Лагранжа. Уравнения Лагранжа

Поскольку мы вводим обобщенные координаты, целесообразно отыскать уравнения движения, которые имеют место в любых системах координат. Таким свойством обладают уравнения, открытые Лагранжем и называемые лагранжевыми уравнениями движения; часто их называют также уравнениями Лагранжа второго рода. С ними мы и ознакомимся теперь.

Пусть мы имеем свободную частицу. Положение ее характеризуется вообще тремя координатами. Это могут быть декартовы координаты x, y, z, но могут быть и любые другие координаты q_1, q_2, q_3. Допустим, что нам известны формулы, выражающие x, y, z через q_1, q_2, q_3:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (55.1)$$

(ср., например, формулы (§ 49) для перехода от декартовых координат к полярным). Напишем уравнения движения в декартовых координатах

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Умножим теперь первое из этих уравнений на $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, второе на $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, третье на $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ и сложим их:

$$m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (55.2)$$

Правую часть полученного уравнения обозначим для краткости через Q_1:

$$X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1 \quad (55.3)$$

Заметив, что, например,

$$\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) - \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) \text{ и т. д.}$$

мы можем переписать уравнение (55.2) в виде

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right] - \\ - m\left[\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right] = Q_1. \quad (55.4)$$

Дифференцируя формулы (55.1), мы получим выражения для полных производных x, y, z по времени, рассматривая x, y, z как сложные функции времени. Например,

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}. \quad (55.5)$$

Отсюда сразу находим

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial y}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial z}{\partial q_1}. \quad (55.6)$$

Далее, принимая во внимание, что результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором производятся два последовательных дифференцирования, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_1}. \quad (55.7)$$

Имея в виду соотношения (55.6) и (55.7), мы можем переписать уравнение (55.4) в виде

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{q}_1}\right)\right]-$$
$$-m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial q_1}\right)=Q_1. \quad (55.8)$$

Вспомним теперь, что кинетическая энергия T нашей частицы выражается через составляющие скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ следующим образом:

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).$$

Мы имеем поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\dot{q}_1}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial\dot{q}_1}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial\dot{q}_1}\right),$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=m\left(\dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial q_1}+\dot{y}\frac{\partial\dot{y}}{\partial q_1}+\dot{z}\frac{\partial\dot{z}}{\partial q_1}\right).$$

Уравнение (55.8) принимает теперь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=Q_1. \quad (55.9)$$

Если сила, под действием которой происходит движение, имеет потенциал $U(x, y, z)$, так что

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

то выражение (55.3) для Q_1 можно написать так:

$$Q_1=-\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=-\frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Теперь уравнение (55.9) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_1}=-\frac{\partial U}{\partial q_1}. \quad (55.10)$$

Введем, наконец, новую функцию L, равную *разности* между кинетической и потенциальной энергиями (не смешивать с полной энергией, которая равна сумме кинетической и потенциальной энергий!):

$$L=T-U. \quad (55.11)$$

Эта функция называется *функцией Лагранжа* или *кинетическим потенциалом*. Так как потенциальная энергия не зависит от скоростей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$, то $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}$, и уравнение (55.10) приобретает простой вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_1}=0. \quad (55.12)$$

Это и есть первое из уравнений Лагранжа. Два других получаются совершенно аналогичными преобразованиями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_2}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_2}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_3}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_3}=0. \quad (55.12')$$

Преимущество уравнений Лагранжа перед ньютоновыми с особенной ясностью выступает в том случае, когда движение частиц подчинено связям. В этом случае число *независимых* параметров, характеризующих конфигурацию системы, будет уже не $3n$, но меньше этого числа, а именно, их будет столько, сколько степеней свободы у системы (см. § 54): $q_1, q_2, \ldots, q_f$, $f=3n-k$. Столько же будет и уравнений Лагранжа. Если, например, речь идет о движении одной частицы по заданной поверхности (одно уравнение связи), то достаточно двух уравнений Лагранжа; для отыскания движения частицы по заданной кривой достаточно одного уравнения Лагранжа.

§ 56. Применение уравнений Лагранжа к задаче о центральном движении

В качестве примера применения уравнений Лагранжа рассмотрим вновь задачу о движении электрона в поле положительно заряженного ядра. Симметрия задачи указывает на то, что наиболее удобными будут здесь полярные координаты r и φ, связанные с декартовыми соотношениями

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi.$$

Уравнения Лагранжа будут ($q_1=r$, $q_2=\varphi$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0. \quad (56.1)$$

Для отыскания функции Лагранжа для этого случая вспомним выражения кинетической и потенциальной энергий в полярных координатах *)

$$T=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2);\quad U=-\frac{Ze^2}{r}.$$

Функция Лагранжа будет поэтому

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\frac{Ze^2}{r}. \quad (56.2)$$

*) Если мы хотим учесть собственное движение ядра, то в формулу для кинетической энергии нужно ввести вместо массы электрона приведенную массу электрона и ядра (§ 53).

Напишем ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{Ze^2}{r^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

подставляя это в (56.1), получим

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{Ze^2}{r^2} = 0, \tag{56.3}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0. \tag{56.4}$$

Второе уравнение сразу дает

$$mr^2\dot{\varphi} = P, \tag{56.5}$$

где P — постоянная интегрирования. Это — не что иное, как закон сохранения момента количества движения. Первое же уравнение можно переписать в виде

$$m\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{r^2} + mr\dot{\varphi}^2. \tag{56.6}$$

Это уравнение описывает составляющую движения по радиусу-вектору. Справа написана сила, действующая на электрон вдоль радиуса-вектора. Ее выражение состоит из двух членов: первый представляет собой кулоновскую силу; появление же второго на первый взгляд кажется неожиданным. Однако при ближайшем рассмотрении этот член $mr\dot{\varphi}^2$ оказывается просто центробежной силой инерции.

Теперь мы можем перейти к интегрированию уравнения (56.6). Для этого подставим в него выражение $\dot{\varphi}$ из (56.5)

$$\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}$$

и разделим обе части на m:

$$\ddot{r} = -\frac{Ze^2}{mr^2} + \frac{P^2}{m^2r^3}.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\ddot{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{2m^2r^2}\right). \tag{56.7}$$

Умножив обе части этого уравнения на $2\dot{r}$, получим

$$\frac{d}{dt}\dot{r}^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}\right),$$

откуда после интегрирования имеем

$$\dot{r}^2 = c + \frac{2Ze^2}{mr} - \frac{P^2}{m^2r^2}, \tag{56.8}$$

где c — постоянная интегрирования. В этом уравнении мы заменим $\dot{r}$ через

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\dot{\varphi} = \frac{P}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi},$$

что после небольших преобразований дает

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2}\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} + C,$$

где $C = cm^2/P^2$; или, вводя новую переменную $\rho = 1/r$,

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mZe^2}{P^2}\rho - \rho^2 + C. \tag{56.9}$$

Но уравнение (56.9), очевидно, совпадает с (45.7) и интегрируется одинаковым с ним образом. Поэтому мы здесь не будем повторять вычислений, выполненных в § 51 и приводящих в конечном результате к уравнению конических сечений.

В заключение мы дадим полезную качественную иллюстрацию уравнения (56.6). Для этого мы приведем его к виду (56.7) и перепишем так:

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}\right). \tag{56.7'}$$

Это уравнение, очевидно, соответствует одномерному движению в поле с потенциалом

$$U = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{P^2}{2mr^2}. \tag{56.10}$$

Здесь первый член представляет собой потенциал кулоновской силы, второй — некоторый фиктивный потенциал, обусловленный наличием центробежной силы инерции.

Построим теперь потенциальную кривую, откладывая r по оси абсцисс и U — по оси ординат. Эта кривая должна иметь вид кривой I, изображенной на рис. 108.

Действительно, для больших значений r вторым членом в (56.10) можно пренебречь по сравнению с первым, и U отрицательно. Наоборот, для малых r второй член преобладает над первым, и потенциальная энергия становится положительной. Поэтому при определенной величине r кривая проходит через минимум, быстро поднимаясь вверх при дальнейшем уменьшении r.

Эта кривая наглядно показывает, почему при положительной полной энергии орбита гиперболическая, а при отрицательной — эллиптическая. Для этого удобнее всего воспользоваться иллюстрацией с тяжелым шариком (см. стр. 152). Очевидно, что шарик, поднятый на высоту $E_1 > 0$, скатится в «яму» ABC и уйдет в бесконечность. Наоборот, при отрицательной энергии ($E_2 < 0$) шарик будет кататься туда и сюда в углублении DBF,

и соответствующая ему частица все время будет оставаться на конечном расстоянии от притягивающего центра, совершая относительно него периодическое движение.

Если имеет место не притяжение, но отталкивание, то первый член в (56.10) положителен и потенциальная энергия при любом

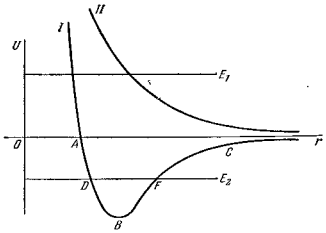


Рис. 108. Потенциальная кривая для радиальной составляющей кеплерова движения: *I* — случай притяжения; *II* — случай отталкивания.

r положительна. Потенциальная кривая теперь имеет вид кривой *II* рис. 108. В этом случае шарик, поднятый на любую высоту, укатится в бесконечность.

§ 57. Обобщенные импульсы

Уравнения Лагранжа всегда приводят решение задачи к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Во многих случаях, однако, удобно пользоваться вместо уравнений второго порядка удвоенным числом уравнений первого порядка. Для того чтобы написать такие уравнения, мы должны прежде всего ввести новое понятие — *обобщенный импульс*. Каждой из обобщенных координат мы будем сопоставлять отвечающий ей обобщенный импульс, который мы определим формально (в духе механики Лагранжа) как частную производную от функции Лагранжа по соответствующей обобщенной скорости:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57.1}$$

Для случая сил, имеющих потенциал U, который является функ-

цией координат, но не скоростей, $L = T - U\ (q_1, \ldots, q_k, \ldots)$ и

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{57.2}$$

Для того чтобы уяснить себе физический смысл обобщенных импульсов, полезно вычислить их явные выражения в различных координатах. Для точки, отнесенной к декартовым координатам,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

поэтому

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \tag{57.3}$$

т. е. в этом случае обобщенные импульсы просто являются проекциями количества движения $m\mathbf{v}$ на декартовы оси координат.

В других координатах обобщенные импульсы могут иметь другой смысл и иную размерность. Найдем, например, импульсы отвечающие полярным координатам r и φ. Кинетическая энергия в полярных координатах

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2);$$

соответствующие обобщенные импульсы будут

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{57.4}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}. \tag{57.5}$$

Как видно, радиальный импульс p_r имеет размерность количества движения, тогда как азимутальный p_φ — размерность момента количества движения.

Воспользовавшись понятием обобщенного импульса, можно придать уравнениям Лагранжа новую форму. Напишем эти уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{dL}{dq_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, f)$$

и, заменив в них по определению (57.1) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ через p_k, имеем

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, f). \tag{57.6}$$

Присоединяя сюда определение обобщенного импульса

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, f), \tag{57.7}$$

получим систему $2f$ уравнений *первого порядка*.

§ 58. Гамильтоновы канонические уравнения

Уравнения (57.6) и (57.7), полученные в конце предыдущего параграфа, отвечают нашему желанию заменить уравнения второго порядка уравнениями первого порядка. Однако они очень несимметричны. На практике обычно пользуются другой формой уравнений первого порядка, именно, так называемыми *гамильтоновыми каноническими уравнениями*, которые отличаются особой простотой и изяществом.

Рассмотрим сначала самый простой случай. Пусть мы имеем дело с одной частицей, движущейся прямолинейно. Траекторию этой частицы мы можем выбрать за ось x, и тогда положение частицы определится одной координатой $q = x$, а соответствующим ей обобщенным импульсом будет $p = m\dot{x}$ [см. (57.3)]. Введем теперь новую функцию H, которую мы определим как *сумму кинетической и потенциальной энергий, причем кинетическую энергию мы выразим не через скорость, а через импульс* p:

$$H = T + U = \frac{p^2}{2m} + U. \tag{58.1}$$

Эту функцию H мы можем связать с функцией Лагранжа L. Для этого заметим прежде всего, что кинетическая энергия может быть представлена в виде

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{(m\dot{x})^2}{2m} = \frac{1}{2}p\dot{x}.$$

Теперь легко проверить, что

$$p\dot{x} - L = p\dot{x} - T + U = p\dot{x} - \frac{1}{2}p\dot{x} + U = \frac{1}{2}p\dot{x} + U = T + U = H. \tag{58.2}$$

Возьмем полный дифференциал от обеих частей (58.2):

$$dH = p\,d\dot{x} + \dot{x}\,dp - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}d\dot{x}. \tag{58.3}$$

Но согласно (57.2) $\partial L/\partial \dot{x} = p$. Поэтому первый член в правой части (58.3) сокращается с четвертым, и мы получаем

$$dH = \dot{x}\,dp - \frac{\partial L}{\partial x}dx. \tag{58.4}$$

Напишем теперь полный дифференциал H, имея в виду, что H есть функция x и p (но не $\dot{x}$):

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p}dp + \frac{\partial H}{\partial x}dx.$$

Сравнивая это выражение с (58.4) и вспоминая, что по (57.6) $\partial L/\partial x = \dot{p}$, находим

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{58.5}$$

Эти два уравнения первого порядка и являются *гамильтоновыми каноническими уравнениями* для рассматриваемого простейшего случая. Легко видеть, что в этом случае канонические уравнения (58.5) ведут к хорошо знакомым результатам. Так как $H = p^2/2m + U$, то $\partial H/\partial \dot{x} = \partial U/\partial \dot{x}$, $\partial H/\partial p = p/m$, и уравнения (58.5) дают

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Первое из этих соотношений дает $p = m\dot{x}$, т. е. определение количества движения, второе представляет собой ньютоновское уравнение движения для частицы, движущейся по оси x.

Мы сейчас покажем, что и в общем случае системы с f степенями свободы канонические уравнения имеют такой же вид, как и (58.5), только число уравнений соответственно больше. Пусть конфигурация системы определяется f обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_f$. Функция Лагранжа L зависит от обобщенных координат, обобщенных скоростей $q_1, q_2, \ldots, q_f$, а также вообще говоря, и от времени:

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t),$$

причем через q_k обозначена совокупность всех обобщенных координат, а через $\dot{q}_k$ — совокупность всех обобщенных скоростей. От функции Лагранжа мы теперь перейдем к функции Гамильтона H, воспользовавшись преобразованием (58.2), распространенным на f степеней свободы:

$$H = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L. \tag{58.6}$$

Возьмем полный дифференциал правой и левой частей (58.6):

$$dH = \sum p_k\,d\dot{q}_k + \sum \dot{q}_k\,dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}dq_k - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t}dt.$$

Так как по (57.7) $\partial L/\partial \dot{q}_k = p_k$, то первая и четвертая суммы сокращаются, и мы получаем

$$dH = \sum \dot{q}_k\,dp_k - \sum \frac{\partial L}{\partial q_k}dq_k - \frac{\partial L}{\partial t}dt. \tag{58.7}$$

С другой стороны, полный дифференциал H — функции q_k, p_k (но не $\dot{q}_k$) и t — должен иметь вид

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_k}dp_k + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k}dq_k + \frac{\partial H}{\partial t}dt.$$

Сравнивая с (58.7) и принимая во внимание, что по (57.6) $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt}$, получаем

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, f). \tag{58.8}$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка и являются каноническими уравнениями для систем с f степенями свободы. Их общее число равно $2f$, т. е. в два раза больше числа уравнений второго порядка. Обобщенная координата q_k и соответствующий ей обобщенный импульс p_k называются *канонически сопряженными*.

Для системы с тремя степенями свободы (например, для одной частицы, движение которой не ограничено связями) канонических уравнений будет всего шесть. Так как мы имеем дело здесь с шестью уравнениями первого порядка, то в окончательный результат войдут еще шесть произвольных постоянных. Зная начальное состояние системы (§ 54), т. е. совокупность значений q_k и p_k для $t = 0$, и проинтегрировав уравнения (58.8), мы можем предсказать ее состояние для любого будущего момента времени. Таким образом, гамильтоновы канонические уравнения по своей форме являются наиболее отчетливым выражением классического принципа причинности.

§ 59. Физический смысл функции Гамильтона

В начале предыдущего параграфа мы определили функцию Гамильтона для случая одномерного движения, отнесенного к декартовым координатам, как сумму кинетической и потенциальной энергий, выраженных через координаты и импульсы. Затем мы показали, что это определение тождественно с определением через функцию Лагранжа

$$H = \dot{x}p_x - L,$$

и это последнее определение мы обобщили на случай f любых обобщенных координат, полагая в этом случае

$$H = \sum_k \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t). \tag{58.6}$$

Выясним теперь, каков смысл функции Гамильтона в этом более общем случае.

Оказывается, что в тех случаях, когда функция Лагранжа, а также функция Гамильтона H *не зависят явно от времени*, H есть так же, как и в простейшем случае, сумма кинетической и потенциальной энергий. Докажем прежде всего, что, когда H от времени явно не зависит, она равна постоянной:

$$H = H(q_k, p_k) = \text{const}.$$

Для доказательства найдем полную производную H по времени:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial H}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \\ + \frac{\partial H}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \frac{\partial H}{\partial p_3}\dot{p}_3 + \ldots = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

Подставляя сюда $\dot{q}_k$ и $\dot{p}_k$ из (58.8), получим

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{59.1}$$

откуда

$$H = \text{const}. \tag{59.2}$$

Теперь мы обратимся к выяснению физического смысла H. По определению

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + p_3\dot{q}_3 + \ldots - L = \sum_k p_k\dot{q}_k - L. \tag{59.3}$$

Для консервативной системы

$$L = T - U, \tag{59.4}$$

и так как U зависит только от координат, то

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{59.5}$$

Таким образом, получаем

$$\sum_k p_k\dot{q}_k = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \tag{59.6}$$

и, следовательно,

$$H = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L. \tag{59.7}$$

Теперь необходимо принять во внимание, что в любых обобщенных координатах кинетическая энергия есть *однородная* функция скоростей $\dot{q}_k$ *второго измерения*. Для декартовых и полярных координат мы в этом убедились непосредственно (см. §§ 41 и 49); то же можно показать и в случае обобщенных координат *). По теореме Эйлера об однородных функциях, если

*) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1965, стр. 9; Г. Голдстейн, Классическая механика, Гостехиздат, 1957, стр. 36

$f(x, y, \ldots, u, v)$ — однородная функция n-го измерения, то

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + u\frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v} = nf. \qquad (59.8)$$

Применяя эту теорему к сумме (59.6), получаем

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_3\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} + \ldots = 2T, \qquad (59.9)$$

и (59.7) дает

$$H = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - L = 2T - T + U = T + U. \qquad (59.10)$$

Итак, для консервативных систем H есть просто сумма кинетической и потенциальной энергии, выраженная через координаты и импульсы.

Приведем несколько примеров функции Гамильтона.

а) Частица в поле с потенциалом U:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

Согласно § 55 $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$. Следовательно,

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z). \qquad (59.11)$$

б) Линейный осциллятор: $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2}fx^2$,

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}fx^2. \qquad (59.12)$$

в) Электрон в кулоновском поле: $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$, $U = -\frac{Z^2e}{r}$;

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \qquad (59.13)$$

§ 60. Циклические координаты

Функция Гамильтона H в общем случае зависит от всех координат и обобщенных импульсов. Однако в некоторых частных случаях оказывается, что одна или несколько координат могут и не входить в выражение H. Такие координаты называются *циклическими*. Возьмем, например, гамильтонову функцию электрона, движущегося в кулоновском поле ядра:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \qquad (59.13)$$

Мы видим, что из двух координат r и φ только r входит в выражение H; следовательно, φ есть координата циклическая.

В качестве второго примера рассмотрим функцию Гамильтона для движения частицы в поле тяготения Земли. Здесь потенциальная энергия зависит только от расстояния частицы от Земли: $U = mgz$. Следовательно [см. (59.11)],

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz. \qquad (60.1)$$

Как мы видим, в выражение H не входят координаты x и y; они также являются циклическими координатами.

Если какая-нибудь из координат является циклической, то соответствующий ей обобщенный импульс должен быть постоянным. Пусть, например, координата q_1 не входит в H:

$$H = H(q_2, q_3, \ldots, q_f; p_1, p_2, \ldots, p_f).$$

Тогда из канонических уравнений (58.8) следует $\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$, откуда $p_1 = \text{const}$. Таким образом, поскольку в гамильтонову функцию (59.13) не входит координата φ,

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \qquad (60.2)$$

В функцию H Гамильтона (60.1) не входят координаты y и x, вследствие чего

$$p_x = m\dot{x} = \text{const}, \quad p_y = m\dot{y} = \text{const}. \qquad (60.3)$$

Особенно важен тот случай, когда *все* координаты — циклические. В этом случае, как мы сейчас покажем, все импульсы являются постоянными, а все координаты — линейными функциями времени. Наиболее простым примером подобного случая может служить ротатор, т. е. частица, обращающаяся по кругу около неподвижного центра. Кинетическая энергия такой частицы, как известно, равна

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2, \qquad (60.4)$$

где $A = mr^2$; ее потенциальная энергия равна нулю. Обобщенный импульс, соответствующий φ, будет

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} \qquad (60.5)$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2 = \frac{(A\dot{\varphi})^2}{2A} = \frac{p_\varphi^2}{2A}$$

и

$$H = T + U = \frac{p_\varphi^2}{2A}. \qquad (60.6)$$

Так как единственная координата φ — циклическая, то $p_\varphi = \text{const}$ и, согласно каноническим уравнениям,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{p_\varphi^2}{2A}\right) = \frac{p_\varphi}{A} = \text{const}.$$

Обозначив const через ω, получим после интегрирования

$$\varphi = \omega t + \alpha,$$

где α — постоянная интегрирования.

Если система имеет f степеней свободы и все координаты циклические, то $H = H(p_1, p_2, \ldots, p_f)$, и для любого импульса p_k имеем

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0.$$

Канонические уравнения тогда дают

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \text{const} = \omega_1,$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \text{const} = \omega_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_f}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_f} = \text{const} = \omega_f,$$

откуда

$$q_1 = \omega_1 t + \alpha_1, \quad q_2 = \omega_2 t + \alpha_2, \ \ldots, \ q_f = \omega_f t + \alpha_f.$$

Мы видим, что, действительно, в случае, когда все координаты циклические, все импульсы являются постоянными, а координаты — линейными функциями времени.

§ 61. Скобки Пуассона. Законы сохранения

Положим, что мы имеем какую-нибудь функцию координат, импульсов и времени: $F(q_k, p_k, t)$, где q_k и p_k — совокупности *всех* координат и импульсов; найдем полную производную F по времени

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \ldots$$
$$\ldots = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dp_k}{dt}\right).$$

Заменяя в правой части производные по времени от координат и импульсов через производные гамильтониана H из канонических уравнений $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, получаем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right).$$

Второй член в правой части называется скобками Пуассона и обозначается через (H, F):

$$(H, F) = \sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial F}{\partial p_k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, f. \tag{61.1}$$

Итак, полную производную по времени всякой функции $F(q_k, p_k, t)$ мы можем написать в виде

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (H, F). \tag{61.2}$$

Если F явно не зависит от времени, то $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ и

$$\frac{dF}{dt} = (H, F). \tag{61.3}$$

Можно сказать, таким образом, что для всякой функции координат и импульсов $F(q_k, p_k)$ скобки Пуассона дают выражение ее полной производной по времени. Пользуясь этим замечанием, мы представим канонические уравнения

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

при помощи скобок Пуассона в новом виде.

Согласно (61.3) мы имеем

$$\frac{dq_k}{dt} = (H, q_k), \quad \frac{dp_k}{dt} = (H, p_k). \tag{61.4}$$

Отыщем теперь скобки (H, q_k) и (H, p_k):

$$(H, q_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial q_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$
$$(H, p_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial p_k}{\partial p_k}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Мы видим, что уравнения (61.4) действительно совпадают с каноническими уравнениями.

Если для $F(q_k, p_k)$ скобки Пуассона (H, F) равны нулю,

$$(H, F) = 0, \tag{61,4'}$$

то

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad F(q_k, p_k) = \text{const}.$$

Этим можно воспользоваться для отыскания законов сохранения или первых интегралов уравнений движения, под которыми разумеют такие соотношения между координатами и их *первыми* производными по времени, которые сохраняют свое значение во все время движения при любых начальных условиях. Найдем, например, скобки (H, H):

$$(H, H) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0,$$

откуда

$$H = \text{const},$$

или, в раскрытом виде в декартовых координатах

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) = \text{const}. \qquad (61.5)$$

Это соотношение, выражающее закон сохранения энергии, и есть один из первых интегралов движения — именно интеграл энергии. Заметим здесь, что, отыскивая производную $\frac{dH}{dt}$ в § 59, мы уже воспользовались частным случаем скобок Пуассона [см. (59.1)].

В качестве второго примера рассмотрим движение частицы в поле центральной силы. Найдем скобки Пуассона (H, L_z), где L_z — момент количества движения относительно оси z:

$$L_z = xp_y - yp_x. \qquad (61.6)$$

Искомые скобки Пуассона по (61.1) будут

$$(H, L_z) = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y}. \qquad (61.7)$$

Принимая во внимание (61.5) и (61.6), получаем

$$(H, L_z) = y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Для вычисления правой части перейдем к полярным координатам, воспользовавшись формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Заметив, что

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} =$$
$$= -r \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial y} = x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x},$$

получаем

$$(H, L_z) = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Но так как в случае центральной силы потенциальная энергия не зависит от φ, а зависит только от r, то

$$(H, L_z) = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const}.$$

В качестве упражнения предлагается доказать с помощью скобок Пуассона, что $L_x = \text{const}$ и $L_y = \text{const}$. Мы получаем три закона сохранения, а именно, законы сохранения составляющих момента количества движения.

Законы сохранения полного момента количества движения имеют место также и для изолированной *системы* частиц. В этом случае

$$L_z = \sum_k (x_k p_{yk} - y_k p_{xk}),$$

$$H = \sum_k \frac{1}{2m_k} (p_{xk}^2 + p_{yk}^2 + p_{zk}^2) + U(x_k, y_k, z_k),$$

где суммирование распространяется на все *частицы*. Вычисление, аналогичное проделанному в (61.7) для одной частицы, дает

$$\frac{dL_z}{dt} = (H, L_z) = \sum_k \left(y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} \right).$$

При переходе к полярным координатам $x_k = r_k \cos \varphi_k$, $y_k = r_k \sin \varphi_k$ получаем

$$\frac{dL_z}{dt} = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial \varphi_k}.$$

Но так как для изолированной консервативной системы при повороте всей системы на один и тот же угол потенциальная энергия не меняется, то

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad L_z = \text{const}.$$

Применяя аналогичный прием, можно доказать, что для изолированной системы k частиц имеют место законы сохранения слагающих полного количества движения P_x, P_y, P_z, причем

$$P_x = \sum_k p_{xk}, \quad P_y = \sum_k p_{yk}, \quad P_z = \sum_k p_{zk}.$$

Действительно,

$$\frac{dP_x}{dt} = (H, P_x) = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_{xk}} \frac{\partial P_x}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial P_x}{\partial p_{xk}} \right) = -\sum_k \frac{\partial H}{\partial x_k} = -\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

(суммирование распространяется на все частицы). Но так как потенциальная энергия *системы* частиц зависит только от их *взаимных* расстояний и не меняется, если все они сместятся

на одинаковое расстояние по оси x, то $\sum_k \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0$ и $P_x = \text{const}$.

Аналогично доказывается, что

$$P_y = \text{const}, \quad P_z = \text{const}.$$

Если мы присоединим сюда еще закон сохранения энергии (61.5), то получим семь законов сохранения или первых интегралов уравнений движения.

Скобки Пуассона можно определить не только для пары функций H и F, но и для любой пары функций координат и импульсов f и g. В этом случае определение таково:

$$(f, g) = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \tag{61.8}$$

Пусть $f = p$ и $g = q$; тогда, очевидно,

$$(p, q) = \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial p}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 1; \tag{61.9}$$

при $f = q$ и $g = q$

$$(q, q) = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{\partial q}{\partial q} - \frac{\partial q}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial p} = 0. \tag{61.10}$$

Точно так же и $(p, p) = 0$. Тот факт, что для пары канонически сопряженных координат и импульсов скобки Пуассона равны 1, можно рассматривать как определение канонически сопряженных величин: две величины p_k и q_k мы будем называть канонически сопряженными, если

$$(q_k, q_k) = 0, \quad (p_k, p_k) = 0, \quad (p_k, q_k) = 1.$$

§ 62. Движение в электромагнитном поле

В предшествующих параграфах этой главы мы интересовались исключительно случаями, когда движение происходит в потенциальном поле, т. е. в поле, в котором сила, действующая на частицу, может быть представлена как градиент некоторой скалярной функции φ. Примером такого поля является постоянное электростатическое поле. Работа при перемещении заряженной частицы в таком поле не зависит от формы пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек.

Важным случаем движения является движение под действием электромагнитного поля. Сила, действующая на заряженную частицу в таком поле, как известно, выражается формулой Лоренца

$$\mathbf{F} = e\mathscr{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathscr{H}].$$

Второй член этой формулы выражает силу, действующую со стороны магнитного поля. Как уже было указано (стр. 149), сила

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathscr{H}]$$

работы не совершает, так как она направлена перпендикулярно к скорости. Важным свойством магнитного поля является то, что это поле не имеет источников. Это обстоятельство выражается условием

$$\operatorname{div} \mathscr{H} = 0.$$

Вследствие этого условия напряженность магнитного поля $\mathscr{H}$ может быть представлена как вихрь некоторого вектора $\mathbf{A}$, называемого векторным потенциалом

$$\mathscr{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

[как известно из векторного анализа, для любого вектора $\mathbf{a}$ имеет место тождество: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} \equiv 0$; поэтому $\operatorname{div} \mathscr{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, т. е. указанное условие выполняется].

Наиболее общим является случай переменного во времени электромагнитного поля. Для вычисления такого поля в электродинамике вводятся так называемые электродинамические потенциалы — скалярный φ и векторный $\mathbf{A}$*), и напряженности полей — электрического $\mathscr{E}$ и магнитного $\mathscr{H}$ — вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathscr{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}\right\} \tag{62.1}$$

Ньютоновы уравнения движения частицы с массой m и положительным зарядом e в электромагнитном поле таковы:

$$m\ddot{x} = e\mathscr{E}_x + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathscr{H}]_x \equiv e\mathscr{E}_x + \frac{e}{c}(\dot{y}\mathscr{H}_z - \dot{z}\mathscr{H}_y),$$

и еще два аналогичных уравнения для осей y и z. Покажем теперь, что эти уравнения могут быть получены из функции Лагранжа, выбранной следующим образом:

$$L = T - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{vA}), \tag{62.2}$$

или в раскрытом виде в декартовых координатах

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\varphi + \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \tag{62.3}$$

*) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966, стр. 218; Я. И. Френкель, Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1940, стр. 212.

Для доказательства мы прежде всего найдем обобщенные импульсы, соответствующие координатам x, y, z. По определению $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ и т. д., что даст, если воспользоваться функцией L (62.3),

$$p_x = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x, \quad p_y = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y, \quad p_z = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \tag{62.4}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \tag{62.5}$$

Напишем теперь лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, f.$$

Полагая $q_1 = x$ и заметив, что $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x$, получим

$$\frac{dp_x}{dt} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{62.6}$$

Для вычисления производной $\frac{dp_x}{dt}$ воспользуемся первой из формул (62.4):

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}.$$

Важно иметь в виду, что при вычислении производной $\frac{dA_x}{dt}$ следует брать *полную* производную или производную вдоль траектории движущейся частицы*):

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Принимая это во внимание, имеем

$$\frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} + \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}\right). \tag{62.7}$$

Далее, продифференцировав (62.3) по x, находим

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{e}{c}\left(\dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right). \tag{62.8}$$

Подставляя (62.7) и (62.8) в (62.6), получаем

$$m\ddot{x} = -e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right].$$

*) Полная (или субстанциальная) производная по t характеризует изменение $\mathbf{A}$ для *данной частицы*, тогда как частная (или локальная) производная характеризует изменение $\mathbf{A}$ в данном месте.

Но, принимая во внимание (62.1), очевидно, имеем

$$-e\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = e\mathscr{E}_x,$$

$$\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) = \dot{y}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{A} - \dot{z}\,\mathrm{rot}_y\,\mathbf{A} = \dot{y}\mathscr{H}_z - \dot{z}\mathscr{H}_y = [\mathbf{v}\mathscr{H}]_x.$$

Итак, мы получаем

$$m\ddot{x} = e\mathscr{E}_x + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathscr{H}]_x.$$

Функция Гамильтона согласно общему определению есть

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z - L. \tag{62.9}$$

Если мы сюда подставим вместо p_x, p_y, p_z выражения *кинетических* импульсов (62.4) и функцию Лагранжа (62.2), то получим

$$H = \dot{x}\left(m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x\right) + \dot{y}\left(m\dot{y} + \frac{e}{c}A_y\right) + \dot{z}\left(m\dot{z} + \frac{e}{c}A_z\right) - \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi - \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z).$$

Выполнив простые алгебраические преобразования и приведения, мы увидим, что члены, содержащие составляющие вектор-потенциала, сокращаются и результат таков:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + e\varphi,$$

т. е. H по-прежнему является суммой кинетической и потенциальной энергий, а какие-либо члены, соответствующие магнитному полю, отсутствуют. Этого и следовало ожидать, так как сила Лоренца никакой работы не совершает (см. § 41).

Найдем теперь явное выражение функции Гамильтона через координаты и соответствующие им обобщенные импульсы. Для этого в (62.9), а также в выражении функции Лагранжа (62.3) следует заменить $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их выражениями через p_x, p_y, p_z.

Преобразуем сначала функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{vA}) = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - e\varphi + \frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right),$$

где под $\mathbf{p}$ разумеется кинетический импульс (62.5). Функцию Гамильтона напишем для краткости также в векторной форме

$$H = \frac{1}{m}\mathbf{p}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi - \frac{1}{m}\frac{e}{c}\mathbf{A}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right).$$

Легко убедиться в том, что первый и последний члены вместе дают $\frac{1}{m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$. В самом деле, например,

$$p_x\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)-\frac{e}{c}A_x\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)=$$
$$=p_x^2-2\frac{e}{c}p_xA_x+\frac{e^2}{c^2}A_x^2=\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2.$$

Поэтому мы получаем после приведения

$$H=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2+e\varphi=$$
$$=\frac{1}{2m}\left[\left(p_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+\left(p_y-\frac{e}{c}A_y\right)^2+\left(p_z-\frac{e}{c}A_z\right)^2\right]+e\varphi. \quad (62.10)$$

Это и есть искомая функция Гамильтона.

Сравнивая (62.10) с выражением функции Гамильтона для случая электростатического поля

$$H=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2+P_z^2)+e\varphi, \quad (62.11)$$

где через P_x, P_y, P_z обозначены составляющие количества движения ($P_x=mx$ и т. д.), мы видим, что переход к случаю *электромагнитного* поля осуществляется при помощи весьма простого приема: надо в (62.11) заменить составляющие обыкновенного импульса P_x, P_y, P_z соответствующими составляющими кинетического импульса

$$P_x=p_x-\frac{e}{c}A_x \text{ и т. д.}$$

§ 63. Механика быстродвижущихся частиц. Преобразования Лоренца

В тех случаях, когда скорость частицы сравнима со скоростью света, следует пользоваться законами теории относительности. Мы не можем здесь систематически излагать теорию относительности, а приведем в этом и следующих параграфах только необходимые сведения, которыми нам придется воспользоваться в дальнейшем *).

*) На русском языке имеется ряд хороших изложений теории относительности, например: Беккер, Электронная теория; Бергман, Теория относительности. Краткое, но очень ясное изложение теории относительности и ее экспериментальных основ дано в книге Г. С. Ландсберга, Оптика, гл. XVI. История создания теории относительности представляет очень большой интерес. Она увлекательно изложена в лекциях по теории относительности Л. И. Мандельштама (Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, «Наука», 1972, стр 83).

В основе теории относительности лежат два постулата:

1. Постулат относительности. Никакими механическими или электромагнитными (в частности — оптическими) экспериментами, производимыми внутри системы, невозможно обнаружить равномерное прямолинейное движение этой системы.

Этот постулат является обобщением открытого еще Галилеем принципа относительности классической механики, согласно которому все механические явления протекают совершенно одинаково, независимо от того, находится ли система в покое или в равномерном прямолинейном, т. е. инерциальном, движении.

Здесь, однако, нужна небольшая оговорка: если имеются две системы, находящиеся в прямолинейном равномерном движении относительно друг друга, то принцип относительности *не утверждает*, что какое-либо *данное* явление протекает одинаково в обеих системах. Например, если тело покоится в одной системе, то в другой оно движется. Но принцип относительности утверждает, что если начальные условия в обеих системах будут одинаковы, то и сами движения будут одинаковыми.

Постулат относительности Эйнштейна распространяет это утверждение также и на электромагнитные явления. Этот постулат может быть формулирован несколько иначе, если воспользоваться понятием об инерциальных системах, т. е. о таких системах, в которых имеет место закон инерции. При этом принцип относительности формулируется так: *все законы механики и оптики одинаковы во всех инерциальных системах.*

2. Постулат постоянства скорости света. Скорость света в пустоте одинакова во всех системах, независимо от относительного движения источника и наблюдателя.

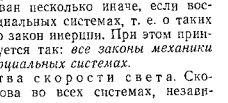


Рис. 109.

В классической механике для перехода от одной системы координат к другой, движущейся равномерно относительно первой, используются так называемые преобразования Галилея. Рассмотрим две декартовы прямоугольные системы координат, $S(x, y, z)$ и $S'(x', y', z')$ (рис. 109). Пусть для простоты их оси x совпадают и положим, что система S' равномерно движется со скоростью V относительно S вдоль оси x, причем в момент $t=0$ начала координат обеих систем совпадают. В таком случае в свою очередь система S движется относительно S' со скоростью $-V$. Поэтому между координатами точки в системах

S' и S имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}\right\} \tag{63.1}$$

К этим трем соотношениям для пространственных координат следует добавить еще соотношение для времени: время в обеих системах с точки зрения классической механики одинаково,

$$t' = t. \tag{63.1a}$$

Формулы (63.1) и (63.1а) представляют собой имеющие место в ньютоновой механике преобразования Галилея. Легко убедиться в том, что уравнения ньютоновой механики не изменяют своего вида при замене координат и времени согласно этим формулам преобразования. Иначе говоря, уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея.

В самом деле, напишем ньютоново уравнение движения для координаты x

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x. \tag{63.2}$$

Очевидно, что последующие рассуждения будут справедливы также и для уравнений, написанных для любой координаты x, y или z. Формулы преобразований Галилея дают для координаты x:

$$x = x' + Vt.$$

Дифференцируя по t, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + V,$$

или

$$v_x = v'_x + V. \tag{63.3}$$

Это — известная теорема сложения скоростей механики Галилея — Ньютона: скорость частицы в системе S равна скорости этой частицы в системе S' плюс скорость относительного движения обеих координатных систем.

Дифференцируя по x второй раз, получаем:

$$\frac{d^2x}{dt} = \frac{d^2x'}{dt'^2}. \tag{63.2a}$$

Итак, левые части ньютоновых уравнений движения не меняются при преобразованиях Галилея. В правых частях этих уравнений находятся компоненты силы. Но в механике силы взаимодействия между двумя телами являются силами притяжения или отталкивания. Такие силы зависят от расстояния между двумя телами, т. е. от *разностей* координат, а не от самих координат. Поэтому, преобразования Галилея не меняют

компонентов силы, т. е.

$$F'_{x'} = F_x. \tag{63.2б}$$

Подставляя (63.2а) и (63.2б) в (63.2), получаем:

$$m\frac{d^2x'}{dt'^2} = F'_{x'}.$$

Это и показывает, что преобразования Галилея не меняют вида ньютоновых уравнений движения: ньютоновы уравнения движения инвариантны относительно преобразований Галилея.

Инвариантность уравнений движения относительно преобразования Галилея представляет собой математическую формулировку принципа относительности классической механики: законы движения одинаковы во всех системах координат, равномерно движущихся относительно друг друга. Первый постулат теории относительности согласуется с этим принципом и обобщает его на законы распространения света. Однако одновременное применение обоих постулатов находится в противоречии с преобразованиями Галилея. В самом деле, из преобразований Галилея автоматически вытекает теорема сложения скоростей (63.3). Но если применить эту теорему к скорости распространения света, то получается, что если скорость света в системе S' равна c, то в системе S она должна быть равна

$$c' = c + V,$$

что противоречит второму постулату теории относительности.

Так как, однако, оба эти постулата подтверждаются всеми известными экспериментальными фактами, то противоречие имеется не между самими постулатами, а между постулатами и преобразованиями Галилея: преобразования Галилея неприменимы к распространению света и к движениям со скоростями, близкими к скорости света.

Эйнштейн из самых общих соображений о свойствах пространства и времени нашел такие преобразования, которые согласуются с обоими постулатами теории относительности и частным случаем которых (при $V/c \ll 1$) являются преобразования Галилея. Эти преобразования ранее были найдены формально Лоренцом, ввиду чего они называются преобразованиями Лоренца. Они имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \\ z' &= z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{63.4}$$

Важной чертой этих преобразований является то, что при переходе от одной инерциальной системы к другой преобразуются не только пространственные координаты, но и время: время течет в различных инерциальных системах, равномерно движущихся относительно друг друга, по-разному.

Легко видеть, что при $V/c \ll 1$, т. е. в условиях, когда верна механика Ньютона, преобразования Лоренца автоматически переходят в преобразования Галилея (63.1).

Выразим теперь из (63.4) x, y, z, t через x', y', z', t'. Получаем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \\ z &= z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{63.5}$$

Это — те же формулы преобразований Лоренца для системы S, движущейся относительно S' со скоростью $-V$.

Мы не будем выводить преобразования Лоренца, но для оправдания их покажем, что именно они обеспечивают отсутствие противоречия между обоими основными постулатами теории относительности. Рассмотрим для этого снова две инерциальные системы S и S'; пусть их начала совпадают в момент $t = 0$. Предположим, что в этот момент из начала координат выходит короткий световой сигнал. Через промежуток времени dt световой сигнал распространится в системе S на расстояние $c\,dt$ и достигнет сферической поверхности с радиусом $R = c\,dt$. Уравнение этой сферической поверхности с центром в точке O есть

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = c^2\,dt^2. \tag{63.6}$$

Произведем теперь переход от системы S к системе S', воспользовавшись преобразованиями Лоренца. Подставляя в (63.6) выражения для dx, dy, dz, dt из (63.5), находим:

$$\frac{(dx' + V\,dt')^2}{1-\frac{V^2}{c^2}} + dy'^2 + dz'^2 = c^2\,\frac{\left(dt' + \frac{V\,dx'}{c^2}\right)^2}{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

После простых алгебраических преобразований получим:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = c^2\,dt'^2, \tag{63.7}$$

т. е. снова уравнение сферической поверхности, но с центром в O'.

Мы видим, что благодаря преобразованиям Лоренца и постоянству скорости света c (второй постулат) удовлетворяется также и постулат относительности: волна, выходящая из общего начала координат в момент $t = 0$, остается сферической как в первой системе относительно начала O, так и во второй системе относительно своего начала O'. С точки зрения преобразований Галилея это было бы невозможно *).

Таким образом, преобразования Лоренца устраняют кажущееся противоречие между обоими основными постулатами теории относительности.

В соответствии с преобразованиями Лоренца находится и теорема сложения скоростей теории относительности. Рассмотрим простейший случай, когда частица движется по оси x. Из (63.4) находим:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - \frac{dt}{dt'} - V\frac{dt}{dt'}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Комбинируя оба выражения, получаем:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \tag{63.8}$$

Отсюда, выражая нештрихованные величины через штрихованные, находим:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \tag{63.9}$$

Равенство (63.9) представляет теорему сложения скоростей в теории относительности. При $V/c \ll 1$ автоматически получаем:

$$v_x = v'_x + V$$

— теорему сложения скоростей механики Галилея — Ньютона. Вместе с тем формула (63.9) даст результаты, согласующиеся со вторым постулатом теории относительности. Рассмотрим крайний случай. Пусть надо вычислить скорость света

*) На первый взгляд кажется непонятным, каким образом геометрическое место точек, которых достигает волна в движущейся системе, остается сферой относительно O', раз оно является сферой в неподвижной системе. Этот кажущийся парадокс разрешается тем, что события, одновременные в одной системе координат, не будут одновременными в другой системе.

относительно системы S, если $v'_x = c$ и система S' движется относительно S также со скоростью $V = c$. Тогда, по (63.9),

$$v_x = \frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}} = c,$$

как и следовало ожидать.

§ 64. Основы релятивистской динамики частицы

а) Зависимость массы от скорости

Нам необходимо теперь ознакомиться с теми важными изменениями, которые теория относительности внесла в динамику Ньютона. С этой целью удобно начать с рассмотрения простого механического процесса: соударения двух тождественных упругих шаров, движущихся навстречу друг другу по оси x. В основу рассмотрения мы положим в качестве постулатов два весьма общих положения: принцип сохранения массы

$$\sum_i m_i = \text{const} \tag{64.1}$$

и принцип сохранения импульса

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const} \tag{64.2}$$

или, в координатах,

$$\sum_i m_i v_{ix} = \text{const}, \quad \sum_i m_i v_{iy} = \text{const}, \quad \sum_i m_i v_{iz} = \text{const}. \tag{64.2a}$$

В дальнейшем процесс упругого соударения будет рассматриваться с точки зрения двух систем координат, равномерно движущихся относительно друг друга. Разница между рассмотрением этого процесса в механике Ньютона и в теории относительности будет состоять в том, что в первом случае будут использованы преобразования Галилея, а во втором — преобразования Лоренца, точнее — вытекающие из этих преобразований законы сложения скоростей.

Итак, рассмотрим два шара, движущихся в системе S' по оси x со скоростями $+v'$ и $-v'$. Поскольку предполагается, что соударение идеально упругое, оба шара при соударении сначала останавливаются, а затем под влиянием развивающихся упругих сил обмениваются скоростями: первый движется обратно со скоростью $-v'$, а второй — со скоростью $+v'$.

Введем теперь еще одну инерциальную систему координат S, которая движется относительно S' со скоростью $-V$. Учитывая заранее возможность изменения масс шаров в зависимости от

скорости, обозначим их массы в этой системе через m_1 и m_2. Пусть M будет сумма их масс в момент остановки, т. е. тогда, когда оба шара имеют одну и ту же скорость V относительно системы S. Законы сохранения массы и импульса, справедливые также и в новой системе координат, дают тогда:

$$m_1 + m_2 = M, \tag{64.3}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \tag{64.4}$$

Мы убедимся сейчас, что теорема сложения скоростей механики Галилея — Ньютона ведет к тривиальному результату $m_1 = m_2$. Действительно, согласно этой теореме скорость первого шара относительно S будет

$$v_1 = v' + V,$$

а второго

$$v_2 = -v' + V.$$

Подставляя это в (64.4), получаем:

$$m_1 v' + m_1 V - m_2 v' + m_2 V = MV$$

откуда

$$(m_1 - m_2) v' = 0,$$

или

$$m_1 = m_2,$$

что и требовалось доказать.

В динамике теории относительности мы должны пользоваться теоремой сложения скоростей Эйнштейна, вытекающей из преобразований Лоренца. Согласно этой теореме

$$v_1 = \frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}}, \quad v_2 = \frac{-v'+V}{1-\frac{v'V}{c^2}}. \tag{64.5}$$

Подставляя (64.5) в (64.4) и пользуясь законом сохранения массы $m_1 + m_2 = M$, получаем:

$$m_1 \frac{v'+V}{1+\frac{v'V}{c^2}} + m_2 \frac{-v'+V}{1-\frac{v'V}{c^2}} = m_1 V + m_2 V,$$

откуда, после простых алгебраических преобразований, находим:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1+\frac{v'V}{c^2}}{1-\frac{v'V}{c^2}}. \tag{64.6}$$

Чтобы получить окончательный результат, нам остается только выполнить некоторые чисто алгебраические вычисления,

использовав теорему сложения скоростей (64.5). Вспоминая значение скорости v_1, вычисляем:

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{(v'+V)^2}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{c^2\left[1+\left(\frac{v'V}{c^2}\right)^2+2\frac{v'V}{c^2}\right]-(v'^2+V^2+2v'V)}{c^2\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)-\frac{V^2}{c^2}\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)}{\left(1+\frac{v'V}{c^2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \quad (64.7)$$

Соединяя начало и конец этой цепи равенств, получаем:

$$\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'V}{c^2}}.$$

Аналогичными вычислениями найдем:

$$\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{v'V}{c^2}}.$$

При помощи полученных соотношений легко приведем (64.6) к виду

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}. \quad (64.8)$$

Мы видим таким образом, что массы тел при различных скоростях не одинаковы, но обратно пропорциональны $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, вообще

$$m=\frac{\text{const}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

При $v=0$, $m=m_0$ и мы приходим к уже известной нам формуле Лоренца — Эйнштейна

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

В приведенном выводе рассматривался простейший случай «лобового» соударения двух масс. Однако можно показать, что этот выбор частного случая не ограничивает общности полученного результата и что та же самая формула получается при рассмотрении любых косых соударений. При этом законы сохранения импульса и массы удовлетворяются, если в качестве v в формулу входит полная скорость.

Выше (§ 10) мы видели, что экспериментальные работы, вне связи с какой-либо теорией, с высокой степенью точности подтверждают формулу Лоренца — Эйнштейна для зависимости массы от скорости в случае заряженных частиц — электронов, протонов, ядер тяжелого водорода (дейтронов), ядер гелия. Приведенный в этом параграфе вывод показывает, что та же формула должна быть справедлива, независимо от того, имеет ли тело электрический заряд или оно нейтрально.

б) Сила и энергия

Продолжим теперь рассмотрение основных положений релятивистской динамики частицы. Мы будем при этом исходить из найденного выше результата, а именно, что экспериментально с высокой степенью точности оправданный факт зависимости массы от скорости по формуле Лоренца — Эйнштейна в релятивистской динамике получается как следствие при рассмотрении простейшего механического процесса — соударения упругих шаров, — если исходить из закона сохранения импульса. Это показывает, что в динамике теории относительности закон сохранения импульса имеет место. Принимая это во внимание, рассмотрим теперь, как должны быть определены основные динамические величины, чтобы получилась система согласованных между собой определений.

1) *Сила.* В классической механике мы определяем силу *либо* как произведение массы на ускорение, *либо* как производную от импульса по времени (ср. § 41), т. е.

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})=\mathbf{F}. \quad (64.9)$$

В механике теории относительности эти определения не равнозначны, так как масса зависит от скорости и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\neq m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Нетрудно видеть, что в релятивистской механике из указанных двух возможных определений целесообразно выбрать второе, т. е. определение, выражаемое формулой (64.9). В самом деле, по закону равенства действия и противодействия (см. § 43)

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_1)=\mathbf{F}_{12},\quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_2)=-\mathbf{F}_{21},$$

откуда

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2)=0$$

и

$$m\mathbf{v}_1+m\mathbf{v}_2=\text{const}.$$

Это и показывает, что при определении силы по формуле (64.9) удовлетворяется и закон сохранения импульса, т. е. получаются внутренне согласованные определения.

Однако из определения силы (64.9) следует, что в релятивистской механике, в отличие от механики Ньютона, сила и ускорение, вообще говоря, не будут направлены одинаково. Действительно, так как масса m в формуле (64.9) уже не является постоянной, то в результате дифференцирования в правой части (64.9) получаем:

$$\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\mathbf{v}\frac{dm}{dt}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\mathbf{v}. \quad (64.10)$$

Мы видим, что сила представляется суммой двух векторов, из которых один параллелен ускорению, а другой — параллелен уже существующей скорости. Это и показывает, что сила и ускорение, вообще говоря, не будут направлены одинаково.

Сила будет направлена одинаково с ускорением в двух частных случаях: *а*) когда сила $\mathbf{F}$ направлена перпендикулярно к уже существующей скорости $\mathbf{v}$ и *б*) когда сила $\mathbf{F}$ направлена параллельно уже существующей скорости $\mathbf{v}$. В случае *а*) скорость остается постоянной по величине $\left(\frac{dv}{dt}=0\right)$ и второй член в правой части (64.10) равен нулю, так что

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (64.11)$$

В случае *б*) оба члена в правой части (64.9) не равны нулю, и мы получаем после выполнения дифференцирования во втором члене:

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{m_0\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\mathbf{v}\frac{dv}{dt}. \quad (64.12)$$

Принимая во внимание, что в этом случае $v\mathbf{v}\frac{dv}{dt}=v^2\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, находим, после простых алгебраических преобразований,

$$\mathbf{F}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (64.13)$$

Скалярные коэффициенты, стоящие перед ускорением в формулах (64.11) и (64.13), как видно, неодинаковы. В случае *а*) отношение силы к ускорению равно

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad (64.14)$$

а в случае *б*) оно равно

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \quad (64.15)$$

Очевидно, что только формула (64.14) представляет выражение релятивистской массы, так как именно это выражение внутренне согласовано с предыдущими определениями и удовлетворяет закону сохранения импульса. Что же касается выражения (64.15), то оно показывает, что, когда сила совпадает по направлению с уже существующей скоростью, изменение импульса зависит не только от изменения скорости, но и от изменения массы со скоростью.

2) *Работа и кинетическая энергия.* Элементарная работа силы $\mathbf{F}$ может быть определена в релятивистской динамике так же, как в динамике Ньютона как скалярное произведение силы и перемещения

$$dW=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}. \quad (64.16)$$

В том случае, когда работа совершается над свободной частицей, затраченная работа, по закону сохранения энергии, равна изменению кинетической энергии. Отсюда:

$$dE=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\mathbf{v}\right)d\mathbf{r}=m\,d\mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{dt}+dm\mathbf{v}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=$$
$$=m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}+\mathbf{v}\mathbf{v}\,dm=mv\,dv+v^2\,dm. \quad (64.17)$$

Пользуясь выражением релятивистской зависимости массы от скорости и принимая во внимание, что

$$dm=\frac{m_0\frac{v}{c^2}\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

найдем из (64.17):

$$dE = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,dv + \frac{m_0\,\frac{v^3}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\,dv = \frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \qquad (64.18)$$

Проверкой убеждаемся, что имеет место тождественно

$$\frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{d}{dv}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv.$$

Заметив это и интегрируя (64.18) от 0 до v, находим:

$$E_{\text{кин}} = \int_0^v \frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \int_0^v \frac{d}{dv}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)dv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2. \qquad (64.19)$$

Это и есть релятивистское выражение для кинетической энергии. Разлагая $\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ в степенной ряд, получаем:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \ldots$$

В случае, когда скорость v мала по сравнению с c, т. е. $v/c \ll 1$, достаточно взять первые два члена ряда. При этом условии (64.19) дает

$$E_{\text{кин}} = m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0 c^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2. \qquad (64.20)$$

Мы получили, как и следовало ожидать, выражение ньютоновой механики для кинетической энергии.

Комбинируя (64.17) и (64.18), получаем:

$$dE = c^2(m - m_0). \qquad (64.21)$$

Выражение

$$mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

называют релятивистской полной энергией, а выражение m_0c^2 — энергией покоя. Формула (64.21) показывает, что изменение кинетической энергии тела, выраженное в эргах, равно выражению в граммах изменению релятивистской массы, умноженному на c^2, т. е.

$$\Delta E = c^2\Delta m \quad \text{или} \quad \Delta m = \Delta E/c^2.$$

Полученное важное соотношение между релятивистскими величинами — массой и энергией — относится не только к кинетической энергии. В самом деле, вернемся к выводу формулы релятивистской массы, данному в подпараграфе а), где рассматривался процесс центрального соударения двух тождественных шаров, движущихся навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютной величине скоростями. В момент соударения оба шара покоятся относительно друг друга, во двигаются с одной и той же скоростью V, относительно второй введенной в выводе системы координат. Полная масса шаров при скорости V равна

$$\frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Нетрудно показать, что полная масса обоих шаров перед соударением равна

$$m_1 + m_2 = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad \text{где} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Но очевидно, что $m > m_0$, ввиду чего

$$m_1 + m_2 > \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Этот на первый взгляд противоречивый результат имеет простое объяснение Так как шары, по предположению, упругие, то в момент остановки в системе возникает потенциальная энергия упругой деформации ΔE. Этой потенциальной энергии соответствует масса, равная $\Delta E/c^2$, которая как раз и компенсирует кажущуюся потерю релятивистской массы.

§ 65. О связи между массой и энергией *)

Соотношение между массой и энергией, выведенное в § 64,

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \qquad (65.1)$$

является очень важным результатом теории относительности. В настоящее время это соотношение имеет огромное практическое значение, ввиду того, что оно лежит в основе всей ядерной энергетики как в ее мирном использовании (ядерные реакторы, атомные электростанции и т. п.), так и в использовании для военных целей. Поэтому нам необходимо возможно отчетливее и глубже разобраться в смысле формулы Эйнштейна (65.1) и в вытекающих из нее следствиях. Это тем более необходимо, что

*) Для лучшего ознакомления с важнейшими вопросами, рассматриваемыми в этом параграфе настоятельно рекомендуется изучение превосходной статьи М. Лауэ, Инерция и энергия; русский перевод этой статьи помещен в журнале «Успехи физических наук», том 67, стр. 721 (апрель 1959 г.). См. также сборник: Макс Лауэ, Статьи и речи, «Наука», 1969 г., стр 163—197.

в литературе, особенно популярной, нередко встречается путаница в терминологии и в формулировках.

Начнем с того, что приведем принадлежащий Эйнштейну простой вывод этой формулы. В этом выводе существенную роль будет играть световое давление, предсказанное Максвеллом и блестяще подтвержденное экспериментально П. Н. Лебедевым. Величина светового давления при полном поглощении света равна E/c, где E — поток энергии электромагнитного излучения Напомним еще, что в силу обобщенного закона сохранения импульса при *испускании* света излучающее тело получает импульс отдачи, направленный в противоположную сторону и равный также E/c.

Обратимся теперь к выводу формулы Эйнштейна.

Вообразим однородную трубу длины L, находящуюся в равновесии в пустоте (рис. 110). Пусть на противоположных концах этой трубы находятся два тела A и B, массы которых малы по сравнению с массой трубы M, так что в тех случаях, когда учитывается полная масса системы, она может быть положена равной M. Пусть, кроме того, тело A по сравнению с телом B имеет избыток энергии ΔE, который оно может излучить в виде электромагнитной волны по направлению к телу B.

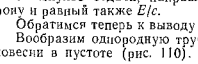


Рис. 110.

Рассмотрим следующий круговой процесс. В некоторый момент тело A излучит свой избыток энергии ΔE в виде «вспышки света», вследствие чего в трубе начнет распространяться слева направо короткий поток электромагнитных волн. По истечении времени $t = L/c$ этот поток дойдет до тела B и будет им поглощен. Во время испускания тело A, а вместе с ним и вся система, вследствие отдачи, получит импульс, направленный влево и равный $g = \Delta E/c$. Под влиянием этого импульса труба придет в движение, которое будет продолжаться до тех пор, пока излучение не дойдет до тела B и в нем полностью поглотится. Тогда тело B, а вместе с ним вся труба испытают давление света, направленное вправо и также равное $g = \Delta E/c$, которое и остановит движение трубы.

Скорость v, которую приобретет наша система под действием отдачи g будет (массы тел A и B пренебрежимо малы!):

$$v = \frac{g}{M} = \frac{\Delta E}{Mc}.$$

За время t центр масс системы переместится на расстояние

$$\Delta x = vt = \frac{gL}{Mc} = \frac{L}{M}\,\frac{\Delta E}{c^2}, \qquad (65.2)$$

при этом мы предполагаем, что длина трубы достаточно велика, так что времена испускания и поглощения света ничтожно малы по сравнению с t.

После того, как тело B поглотит свет, переместим его при помощи некоторого механизма, действующего внутри системы, т. е. при помощи одних только внутренних сил, до соприкосновения с телом A. При этом тело B отдаст свой избыток энергии обратно телу A, после чего мы снова вернем тело B на его прежнее место на правом конце трубы, опять-таки при помощи одних внутренних сил. В результате вся система придет в исходное состояние, но ее центр масс испытает смещение. Предполагая возможность связи между энергией и массой, мы должны считать, что массы тела B, имеющего избыток энергии ΔE и отдавшего его, будут различны; обозначим их соответственно через m_1 и m_2. В таком случае смещение центра масс системы при переносе избытка энергии от A к B, т. е. на расстояние L, будет

$$-L\frac{m_1}{M},$$

а при обратном переносе будет

$$L\frac{m_2}{M}.$$

Полное смещение центра масс, принимая во внимание смещение вследствие отдачи, будет

$$\frac{L}{M}\left(\frac{\Delta E}{c^2} + m_2 - m_1\right). \qquad (65.3)$$

Но это смещение обязательно должно быть равно нулю, так как иначе получилось бы, что система, полностью сохранившая свою конфигурацию, переместила сама себя без действия внешних сил. Очевидно, что равенство нулю (65.3) есть следствие закона сохранения полного импульса (механического + электромагнитного). Итак:

$$m_1 - m_2 \equiv \Delta m = \Delta E/c^2,$$

что́ и требовалось доказать.

В рассмотренном круговом процессе избыток энергии ΔE возвращался телу A путем переноса тела B поступательно на расстояние L. Можно показать, однако, что это предположение не единственное, и что поэтому на него не следует смотреть как на ограничение общности вывода.

Обратимся теперь к анализу соотношения Эйнштейна. В § 64 мы доказали, что если рассмотреть простейший процесс соударения двух упругих шаров, положив в основу законы сохранения массы и импульса, то в теории относительности обоим этим

законам можно удовлетворить только при условии, что масса зависит от скорости по формуле Лоренца — Эйнштейна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Из того факта, что в основе вывода формулы Лоренца — Эйнштейна лежит закон сохранения массы следует, что *релятивистская* масса удовлетворяет закону сохранения. Легко видеть, однако, что изменение релятивистской массы со скоростью уже включает закон эквивалентности массы и энергии (65.1). В этом мы проще всего убедимся, рассматривая случай, когда скорость v не слишком велика. В самом деле, разлагая выражение $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ в степенной ряд, мы можем в случае, когда $v/c \ll 1$, взять только первые два члена и получаем

$$m = m_0 + \frac{1}{2}\frac{m_0 v^2}{c^2} = m_0 + \frac{E_{\text{кин}}}{c^2}.$$

Здесь первый член справа представляет инвариантную (т. е. не зависящую от скорости) массу покоя m_0, а второй член — как раз и выражает изменение массы со скоростью. Мы видим, что этот второй член в точности соответствует закону Эйнштейна

$$\Delta m = \Delta E/c^2.$$

Рассмотрим теперь систему из нескольких тел, так или иначе между собой взаимодействующих. Поскольку релятивистская масса подчиняется закону сохранения, имеем:

$$\text{const} = \sum_i m_i = \sum_i m_{i0} + \sum^{(i)} \frac{E^{(i)}_{\text{кин}}}{c^2}.$$

Мы приходим таким образом к важному выводу: в результате процесса сохраняется *сумма* массы покоя $\sum m_0$ и массы, соответствующей кинетической энергии системы $\frac{\sum E_{\text{кин}}}{c^2}$ после завершения процесса, *но не масса покоя* $\sum m_0$. Примем теперь во внимание, что кинетическая энергия до и после процесса, вообще говоря, неодинакова; если, например, происходит расщепление атомного ядра, то в системе координат, где исходное ядро покоится, его кинетическая энергия равна нулю, но возникающие в процессе деления осколки приобретают кинетическую энергию. Поэтому $\frac{\sum E_{\text{кин}}}{c^2}$ возрастает, а следовательно, $\sum m_0$ должна уменьшиться. *Это происходит вследствие закона сохранения релятивистской массы.* Итак, масса покоя не подчиняется

закону сохранения; напротив в результате процесса, сопровождающегося выделением энергии ΔE происходит *потеря* массы покоя, равная $\Delta E/c^2$. Можно сказать и наоборот: изменению массы покоя на величину Δm_0 соответствует освобождение энергии $\Delta E = (\Delta m_0)c^2$.

Соотношение между массой и энергией получило исчерпывающее экспериментальное подтверждение. Так как, однако, в формуле $\Delta m = \Delta E/c^2$ в знаменателе стоит c^2 — величина, близкая к 10^{21}, то при химических процессах, где величина ΔE порядка 100 *ккал·моль*$^{-1}$ $= 4{,}18 \cdot 10^{12}$ *эрг·моль*$^{-1}$, изменение массы покоя равно

$$\Delta m = \frac{4{,}18 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} = 4{,}6 \cdot 10^{-9} \text{ г}$$

— величина ничтожно малая.

На рубеже XIX и XX столетий, т. е. еще до возникновения теории относительности германский физико-химик Р. Ландольт выполнил длинную серию экспериментов, которые представляли собой повторение опытов Ломоносова и Лавуазье, на новом, значительно более высоком уровне экспериментальной техники. Опыты состояли в проведении ряда химических реакций в полностью изолированном пространстве с целью предупреждения малейшей утечки вещества и при точном контроле массы системы до и после реакции. Никакого изменения массы при этом обнаружено не было. С нашей нынешней точки зрения, поскольку система не была изолирована энергетически, тепло, выделявшееся при реакции, рассеивалось, и масса покоя системы должна была уменьшиться. Однако в опытах Ландольта эта потеря массы не была установлена, так как чувствительность применявшихся весов была недостаточна для обнаружения столь малой величины.

Таким образом обычные химические реакции не могут служить подходящим объектом для проверки соотношения между массой и энергией. При ядерных реакциях, напротив, освобождаются огромные количества энергии и изменение массы покоя становится вполне доступным для измерений. Ярким примером может служить реакция, лежащая в основе всей современной ядерной энергетики: так называемое деление ядра. В результате этой реакции тяжелое ядро урана делится приблизительно пополам, причем освобождается энергия, равная приблизительно 200 миллионам электрон-вольт. При расчете на моль, т. е. например ~ 240 *г* урана, получаем:

$$\Delta E = 200 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 19{,}3 \cdot 10^{19} \text{ эрг}.$$

Потеря массы при этом будет

$$\Delta m = \frac{19{,}3 \cdot 10^{19}}{9 \cdot 10^{20}} = 0{,}21 \text{ г},$$

и, следовательно, при делении одного килограмма урана потеря массы составит уже около грамма!

Для проверки соотношения Эйнштейна были использованы ядерные реакции, в которых энергия реакции могла быть определена с одной стороны непосредственными измерениями и с другой — по величине потери массы. Во всех случаях получалось совпадение тем более точное, чем точнее были непосредственные измерения энергии. В качестве примера можно привести следующий результат: для серии ядерных реакций путем сопоставления непосредственно измеренных ΔE и Δm из соотношения Эйнштейна вычислялась скорость света. Таким путем было получено $c = 2{,}98 \cdot 10^{10}$ *см/сек*; тогда как точное значение $c = 2{,}99 \cdot 10^{10}$ *см/сек*. Разница составляет 0,4%. Эти данные приводятся только в качестве примера. В настоящее время на основании всей совокупности результатов ядерной физики не может быть никакого сомнения в абсолютной точности соотношения Эйнштейна.

В литературе нередко можно встретить утверждение, что при процессах, сопровождающихся освобождением энергии (например, при ядерных реакциях) происходит «превращение массы в энергию». Такая формулировка по существу не верна и вызывает только путаницу. Масса и энергия неразрывно связаны между собой, они представляют как бы две стороны одного и того же универсального свойства материи и поэтому не могут «превращаться» друг в друга. Верно, конечно, что при процессах, сопровождающихся увеличением кинетической энергии, масса покоя $\sum m_0$, испытывает соответствующее уменьшение. Но избытку кинетической энергии $\Delta E_{\text{кин}}$, возникшему в результате реакции, соответствует масса $\frac{\Delta E_{\text{кин}}}{c^2}$, в точности компенсирующая уменьшение $\sum m_0$, так же как последней величине соответствует энергия $\sum m_0 c^2$, которая в сумме с $\Delta E_{\text{кин}}$ в точности равна $\sum mc^2$ до реакции.

Открытие эквивалентности массы и энергии повлекло за собой необходимость существенного изменения самого понятия о массе. В механике Ньютона масса определялась, как количество вещества, и рассматривалась, как выражение материальности тела. Это представление пришлось оставить еще до появления теории относительности. Когда Кауфман и другие исследователи показали прямым экспериментом, что масса электрона зависит от его скорости, этот факт нельзя было совместить с представлением о массе, как о количестве вещества. Первоначально пытались выйти из затруднения, рассматривая увеличение массы со скоростью, как следствие появления добавочной инерции, обусловленной электромагнитным полем движущегося электрона (Дж. Томсон) и эта добавочная инерция была названа «кажущейся массой». Однако, впоследствии оказалось, что если стать на эту точку зрения, то всю массу заряженного тела следует рассматривать как «кажущуюся» (электромагнитную) массу. Наконец, теория относительности показала, что любая масса, независимо от наличия или отсутствия электрического заряда, должна зависеть от скорости по тому же закону, который был установлен экспериментально для заряженных частиц. Это повлекло за собой рассмотренные выше следствия, которые с особенной ясностью показали, что определение массы, как количества вещества лишено физического смысла.

Это, однако, не мешает нам рассматривать релятивистскую (зависящую от скорости) массу, как меру инертности тела, так как отношение силы к релятивистской массе остается равным ускорению тела.

Б. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

§ 66. Элементарные центры испускания света

Проблема излучения света занимает центральное место в теории строения атома, так как свет доставляет нам наибольшее количество сведений о внутреннем устройстве атома. Рассмотрению этой проблемы, которая будет занимать нас почти во всей книге, мы предпошлем краткий обзор некоторых вопросов классической теории электромагнитного излучения, знакомство с которой необходимо для понимания современных представлений.

После открытия электронов стало ясно, что именно их движениями обусловлено испускание света. С особенной убедительностью это вытекало из открытого в 1896 г. Зееманом влияния *магнитного* поля на испускание света (эффект Зеемана). Теория этого явления, разработанная Лоренцом, позволила вычислить величину e/m для элементарных центров излучения, и оказалось, что она удовлетворительно совпадает с величиной удельного заряда для свободных электронов.

Мы должны рассмотреть, таким образом, механизм испускания света согласно классической физике. Оказалось, что, несмотря на общую несостоятельность статической модели атома, большой круг оптических явлений можно удовлетворительно объяснить, рассматривая электроны как микроскопические *вибраторы*, посылающие электромагнитные волны. Простейшей моделью элементарного центра, пригодной в некоторой степени для объяснения ряда фактов испускания света, может служить, таким образом, линейный осциллятор, с механическими свойствами которого мы познакомились в § 46.

§ 67. Электромагнитное излучение линейного осциллятора

Представим себе, что положительный заряд связан с настолько большой массой, что его можно считать неподвижным, а отрицательный заряд, по абсолютной величине равный положительному, — совершает колебания относительно этого неподвижного положительного заряда; такая система и будет линейным осциллятором. С электрической точки зрения эта система является диполем. Электрические свойства диполя характеризуются величиной, называемой *дипольным моментом*. Дипольный момент это — вектор, равный

$$\mathbf{p} = e\mathbf{r}, \tag{67.1}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному. Так как дипольный момент не зависит от выбора начала координат *), то удобнее всего поместить положительный заряд в начало координат; тогда составляющими $\mathbf{p}$ будут

$$p_x = ex, \quad p_y = ey, \quad p_z = ez. \tag{67.2}$$

Вычисление электромагнитного поля диполя, совершающего колебания, можно выполнить при помощи уравнений Максвелла.

Не повторяя здесь довольно длинных и несколько утомительных вычислений, приведем их результат **). Электрическое и магнитное поля колеблющегося диполя *на достаточно больших расстояниях* от него (так называемая волновая зона) характеризуются напряженностями $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$, равными по абсолютной величине и взаимно перпендикулярными по направлению. Для случая скоростей, малых по сравнению со скоростью света ($v \ll c$), абсолютные значения напряженностей $|\mathscr{E}|$ и $|\mathscr{H}|$ в точке M (рис. 111), отстоящей от диполя на расстоянии R, выражаются формулой

$$|\mathscr{E}| = |\mathscr{H}| = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\,(t - R/c)}{c^2 R} \sin\vartheta \text{ ***}). \tag{67.3}$$

Здесь c — скорость света в пустоте, ϑ — угол между прямой, вдоль которой совершаются колебания, и направлением в точку M: символ $\ddot{\mathbf{p}}\,(t - R/c)$ имеет следующий смысл: это вторая

*) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1967, стр. 96.

**) См., например, И. Е. Тамм, Основы теории электричества, § 99, «Наука», 1967, или Я. И. Френкель, Электродинамика, т. 1, стр. 154, ОНТИ, 1934

***) Скобки в формуле (67.3) применяются только для удобства набора, они указывают на то, что $\mathbf{p}$ есть *функция* $t - R/c$.

производная дипольного момента, взятая, однако, не для времени t, а для предшествующего момента $t - R/c$. Очевидно, что R/c есть время, которое требуется для того, чтобы процесс, распространяющийся со скоростью c, дошел от O до точки наблюдения M. Таким образом, появление в формуле (67.3) запаздывающего значения $\ddot{\mathbf{p}}\,(t - R/c)$ указывает на конечную скорость распространения электромагнитного поля: колеблющийся электрический диполь посылает электромагнитные волны, которые перемещаются со скоростью c.

Принимая во внимание, что $\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\mathbf{r}}$, мы видим, что при прочих равных условиях $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ на больших расстояниях от O зависят от *ускорения* электрона $\ddot{\mathbf{r}}$.

Направления $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ определяются следующим образом: представим себе сферу, описанную из O радиусом R. Примем за полярную ось направление прямой, вдоль которой совершаются колебания диполя, и наметим на сфере меридианы и параллели. Тогда вектор $\mathscr{E}$ будет направлен по касательной к меридиану, проходящему через M, а вектор $\mathscr{H}$ — по касательной к параллели, проходящей через ту же точку и притом так, как это показано на рис. 111.

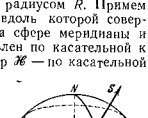


Рис. 111. Излучение диполя.

Плотность энергии электромагнитного поля равна

$$\rho = \frac{1}{8\pi}\left(\mathscr{E}^2 + \mathscr{H}^2\right)$$

или, если принять во внимание, что в данном случае $\mathscr{E} = \mathscr{H}$,

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\,\mathscr{E}^2\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}. \tag{67.4}$$

Так как поле колеблющегося диполя распространяется со скоростью c, то через каждый квадратный сантиметр в направлении нормали R (рис. 111) ежесекундно проходит количество энергии S, равное

$$S = \rho c = c\,\frac{\mathscr{E}^2}{4\pi}\,\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}. \tag{67.5}$$

Величина S есть, очевидно, не что иное, как численное значение потока энергии, проходящего через данную точку. Она, конечно, может быть вычислена так же, как численное значение вектора Умова — Пойнтинга $\mathbf{S}$ в данной точке

$$S = |\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi}\left|[\mathscr{E}\mathscr{H}]\right| = \frac{c}{4\pi}\,\mathscr{E}\mathscr{H}\sin(\mathscr{E}\mathscr{H}).$$

В волновой зоне $\mathscr{E} = \mathscr{H}$ и $\mathscr{E} \perp \mathscr{H}$, что дает сразу

$$S = \frac{c}{4\pi}\mathscr{E}^2,$$

т. е. формулу (67.5).

Подставляя сюда значение $\mathscr{E}$ из (67.3), находим

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta = \frac{e^2\ddot{r}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta \qquad (67.6)$$

(значения $\ddot{p}$ или $\ddot{r}$ относятся к моменту $t - R/c$!).

Из этой формулы видно, что интенсивность излучения прямо пропорциональна квадрату ускорения и обратно пропорциональна квадрату расстояния, как и следовало ожидать, потому что полный поток энергии через сферу вокруг O остается постоянным, а поверхность сферы растет пропорционально квадрату радиуса. Далее, присутствие в формуле (67.6) $\sin^2\vartheta$ влечет за собой неравномерность в распределении интенсивности по различным направлениям: в направлении прямой, вдоль которой происходят колебания ($\vartheta = 0$ и π), она равна нулю, а максимальной величины достигает в направлении, перпендикулярном к этой прямой ($\vartheta = \pi/2$). На рис. 112 приведена полярная диаграмма распределения интенсивности излучения по углам. Опыт подтверждает такое распределение интенсивности. Одним из наиболее наглядных относящихся сюда примеров является возникновение рентгеновских лучей при торможении (отрицательном ускорении) электронов на антикатоде. На рис. 113 приведены результаты экспериментального исследования зависимости интенсивности тормозного рентгеновского излучения от угла ϑ при различных скоростях электронов. Как видно, во всех случаях при $\vartheta = 0$

Рис. 112. Полярная диаграмма распределения интенсивности излучения диполя.

Рис. 113. Угловое распределение интенсивности тормозного рентгеновского излучения.

и $\vartheta = \pi$ интенсивность равна нулю; для электронов малых скоростей ($\beta = v/c = 1/20$) максимум интенсивности получается вблизи $\vartheta = \pi/2$; для больших скоростей ($\beta = 1/3$, $1/4$) направление максимума смещено в сторону движения электронов. Это несоответствие с формулой (67.6) объясняется тем, что формула эта выведена для случая малых скоростей без учета релятивистских эффектов. Для больших скоростей Зоммерфельд получил формулу

$$S = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\,\frac{\sin^2\vartheta}{(1-\beta\cos\vartheta)^6} \qquad (\beta = v/c),$$

хорошо согласующуюся с опытом при любых значениях β.

§ 68. Полное и среднее излучение осциллятора

Формула (67.6) даст выражение для потока энергии, проходящего в данный момент через выбранную точку в направлении, характеризуемом углом ϑ, или, иначе, мгновенную интенсивность электромагнитной волны в определенном направлении.

Если нужно вычислить полное количество энергии, излучаемой осциллятором в единицу времени, то достаточно найти величину интеграла

$$I = \int S\,d\sigma, \qquad (68.1)$$

распространив интегрирование на поверхность сферы, описанной из O (рис. 111).

Принимая во внимание, что элемент поверхности в сферических полярных координатах равен

$$d\sigma = R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

напишем интеграл (68.1) в явном виде, подставив вместо потока S его величину из (67.6):

$$I = \iint \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{\ddot{p}^2}{4\pi c^3}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta =$$

$$= \frac{\ddot{p}^2}{2c^3}\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta = \frac{\ddot{p}^2}{2c^3}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta. \qquad (68.2)$$

Для вычисления последнего интеграла введем новую переменную $\xi = \cos\vartheta$ и примем во внимание, что пределы интегрирования по этой переменной будут $+1$ и -1:

$$\int_0^{\pi}(1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)\,d\xi = \frac{4}{3}.$$

Возвращаясь к (68.2), получаем окончательно

$$I = \frac{2\dot{p}^2}{3c^3} = \frac{2e^2r^2}{3c^3}. \tag{68.3}$$

Полученная формула дает, очевидно, величину полной энергии *в данный момент*. Так как $\dot{p}$ периодически меняется со временем, то изменяется и полная энергия I. С практической точки зрения основной интерес представляет знание *средней*, а не мгновенной энергии, потому что вследствие высокой частоты колебаний света (для видимой части спектра ν порядка 10^{15} *сек*$^{-1}$) все приборы, в том числе и глаз, не успевают следовать за колебаниями и реагируют на среднюю энергию. Вычислим теперь эту *среднюю энергию* за достаточно большой промежуток времени, например за 1 *сек*. Она равна среднему за один период

$$\overline{I} = \frac{2\overline{\dot{p}^2}}{3c^3}. \tag{68.4}$$

Если дипольный момент изменяется по закону гармонических колебаний: $p = p_0 \cos \omega t = p_0 \cos 2\pi\nu t$, то

$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos \omega t = -4\pi^2\nu^2 p_0 \cos 2\pi\nu t. \tag{68.4'}$$

Подставляя это значение $\ddot{p}$ в (68.3), получаем

$$I = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \cos^2 2\pi\nu t.$$

Среднее значение I будет

$$\overline{I} = \frac{2\omega^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{32\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2 \overline{\cos^2 2\pi\nu t}$$

или, так как $\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\cos^2 2\pi\nu t} = 1/2$,

$$\overline{I} = \frac{\omega^4}{3c^3} p_0^2 = \frac{16\pi^4\nu^4}{3c^3} p_0^2. \tag{68.5}$$

Пусть теперь положительный заряд диполя покоится в начале координат, а отрицательный совершает колебания по оси x. Тогда $p = ex$; среднее излучение за один период на основании (68.4) выразится в виде

$$\overline{I} = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\ddot{x}^2}. \tag{68.6'}$$

Если колебания гармонические, то $x = a \cos \omega t = a \cos 2\pi\nu t$, и вместо (68.5) мы получаем

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 e^2 a^2}{3c^3} = \frac{16\pi^4\nu^4 e^2 a^2}{3c^3}. \tag{68.6}$$

§ 69. Электромагнитный спектр негармонического осциллятора

Строго гармонические синусоидальные колебания являются математической абстракцией и в природе никогда не осуществляются. В случае механических колебаний квазиупругий закон силы имеет место только для малых отклонений. При больших отклонениях в выражении силы появляются члены с высшими степенями смещения, а в механическом спектре наряду с основной частотой — с ее обертоны. Рассмотрим теперь, каков спектр электромагнитной волны, возникающей при колебаниях, которые не являются гармоническими, но происходят по какому-нибудь более сложному закону. Эти колебания мы пока еще будем считать строго периодическими в математическом смысле.

Среднюю энергию осциллятора, колеблющегося по негармоническому закону, мы будем вычислять по формуле (68.6'):

$$I = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\ddot{x}^2}. \tag{69.1}$$

Поскольку смещение x представляет собою *периодическую* функцию времени, мы можем разложить ее в ряд Фурье

$$x = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{is\omega_0 t}. \tag{69.2}$$

Вычислим теперь вторую производную от x, произведем усреднение по времени и подставим затем результат в (69.1). Вторая производная по t будет

$$\ddot{x} = -\left[A_1\omega_0^2 e^{i\omega_0 t} + A_2(2\omega_0)^2 e^{i2\omega_0 t} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + A_{-1}\omega_0^2 e^{-i\omega_0 t} + A_{-2}(2\omega_0)^2 e^{-i2\omega_0 t} + \ldots\right]. \tag{69.3}$$

Для вычисления среднего за большой промежуток времени достаточно найти среднее за один период $T = 1/\nu_0 = 2\pi/\omega_0$. Среднее квадрата $\overline{\ddot{x}^2}$ будет поэтому

$$\overline{\ddot{x}^2} = \frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}^2\, dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_0} \ddot{x}^2\, dt. \tag{69.4}$$

Подставим сюда $\ddot{x}^2$, которое найдем путем возведения в квадрат (69.3), и будем интегрировать почленно. При этом нам придется находить интегралы вида

$$A_k A_l \int_0^{2\pi/\omega_0} e^{i(k+l)\omega_0 t}\, dt.$$

Легко убедиться непосредственным вычислением, что все эти интегралы равны нулю, за исключением тех случаев, когда $l = -k$. Окончательно найдем

$$\overline{x^2} = 2\left[A_1 A_{-1}\omega_0^4 + A_2 A_{-2}(2\omega_0)^4 + \ldots + A_k A_{-k}(k\omega_0)^4 + \ldots\right], \quad (69.5)$$

или, так как (по § 48) $2A_k A_{-k} = a_k^2/2$,

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2}\left[a_1^2\omega_0^4 + a_2^2(2\omega_0)^4 + \ldots + a_k^2(k\omega_0)^4 + \ldots\right].$$

Подставляя это в формулу (69.1) для среднего излучения, будем иметь

$$\overline{I} = \frac{e^2 a_1^2}{3c^3}\omega_0^4 + \frac{e^2 a_2^2}{3c^3}(2\omega_0)^4 + \frac{e^2 a_3^2}{3c^3}(3\omega_0)^4 + \ldots \quad (69.6)$$

или, переходя от угловых частот к линейным $\omega = 2\pi\nu$,

$$\overline{I} = \frac{16\pi^4\nu_0^4}{3c^3}e^2 a_1^2 + \frac{16\pi^4(2\nu_0)^4}{3c^3}e^2 a^2 + \frac{16\pi^4(3\nu_0)^4}{3c^3}e^2 a_3^2 + \ldots \quad (69.6')$$

Сравнивая этот результат с (68.6), мы видим, что среднее излучение осциллятора, совершающего периодическое, но негармоническое движение, состоит из суммы членов, каждый из которых представляет собою среднее излучение гармонического осциллятора, причем частоты этих осцилляторов образуют ряд $\nu_0, 2\nu_0, 3\nu_0, \ldots$ Это означает, что *электромагнитный спектр негармонического осциллятора содержит те же частоты, что и его механический спектр.*

Характерная особенность этого спектра состоит в том, что в него входят основная частота ν_0 и ее *гармонические обертоны*, т. е., если изобразить спектр в шкале частот, получится ряд *равноотстоящих линий*. Оказывается, что именно такой спектр дают электромагнитные волны, излучаемые антенной радиотелеграфа; инфракрасные колебания ионов в молекулах дают спектр, составленный из линий, приблизительно подчиняющихся этому закону, но немного сближающихся по мере увеличения порядка обертона. Наконец, спектры, обусловленные движениями электронов (видимые и ультрафиолетовые), уже совершенно не следуют этому закону: в них линии довольно быстро сближаются по мере перехода ко все более высоким частотам вплоть до полного слияния (см. гл. VIII). Как мы увидим в дальнейшем, линии в видимых и ультрафиолетовых спектрах подчиняются совершенно другим законам, объяснение которых могло быть дано только на основе теории квантов.

§ 70. Затухание колебаний

До сих пор мы молчаливо предполагали, что энергия осциллятора остается постоянной, т. е. что осциллятор неограниченно долгое время испускает незатухающие электромагнитные волны. Такое предположение, строго говоря, не отвечает действительности, так как при свободных колебаниях осциллятора электромагнитная волна уносит энергию. Ввиду этого запас энергии осциллятора постепенно убывает, и колебания затухают.

Найдем прежде всего закон убывания энергии со временем. Различные экспериментальные данные указывают на то, что затухание излучающих атомов мало. Например, изучение интерференции света при больших разностях хода привело к выводу, что длина ряда волн, испускаемых атомом без затухания, соответствует более чем 100 миллионам длин волн. Принимая во внимание это обстоятельство, мы можем считать, что колебания электрона мало отличаются от гармонических. Но для случая гармонических колебаний, как мы знаем, средняя энергия, уносимая электромагнитной волной в единицу времени, равна

$$\overline{I} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}. \quad (68.6)$$

Убыль энергии самого осциллятора за единицу времени будет равна как раз этой величине I, т. е.

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}$$

или

$$dE = -\frac{\omega^4 e^2 a_0^2}{3c^3}dt. \quad (70.1)$$

Полная энергия гармонического осциллятора равна

$$E = \frac{m a_0^2 \omega^2}{2}. \quad (46.14)$$

Разделив (70.1) на (46.14), получаем

$$\frac{dE}{E} = -\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3}dt. \quad (70.2)$$

Введем обозначение

$$\frac{2\omega^2 e^2}{3mc^3} = \gamma; \quad (70.3)$$

тогда (70.2) перепишется в виде

$$\frac{dE}{E} = -\gamma\, dt.$$

Отсюда интегрированием находим

$$E = E_0 e^{-\gamma t}. \tag{70.4}$$

Мы видим, что энергия осциллятора должна убывать со временем по экспоненциальному закону.

Постоянная γ, введенная нами соотношением (70.3), имеет определенный физический смысл. Заметим прежде всего, что размерность этой постоянной есть [*сек*$^{-1}$]. В этом легко убедиться, замечая, что произведение γt, стоящее в показателе (70.4), должно быть безразмерной величиной. Величина, обратная γ, должна поэтому представлять собой некоторый промежуток времени. Обозначим его через τ; тогда

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3mc^3}{8\pi^2\nu^2 e^2}. \tag{70.5}$$

Соотношение (70.4) можно теперь написать в виде

$$E = E_0 e^{-t/\tau}. \tag{70.4'}$$

Отсюда видно, что при $t = \tau$, $E = E_0/e$, т. е. — что τ есть промежуток времени, в течение которого энергия осциллятора убывает в $e = 2{,}718$ раза. Так как по (70.4′) с возрастанием t энергия приближается к нулю асимптотически, то никакой определенной величины времени, в течение которого ещё продолжаются колебания, указать нельзя. В качестве условной меры этого времени удобно пользоваться величиной τ, которая называется *временем релаксации*. Итак, постоянная затухания γ есть обратная величина времени релаксации.

Для того чтобы составить представление о порядке величины этого времени, вычислим его численное значение для испускания голубой линии водородного спектра (так называемая линия H_β), которой соответствует длина волны $\lambda = 4861{,}33 \times 10^{-8}$ *см*. В этом случае

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4861{,}33 \cdot 10^{-8}} = 3{,}87 \cdot 10^{15}\ \text{сек}^{-1}.$$

Подставляя в (70.5) это значение ω, а также значения универсальных констант $m = 9 \cdot 10^{-28}$ *г*, $e/mc = 1{,}76 \cdot 10^7$, найдем

$$\tau = \frac{3mc^3}{2\omega^2 e^2} = \frac{3c}{2\omega^2 m}\left(\frac{mc}{e}\right)^2 =$$

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot (3{,}87 \cdot 10^{15})^2 \cdot 9 \cdot 10^{-28} (1{,}76 \cdot 10^7)^2} \approx 10^{-8}\ \text{сек}.$$

Это показывает, что *абсолютная* величина времени свечения очень мала. Однако *относительная* величина его, а именно, отношение τ к периоду колебаний, приблизительно равна $6 \cdot 10^6$,

т. е. очень большой величине: электрон должен совершить 6 миллионов колебаний, прежде чем его энергия уменьшится в e раз.

Непосредственное экспериментальное определение величины времени релаксации было впервые осуществлено при помощи каналовых лучей. Пучок светящихся водородных каналовых лучей через отверстие в катоде выпускался в пространство, где поддерживался столь высокий вакуум, что атомы могли «высвечиваться» практически без соударений. По убыванию интенсивности вдоль светящегося пучка при известной скорости каналовых частиц можно было определить τ. Оказалось, что порядок величины этого времени совпадает с указанным выше (10^{-8} *сек* для $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-8}$ *см*).

§ 71. Лучистое трение

Мы установили, таким образом, что энергия диполя, совершающего колебания, убывает со временем по закону (70.4) или (70.4′). Если сила, под действием которой происходят колебания, — квазиупругая, то можно вычислить сумму потенциальной и кинетической энергий осциллятора. Эта сумма, однако, не будет постоянной ввиду наличия затухания. В механике мы встречаемся с аналогичным случаем: когда колебания механического осциллятора происходят в вязкой среде, то запас его механической энергии (кинетическая + потенциальная) с течением времени убывает. Поэтому в балансе энергии появляется дефицит: энергия расходуется необратимым образом и в конечном счете превращается в тепло. Мы видели, однако, в § 41, что этот дефицит можно учесть, введя некоторую диссипативную силу R (т. е. силу, ведущую к рассеянию энергии) — силу трения. Соответственно, в правой части уравнения колебаний наряду с квазиупругой силой $-fx$ появляется еще сила трения.

Аналогичным образом можно восстановить баланс энергии также и в случае затухающих *электромагнитных* колебаний осциллятора: мы можем себе представить, что эти колебания тормозятся диссипативной силой, которую целесообразно назвать «силой лучистого трения». Очевидно, что эта сила появляется в результате обратного воздействия поля излучения осциллятора на самый осциллятор.

Займемся теперь установлением явного выражения для этой силы. В механике обычно принимается, что сила трения зависит от скорости, т. е. от первой производной $\dot{x}$ (при не слишком больших скоростях сила трения R просто пропорциональна $\dot{x}$). Конечно, у нас нет никаких оснований без предварительного исследования переносить эту зависимость и на силу *лучистого* трения. Для отыскания выражения этой силы проще всего поступить следующим образом. Вычислим среднее значение

работы силы лучистого трения за промежуток времени, достаточно большой по сравнению с периодом колебаний. Работа силы R за промежуток времени dt равна $R dx = R\dot{x} dt$; среднее значение работы за промежуток времени от 0 до t будет поэтому

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\, dt.$$

Поскольку мы ввели силу лучистого трения для описания убыли энергии, очевидно, что среднее значение работы этой силы должно быть равно среднему значению энергии, испущенной осциллятором за тот же промежуток времени. Последнее по формуле (68.6′) будет

$$\frac{2e^2}{3c^3}\overline{\ddot{x}^2} = \frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2\, dt.$$

Итак, мы имеем

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\, dt = -\frac{2e^2}{3c^3 t}\int_0^t \ddot{x}^2\, dt. \tag{71.1}$$

Простыми преобразованиями и интегрированием по частям находим

$$\frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}^2\, dt = \frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}\ddot{x}\, dt = \frac{1}{t}\int_0^t \ddot{x}\, d\dot{x} =$$

$$= \frac{1}{t}(\ddot{x}\dot{x})\Big|_0^t - \frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}\, d\ddot{x} = \frac{(\dot{x}\ddot{x})_t - (\dot{x}\ddot{x})_0}{t} - \frac{1}{t}\int_0^t \dot{x}\dddot{x}\, dt.$$

Так как скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$ меняются в конечных пределах, то, выбрав достаточно большой промежуток времени, мы можем первый член сделать сколь угодно малым. Поэтому уравнение (71.1) даст

$$\frac{1}{t}\int_0^t R\dot{x}\, dt = \frac{2e^2}{3c^3 t}\int_0^t \dddot{x}\dot{x}\, dt.$$

Для того чтобы это равенство было удовлетворено, достаточно положить

$$R = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}. \tag{71.2}$$

Это и есть интересующее нас выражение силы лучистого трения *). Заметим, что мы здесь впервые встречаемся с силой, зависящей от *третьей* производной смещения по времени. В механике такие силы не известны.

Поскольку мы теперь знаем выражение для силы лучистого трения, мы должны учесть эту силу при составлении уравнения колебаний электромагнитного осциллятора. Это уравнение в общем виде пишется так:

$$m\ddot{x} = -fx + R;$$

подставляя для R выражение (67.2), получаем уравнение колебаний с учетом лучистого трения

$$m\ddot{x} = -fx + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x}. \tag{71.3}$$

Мы получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка. Отыскивая его решение в виде $x = e^{i\omega t}$, мы придем к характеристическому уравнению третьей степени. Однако мы можем воспользоваться методом последовательных приближений и рассуждать следующим образом. В нулевом приближении можно в уравнении (71.3) отбросить малый второй член в правой части. Мы вернемся тогда к уравнению колебаний осциллятора без учета трения

$$m\ddot{x} + fx = 0, \tag{71.4}$$

решение которого есть $x = e^{i\omega_0 t}$, где $\omega_0 = \sqrt{f/m}$. Это решение мы подставим в (71.3) и, замечая, что $\dddot{x} = -i\omega_0^3 e^{i\omega_0 t} = -\omega_0^2\dot{x}$, получим

$$m\ddot{x} = -fx - \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3}\dot{x}. \tag{71.5}$$

Полагая, как и раньше,

$$\frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3} = \gamma, \tag{70.3}$$

перепишем уравнение (71.5) в виде

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{71.6}$$

где $\omega_0^2 = f/m$, причем ω_0 — частота незатухающих колебаний осциллятора.

*) Очевидно, что это заключение имеет только достаточный, но не необходимый характер. Однако более строгий вывод, основанный на рассмотрении реакции поля, приводит к тому же выражению. Интересующихся этим вопросом и связанными с ним принципиальными проблемами электродинамики мы отсылаем к книге В. Гайтлера, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956, стр. 39.

Решение уравнения (71.6) ищем в виде

$$x = e^{int}.$$

Подставляя это решение в (71.6), получаем после сокращения на e^{int}

$$-n^2 + i\gamma n + \omega_0^2 = 0.$$

Отсюда получаем для n

$$n = i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Обозначим

$$\omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{4\omega_0^2}\right)^{1/2}. \qquad (71.7)$$

Так как γ — малое число, а ω_0 — большое, то

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_0^2} \ll 1 \qquad (71.8)$$

и потому с достаточной точностью

$$\omega_f = \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{8\omega_0^2}\right), \qquad (71.9)$$

ω_f есть частота *затухающих* колебаний. Очевидно, что ω_f тем меньше отличается от ω_0, чем меньше постоянная затухания γ. В случае оптических частот затухание настолько мало, что можно даже положить $\omega_f \approx \omega_0$. Поэтому в данном случае с достаточным приближением можно положить

$$n = i\frac{\gamma}{3} \pm \omega_0$$

и решение $x = e^{int}$ принимает вид

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{\pm i\omega_0 t}.$$

Общее решение уравнения (71.3) поэтому таково.

$$x = e^{-\frac{\gamma t}{2}} (Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}). \qquad (71.10)$$

Здесь в левой части стоит действительная величина (смещение x); для того чтобы и правая часть была действительна, коэффициенты A и B, вообще говоря, комплексные, должны быть

комплексно сопряженными:

$$B^* = A.$$

Если обозначить общий модуль A и B через $a/2$, а фазу через δ, то

$$A = \frac{1}{2}ae^{i\delta}, \quad B = \frac{1}{2}ae^{-i\delta}$$

и (71.10) дает

$$x = \frac{1}{2}ae^{-\frac{\gamma t}{2}}[e^{i(\omega_0 t+\delta)} + e^{-i(\omega_0 t+\delta)}] = ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega_0 t + \delta) =$$

$$= ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(2\pi\nu_0 t + \delta). \qquad (71.11)$$

Эта формула описывает колебательное движение, при котором амплитуда убывает со временем по экспоненциальному закону $e^{-\gamma t/2}$. Очевидно, что этот закон соответствует закону убывания энергии

$$E = E_0 e^{-\gamma t},$$

так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды.

§ 72. Интеграл Фурье и сплошной спектр

Затухающие колебания осциллятора представляют собой процесс, который мы уже не можем назвать периодическим, так как он не удовлетворяет основному условию периодичности — неограниченному повторению одних и тех же амплитуд через одинаковые промежутки времени. В самом деле, при затухающих колебаниях одинаковые амплитуды вообще не встречаются, и кроме того, весь процесс начинается в определенный момент, а следовательно, простирается не от $-\infty$ до $+\infty$, а только от 0 до $+\infty$. Таким образом, затухающие колебания являются примером непериодического процесса.

Рассмотрим теперь важный вопрос о спектральном разложении непериодических процессов. Выше мы видели, что любую функцию, представляющую периодический процесс, можно разложить в ряд Фурье, т. е. представить как результат суперпозиции строго гармонических колебаний с частотами $\nu_0 = 1/T$, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ..., где T — основной период разложения. То, что математически выполняется при помощи ряда Фурье, на опыте может быть осуществлено при помощи соответствующего анализатора, например дифракционной решетки, если речь идет о световых колебаниях. Итак, спектральное разложение периодического процесса, каким бы путем оно ни было выполнено, дает *линейчатый спектр*.

Пусть теперь мы имеем некоторую функцию $f(t)$, которая на интервале AC (рис. 114) изображается кривой ABC, а на границах интервала, т. е. в точках A и C, обращается в нуль. Эта функция, очевидно, представляет непериодический процесс. Мы можем разложить ее в интервале $A \ldots C$ в ряд Фурье, считая $T = AC$; взяв достаточное число членов этого ряда, получим правильный ход функции, *однако только в пределах интервала* AC; влево от A и вправо от C наш ряд даст периодическое повторение кривой ABC. Теперь мы можем расширить интервал, например влево до E и вправо до D, приписав нашей функции значение нуль на участках AE и CD. В этом расширенном интервале можно вновь выполнить разложение Фурье, причем основным периодом разложения будет уже $T = ED$. Очевидно, что интеграл разложения $E \ldots D$ можно расширять безгранично, отодвигая точки E и D в бесконечность. При этом основной период разложения T будет безгранично возрастать, а соответствующая основная частота $\nu_0 = 1/T$ безгранично убывать. Вследствие этого аргументы последовательных членов ряда Фурье $e^{\pm i2\pi s\nu_0 t}$ при увеличении s будут становиться все ближе друг к другу, и можно показать, что при таком безграничном расширении основного интервала разложения *ряд* в конце концов перейдет в интеграл, взятый от $-\infty$ до $+\infty$.

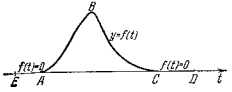


Рис. 114.

Эти соображения станут еще яснее, если мы их повторим на формулах. Итак, пусть дана непериодическая функция $f(t)$; разложим ее в конечном интервале от $-T/2$ до $+T/2$ в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s e^{i2\pi s\nu_0 t}, \quad \nu_0 = \frac{1}{T}. \tag{72.1}$$

По известной формуле для коэффициентов разложения

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\, e^{-i2\pi s\nu_0 t}\, dt. \tag{72.2}$$

Заменив здесь временно обозначение t на α и приняв во внимание, что основная частота $\nu_0 = 1/T$, перепишем формулу (72.2) в виде

$$A_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)\, e^{-i2\pi \frac{s}{T}\alpha}\, d\alpha. \tag{72.3}$$

Это выражение для A_s мы можем подставить в ряд (72.1), который при этом примет вид

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_s \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)\, e^{-i\frac{2\pi s\alpha}{T}}\, d\alpha \right] e^{i\frac{2\pi s t}{T}}. \tag{72.4}$$

Обозначим теперь s/T через ν. Так как s — целое число, то частоты $s/T = \nu$, входящие в разложение (72.4), изменяются при последовательном изменении s конечными ступенями

$$\Delta\nu = \frac{s+1}{T} - \frac{s}{T} = \frac{1}{T}.$$

Принимая это во внимание, ряд (72.4) можно представить в виде

$$f(t) = \sum \left[\int_{-T/2}^{+T/2} f(\alpha)\, e^{-i2\pi\nu\alpha}\, d\alpha \right] e^{i2\pi\nu t}\, \Delta\nu. \tag{72.5}$$

Теперь мы произведем указанный переход к пределу, а именно, мы предположим, что интервал $-T/2$, $+T/2$ расширяется от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда, как это строго доказывается в математических руководствах *), сумма в правой части (72.5) обращается в интеграл

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-i2\pi\nu\alpha}\, d\alpha \right] e^{i2\pi\nu t}\, d\nu.$$

Это можно записать в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu, \tag{72.6}$$

где

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\, e^{-i2\pi\nu\alpha}\, d\alpha$$

или, возвращаясь к прежним обозначениям, т. е. вновь заменяя α через t,

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt. \tag{72.7}$$

Это и есть формула, выражающая зависимость коэффициента разложения непериодической функции от частоты.

*) См., В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967, стр. 501.

Формулы (72.6) и (72.7) позволяют производить спектральное разложение непериодических процессов, в частности затухающих колебаний.

С физической точки зрения между разложением периодической функции в ряд Фурье и разложением непериодической функции в *интеграл Фурье* имеется существенное различие. *Ряд Фурье* состоит из членов, содержащих простые периодические

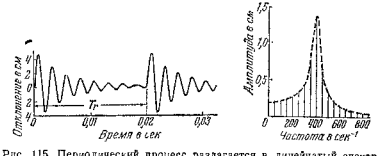


Рис. 115. Периодический процесс разлагается в линейчатый спектр.

функции с *дискретно изменяющимися частотами* ν_0, $2\nu_0$, $3\nu_0$, ...; в *интеграле Фурье* интегрирование производится по частотам, т. е. предполагается, что частоты изменяются *непрерывно*. В первом случае мы имеем дело с разложением в линейчатый спектр, во втором — в сплошной. Это различие очень хорошо

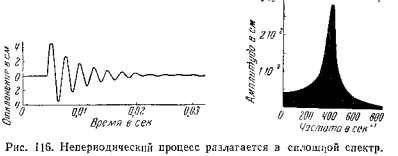


Рис. 116. Непериодический процесс разлагается в сплошной спектр.

иллюстрируется рис. 115 и 116, где слева представлены две кривые колебаний, а справа — их спектры (по оси абсцисс отложены частоты в *сек*$^{-1}$, а по оси ординат — амплитуды, т. е. коэффициенты Фурье). Верхняя кривая изображает процесс не синусоидальный, но периодический; ее спектр — линейчатый. Нижняя кривая представляет одно звено предыдущей кривой; это звено не является периодической кривой, так как мы здесь не имеем

неограниченного повторения равных амплитуд через одинаковые промежутки времени. Справа показано, что при этом отдельные линии настолько сближаются, что разложение дает сплошную полосу, охватывающую целый *интервал* частот — участок *сплошного спектра*.

§ 73. Естественная ширина спектральных линий

Затухающие колебания осциллятора

$$x = ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(2\pi\nu_0 t + \delta)$$

представляют собой на основании сказанного в предыдущих параграфах процесс не только негармонический, но и непериодический.

Поэтому для математического разложения его в спектр следует воспользоваться не рядом, а интегралом Фурье. Отсюда следует, что спектр будет *сплошной*. Точнее говоря, вычисление показывает, что вследствие затухания колебаний спектральная линия *расширяется*; она охватывает участок сплошного спектра, ширина которого $\Delta\nu$ определяется затуханием γ. Для того чтобы показать это, следует прежде всего задать функцию $f(t)$ в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Мы можем это сделать следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant 0, \\ ae^{-\frac{\gamma t}{2}}e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{73.1}$$

Согласно сказанному в предыдущем параграфе, спектральное разложение функции $f(t)$ дается формулой

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu, \tag{73.2}$$

где амплитуда $a(\nu)$ определяется формулой

$$a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt. \tag{73.3}$$

Подставляя сюда $f(t)$ из (73.1) и замечая, что $f(t) = 0$ в интервале от $-\infty$ до 0, получаем

$$a(\nu) = \int_{0}^{+\infty} ae^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}\, dt = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu_0 - \nu)}. \tag{73.4}$$

Для отыскания распределения интенсивности в спектре в

зависимости от частоты следует вычислить квадрат модуля $a(\nu)$ *):

$$|a(\nu)|^2 = \frac{a}{\frac{\gamma}{2} - i2\pi(\nu - \nu_0)} \cdot \frac{a}{\frac{\gamma}{2} + i2\pi(\nu_0 - \nu)} = \frac{a^2}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}. \quad (73.5)$$

Если теперь воспользоваться формулой (68.4) и произвести усреднение для большого промежутка времени, то в результате получится $I_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2}{3c^3}|a(\nu)|^2$ [см. формулу (68.6)]; подставляя вместо $|a(\nu)|^2$ выражение (73.5), получаем

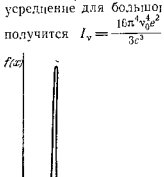


Рис. 117. Контур спектральной линии.

$$\overline{I}_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^4 e^2 a^2}{3c^3} \frac{1}{4\pi^2(\nu_0 - \nu)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{16\pi^4\nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \frac{1}{4\pi^2\left(1 - \frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\gamma^2}{\nu_0^2}}. \quad (73.6)$$

Вводя обозначения $\nu/\nu_0 = x$, $\gamma/\nu_0 = \Gamma$, перепишем формулу (73.6) в виде

$$\overline{I}_\nu = \frac{16\pi^4\nu_0^2 e^2 a^2}{3c^3} \cdot \frac{1}{4\pi^2(1 - x)^2 + {}^1/_4\Gamma^2}. \quad (73.7)$$

Формулы (73.6) и (73.7) дают распределение интенсивности в зависимости от частоты, т. е. картину спектра затухающего осциллятора.

На рис. 117 представлен ход множителя

$$f(x) = \frac{1}{4\pi^2(1 - x)^2 + {}^1/_4\Gamma^2}.$$

Как видно, кривая имеет резкий максимум при $x = 1$ или $\nu = \nu_0$, т. е. для частоты собственных колебаний незатухающего осциллятора. Максимальное значение $f(x)$ есть

$$f(x) = \frac{1}{{}^1/_4\Gamma^2}.$$

*) Получаемая в результате вычисления (73.4) амплитуда $a(\nu)$ — комплексная. Для получения вещественного выражения амплитуды следовало бы подвергнуть разложению Фурье полусумму комплексно сопряженных функций, заменяющих $\cos(2\pi\nu_0 t + \delta)$ в формуле затухающих колебаний. Но так как нас интересует только численное значение амплитуды, то достаточно ограничиться вычислением квадрата модуля комплексного выражения $a(\nu)$, что и сделано в формуле (73.5). Подробнее об этом см. Макс Борн, Оптика, Харьков 1937, стр. 566 и следующие или Р. Беккер, Теория электричества т. II, §§ 14 и 15.

Очевидно, что значение $f(x)$, равное половине максимального, получается при условии

$$2\pi(1 - x) = {}^1/_2\Gamma$$

или, принимая во внимание, что $x = \nu/\nu_0$ и $\Gamma = \gamma/\nu_0$, и обозначая $\nu - \nu_0$ в этом случае через $\Delta\nu_{1/2}$,

$$\Delta\nu_{1/2} = \gamma/4\pi. \quad (73.8)$$

$\Delta\nu_{1/2}$ называется полушириной спектральной линии; как видно, она целиком определяется затуханием γ.

Полуширина $\Delta\nu_{1/2}$ в оптическом спектре очень мала. На рис. 117 представлен контур спектральной линии для $\Gamma = 1/5$; между тем для узких спектральных линий Γ — порядка 10^{-3}—10^{-4}, так что ширина линии, изображенная на рисунке, чрезмерно преувеличена.

Принимая во внимание связь между γ и временем релаксации $\tau(\gamma = 1/\tau)$, мы можем переписать (73.8) в виде

$$\tau\Delta\nu_{1/2} = {}^1/_4\pi. \quad (73.9)$$

§ 74. Другие примеры спектрального разложения непериодических процессов

Рассмотрим еще два примера спектрального разложения непериодических процессов.

а) Пусть колебание происходит в течение ограниченного промежутка времени Δt, но на этом ограниченном интервале подчиняется гармоническому закону (рис. 118, *а*). Такие колебания мы будем называть *квазимонохроматическими*. Очевидно, что все реальные колебания, которые мы практически считаем монохроматическими и незатухающими, в действительности являются квазимонохроматическими, так как они длятся ограниченное время. Пусть T будет период, а $\nu_0 = 1/T$ — частота этого колебания. Отыщем его спектральное разложение.

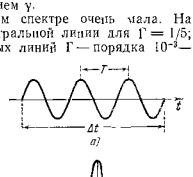


Рис. 118. *а*) Квазимонохроматическое колебание. *б*) Спектр этого колебания.

Поскольку колебание *не* длится от $-\infty$ до $+\infty$, оно представляет собою процесс *непериодический* и для спектрального

разложения его следует воспользоваться интегралом, а не рядом Фурье. Функция, которая подлежит разложению, такова:

$$f(t) = \begin{cases} A_0 e^{i2\pi\nu_0 t} & \text{от } -\Delta t/2 \text{ до } +\Delta t/2, \\ 0 & \text{от } -\infty \text{ до } -\Delta t/2 \text{ и от } +\Delta t/2 \text{ до } +\infty. \end{cases} \quad (74.1)$$

Искомое разложение есть

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i2\pi\nu t}\, d\nu,$$

где амплитуда a_ν выражается

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt.$$

Принимая во внимание (74.1) и то, что $f(t) \neq 0$ только в пределах $-\Delta t/2$, $+\Delta t/2$, получаем

$$a_\nu = \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = A_0 \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{i2\pi(\nu_0-\nu)t}\, dt =$$

$$= A_0 \frac{\sin \pi(\nu_0-\nu)\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)}. \quad (74.2)$$

Этот результат можно также представить в виде

$$a_\nu = A_0 \Delta t \frac{\sin \pi(\nu_0-\nu)\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)\Delta t} \quad (74.3)$$

или, обозначая $A_0\Delta t = A$ и $\pi(\nu_0-\nu)\Delta t = \xi$,

$$a_\nu = A \frac{\sin \xi}{\xi}.$$

Функция $\frac{\sin\xi}{\xi}$ имеет следующий ход: ее главный максимум расположен при $\xi = 0$, где $\frac{\sin\xi}{\xi} = 1$; далее, она обращается в нуль при $\xi = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm m\pi$. В промежутках она имеет второстепенные максимумы при значениях ξ, удовлетворяющих условию $\operatorname{tg}\xi = \xi$; они таковы: $\xi = 1{,}430\pi = 4{,}49$; $2{,}459\pi = 7{,}73$; $3{,}47\pi = 10{,}90$ и т. д. Значения $\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}$ в максимумах таковы:

ξ	0	4,49	7,73	10,90
$\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2$	1	0,047	0,016	0,008

Из этого следует, что с ошибкой, не превосходящей 5%, можно считать, что весь ход функции $\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}$ сосредоточен на интервале $\xi = \pm\pi$. За пределами этого интервала функцию (в указанных пределах точности) можно считать обращающейся в нуль. Так как

$$|a_\nu|^2 = A^2\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^2 = (A_0\Delta t)^2\left[\frac{\sin\pi(\nu_0-\nu)\Delta t}{\pi(\nu_0-\nu)\Delta t}\right]^2,$$

то $|a_\nu|^2$ имеет главный максимум при $\nu = \nu_0$ (рис. 118, *б*), т. е. при частоте квазимонохроматических колебаний, и обращается в нуль при

$$|\pi(\nu_0-\nu)\Delta t| = \pi. \quad (74.4)$$

Мы видим, таким образом, что, хотя частота $\nu_0 = 1/T_0$ представлена с наибольшей интенсивностью, спектр охватывает сплошной интервал частот $\nu - \nu_0 = \Delta\nu$. Из (74.4) непосредственно следует соотношение между $\Delta\nu$ и длительностью Δt незатухающих колебаний

$$\Delta\nu\,\Delta t = 1. \quad (74.5)$$

Если принять во внимание не только главный максимум, но и второстепенные, то вместо условия (74.4) мы получим

$$|\pi(\nu_0-\nu)\Delta t| = m\pi,$$

что дает $\Delta\nu\Delta t = 2, 3, \ldots, m$, так что вместо (74.5) мы можем написать неравенство

$$\Delta\nu\,\Delta t \geqslant 1. \quad (74.6)$$

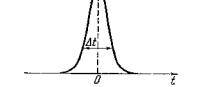


Рис. 119. Единичный импульс и его спектр.

Это неравенство показывает, что чем больше длительность Δt квазимонохроматических колебаний, тем уже спектральный интервал $\Delta\nu$, и наоборот.

б) В качестве второго примера рассмотрим единичное возмущение, описываемое функцией

$$f(t) = e^{-\beta|t|}$$

(см. верхнюю кривую на рис. 119).

Параметр β, имеющий размерность [*сек*$^{-1}$], характеризует остроту возмущения. Именно, мерой этой остроты служит промежуток времени $\Delta t = \frac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда возмущения изменяется в e раз. Амплитуда спектрального

разложения вычисляется по известной формуле

$$a_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t)}\, dt.$$

Показатель степени под интегралом можно преобразовать так:

$$-(\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t) = -\left[\beta^2 t^2 + i2\pi\nu t + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2\right] + \left(\frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 =$$
$$= -\left(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2 - \frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2},$$

так что

$$a_\nu = e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\beta t + \frac{i\pi\nu}{\beta}\right)^2} dt.$$

Полагая

$$\beta t + i\frac{\pi\nu}{\beta} = z,$$

получим

$$a_\nu = \frac{e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}}{\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} e^{-\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}},$$

откуда

$$|a_\nu|^2 = \frac{\pi}{\beta^2} e^{-2\frac{\pi^2\nu^2}{\beta^2}}.$$

Распределение энергии в спектре зависит, очевидно, от экспоненциального множителя. Ширина кривой определяется условием

$$2\frac{\pi^2(\Delta\nu)^2}{\beta^2} = 1$$

или, так как $\beta = 1/\Delta t$, то $\left|\sqrt{2}\,\pi\,\Delta\nu\,\Delta t\right| = 1$, т. е.

$$\Delta\nu\,\Delta t = 1/\sqrt{2}\,\pi.$$

Как и в рассмотренных ранее случаях, ширина сплошного спектра находится в обратном отношении к длительности импульса Δt.

Для всех примеров, рассмотренных в последних двух параграфах, характерен следующий общий вывод: между длительностью возмущения $f(t)$ и протяжением спектра частот имеется обратное соотношение: чем короче длится возмущение, тем шире спектр, и наоборот.

Л. И. Мандельштам в своих лекциях поясняет это следующей яркой иллюстрацией. Пусть луч света падает на пластинку,

быстро движущуюся в своей плоскости перпендикулярно к лучу. Длина следа, оставленного лучом на пластинке, и есть мера длительности возмущения $f(t)$. Поставим теперь пластинку в спектрограф, состоящий из призмы и линзы. Если $f(t)$ есть синус (безграничное возмущение), то в фокальной плоскости мы получим точку, соответствующую одной определенной частоте ν. Но если $f(t)$ не есть синус, то вместо одной частоты на пластинке появляется растянутый спектр. Чем короче черта на движущейся пластинке, тем шире растянут спектр, и наоборот.

§ 75. Планетарная модель атома

До сих пор мы пользовались в качестве модели источника света только линейным осциллятором, т. е. диполем, совершающим колебания по гармоническому или негармоническому закону. Однако согласно планетарной модели Резерфорда атом следует рассматривать как ротатор, т. е. отрицательно заряженную частицу, обращающуюся по замкнутой орбите около положительного ядра. Нетрудно убедиться в том, что электромагнитные свойства такой модели не содержат ничего существенно нового по сравнению с уже найденным для излучения линейного осциллятора.

Представим себе сначала в качестве простейшего случая электрон, равномерно обращающийся около ядра по круговой орбите. Такое обращение будет движением ускоренным; поэтому оно должно сопровождаться излучением электромагнитных волн.

Для того чтобы вычислить интенсивность этого излучения, разложим равномерное круговое движение на два гармонических колебания по осям x и y:

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t.$$

Очевидно, что вместо электрона, равномерно обращающегося по круговой орбите, можно рассматривать излучение двух диполей, совершающих колебания с одинаковой частотой ω и одинаковой амплитудой a по взаимно перпендикулярным направлениям.

Согласно формулам § 68 мы имеем для интенсивности излучения обоих диполей

$$J_x = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\cos^2\omega t, \quad J_y = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3}\sin^2\omega t.$$

Полное излучение круговой орбиты будет, таким образом,

$$J = J_x + J_y = \frac{2e^2a^2\omega^4}{3c^3} = \frac{32\pi^4\nu^4e^2a^2}{3c^3}.$$

Сравнивая полученный результат с формулой для среднего излучения диполя за период (68.6), мы видим, что полное излучение круговой орбиты не зависит от времени и в два раза больше среднего излучения диполя, что вполне понятно, так как излучение обоих диполей J_x и J_y поляризовано во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Несколько сложнее обстоит дело в том случае, когда рассматривается общее движение *по кеплерову эллипсу* электрона, связанного с ядром кулоновской силой. В этом случае составляющие движения по осям координат x и y уже не являются простыми гармоническими колебаниями. Однако они всегда могут быть разложены в ряды Фурье, т. е. представлены как результат суперпозиции простых гармонических колебаний. Выбирая за оси координат главные оси эллипса, имеем

$$x = a\cos\omega t + a'\cos 2\omega t + a''\cos 3\omega t,$$
$$y = b\sin\omega t + b'\sin 2\omega t + b''\sin 3\omega t.$$

Если вычислить, как в § 69, средние интенсивности, соответствующие колебаниям по оси x и по оси y, и сложить эти интенсивности (колебания во взаимно перпендикулярных направлениях не интерферируют!), то окажется, что излучение соответствует набору осцилляторов с частотами ω, 2ω, 3ω, ...

Таким образом, электрон, обращающийся по кеплерову эллипсу, излучает целый спектр частот, состоящий из основной частоты и ее гармонических обертонов.

§ 76. Орбитальный магнитный момент и теорема Лармора

Электрон, обращающийся по орбите, представляет собою круговой ток. По законам электродинамики такой круговой ток должен обладать определенным магнитным моментом, т. е. вести себя в магнитном поле как магнитный диполь. С другой стороны, с механической точки зрения, электронный круговой ток вследствие быстрого вращения электрона должен обладать свойствами волчка. Имеется определенное соотношение между магнитными свойствами электронной орбиты, которые характеризуются ее магнитным моментом и ее механическими свойствами, мерой которых является момент количества движения. Выведем это соотношение.

Как известно из электродинамики*), магнитный момент замкнутого тока равен

$$M = \frac{1}{c} JS, \tag{76.1}$$

*) См. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1967, стр 253.

где J — сила тока (в электростатических единицах), S — площадь, обтекаемая током, и c — скорость света. Если число оборотов электрона по круговой орбите будет $\nu = 1/T$, где T — период обращения, то, очевидно,

$$J = e\nu = e/T. \tag{76.2}$$

Поэтому

$$M = \frac{1}{c} e\nu\pi r^2$$

или, заменяя ν угловой частотой $\nu = \omega/2\pi$,

$$M = \frac{e}{2c}\omega r^2 = \frac{e}{2mc} mr^2\omega. \tag{76.3}$$

Но $mr^2\omega = mr^2\dot{\varphi}$, очевидно, представляет собой момент количества движения l электронной орбиты. Итак,

$$M = \frac{e}{2mc} l. \tag{76.4}$$

Это и есть искомое соотношение.

Представим себе теперь, что наш атом, содержащий орбитальный электрон, помещен в магнитное поле. Так как, по сказанному, атом обладает определенным магнитным моментом, то он должен вести себя во внешнем поле как магнит, т. е. должен устанавливаться своим магнитным моментом параллельно или антипараллельно полю. Но этому препятствует то, что атом одновременно является и волчком. Отсюда следует, что в магнитном поле атом должен вести себя совершенно так же, как обыкновенный волчок ведет себя в поле земного тяготения, т. е. атом должен совершать прецессионное движение около направления поля. Если теперь рассматривать орбиту электрона с точки зрения неподвижной системы координат, то она перестает быть плоской и становится вообще очень сложной. Рассмотрение значительно упрощается, если ввести подвижную систему координат, прецессирующую вместе с орбитой. В такой системе координат орбита сохраняет свою форму, и остается только определить угловую скорость прецессии.

Введем две системы координат: одну из них свяжем с направлением магнитного поля $\mathscr{H}$. Эту систему мы будем называть «неподвижной». Вторая система — подвижная — прочно связана с орбитой электрона и прецессирует относительно «неподвижной» системы; ось прецессии совпадает с направлением поля. Пусть угловая скорость прецессии будет ω; скорость электрона, движущегося по орбите, пусть будет в неподвижной системе координат v, в подвижной — v'. В подвижной системе на электрон действуют добавочные силы инерции — центробежная $m\rho\omega^2$, где ρ — расстояние электрона от оси прецессии, и кориолисова

$\mathbf{C} = 2m[\mathbf{v}'\mathbf{o}]$. Полагая, что линейная скорость, сообщаемая электрону прецессионным движением, мала по сравнению с орбитальной скоростью электрона в отсутствии прецессии, т. е. что

$$\rho o \ll v,$$

мы можем пренебречь центробежной силой инерции по сравнению с кориолисовой силой. Оценка степени приближения (см. ниже), связанного с этим допущением, вполне оправдывает его. Далее, в пределах того же приближения, можно в выражении кориолисовой силы скорость v' заменить скоростью v по отношению к неподвижной системе координат. Итак,

$$\mathbf{C} = 2m[\mathbf{v}\mathbf{o}]. \qquad (76.5)$$

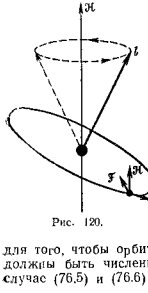


Рис. 120.

Мы знаем, однако, что на электрон, движущийся в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила

$$\mathbf{F} = -\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]. \qquad (76.6)$$

Знак минус обусловлен тем, что заряд электрона отрицателен. Если направление поля $\mathcal{H}$ параллельно оси прецессии, то, как нетрудно убедиться, определяя по известному правилу для векторного произведения направления сил C и F, эти силы действуют прямо противоположно друг другу. Поэтому для того, чтобы орбита сохранила свои размеры и форму, они должны быть численно друг другу равны, $C = -F$. В таком случае (76.5) и (76.6) дают

$$2mvo \sin(\widehat{\mathbf{vo}}) = \frac{e}{c} v\mathcal{H} \sin(\widehat{\mathbf{v}\mathcal{H}}). \qquad (76.7)$$

Так как ось прецессии параллельна направлению поля, то

$$\sin(\widehat{\mathbf{vo}}) = \sin(\widehat{\mathbf{v}\mathcal{H}})$$

и (76.7) дает

$$o = \frac{e}{2mc}\mathcal{H}. \qquad (76.8)$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом: электрон описывает в слабом магнитном поле ту же орбиту, что и в отсутствии поля, но по отношению к системе координат, которая прецессирует относительно магнитного поля с угловой частотой

$$o = \frac{e}{2mc}\mathcal{H}.$$

Действие магнитного поля на электронную орбиту можно свести, таким образом, к сообщению этой орбите прецессии со скоростью o (рис. 120). В этом и состоит теорема Лармора.

Упражнение. Источник света помещен в магнитное поле с напряженностью 40 000 эрстед. Вычислить ларморовскую частоту прецессии электронной орбиты и определить длину волны, соответствующую этой частоте. (*Ответ* $\lambda = 0{,}54$ *см*.)

§ 77. Эффект Зеемана

Известно, что в конце своей жизни Фарадей усиленно искал явления, которые указывали бы на связь между электромагнитным полем и светом. Он стремился, по его собственному выражению, «осветить силовые линии и намагнитить свет». Известно также, что ему удалось обнаружить «намагничение света» в виде открытого им вращения плоскости поляризации в магнитном поле (эффект Фарадея). Идя дальше в этом направлении, он пытался (в 1862 г.), но безуспешно, открыть влияние магнитного поля на спектральные линии. Лишь 34 года спустя, в 1896 г., Зееману при помощи значительно более мощных полей и тонких спектральных приборов удалось обнаружить, что при помещении источника света между полюсами электромагнита спектральные линии испытывают расщепление.

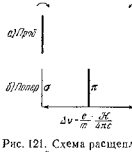


Рис. 121. Схема расщепления спектральной линии в простом эффекте Зеемана.

Явление это было количественно объяснено Лоренцом на основе электронной теории. Согласно теории Лоренца при наблюдении перпендикулярно к направлению поля спектральная линия должна расщепляться на три компоненты, давая симметричную картину (рис. 121, *б*), причем расстояние между средней линией и каждой из крайних в шкале частот должно быть равно

$$\Delta\nu = \frac{e}{4\pi mc}\mathcal{H} \text{ сек}^{-1}. \qquad (77.1)$$

Расщепленные линии должны обнаруживать линейную поляризацию: крайние — перпендикулярную к полю; средняя — по полю. При наблюдении же вдоль поля средняя линия должна отсутствовать, а крайние — обнаруживать круговую поляризацию с противоположным направлением вращения (рис. 121, *а*).

Все эти предсказания теории во многих случаях подтвердились с поразительной точностью. Вместе с тем оказалось, что

имеется большое число случаев, когда картина расщепления значительно сложнее: число компонент больше трех, и величина смещения не совпадает с вычисленной по формуле (77.1), хотя и связана с ней простым отношением.

Расщепление, следующее теории Лоренца, называется *нормальным* или *простым эффектом Зеемана*. Во всех остальных случаях наблюдаемая картина называется *аномальным* или *сложным эффектом Зеемана*.

Посмотрим теперь, в чем заключается объяснение простого эффекта с точки зрения классической электронной теории. Рассмотрим электрон, обращающийся по круговой орбите. Пусть это будет, например, водородный атом с ядром, имеющим заряд $+e$, около которого обращается один электрон. Магнитное поле пусть будет направлено перпендикулярно к плоскости орбиты (рис. 122).

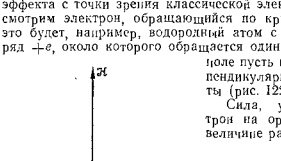


Рис. 122.

Сила, удерживающая электрон на орбите, по абсолютной величине равна

$$F = \frac{e^2}{r^2}. \qquad (77.2)$$

Эта сила F равна центробежной силе инерции

$$\frac{e^2}{r^2} = mr\omega_0^2, \qquad (77.3)$$

где ω_0 — частота обращения электрона в отсутствии магнитного поля. При включении магнитного поля на электрон кроме кулоновской силы (77.2) действует еще сила Лоренца, равная $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}]$. Если теперь воспользоваться известным правилом правого винта для определения направления силы Лоренца, то из рис. 122 легко усмотреть, что эта сила направлена по радиусу. Тем не менее влияние магнитного поля сказывается *не в том, что радиус орбиты увеличивается или уменьшается*, а в том, что изменяется угловая скорость обращения электрона при неизменном радиусе орбиты.

Это утверждение кажется неожиданным, однако, оно может быть доказано строгим расчетом*). Мы здесь этот расчет приводить не будем, но ограничимся следующими разъяснениями. При включении магнитного поля оно не сразу достигает своей конечной величины, но устанавливается в течение известного

*) См. приложение III в конце книги.

промежутка времени. Этот промежуток настолько велик по сравнению с периодом обращения электрона, что весь процесс можно рассматривать как бесконечно медленный, наподобие адиабатическим процессам в термодинамике. Поэтому в каждый момент должно соблюдаться равенство между суммой кулоновской силы и силы Лоренца, с одной стороны, и центробежной силой инерции — с другой. Эта последняя, однако, будет меняться потому, что возрастание магнитного поля по закону электромагнитной индукции Фарадея (точнее говоря, вследствие второго уравнения электродинамики Максвелла) влечет за собой появление вихревого электрического поля с осью симметрии, совпадающей с направлением магнитного поля. Именно это вихревое электрическое поле воздействует на электрон, ускоряя или замедляя его. То, что процесс должен протекать описанным образом, видно уже из того, что сама сила Лоренца не может изменить частоту обращения, так как она направлена перпендикулярно к скорости и, следовательно, никакой работы не совершает.

Равновесие между силами, действующими на электрон, и центробежной силой инерции, как сказано, должно иметь место в каждый момент времени, в том числе, конечно, и в установившемся состоянии, когда магнитное поле достигает своей стационарной величины $\mathcal{H}$. Обозначая угловую скорость электрона в этом состоянии через ω, имеем, во-первых, для численной величины силы Лоренца $\frac{e}{c} r\omega\mathcal{H}$, так как $v = r\omega$ и $\sin(\widehat{v\mathcal{H}}) = 1$; последнее вследствие того, что поле перпендикулярно к плоскости орбиты. Во-вторых, указанное условие равновесия будет

$$\frac{e^2}{r^2} + \frac{e}{c} r\omega\mathcal{H} = mr\omega^2$$

или вследствие (77.3)

$$mr\omega_0^2 + \frac{e}{c} r\omega\mathcal{H} = mr\omega^2,$$

откуда

$$\omega^2 - \frac{e}{mc}\mathcal{H}\omega - \omega_0^2 = 0. \qquad (77.4)$$

Коэффициент при ω во втором члене слева, очевидно, равен удвоенной ларморовой частоте $\mathfrak{o}$, так как

$$\mathfrak{o} = \frac{e}{2mc}\mathcal{H} \qquad (76.8)$$

и, следовательно,

$$\omega^2 - 2\mathfrak{o}\omega - \omega_0^2 = 0. \qquad (77.5)$$

Решая это квадратное уравнение относительно ω, получаем

$$\omega = \mathfrak{o} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \mathfrak{o}^2}. \qquad (77.6)$$

Величина σ мала по сравнению с ω_0. В самом деле, наиболее интенсивные магнитные поля, которые удавалось до сих пор осуществить (известные опыты П. Л. Капицы), достигали приблизительно 500 000 эрстед. В таких полях

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{e}{mc}\mathscr{H} = 0{,}5 \cdot 1{,}76 \cdot 10^7 \cdot 5 \cdot 10^5 = 4{,}4 \cdot 10^{12}\ сек^{-1}.$$

Между тем ω_0 для спектральных линий, лежащих в видимой или ультрафиолетовой части спектра, имеет порядок величины $10^{15}\ сек^{-1}$. Следовательно, $(\sigma/\omega_0)^2$ — порядка 10^{-6}, и мы имеем полное право пренебречь под радикалом в (77.6) величиной σ^2 по сравнению с ω_0^2 и написать

$$\omega = \sigma \pm \omega_0 \quad \text{или} \quad \omega_1 = \omega_0 + \sigma, \quad \omega_2 = -\omega_0 + \sigma. \tag{77.7}$$

Таким образом, частота электрона, обращающегося против часовой стрелки (если смотреть из конца вектора поля) в магнитном поле, увеличивается на σ, а частота электрона, движущегося в обратную сторону, уменьшается на ту же величину. Если теперь перейти от угловой частоты к линейной, то мы получаем

$$\Delta\nu = \pm\frac{\sigma}{2\pi} = \pm\frac{e}{4\pi mc}\mathscr{H}\ сек^{-1}. \tag{77.8}$$

Это и есть формула Лоренца (77.1).

§ 78. Эффект Зеемана. Общий случай

В предыдущем параграфе мы рассмотрели частный случай влияния магнитного поля на электронную орбиту, плоскость которой перпендикулярна к направлению поля. При этом мы убедились, что и в этом случае изменение угловой частоты обращения электрона как раз равно ларморовской частоте σ [см. (77.7)]. Рассмотрим теперь более общий случай и покажем, что теория точно описывает все стороны явления, включая состояние поляризации линий.

Пусть мы имеем диполь, причем положительный заряд пусть будет закреплен в начале координат, а электрон с зарядом $-e$ связан с положительным зарядом квазиупругой силой. Уравнение свободных колебаний электрона есть

$$m\ddot{\mathbf{r}} + f\mathbf{r} = 0.$$

В присутствии магнитного поля появляется сила Лоренца $-\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathscr{H}]$, и уравнение колебаний после деления на m и замены f/m через ω_0^2 принимает вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = -\frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathscr{H}]. \tag{78.1}$$

Положим теперь, что магнитное поле направлено по оси z, так что

$$\mathscr{H}_x = \mathscr{H}_y = 0, \quad \mathscr{H}_z = \mathscr{H}.$$

Заметив, что $\frac{e}{mc}\mathscr{H}$ есть удвоенная ларморовская частота, напишем три скалярных уравнения, соответствующих векторному уравнению (78.1):

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\sigma\dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y - 2\sigma\dot{x} &= 0, \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z \qquad &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{78.2}$$

Решения первых двух дифференциальных уравнений будем искать в виде

$$x = ae^{i\omega t}, \quad y = be^{i\omega t}, \tag{78.3}$$

где амплитуды a и b, вообще говоря, — комплексные. Подставляя (78.3) в (78.2), получаем

$$\left.\begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\sigma\omega b &= 0, \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\sigma\omega a &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{78.4}$$

Мы получили систему линейных однородных уравнений для неизвестных a и b. Как известно, такая система имеет решения, отличные от нуля, только при условии равенства нулю определителя из коэффициентов, т. е.

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2, & 2i\sigma\omega \\ -2i\sigma\omega, & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{78.5}$$

откуда, раскрывая определитель, находим *)

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 4\sigma^2\omega^2. \tag{78.6}$$

Мы получаем, таким образом, два квадратных уравнения

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = 2\sigma\omega_1, \quad \omega_0^2 - \omega_2^2 = -2\sigma\omega_2. \tag{78.7}$$

*) Условие (78.5) имеет весьма простой смысл: из первого уравнения (78.4) получаем $\frac{a}{b} = -\frac{2i\sigma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$, из второго $\frac{a}{b} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\sigma\omega}$. Для того чтобы решения обоих уравнений были совместимы, правые части написанных равенств должны быть между собой равны

$$-\frac{2i\sigma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2i\sigma\omega}.$$

Отсюда сразу получаем (78.6).

Из четырех решений этих уравнений только два положительны

$$\omega_1 = \omega + \sqrt{\omega_0^2 + \sigma^2}, \quad \omega_2 = \omega + \sqrt{\omega_0^2 + \sigma^2}. \tag{78.8}$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\sigma \ll \omega_0$ (см. стр. 254),

$$\omega_1 = \omega_0 - \sigma, \quad \omega_2 = \omega_0 + \sigma, \quad \omega_2 - \omega = 2\sigma = \frac{e}{mc}\mathscr{H},$$

а смещение линейной частоты относительно ν_0, как и раньше, будет

$$\Delta\nu = \pm\frac{\sigma}{2\pi} = \pm\frac{e}{4\pi mc}\mathscr{H}. \tag{78.9}$$

Таким образом, частоты колебаний, происходящих по осям x и y, т. е. перпендикулярных к полю $\mathscr{H}$, смещаются как раз на величину, даваемую формулой Лоренца.

Мы можем теперь установить также состояние поляризации обеих смещенных компонент. Из (78.4) имеем

$$\frac{a}{b} = -i\frac{2\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{78.10}$$

Подставляя сюда $\omega = \omega_1$, т. е. частоту компоненты, смещенной *в красную сторону*, и замечая, что согласно первому из уравнений (78.7) $2\omega_1 - \omega_0^2 - \omega_1^2$, получаем $a/b = -i$ или $a = -ib = be^{-i\pi/2}$. Это означает, что колебание по оси x *отстает* по фазе от колебания по оси y на $\pi/2$. Оба колебания дают круговое вращение и притом, принимая во внимание указанное соотношение фаз, вращение по часовой стрелке, т. е. правокруговую поляризацию.

Аналогично, подставляя в (78.10) $\omega = \omega_2$, т. е. частоту компоненты, смещенной в фиолетовую сторону, и принимая во внимание второе из уравнений (78.7), получаем

$$a/b = i \quad \text{или} \quad a = be^{i\pi/2},$$

откуда следует, что компонента ω_2 поляризована по *левому кругу*. Наконец, третье уравнение системы (78.2)

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

показывает, что колебание по оси z происходит без изменения частоты; оно имеет линейную поляризацию. Однако наблюдатель, смотрящий навстречу силовым линиям магнитного поля (продольное направление), не увидит этой третьей компоненты, так как излучение диполя в направлении колебаний равно нулю.

Итак, в продольном направлении картина эффекта Зеемана состоит из двух *смещенных* линий; обе поляризованы по кругу, причем линия, смещенная в красную сторону, поляризована по

правому кругу, а линия, смещенная в фиолетовую сторону, — по левому.

Наблюдатель, смотрящий перпендикулярно к направлению магнитного поля, например по оси x, увидит несмещенную линию, так как колебания по оси z дают максимальное излучение в перпендикулярном направлении. Он увидит также *обе* смещенные компоненты по следующей причине: диполь, колеблющийся по оси x, не дает излучения в направлении этой оси. Но оба колебания в плоскости xy дают компоненты, поляризованные по кругу. Поэтому наблюдатель, который смотрит навстречу оси x, увидит проекции круговых колебаний на ось y, а наблюдатель, смотрящий по оси y, увидит проекции круговых колебаний на ось x. Таким образом, картина поперечного эффекта Зеемана состоит из трех линий: несмещенной и двух смещенных. Все линии линейно поляризованы: несмещенная имеет колебания электрического вектора по направлению поля, смещенные — перпендикулярно к полю.

Как уже было указано в начале этого параграфа, для случая *простого эффекта* Зеемана все изложенные результаты теории подтверждаются совершенно точно. Зато сложный эффект мог быть объяснен только в рамках квантовой теории.

§ 79. Излучение Вавилова—Черенкова

В § 67 мы видели, что согласно классической электродинамике излучение электромагнитных волн возникает при ускоренном, т. е. неравномерном движении электронов или вообще заряженных частиц. При этом, однако, молчаливо предполагалось, что *скорость* излучающих частиц меньше скорости света. С другой стороны, уже давно было известно, что в случае механических систем при *равномерном* движении тела *в среде* со скоростью, превышающей скорость распространения упругих волн *в этой среде*, возникает особого рода волна. На рис. 123 приведена фотография летящей пули, сделанная методом, позволяющим выявить изменение показателя преломления воздуха (так называемый метод Теплера). Видно, что летящая пуля сопровождается волной сгущения; именно эта волна и обусловливает характерный свист или вой, сопровождающий летящий снаряд. Всем, конечно, также хорошо известна «носовая волна» на поверхности воды, возникающая при быстром движении глиссера. Во всех этих случаях механизм возникновения волны, т. е. механизм излучения равномерно движущегося тела — один и тот же.

Оказывается, что и равномерно движущийся в среде электрический заряд (в частности — электрон) может излучать электромагнитную волну, при условии, что скорость движения

заряда больше скорости света в данной среде. Следует подчеркнуть, что речь идет именно о скорости света *в среде, но не в пустоте*. Значение этой оговорки состоит в том, что скорость света в пустоте $c = 3 \cdot 10^{10}$ *см/сек*, согласно теории относительности, есть предельная скорость: никакое тело не может двигаться со скоростью, равной или большей этой скорости. Но скорость света в среде равна c/n, где n — показатель преломления — величина, большая единицы в области нормальной дисперсии и, поскольку $c/n < c$, ограничение, налагаемое теорией относительности, в случае движения в среде не имеет места. При этом, говоря о скорости света, мы имеем в виду фазовую скорость, т. е. скорость перемещения поверхности равной фазы (см. § 136).

Рис. 123. Фотография летящей пули.

Электромагнитное излучение, сопровождающее электроны, движущиеся в среде со сверхсветовой скоростью, было открыто в 1934 г. П. А. Черенковым, работавшим под руководством С. И Вавилова. По этой причине мы называем это излучение излучением Вавилова — Черенкова *). Первоначальная задача Черенкова состояла в исследовании свечения растворов под действием γ-лучей радия. Видимое свечение жидкостей под действием радиоактивных излучений наблюдалось еще Марией Кюри приблизительно за 25 лет до работы Черенкова. Однако Кюри приписывала это свечение обычной люминесценции. Также и в работах французского физика Малле (1926—1929 гг.), которые, впрочем, не были известны Черенкову, это свечение не получило правильной интерпретации.

Выполняя исследование свечения растворов под действием γ-лучей радия, Черенков показал, что наряду с люминесценцией раствора наблюдается слабое свечение самих растворителей. Оказалось, что такое свечение обнаруживают вообще все чистые жидкости — вода, бензол и другие. Но наиболее важный результат этих первых исследований состоял в доказательстве того, что это слабое свечение *не является* люминесценцией. Это было важно потому, что многие весьма чистые жидкости, например вода, под действием ультрафиолетового освещения дают слабое синее свечение, которое по всем своим свойствам несомненно должно быть отнесено к люминесценции. Между тем некоторые свойства свечения под действием γ-лучей радия, изучавшегося Черенковым, резко отличали его от люминесценции. Эти особые свойства Черенков установил путем количественных экспериментов, очень трудных вследствие слабости свечения. Они состоят в следующем: люминесценция растворов «гасится» некоторыми примесями, присутствующими в растворе в малых концентрациях (йодистый калий, анилин и др.) — свечение чистых жидкостей под действием γ-лучей такого гашения не испытывает; далее, свет люминесценции обнаруживает определенную поляризацию, которая также может быть ослаблена теми же «тушителями» или просто нагреванием — свечение Черенкова такого влияния на поляризацию не испытывает. Все это указывало, что в отличие от люминесценции, которая характеризуется конечной длительностью (10^{-7}—10^{-8} *сек*), свечение Вавилова — Черенкова является «мгновенным». Наконец, вскоре было показано также, что излучение вызывается не самими γ-лучами, имеющими электромагнитную природу, но создаваемыми ими в веществе электронами: излучение с теми же особыми свойствами вызывалось также потоком быстрых электронов в виде β-лучей радиоактивных веществ. Особенно важно было то, что, как показали дальнейшие опыты, излучение Вавилова — Черенкова обладает определенной направленностью: оно испускается только вперед под определенным углом к направлению распространения γ-лучей, тогда как свет люминесценции излучается равномерно по всем направлениям.

Это свойство и легло в основу правильного объяснения свечения Вавилова — Черенкова, как свечения, вызываемого электронами, движущимися со сверхсветовой скоростью. Такое объяснение было дано И. М. Франком и И. Е. Таммом в 1937 г.*)

Чтобы понять, каким образом может возникнуть электромагнитное излучение при быстром движении электрона в среде, рассмотрим сначала вопрос качественно. Пусть электрон движется в среде, которую мы предположим жесткой, чтобы не осложнять условия рассмотрения, т. е. пусть это будет, например, стекло. На рис. 124, *а* AB — траектория электрона. Молекулы среды мы можем считать сферическими. Но вокруг движущегося заряда, например в точке P, среда поляризуется: молекулы деформируются так, что положительные заряды смещаются по направлению к движущемуся электрону, а отрицательные — в противоположном направлении; при этом молекулы приобретают

*) В литературе это излучение часто называется просто излучением Черенкова.

*) В 1959 г. работа П. А. Черенкова, И. М. Франка и И. Е. Тамма была отмечена Нобелевской премией.

свойства элементарных диполей, определенным образом ориентированных относительно P. При переходе из точки P в другую точку траектории, например P', поляризация в P исчезает, что ведет к возникновению короткого электромагнитного импульса. Однако вследствие полной симметрии поляризации как относительно оси PP', так и по азимуту относительно точки P, поле на больших расстояниях, а следовательно и излучение, будут отсутствовать.

Рис. 124. К механизму возникновения излучения Вавилова — Черенкова. Поляризация диэлектрика под действием пролетающей заряженной частицы: *а*) при малой скорости; *б*) при большой скорости (по Джелли)

Теперь следует принять во внимание, что исчезновение поляризации происходит не мгновенно, но требует некоторого времени (время релаксации). Если же электрон движется со скоростью, близкой к скорости света в среде, то это может повести к нарушению симметрии поляризации среды, как это показано на рис. 124, *б*. Поляризация в области, где электрон находился раньше, еще не успеет исчезнуть, тогда как в области P поляризация уже установится. Это нарушение симметрии поведет к тому, что в каждой точке пути электрона будет возникать мгновенный электромагнитный импульс, создающий поле также и на больших расстояниях. Однако для того, чтобы из этих мгновенных некомпенсированных импульсов сложилась распространяющаяся в пространстве волна, между импульсами, возникающими в различных точках траектории электрона, должно выполняться определенное условие когерентности, которое мы и найдем, пользуясь элементарным построением Гюйгенса.

Рассмотрим электрон, движущийся в направлении AB (см. рис. 125) в среде с показателем преломления n со скоростью $v > c/n$. Очевидно, что гюйгенсовы волны (электромагнитные импульсы), исходящие из точек P_1, P_2, ... траектории электрона, придут к некоторой плоскости BC в одинаковой фазе, распространяясь под таким углом θ к направлению полета электрона, при котором волна, исходящая из A, пройдет путь AC, равный $(c/n)\Delta t$, за время, в течение которого электрон пройдет путь AB, равный $v\Delta t$. Во всех других направлениях элементарные волны погасятся вследствие интерференции. Но, как непосредственно видно из рисунка, при этом условии $(c/n)\Delta t = v\Delta t \cos\theta$. Отсюда

$$\cos\theta = 1/\beta n, \quad \text{где} \quad \beta = v/c. \quad (79.1)$$

Из этого равенства, которое представляет основной результат теории, следует, что излучение возможно лишь при условии $\beta n > 1$, т. е. $v > c/n$. Условие $\beta n = 1$ определяет пороговую энергию, при которой становится возможным излучение. Эта энергия, очевидно, зависит от показателя преломления n.

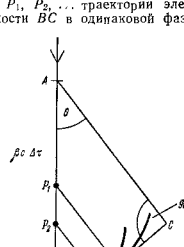


Рис. 125. Построение Гюйгенса для объяснения когерентности излучения.

Направленность излучения была доказана Черенковым следующим опытом (рис. 126). Узкий пучок γ-лучей проходит в сосуд с жидкостью A. Возникающее в сосуде излучение после отражения в коническом зеркале попадает в объектив фотоаппарата. На рис. 127 представлены полученные таким образом фотографии. Рис. 127, *а* дает картину, которая получается, когда в сосуде находится люминесцирующий раствор: равномерно освещенное кольцо показывает, что интенсивность люминесценции не зависит от направления. Рис. 127, *б* и *в* представляют распределение по направлениям интенсивности излучения Вавилова — Черенкова для двух жидкостей с различными показателями преломления. Ясно видно, что в этом случае вместо равномерного кольца получается два пятна.

В том случае, когда излучение Вавилова — Черенкова возбуждается γ-лучами, геометрия опыта недостаточно определенна,

так как излучение вызывают не сами γ-лучи, но создаваемые ими вдоль всего пути электроны. Поэтому, хотя описанный только что опыт Черенкова имел очень большое принципиальное значение, так как он показал наличие направленности в излучении, но, ввиду неопределенности геометрии, он допускал только качественную проверку соотношения (79.1). Количественная проверка этого соотношения и, в частности, зависимости угла θ от показателя преломления среды, была осуществлена в 1938 г. Коллинсом и Рейлингом, с пучком β-электронов, доступным строгой коллимации. Схема этого опыта показана на рис. 128. Пучок электронов со строго определенной энергией в 2 *Мэв*, полученный на электростатическом генераторе, проходил через систему щелей (коллиматор). Полученный таким образом строго параллельный пучок падал на тонкую пленку, подвешенную между зеркалами, расположенными под углом 45° друг к другу,

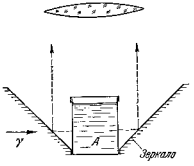


Рис. 126. Схема опыта Черенкова для доказательства направленности излучения.

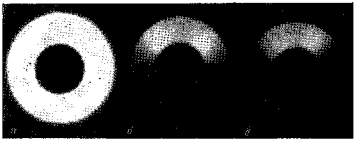


Рис. 127. Фотография углового распределения интенсивности: *а*) флуоресцирующего раствора; *б*) и *в*) чистых жидкостей при $n = 1{,}5804$ (этилцинамат) и $n = 1{,}3371$ (вода).

как показано на рис. 128, *а*. Вследствие малой толщины пленки, протяженностью области, где возникало излучение Вавилова — Черенкова, можно было пренебречь в масштабе размеров прибора и рассматривать излучение как бы выходящим из одной точки, что и показано схематически на рисунке. Рис. 128, *б* показывает расположение пятен, получающееся на фотопластинке.

С этой установкой были получены для листочков слюды, стекла и целлофана с $n = 1{,}59$; $1{,}47$ и $1{,}53$ соответственно следующие значения θ: 53°30′; 45°15′; 50°0′, тогда как формула (79.1) дает 52°10′; 46°30′; 49°22′. Принимая во внимание неизбежные ошибки, связанные с упрощающими допущениями при расчете, и обычные ошибки измерений, следует считать совпадение прекрасным.

Трудность первых опытов Черенкова была связана прежде всего с малой интенсивностью использованных пучков γ- и β-лучей естественно-радиоактивных веществ, и, во-вторых, с отсутствием достаточно чувствительных детекторов видимого излучения. В настоящее время опыты с излучением Вавилова — Черенкова воспроизводятся легко. В самом деле, в качестве источников излучения могут служить строго параллельные пучки

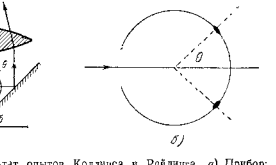


Рис. 128. Схема и результат опытов Коллинса и Рейлинга. *а*) Прибор: *1* — пучок электронов с энергией 2 *Мэв*, *2* — листок; *3* — диэлектрик. *б*) Изображение на фотопластинке.

заряженных частиц относительно очень большой интенсивности, получаемые на ускорителях, как в описанном опыте Коллинса и Рейлинга, а в качестве детекторов могут применяться как фотопластинки, так и электронные умножители, обладающие огромной чувствительностью. К тому же умножители могут быть использованы в разнообразных радиотехнических схемах усиления.

Рис. 129 и 130 иллюстрируют наглядный демонстрационный опыт, выполненный в Объединенном институте ядерных исследований для Нобелевской лекции П. А. Черенкова. Простая схема опыта изображена на рис. 129: пучок протонов от ускорителя (синхроциклотрона) с энергией 660 *Мэв* направлялся на объект R, в котором возникало излучение Вавилова — Черенкова. Это излучение падало на фотопластинку F, расположенную перпендикулярно к направлению пучка протонов. Так как излучение Вавилова — Черенкова в пространстве идет по поверхности конуса с углом при вершине, равным 2θ, то на

пластинке должно получиться кольцо — сечение конуса плоскостью пластинки. Рис. 130 показывает, что это имеет место на самом деле; видное на фотографии, наряду с кольцом, интенсивное центральное пятно образовано пучком протонов, прошедших через объектив. Целесообразно отметить, что конечная ширина кольца обусловлена тем, что показатель преломления n для лучей различной длины волны имеет различную величину, ввиду чего пучок, идущий по поверхности конуса, испытывает в самой среде спектральное разложение, причем внутренняя часть кольца должна иметь красный цвет, а наружная фиолетовый. Выполненные цветные фотографии подтверждают и это.

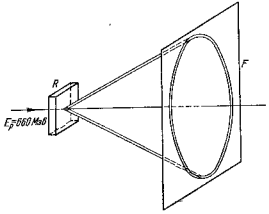


Рис. 129. Схема опыта для обнаружения пространственного распределения излучения Вавилова — Черенкова.

Излучение Вавилова — Черенкова помимо своей принципиальной важности приобрело большое практическое значение. Упомянем здесь прежде всего счетчики быстрых частиц, работающие на основе эффекта Вавилова — Черенкова. Каждая быстрая частица, проходя через среду, вызывает вспышку. Правда, интенсивность этой вспышки очень мала (на 1 *см* пути в среде с $n = 1{,}5$ излучается примерно 200—300 фотонов). Однако число электронов, возникающих на фотокатоде, уже в самом умножителе увеличивается в миллионы раз, а кроме того умножитель включается в радиотехническую схему, в которой импульс испытывает дополнительное усиление, и благодаря этому частица может быть зарегистрирована. Подобные, так называемые «черенковские», счетчики получили широкое распространение. В ряде отношений они обладают преимуществами перед другими счетчиками заряженных частиц

В последнее время указаны и обсуждаются разнообразные другие виды применений эффекта Вавилова — Черенкова — от получения миллиметровых электромагнитных волн до конструирования ускорителей частиц.

В заключение отметим интересное и поучительное обстоятельство из истории открытия излучения заряженных частиц, движущихся со сверхсветовой скоростью. В 1904 г., т. е. за год

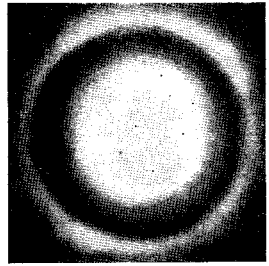


Рис. 130. Фотография, полученная в опыте с пространственным распределением интенсивности излучения. Центральное пятно образовано пучком протонов

до появления теории относительности, А. Зоммерфельд опубликовал работу, в которой вычислялось излучение заряда, движущегося в вакууме со скоростью, большей скорости света в пустоте. Однако через год была опубликована теория относительности, согласно которой такое движение невозможно, и работа Зоммерфельда была забыта. Она стала известной Франку и Тамму только после завершения их работы. В этой связи представляют большой интерес следующие замечания И. Е. Тамма, сделанные в его Нобелевской лекции:

«Вы видите, что механизм этого излучения чрезвычайно прост. Само это явление могло быть легко предсказано на основе классической электродинамики за много десятилетий до того, как оно было фактически обнаружено. Почему же это открытие столь запоздало? Мне кажется, что мы имеем здесь дело с поучительным примером отнюдь не редкой в развитии науки

ситуации, когда научный прогресс тормозится некритическим применением правильных физических принципов к явлениям, выходящим за пределы применимости этих принципов.

В течение многих десятков лет всех молодых физиков учили, что свет (и электромагнитные волны вообще) могут излучаться только при неравномерном движении электрических зарядов. При доказательстве этой теоремы, явно или не явно, используется тот факт, что теория относительности не допускает движений со сверхсветовой скоростью; согласно этой теории никакое материальное тело не в состоянии даже достичь скорости света. Тем не менее в течение долгого времени эта теорема считалась справедливой без всяких оговорок.

Более того, когда И. М. Франк и я уже разработали математически правильную теорию излучения Вавилова — Черенкова, мы все еще пытались разными способами, которые для нас самих сегодня уже непостижимы, примирить наши результаты с утверждением, что для излучения необходимо ускорение. И лишь на следующий день после первого нашего доклада об этой теории на коллоквиуме Физического института мы внезапно узрели простую истину: предельной скоростью для материальных тел является скорость света в вакууме (обозначаемая нами через c), тогда как заряд, движущийся в среде с постоянной скоростью v, начинает излучать при условии $v > c'(\omega)$, причем значение $c'(\omega)$ определяется свойствами среды. Если $c'(\omega) < c$, то это условие вполне может быть выполнено без нарушения требований теории относительности ($c' < v < c$)».

ИЗЛУЧЕНИЕ АБСОЛЮТНО ЧЕРНОГО ТЕЛА И ГИПОТЕЗА КВАНТОВ ЭНЕРГИИ

§ 80. Классическая физика и проблема теплового излучения

В предыдущей главе мы показали, каким образом классическая физика объясняет электромагнитное излучение атомов. Мы видели, что ряд следствий из электромагнитной теории света и электронной теории хорошо совпадает с результатами эксперимента. Сюда относятся, например, распределение излучения по различным направлениям, ширина спектральных линий, простой эффект Зеемана и ряд других явлений, не затронутых в нашем изложении. Наряду с этим мы обращали внимание на то, что некоторые следствия либо противоречат опыту, либо имеют ограниченную применимость. Так, например, характер линейного электромагнитного спектра лишь в области длинных волн (длинноволновая инфракрасная область и радиоволны) отвечает требованиям классической теории, а в оптической области спектра резко ей противоречит.

Однако особенно серьезное поражение потерпела классическая физика, когда она была применена к проблеме теплового излучения. Именно при изучении этой проблемы впервые обнаружились слабые места классической механики и электродинамики, и потребовалось введение гипотезы квантов, решительным образом противоречащей всему духу классической физики.

Для того чтобы сразу ввести читателя в существо дела, мы прежде всего покажем, к каким непримиримым противоречиям привела классическая физика в этом вопросе.

Каждодневный опыт учит нас, что твердые тела, будучи нагреты до достаточно высокой температуры, накаляются, т. е. начинают испускать видимый свет. Однако и при более низкой температуре они излучают энергию в виде так называемых тепловых волн, т. е. инфракрасных лучей.

Поэтому в дальнейшем мы будем говорить о тепловом излучении, не имея в виду специально длинные инфракрасные волны, и будем пользоваться этим термином — «тепловое излучение» — только для того, чтобы подчеркнуть способ его возникновения.

Представим себе теперь несколько тел, нагретых до различной температуры, и для полной определенности поместим эти тела в полость, окруженную оболочкой с идеально отражающими стенками. Если даже внутри этой полости будет абсолютный

вакуум, тела будут обмениваться энергией между собой через посредство излучения. При этом, хотя излучение каждого тела зависит только от его собственной температуры, а не от температуры окружающих тел (закон Прево), более теплые тела будут охлаждаться, так как они испускают большее количество энергии, чем получают от окружающих тел, а менее нагретые тела — нагреваться, потому что они получают больше, чем отдают. Так как, кроме того, электромагнитные волны, излучаемые всеми этими телами, распространяются с конечной скоростью, то пространство внутри полости будет всегда заполнено лучистой энергией. *Опыт показывает*, что в конце концов обязательно устанавливается стационарное состояние, при котором все тела приобретают одинаковую температуру, т. е. поглощают в единицу времени ровно столько энергии, сколько отдают ее, а плотность излучения в пространстве между ними достигает некоторой определенной величины, соответствующей данной температуре.

Этот факт настолько известен, что он представляется даже вполне естественным выводом из законов классической физики, а между тем, если вдуматься глубже, то он оказывается совершенно непонятным именно с точки зрения *классической* физики.

Поясним это простым примером. Представим себе, что в нашей полости помещен кусок железа, и положим, что поверхность его зачернена так, что она поглощает полностью всю падающую на нее энергию. Известно с полной определенностью, что такой кусок железа при температуре в 0 °C будет излучать с каждого квадратного сантиметра своей поверхности $3 \cdot 10^5$ *эрг* в секунду, а при тепловом равновесии — одновременно и поглощать из окружающего пространства ровно такое же количество энергий в секунду. Столь же достоверно известно, что в пространстве между стенками полости и поверхностью нашего куска железа, вообще *в той части пространства внутри полости, которая не занята частицами вещества*, равновесная плотность энергии при 0 °C будет равна $4 \cdot 10^{-5}$ *эрг/см*^{3}. С другой стороны, плотность тепловой энергии внутри самого куска железа при той же температуре равна приблизительно $8 \cdot 10^9$ *эрг/см*^{3}, т. е. в $2 \cdot 10^{14}$ раз больше плотности энергии излучения. Эта тепловая энергия, как известно, заключается в колебаниях атомов железа около положений равновесия. Мы приходим, таким образом, к поразительному выводу: при термодинамическом равновесии между колеблющимися атомами вещества и электромагнитным излучением почти вся энергия сосредоточена в колеблющихся атомах, и лишь ничтожная часть ее приходится на долю излучения, находящегося с ними в равновесии.

Именно этот факт является совершенно непонятным с точки зрения классической механики. Представим себе следующую

простую модель рассмотренного выше опыта: на поверхности воды, налитой в какой-нибудь резервуар, плавают пробки, соединенные пружинами, так что они могут колебаться относительно друг друга. Приведем эти пробки в колебания; тогда они будут отдавать свою энергию («излучать») воде, на гладкой поверхности которой появятся волны. Эти волны будут бороздить поверхность в различных направлениях, отражаться от стенок резервуара, раздробляясь на все более мелкие волны, и вследствие вязкости их энергия будет постепенно превращаться в тепло. Совершенно очевидно, что окончательный результат опыта должен состоять в том, что пробки прекратят свои колебания, а вся их энергия будет передана окружающей среде.

Невозможно представить себе, чтобы в конечном состоянии пробки находились в интенсивном колебании, а вода не получила бы никакой энергии. Но именно это имеет место в случае равновесия между нагретым материальным телом и излучением. Там, как мы видели, почти вся энергия сосредоточена в колебаниях атомов, а на излучение приходится лишь ничтожная доля энергии.

Рассмотрим теперь другой модельный опыт. Пусть механической моделью излучающего тела будут служить вместо пробковых шариков дробинки, также соединенные легкими пружинками и подвешенные в замкнутой камере, содержащей воздух. Если теперь привести эти дробинки в сильные колебания и предоставить самим себе, то они возбудят в воздухе акустические волны, которые будут постепенно раздробляться и замирать вследствие вязкости воздуха, совершенно так же, как волны на поверхности жидкости. Окончательным состоянием системы будет такое, в котором дробинки покоятся в их положениях равновесия, а весь их первоначальный запас энергии перейдет к молекулам воздуха. Точнее говоря, дробинки будут совершать бесконечно малые броуновские колебания со скоростями, соответствующими их массе. Однако и при этом уточнении практически вся энергия, которой обладает система, будет принадлежать молекулам газа.

Кинетическая теория газов дает полное объяснение причины такого хода явления. В самом деле, кинетическая энергия двухатомных молекул воздуха в равновесном состоянии при температуре T равна, как известно, $^5/_2 nkT$, где n — число молекул; кинетическая энергия n' дробинок, совершающих броуновское движение, равна $^3/_2 n'kT$. Полная энергия всей системы при равновесии должна быть поэтому $(^5/_2 n + {}^3/_2 n')kT$. Так как число молекул n неизмеримо больше числа дробинок n', то ясно, что вся энергия практически равна $^5/_2 nkT$. Другими словами, при равновесии энергия должна целиком перейти от дробинок к молекулам воздуха.

Мы видим, таким образом, что описанная картина явления для «излучающей» системы частиц и среды, в которой распространяется излучение, прямо противоположна той, которая имеет место *согласно опыту* в случае равновесия материального тела и электромагнитного поля (тепловое излучение). Затруднение, которое возникло в связи с проблемой теплового излучения, состоит именно в том, что, как оказывается, *согласно классической физике также и в случае равновесия электромагнитного излучения материальных тел в замкнутой полости* практически вся энергия должна перейти к электромагнитному полю.

§ 81. Равновесное излучение в полости

Займемся теперь рассмотрением проблемы излучения, чтобы убедиться в правильности вывода, сделанного в конце предыдущего параграфа. Представим себе, как и раньше, полость, окруженную теплонепроницаемыми стенками, нагретыми до некоторой определенной температуры T. Стенки полости будут излучать электромагнитные волны и поглощать волны, падающие на них изнутри полости; при равновесии в 1 *сек* будет излучаться столько же, сколько и поглощаться, и так как излучение распространяется с конечной скоростью, то внутри полости будет существовать электромагнитное поле с постоянной плотностью энергии

$$u = \frac{1}{8\pi}(\mathscr{E}^2 + \mathscr{H}^2). \tag{81.1}$$

Вместо объемной плотности излучения u удобно, особенно для практических целей, пользоваться другой величиной — удельной интенсивностью или поверхностной яркостью излучения. Эта величина определяется следующим образом: рассмотрим в поле излучения площадку $d\sigma$, ориентированную любым образом. Через эту площадку во всевозможных направлениях проходит излучение. Мы можем себе представить двойное многообразие элементарных конусов, опирающихся на площадку $d\sigma$, и представить себе, далее, что излучение распространяется внутри этих конусов. Количество энергии, проходящей в единицу времени через площадку $d\sigma$ внутрь конуса $d\Omega$, ось которого составляет с нормалью к площадке угол ϑ, равно

$$d\Phi = I\, d\sigma \cos\vartheta\, d\Omega. \tag{81.2}$$

Величина I называется удельной интенсивностью излучения. Это есть, следовательно, энергетический поток, проходящий в единицу времени через площадку $d\sigma = 1$ *см*^{2} и распространяющийся внутри единичного телесного угла в направлении нормали к площадке. Для того чтобы получить величину полного

потока, проходящего через $d\sigma$ в единицу времени в одну сторону, нужно проинтегрировать выражение (81.2) по всем азимутам φ от 0 до 2π и по всем углам ϑ от 0 до $\pi/2$. Принимая во внимание, что

$$d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

имеем

$$\Phi = d\sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Если излучение изотропно, т. е. если I не зависит от угла, то

$$\Phi = \pi I\, d\sigma.$$

Очевидно, что величина I играет для излучения такую же роль, как величина поверхностной (энергетической) яркости для источника, ввиду чего I часто называют поверхностной яркостью излучения.

Между яркостью I и объемной плотностью излучения u имеется простое соотношение. Рассмотрим какую-нибудь точку O внутри поля излучения и вообразим сферу, описанную из O, как из центра. Очевидно, что все лучи, проходящие через точку O, должны пройти через эту сферу, и каждый из них вносит свою долю в объемную плотность излучения около O. Путем интегрирования и на основании простых геометрических соображений *) нетрудно показать, что для случая линейно поляризованного излучения

$$u = \frac{4\pi I}{c}. \tag{81.3}$$

Далее, нужно принять во внимание, что тепловое излучение в полости имеет сплошной спектр. Для рассмотрения его спектрального состава необходимо наряду с интегральными величинами u и I, в которых учитываются излучения всех имеющихся частот, ввести спектральные величины. Для бесконечно малого интервала частот $d\nu$ мы можем считать спектральную объемную плотность du_ν пропорциональной интервалу $d\nu$:

$$du_\nu = \rho_\nu\, d\nu.$$

Коэффициент ρ_ν называется спектральной (объемной) плотностью излучения. Для сплошного спектра, охватывающего все частоты от 0 до ∞, имеем

$$u = \int_0^\infty du_\nu = \int_0^\infty \rho_\nu\, d\nu.$$

Наряду с ρ_ν можно ввести спектральную поверхностную яркость излучения I_ν, определив ее по аналогии с тем, как это

было сделано для интегральных величин. Между ρ_ν и I_ν имеется в таком случае то же соотношение, что и между u и I:

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \tag{81.4}$$

Наконец, нужно принять во внимание, что излучение определенной частоты и определенного направления характеризуется еще своим состоянием поляризации. Излучение внутри полости вполне неполяризовано. Но неполяризованный луч в отношении переносимой энергии эквивалентен двум лучам, поляризованным во взаимно перпендикулярных плоскостях и имеющим одинаковую среднюю интенсивность. Поэтому для неполяризованного излучения

$$I = 2\int_0^\infty I_\nu \, d\nu$$

и для неполяризованного однородного изотропного излучения мы имеем

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{c} I_\nu. \tag{81.5}$$

§ 82. Закон Кирхгофа

Первый крупный шаг в теоретическом исследовании свойств равновесного излучения был сделан Кирхгофом, который термодинамическим путем показал, что при постоянной температуре спектральная плотность излучения ρ_ν совершенно не зависит от природы и свойств тел, находящихся внутри полости (в том числе и стенок самой полости), например, от характера их поверхности, наличия или отсутствия у них полос селективной оптической абсорбции и т. д. Эта особенность равновесного излучения вытекает непосредственно из второго начала термодинамики. В самом деле, допустим обратное, т. е. что плотность излучения при равновесии каким-то образом зависит от природы тел, находящихся внутри полости. Тогда, взяв две равновесные системы, находящиеся при одинаковой температуре, но заключающие разные тела, и установив между ними сообщение, мы бы нарушили равновесие. Это повело бы к установлению между обеими системами разности температур, которую можно было бы использовать для построения perpetuum mobile второго рода.

Кирхгоф, далее, нашел важное соотношение между испускательной и поглощательной способностями тела для данной частоты, с одной стороны, и спектральной яркостью I_ν (а значит, и ρ_ν) — с другой. Во избежание недоразумений необходимо, однако, прежде всего условиться о терминах.

Если на тело падает излучение, то часть его неизбежно отражается на поверхности раздела между телом и средой, а остальная часть проникает внутрь тела. Эта проникшая внутрь лучистая энергия частью поглощается, превращаясь в тепло, частью же после одного или нескольких отражений внутри тела вновь выходит наружу. Доля всей *падающей* энергии данного интервала частоты ν, $\nu + d\nu$, которая остается внутри тела и превращается в тепло, называется *поглощательной способностью тела* для данной частоты и обозначается через A_ν (безразмерное число). Ее не следует смешивать с коэффициентом поглощения a_ν, измеряющим относительное ослабление параллельного пучка лучей на единице длины. Тело может иметь малый коэффициент поглощения, но при значительном протяжении — большую поглощательную способность. Энергия, излучаемая 1 *см*² в 1 *сек*, называется *испускательной способностью* и обозначается через E_ν. Установленное Кирхгофом соотношение гласит:

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = I_\nu = \frac{c}{8\pi}\rho_\nu \tag{82.1}$$

[последнее — по (81.5)], т. е. отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности равно поверхностной яркости находящегося с ним в равновесии излучения. Так как спектральная плотность ρ_ν (а также I_ν) не зависит от природы тела, то соотношение (82.1) означает, что *отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности для всех тел одно и то же*. Это отношение, пропорциональное спектральной плотности равновесного излучения, является, таким образом, универсальной функцией, зависящей только от температуры и частоты.

Среди всех тел максимальное значение E_ν должно иметь такое тело, у которого поглощательная способность равна единице; так как это тело поглощает всю *падающую* на него энергию, то Кирхгоф назвал его *абсолютно черным*. Положим, что нам удалось построить такое тело; из соотношения (82.1) при $A_\nu = 1$ получаем

$$E_\nu = I_\nu = \frac{c}{8\pi}\rho_\nu. \tag{82.2}$$

Это значит, что испускательная способность абсолютно черного тела также является универсальной функцией частоты и температуры. Если поэтому теоретически найдена формула, дающая явное выражение $\rho(\nu, T)$, и если экспериментальная проверка, выполненная только для одного абсолютно черного тела, подтверждает эту формулу, то мы можем вычислить распределение энергии в спектре для любого тела, зная его поглощательную способность, которую можно найти при помощи спектра

абсорбции и геометрических соображений. Отсюда понятно то большое внимание, которое привлекла к себе проблема теоретического отыскания функции $\rho(\nu, T)$.

В действительности ни одно тело в природе не может считаться абсолютно черным, и не существует такой краски, которая, будучи нанесена на поверхность тела, свела бы к нулю его коэффициент отражения. Однако закон Кирхгофа открывает возможность искусственного построения абсолютно черного тела. Для этого достаточно взять полость, окруженную равномерно нагретыми стенками (например, муфельную электрическую печь); тогда равновесное излучение, устанавливающееся внутри полости, будет характеризоваться распределением энергии в спектре, тождественным с абсолютно черным телом. Поэтому, если сделать в стенке полости малое отверстие, то из этого отверстия будет выходить излучение, тождественное с излучением абсолютно черного тела. Относительно практического осуществления подобного искусственного абсолютно черного тела см. § 84.

§ 83. Законы излучения абсолютно черного тела

Основной вывод, к которому приводит закон Кирхгофа, может быть записан следующим образом:

$$\rho_\nu d\nu = F(\nu, T)\, d\nu, \tag{83.1}$$

где $F(\nu, T)$ — некоторая универсальная функция. Следующая задача заключается в раскрытии вида этой функции. Наиболее значительный шаг в этом направлении после ряда важных работ русских физиков В. А. Михельсона и Б. Б. Голицына был сделан Вином, который воспользовался, кроме термодинамики, еще и электромагнитной теорией света.

В результате он установил следующую формулу *):

$$\rho_\nu d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu. \tag{83.2}$$

Здесь $F(\nu/T)$ — функция, раскрыть вид которой при помощи термодинамических соображений, т. е. без всяких гипотез о молекулярном механизме испускания и поглощения, оказалось невозможным.

Несмотря на этот недостаток, формула Вина сыграла очень важную роль. Во-первых, она свела отыскание функции двух

*) Вывод закона Вина можно найти в большом числе руководств по теоретической физике, в том числе в книгах М. Планка, Теория теплового излучения, ОНТИ, 1935, и Введение в теоретическую физику, ч. V, ОНТИ, 1935. Краткое изложение теории излучения, отличающееся исключительной ясностью, дано в книге Г. А. Лоренца, Теория излучения, Гостехиздат, 1941.

переменных ν и T к функции одной переменной ν/T, а это открывало возможность по заданной кривой распределения энергии в спектре для какой-нибудь одной температуры вычислять кривую для любой другой. Положим, например, что нам дана кривая для температуры T, и мы хотим вычислить кривую для температуры T_1. Для частоты ν_1, удовлетворяющей условию $\nu_1/T_1 = \nu/T$, т. е. $\nu_1 = T_1\nu/T$, формула Вина дает

$$\rho(\nu_1, T_1) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu_1}{T_1}\right) = \nu_1^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3}\nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{T_1^3}{T^3}\rho(\nu, T).$$

Таким образом, достаточно ординату каждой точки кривой $\rho(\nu, T)$ умножить на отношение T_1^3/T^3, чтобы получить кривую $\rho(\nu_1, T_1)$.

Во-вторых, поскольку формула Вина выведена при помощи термодинамики, она безусловно верна, вследствие чего любая другая формула, полученная при помощи каких-либо специальных предположений о механизме излучения, обязательно должна удовлетворять требованиям, выраженным в этой формуле, т. е. содержать (кроме постоянных) куб частоты и функцию отношения ν/T.

Наконец, несмотря на присутствие неявной функции $F(\nu/T)$, формула Вина ведет к некоторым совершенно определенным количественным соотношениям.

В этом можно убедиться, прежде всего вычислив при помощи этой формулы интегральную плотность излучения u:

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu\, d\nu = \int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu.$$

Вводя новую переменную $\nu/T = \xi$, мы имеем

$$u = T^4 \int_0^\infty \xi^3 F(\xi)\, d\xi.$$

Если мы обозначим величину, получающуюся при вычислении интеграла, через α, то получим

$$u = \alpha T^4, \tag{83.3}$$

т. е. известный *закон Стефана — Больцмана*.

Для дальнейшего целесообразно перейти от распределения по частотам к распределению по длинам волн. С этой целью необходимо принять во внимание прежде всего, что энергия, заключенная в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, равна $\rho_\nu d\nu$ (но не ρ_ν!); та же энергия, выраженная через длины волн, равна, очевидно, $\rho_\lambda d\lambda$. Поэтому для перехода от распределения по

частотам к распределению по длинам волн следует пользоваться соотношением

$$\rho_\nu\, d\nu = \rho_\lambda\, d\lambda; \tag{83.4}$$

далее, надо заменить ν и $d\nu$ через λ и $d\lambda$:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}, \quad |d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}\, d\lambda. \tag{83.5}$$

Принимая все это во внимание, получим

$$\rho_\lambda\, d\lambda = \rho_\nu\, d\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = \frac{c^4}{\lambda^5} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) d\lambda. \tag{83.6}$$

Воспользуемся теперь условием максимума $\frac{d\rho_\lambda}{d\lambda} = 0$. Дифференцируя (83.6), получаем

$$\frac{c^4}{\lambda^5}\left(\frac{c}{\lambda T}\right) F'\left(\frac{c}{\lambda T}\right) + \frac{5c^4}{\lambda^6} F\left(\frac{c}{\lambda T}\right) = 0,$$

или, наконец, вводя обозначение $\frac{c}{\lambda T} = \eta$ и сокращая,

$$\eta F'(\eta) + 5F(\eta) = 0. \tag{83.7}$$

Решая это уравнение, мы получим для η какое-то определенное численное значение $\eta = \text{const}$, а это дает $\frac{c}{\lambda_{max} T} = \text{const}$, где через λ_{max} обозначена длина волны, отвечающая $\rho_{\lambda_{max}}$, или, так как c есть величина постоянная,

$$\lambda_{max} T = \text{const} = b. \tag{83.8}$$

Но это — хорошо известный *закон смещения Вина*: длина волны, отвечающая максимальной энергии в спектре, обратно пропорциональна абсолютной температуре.

§ 84. Экспериментальное исследование законов теплового излучения

В § 82 мы видели, что искусственное построение модели абсолютно черного тела позволяет изучать экспериментальным путем свойства равновесного излучения и, в частности, — исследовать распределение энергии в спектре этого излучения. Для практического осуществления модели черного тела необходимо обеспечить возможность равномерного нагревания стенок полости и выход излучения наружу через малое отверстие. На рис. 131, *а* изображено черное тело, впервые построенное Луммером и Прингсгеймом. Оно представляет собою металлический сосуд с двойными стенками. Пространство между стенками используется в качестве «температурной бани» для поддержания

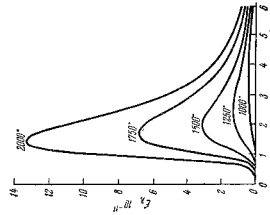


Рис. 132. Кривые распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. По оси ординат отложена плотность энергии, приходящейся на каждую длину волны.

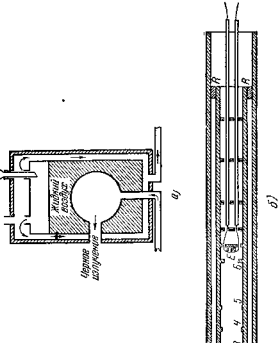


Рис. 131. Две модели черного тела: *а*) простейшая модель с температурной баней, *б*) черное тело, применяемое для исследования излучения при высоких температурах.

определенной и равномерной температуры. Это достигается путем пропускания пара кипящей воды или — для низких температур — путем наполнения льдом, твердой углекислотой, жидким воздухом и т. д.

Для исследования излучения при высоких температурах применяется черное тело иной конструкции (рис. 131, *б*). Цилиндр из платиновой жести, через который пропускается электрический ток, служит для равномерного нагревания внутреннего фарфорового цилиндра *P*. Температура внутри цилиндра измеряется термопарой *E*; диафрагмы *1, 2, 3, ...* предохраняют от охлаждения проникающим снаружи воздухом.

При помощи подобных моделей черного тела были экспериментально исследованы законы излучения, точно определены его константы и изучено спектральное распределение яркости излучения. Ряд кривых распределения энергии в спектре абсолютно черного тела для различных температур приведен на рис. 132. Все кривые имеют резко выраженный максимум и обнаруживают при повышении температуры смещение этого максимума в сторону коротких волн, требуемое законом Вина.

§ 85. Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы

В теоретическом исследовании проблемы излучения абсолютно черного тела важную роль сыграла одна весьма общая теорема классической статистической механики — так называемая теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Напомним содержание этой теоремы. Для этого мы рассмотрим сначала в качестве простейшего примера системы, состоящей из большого числа частиц, *одноатомный* газ. Полная энергия этого газа есть сумма кинетических энергий *поступательного* движения его молекул. Если бы мы могли измерять кинетическую энергию отдельных молекул, — мы бы получили для разных молекул весьма различные значения. Однако при постоянной температуре средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну молекулу, есть вполне определенная величина. Если мы выделим какую-нибудь часть объема газа, состоящую из достаточно большого числа молекул, то средняя кинетическая энергия молекулы, вычисленная для этой части объема, будет равна средней кинетической энергии, вычисленной для другой части объема при условии, что температура газа везде одинакова. То же будет верно и в том случае, если газ является смесью двух газов, молекулы которых имеют различную массу: средняя кинетическая энергия тех и других молекул будет одна и та же; это будет верно и тогда, когда оба газа не смешаны и находятся в температурном равновесии.

Кинетическая энергия молекул одного моля одноатомного газа равна $E_k = {}^1/_2 N m \overline{v^2}$ и так как, с другой стороны, согласно кинетической теории газов $pv = RT = {}^1/_3 N m \overline{v^2}$, то $m\overline{v^2} = 3R/NT = 3kT$ и

$$E_k = {}^3/_2 NkT.$$

Если молекулы одноатомного газа рассматривать как точечные массы, то конфигурация системы N таких масс полностью определяется их $3N$ декартовыми координатами. Мы говорим, что система имеет $3N$ степеней свободы. Пусть координаты центра тяжести i-й массы будут x_i, y_i, z_i; соответствующие им составляющие скорости будут $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$. Кинетическую энергию всей системы мы можем написать в виде суммы $3N$ квадратичных членов:

$$E_k = {}^1/_2 m\dot{x}_1^2 + {}^1/_2 m\dot{y}_1^2 + {}^1/_2 m\dot{z}_1^2 + \ldots + {}^1/_2 m\dot{x}_N^2 + {}^1/_2 m\dot{y}_N^2 + {}^1/_2 m\dot{z}_N^2.$$

Согласно теореме о равномерном распределении энергии, средняя энергия, приходящаяся на каждый член этой суммы, т. е. на каждую степень свободы поступательного движения, — одна и та же и равна ${}^1/_2 kT$. В самом деле, если каждому квадратичному члену этой суммы приписать одну и ту же среднюю кинетическую энергию, равную ${}^1/_2 kT$, то полная энергия газа будет равна ${}^3/_2 NkT$ в согласии с предыдущим.

Рассмотренный пример одноатомного газа отличается особенной простотой потому, что молекулы одноатомного газа можно рассматривать как точечные массы, каждая из которых находится только в поступательном движении. Классическая статистическая механика, основанная на механике Ньютона, показывает, однако, что тот же результат имеет место и в самом общем случае. Пусть например, наш газ состоит из двухатомных молекул. Каждая из них имеет пять степеней свободы: три степени свободы поступательного перемещения центра тяжести и две степени свободы вращения около двух осей, перпендикулярных к линии, соединяющей атомы (вращение вокруг оси, проходящей через оба атома, не должно учитываться, если атомы рассматривать как точечные массы). И в этом случае для вычисления полной энергии газа следует каждой степени свободы (т. е. как степеням свободы поступательных перемещений, так и степеням свободы вращения), приписать одну и ту же среднюю энергию, равную ${}^1/_2 kT$.

Пусть, наконец, мы имеем любую систему, конфигурация которой полностью определяется f лагранжевыми обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_f$, так что система имеет f степеней свободы. Кинетическая энергия такой системы представится однородной квадратичной формой, содержащей члены с

квадратами обобщенных скоростей и, вообще говоря, также члены с их попарными произведениями*). Можно выбрать, однако, координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$ таким образом, чтобы кинетическая энергия представлялась суммой f членов, содержащих только одни квадраты обобщенных скоростей, т. е. имеющих вид $\frac{1}{2}a_i\dot{q}_i^2$; при этом коэффициенты a_i, вообще говоря, уже не будут просто равны массам m_i. Например, в полярных координатах для i-й частицы

$$T = \frac{1}{2}m_i\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}m_ir_i^2\dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_ir_i^2\sin^2\theta_i\,\dot{\varphi}_i^2,$$

так что $a_{r_i} = m_i$, $a_{\theta_i} = m_ir_i^2$, $a_{\varphi_i} = m_ir_i^2\sin^2\theta_i$. Каковы бы, однако, ни были выбранные координаты, если кинетическая энергия содержит *только* квадратичные члены, на каждый из этих f членов, т. е. на каждую степень свободы, приходится согласно упомянутой теореме статистической механики одна и та же *средняя* кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$.

До сих пор речь шла только о кинетической энергии. Имеются, однако, случаи, когда и потенциальную энергию можно вычислить столь же простым способом. Если, например, система состоит из линейных гармонических осцилляторов, то ввиду того, что средняя потенциальная энергия линейного гармонического осциллятора равна его средней кинетической, на каждую степень свободы придется энергия, равная $\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$.

В общем случае системы, способной совершать малые колебания, всегда можно найти такие координаты, в которых не только кинетическая энергия представится в виде суммы квадратичных членов вида $\frac{1}{2}a_i\dot{q}_i^2$, но и потенциальная энергия будет суммой квадратичных членов $\frac{1}{2}b_iq_i^2$; число последних также равно числу степеней свободы системы*). Выбранные таким образом *нормальные координаты* характеризуются тем, что для каждой из них зависимость от времени представляется простой синусоидальной функцией, а средняя кинетическая энергия соответствующих собственных колебаний равна средней потенциальной (см. упражнение к этому параграфу). Движение системы будет в этом случае суперпозицией f линейных гармонических осцилляторов; полная энергия будет суммой $2f$ квадратичных членов. На каждый член приходится *средняя* энергия, равная $\frac{1}{2}kT$, следовательно, полная энергия будет fkT. В этом и состоит теорема о равномерном распределении энергии.

*) См., например, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1965, стр. 85 и след.

Упражнение. Кинетическая и потенциальная энергии системы, способной совершать малые колебания в нормальных координатах, представляются в виде

$$T = \frac{1}{2}a_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}a_2\dot{q}_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}a_f\dot{q}_f^2, \quad U = \frac{1}{2}b_1q_1^2 + \frac{1}{2}b_2q_2^2 + \ldots + \frac{1}{2}b_fq_f^2.$$

Написать уравнения Лагранжа в этих координатах и убедиться в том, что решения их будут

$$q_1 = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{b_1}{a_1}}\,t + \delta_1\right), \quad q_2 = A_2\cos\left(\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\,t + \delta_2\right), \ldots$$

Пользуясь этим, написать выражения для потенциальной и кинетической энергий для каждого из собственных колебаний и убедиться в том, что их средние значения между собой равны.

§ 86. Формула Рэлея — Джинса

Рэлей впервые воспользовался теоремой о равномерном распределении энергии для вычисления плотности электромагнитной энергии в замкнутой полости. Основанием для применения этой теоремы в данном случае могут служить следующие соображения. Представим себе полость объема V, не содержащую материи (т. е. вакуум) и окруженную идеально отражающими стенками, нагретыми до температуры T.

Так как стенки этой полости при любой температуре излучают электромагнитные волны в виде света (в частности, при низкой температуре — инфракрасного света), то внутри полости будет существовать электромагнитное поле. Это электромагнитное поле можно разложить на системы стоячих волн различной частоты и разного направления; каждая такая стоячая волна и представляет собою элементарное состояние электромагнитного поля. Теорема о равномерном распределении утверждает, что и в этом случае при равновесии между стенками полости и электромагнитным полем на каждую стоячую волну должна приходиться средняя энергия, равная kT. При этом подобно тому как средняя энергия гармонического осциллятора складывается из средней кинетической энергии, равной $\frac{1}{2}kT$, и средней потенциальной энергии, также равной $\frac{1}{2}kT$, в случае электромагнитного поля стоячих волн полная средняя энергия kT складывается из средних энергий электрического и магнитного полей, в отдельности равных $\frac{1}{2}kT$ каждая.

Таким образом, подсчет энергии поля для данного интервала частот ν, $\nu + d\nu$ сводится к отысканию числа элементарных стоячих волн, т. е. числа свободных собственных колебаний объема V, заполненного сплошной средой, принадлежащих к указанному интервалу частот. Зная полную энергию поля в объеме V, равную $V\rho_\nu d\nu$, можно найти и плотность энергии $\rho_\nu d\nu$.

Вычисление плотности энергии поля $\rho_\nu d\nu$ при помощи теоремы о равномерном распределении было сделано Джинсом по методу, указанному Рэлеем. Полученная им формула носит поэтому название формулы Рэлея — Джинса. Хотя эта формула в применении ко всему спектру оказалась неверной, она сыграла большую роль в развитии теории излучения и всей современной физики, так как она отчетливо вскрыла принципиальные затруднения классической физики.

Рассмотрим вывод формулы Рэлея — Джинса и начнем с подсчета числа собственных колебаний поля. Допустим для простоты, что полость, в которой устанавливается стационарное (т. е. не зависящее от времени) волновое поле, имеет форму куба с ребром a. Как уже было сказано, стационарное волновое поле можно рассматривать как совокупность стоячих волн. Рассмотрим сначала волны, нормаль к которым перпендикулярна к двум параллельным граням куба. Падающие и отраженные волны, идущие параллельно этому направлению в ту и другую сторону, образуют стоячие волны. При этом на стенках полости, в зависимости от природы волн, будут располагаться либо узлы либо пучности, например, в случае электромагнитных волн электрическое поле на стенках образует узлы, а магнитное — пучности. Однако в том и другом случае условием существования стоячей волны является требование, чтобы на протяжении длины a уложилось целое число полуволн.

Для определенности мы будем сначала рассматривать только такие стоячие волны, которые имеют на стенках узлы. Итак, условие существования стоячих волн, параллельных плоскости yz, состоит в том, что

$$2a/\lambda = n_1 \quad (n_1 \text{ — целое число}).$$

Аналогичные условия будут иметь место для стоячих волн с плоскостями равной фазы, параллельными плоскостям xy и xz:

$$2a/\lambda = n_2, \quad 2a/\lambda = n_3$$

Рассмотренные системы стоячих волн с нормалями, параллельными осям координат, являются частными случаями. В полости могут существовать стоячие волны с нормалями, направленными любым образом.

Рассмотрим этот общий случай подробнее. Пусть мы имеем стоячую волну, нормаль к которой образует с осями x и y углы α и β соответственно, а плоскости равной фазы (например, узловые плоскости) — параллельны вертикальному ребру куба, совпадающему с осью z. На рис. 133 квадрат изображает одно из оснований нашего куба, т. е. грань, параллельную координатной плоскости xy, а система параллельных прямых — следы узловых плоскостей. Условие существования таких стоячих волн

заключается в том, чтобы расстояния между их узловыми плоскостями, измеренные по нормалям к граням куба, укладывались целое число раз в ребре a, т. е.

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a\cos\beta}{\lambda} = n_2.$$

Эти условия получаются из рассмотрения рис. 133. Очевидно, что в самом общем случае, когда нормаль к узловым плоскостям образует с осями координат любые углы α, β, γ, должны быть одновременно удовлетворены три условия.

$$\frac{2a\cos\alpha}{\lambda} = n_1, \quad \frac{2a\cos\beta}{\lambda} = n_2,$$

$$\frac{2a\cos\gamma}{\lambda} = n_3. \qquad (86.1)$$

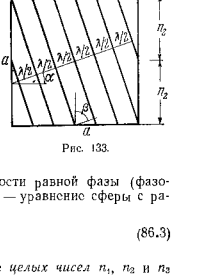


Рис. 133.

Возводя в квадрат и складывая эти три равенства, получаем

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^2, \qquad (86.2)$$

где c' — скорость перемещения плоскости равной фазы (фазовая скорость) в данной среде. Но это — уравнение сферы с радиусом

$$R = \frac{2a\nu}{c'}. \qquad (86.3)$$

Отсюда видно, что каждой тройке *целых чисел* n_1, n_2 и n_3 соответствует определенная частота

$$\nu = \frac{c'}{2a}\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \qquad (86.4)$$

Введем теперь декартову систему координат, на осях которой отложим, выбрав за единицу $c'/2a$, целые числа n_1, n_2 и n_3. В силу (86.4) каждому набору значений этих чисел соответствует определенная частота. В нашей системе координат, которую мы будем называть «пространством частот», эта частота представится точкой с координатами n_1, n_2, n_3 (изображающая точка). Очевидно, однако, что всем целым числам n_1, n_2 и n_3, сумма квадратов которых имеет постоянное значение, соответствуют численно равные частоты. Тем не менее эти равные частоты представляют собой *различные* собственные колебания

нашего континуума, так как каждой из них соответствует своя система стоячих волн, различающихся по направлению *).

Для наших целей существенно, что все такие равные между собой частоты представляются различными точками пространства частот.

Теперь мы можем подсчитать полное число собственных частот от 0 до ν. Построим для этого систему точек, соответствующую всевозможным целым положительным значениям n_1, n_2, n_3. Очевидно, что эта система точек образует кубическую решетку, причем ребро элементарного кубика будет равно 1, а объем — также 1. Если длина волны достаточно мала по сравнению с линейными размерами полости a, то сумма объемов всех элементарных ячеек (кубиков) будет с достаточной точностью равна объему одной восьмой сферы радиуса R, определяемого условиями (86.3) и (86.4). Поскольку объем каждой ячейки равен 1, мы можем утверждать и обратное, — что объем октанта (с указанной степенью точности) равен *числу* элементарных ячеек.

Если теперь мы будем знать, сколько изображающих точек приходится на одну ячейку, то мы вместе с тем найдем и полное число собственных частот нашей полости, лежащих в пределах от 0 до ν. Но совершенно так же, как в случае кубической ионной решетки (см. § 34) на каждую ячейку приходится по одному иону, мы можем утверждать, что и в данном случае на каждый элементарный кубик приходится по *одной* изображающей точке. Итак, искомое число частот свободных колебаний численно равно объему октанта, т. е.

$$N = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a\nu}{c'}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\nu}{c'}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3\nu^3}{c'^3}.$$

Это и есть число собственных колебаний в пределах от 0 до ν. Число колебаний в пределах от ν до $\nu + d\nu$ равно числу изображающих точек, которые расположены внутри одной восьмой сферического слоя с радиусами $\frac{2a\nu}{c'}$ и $\frac{2a(\nu+d\nu)}{c'}$, а это число изображающих точек, по предыдущему, равно объему указанного слоя, т. е.

$$dN = \frac{4\pi\nu^2}{c'^3}a^3\,d\nu.$$

*) Это совпадение частот, соответствующих различным наборам чисел n_1, n_2 и n_3 при условии, что сумма $n_1^2+n_2^2+n_3^2$ равна определенному числу, есть *частный случай*, называемый случаем вырождения. Совпадение получается потому, что мы рассматриваем объем в форме куба. Оно имело бы место также и в том случае, если бы мы выбрали объем в форме параллелепипеда с ребрами, длины которых выражаются соизмеримыми отрезками. Однако, когда длины ребер параллелепипеда *несоизмеримы*, совпадение устраняется и каждому набору чисел n_1, n_2 и n_3 соответствует только одна частота. Смысл этих особенностей станет ясным читателю после ознакомления с § 161.

Если речь идет об электромагнитных волнах, которые только и интересуют нас в данном случае, то мы должны еще принять во внимание, что каждой частоте ν соответствуют *две* волны со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Поэтому найденное число следует удвоить, и мы получаем, обозначая объем куба a^3 через V,

$$dN = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}V\,d\nu.$$

Это и есть число свободных собственных колебаний нашего объема V. По теореме о равномерном распределении энергии каждому из них следует приписать среднюю энергию kT. Следовательно, полная энергия в объеме V будет

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3}VkT\,d\nu,$$

а плотность энергии получим отсюда простым делением на объем V:

$$\rho_\nu\,d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\,d\nu. \qquad (86.5)$$

Это и есть формула Рэлея — Джинса.

Для практических применений удобнее перейти от распределения по частотам к распределению по длинам волн. Для интервала длин волн λ, $\lambda + d\lambda$ имеем, по предыдущему,

$$\rho_\nu\,d\nu = \rho_\lambda\,d\lambda \qquad (83.4)$$

и

$$|d\nu| = \frac{c}{\lambda^2}d\lambda. \qquad (83.5)$$

При помощи этих соотношений получаем из формулы (86.5):

$$\rho_\lambda\,d\lambda = 8\pi kT\lambda^{-4}\,d\lambda. \qquad (86.6)$$

Для поверхностной яркости излучения I_λ находим из (86.6) при помощи соотношения $I_\lambda = \frac{c}{8\pi}\rho_\lambda$

$$I_\lambda\,d\lambda = ckT\lambda^{-4}\,d\lambda. \qquad (86.7)$$

Заметим в заключение, что формулу Рэлея — Джинса в виде распределения по длинам волн (86.6) можно легко получить из соображений размерности. В самом деле, очевидно, что число свободных собственных колебаний $f(\lambda)\,d\lambda$ объема V, относящихся к интервалу длин волн λ, $\lambda + d\lambda$, должно быть пропорционально V и интервалу $d\lambda$

$$f(\lambda)\,d\lambda = C\varphi(\lambda)\,V\,d\lambda,$$

где C — постоянное число. Но так как $f(\lambda)d\lambda$ должно быть

безразмерным числом, а $V\,d\lambda$ имеет размерность $см^4$, то $\varphi(\lambda)$ должна иметь размерность $см^{-4}$. Итак, $\varphi(\lambda) = \lambda^{-4}$ и

$$f(\lambda)\,d\lambda = C\lambda^{-4}V\,d\lambda.$$

Эта формула имеет место для любой сплошной среды и, соответственно, для любой природы волн. Приписывая каждому собственному колебанию, по теореме о равномерном распределении энергии, среднюю энергию kT, получаем для полной энергии объема V

$$CkT\lambda^{-4}V\,d\lambda,$$

а для плотности энергии

$$\rho_\lambda\,d\lambda = CkT\lambda^{-4}\,d\lambda,$$

т. е. выражение, совпадающее с точностью до численного множителя C с формулой Рэлея — Джинса. Этот множитель может быть получен чисто вычислительным путем. Интересно отметить, что в случае, когда объем V заполнен газом, в котором возможны только продольные волны, для C получается 4π; для электромагнитного поля, в котором существуют только поперечные волны, но имеется два независимых типа волн со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, $C = 8\pi$ и, наконец, для твердого тела, где возможны оба вида поперечных волн, а также и продольные — $C = 12\pi$.

Упражнение. Произвести подсчет числа собственных колебаний объема, имеющего форму параллелепипеда с ребрами l_1, l_2, l_3, выражаемыми несоизмеримыми числами (см. примечание на стр. 284). Показать, что и в этом случае для плотности энергии получается формула Рэлея — Джинса

§ 87. «Ультрафиолетовая катастрофа»

Проанализируем теперь формулу Рэлея — Джинса и посмотрим, в какой степени она дает результаты, согласные с экспериментом. Заметим прежде всего, что формула Рэлея — Джинса

$$\rho_\nu\,d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,kT\,d\nu \tag{87.1}$$

удовлетворяет термодинамическому закону Вина $\rho_\nu d\nu = \nu^3 F(\nu/T)\,d\nu$, так как ее можно переписать в виде

$$\rho_\nu\,d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3}\,k\,\frac{T}{\nu}\,d\nu.$$

Несмотря на это, формула Рэлея — Джинса ведет к очевидному абсурду. Действительно, вычислим при помощи (87.1) интегральную плотность излучения

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu\,d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\int_0^\infty \nu^2\,d\nu = \infty!$$

Это означает, что равновесие между материальными телами и излучением могло бы наступить только при бесконечной плотности излучения (см. конец § 80). Другими словами, осцилляторы излучающего тела должны были бы излучать энергию до тех пор, пока их температура не упала бы до абсолютного нуля.

В § 80 мы уже разъяснили, что именно такой результат и должен получаться, если допустить применимость классической механики к микроскопическим излучающим системам. С другой стороны, однако, этот результат самым резким образом противоречит опыту, который показывает, что равновесие между излучением и его материальными центрами возможно при любой температуре и что при этом равновесия, как раз наоборот, плотность энергии излучения очень мала по сравнению с плотностью энергии, заключающейся в материальных телах.

Несмотря на явную ошибочность формулы Рэлея — Джинса, интересно сравнить ее с результатами опыта. Для этого удобнее всего воспользоваться этой формулой в виде (86.6) или (86.7), где дается распределение по длинам волн. Обратившись к рис. 132, на котором приведены экспериментальные кривые распределения энергии в спектре абсолютно черного тела при различных температурах, мы видим, что все эти кривые имеют максимум и круто спадают в сторону коротких длин волн. Напротив, формула Рэлея — Джинса дает монотонное и притом быстрое (λ^{-4}) возрастание в сторону коротких волн. Однако для длинных волн или для высоких температур она хорошо согласуется с экспериментом. Это схематически показано на рис. 134. Так как формула Рэлея — Джинса, опирающаяся на классическую физику, в резком противоречии с опытом, приводит к заключению, что в спектре теплового излучения большая часть энергии приходится на коротковолновую часть спектра, то это положение было названо одним из основоположников квантовой теории П. С. Эренфестом «ультрафиолетовой катастрофой».

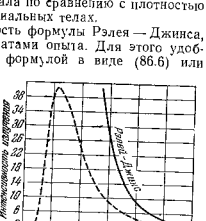


Рис. 134. Сравнение экспериментальной кривой распределения энергии в спектре (пунктирная кривая) с кривой, рассчитанной по формуле Рэлея — Джинса.

Подводя итог сказанному, мы видим, что в теории теплового излучения классическая физика потерпела решительное

поражение. По образному выражению Лоренца, «уравнения классической физики оказались неспособными объяснить, почему угасшая печь не испускает желтых лучей наряду с излучением бо́льших длин волн».

§ 88. Формула Планка

Формула Рэлея — Джинса, как мы видели, основана на самых общих законах классической физики и не требует для своего вывода никаких специальных гипотез. В 1896 г. Вин предложил другую формулу, хорошо согласующуюся с результатами эксперимента как раз в той области спектра, где формула Рэлея — Джинса неприменима*). Эта формула Вина, будучи написана для I_λ, такова:

$$I_\lambda = c_1\lambda^{-5}e^{-c_2/\lambda T}, \tag{88.1}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Для вывода своей формулы Вин должен был сделать некоторые гипотезы о механизме испускания излучения, в соответствии с которыми распределение излучения по частотам должно быть аналогично максвелловскому распределению скоростей между молекулами газа. В отличие от формулы Рэлея — Джинса, формула Вина давала максимум для кривой распределения энергии в спектре.

Однако формула Вина оказалась применимой только для коротковолновой ветви кривой распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. Таким образом, к концу XIX столетия существовали две формулы, каждая из которых соответствовала экспериментальным данным в ограниченном участке спектра, но ни одна из них не описывала всю экспериментальную кривую. Около 1900 г. Планку удалось найти сначала чисто эмпирически формулу, которая хорошо согласовывалась с данными опыта и в двух предельных случаях (для длинных и для коротких волн) переходила соответственно в формулу Рэлея — Джинса либо в формулу Вина. Формула Планка для I_λ такова:

$$I_\lambda = c_1\lambda^{-5}\cdot\frac{1}{e^{c_2/\lambda T}-1}. \tag{88.2}$$

Легко убедиться в том, что эта формула на самом деле представляет собою результат интерполяции между формулами Рэлея — Джинса и Вина. Действительно, для $\lambda T \gg 1$ (длинные волны или высокие температуры) можно разложить в ряд экспоненциальный член в знаменателе формулы Планка,

*) Вин получил свою формулу на основании гипотезы о том, что распределение энергии по частотам аналогично максвелловскому распределению молекул газа по скоростям. Эта идея ранее Вина была высказана русским физиком В. А. Михельсоном.

ограничившись первыми двумя членами разложения:

$$e^{c_2/\lambda T} = 1 + \frac{c_2}{\lambda T} + \ldots$$

В этом случае формула Планка дает

$$I_\lambda = \frac{c_1}{c_2}\lambda^{-4}T,$$

что, очевидно, совпадает с формулой Рэлея — Джинса

$$I_\lambda = ck\lambda^{-4}T. \tag{86.7}$$

Напротив, для случая $\lambda T \ll 1$ (короткие волны или низкие температуры) $c_2/\lambda T \gg 1$ и в знаменателе формулы Планка

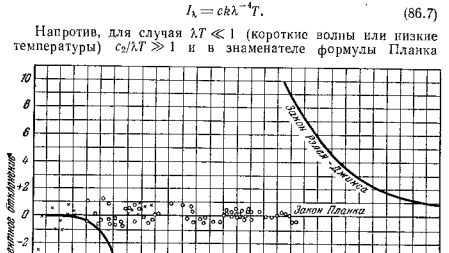


Рис. 135. Экспериментальная проверка формулы Планка.

можно пренебречь 1 по сравнению с экспоненциальным членом. При этом формула Планка непосредственно дает

$$I_\lambda = c_1 e^{-c_2/\lambda T}\cdot\lambda^{-5},$$

т. е. переходит в формулу Вина (88.1).

О степени соответствия между формулой Планка и экспериментальными данными можно судить по рис. 135, где по оси

ординат отложены процентные отклонения. Кружками и крестиками нанесены экспериментальные результаты. Приведенные на том же рисунке кривые, построенные по формулам Вина и Рэлея — Джинса, хорошо иллюстрируют асимптотический характер этих формул.

§ 89. Гипотеза квантов энергии

Формула Планка, как было показано в предыдущем параграфе, решила задачу об отыскании математического выражения закона распределения энергии в спектре абсолютно черного тела. Оказалось, однако, что для вывода этой формулы необходимо сделать гипотезу, коренным образом противоречащую всей системе представлений классической физики, а именно — гипотезу о том, что энергия микроскопических систем (атомы, молекулы) может принимать только определенные, дискретные значения.

При выводе своей формулы Планк схематизировал излучающие материальные центры, рассматривая их как линейные гармонические осцилляторы, несущие электрический заряд, при посредстве которого они могут обмениваться энергией с окружающим электромагнитным полем. Гипотеза, которую Планк положил в основу своего вывода в современной, более точной формулировке, такова: *осцилляторы могут находиться только в некоторых избранных состояниях, в которых их энергия является целым кратным наименьшего количества энергии* ε_0:

$$\varepsilon_0,\ 2\varepsilon_0,\ \ldots,\ n\varepsilon_0,\ \ldots;$$

при излучении или поглощении осцилляторы переходят из одного из этих состояний в другое скачком, минуя промежуточные состояния.

На основании этой гипотезы Планк вывел формулу для объемной спектральной плотности излучения ρ_ν в следующем виде:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\frac{\varepsilon_0}{e^{\varepsilon_0/kT}-1}. \tag{89.1}$$

Но любая правильная формула излучения должна удовлетворять термодинамическому закону Вина $\rho_\nu = \nu^3 F(\nu/T)$. Легко видеть, что для того, чтобы формула (84.1) удовлетворяла этому закону, необходимо положить

$$\varepsilon_0 = h\nu, \tag{89.2}$$

где ν — частота колебаний осциллятора $\left(\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}\right)$, а h — универсальная постоянная, имеющая размерность [энергия × × время]. Механическая величина, имеющая такую размерность, называется *действием*.

Подставляя (89.2) в (89.1), имеем

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{89.3}$$

Это и есть формула Планка в том виде, в каком ею обычно пользуются в теоретической физике.

Из (89.3) следует выражение для спектральной яркости излучения $I_\nu = \frac{c}{8\pi}\rho_\nu$, а именно,

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{89.4}$$

Для того чтобы от формулы (89.4) перейти к формуле для I_λ, которой, как сказано, пользуются в практических применениях, следует воспользоваться обычными соотношениями

$$I_\nu\, d\nu = I_\lambda\, d\lambda,\quad |d\nu| = \frac{c\,d\lambda}{\lambda^2}.$$

Формула (89.4) при этом дает

$$I_\lambda\, d\lambda = \frac{hc^2}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/kT\lambda}-1}\, d\lambda. \tag{89.5}$$

Полагая

$$hc^2 = c_1,\quad \frac{hc}{k} = c_2,$$

приведем формулу (89.4) к виду

$$I_\lambda\, d\lambda = c_1\lambda^{-5}\,\frac{1}{e^{c_2/\lambda T}-1}\, d\lambda, \tag{89.6}$$

совпадающему с формулой (88.2) предыдущего параграфа.

Универсальная постоянная h — постоянная Планка, — как известно, играет в современной физике выдающуюся роль. Ее значение может быть определено экспериментально самыми разнообразными методами. В частности, законы излучения абсолютно черного тела дают

$$h = 6{,}53\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{сек}.$$

Методы более точного определения h будут рассмотрены в главе IX. Здесь мы отметим только, что именно крайне малая величина h (порядка 10^{-27} *эрг·сек*) является причиной того, что прерывность, требуемая законами атомной физики, совершенно не сказывается при изучении макроскопических явлений.

Для случая $h\nu \ll kT$, т. е. для малых частот (длинных волн) или высоких температур, имеем приближенно

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

и формула Планка (89.3) дает

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \tag{87.1}$$

— формулу Рэлея — Джинса для ρ_ν. Для случая же $h\nu \gg kT$, т. е. для высоких частот или низких температур, формула Планка (89.3) приводит к формуле, совпадающей с формулой Вина для ρ_ν:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}. \tag{89.7}$$

Отметим, наконец, что интегральная плотность излучения

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu$$

получается конечной, если для ρ_ν взять формулу Планка (89.3). А именно, вычисление показывает (см. упражнение к этому параграфу), что

$$u = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = 1{,}08 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4.$$

Следовательно, формула Планка устраняет «ультрафиолетовую катастрофу» (см. § 87). Причину этого понять нетрудно. Как мы видели в § 87, расходимость интеграла $\int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu$ в случае, если для ρ_ν берется формула Рэлея — Джинса, обусловлена тем, что эта формула основана на теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Согласно же этой теореме на *каждую* степень свободы приходится одна и та же средняя энергия $\bar{\varepsilon} = kT$. Сопоставим теперь формулы Рэлея — Джинса и Планка для ρ_ν:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Так как, согласно § 86, $8\pi\nu^2/c^3$ есть число степеней свободы излучения с частотами между ν и $\nu + d\nu$, то из правильности формулы Планка следует, что средняя энергия, приходящаяся на одну степень свободы, *не одинакова для стоячих волн с различными частотами*. А именно, из формулы Планка следует, что

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{89.8}$$

Мы видим, таким образом, что $\bar{\varepsilon}$ в этом случае быстро убывает при возрастании ν, чем и объясняется сходимость интеграла $\int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu$. Отметим еще, что принятие формулы (89.8) для средней энергии, приходящейся на одну степень свободы, устраняет также серьезные затруднения в классической теории теплоемкостей, как это показал Эйнштейн.

Из указанных фактов видно, что установление формулы Планка знаменовало глубокий разрыв с классической физикой в силу того, что формула Планка находится в противоречии с теоремой о равномерном распределении энергии. Но эта теорема является неизбежным следствием статистической механики, основанной на классической механике в ее гамильтоновой форме. Таким образом, 1900 г., когда впервые была формулирована гипотеза квантов энергии, был не только первым годом нового столетия в календарном летосчислении, но и началом новой эры в развитии теоретической физики.

Упражнение. Пользуясь формулой Планка для ρ_ν, вычислить интегральную плотность излучения

$$u = \int_0^\infty \rho_\nu \, d\nu$$

и показать, что

$$u = \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right).$$

Быстро сходящийся ряд, стоящий в скобках, равен 1,08, так что

$$u = 1{,}08 \frac{48\pi k^4}{c^3 h^3} T^4$$

(вывод закона Стефана — Больцмана из формулы Планка). [*Указание*. Сначала надо убедиться в том, что

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = e^{-h\nu/kT} + e^{-2h\nu/kT} + \ldots + e^{-nh\nu/kT} + \ldots$$

После такого преобразования интегрирование выполняется легко.]

ГЛАВА VII

УРОВНИ ЭНЕРГИИ АТОМОВ

§ 90. Планетарная модель атома и квантовые постулаты Бора

В главе III мы видели, что атом построен из тяжелого положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. По классической механике такая система может находиться в равновесии лишь при условии, если электроны будут обращаться вокруг ядра по каким-то орбитам. Однако, с точки зрения *классической электродинамики*, такой атом был бы все же неустойчив, так как при движении с ускорением электроны должны были бы излучать энергию в виде электромагнитных волн (§ 75) и, следовательно, постепенно падать к ядру. Вместе с тем и частота обращения при этих условиях должна была бы непрерывно меняться, и мы получили бы сплошной спектр вместо резких спектральных линий. Тот факт, что этого на самом деле не наблюдается и атомы испускают резкие спектральные линии, указывает на их замечательную устойчивость, противоречащую классической электродинамике.

В предыдущей главе мы видели, что постулат о существовании устойчивых стационарных состояний осцилляторов является необходимой предпосылкой для вывода правильной формулы излучения абсолютно черного тела. Нильсу Бору (1913 г.) принадлежит заслуга отчетливой формулировки этого положения и обобщения его на *любые атомные системы*. Тем самым впервые с полной ясностью была показана неприменимость классической физики к внутриатомным движениям. Идея о квантах, высказанная Планком в применении к обмену энергии между полем излучения и линейными осцилляторами, приобрела универсальное значение как выражение наиболее характерной особенности процессов внутриатомного мира.

В основу развитой им квантовой теории строения атома Бор положил следующие два постулата:

1. Атомы и атомные системы могут длительно пребывать только в определенных состояниях — стационарных состояниях, — в которых, несмотря на происходящие в них движения заряженных частиц, они не излучают и не поглощают энергию. В этих состояниях атомные системы обладают энергиями, обра-

зующими *дискретный* ряд: $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Состояния эти характеризуются своей устойчивостью; всякое изменение энергии в результате поглощения или испускания электромагнитного излучения или в результате соударения может происходить только при полном переходе (скачком) из одного из этих состояний в другое.

II. При переходе из одного стационарного состояния в другое атомы испускают или поглощают излучение только строго определенной частоты. Излучение, испускаемое или поглощаемое при переходе из состояния E_m в состояние E_n, монохроматично, и его частота ν определяется из условия

$$h\nu = E_m - E_n \tag{90.1}$$

(условие частот Бора).

Оба эти постулата резко противоречат требованиям классической электродинамики, так как по первому постулату атомы не излучают, несмотря на то, что образующие их электроны совершают ускоренное движение (например, обращение по замкнутым орбитам), а по второму — испускаемые частоты не имеют ничего общего с частотами периодических движений электронов.

§ 91. Опыты Франка и Герца

Формулированные в предыдущем параграфе квантовые постулаты Бора нашли наиболее непосредственное экспериментальное подтверждение в опытах Дж. Франка и Густава Герца, к описанию этих опытов мы и переходим.

Идея этих опытов заключается в следующем: атомы или молекулы более или менее разреженного газа обстреливаются медленными электронами; при этом исследуется распределение скоростей электронов до и после соударений. Если соударения происходят упруго, то распределение скоростей в результате соударений не изменяется, и наоборот, при неупругих соударениях часть электронов теряет свою энергию, отдавая ее атомам, с которыми они испытали соударения, и распределение скоростей меняется.

В результате опытов Франка и Герца оказалось, что:

1. При скоростях электронов, меньших некоторой критической скорости, соударение происходит вполне упруго, т. е. электрон не передает атому своей энергии, но отскакивает от него, изменяя лишь направление своей скорости.

2. При скоростях, достигающих критической скорости, удар происходит неупруго, т. е. электрон теряет свою энергию и передает ее атому, который при этом переходит в другое стационарное состояние, характеризуемое большей энергией.

Таким образом, атом или вообще не воспринимает энергию (упругий удар), а если воспринимает ее, то только в количествах, равных разности энергий в двух стационарных состояниях.

Прежде чем переходить к более детальному описанию этих опытов и их результатов, рассмотрим некоторые вопросы, связанные с осуществлением этих опытов. Основные требования, которым должна удовлетворять экспериментальная установка, предназначенная для изучения соударений медленных электронов с атомами, заключаются в следующем:

1. Источник электронов должен давать достаточно большое число медленных электронов с определенным начальным распределением скоростей.

2. Этим электронам можно сообщить любую, заранее известную скорость путем воздействия приложенного извне ускоряющего потенциала.

3. Ускоренные электроны должны испытывать соударения с исследуемыми атомами или молекулами в определенном месте аппарата.

Для получения пучков медленных электронов, удовлетворяющих указанным требованиям, пользуются горячими катодами. Электроны, в изобилии получаемые от этих катодов, ускоряются приложенным к катоду потенциалом V, который может меняться по произволу. Скорость v (в *см/сек*), которую приобретает неподвижный электрон под действием ускоряющего потенциала V вольт, находится из соотношения

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{eV}{300},$$

откуда, полагая

$$\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^7 \text{СГСМ} \cdot г^{-1} = 5{,}27 \cdot 10^{17} \text{СГСЭ} \cdot г^{-1},$$

получаем

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} \frac{V}{300}} = 5{,}93 \cdot 10^7 \sqrt{V} \frac{см}{сек}.$$

Таким образом, при ускоряющем потенциале в 1 *в* скорость электронов составляет около $6 \cdot 10^7$ *см/сек*. Отсюда видно, что термин «медленные электроны» имеет весьма относительное значение.

Если исследовать зависимость силы тока от ускоряющего напряжения и затем построить график, откладывая по оси абсцисс ускоряющий потенциал, а по оси ординат — соответствующую силу тока, то получается кривая (так называемая вольт-амперная характеристика), типичный вид которой изображен

на рис. 136. У этой кривой обращают на себя внимание следующие характерные черты:

1) При некотором потенциале сила тока становится независимой от напряжения; это — «ток насыщения», возникновение которого объясняется тем, что все электроны, освобождаемые в единицу времени при данной температуре накала из катода, переносятся к аноду.

2) При ускоряющем потенциале, равном нулю, ток не только не падает до нуля, но продолжает оставаться независимым от напряжения также и при потенциалах обратного знака, т. е. при тормозящих потенциалах, вплоть до некоторого потенциала $-K$. При дальнейшем увеличении тормозящего потенциала ток убывает, постепенно спадая к нулю.

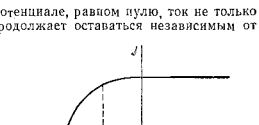


Рис. 136. Вольт-амперная характеристика трубки с горячим катодом.

Для объяснения этих особенностей следует прежде всего принять во внимание, что катод и анод в трубке с горячим катодом всегда бывают сделаны из различных металлов. Поэтому между катодом и анодом в отсутствии внешнего напряжения обязательно имеется *контактная* разность потенциалов. Если теперь внешний ускоряющий потенциал становится равным нулю, то электроны еще подгоняются этой контактной разностью потенциалов. Для компенсации ее необходимо приложить некоторый *тормозящий* потенциал K.

Когда этот потенциал приложен, то сила тока все еще остается отличной от нуля потому, что электроны выходят из катода не с нулевой скоростью, но обладают конечными скоростями, распределенными по закону Максвелла. Только тогда, когда задерживающий потенциал достигает такой величины, что его не могут преодолеть самые быстрые электроны, сила тока становится равной нулю.

Идея опытов, излагаемых в следующих параграфах, как уже было указано, состоит в том, что электронам, получившим определенное ускорение, предоставляется возможность испытывать соударения с атомами газов, вводимых при небольших давлениях в трубку. Для того чтобы установить, каков характер этих соударений, — упругие они или неупругие, очень часто бывает необходимо исследовать после соударений распределение

скоростей между электронами. Это осуществляется при помощи метода задерживающего потенциала.

Пусть D — горячий катод (рис. 137), к которому приложен ускоряющий потенциал V. Ускоренные электроны направляются к пластинке A, перед которой расположена сетка N. Если зарядить эту сетку до потенциала $+V_1$, то в пространстве между N и A электроны будут двигаться в тормозящем поле. Только те из них, которые обладают кинетической энергией, достаточной для преодоления тормозящего поля, достигнут пластинки A. Последняя через гальванометр G соединена с землей. Таким образом, электроны, достигающие A, дают ток, отмечаемый гальванометром. Следует иметь в виду, что тормозящий потенциал P, препятствующий попаданию электрона на пластинку A, определяется не полной скоростью v электрона, но ее составляющей v_n, нормальной к A (рис. 137): достигнуть A могут только те электроны, для которых имеет место соотношение

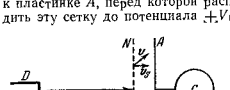


Рис. 137. Схема метода задерживающего потенциала.

$$\frac{1}{2} m v_n^2 \geqslant \frac{1}{300} eP. \quad (91.1)$$

Если постепенно увеличивать P и одновременно измерять ток гальванометра G, то в результате получается некоторая вольтамперная характеристика I (рис. 138). Эта вольтамперная характеристика позволяет *вычислить* распределение скоростей между электронами следующим образом. Если тормозящий потенциал равен P, то соответствующая сила тока J_P пропорциональна числу электронов, обладающих энергией, равной или большей P электрон-вольт. При тормозящем потенциале $P + \Delta P$ сила тока $J_P - \Delta J_P$ пропорциональна числу электронов с энергией, большей или равной $P + \Delta P$ электронвольт. Таким образом, величина $(\Delta J_P/\Delta P)\Delta P$ есть мера числа электронов, прихо-

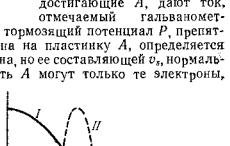


Рис. 138. Вольтамперная характеристика, снятая по методу задерживающего потенциала.

дящихся на интервал энергии между P и $P + \Delta P$. Поэтому, если представить количество электронов, обладающих энергиями между P и $P + dP$, в виде $f(P)dP$, где $f(P)$ есть функция распределения электронов по энергиям, то очевидно, что

$$f(P) = dI/dP.$$

Из этого следует, что для нахождения кривой распределения энергии (скоростей) между электронами необходимо произвести графическое дифференцирование вольтамперной характеристики I (рис. 138).

Кривая, полученная в результате дифференцирования вольтамперной характеристики I, показана пунктиром (кривая II, рис. 138).

§ 92. Упругие соударения

Франк и Герц показали прежде всего, что если энергия электронов не превосходит некоторой критической величины, то соударения между электронами и атомами происходят вполне упруго. Это значит, что электрон в результате соударения изменяет только *направление* скорости, не теряя своей энергии. Для доказательства этого было поставлено несколько опытов, из которых мы опишем только один.

В центре металлического диска A (рис. 139) имеется отверстие, в котором помещается нить накала D. Диск подвешен на нитях в пространстве, где может создаваться любое давление газа. При помощи специального приспособления, действующего через шлиф, диск может быть поднят или опущен без нарушения вакуума. В пространстве между вторым диском B и сеткой C может быть создано задерживающее поле, при помощи которого измеряется распределение скоростей между электронами. Давление газа выбирается таким, чтобы в пространстве между сеткой C и воспринимающей пластинкой B электроны по возможности не испытывали соударений. На рис. 140 представлено распределение энергии электронов в гелии при давлении 1,3 *мм* и при ускоряющем потенциале 18 *в*. Кривая I измерена при расстоянии AC, равном 4 *мм*, кривая II — при расстоянии 18 *мм*. Несмотря на то, что электроны во втором случае испытывают неизмеримо большее число соударений, чем в первом, обе кривые почти точно

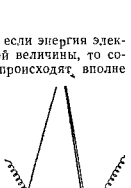


Рис. 139.

совпадают. Отсюда следует, что удары между электронами с энергией в 18 *эв* и атомами гелия происходят еще вполне упруго.

Пунктирная кривая *III* на рис. 140 есть теоретическая кривая, рассчитанная в предположении, что вследствие соударений скорости электронов меняют свое направление так, что электроны, проходящие сквозь отверстия сетки *C*, имеют всевозможные направления в пределах полусферы. Как видно, эта кривая близко подходит к экспериментальным кривым.

Рис. 140.

Характер кривых требует дополнительного разъяснения.

Обращает на себя внимание тот факт, что функция распределения электронов по энергиям принимает наибольшее значение

Рис. 141.

при энергии, равной нулю. Причина этого — чисто геометрическая. Теоретическая кривая *III*, как уже сказано, построена в предположении, что электроны в результате соударений, не меняя своей скорости *по величине*, имеют в пространстве между сеткой *C* и анодом всевозможные направления. Далее, необходимо принять во внимание, что в методе задерживающего потенциала при плоских электродах имеет значение только *нормальная* составляющая скорости (см. § 91). При совершенно равномерном распределении скоростей по направлению число электронов, попадающих внутрь телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin\alpha\, d\alpha$ (рис. 141), будет

$$dN = N_0\, d\Omega = 2\pi N_0 \sin\alpha\, d\alpha.$$

Из этого следует, что наибольшее число электронов приходится на угол α, равный $\pi/2$. Но для таких электронов нормальная составляющая скорости равна нулю. Это и объясняет подъем кривой при переходе к нулевой энергии. Небольшой максимум, имеющийся на экспериментальных кривых при энергии, не-

сколько меньше 18 *эв*, несомненно, обусловлен тем, что распределение по направлениям электронов, проходящих через сетку, не вполне хаотическое: заметная доля электронов сохраняет направление скорости, близкое к нормали.

§ 93. Неупругие соударения. Критические потенциалы

Для доказательства существования неупругих соударений Франком и Герцем была использована следующая установка. Электроны от нити накала *D* (рис. 137) ускорялись отрицательным потенциалом, наложенным на нить. В пространстве между *D* и *N* эти электроны испытывали многочисленные соударения и попадали в конце концов на воспринимающую пластинку *A*. Гальванометр *G*, соединенный с *A*, измерял ток пластинки. Сетка *N*, заряженная слабо положительно относительно *A* (в большинстве случаев до потенциала +0,5 *в*), помещалась непосредственно перед пластинкой *A*. Назначение сетки заключалось в том, чтобы вылавливать электроны, почти полностью потерявшие свою энергию вследствие неупругих соударений. Опыт производился в парах ртути при относительно высоком давлении (около 1 *мм*) и состоял в измерении тока пластинки *A* в зависимости от ускоряющего потенциала, наложенного на нить *D*.

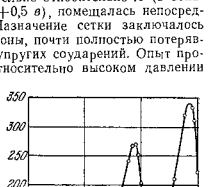


Рис. 142.

При увеличении ускоряющего потенциала от нуля ток первоначально возрастал (рис. 142), причем кривая тока имела обычный вид вольтамперных характеристик термоэлектронных приборов. Но при потенциале около 4,1 *в* ток внезапно резко падал, а затем вновь начинал возрастать до потенциала 9,0 *в*, при котором вновь обнаруживалось резкое падение тока и новое его возрастание до потенциала 13,9 *в*. Таким образом, вся кривая представляла собою ряд острых максимумов, отстоящих друг от друга на расстоянии 4,9 *в*. Тот факт, что расстояние между двумя соседними максимумами всегда составляло (с точностью до 0,1 *в*) 4,9 *в*, а первый максимум обнаруживался у 4,1 *в*, легко объясняется тем, что к наложенному извне ускоряющему потенциалу прибавляется контактная разность

потенциалов, которая как бы смещает всю кривую влево, не изменяя расстояния между максимумами.

Истолкование максимумов кривой на основании сказанного в § 91 не представляет затруднений. До тех пор, пока энергия электрона не достигнет 4,9 *в*, он испытывает с атомами ртути упругие соударения, и ток возрастает с увеличением потенциала по обычному закону. При потенциале 4,9 *в* удар становится неупругим, электрон отдает при соударении атому ртути всю свою энергию. Эти электроны не попадут на пластинку A, так как они будут выловлены обратно сеткой N, заряженной до $+0{,}5$ *в*, и ток пластинки резко упадет.

Если энергия электронов заметно превосходит 4,9 *в*, то такие электроны, потеряв часть своей энергии при неупругом соударении, сохраняют достаточный избыток энергии и потому, несмотря на наличие положительно заряженной сетки, достигают пластинки A, — ток вновь начинает возрастать.

Заметим, что, какова бы ни была энергия электронов, испытывающих первое неупругое соударение, они все придут к пластинке A с одной и той же энергией. Представим себе для большей ясности, что потенциал катода равен нулю, потенциал пластинки A равен $+V_p$, критический потенциал равен V_A (в данном случае $V_A = 4{,}9$ *в*), и положим, что сетка N удалена. Падение потенциала V_p происходит на всем протяжении от D до A. Пусть электрон испытывает неупругое соударение в месте, где потенциал равен V_x. Дойдя до этого места, он накопит энергию eV_x, а при неупругом соударении отдаст энергию eV_A. Таким образом, после соударения он будет обладать энергией $e(V_x - V_A)$. Разность потенциалов на остающемся пути до пластинки A будет $V_p - V_x$; на этом пути электрон накопит еще энергию $e(V_p - V_x)$ и, следовательно, придя к пластинке A, будет обладать энергией

$$e(V_x - V_A) + e(V_p - V_x) = e(V_p - V_A).$$

Как мы видим, эта энергия совершенно не зависит от того места, где произошло первое неупругое соударение. Если ускоряющий потенциал V_p достаточно велик, так что $V_p - V_A > 4{,}9$ *в*, то на остающемся пути электрон может испытать еще одно или два (в зависимости от величины $V_p - V_A$) неупругих соударения, и в этом заключается причина периодического повторения максимумов.

Мы видим, таким образом, что энергия в 4,9 *эв* имеет особое значение для атомов ртути. Меньшую энергию они воспринять не могут, так как при меньшей энергии бомбардирующих их электронов удар происходит вполне упруго; энергию же в 4,9 *эв* они воспринимают полностью. Но это и означает в согласии с первым постулатом Бора, что атом ртути может обладать не

любыми запасами энергии, а только избранными. Если E_1 будет запас энергии «невозбужденного» атома ртути, то следующее возможное значение энергии атома будет $E_1 + 4{,}9$ *эв*. Ускоряющий потенциал 4,9 *в* называется «первым критическим потенциалом» или «резонансным потенциалом» атома ртути. Такие же резонансные потенциалы найдены и для других атомов. Например, для калия резонансный потенциал равен 1,63 *в*, для натрия — 2,12 *в*, для гелия — 21 *в* и т. д.

Само собою разумеется, что, кроме энергии, соответствующей первому критическому потенциалу, атомы могут обладать и другими, более высокими ступенями энергии возбуждения. Эти более высокие ступени возбуждения могут быть также найдены при помощи метода электронных соударений. Однако экспериментальная методика для этой цели должна быть видоизменена. К этому вопросу мы вернемся в следующих параграфах.

§ 94. Усовершенствование экспериментальной методики

Описанный метод при многих преимуществах обладает существенными недостатками. В частности, он не дает возможности разделить тесно лежащие максимумы, а между тем случаи, когда имеются близко расположенные ступени возбуждения, встречаются нередко. Расчет показывает, что форма кривых существенно зависит от величины падения потенциала на протяжении одного свободного пробега λ, т. е. от величины $\lambda \frac{dV}{dx}$. Чем меньше эта величина, чем острее максимумы, тем точнее определяются критические потенциалы и тем отчетливее разрешаются близко лежащие ступени возбуждения. Если, однако, выбрать условия, в которых $\lambda \frac{dV}{dx}$ достаточно мало, то становится невозможным определение более высоких ступеней возбуждения. Для избежания этого недостатка Франк и Герц видоизменили методику так, что накопление энергии электроном происходило в одной части прибора, а столкновение — в другой. С этой целью оказалось достаточным ввести вторую «сетку» N_1 (рис. 143), расположенную от нити накала D на расстоянии, малом по сравнению со средней длиной свободного пути электрона. В таком случае электроны, получившие всю свою энергию на протяжении $D - N_1$, попадают в свободное от поля пространство R между двумя

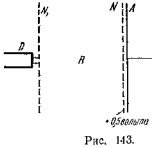


Рис. 143.

металлическими сетками и там испытывают многочисленные соударения с атомами газа. При выходе электронов из этого пространства через отверстия сетки N те из них, которые потеряли свою энергию, вновь вылавливаются этой сеткой, заряженной до потенциала $+0{,}5$ *в*, и повторяется картина, описанная в предыдущем параграфе.

Наиболее изящное видоизменение этого метода было предложено Герцем, осуществившим следующую схему (рис. 144).

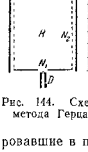


Рис. 144. Схема метода Герца.

Электроны от нити накала D ускорялись в пространство DN_1 и сквозь отверстия сетки N_1 попадали в свободное от поля пространство R, окруженное цилиндрической сеткой N_2. После многочисленных соударений эти электроны диффундировали через отверстия сетки N_2 в пространство между N_2 и сплошным металлическим цилиндром P. При помощи гальванометра ток цилиндра измерялся дважды: в отсутствие поля между N_2 и P и при задерживающем потенциале в $+0{,}2$ *в*. В первом случае на P попадали все электроны, диффундировавшие в пространство N_2P, во втором — «отсеивались» электроны, потерявшие энергию вследствие неупругих соударений. Разность обоих значений тока, деленная на величину первичного тока, очевидно, должна давать максимум при критическом значении ускоряющего потенциала, так как в этом случае значительное количество электронов теряет свою энергию и ток при наличии задерживающего потенциала становится весьма малым. При помощи этого метода оказалось возможным разделять максимумы, отстоящие на доли вольта, и обнаруживать слабо выраженные максимумы.

§ 95. Одновременное определение всех ступеней возбуждения

Мы уже упоминали, что описанные методы можно применить и для определения высших ступеней энергии. С этой целью необходимо выбрать такие условия опыта, чтобы давление газа было возможно меньше. Это существенно потому, что при высоком давлении число соударений электрона с атомами газа настолько велико, что электрону достаточно набрать энергию, равную или немного превосходящую первый критический потенциал, чтобы вероятность ее передачи атому сделалась весьма значительной. При достаточно низком давлении и достаточно высоком ускоряющем потенциале открывается возможность возбуждения и до более высоких стационарных состояний.

Однако непосредственно получаемые из опыта значения критических потенциалов еще не дают истинных значений ступеней

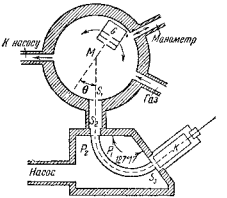


Рис. 145. Схема метода определения всех ступеней возбуждения.

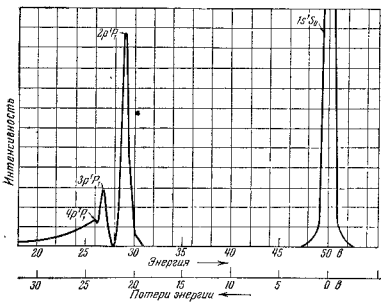


Рис. 146. Спектр скоростей электронов с первоначальной энергией 50 *эв* после соударений с атомами гелия.

энергии, так как возможность двукратной или вообще многократной отдачи энергии все еще не исключается. Это ясно видно из следующего примера. Непосредственными наблюдениями в парах ртути получаются следующие значения критических потенциалов 4,9; 9,8; 11,2; 13,5; 14,7; 16; 17,6; 19,3; 20,2; 21,2 *в*. В действительности же все эти потенциалы являются комбинациями двух основных: $a = 4{,}9$ *в* и $b = 6{,}7$ *в*, причем второй отдельно вовсе не наблюдается. В самом деле, легко видеть, что $9{,}8 = 2a$; $11{,}2 \approx a + b$; $13{,}5 = 2b$; $17{,}6 \approx a + 2b$; $21{,}2 = 3a + b$ и т. д. Таким образом, интерпретация получающихся максимумов далеко не проста.

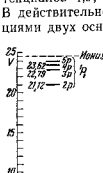


Рис. 147. Схема уровней гелия.

Значительно нагляднее те же высшие уровни энергии могут быть определены при помощи метода, предложенного Юзом, Рожанским и Мак-Милланом. Идея опыта состоит в следующем: строго однородный пучок электронов с энергией, превосходящей наиболее высокую ступень возбуждения изучаемых атомов, пускается в весьма разреженный газ. При неупругих соударениях различные электроны теряют части своей энергии, отвечающие возможным ступеням возбуждения атомов. Так как газ сильно разрежен, то вероятность повторных соударений весьма мала. Если теперь разложить в спектр скоростей пучок электронов, испытавших соударения, то этот спектр сразу даст все происходящие потери энергии, а вместе с тем и все возможные ступени энергии. Самый опыт осуществлялся следующим образом. Пучок электронов с энергией в 50 *эв* получался при помощи «электронной пушки» G (рис. 145). Этот пучок направлялся по диаметру металлического цилиндра, заключавшего гелий при очень высоком разрежении. Через щели S_1 и S_2 могли проникать только те электроны, которые испытали соударение в центре M цилиндра и были при этом отклонены в направлении θ. Две цилиндрически изогнутые пластинки P_1 и P_2, в пространство между которыми попадали далее электроны, представляли собой «фильтр» скоростей (см. § 9); пройдя через щель S_3, электроны попадали в фарадеев цилиндр K, заряд которого можно было измерять при помощи электрометра. Так как при определенной разности потенциалов на фильтре P_1P_2 сквозь него могли проходить электроны только строго определенной скорости, то, изменяя напряженность поля в пространстве P_1P_2, можно было непосредственно найти распределение по энергиям электронов, рассеянных под углом θ. Изменение угла θ производилось с помощью

перемещения электронной пушки G в направлениях, указанных стрелками на рис. 145.

Полученный таким путем энергетический спектр электронов с начальной энергией в 50 *эв* после соударений с атомами гелия представлен на рис. 146. Как видно, в этом спектре, помимо максимума, соответствующего начальной энергии электронов 50 *эв*, имеются максимумы у 28,8; 27,2; 26,38 *эв*. Из этого следует, что при неупругих соударениях электронов с атомами гелия электроны могут терять только строго определенные порции энергии, а именно: $50 - 28{,}2 = 21{,}2$; $50 - 27{,}2 = 22{,}8$; $50 - 26{,}4 = 23{,}6$ *эв*.

Если условно принять за нуль энергию атомов гелия до соударения (нормальное состояние) и изображать возможные энергетические состояния горизонтальными прямыми, расположенными на соответствующей высоте, то получится схема «уровней энергии» атома гелия, приведенная на рис. 147. Энергии различных уровней, показанные на этой схеме, вычислены из спектроскопических данных. Как видно, совпадения с цифрами, полученными из опытов с соударениями, вполне удовлетворительны. Таким образом, эти опыты можно рассматривать как исключительно ясное экспериментальное подтверждение правильности первого постулата Бора.

§ 96. Определение ионизационных потенциалов

Все описанные методы, как уже было указано, позволяют находить *разности* значений энергии в различных стационарных состояниях. Например, мы можем сказать, что для атома ртути разность $E_2 - E_1$ *равна* 4,9 *эв*. Однако самые значения энергий $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ этими методами найдены быть не могут. Для того чтобы найти эти значения, очевидно, достаточно определить, какую энергию надо затратить, чтобы от атома, находящегося в определенном энергетическом состоянии, полностью отделить электрон. Другими словами, задача о нахождении абсолютных значений энергии $E_1, \ldots, E_n$ совпадает с задачей об определении потенциалов *ионизации* в различных энергетических состояниях.

Для определения потенциалов ионизации было предложено множество методов. Мы опишем лишь метод Герца, отличающийся особенной простотой и точностью. Небольшое добавление к описанной в § 94 схеме Герца позволяет находить при помощи того же прибора и потенциалы ионизации. Добавление это заключается во второй нити накала G (рис. 148), расположенной внутри пространства R. Если соединить сетку N_2 с цилиндром P и задать разность потенциалов между G и N_2, то гальванометр

покажет термоэлектронный ток между G и N_2. При увеличении тока накала нити G термоэлектронный ток будет возрастать, однако, лишь до определенного предела, после которого возрастание прекратится. Это объясняется тем, что при сильных токах накала в пространстве вокруг нити G образуется пространственный заряд, препятствующий дальнейшему выходу электронов из нити.

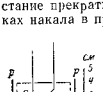


Рис. 148.

Представим себе теперь, что в пространство R попадают электроны от катода G, ускоряемые соответствующими потенциалами. Если энергия этих электронов достаточна для того, чтобы ионизовать атомы газа в R, то при каждом акте ионизации появляются тяжелые (по сравнению с электронами), медленно движущиеся положительные ионы, которые компенсируют часть пространственного заряда. Вследствие этого при появлении таких ионов термоэлектронный ток между G и N_2 резко возрастает.

Наблюдая, при каком ускоряющем потенциале между D и N_1 начинается это возрастание тока, можно определить потенциал ионизации. На рис. 149 приведена для примера кривая, снятая в неоне; резкое возрастание тока около 21*в* сразу бросается в глаза. Таким путем найдены ионизационные потенциалы для большего числа атомов периодической системы (см. таблицу X).

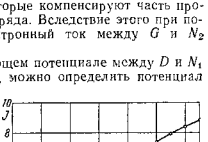


Рис. 149.

Ионизационный потенциал является типичным периферическим свойством атома, поскольку речь идет об отрыве *внешних* электронов. Как и все остальные периферические свойства, ионизационные потенциалы обнаруживают периодическую зависимость от атомного номера (рис. 150). Из рис. 150 видно, что в максимумах кривой располагаются благородные газы, которые характеризуются инертностью и в химическом отношении. Наоборот, щелочные металлы (Li, Na, K, Rb, Cs), одновалентные и в высшей степени способные к химическим реакциям, обладают минимальными ионизационными потенциалами.

До сих пор мы имели в виду только *первые* ионизационные потенциалы, т. е. энергии освобождения одного электрона из нейтрального атома. Интерес представляют также работы осво-

Таблица X

Ионизационные потенциалы элементов

Атомный номер	Элемент	Первый ионизац. потенциал в электрон-вольтах	Атомный номер	Элемент	Первый ионизац. потенциал в электрон-вольтах
1	H	13,539	14	Si	7,39
2	He	24,45	15	P	10,3
3	Li	5,371	16	S	10,31
4	Be	9,50	17	Cl	12,96
5	B	8,34	18	Ar	15,70
6	C	11,217	19	K	4,32
7	N	14,474	20	Ca	6,09
8	O	13,565	21	Sc	6,57
9	F	18,6	22	Ti	6,81
10	Ne	21,482	23	V	6,76
11	Na	5,116	24	Cr	6,74
12	Mg	7,61	25	Mn	7,40
13	Al	5,96	26	Fe	7,83

бождения второго, третьего и т. д. электронов. Установки описанного типа позволяют заключить о появлении положительных

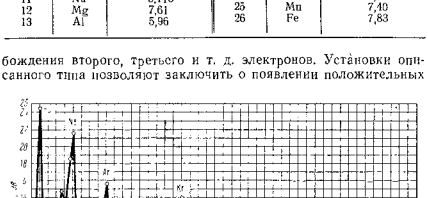


Рис. 150 Первый ионизационный потенциал как функция атомного номера.

ионов (начало ионизации), но не дают возможности судить о природе ионов, в частности о том, появляются ли ионы с одним или несколькими зарядами.

Для изучения последовательных стадий ионизации и определения природы положительных ионов пользуются масс-спектрометрическими методами (см. § 15). Так как масс-спектрометр определяет *отношения* заряда к массе E/M, то ион с n зарядами

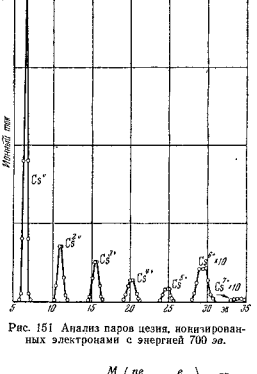


Рис. 151 Анализ паров цезия, ионизированных электронами с энергией 700 *эв*.

$E = ne$ соответствует массе $\frac{M}{n}\left(\frac{ne}{M} = \frac{e}{M/n}\right)$. Кривая, приведенная на рис. 151, представляет собой масс-спектр ионов, возникающих в парах цезия при бомбардировке их электронами с энергией в 700 *эв*. Семь максимумов, видных на рисунке, соответствуют семи последовательным стадиям ионизации атома цезия. Значения соответствующих потенциалов ионизации таковы:

Ион	Cs^{+}	Cs^{2+}	Cs^{3+}	Cs^{4+}	Cs^{5+}	Cs^{6+}	Cs^{7+}
Потенциал ионизации, *эв*	3,9	27,4	62	113	171	275	410

§ 97. Излучение возбужденных атомов

Атом, получивший избыток энергии при соударении с электроном, сохраняет его в течение некоторого времени, а затем под влиянием возмущений отдает обратно, вновь переходя в нормальное состояние. Если давление газа достаточно мало, то наиболее вероятный способ этого обратного перехода заключается в испускании энергии в виде света. Отсюда открывается новый путь для экспериментальной проверки постулатов Бора. Рассмотрим, например, атом ртути. Его первый критический потенциал равен 4,9 *эв*, т. е.

$$E_2 - E_1 = 4{,}9 \text{ эв}.$$

По второму постулату Бора вся эта энергия при переходе в нормальное состояние должна испускаться в виде одного кванта монохроматического света:

$$E_2 - E_1 = h\nu = hc/\lambda.$$

Отсюда получим для λ

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{4{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} \approx 2520 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 2520 \text{Å}.$$

Итак, если теория верна, то пары ртути, подвергаемые бомбардировке электронами с энергией 4,9 *эв*, должны давать спектр, состоящий лишь из одной ультрафиолетовой линии $\lambda \approx 2520$ Å. Опыт обнаруживает действительно одну ультрафиолетовую линию $\lambda \approx 2537$ Å.

В том, что эта линия возникает при переходе из *первого* возбужденного состояния в нормальное, можно убедиться из опытов с ее оптическим возбуждением. Если освещать разреженные пары ртути монохроматическим светом с длиной волны $\lambda \approx 2537$ Å, то, по предыдущему, поглощающие атомы должны переходить в состояние с энергией в 4,9 *эв* и при обратном переходе в нормальное состояние — излучать только одну линию с *той же самой длиной волны*, если между E_1 и E_2 нет никаких промежуточных уровней. Опыт подтверждает и этот вывод. Такие спектральные линии называются *резонансными*, так как их длина волны в точности равна поглощаемой длине волны при оптическом возбуждении. Очевидно, что, определяя длину волны резонансных линий, можно вычислить и первый критический потенциал.

Аналогичная картина имеет место и в других одноатомных газах или парах. На рис. 152 в качестве примера приведен

спектр паров магния, возбуждаемых ударами электронов при ускоряющем потенциале 3,2 *в*. Как видно, при потенциале в 3,2 *в*

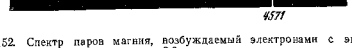


Рис. 152. Спектр паров магния, возбуждаемый электронами с энергией 3,2 *эв*.

спектр состоит из одной линии 4571 Å (резонансный потенциал 2,65 *в*). Из рис. 153 видно, что при возбуждающем потенциале в 6,5 *в* возникают уже две линии: прежняя линия 4571 Å и новая

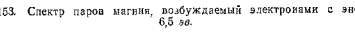


Рис. 153. Спектр паров магния, возбуждаемый электронами с энергией 6,5 *эв*.

с длиной волны, равной 2852 Å. При еще более высоком потенциале (10 *в*) может быть получен полный спектр паров магния.

§ 98. Спонтанное испускание

В предыдущем параграфе мы уже перешли от доказательств существования уровней энергии и способов их непосредственного определения к рассмотрению переходов между различными уровнями. Ввиду важности этих процессов перехода нам необходимо теперь глубже проанализировать их с теоретической точки зрения. Этот анализ позволит выяснить некоторые своеобразные особенности квантовых явлений, а в качестве непосредственного применения результатов и методов рассмотрения мы дадим простой и вместе с тем безупречный вывод формулы Планка, принадлежащий Эйнштейну.

Итак, рассмотрим атом, находящийся в свободном пространстве и не подверженный влияниям извне. Атом может находиться в различных квантовых состояниях, которым соответствует дискретный ряд уровней энергии. Для простоты мы рассмотрим только два из этих состояний с энергиями E_1 и E_2 (рис. 154). Эти состояния мы будем коротко называть: состояние 1 и состояние 2.

Если атом в некоторый момент t находится в возбужденном состоянии 2, то в следующий за этим интервал времени dt он может либо остаться в том же состоянии, либо перейти в нижнее состояние 1, отдавая избыток энергии $E_2 - E_1$ в виде излучения.

В этом и следующих параграфах мы убедимся, что переходы с испусканием могут происходить либо независимо от действия внешнего поля, в котором находится возбужденный атом, либо под действием этого поля. В первом случае переходы называются *спонтанными*, т. е. «самопроизвольными», во втором — *вынужденными*.

Мы начнем с рассмотрения спонтанных переходов и будем рассматривать их статистически. Это означает, что мы не можем *с достоверностью* предсказать, произойдет или не произойдет *в данном атоме* переход в течение 1 сек., следующей за моментом t, но можем только указать его *вероятность*. Назовем эту вероятность спонтанного перехода $2 \to 1$ в единицу времени A_{21}. Поскольку спонтанный переход есть процесс случайный, предполагается, что A_{21} не зависит от времени.

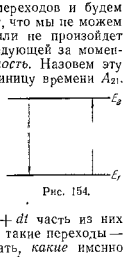


Рис. 154.

Пусть теперь мы имеем совокупность очень большого числа атомов, которые, однако, образуют настолько сильно разреженный газ, что взаимодействием между атомами можно пренебречь. Пусть N_2 из числа этих атомов в момент t находятся в состоянии 2. В промежуток времени между t и $t + dt$ часть из них *спонтанно* перейдет в состояние 1. Поскольку такие переходы — явление случайное, то мы не можем указать, *какие* именно атомы совершат переход, но, зная вероятность A_{21}, можем предсказать, *сколько* атомов в среднем совершит переход. Именно, число переходов dZ_{21} за промежуток времени dt будет, очевидно, пропорционально числу атомов N_2, находящихся в состоянии 2,

$$dZ_{21} = A_{21} N_2 \, dt. \tag{98.1}$$

Так как при каждом из этих переходов согласно условию частот Бора излучается энергия $E_2 - E_1 = h\nu$, то за тот же промежуток времени будет испущена энергия, равная

$$h\nu \, dZ_{21} = A_{21} N_2 \, h\nu \, dt. \tag{98.2}$$

Теперь мы можем найти закон убывания числа возбужденных атомов со временем и среднее «время жизни» атома в возбужденном состоянии.

Очевидно, что число переходов dZ_{21} за промежуток времени dt равно уменьшению числа атомов, находившихся к моменту t в возбужденном состоянии, $dZ_{21} = -dN_2$. Поэтому формула (98.1) дает

$$-dN_2 = A_{21} N_2 \, dt. \tag{98.3}$$

Интегрируя, находим

$$N_2 = N_{20} e^{-A_{21} t}, \tag{98.4}$$

где N_{20} — число атомов, находившихся в состоянии 2 в момент $t = 0$.

Принимая во внимание формулу (98.2), мы найдем энергию, испускаемую в единицу времени, т. е. интенсивность свечения

$$I = A_{21} N_{20} e^{-A_{21} t} h\nu = J_0 e^{-A_{21} t}, \tag{98.5}$$

где $J_0 = A_{21} N_{20} h\nu$. Таким образом свечение возбужденного газа должно убывать со временем по экспоненциальному закону.

Среднюю продолжительность жизни в возбужденном состоянии мы теперь вычислим следующим образом. Число атомов, совершающих переход $E_2 \to E_1$, в промежуток времени между t и $t + dt$ равно $A_{21} N_2 dt$. Это вместе с тем есть число атомов, «проживших» в возбужденном состоянии t сек. Сумма их продолжительностей жизни равна поэтому $tA_{21} N_2 dt$, а сумма продолжительностей жизни всех атомов, испытавших переход за время от 0 до ∞, будет $\int\limits_0^\infty tA_{21} N_2 dt$. Отсюда средняя продолжительность жизни τ будет

$$\tau = \frac{\int\limits_0^\infty tA_{21} N_2 \, dt}{N_{20}}$$

или, принимая во внимание (98.4),

$$\tau = A_{21} \int\limits_0^\infty t e^{-A_{21} t} dt. \tag{98.6}$$

Интегрируя по частям и подставляя пределы (см. стр. 93), найдем

$$\tau = \frac{1}{A_{21}}. \tag{98.7}$$

Формулу (98.5) для интенсивности, принимая во внимание (98.7) и обозначая $N_{20} A_{21} h\nu$ через J_0, можно переписать в виде

$$J = J_0 e^{-t/\tau}. \tag{98.8}$$

В § 70 мы уже рассматривали затухание излучения линейного осциллятора с точки зрения классической электродинамики и пришли к формуле (70.4′), *формально* тождественной с формулой (98.8). В формулу (70.4′) входит также в качестве константы, характеризующей затухание, время τ, которое мы назвали там временем релаксации. Однако физический смысл, ко-

торый мы вкладываем в понятие «средней продолжительности жизни» в возбужденном состоянии, резко отличается от смысла «времени релаксации». Согласно классической электродинамике все излучающие диполи одновременно совершают вынужденные колебания, и время τ, равное времени уменьшения квадрата амплитуды в e раз, одинаково для всех диполей данного рода.

Здесь же мы рассматриваем процесс излучения как совокупность независимых квантовых переходов, происходящих в различных возбужденных атомах в самые разнообразные моменты времени. Произойдет ли в *данный момент* времени переход или не произойдет, определяется законами случая: один из возбужденных атомов может вернуться в нормальное состояние через очень короткий промежуток времени, а другой — может «прожить» в этом состоянии очень долго. Но, как всегда бывает при массовых процессах, *среднее* время жизни для атомов данного рода имеет определенную величину.

Экспериментальная проверка закона затухания свечения и определения средней продолжительности жизни в возбужденном состоянии наиболее непосредственно были произведены Вином в опытах со свечением каналовых лучей. Пучок водородных каналовых лучей через щель шириною в 0,1—0,25 *мм* выпускался в пространство, где поддерживался столь высокий вакуум, что возбужденные атомы могли «высвечиваться» практически без соударений. При этом получался светящийся и затухающий вдоль своей длины пучок каналовых лучей, который помещался на месте щели кварцевого спектрографа. Кварцевая призма разлагала этот пучок в спектр, так что затухание свечения можно было проследить для каждой спектральной линии отдельно. Если v есть скорость каналовых лучей и y — расстояние какой-либо точки от начала пучка, то $t = y/v$ и $e^{-t/\tau} = e^{-y/v\tau}$. Таким образом, время τ можно было определить, прослеживая убывание интенсивности вдоль пучка каналовых лучей.

Этим методом для красной линии водорода H_α ($\lambda = 6562$ Å) было получено $\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ *сек*; для резонансной линии ртути ($\lambda = 2537$ Å) получено $\tau = 9{,}8 \cdot 10^{-8}$ *сек* в хорошем согласии с результатом вычислений τ косвенным путем.

Статистический характер спонтанного испускания влечет за собой следующее важное следствие: *спонтанное излучение некогерентно*. Поскольку акты спонтанного излучения происходят в различных пространственно разделенных атомах в разные моменты времени, между фазами волн, испускаемых различными атомами, нет никакой закономерной связи. Таким образом, интерферировать между собой могут только волны, испускаемые одним определенным атомом, после разделения этих волн на два потока тем или иным устройством. Интерференционные же картины, создаваемые волнами, испускаемыми различными

атомами, просто складываются между собой. Это обстоятельство накладывает определенные ограничения на возможность осуществления интерференции даже от одного источника. Таковы, например, роль протяженности источника, необходимость использования щели между источником и интерференционным устройством и т. п. *).

§ 99. Поглощение и вынужденное испускание

Рассмотренные в предыдущем параграфе спонтанные переходы не зависят от электромагнитного поля, окружающего возбужденные атомы. Обратимся теперь к процессам, происходящим под действием этого поля.

Невозбужденные атомы, находящиеся на нижнем уровне энергии E_1, будут под влиянием поля переходить в возбужденное состояние E_2, поглощая энергию $E_2 - E_1 = h\nu$ из окружающего поля. Эти процессы, также как и спонтанные переходы, мы будем рассматривать статистически. Очевидно, что вероятность перехода с поглощением в интервале частот ν, $\nu + d\nu$ будет пропорциональна плотности энергии поля $\rho_\nu d\nu$ в этом интервале и некоторому коэффициенту B_{12}, характеризующему вероятность возбуждения данной атомной системы. Итак, вероятность поглощения (на единичный интервал) будет $\rho_\nu B_{12}$.

Оказывается, однако, что поглощением не ограничиваются процессы, происходящие под действием поля. Эйнштейн впервые обратил внимание на то, что если учет влияния поля ограничить процессами поглощения, то при выводе формулы излучения получается формула Вина, а не Планка. Поэтому он ввел в рассмотрение еще один вид процессов под влиянием поля: *вынужденные или индуцированные переходы с излучением* (в радиофизической литературе эти процессы часто называются также стимулированными переходами). Невозбужденные атомы могут под действием поля совершать только переходы с поглощением, но атомы, находящиеся в возбужденном состоянии (например — на уровне E_2) могут, по Эйнштейну, либо поглощать энергию из поля, переходя на более высокий уровень, либо, наоборот, — отдавать энергию поля (например — энергию $E_2 - E_1 = h\nu$), возвращаясь на более низкий уровень энергии. Эти последние переходы и являются индуцированными; они и обусловливают индуцированное излучение. Вероятность этих переходов в единицу времени есть $\rho_\nu B_{21}$.

Допущение вынужденного испускания оправдывалось между прочим ссылкой на классическую аналогию: классический осциллятор в волновом поле в неустановившемся состоянии вблизи резонанса между частотой поля и собственной частотой осциллятора может либо поглощать энергию из поля, либо отдавать ее полю. Какой из этих двух процессов должен произойти — зависит от соотношения фаз поля и осциллятора.

*) Детальный анализ понятия когерентности и условий ее осуществления см. в книге Г. С. Ландсберга, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 161.

В настоящее время имеются прямые экспериментальные доказательства реальности индуцированных переходов. К этому вопросу мы еще вернемся в § 101, где будут рассмотрены также некоторые важные свойства индуцированного излучения.

§ 100. Вывод формулы Планка по Эйнштейну

Обратимся теперь к выводу формулы Планка. В основе этого вывода лежит так называемый *принцип детального равновесия* (иногда называемый также принципом микроскопической обратимости). Согласно этому принципу, при термодинамическом равновесии каждому процессу можно сопоставить в точности обратный ему процесс, и число тех и других процессов в единицу времени должно быть одинаково.

Рассмотрим систему из атомов и излучения, находящуюся в равновесии и пусть по-прежнему, число атомов в нижнем состоянии (энергия E_1) будет N_1, а в верхнем состоянии (энергия E_2) — N_2. Атомы испускают и поглощают электромагнитное излучение, совершая в первом случае переходы $2 \to 1$ (испускание), а во втором $1 \to 2$ (поглощение). В силу принципа детального равновесия статистическое равновесие между процессами испускания и поглощения наступит тогда, когда число переходов $2 \to 1$ в единицу времени будет равно числу переходов $1 \to 2$. Переходы с испусканием происходят либо спонтанно, либо индуцированно. Полная вероятность тех и других переходов есть $A_{21} + B_{21}\rho_\nu$, а среднее число переходов в единицу времени равно

$$dZ_{21} = (A_{21} + B_{21}\rho_\nu) N_2.$$

Вероятность переходов с поглощением есть $B_{12}\rho_\nu$, и, соответственно, среднее число переходов $1 \to 2$ в единицу времени равно

$$dZ_{12} = B_{12}\rho_\nu N_1.$$

При равновесии $dZ_{21} = dZ_{12}$ и мы получаем:

$$N_2 (A_{21} + B_{21}\rho_\nu) = B_{12}\rho_\nu N_1. \tag{100.1}$$

Отсюда

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{12}\rho_\nu}. \tag{100.2}$$

Но так как равновесие имеет статистический характер, то отношение N_2/N_1 чисел атомов в верхнем и нижнем состояниях

может быть выражено также при помощи распределения Больцмана. А именно, если система может находиться в состояниях с дискретным рядом энергий $E_1, E_2, \ldots, E_m, \ldots$ то вероятность системе находиться в состоянии с энергией E_m есть (см. приложение II, стр. 555)

$$W_m = C' e^{-E_m/kT}, \tag{100.3}$$

где C' — постоянная, которая нормируется таким образом, чтобы вероятность атому иметь какое-либо из возможных значений энергии (достоверное событие) равнялась единице.

Для дальнейшего формулу Больцмана целесообразно написать в более общем виде. В атомной физике нередко встречаются случаи (см. например § 113), когда имеется *несколько* различных состояний, в которых атом имеет одну и ту же энергию (так называемые случаи вырождения). Очевидно, что в таких случаях различным значениям энергии соответствует разный *статистический вес*, который в квантовой физике характеризуется числом совпадающих уровней энергии.

Поэтому в общем случае формула Больцмана напишется в виде

$$W_m = C g_m e^{-E_m/kT}, \tag{100.4}$$

где g_m и есть статистический вес, равный 1 в случае простых (невырожденных) уровней энергии.

Таким образом, из общих статистических соображений, имеем

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}. \tag{100.5}$$

Сравнивая (100.2) и (100.5), получаем:

$$\frac{B_{12}\rho_\nu}{A_{21} + B_{21}\rho_\nu} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}}, \tag{100.6}$$

откуда

$$\rho_\nu = \frac{A_{21} g_2}{B_{12} g_1 e^{(E_2 - E_1)/kT} - B_{21} g_2}. \tag{100.6'}$$

Но, по условию частот Бора $E_2 - E_1 = h\nu$ и, следовательно,

$$\rho_\nu = \frac{A_{21} g_2}{g_1 B_{12} e^{h\nu/kT} - B_{21} g_2}. \tag{100.7}$$

Это и есть формула распределения энергии в спектре равновесного излучения. Для определения коэффициентов A и B мы используем следующие предельные условия:

1) При $T \to \infty$, т. е. при $h\nu \ll kT$ плотность ρ_ν должна стремиться к бесконечности, т. е. знаменатель в (100.7) — к нулю.

Это дает сразу

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21},$$

или

$$B_{12} = \frac{g_2}{g_1} B_{21}. \tag{100.8}$$

При том же условии $h\nu \ll kT$ должна быть справедлива формула Рэлея — Джинса

$$\rho_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT.$$

Принимая во внимание (100.8), перепишем (100.7) в следующем виде:

$$\rho_\nu = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \tag{100.9}$$

При $h\nu/kT \ll 1$ имеем в первом приближении

$$e^{h\nu/kT} = 1 + \frac{h\nu}{kT},$$

и (100.9) принимает вид

$$\rho_\nu = \frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} \cdot \frac{kT}{h\nu}.$$

Сравнивая с формулой Рэлея — Джинса, получаем

$$\frac{g_2 A_{21}}{g_1 B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}, \tag{100.10}$$

и (100.9) принимает вид

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

А это и есть формула Планка.

Для последующих соображений мы можем без ущерба для общности положить $g_2 = g_1 = 1$, т. е. рассматривать переходы между простыми, невырожденными уровнями. Формулы (100.8) и (100.10), устанавливающие связь между коэффициентами Эйнштейна, напишутся при этом в виде

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21}, \quad B_{12} = B_{21}, \tag{100.11}$$

или, переходя от частот к длинам волн,

$$A_{21} = \frac{8\pi h}{\lambda^3} B_{21}, \quad B_{21} = B_{12}. \tag{100.12}$$

Выше мы указывали, что в том случае, когда в условии равновесия в качестве переходов с испусканием учитываются только спонтанные переходы, характеризуемые коэффициентами A_{mn}, вместо формулы Планка получается формула Вина.

Действительно, полагая в (100.7) равным нулю коэффициент индуцированных переходов B_{21} и принимая во внимание (100.11), получаем

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT},$$

а это и есть формула Вина [ср. (89.7)]. Но мы уже знаем, что формула Вина хорошо описывает наблюденные результаты в области высоких частот, т. е. в коротковолновом конце видимого света и в ультрафиолете. Из этого следует, что в этой области переходы с вынужденным испусканием играют лишь малую роль, а все испускание практически происходит главным образом за счет спонтанных переходов. С другой стороны, в радиочастотном (микроволновом) диапазоне спектра вследствие сильного возрастания ($\sim\lambda^3$) коэффициента индуцированных переходов B_{21} и увеличения плотности излучения ρ_ν, роль спонтанных переходов ничтожно мала.

§ 101. Свойства индуцированного испускания

Рассмотрим теперь несколько детальней свойства квантовых переходов, характеризуемых коэффициентами Эйнштейна B_{12} и B_{21}, т. е. переходов, сопровождаемых поглощением света (электромагнитных волн) и, соответственно, индуцированным (стимулированным) испусканием. Особое внимание мы уделим индуцированному испусканию, так как в самое последнее время оно приобрело исключительную теоретическую и практическую важность. Достаточно сказать, что индуцированное испускание лежит в основе новой быстро развивающейся области радиофизики и радиотехники — квантовой радиотехники.

Сначала мы рассмотрим микроскопическую картину тех видов взаимодействия электромагнитного излучения и атомов вещества, которые характеризуются коэффициентами B_{mn}, а затем установим связь между этими коэффициентами и макроскопической характеристикой поглощения.

Чтобы перейти к выполнению первой половины этой программы, напомним, что, как это хорошо известно из элементарных изложений атомной теории и как будет подробно обосновано ниже (см. гл. IX), квантовые свойства проявляются не только в существовании дискретных уровней энергии атомных систем, но само излучение имеет двойственную природу: сохраняя волновые свойства, оно ведет себя так же, как поток «частиц», фотонов, обладающих энергией $h\nu$ и импульсом $h\nu/c$. Рассмотрим с этой точки зрения взаимодействие излучения с невозбужденным и с возбужденным атомами. Рис. 155—156 наглядно представляют схему взаимодействия при поглощении, на

рис. 155, *а* представлены невозбужденный атом и три фотона до взаимодействия; на рис. 155, *б* показано, что в результате взаимодействия атом поглотил один фотон (коэффициент B_{12}), перейдя в возбужденное состояние $E_1 \to E_2$, а два фотона продолжают свое движение, не изменяя ни своих свойств, ни своего направления. На рис. 156 изображена схема индуцированного излучения: слева (рис. 156, *а*) возбужденный атом с энергией возбуждения $E_2 - E_1 = h\nu$ и два фотона с той же энергией $h\nu$ до взаимодействия; справа (рис. 155, *б*) — картина после взаимодействия. атом перешел в нормальное состояние, испустив фотон с той же энергией $h\nu$ и тем же импульсом $h\nu/c$, что и падающий фотон и все три тождественных фотона продолжают свое движение в параллельных направлениях.

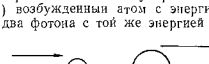


Рис. 155.

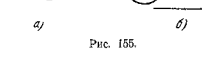


Рис. 156.

Мы видим, что случай *I* соответствует ослаблению, т. е. поглощению излучения; в случае же *II* интенсивность излучения возрастает за счет вынужденных переходов и, поскольку при этом фотон излучается в том же направлении, что и падающий, можно говорить об *отрицательном поглощении*. Более детальный анализ процесса показывает, что электромагнитное излучение, испускаемое при индуцированных переходах, тождественно с падающим, не только по частоте, но и сохраняет с ним непрерывность по фазе: оно когерентно с падающим.

Это свойство настолько важно, что на нем следует остановиться. Очевидно, что поглощение и вынужденное испускание — два в точности взаимно обратных процесса. Это, в частности, ясно из рис. 155 и 156: начальное состояние первого процесса совпадает с конечным состоянием второго и наоборот. Далее, хорошо известно, что при поглощении уменьшается интенсивность света, но полностью сохраняются свойства когерентности. Это видно из того, что при любых интерференционных опытах прохождение падающего пучка света через поглощающую среду (например, светофильтр) не разрушает интерференционную картину. Другой пример: помещение светофильтра перед линзой не вносит никаких искажений в изображение. Из этого следует, что в результате поглощения (положительного) состояние когерентности не изменяется.

Если теперь принять во внимание, что поглощение и вынужденное испускание, или иначе — положительное и отрицательное поглощение — два полностью взаимнообратных процесса, то, в силу законов симметрии явлений, мы должны ожидать, что индуцированное излучение должно быть когерентно с падающим. Таким образом, при прохождении света через среду, содержащую возбужденные атомы и способную к вынужденному испусканию, световой поток по мере прохождения *непрерывно увеличивает* свою интенсивность, сохраняя когерентность, т. е. явление должно протекать в точности симметрично с картиной, имеющей место при положительном поглощении, при котором, однако, интенсивность потока уменьшается. Как мы увидим, это свойство вынужденного испускания имеет решающее значение для его непосредственного экспериментального обнаружения.

Обратимся теперь ко второй части нашей программы — к установлению связи между обычной «макроскопической» характеристикой поглощения и коэффициентами Эйнштейна B_{12} и B_{21}. Пусть мы имеем параллельный монохроматический поток электромагнитного излучения частоты ν. После прохождения слоя вещества толщины Δx интенсивность излучения убывает. Согласно основному закону фотометрии (закон Бугера) ослабление интенсивности пропорционально падающей интенсивности и элементу толщины слоя Δx:

$$-\Delta I_\nu = k_\nu I_\nu \Delta x, \tag{101.1}$$

или, в интегральной форме,

$$I_\nu = I_{0\nu} e^{-k_\nu d},$$

где d — полная толщина слоя. Множитель k_ν (размерность $см^{-1}$) и есть коэффициент поглощения.

Вычислим теперь изменение интенсивности через коэффициенты Эйнштейна B_{mn}. Число атомов, находящихся на нижнем уровне и заключенных в объеме сечением в 1 $см^2$ и толщиной Δx, равно $N_1 \Delta x$. Принимая во внимание, что каждый акт истинного (положительного) поглощения удаляет из потока излучения один квант $h\nu$, найдем, что уменьшение интенсивности вследствие переходов $E_1 \to E_2$ равно

$$N_1 \Delta x\, B_{12} \rho_\nu h\nu.$$

На основании аналогичных соображений найдем, что вследствие индуцированных переходов $E_2 \to E_1$ в поток поступает энергия

$$N_2 \Delta x\, B_{21} \rho_\nu h\nu.$$

Энергетический баланс обоих видов поглощения (положительного и отрицательного) равен

$$-\Delta I_\nu = (N_1 B_{12} - N_2 B_{21})\, \rho_\nu h\nu \Delta x. \tag{101.2}$$

Плотность излучения ρ_ν в параллельном пучке излучения сечением 1 $см^2$, распространяющегося со скоростью c, очевидно, равна

$$\rho_\nu = I_\nu / c.$$

Подставляя это выражение в (101.2), получаем

$$-\Delta I_\nu = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21})\, I_\nu \Delta x.$$

Сравнивая с (101.1), видим, что коэффициент поглощения выражается через эйнштейновские коэффициенты так:

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} (N_1 B_{12} - N_2 B_{21}).$$

Принимая во внимание, что при $g_1 = g_2$: $B_{21} = B_{12}$ получаем

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} \left(1 - \frac{N_2}{N_1}\right).$$

При равновесии, в силу распределения Больцмана,

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/kT} = e^{-h\nu/kT},$$

и мы получаем

$$k_\nu = \frac{h\nu}{c} N_1 B_{12} (1 - e^{-h\nu/kT}).$$

Второй член в скобках меньше единицы; например для $\lambda = 4000$ Å, $\nu = 7{,}5 \cdot 10^{15}$ и при $T = 300$ °K

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{15}}{1{,}4 \cdot 10^{-16} \cdot 300} = 1{,}2 \cdot 10^3,$$

$e^{-1{,}2 \cdot 10^3}$ — ничтожно малая величина. Легко видеть, что это всегда будет иметь место в видимой части спектра и при не слишком высоких температурах. Поэтому при равновесии всегда

$$k_\nu > 0,$$

т. е. суммарный коэффициент поглощения всегда положителен, или иначе — акты положительной абсорбции превалируют над актами абсорбции отрицательной. Причина этого в конечном счете состоит в том, что число атомов на нормальном уровне при равновесии (распределение Больцмана!) всегда больше числа возбужденных атомов.

Чтобы создать среду с *отрицательным поглощением* и таким образом экспериментально выявить индуцированные переходы необходимо осуществить *неравновесное* состояние, при котором число возбужденных атомов было бы больше числа атомов, находящихся в нормальном состоянии. Такое неравновесное состояние часто условно называют состоянием с отрицательной

температурой по следующей причине. Из распределения Больцмана, полагая по-прежнему $g_2 = g_1$ (что не меняет общности вывода), находим

$$T = -\frac{E_2 - E_1}{k \ln (N_2/N_1)},$$

так как, по условию, $E_2 > E_1$, а $N_2/N_1 < 1$, то $T > 0$, как и следовало ожидать (равновесное состояние), но при $N_2/N_1 > 1$, $T < 0$ — температура отрицательна. Термин «отрицательная температура» из-за практического удобства широко применяется, хотя понятие температуры к неравновесным состояниям неприменимо. На этот термин следует смотреть просто как на синоним состояния с обращенным распределением атомов по уровням энергии.

Имеется целый ряд способов создания среды с отрицательной температурой. С этой целью либо стремятся косвенным путем создать избыток атомов на более высоком уровне энергии по отношению к некоторому более низкому (не обязательно самому низкому) уровню, либо, наоборот, — искусственно понизить населенность более низкого уровня по отношению к более высокому. Очевидно, что в том и другом случае осуществляется обращенное распределение атомов по уровням и, следовательно, «отрицательная температура» для выбранной пары уровней.

Простейшее проявление индуцированного испускания в условиях отрицательной температуры состоит в осуществлении отрицательного поглощения, т. е. в обнаружении коэффициента прозрачности большего единицы. Таким путем советским физиком В. А. Фабрикантом еще в 1939 г. были обнаружены индуцированные переходы в видимой части спектра в парах ртути, возбужденных при электрическом разряде в некоторых специальных условиях. Им же был впервые сформулирован принцип молекулярного усиления.

§ 102. Генераторы света

Вынужденные переходы получили важные практические применения. На их основе созданы молекулярные генераторы и усилители в сантиметровом диапазоне радиоволн (мазеры), а также оптические квантовые генераторы (лазеры *)), — источники света в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях, обладающие уникальными свойствами.

*) Эти своеобразные названия являются сокращениями полных названий maser — microwave amplification by stimulated emission of radiation (усиление микроволн индуцированным испусканием излучения) laser — light amplification by stimulated emission of radiation (усиление света индуцированным испусканием излучения).

Выбор рабочего вещества для оптических квантовых генераторов определяется главным образом возможностью достижения инверсной населенности для некоторой пары уровней энергии. Режим генерации наступает в том случае, когда эффект усиления света компенсирует потери энергии за счет процессов рассеяния, перепоглощения и т. п. Для генерации света используются как кристаллы, так и жидкости и газы. Несмотря на существенные различия в системах энергетических уровней, во временах жизни возбужденных состояний различных соединений, используемых в различных лазерах, основные принципы действия квантовых генераторов света одинаковы. Кратко рассмотрим эти принципы, а также свойства излучения генераторов света на примере рубинового лазера.

Кристалл рубина представляет собой окись алюминия, в кристаллической решетке которого некоторое число атомов Al заменено трехвалентными ионами хрома Cr^{3+}. При поглощении света ионы хрома переходят с нормального уровня A_1, на возбужденный A_2 (рис. 157). Последний представляет, собственно, не уровень, а достаточно широкую полосу. Возбужденные в пределах этой полосы ионы хрома затем частью переходят на некоторый уровень M, на котором они задерживаются в течение нескольких миллисекунд, т. е. в течение времени на 4—5 порядков величины большего нормального времени жизни возбужденного состояния (10^{-7}—10^{-8} *сек*). Благодаря этому на уровне M (который называется *метастабильным*) накапливается значительное число возбужденных ионов.

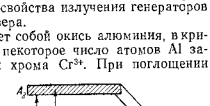


Рис. 157.

Пока концентрация возбужденных ионов не достигает 50% всего числа ионов, возвращение на нормальный уровень A_1 сопровождается обычной красной флуоресценцией рубина с указанной средней продолжительностью в несколько миллисекунд. Но как только число возбужденных ионов превзойдет число ионов на нормальном уровне, создается среда с отрицательной температурой и вследствие этого возникает возможность высвечивания за счет вынужденных переходов.

Для наблюдения этого явления кристалл рубина берется в виде стерженька или призмы длиной в несколько сантиметров с оптически отполированными строго параллельными посеребренными торцовыми гранями, одна из которых делается полупрозрачной. Достаточно нескольких фотонов, освобожденных путем спонтанных переходов, чтобы начался процесс вынужденных

переходов, причем освобождаемые фотоны в свою очередь вызывают новые вынужденные переходы, и таким образом процесс лавинообразно нарастает. Этому способствуют многократные отражения нарастающей лавины на противоположных торцовых гранях. При этом лавина растет, распространяясь туда и сюда внутри кристалла параллельно его оси, так как фотоны, случайно испущенные в других направлениях, уходят из кристалла через его боковую поверхность. Когда интенсивность лавины фотонов достигает некоторой критической величины, часть ее, пройдя через полупрозрачную грань, выходит из кристалла и распространяется в виде узкого почти строго параллельного пучка

Это излучение обладает рядом совершенно замечательных свойств. Во-первых, телесный угол раствора пучка настолько мал, что без каких бы то ни было оптических средств в виде зеркал или линз пучок сохраняет параллельность настолько, что расхождение его на расстоянии километра — порядка всего одного метра *). Если же использовать небольшое сжатие пучка, пропустив его в обратном направлении через астрономическую трубу, то, как показывает подсчет, можно спроектировать на Луну пятно диаметром всего в 3 километра. Так как поток энергии в направленном пучке пропорционален $I_\nu d\Omega$ ($d\Omega$ — телесный угол расхождения пучка), то, ввиду ничтожной величины $d\Omega$, яркость пучка имеет грандиозную величину.

Благодаря этому с помощью специальных отражателей, установленных на луноходе, удалось осуществить оптическую локацию Луны.

Далее, в рубиновом генераторе непосредственно из кристалла выходит вспышка мощностью 10^4 *вт* при сечении, меньшем 1 *см*². Если сконцентрировать ее с помощью короткофокусной линзы, то в получающемся пятне развивается мощность, в тысячи раз превосходящая то, что может быть получено путем концентрации солнечного света.

Важным свойством излучения подобного генератора света является недостижимая никакими другими способами монохроматичность. Вынужденное испускание есть резонансный процесс, ввиду чего оно возбуждается с наибольшей интенсивностью у максимума кривой частоты. Поэтому одновременно с лавинообразным возрастанием интенсивности идет процесс сжатия интервала частот. В результате возникает монохроматическое излучение со спектральной шириной, значительно меньшей естественной ширины спектральной линии (см. стр. 241). Особенно

*) Для сравнения заметим, что пучок, образуемый прожекторным зеркалом диаметром около двух метров, дает расхождение $d\Omega = 1°$, что соответствует на расстоянии 1 *км* пучку диаметром 17 *м*.

выгоден в этом отношении газовый генератор (гелий + неон), который дает инфракрасное излучение со спектральной шириной, меньшей одного килогерца при несущей частоте 10^8 *Мгц*.

Другим важным свойством индуцированного излучения является его когерентность. Как уже указывалось, спонтанное испускание в протяженном источнике возникает в различных случайно распределенных в пространстве точках и в случайные, не связанные между собой моменты времени. Поэтому оно некогерентно: не только лучи света от различных источников, но и лучи света от разных точек одного и того же источника между

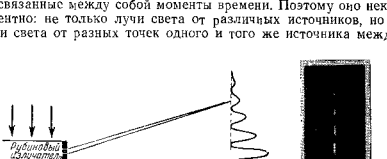


Рис. 158.

собой не интерферируют. Чтобы осуществить с таким излучением интерференцию, необходимо пользоваться источником малого размера, разделять один исходный пучок на два или несколько, которые затем между собой интерферируют. При этом интерферируют в сущности потоки волн, исходящие от одного атома, и различные интерференционные картины просто складываются между собой.

Наиболее наглядным интерференционным опытом является опыт Юнга с двумя щелями: свет от удаленного источника малого размера (или от щели, освещаемой удаленным источником), пройдя через две параллельные щели, дает на удаленном экране типичную интерференционную картину, состоящую из последовательности чередующихся светлых и темных полос. Однако этот опыт не удается, если источник света слишком велик или расположен слишком близко к экрану.

Излучение лазера является полностью пространственно-когерентным. Поэтому интерференция беспрепятственно возникает, если сделать две щели прямо на полупосеребренной

поверхности, через которую выходит наружу индуцированное излучение. Это показывает, что выходящая из кристалла волна имеет действительно плоский фронт и различные пространственно-разделенные точки этой волны когерентны. Рис. 158 иллюстрирует схему опыта Юнга с рубиновым излучателем. Справа на рисунке приведена фотография интерференционной картины.

Замечательные свойства индуцированного излучения широко используются в научных и практических целях. Создание квантовых генераторов по существу означало возникновение новых разделов физики — квантовой радиофизики и квантовой оптики *).

*) См, например, А. Л. Микаэлян, М. Л. Тер-Микаэлян, Ю. Г. Турков, Оптические генераторы на твердом теле, «Сов. радио», 1967, Дж. Бирнбаум, Оптические квантовые генераторы, «Сов. радио», 1967.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ И УРОВНИ ЭНЕРГИИ ВОДОРОДНОГО АТОМА

§ 103. Серия Бальмера

Спектральные линии атомного водорода в своей последовательности обнаруживают простые закономерности. На рис. 159 приведена фотография спектра испускания атомного водорода,

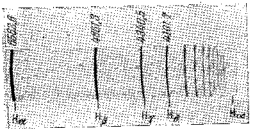


Рис. 159. Серия Бальмера в спектре испускания атомарного водорода: H_α, H_β, H_γ, H_δ — видимые линии; H_∞ — предел серий.

полученная в лабораторных условиях, а на рис. 160 — фотография того же спектра (в абсорбции) в звезде ζ Tauri. Существование закономерной связи между спектральными линиями на

Рис. 160. Серия Бальмера в спектре поглощения (звезда ζ Tauri), начиная с H_γ до предела серии.

той и другой фотографиях прямо бросается в глаза. И действительно, уже в 1885 г. Бальмер показал, что длины волн четырех линий, лежащих в видимой части и обозначаемых символами H_α, H_β, H_γ, H_δ (рис. 159), могут быть очень точно представлены эмпирической формулой

$$\lambda = B\frac{n^2}{n^2-4}, \qquad (103.1)$$

где вместо n следует подставить целые числа 3, 4, 5, 6 и B — эмпирическая константа, равная $3645{,}6 \cdot 10^{-8}$ *см* $= 3645{,}6$ А. Насколько точно совпадают вычисленные по этой формуле длины волн с данными непосредственных измерений, которые были известны Бальмеру, видно из таблицы XI.

Таблица XI

Линия	Вычислено по формуле Бальмера, Å	По измерениям Ангстрема, Å	Разность, Å
H_α	6562,08	6562,10	+0,02
H_β	4860,80	4860,74	−0,06
H_γ	4340,00	4340,10	+0,10
H_δ	4101,30	4101,20	−0,10

Помимо четырех видимых линий в то время было известно пять ультрафиолетовых в земных источниках и 10 — в спектрах белых звезд. Подставляя в формулу Бальмера дальнейшие целые числа $n = 7, 8, \ldots$, можно было получить также и длины волн этих ультрафиолетовых линий. Однако совпадение вычисленных и наблюденных длин волн для этих линий оказалось несколько худшим, что, впрочем, объясняется исключительно неточностью, с какой в то время были измерены эти линии.

Закономерность, выражаемая формулой Бальмера, становится особенно наглядной, если представить эту формулу в том виде, в каком ею обычно пользуются в настоящее время. С этой целью следует преобразовать эту формулу так, чтобы она позволяла вычислять не длины волн, но частоты или волновые числа. По известной формуле частота (число колебаний в 1 *сек*) выражается в виде

$$\nu = \frac{c}{\lambda_0}\ сек^{-1},$$

где c — скорость света в пустоте и λ_0 — длина волны также в пустоте. *Волновое число* есть обратная длина волны или число волн, укладывающихся на 1 *см*:

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0}\ см^{-1}.$$

В спектроскопии пользуются предпочтительно волновыми числами (в $см^{-1}$), так как длины волн определяются в настоящее время с огромной точностью и, следовательно, с тою же точностью известны и волновые числа, тогда как скорость света, а

значит, и частота определены со значительно меньшей точностью.

Из (103.1) получаем

$$\nu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{B}\,\frac{n^2-4}{n^2} = \frac{4}{B}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (103.2)$$

Обозначая постоянную $4/B$ через R (первая буква фамилии выдающегося шведского спектроскописта Ридберга, именем которого названа эта постоянная), перепишем (103.2) так:

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots). \qquad (103.3)$$

Это и есть обычный вид формулы Бальмера.

Из формулы (103.3) видно, что по мере увеличения n разность между волновыми числами соседних линий уменьшается, и при $n = \infty$ мы получаем постоянное значение $\nu = R/2^2$. Таким образом, линии должны постепенно сближаться, стремясь к предельному положению $\nu = (R/4)\ см^{-1}$. Это хорошо видно на фотографиях рис. 159 и 160; теоретическое положение предела серии указано на рис. 159 символом H_∞. Наблюдение показывает, кроме того, что с увеличением номера линии n закономерно уменьшается ее интенсивность. Таким образом, если схематически представить расположение спектральных линий, охватываемых формулой (103.3), и условно изображать длиной линий их интенсивность, то получится картина, показанная на рис. 161.

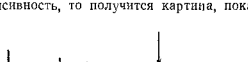


Рис. 161. Общая схема спектральной серии.

Совокупность спектральных линий, обнаруживающих в своей последовательности и в распределении интенсивности закономерность, которая схематически представлена на рис. 161, называется вообще *спектральной серией*. Предельное волновое число, около которого сгущаются линии при $n \to \infty$, называется *границей серии*.

Получение большого количества линий атомного водорода при помощи земных источников связано с различными экспериментальными трудностями. Поэтому только в 1920 г. Вуду удалось сфотографировать 22 и промерить 20 членов серии Бальмера. Наибольшее количество линий этой серии можно было промерить в спектре солнечной хромосферы и протуберанцев (до 37 членов).

§ 104. Серии Лаймана, Пашена и др. Обобщенная формула Бальмера

Наряду с серией Бальмера в спектре атомного водорода был обнаружен ряд других серий, представляемых совершенно аналогичными формулами. Так, в крайней ультрафиолетовой части спектра Лайман открыл серию

$$\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 2,\ 3,\ \ldots). \tag{104.1}$$

В инфракрасной части найдено три серии:

серия Пашена

$$\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 4,\ 5,\ \ldots), \tag{104.2}$$

серия Брэкета

$$\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 5,\ 6,\ \ldots), \tag{104.3}$$

серия Пфунда

$$\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 6,\ 7,\ \ldots). \tag{104.4}$$

Отсюда видно, что все известные серии атомного водорода можно представить общей формулой

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{104.5}$$

где m имеет в каждой данной серии постоянное значение ($m = 1, 2, 3, 4, 5$), а n — ряд целых значений, начинающихся с числа, на единицу большего m. Формула (104.5) называется обобщенной формулой Бальмера.

В таблице XII приведены длины волн в различных сериях атомного водорода, вычисленные и измеренные непосредственно (для серии Бальмера приведено 10 членов из промеренных 36). Эта таблица дает возможность судить о точности, с какой позволяют вычислять длины волн формулы спектральных серий.

Таблица XII

Обзор серий атомного водорода

Серия Лаймана $\nu = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	$\lambda_{вак}$ (набл.)	$\lambda_{вак}$ (вычисл.)	ν (вычисл.)
2	1215,7	1215,68	82258,31
3	1026,0	1025,73	97491,36
4	972,7	972,54	102822,94

Продолжение табл. XII

Серия Бальмера $\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	$\lambda_{возд}$ (набл.)	$\lambda_{вак}$ (вычисл.)	ν (вычисл.)
3	6562,8473 6562,7110	6562,798	15233,216
4	4861,3578 4861,2800	4861,327	20564,793
5	4340,497 4340,429	4340,466	23032,543
6	4101,7346	4101,738	25181,055
7	3970,0740	3970,075	24373,343
8	3889,0575	3889,052	25705,957
9	3835,397	3835,387	26065,61
10	3797,910	3797,900	26322,90

Серия Пашена $\nu = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	$\lambda_{возд}$ (набл.)	$\lambda_{возд}$ (вычисл.)	ν (вычисл.)
4	18 751,3	18751,1	5331,58
5	12 817,6	12818,1	7799,33
6	10938,1 *мкм*	10938,1	9139,84
7	10 049,8	10049,4	9948,13
8	9 546,2	9546,0	10472,74
9	9 229,7	9229,1	10832,40
10	9 015,3	9011,9	11089,69
11	8 863,4	8862,9	11280,03

Серия Брэкета $\nu = R\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	$\lambda_{возд}$ (набл.)	$\lambda_{возд}$ (вычисл.)	ν (вычисл.)
5	4,05 *мкм*	40510,4	2467,75
6	2,63 *мкм*	26251,6	3808,26

Серия Пфунда $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right)$

n	λ (набл.)	λ (вычисл.)	ν (вычисл.)
6	7,40 *мкм*	74578,0	1340,512

§ 105. Спектральные термы. Комбинационный принцип

Сравнивая между собой формулы (104.1)—(104.4), легко заметить, что постоянный первый член каждой из этих формул является одним из переменных членов в другой. Например, постоянный член формулы серии Пашена $R/3^2$ является первым из возможных переменных членов формулы серии Бальмера и вторым — для формулы серии Лаймана; постоянный член серии Бальмера, в свою очередь, является одним из переменных членов в формуле серии Лаймана и т. д. Этот факт особенно ясно виден в написании обобщенной формулы Бальмера (104.5), которая показывает, что волновое число любой спектральной линии водородного спектра можно представить как разность двух членов типа R/m^2 при каких-нибудь двух целых значениях m. В этом заключается современная формулировка так называемого *комбинационного принципа*.

Вводя обозначения

$$T(m) = \frac{R}{m^2}, \quad T(n) = \frac{R}{n^2}, \tag{105.1}$$

мы можем записать (104.5) в виде разности двух функций целых чисел

$$\nu = T(m) - T(n). \tag{105.2}$$

Числа $T(n)$, $T(m)$ называются *спектральными термами* или просто термами. Для водородного атома вся система термов получается из одной общей формулы

$$T = \frac{R}{n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{105.3}$$

Из (105.3) следует, что, зная систему термов для данного атома, мы можем получить волновое число любой спектральной линии как разность двух членов этой системы.

Мы можем дать комбинационному принципу несколько иную формулировку: если известны волновые числа двух спектральных линий одной и той же серии, то их разность будет также волновым числом некоторой третьей спектральной линии, принадлежащей тому же атому. Пусть, например, даны волновые числа двух линий серии Лаймана:

$$\nu_1 = T_1 - T_2 \text{ и } \nu_2 = T_1 - T_3.$$

Тогда разность $\nu_2 - \nu_1$ будет волновым числом первой линии серии Бальмера

$$\nu_2 - \nu_1 = T_2 - T_3 \text{ и т. д.}$$

В самом деле, из последнего столбца таблицы XII находим

$$\nu_1 = 82\,258{,}31, \quad \nu_2 = 97\,491{,}36.$$

Разность этих чисел равна $\nu_2 - \nu_1 = 15\,233{,}05$. В той же таблице для первого члена серии Бальмера ($n = 3$) находим $\nu = 15\,233{,}216$ — число, совпадающее с $\nu_2 - \nu_1$ в пределах ошибок наблюдения.

Комбинационный принцип был открыт чисто эмпирическим путем и, подобно многим другим закономерностям в спектрах, он казался вначале каким то числовым курьезом. Глубокий смысл этого принципа открылся только после того, как были формулированы квантовые постулаты Бора.

Нетрудно убедиться в том, что закономерность в частотах, выражаемая этим принципом, резко противоречит классической физике. В самом деле, если приписать электрону одну степень свободы, то спектр должен был бы состоять из одной частоты и ее обертонов; если же связь электрона такова, что ему следовало бы приписать три степени свободы, то мы имели бы три основные частоты и их обертоны. Однако на самом деле в атомных спектрах вообще не наблюдается никаких обертонов, т. е. частот, образующих гармонический ряд.

Впервые Бор с полной отчетливостью указал на то, что комбинационный принцип является ярким выражением своеобразных квантовых законов, управляющих внутриатомными движениями. Обобщая и формулируя точнее гипотезу Планка, высказанную для частного случая линейных осцилляторов, он увидел в комбинационном принципе указание на то, что атомы могут находиться только в определенных состояниях, энергии которых образуют дискретный ряд. Таким образом, каждому терму отвечает определенное стационарное энергетическое состояние, и условие частот Бора, формулированное в § 90, представляет собою не что иное, как комбинационный принцип, выраженный иным способом, а именно так, что каждая из испускаемых частот связывается с двумя стационарными состояниями. Если мы будем обозначать через ν волновое число, выраженное в $см^{-1}$, то частота, выраженная в $сек^{-1}$, будет равна $c\nu$, и условие частот (90.1) напишется в виде

$$hc\nu = E_n - E_m,$$

откуда

$$\nu = E_n/hc - E_m/hc. \tag{105.4}$$

Если положить

$$T(n) = -E_n/hc, \tag{105.5}$$

то (105.4) представится в виде

$$\nu = T(m) - T(n),$$

т. е. мы получаем уже известную формулировку комбинационного принципа. Знак минус в (105.5) имеет условное значение: как мы знаем, энергия (нерелятивистская) электрона, связанного

в кулоновском поле, всегда отрицательна (§ 51), в то время как термам удобнее приписывать положительный знак.

Введя в (105.4) выражение терма через постоянную Ридберга по определению (105.1), мы можем выразить и энергию атомов через эту постоянную:

$$E_n = -Rhc/n^2. \tag{105.6}$$

В этой формуле h и c — универсальные постоянные, n — целое число и только R — эмпирическая константа. Наша формула приобрела бы исчерпывающе ясное физическое значение, если бы мы сумели выразить также и постоянную Ридберга R через универсальные константы. Это удалось сделать Бору уже в первом наброске его теории строения атома.

§ 106. Квантование круговых орбит

В основе теории Бора лежат квантовые постулаты, формулированные в § 90, а именно, постулат о существовании стационарных состояний и условие частот. Эти постулаты, как уже неоднократно указывалось, находятся в резком противоречии с законами классической физики. В самом деле, в то время как постулаты Бора требуют существования дискретной последовательности уровней энергии, которым соответствует в атоме избранный ряд *квантованных* орбит, — классическая механика приводит к непрерывному множеству орбит. Это противоречие имеет весьма общий характер. Совокупность фактов однозначно указывает на то, что в явлениях атомного мира проявляется прерывность, характеризуемая конечной величиной (неравенством нулю) постоянной Планка. Наоборот, для явлений макроскопического, т. е. большого, масштаба характерна именно непрерывность.

Мы приходим, таким образом, к выводу, что классическая механика с ее непрерывно изменяющимися величинами неприменима к атомным явлениям. В дальнейшем, в главе X, мы увидим, что на самом деле этот разрыв очень глубок, так как оказывается, что очень маленькие частицы — электроны, протоны и т. п. — при своих движениях подчиняются совершенно своеобразным *квантовым* законам, резко отличающимся от законов классической механики. Это обстоятельство, однако, было открыто лишь через двенадцать лет после установления постулатов Бора. На первых же стадиях развития атомной механики пришлось воспользоваться следующим логически противоречивым методом: сначала задача решалась при помощи классической механики (заведомо неприменимой полностью к внутриатомным движениям), а затем из всего непрерывного множества состояний движения, к которым приводит классическая

механика, отбирались на основании специального постулата избранные, квантовые состояния. Несмотря на все несовершенство этого метода, он привел к очень большим успехам. Достаточно было подметить некоторые своеобразные черты атомных процессов и сделать из этого необходимые выводы, чтобы получить возможность распутать сложные закономерности в атомных и молекулярных спектрах, значительно ближе подойти к пониманию химических процессов и т. д.

Формулируем прежде всего тот специальный постулат, на основе которого в теории Бора производился выбор квантованных орбит. Мы будем при этом исходить из самой простой модели атома: центральное положительно заряженное ядро, около которого обращается электрон по круговой орбите. Несколько более сложный случай эллиптических орбит мы коротко рассмотрим ниже, в § 113.

Постулат для выбора квантованных орбит, который нам необходимо формулировать, представляет собою целесообразное обобщение постулата Планка для выбора квантовых состояний линейного осциллятора. Согласно этому последнему постулату из всех возможных состояний линейного осциллятора осуществляются только такие, энергия которых равна

$$E_n = nh\nu. \tag{106.1}$$

Формулируем сначала это условие, применимое только к линейному осциллятору, несколько иным образом. Для этого мы прежде всего перепишем его в виде

$$E/\nu = nh. \tag{106.2}$$

Написанное в таком виде условие мы будем рассматривать как общее требование, заключающееся в том, что в атомных системах механическая величина, имеющая размерность $\left[\frac{\text{энергия}}{\text{частота}}\right]$, или, что то же, [энергия $\times$ время] и называемая действием, должна быть кратной постоянной Планка h. Вопрос теперь сводится к целесообразному выбору этой величины для каждого частного случая.

Чтобы указать общее правило, автоматически приводящее к правильному выбору состояний, мы снова рассмотрим линейный осциллятор. Его состояние в классической механике характеризуется декартовой координатой x и соответствующим ей количеством движения $m\dot{x}$. Обозначим эти параметры состояния через q и p и будем изображать состояние осциллятора точкой в фазовом пространстве, как это принято в статистической механике. Поскольку в данном случае состояние системы полностью характеризуется двумя параметрами p и q, фазовое «пространство» является плоскостью, и каждое состояние

системы, характеризуемое данными значениями p и q, представится точкой на этой плоскости. При движении в системе эта точка будет непрерывно менять свое положение, описывая некоторую фазовую траекторию (рис. 162). Посмотрим, какова будет эта траектория для осциллятора, обладающего данной энергией E. Напишем выражение для полной энергии $(T+U)$ осциллятора (см. § 46)

$$E = T + U = \frac{mq^2}{2} + \frac{fq^2}{2} = \frac{p^2}{2m} + \frac{fq^2}{2}. \qquad (106.3)$$

Разделим обе части (106.3) на E:

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2\frac{E}{f}} = 1;$$

вводя обозначения

$$a = \sqrt{2mE} \text{ и } b = \sqrt{\frac{2E}{f}}, \qquad (106.4)$$

получим

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1. \qquad (106.5)$$

Но (106.5) есть уравнение эллипса, так что фазовая траектория линейного осциллятора есть эллипс, оси которого согласно (106.4) для данного осциллятора (заданные m и f) определяются энергией E. Вычислим теперь площадь нашего эллипса. Площадь, ограничиваемая кривой $y = f(x)$, равна $\int y\,dx$; с другой стороны, площадь эллипса равна πab. Поэтому $\oint p\,dq = \pi ab$, где кружок у интеграла указывает, что вычисление его следует вести по замкнутому контуру. Но по (106.4)

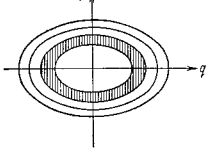


Рис. 162.

$$\pi ab = \pi\sqrt{2mE}\,\sqrt{2E/f} = 2\pi E\sqrt{m/f}.$$

Так как для гармонического осциллятора $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{m}}$, то

$$\oint p\,dq = \pi ab = 2\pi E\sqrt{m/f} = E/\nu \qquad (106.6)$$

или, принимая во внимание (106.2):

$$\oint p\,dq = nh. \qquad (106.7)$$

Теперь нам осталось сделать последний шаг: формулу (106.7) мы будем рассматривать как общее условие квантования для любых систем с одной степенью свободы, если только под q и p разуметь *обобщенную* координату и соответствующий ей обобщенный импульс.

Применим это общее условие к нашей модели электрона, обращающегося по круговой орбите. Здесь в качестве координаты целесообразно выбрать полярный угол φ, характеризующий положение электрона на орбите. Соответствующим ей обобщенным импульсом будет [см. (57.5)] момент количества движения $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$. Если мы теперь подставим в (106.7) φ и p_φ вместо q и p и примем во внимание, что согласно закону сохранения момента количества движения $p_\varphi = \text{const}$, то получим,

$$nh = \oint p\,dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi\,d\varphi = p_\varphi\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

откуда сразу имеем

$$p_\varphi = n\frac{h}{2\pi}. \qquad (106.8')$$

Это и есть искомое «правило квантования» круговых орбит: из всех возможных согласно классической механике орбит в действительности осуществляются такие, у которых момент количества движения есть кратное $h/2\pi$. Последняя величина $h/2\pi$ является, таким образом, квантовой единицей момента количества движения. Ее принято обозначать через $\hbar$.

В таком случае формула (106.8′) принимает вид:

$$p_\varphi = n\hbar. \qquad (106.8)$$

§ 107. Теория Бора

Обратимся теперь к теории Бора. Будем рассматривать так называемый «водородоподобный атом», т. е. систему, состоящую из ядра с зарядом $+Ze$ (Z — целое число) и одного электрона. При $Z = 1$ такая система представляет собою собственно водородный атом, при $Z = 2$ — однократно ионизованный атом гелия He^+, при $Z = 3$ — двукратно ионизованный атом лития Li^{++}, при $Z = 4$ — Be^{+++} и т. д.

Из кинетической теории газов известно, что «размеры» атомов — порядка 10^{-8} *см*. С другой стороны, из опытов Резерфорда с рассеянием α-частиц (§ 27) следует, что закон Кулона имеет место вплоть до расстояний порядка 10^{-12} *см*; поэтому мы можем быть уверены в том, что взаимодействие электрона с ядром в нашей модели подчиняется закону Кулона, т. е. сила, с которой ядро удерживает электрон, должна быть равна Ze^2/r^2. Если мы допустим, что движение электрона в атоме подчиняется

законам классической механики, то мы сможем перенести на нашу модель все результаты, полученные при решении кеплеровой задачи в классической механике (§ 51); в частности, полная энергия (кинетическая + потенциальная) такой системы должна быть равна

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{51.19}$$

где a — большая полуось эллипса или в данном случае — радиус круговой орбиты. По третьему закону Кеплера (§ 51) радиус a связан с периодом обращения T соотношением *)

$$\frac{a^3}{T^2} = a^3\nu'^2 = \frac{Ze^2}{4\pi^2 m}. \tag{51.24}$$

Второе соотношение даст нам правило квантования, установленное в предыдущем параграфе:

$$p_\varphi = n\hbar. \tag{106.8}$$

Далее, по определению,

$$p_\varphi = ma^2\dot{\varphi} = ma^2\omega = 2\pi m a^2\nu', \tag{107.1}$$

откуда, принимая во внимание (106.8)

$$a^2\nu' = \frac{n\hbar}{2\pi m}. \tag{107.2}$$

Комбинируя (107.2) и (51.24), легко найдем

$$a = n^2\frac{\hbar^2}{mZe^2}. \tag{107.3}$$

При $Z = 1$ и $n = 1$ (первая орбита водородного атома) мы получаем

$$a_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}528 \cdot 10^{-8}\ см. \tag{107.4}$$

Эта комбинация универсальных постоянных будет встречаться при вычислениях и в дальнейшем; мы ее всегда будем обозначать через a_1. Подставляя значение (107.3) в (51.19), получим

$$E_n = -\frac{Ze^2}{2a} = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}; \tag{107.5}$$

*) В случае *круговых орбит* соотношение (51.24) может быть получено также следующим простым способом. Приравнивая кулоновскую силу притяжения между ядром и электроном центробежной силе инерции, имеем

$$m\upsilon^2/a = Ze^2/a^2.$$

Имея в виду, что $\upsilon = a\omega = 2\pi a\nu'$, легко получим

$$a^3\nu'^2 = Ze^2/4\pi^2 m$$

— формула (51.24).

Для отличия от волнового числа частота, измеряемая в *сек*$^{-1}$, обозначена здесь через ν'.

давая n последовательный ряд целых значений 1, 2, 3, ..., мы и получим квантованные значения энергии $E_1, E_2, \ldots$

Воспользовавшись условием частот $h\nu = 2\pi\hbar\nu = E_n - E_k$ и подставляя сюда выражения для E_n и E_k из (107.5), получим обобщенную формулу Бальмера для водородоподобных атомов в виде

$$\nu = \frac{mZ^2e^4}{4\pi\hbar^3 c}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{107.6}$$

Полагая здесь $Z = 1$, получим формулу Бальмера специально для водородного атома, а множитель перед скобками и будет искомым выражением постоянной Ридберга через универсальные постоянные:

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3 c} = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c}. \tag{107.7}$$

Для вычисления R воспользуемся современными наиболее точными значениями универсальных констант e, e/m, $\hbar$, c:

$$\begin{gathered} c = 2{,}99793 \cdot 10^{10}\ см/сек,\quad \hbar = 1{,}0544 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек, \\ e = 4{,}8030 \cdot 10^{-10}\ \text{СГСЭ},\quad \frac{e}{m} = 1{,}7589 \cdot 10^7\ \text{СГСМ} \cdot г^{-1}; \end{gathered} \tag{107.8}$$

формула (107.7) даст тогда следующее теоретическое значение для R:

$$R = 109\,737{,}303\ см^{-1}, \tag{107.9}$$

тогда как величина $R_{\text{Н}}$, эмпирически найденная из точнейших спектроскопических измерений, есть

$$R_{\text{Н}} = 109\,677{,}581\ см^{-1}. \tag{107.10}$$

Совпадение теоретически вычисленного и экспериментального значений R настолько близко, что оно не оставляет сомнений в правильности найденной Бором формулы (107.5) для уровней энергии водородоподобных атомов. В действительности это совпадение лучше, чем может показаться при непосредственном сравнении (107.9) и (107.10). Дело в том, что эти два значения в сущности между собою неравнимы, так как при выводе формулы (107.7) сделано одно допущение, не оправдываемое точностью современных спектроскопических измерений. А именно, мы предполагали, что ядро водородоподобного атома неподвижно, тогда как по законам механики следует рассматривать движение электрона и ядра около их общего центра инерции. Допущение неподвижного ядра было бы оправдано (см. § 50) лишь в том случае, если бы массу ядра можно было считать бесконечно большой по сравнению с массой электрона. В действительности же отношение массы водородного ядра к массе электрона равно

$$M_{\text{Н}}/m = 1836{,}1,$$

и при огромной точности современных спектроскопических измерений пренебрежение конечной величиной массы ядра недопустимо.

Нетрудно, однако, внести поправку, учитывающую это обстоятельство. Как мы видели в § 53, для точного решения задачи о двух телах в формуле (107.5) вместо массы электрона необходимо ввести приведенную массу электрона и ядра:

$$m' = \frac{mM_Z}{m + M_Z},$$

где M_Z — масса ядра с атомным номером Z. Формула (107.7) при этом примет вид

$$R_Z = \frac{m'e^4}{4\pi\hbar^3 c} = \frac{mM_Z e^4}{4\pi\hbar^3 c\,(m + M_Z)} = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c\,(1 + m/M_Z)}. \quad (107.11)$$

Для водорода $M_Z = M_H$ и

$$R_H = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c\,(1 + m/M_H)}. \quad (107.12)$$

При $M_Z = \infty$ формула (107.11) переходит в (107.7). Поэтому, если обозначить величину R, даваемую (107.7), через R_∞, то (107.12) примет вид

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + m/M_H}, \quad (107.13)$$

а общая формула (107.11) представится так:

$$R_Z = \frac{R_\infty}{1 + m/M_Z}. \quad (107.14)$$

При помощи формулы (107.13) мы можем произвести окончательную проверку теории следующим образом: подставим в (107.13) наиболее точное экспериментальное значение $R_H = 109\,677{,}581$ и из (107.13) вычислим R_∞; принимая $m/M_H = 1/1836{,}5$, получим

$$R_\infty = R_H\left(1 + \frac{m}{M_H}\right) = 109\,677{,}581\left(1 + \frac{1}{1836{,}5}\right) = 109\,736{,}807\ \text{см}^{-1}.$$

Сравнивая это со значением 109 737,303, вычисленным непосредственно по формуле (107.7), мы видим, что совпадение не оставляет желать лучшего.

§ 108. Серия Пикеринга и спектры водородоподобных ионов

В 1897 г. астроном Пикеринг открыл в спектре звезды ζ Puppis спектральную серию, которая очень напоминала серию Бальмера. С историей этой серии связана одна из блестящих побед квантовой теории строения атома. Рис. 163, на котором схематически изображены обе серии, показывает, что линии серии

Пикеринга можно разбить на две группы: линии одной группы, расположенные через одну, почти совпадают с линиями серии Бальмера, а промежуточные линии не имеют аналогов в серии Бальмера. Ридберг показал, что эта серия может быть представлена формулой Бальмера, в которой, однако, n имеет как целые, так и половинные значения:

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \left(n = 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots\right); \quad (108.1)$$

целым значениям соответствуют линии, совпадающие с бальмеровыми, а половинным — промежуточные.

Как ни пытались получить эту серию с земным водородом, это не удавалось. Поэтому серия Пикеринга была приписана

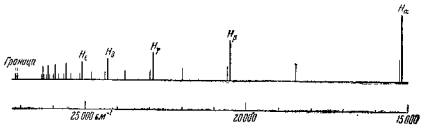


Рис. 163. Серии Бальмера и Пикеринга. Линии серии Бальмера изображены более длинными черточками.

водороду, находящемуся в звездах в каком-то особом состоянии. Наконец, удалось получить эту серию в лаборатории, но оказалось, что для успеха опыта к водороду обязательно должен быть примешан гелий. Эту противоречивую совокупность фактов распутал Бор, предположив, что серия Пикеринга принадлежит вовсе не водороду, но ионизованному гелию. В самом деле, так как на основании (107.6) ν пропорционально Z^2 и для гелия $Z = 2$, то спектральные серии ионизованного гелия He^+ должны укладываться в формулу

$$\nu = 4R_{He}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \quad (108.2)$$

Если положить здесь $m = 4$, то формула принимает вид

$$\nu = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 5,\ 6,\ \ldots),$$

но ее можно также представить и в виде

$$\nu = R_{He}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n/2)^2}\right)$$

или, если обозначить $n/2$ через k,

$$\nu = R_{He}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{k^2}\right) \quad (k = 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4;\ \ldots).$$

Но это и есть формула серии Пикеринга. Вследствие различия масс водорода и гелия константа Ридберга R_{He} должна немного отличаться от R_H. Поэтому и для целых значений k линии серии Пикеринга должны быть немного смещены относительно бальмеровых линий водорода.

Эти предсказания Бора были подтверждены Пашеном, который показал, что серия Пикеринга легко может быть получена в чистом гелии без всяких следов водорода, но не может быть получена в чистом водороде, и что линии этой серии для целых

Таблица XIII

k	He^+	H
3	6560,1	6562,8 (H_α)
3,5	5411,6	—
4	4859,3	4861,3 (H_β)
4,5	4561,6	—
5	4338,7	4340,5 (H_γ)
5,5	4199,9	—
6	4100,0	4110,7 (H_δ)

Рис. 164. Изменение постоянной Ридберга и зависимости от массы ядра.

значений k смещены относительно бальмеровых линий в фиолетовую сторону, как и следовало ожидать по формуле (108.2). Иллюстрации этого смещения можно найти в таблице XIII, где приведены измеренные Пашеном точные длины волн в спектре ионизованного гелия, а рядом — длины волн бальмеровой серии водорода, соответствующие целым значениям n.

Следующими за He^+ водороподобными ионами являются двукратно ионизованный литий Li^{++} ($Z = 3$) и трехкратно ионизованный бериллий Be^{+++} ($Z = 4$). Их спектральные серии должны подчиняться формулам

$$\nu = 9R_{Li}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\nu = 16R_{Be}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Первые члены серии Лаймана ($m = 1$) для этих ионов на самом деле удалось найти в далекой ультрафиолетовой части спектра.

На рис. 164 графически представлено изменение постоянной Ридберга в зависимости от массы ядра.

Упражнения: 1 Длина волны первой линии серии Лаймана для ионизованного гелия равна $\lambda = 303{,}797$ Å Вычислить: *а*) постоянную Ридберга для бесконечно большой массы; *б*) энергию ионизации иона He^+, выразив ее в электрон-вольтах.

2 Измеренные длины волн в спектрах ионов Li^{++} и Be^{+++} имеют следующие значения (в единицах Å):

Li^{++}			Be^{+++}		
$n_1 = 1$	$n_2 = 2$	135,01	$n_1 = 1$	$n_2 = 2$	75,94
$n_1 = 1$	$n_2 = 3$	113,92			

Вычислить первые три терма иона Li^{++} и первые два терма Be^{+++}.

§ 109. Применение предыдущей теории. Открытие тяжелого изотопа водорода

Зависимость постоянной Ридберга от массы ядра была использована при открытии тяжелого изотопа водорода. Этапы этого открытия очень напоминают историю открытия благородных газов, начиная с аргона, в атмосфере, толчком к которому послужило, как известно, небольшое расхождение между величинами атомного веса атмосферного азота и атомного веса азота, полученного в лабораторных условиях из различных химических соединений. Эта история является превосходной демонстрацией смысла точнейшего определения констант и очень хорошо подтверждает остроумное замечание одного из естествоиспытателей конца XIX столетия: «сколько еще открытий таится вокруг шестого десятичного знака!».

История открытия тяжелого водорода вкратце такова. Определение атомного веса водорода, выполненное Астоном при помощи масс-спектрографа, дало $1{,}00778 \pm 0{,}000015$ по отношению к атомному весу кислорода, условно принятому за 16,00000. Эта величина очень хорошо совпадала с атомным весом водорода, найденным из химических определений: $1{,}00777 \pm 0{,}00002$.

В то время, когда производились эти измерения, предполагалось, что кислород не имеет изотопов. Однако вскоре было обнаружено, что атмосферный кислород представляет собой смесь двух изотопов: O^{16} и O^{18}, количества которых находятся в постоянном отношении 630 : 1. Учитывая это обстоятельство, Бердж и Менцель обратили внимание на то, что совпадение

величин атомного веса водорода из масс-спектрографических и химических определений на самом деле иллюзорно и основано на принципиальной ошибке. В самом деле, каждая линия в масс-спектрографе отвечает одному определенному изотопу. Линия, которой приписывается масса 16,00000, на самом деле принадлежит изотопу кислорода O^{16}, в то время как в химических определениях масса 16 неправильно приписывается смеси $O^{16} + {}^1/_{830}O^{18}$. Если условно приписать линии кислорода в масс-спектре ту среднюю массу, которую имеет кислород в химических опытах, т. е. $O^{16} + {}^1/_{830}O^{18}$, то для атомного веса водорода, приведенного таким образом к химической шкале, получается заметно *меньшее* число: 1,00756. Тот факт, что атомный вес водорода, определенный химическим способом, на 1,00777 — 1,00756 = 0,00021, т. е. приблизительно на 0,02% больше, побудил Берджа и Менцела высказать гипотезу, что и обычный водород, с которым имеют дело химики в своих опытах, в действительности представляет смесь по крайней мере двух изотопов: легкого с массой приблизительно 1 и тяжелого с массой (в круглых цифрах) 2. Из разности масс-спектрографического и химического атомных весов они определили отношение количеств изотопов в обычном водороде и получили $H^1 : H^2 = 4500 : 1$.

Возможности открытия тяжелого изотопа способствовало необычайно благоприятное соотношение масс обоих изотопов. В то время как обычно разница в массах изотопов относительно очень мала, вследствие чего их свойства настолько близки, что накопление какого-нибудь изотопа крайне затруднительно, здесь масса одного изотопа в два раза больше массы другого. Вследствие этого их свойства весьма заметным образом различаются. Воспользовавшись этим, Юри с сотрудниками добился искусственного увеличения процента тяжелого водорода следующим образом: они подвергли 3 *л* жидкого водорода осторожному испарению при давлении в несколько *мм рт. ст.* Так как скорость испарения легкого водорода должна быть больше, чем тяжелого, то по мере испарения последний должен был накопляться в смеси. Доводя количество жидкого водорода от 3 *л* до долей кубического сантиметра, они ввели остаток в разрядную трубку и сфотографировали спектр,

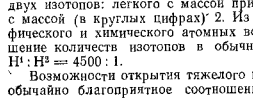


Рис. 165. Фотография первых четырех членов серии Лаймана у легкого и тяжелого водорода.

рассчитывая на то, что вследствие различия в величине постоянной Ридберга линии тяжелого водорода должны быть смещены относительно легкого. Это и подтвердилось на самом деле. На рис. 165 приведены фотографии первых четырех членов серии Лаймана для смеси легкого (H^1) и тяжелого (H^2) водорода. Смещение линий видно вполне отчетливо. Соответствующие длины волн приведены в таблице XIV, где линии тяжелого водорода обозначены через λ_D (тяжелый водород получил особое название — *дейтерий*, и ему присвоен химический символ D). В двух последних столбцах таблицы приведены разности $\Delta\lambda$, измеренные и вычисленные при помощи значений постоянной Ридберга для H и D. Совпадение вычисленных и наблюденных значений $\Delta\lambda$ и здесь превосходно.

Рис. 166 представляет фотографию первой линии (H_α) серии Бальмера легкого и тяжелого водорода.

Рис. 166. Сравнение длин волн H_α (нижняя линия) и D_α (верхняя линия).

Тяжелый водород — дейтерий — не только интересен как заместитель легкого водорода в различных соединениях, но весьма важен по своим применениям в ядерной физике, где ядро дейтерия — дейтерон — является одним из наиболее удобных «снарядов», применяемых для расщепления ядер.

Таблица XIV

λ_D (в Å)	λ_H (в Å)	$\Delta\lambda$ вычисл.	$\Delta\lambda$ набл.
1215,664	1215,334	0,330	0,330
1025,718	1025,439	0,279	0,279
972,533	972,269	0,264	0,266

§ 110. О спектроскопическом определении удельного заряда электрона

В § 39 уже упоминалось о том, что из спектроскопических данных можно определить удельный заряд электрона. Покажем теперь, как это делается.

Напишем выражения постоянной Ридберга для каких-нибудь двух атомов, например для водорода (H):

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + m/M_H}, \qquad (110.1)$$

и дейтерия (D):

$$R_D = \frac{R_\infty}{1 + m/M_D}, \tag{110.2}$$

где M_H и M_D — массы ядер. Из (110.1) и (110.2) получаем

$$\frac{R_D}{R_H} = \frac{1 + m/M_H}{1 + m/M_D}, \quad \frac{R_D - R_H}{R_H} = \frac{m}{M_H} \cdot \frac{M_D - M_H}{M_D + m},$$

откуда

$$\frac{m}{M_H} = \frac{(R_D - R_H)(M_D + m)}{R_H (M_D - M_H)}. \tag{110.3}$$

Массы ядер M_D и M_H, входящие в эту формулу, выражаются через атомные массы H и D и массу электрона следующим образом:

$$M_H = \frac{H}{N} - m, \quad M_D = \frac{D}{N} - m$$

(N — постоянная Авогадро).

Заряд Фарадея F есть произведение заряда электрона на постоянную Авогадро

$$F = Ne. \tag{110.4}$$

Из (103.3) и (103.4) получаем

$$\frac{e}{m} = \frac{F}{Nm} = \frac{FR_H (M_D - M_H)}{N (R_D - R_H)(M_D + m) M_H} = \frac{FR_H (D - H)}{(R_D - R_H) D (H - Nm)}. \tag{110.5}$$

Принимая во внимание, что произведение Nm («атомный вес» электрона) — величина малая по сравнению с H и D,

$$Nm = 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 9{,}108 \cdot 10^{-28} = 5{,}48 \cdot 10^{-4},$$

мы можем с достаточной точностью воспользоваться для вычисления e/m вместо (110.5) следующей формулой:

$$\frac{e}{m} = F \frac{R_H}{(R_D - R_H) H} \frac{D - H}{D}.$$

Если подставить сюда точные значения констант, то на основании последних измерений спектров H и D получается

$$\frac{e}{m} = 1{,}7589 \cdot 10^7 \text{ СГСМ} \cdot г^{-1}.$$

Как видно, наиболее точные значения e/m, полученные из опытов с отклонением электронов в электромагнитных полях, близки к этому спектроскопическому значению e/m.

§ 111. Диаграммы уровней энергии

Подводя итоги сказанному в предыдущих параграфах, мы видим, что наиболее существенным результатом анализа спектра

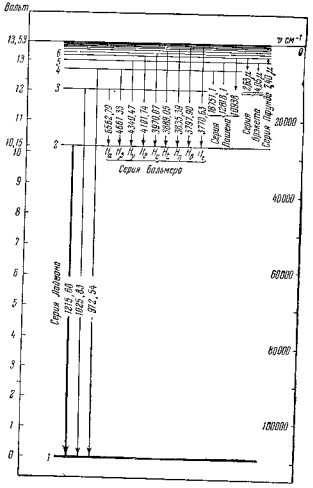


Рис. 167. Диаграмма уровней энергии атома водорода.

является установление системы термов. Действительно, комбинируя термы попарно, мы прямо получаем волновые числа спектральных линий; умножая числа, выражающие термы в $см^{-1}$, на hc, мы получаем положительные значения энергии атома

в различных квантованных состояниях. Эти величины энергии, будучи выражены в электрон-вольтах, дают ионизационные потенциалы атома в различных состояниях, а разности их — потенциалы возбуждения.

Для того чтобы быстро обозреть всю совокупность сведений об атоме, которые мы, таким образом, получаем, удобнее всего пользоваться диаграммами уровней энергии. Простейшая из таких диаграмм для атома водорода приведена на рис. 167. Здесь горизонтальными прямыми отмечены различные энергетические состояния. Для построения их, согласно сказанному, достаточно отложить по оси ординат значения R/k^2. По мере увеличения k расстояние между последовательными уровнями уменьшается и в пределе обращается в нуль. Выше места слияния расположена сплошная область неквантованных положительных энергий. Справа и слева помещены шкалы энергий и термов. Отсчет по той и другой шкале делается от места слияния уровней, но так как для квантованных состояний энергии отрицательны, а термы положительны, то энергия убывает снизу вверх, а термы (равные работе ионизации) возрастают в том же направлении. На той же диаграмме стрелками показаны возможные переходы между уровнями и отмечены образующиеся при этом серии. Каждая серия возникает при переходе на нижний уровень со всех вышележащих уровней. Волновые числа спектральных линий можно отсчитывать при помощи правой шкалы как разности термов, соответствующих конечному и начальному состояниям.

§ 112. Граничный сплошной спектр атомного водорода

Во всяком сериальном спектре к границе серии, т. е. к месту слияния линий, всегда примыкает сплошной спектр, простирающийся в сторону коротких волн. Этот сплошной спектр можно наблюдать как в эмиссии, так и в абсорбции. Возникновение его связано с переходами электронов из состояний с положительной энергией в состояния с отрицательной энергией или наоборот. Как мы уже знаем, во всех квантованных состояниях электрон обладает отрицательной энергией. Отрицательный знак здесь обусловлен произвольностью выбора состояния с нулевой потенциальной энергией. Обычно потенциальная энергия, равная нулю, приписывается электрону, который покоится на бесконечно большом расстоянии от ядра. Поэтому отрицательный знак полной энергии указывает просто на то, что энергия электрона в таких состояниях меньше его энергии в том случае, когда он отделен от атома и покоится на бесконечно большом расстоянии, т. е. на то, что мы имеем дело со связанным электроном *). Отсюда следует, что положительной энергией должен обладать электрон, отделенный от атома и имеющий избыток кинетической энергии над потенциальной. По классической механике такой электрон должен обращаться около ядра по гиперболической орбите (рис. 168). Однако первый постулат Бора требует, чтобы при обращении по этой орбите электрон не излучал; излучение же может происходить только тогда, когда он перескакивает с этой гиперболической орбиты на замкнутую (например, круговую). С другой стороны, согласно общим принципам теории квантов (см. следующий параграф) квантованию подлежат только периодические или условно-периодические движения, вследствие чего электроны, обращающиеся по гиперболическим орбитам, могут обладать любыми, непрерывно распределенными запасами энергии. Этим и объясняется сплошной характер спектра.

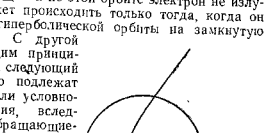


Рис. 168.

Действительно, волновое число, отвечающее переходу из квантованного состояния в состояние с энергией, равной нулю, будет R/m^2 (граница серии), а волновое число, соответствующее переходу из квантованного состояния в состояние с положительной энергией ΔE, будет

$$\nu = \frac{R}{m^2} + \frac{\Delta E}{2\pi\hbar c}.$$

Так как $\Delta E > 0$ и изменяется непрерывно, то ν будет больше волнового числа границы серии и будет изменяться непрерывно, т. е. мы получим сплошной спектр, примыкающий к границе серии со стороны коротких волн. Очевидно, далее, что *сплошной спектр поглощения* указывает на процессы отделения электрона от атома с конечной кинетической энергией, т. е. на ионизацию, а *сплошной спектр испускания* — на обратный процесс, т. е. на рекомбинацию положительного иона и электрона. Наконец, энергия, соответствующая волновому числу начала сплошного спектра со стороны длинных волн, или, что то же, волновому числу границы серии, должна быть равна энергии ионизации, т. е. энергии, необходимой для отделения электрона от атома

*) На самом деле в полную энергию электрона входит еще в качестве слагаемого энергия, соответствующая массе покоя электрона, m_0c^2, равная $0{,}5 \cdot 10^6$ эв, т. е. значительно превосходящая отрицательную потенциальную энергию в нормальном состоянии.

и перевода его в состояние с нулевой кинетической энергией. Таким образом, волновое число границы серий Лаймана для водорода

$$\nu = \frac{R_H}{1^2} = R_H = 109\,678 \ см^{-1}$$

сразу дает энергию ионизации водородного атома в основном, наиболее устойчивом состоянии. Если перевести указанное волновое число в электрон-вольты, то получается 13,527 *эв* в согласии с непосредственно измеренной при помощи методов, разобранных в главе VII, работой ионизации водородного атома из нормального состояния 13,54 *эв*.

§ 113. Квантование водородоподобного атома по Бору — Зоммерфельду

В предыдущих параграфах мы рассмотрели большое число следствий теории Бора, обеспечивших последней исключительный успех. Зоммерфельд сделал дальнейший шаг в развитии теории. В то время как в первоначальной теории Бора рассматривались только круговые орбиты, Зоммерфельд использовал общее решение кеплеровой задачи в классической механике, т. е. учел также и эллиптические орбиты. Для этого понадобилось прежде всего расширение правила квантования, формулированного в § 106. Действительно, пока мы рассматриваем только круговое движение электрона, нам достаточно правила квантования для одной степени свободы. Если же мы хотим учесть также и эллиптические орбиты, нам нужны правила квантования для системы с двумя степенями свободы, так как положение электрона на орбите в этом случае определяется двумя параметрами: радиусом-вектором r и полярным углом (азимутом) φ. Наконец, если мы хотим принять во внимание пространственную ориентацию орбиты, электрону следует приписать все три степени свободы.

Таким образом, первая задача, которую необходимо было решить, состояла в отыскании правил квантования для систем со многими степенями свободы. Эту задачу Зоммерфельд и, независимо от него, Г. А. Вильсон решили для довольно общего случая систем — так называемых условно-периодических систем.

Простым примером подобной системы может служить так называемый анизотропный осциллятор. Представим себе частицу с массой m, которая движется на плоскости так, что ее проекции на две взаимно перпендикулярные оси координат совершают простые гармонические колебания с различными частотами ν_x и ν_y. Тогда уравнения движения частицы будут

$$m\ddot{x} = -f_1 x, \quad m\ddot{y} = -f_2 y,$$

откуда

$$x = a_1 \cos(2\pi\nu_x t + \delta_1), \qquad y = a_2 \cos(2\pi\nu_y t + \delta_2),$$

и частоты будут

$$\nu_x = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_1}{m}}, \qquad \nu_y = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{f_2}{m}}.$$

Если бы обе константы квазиупругой силы f_1 и f_2 были равны между собой, то и частоты ν_x и ν_y были бы одинаковы, и мы имели бы обыкновенный изотропный осциллятор. Мы предполагаем, однако, что $f_1 \neq f_2$: в этом случае осциллятор называется анизотропным. Наиболее общее движение такого осциллятора получается тогда, когда ν_x и ν_y несоизмеримы. При этом условии частица описывает сложную кривую (фигура Лиссажу), состоящую из многих петель (рис. 169) и обладающую интересным свойством: кривая эта нигде не замыкается; она заполняет прямоугольник a_1a_2 с равномерной плотностью, так что движущаяся точка может подойти бесконечно близко к любой точке, лежащей внутри этого прямоугольника. Наоборот, если ν_x и ν_y соизмеримы, то получается чисто периодическое движение; например, при $\nu_x = \nu_y$ частица либо совершает колебания по прямой, либо описывает круг или эллипс. При каком-нибудь другом рациональном отношении частот получается, вообще говоря, сложная, однако обязательно замкнутая кривая; выйдя из определенной точки и описав более или менее сложную траекторию, частица вновь вернется в эту точку, и движение начнет повторяться. Во всех таких случаях мы имеем дело в сущности не с двумя основными частотами ν_x и ν_y, а только с одной, так как вследствие рациональности отношения ν_x/ν_y вторую частоту можно выразить через первую. Отсюда ясно, что чисто периодическое движение есть частный случай условно-периодического и притом *особенный* случай: вместо двух собственных частот, которыми должна характеризоваться система с двумя степенями свободы, мы имеем здесь дело с одной частотой, и траектория не заполняет с равномерной плотностью весь прямоугольник. Обычно говорят, что чисто

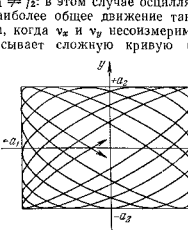


Рис. 169. Пример условно-периодического движения.

периодическое движение является случаем *вырождения* условно-периодического.

В рассмотренном простейшем случае условно-периодическое движение сводится к двум простым гармоническим колебаниям. Поэтому правило квантования (106.7) можно теперь применить к каждому из этих колебаний и потребовать, чтобы

$$\oint p_x\,dx = n_x h, \quad \oint p_y\,dy = n_y h,$$

где n_x и n_y — целые числа 1, 2, 3, ...

Оказывается, что во многих случаях систем с несколькими степенями свободы можно найти такие обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_f$, в которых, как и в рассмотренном примере анизотропного осциллятора, движение «разделяется» на f гармонических колебаний; в этих случаях найденное нами в § 106 правило квантования можно применить к каждой степени свободы. Мы получим при этом f *квантовых условий*:

$$\oint p_1\,dq_1 = n_1 h, \quad \oint p_2\,dq_2 = n_2 h, \ \ldots, \quad \oint p_f\,dq_f = n_f h. \tag{113.1}$$

Целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_f$ называются *квантовыми числами*.

Обратимся теперь к водородоподобному атому. По схеме теории Бора необходимо сначала решить в рамках классической механики задачу о движении электрона в кулоновском поле ядра. Это решение полностью выполнено нами в § 51, где были найдены следующие соотношения:

$$E = -\frac{Ze^2}{2a}, \tag{51.19}$$

$$E = -\frac{mZ^2e^4(1-\varepsilon^2)}{2P^2}. \tag{51.18}$$

Из этого непрерывного многообразия значений энергии следует отобрать при помощи квантовых условий дискретный ряд.

Так как при рассмотрении орбитального движения электрона мы должны приписать ему две степени свободы, соответствующие двум независимым координатам r и φ, то необходимо применить два квантовых условия:

$$\oint p_r\,dr = n_r h; \quad \oint p_\varphi\,d\varphi = n_\varphi h. \tag{113.2}$$

Обобщенные импульсы p_r и p_φ на основании § 57 таковы:

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}.$$

Принимая во внимание, что по закону сохранения момента количества движения $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}$, мы получаем из второго условия (113.2)

$$n_\varphi h = \oint p_\varphi\,d\varphi = p_\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi p_\varphi,$$

откуда

$$p_\varphi = n_\varphi \frac{h}{2\pi} = n_\varphi \hbar. \tag{113.3}$$

Применение первого квантового условия (113.2) требует довольно сложных вычислений, которые мы здесь опустим. В результате этих вычислений получается следующее выражение для эксцентриситета орбиты ε через квантовые числа n_r и n_φ:

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{(n_r+n_\varphi)^2}.$$

Сумма обоих квантовых чисел n_r и n_φ называется *главным квантовым числом*. Обозначив его через n, имеем

$$n_r + n_\varphi = n,$$

$$1-\varepsilon^2 = \frac{n_\varphi^2}{n^2}. \tag{113.4}$$

Подставляя это в (51.18) и заменяя $P = p_\varphi$ через $n_\varphi\hbar$, получим

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2n^2\hbar^2}. \tag{113.5}$$

Мы видим, что, несмотря на применение двух квантовых условий, окончательный результат ничем не отличается от полученного в § 107 для случая круговых орбит: энергия зависит от одного квантового числа n, называемого *главным квантовым числом*; при этом n является суммой квантовых чисел n_r и n_φ. Этот результат связан с тем, что эллиптическое движение электрона является вырожденным случаем условно-периодического движения. В самом деле, невырожденное условно-периодическое движение на плоскости должно происходить по незамыкающейся фигуре Лиссажу, тогда как обращение по эллипсу есть движение чисто периодическое. Мы сейчас увидим, что результат, выражаемый формулой (113.5), означает, что для каждого значения главного квантового числа n имеется *n совпадающих по величине уровней энергии*.

Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что каждому значению n соответствует n различных орбит с одной и той же большой полуосью. Действительно, выражение для большой полуоси орбиты мы получим из формулы (51.19). Вставляя в нее квантованные значения энергии (113.5), имеем

$$a = -\frac{Ze^2}{2E} = n^2\frac{\hbar^2}{mZe^2} \tag{113.6}$$

или, воспользовавшись введенным в § 107 сокращенным обозначением для «боровского радиуса» a_1 [формула (107.4)],

$$a = n^2 \frac{a_1}{Z} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{113.7}$$

Итак, величина большой полуоси в различных квантовых состояниях пропорциональна квадрату главного квантового числа.

Для вычисления малой полуоси b возьмем известную формулу аналитической геометрии $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ и вставим в нее уже найденные квантовые значения a и $\sqrt{1-\varepsilon^2}$ из (113.4) и (113.7):

$$b = n^2 \frac{a_1}{Z} \frac{n_\varphi}{n} = n n_\varphi \frac{a_1}{Z}. \tag{113.8}$$

Сравнение (113.7) и (113.8) показывает, что большая полуось зависит только от главного квантового числа, тогда как малая полуось зависит как от главного, так и от азимутального квантового числа.

Рассмотрим теперь, какие значения может принимать азимутальное квантовое число. При $n_\varphi = n$ (113.8) переходит в (113.7), и орбита — круговая; при $n_\varphi = 0$ и $b = 0$ эллиптическая орбита вырождается в прямолинейную траекторию, по которой электрон должен был бы совершать маятникообразные движения. Такая орбита в теории Бора исключается по тем соображениям, что при движении по ней электрон должен был бы сталкиваться с ядром. Итак, наименьшее значение n_φ есть 1, наибольшее — n:

$$n_\varphi = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{113.9}$$

Отсюда следует, что каждому значению n, т. е. каждой большой полуоси отвечает n различных орбит с разной величиной эксцентриситета: от вытянутого эллипса до круга. Например,

$$n = 1, \quad a = \frac{a_1}{Z}, \quad n_\varphi = 1, \quad b = \frac{a_1}{Z} = a - \text{круг},$$

$$n = 2, \quad a = 4\frac{a_1}{Z} \begin{cases} n_\varphi = 1, & b = 2\frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 2, & b = 4\frac{a_1}{Z} - \text{круг}, \end{cases}$$

$$n = 3, \quad a = 9\frac{a_1}{Z} \begin{cases} n_\varphi = 1, & b = 3\frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 2, & b = 6\frac{a_1}{Z} - \text{эллипс}, \\ n_\varphi = 3, & b = 9\frac{a_1}{Z} - \text{круг}. \end{cases}$$

На рис. 170 вычерчены орбиты для $n = 1, 2, 3$. Заметим, что эллиптические орбиты в перигелии подходят к фокусу (ядру) тем ближе, чем меньше n_φ.

Мы видим, таким образом, что для каждого значения главного квантового числа действительно существует n различных орбит с одинаковой большой полуосью. Всем этим n орбитам по формуле (113.5) соответствует одно и то же значение энергии или, точнее, n равных значений энергии. В этом и заключается вырождение. Если, однако, появляется какое-либо возмущение, то орбиты деформируются различным образом, и n уровней энергии, которые раньше совпадали, разделяются. Принято говорить, что возмущение *снимает* вырождение.

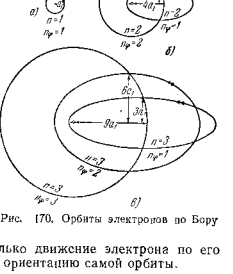


Рис. 170. Орбиты электронов по Бору

До сих пор мы интересовались только движением электрона в плоскости его орбиты и в соответствии с этим приписывали электрону две степени свободы. Однако положение электрона в пространстве характеризуется тремя координатами. Учитывая все три степени свободы, мы приобретаем возможность описывать не только движение электрона по его орбите, но и пространственную ориентацию самой орбиты.

Положение электрона в пространстве характеризуется тремя полярными координатами r, θ и ψ (рис. 171). Поэтому квантовые условия в этом случае принимают вид

$$\oint p_r\, dr = n_r h, \quad \oint p_\theta\, d\theta = n_\theta h; \quad \oint p_\psi\, d\psi = n_\psi h. \tag{113.10}$$

Обобщенные импульсы p_r, p_θ, p_ψ вычисляются по общему правилу (§ 57): нужно написать выражение кинетической энергии в полярных координатах r, θ, ψ:

$$E_k \equiv T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\psi}^2) \tag{113.11}$$

и найти производные по обобщенным скоростям:

$$p_r = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\psi = \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\psi}} = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\psi}. \tag{113.12}$$

Обратим теперь внимание на обобщенный импульс p_ψ. Из рис. 171 видно, что координата ψ характеризует движение проекции электрона по экватору, а соответствующий ей обобщенный импульс p_ψ есть проекция полного момента количества движения P на ось z. Направление этой оси физически может быть задано, например, бесконечно малым магнитным полем, совпадающим по направлению с осью z. Мы сейчас увидим, что p_ψ сохраняет свое значение, $p_\psi = \text{const}$. С этой целью напишем функцию Гамильтона, принимая во внимание выражение кинетической энергии (113.11) и выражения обобщенных импульсов (113.12):

$$H = T + U = E_k + E_p = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\psi^2\right) - \frac{Ze^2}{r}. \quad (113.13)$$

Так как координата ψ в это выражение не входит, то она есть циклическая координата. Поэтому соответствующий импульс постоянен (§ 60), $p_\psi = \text{const}$. Ввиду этого квантовое условие $\oint p_\psi\, d\psi = n_\psi h$ дает:

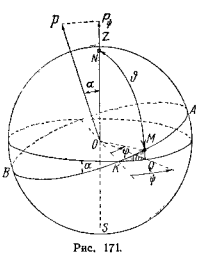


Рис. 171.

$$\oint p_\psi\, d\psi = p_\psi \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi p_\psi = n_\psi h,$$

$$p_\psi = n_\psi \frac{h}{2\pi} = n_\psi \hbar. \quad (113.14)$$

Мы видим, таким образом, что проекции момента количества движения на направление поля имеют квантованные значения. Это показывает, что ориентация орбит AB в пространстве не может быть произвольной, но существует дискретный ряд возможных ориентаций. Действительно, вводя вместо существенно положительного числа n_ψ равное ему по абсолютной величине число m, которое, однако, может иметь как положительные, так и отрицательные значения, мы получим

$$\cos\alpha = \frac{p_\psi}{P} = \frac{m\hbar}{n_\varphi\hbar} = \frac{m}{n_\varphi}.$$

Пусть, например, $P = \hbar/2\pi$; тогда $n_\varphi = 1$ и

$$\cos\alpha = m/n_\varphi = +1,\ 0,\ -1.$$

Итак, при $n_\varphi = 1$ возможны только три различные ориентации орбиты; при $n_\varphi = 2$ таких ориентаций будет пять ($m = +2, +1, 0, -1, -2$), при $n_\varphi = 3$ — семь и вообще при любом n_φ число возможных ориентаций равно $2n_\varphi + 1$.

Легко, однако, убедиться в том, что введенные нами два новых квантовых числа — «экваториальное» n_0 и «широтное» n_φ — весьма просто связаны с азимутальным квантовым числом n_φ. Именно

$$n_\varphi = n_0 + n_\psi.$$

Действительно, в § 59 мы видели, что кинетическая энергия T может быть выражена следующим образом:

$$2T = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \quad (59.9)$$

Обозначая кинетическую энергию через $E_{\text{кин}}$ и принимая во внимание, что $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$, получаем

$$2E_{\text{кин}} = \sum_k \dot{q}_k p_k.$$

Интегрируя это равенство по t в пределах периода, т. е. от 0 до τ, находим

$$2\int_0^\tau E_{\text{кин}}\, dt = \sum_k \int_0^\tau p_k\, dq_k = \sum_k \oint p_k\, dq_k. \quad (113.15)$$

Если мы выберем в качестве координат q_k полярные координаты на плоскости (r и φ), то согласно (113.15)

$$2\int_0^\tau E_{\text{кин}}\, dt = \oint p_r\, dr + \oint p_\varphi\, d\varphi. \quad (113.16)$$

В случае сферических полярных координат имеем

$$2\int_0^\tau E_{\text{кин}}\, dt = \oint p_r\, dr + \oint p_\theta\, d\theta + \oint p_\psi\, d\psi.$$

Приравнивая друг другу правые части, находим после сокращения

$$\oint p_\varphi\, d\varphi = \oint p_\theta\, d\theta + \oint p_\psi\, d\psi$$

или, принимая во внимание квантовые условия (113.2),

$$n_\varphi = n_\psi + n_0. \tag{113.17}$$

Это показывает, что выражение для полной энергии электрона (113.5) может быть переписано в виде

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{n^2\hbar^2} = -\frac{mZ^2e^4}{(n_r+n_\varphi)^2\hbar^2} = -\frac{mZ^2e^4}{(n_r+n_\theta+n_\psi)^2\hbar^2}.$$

Следовательно, полная энергия при учете пространственной ориентации орбиты так же, как и в случае плоской задачи, зависит только от суммы всех квантовых чисел, но не от самих квантовых чисел. Другими словами, вырождение на самом деле более значительно, нежели это следовало из рассмотрения плоской задачи: не только все эллипсы с одинаковой большой полуосью, но и все такие эллипсы, различным образом ориентированные в пространстве, в отсутствии внешнего магнитного поля имеют одинаковую энергию.

Ввиду того, что при введении всех рассмотренных уточнений (эллиптические орбиты, пространственная ориентация) результат получается тот же самый, что и в простейшем случае круговых орбит, учет этих усложнений может показаться излишним. В действительности это не так. При появлении внешнего магнитного поля устраняется вырождение в отношении экваториального n_φ (или магнитного m) квантового числа: различным образом ориентированные орбиты приобретают различную энергию. Последовательно проведенный расчет дает объяснение простого эффекта Зеемана. Далее, в сложных атомах, где имеется несколько электронов, возмущение движения периферического электрона остальными приводит к тому, что в выражении энергии атома появляется наряду с главным квантовым числом, равным сумме $n_r + n_\varphi$, также и азимутальное квантовое число. Вследствие этого уровни энергии с одним и тем же главным квантовым числом и различными азимутальными, совпадающие в случае одноэлектронных атомов, разделяются. Это дает возможность объяснить особенности спектров сложных атомов, имеющих один валентный электрон (элементы первой группы периодической системы Li, Na, K и т. д.). Мы, однако, не будем здесь останавливаться на этом дальнейшем развитии теории Бора, так как она, несмотря на ряд больших частных успехов, сохранила теперь лишь историческое значение. Упомянутые же явления (спектры сложных атомов, эффект Зеемана) получили иное объяснение в рамках значительно более широкого круга явлений. С этим объяснением мы познакомимся в дальнейшем.

§ 114. Принцип соответствия

Вернемся теперь к вопросу, уже затронутому в § 106, именно, — к вопросу о взаимоотношении законов классической и квантовой физики. Как мы видели, неравенство нулю постоянной Планка $\hbar$ ведет к тому, что механические величины, характеризующие системы атомных размеров (энергия, момент количества движения), вообще говоря, не могут изменяться непрерывно, но принимают дискретный ряд значений, отбираемых при помощи квантовых условий.

Равным образом и законы классической электродинамики оказываются неприменимыми к атомным системам. В самом деле, согласно законам классической электродинамики электрон, обращающийся по орбите, должен излучать электромагнитные волны. Это излучение влечет за собой потерю энергии, вследствие чего электрон должен был бы постепенно приближаться к ядру. Напротив, квантовые постулаты требуют, чтобы излучение происходило только при переходе с одной стационарной орбиты на другую. Таким образом, в классической картине электрон непрерывно падает к ядру по спиральной орбите, все время излучая, тогда как в квантовой картине он спускается по ступеням конечной величины, излучая только при «перескоках».

Существуют, однако, условия, при которых обе картины должны дать совпадающие результаты. Представим себе, что расстояния между последовательными уровнями малы по сравнению с высотой самих уровней. Тогда «ступеньки», по которым происходит спуск, будут очень мелкими, и спуск по ним мало отличается от непрерывного скольжения вниз. Такой именно случай имеет место при больших квантовых числах. В самом деле, рассмотрим, например бальмеровские уровни энергии:

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Так как энергия отрицательна, то с увеличением n она возрастает. Далее из (100.5), для случая $n \gg 1$, находим

$$\Delta E_n = \frac{mZ^2e^4}{\hbar^2n^3}\Delta n.$$

Из этого следует, что, при достаточно больших значениях n, соседние уровни ($\Delta n = 1$) расположены тесно и притом тем теснее, чем больше n. Если n очень велико, то мы будем иметь дело с практически непрерывной последовательностью уровней, и характерная особенность квантовых процессов — дискретность — должна совершенно сгладиться.

Мы сейчас увидим, что результаты, полученные нами в предыдущих параграфах, вполне удовлетворяют этому требованию. Начнем с водородоподобного атома и покажем, что для больших квантовых чисел частоты излучения, вычисленные по классическим и по квантовым законам, между собой совпадают. Для этого мы воспользуемся формулами § 107. Комбинируя формулы *)

$$a_n^2 \nu_n^* = \frac{nh}{2\pi m} \tag{107.2}$$

и

$$a_n = \frac{n^2 \hbar^2}{mZe^2}, \tag{107.3}$$

найдем

$$\nu_n^* = \frac{mZ^2e^4}{2n^3\hbar^3} \ сек^{-1}.$$

Эта формула дает частоту обращения электрона по n-й стационарной орбите. Согласно классической электродинамике такой же должна быть и частота испускаемого электромагнитного излучения. Мы имеем поэтому

$$\nu_{кл}^* = \nu_n^* = \frac{mZ^2e^4}{2n^3\hbar^3} \ сек^{-1}. \tag{114.1}$$

Эту формулу мы запишем в более компактном виде, воспользовавшись выражением постоянной Ридберга:

$$R = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c} \ см^{-1}. \tag{107.7}$$

Формулу (114.1) можно теперь легко привести к виду

$$\nu_{кл}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \ сек^{-1}. \tag{114.2}$$

Квантовая частота при переходе $n \to k$, как известно, вычисляется по формуле Бальмера и равна

$$\nu_{кв}^* = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right) сек^{-1} \tag{114.3}$$

(множитель c появился потому, что мы вычисляем истинную частоту в $сек^{-1}$, тогда как R обычно выражается в $см^{-1}$).

Для сравнения со (114.1) удобнее привести (114.3) к следующему виду:

$$\nu_{кв}^* = RcZ^2 \frac{n^2 - k^2}{k^2n^2} = RcZ^2 \frac{(n-k)(n+k)}{k^2n^2}. \tag{114.4}$$

*) Напоминаем, что ν^* означает частоту, выраженную в $сек^{-1}$, в отличие от ν (волновое число), выражаемого в $см^{-1}$.

Как мы видим, выражения (114.2) и (114.3) для $\nu_{кл}^*$ и $\nu_{кв}^*$ резко различаются. Положим, однако, что n — большое число:

$$n \gg 1 \tag{114.5}$$

и пусть, кроме того, $n - k = 1$; тогда вследствие (114.5) $k = n + 1 \approx n$. При этом условии (114.4) принимает вид

$$\nu_{кв}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3} \quad или \quad \frac{2RcZ^2}{k^3}. \tag{114.6}$$

Сравнивая (114.6) со (114.2), мы видим, что если квантовые числа велики, то для переходов между соседними квантовыми состояниями

$$\nu_{кв}^* = \nu_{кл}^*. \tag{114.7}$$

Если при переходе главное квантовое число изменяется не на 1, а на 2, 3, ... и вообще на Δn, при условии, что $\Delta n \ll n$, то

$$\nu_{кв}^* = \frac{2RcZ^2}{n^3}\Delta n = \nu_{кл}^* \Delta n \quad (\Delta n = 2, 3, \ldots),$$

т. е. испускаемые при таких переходах частоты $2\nu_{кл}^*$, $3\nu_{кл}^*$, ... будут совпадать с первым, вторым или более высокими *обертонами* классической частоты. Для малых квантовых чисел такого совпадения не имеется, *но существует соответствие*, так что каждому классическому обертону можно привести в соответствие определенную квантовую частоту.

Соотношение между классическими и квантовыми законами в очень отчетливой форме можно выяснить еще следующим образом. Пусть мы имеем систему с одной степенью свободы. Частота излучения, испускаемого этой системой, по квантовым законам вычисляется при помощи условия частот $E_n - E_k = \Delta E = h\nu$

$$\nu_{кв} = \Delta E/h. \tag{114.8}$$

Стационарные же состояния с энергиями E_k и E_n находятся при помощи квантового условия $\oint p\,dq = nh$. Обозначив через I интеграл $\oint p\,dq$, имеющий размерность действия, имеем $I = nh$. Для двух стационарных состояний мы получим

$$I_k = kh, \quad I_n = nh$$

и

$$I_k - I_n = \Delta I = (k - n)h.$$

Если $n - k = 1$, т. е. если рассматриваются соседние состояния, то $\Delta I = h$. Подставляя это в (114.8), получим

$$\nu_{кв}^* = \frac{\Delta E}{\Delta I}. \tag{114.9}$$

Для вычисления соответствующего выражения классической частоты мы возьмем случай линейного гармонического осциллятора. Энергия осциллятора равна $E = \frac{m\omega^2}{2} + U = \frac{p^2}{2m} + U$, откуда $p = \sqrt{2m(E-U)}$. Интеграл действия в таком случае будет

$$I = \oint p\,dx = \oint \sqrt{2m(E-U)}\,dx.$$

Рассматривая энергию E как непрерывно изменяющийся параметр, найдем производную

$$\frac{dI}{dE} = \oint \frac{m}{\sqrt{2m(E-U)}}\,dx = \oint \frac{m}{p}\,dx = \oint \frac{dx}{v} = \oint \frac{dx}{dx/dt} = \oint dt = T,$$

где T — период колебания. Отсюда получается следующее замечательное выражение для классической частоты:

$$\nu^*_{кл} = 1/T = dE/dI. \qquad (114.10)$$

Можно показать, что соотношение (114.10) должно иметь место для *любых* периодических систем с одной степенью свободы. Но так как это общее доказательство требует использования аппарата, знакомство с которым не предполагается у читателя, то мы ограничимся подтверждением его на частных примерах, приведенных в упражнениях к этому параграфу.

Сравнивая (114.9) и (114.10), мы приходим к следующему результату. И по классической, и по квантовой теории частота может быть вычислена как отношение приращения энергии к приращению действия, но, в то время как в первом случае мы берем бесконечно малые приращения, во втором мы должны брать конечные разности.

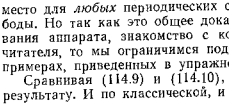


Рис. 172.

Рис. 172 хорошо иллюстрирует это. Сплошная кривая на этом рисунке представляет энергию как функцию интеграла действия I. Квантовые состояния изображают только те точки этой кривой, которые отвечают целочисленным значениям действия $I = 1h$, $2h$, $3h$. Очевидно, что квантовая частота $\Delta E/\Delta I$ будет равна тангенсу угла наклона секущей, соединяющей две точки, соответствующие квантовым состояниям, классическая же

частота равна тангенсу угла наклона касательной, так как

$$\nu^*_{кл} = dE/dI.$$

При этом в области больших квантовых чисел, где разница между наклоном касательных и секущих исчезает, $\nu_{кл} = \nu_{кв}$.

То же самое хорошо иллюстрируется приводимой ниже таблицей XV, где указаны классические частоты обращения для

Таблица XV

Начальное состояние	Конечное состояние	Частота обращения в начальном состоянии, $сек^{-1}$	Квантовая частота, $сек^{-1}$	Частота обращения в конечном состоянии, $сек^{-1}$
$n = 2$	$n = 1$	$0{,}82 \cdot 10^{15}$	$2{,}47 \cdot 10^{15}$	$6{,}58 \cdot 10^{15}$
6	5	$3{,}04 \cdot 10^{13}$	$4{,}02 \cdot 10^{12}$	$5{,}26 \cdot 10^{13}$
10	9	$6{,}58 \cdot 10^{12}$	$7{,}71 \cdot 10^{12}$	$9{,}92 \cdot 10^{12}$
25	24	$4{,}21 \cdot 10^{11}$	$4{,}48 \cdot 10^{11}$	$4{,}76 \cdot 10^{11}$
101	100	$6{,}38 \cdot 10^{9}$	$6{,}48 \cdot 10^{9}$	$6{,}58 \cdot 10^{9}$
501	500	$5{,}23 \cdot 10^{7}$	$5{,}25 \cdot 10^{7}$	$5{,}26 \cdot 17^{7}$

двух соседних целых значений n, вычисленные с помощью формулы (114.2), и соответствующие квантовые частоты, вычисленные по формуле (114.3). Видно, что квантовые частоты для малых n не совпадают с классическими, но лежат между ними. Однако разница между классическими и квантовыми частотами уменьшается по мере возрастания n, и для достаточно больших n становится ничтожно малой.

Полученный результат можно суммировать еще иначе. Из той общей формулировки, которую мы дали квантовым условиям в § 106, следует, что основная причина прерывности механических величин для очень малых систем заключается в «атомизме» действия: существует наименьшая величина действия, равная постоянной Планка $h = 2\pi\hbar = 6{,}62 \cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*; она-то и является как бы «атомом» действия. Если размеры системы и массы частиц таковы, что действие для такой системы сравнимо с h, то квантовый характер явлений сказывается в полной мере; если же действие настолько велико, что можно положить $h = 0$, то прерывность становится незаметной, и должны удовлетворяться законы классической механики.

Этот результат является частным случаем общего принципа, играющего важную роль в современной теоретической физике — *принципа соответствия*. Так, например, формулы механики специальной теории относительности автоматически переходят в формулы ньютоновой механики при $v \ll c$, т. е. если скорости настолько малы, что можно положить $c \to \infty$.

Принцип соответствия требует, вообще, чтобы всякая неклассическая теория в соответствующем предельном случае переходила в классическую.

Упражнения: 1. Доказать, что формула (114.10) имеет место для ротатора, т. е. для частицы, обращающейся по кругу около неподвижного центра (*Указание.* Интеграл действия в случае ротатора есть $I = \oint p_\varphi\, d\varphi$, причем $p_\varphi = \sqrt{2EA}$, где A — момент инерции).

2. Пользуясь формулой (100.5) для энергии водородоподобного атома $E_n = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{n^2h^2} = -\frac{2\pi^2 mZ^2e^4}{I^2}$, где $I = nh$ — интеграл действия, и предполагая, что I меняется непрерывно, вычислить при помощи (114.10) классическую частоту обращения электрона для n-й орбиты и показать, что получаемый таким образом результат совпадает со (114.2).

§ 115. Кризис теории Бора

Теория Бора, с которой мы ознакомились в этой главе, была весьма крупным шагом в развитии теории строения атома. Она с полной отчетливостью показала неприменимость классической физики к внутриатомным явлениям, с одной стороны, и первенствующее значение квантовых законов в микроскопических системах — с другой. Она послужила толчком к большому числу экспериментальных работ, принесших ряд важных результатов; но особенно велико было ее эвристическое значение: даже в тех случаях, когда теория не могла дать количественного объяснения той или другой группе явлений, она давала руководящую нить для отчетливой их классификации и качественной интерпретации. Таким путем, например, огромный эмпирический материал спектроскопии — атомной и молекулярной — трудами ряда исследователей, среди которых большое значение имеют работы русского ученого, академика Д. С. Рождественского и учеников его школы, был впервые приведен в стройную и ясную систему.

Наряду с этими и многими другими положительными сторонами теория обладала существенными недостатками, которые были ясны с самого начала. К числу их относится прежде всего внутренняя логическая противоречивость теории. В самом деле, теория Бора не была ни последовательно классической, ни последовательно квантовой теорией. По шутливому выражению У. Г. Брэгга, в этой теории мы как бы должны были по понедельникам, средам и пятницам пользоваться классическими законами, а по вторникам, четвергам и субботам — квантовыми!

Не удивительно, что после первых успехов теории все яснее и яснее давали себя знать ее недочеты. Прежде всего, даже в простейшем случае водородоподобных атомов теория Бора по-

зволяла вычислять только частоты спектральных линий, но не их интенсивности. Для вычисления интенсивностей приходилось пользоваться принципом соответствия, распространяя его также и на малые квантовые числа и, в конечном счете, производя вычисления по классической электродинамике.

Особенно тягостной была неудача всех попыток построения теории нейтрального атома гелия — одного из простейших атомов периодической системы, непосредственно следующего за атомом водорода и состоящего из трех частиц — ядра и двух электронов. Хотя задача о трех телах в рамках классической механики не может быть решена точно, — в небесной механике были уже давно разработаны превосходные приближенные методы, которые могли бы дать результаты с точностью, вполне достаточной для сравнения с экспериментом. Несмотря на это, многочисленные попытки построения теории атома гелия потерпели полное крушение.

В настоящее время, после открытия своеобразных волновых свойств вещества, о которых речь будет в главе X, совершенно ясно, что теория Бора, опирающаяся на классическую механику, могла быть только переходным этапом к созданию последовательной теории атомных явлений.

СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

§ 116. Флуктуации светового поля

До сих пор мы интересовались проявлениями своеобразных квантовых законов в *движениях* микроскопических частиц. Мы установили, в частности, что процесс испускания света атомом происходит прерывным образом при переходах между различными стационарными состояниями, но вопрос о природе самой лучистой энергии мы пока оставляли в стороне. Однако уже в 1905 г. Эйнштейн указал на то, что существует большое количество экспериментальных фактов и серьезных теоретических соображений, которые неизбежно приводят к представлению о прерывной природе самого излучения. Мы начнем с изложения *теоретических* соображений Эйнштейна. Эти соображения основаны на рассмотрении случайных колебаний (флуктуаций) плотности излучения.

Рассмотрим сначала материальный газ, помещенный в замкнутый резервуар объема V. Выделим теперь какую-нибудь часть объема $v < V$ и будем мысленно следить в различные моменты за числом молекул газа, находящихся внутри v. С молекулярно-статистической точки зрения это число отнюдь не будет строго постоянным, но будет испытывать колебания. Пусть среднее число частиц в объеме v будет $\bar{n}$. Если этот объем достаточно велик и газ находится при нормальном давлении, то мгновенные отклонения от этого среднего числа n будут относительно настолько малы, что ими, вообще говоря, можно пренебречь. Станем теперь уменьшать объем v. Если мы в конце концов представим себе, что этот объем настолько мал, что в нем помещается лишь небольшое число частиц (скажем, в среднем 10), то случайные отклонения от среднего сделаются уже вполне заметными. Такие случайные отклонения и называются флуктуациями. Изучение их является одной из интереснейших и важнейших глав современной статистической физики.

Смолуховский, который много занимался изучением флуктуаций, рассматривал, например, следующую задачу: какова вероятность того, что все молекулы газа, находящиеся в объеме V, соберутся в части v этого объема? Ответ на этот вопрос дать

нетрудно *). Если бы в объеме V находилась только одна молекула, то вероятность найти ее в части v будет, очевидно, пропорциональна v и равна

$$w_1 = \frac{v}{V}. \tag{116.1}$$

Действительно, если $v = V$, то $w_1 = 1$, что и должно быть, так как нахождение молекулы во всем объеме V есть событие достоверное. Пусть, однако, в объеме V находится n независимых молекул. Вероятность найти *одну* молекулу в части объема v выражается формулой (116.1); вероятность найти n независимых молекул в одной и той же части объема, по теореме умножения вероятностей, будет

$$w_n = \left(\frac{v}{V}\right)^n. \tag{116.2}$$

Из этой формулы видно, что если, например, $v = {}^1/_2\, V$, то при сколько-нибудь больших значениях n вероятность w_n, равная

$$w_n = \frac{1}{2^n},$$

будет ничтожно мала.

Эйнштейн рассмотрел аналогичную задачу для случая излучения. Пусть мы имеем замкнутый объем V, наполненный черным излучением при температуре T. Энергия излучения с частотами между ν и $\nu + d\nu$, заключенная внутри этого объема, равна

$$E = V\rho_\nu\, d\nu,$$

где ρ_ν — спектральная плотность излучения. Задача заключается в вычислении вероятности того, что вся эта энергия сконцентрируется в части объема v. Пользуясь статистической термодинамикой и формулой Вина для плотности излучения (*справедливой для высоких частот*)

$$\rho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\, e^{-h\nu/kT}\, d\nu,$$

Эйнштейн нашел, что искомая вероятность равна

$$w = \left(\frac{v}{V}\right)^{E/h\nu}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (116.2), мы видим, что излучение с достаточно короткими длинами волн ведет себя так, как если бы оно состояло из $n = E/h\nu$ независимых корпускул!

Эйнштейн рассмотрел, далее, и вопрос о флуктуациях плотности излучения. Предположим сначала, что излучение действительно состоит из отдельных «атомов» величины $h\nu$, которые мы будем называть *фотонами*. В таком случае плотность излучения будет равна числу фотонов в единице объема,

*) См. приложение IV в конце книги.

умноженному на $h\nu$. Но число фотонов в некотором выбранном объеме, как и число молекул, должно испытывать случайные колебания, флуктуации. Установим сначала меру этих флуктуаций. Если $\bar{n}$ есть среднее число частиц в объеме v, то число частиц n_k, находящихся в данный момент в этом объеме, будет, вообще говоря, отлично от $\bar{n}$: в одних случаях оно будет больше $\bar{n}$, в других — меньше. Отклонение от среднего

$$\Delta n_k = n_k - \bar{n}$$

будет поэтому то положительным, то отрицательным и будет, кроме того, иметь различные абсолютные значения. Однако среднее значение Δn не может служить мерой флуктуаций, так как оно, очевидно, равно нулю

$$\overline{\Delta n} = \overline{(n_k - \bar{n})} = \bar{n} - \bar{n} = 0.$$

Поэтому в качестве меры отклонения удобнее пользоваться квадратом $(n_k - \bar{n})^2$, который всегда положителен. Среднее значение квадрата отклонения

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(n_k - \bar{n})^2}$$

является мерой «разброса» отдельных значений n_k, их отступления от среднего; $\overline{\varepsilon^2}$ поэтому называется квадратичной флуктуацией или дисперсией. Отклонения от среднего можно характеризовать также квадратным корнем из $\overline{\varepsilon^2}$, взятым со знаком плюс:

$$\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\overline{(n_k - \bar{n})^2}},$$

который физики называют средней квадратичной ошибкой, а математики — стандартом. Все эти определения применимы, конечно, не только к случаю отклонений числа частиц, но и к любым случайным флуктуациям.

В математической статистике доказывается простой закон, имеющий место для любых случайных отклонений и состоящий в следующем: если среднее значение случайно изменяющейся величины есть $\bar{n}$, то и квадратичная флуктуация $\overline{\varepsilon^2}$ также равна $\bar{n}$ *), а потому среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = \sqrt{\bar{n}}$. Смысл этого знакона станет ясным из численных примеров. Пусть $\bar{n}$ есть по-прежнему среднее число *частиц*. Если $\bar{n} = 100$, тогда $\overline{\varepsilon^2}$ также равно 100, а $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10$ или, иначе, колебания числа частиц в среднем составляют 10% их числа; если же $\bar{n} = 10^{10}$, то $\sigma = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^5$ или $10^{-3}\,\%\bar{n}$, а при $\bar{n} = 10^{20}$ $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}} = 10^{10}$, или $10^{-8}\,\%\bar{n}$.

*) См. приложение IV в конце книги.

Если нас интересуют колебания энергии, то, допуская, что энергия состоит из независимых атомов величины $h\nu$, имеем $E = \bar{n}h\nu$, а потому

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta n^2}\,(h\nu)^2 = (\bar{n} \cdot h\nu)\,h\nu = \bar{E} \cdot h\nu. \qquad (116.3)$$

Флуктуации энергии возможны, однако, и в том случае, если излучение имеет чисто волновую природу. В самом деле, в этом случае мы считаем, что полость V бороздят во всех направлениях электромагнитные волны. Среди них имеются волны, близкие по направлению и по частоте, которые между собою интерферируют. Так как, однако, направления и фазы этих волн случайным образом меняются, то беспорядочно меняется и результат этих интерференций: распределение максимумов и минимумов в пространстве и во времени не остается постоянным. Именно поэтому мы и называем такие волны некогерентными. Макроскопические приборы, которыми мы пользуемся, усредняют эту непрерывно меняющуюся интерференционную картину и обнаруживают кажущееся отсутствие интерференции. Однако с микроскопической точки зрения мы имеем в этом случае типичные флуктуации энергии.

Амплитуда в данном месте, возникающая в результате интерференции волн с амплитудами a_1 и a_2, колеблется от максимального значения $a_1 + a_2$ до минимального $a_1 - a_2$. Соответственно, энергия меняется от $(a_1 + a_2)^2$ до $(a_1 - a_2)^2$, проходя через промежуточные значения, в зависимости от разности фаз; в среднем же она равна $a_1^2 + a_2^2$. Поскольку среднее значение энергии пропорционально квадрату амплитуды, квадратичная флуктуация энергии будет пропорциональна четвертой степени амплитуды, т. е. квадрату энергии. Точное вычисление *) дает для $\overline{\varepsilon^2}$ следующую формулу:

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V\,d\nu}\,\overline{E^2}. \qquad (116.4)$$

Статистическая термодинамика позволяет найти выражения для квадратичной флуктуации энергии без помощи наглядных картин, которыми мы пользовались до сих пор. Именно, на основании самых общих положений физической статистики (распределение Гиббса), для квадратичной флуктуации энергии получается следующая формула **):

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2\,\frac{d\bar{E}}{dT}. \qquad (116.5)$$

*) Это вычисление довольно сложно, ввиду чего мы не приводим его здесь. Интересующиеся могут найти его в книге: Г. А. Лоренц, Статистические теории в термодинамике, ОНТИ, 1935, стр. 119.

**) Вывод см. в приложении IV в конце книги.

Но так как $E = V\rho_\nu d\nu$, то в зависимости от того, какой из формул для плотности энергии воспользоваться при вычислении, — получаются и разные результаты.

Мы знаем, что в области высоких частот хорошо оправдывается формула Вина:

$$\rho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}\, d\nu;$$

наоборот, в области низких частот применима формула Рэлея — Джинса:

$$\rho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^2}\, kT\, d\nu,$$

которая для достаточно длинных волн дает результаты, хорошо совпадающие с экспериментальными; наконец, формула Планка

$$\rho_\nu\, d\nu = \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

дает правильные результаты *во всем спектре*.

Вычислим теперь $\overline{\varepsilon^2}$ с помощью формулы (116.5), пользуясь последовательно всеми тремя написанными выше законами распределения энергии $\rho_\nu d\nu$.

Начнем с формулы Вина. В этом случае имеем

$$\overline{E} = V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-h\nu/kT}\, d\nu,$$

$$\frac{d\overline{E}}{dT} = V \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{h\nu}{kT^2} e^{-h\nu/kT}\, d\nu = \frac{h\nu}{kT^2} V\rho_\nu\, d\nu = \frac{h\nu}{kT^2}\, \overline{E}.$$

Подставляя в (116.5), получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu \cdot \overline{E}, \tag{116.6}$$

т. е. формулу (116.3). Это показывает, что излучение, подчиняющееся формуле Вина, действительно ведет себя как собрание «атомов излучения».

Рассмотрим теперь другой крайний случай: возьмем для плотности излучения формулу Рэлея — Джинса. Имеем

$$\overline{E} = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, kT\, d\nu,$$

$$\frac{d\overline{E}}{dT} = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, k\, d\nu$$

и

$$\overline{\varepsilon^2} = kT^2 \frac{d\overline{E}}{dT} = k^2T^2 V \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, d\nu. \tag{116.7}$$

Принимая во внимание, что в этом случае

$$\overline{E} = V\rho_\nu\, d\nu = V \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\, kT\, d\nu,$$

легко привести (116.6) к виду

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{c^3}{8\pi\nu^2 V\, d\nu}\, \overline{E}^2 \tag{116.8}$$

— результат, совпадающий с формулой (116.4), полученной на основании представления о волновой природе излучения.

Мы видим, таким образом, что статистика приводит к следующему своеобразному выводу: в области коротких волн (область применимости закона Вина) излучение должно вести себя как собрание частиц, фотонов; в области длинных волн, где имеет место формула Рэлея — Джинса, оно должно вести себя как волны. Однако оба использованных нами закона излучения являются предельными законами. Возьмем, наконец, формулу Планка, *справедливую для любых длин волн*, и вычислим при ее помощи, пользуясь той же статистической формулой (116.5), квадратичную флуктуацию. В этом случае

$$\overline{E} = V \frac{8\pi h\nu^3\, d\nu}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Для вычисления $\overline{\varepsilon^2}$ нужно найти производную $d\overline{E}/dT$. Обозначив для краткости

$$\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = f,$$

имеем

$$\frac{df}{dT} = \frac{h\nu}{kT^2} \cdot \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}.$$

Легко убедиться прямым вычислением, что

$$\frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} = f + f^2.$$

Руководствуясь этими замечаниями, читатель без труда получит для $\overline{\varepsilon^2}$ следующую формулу, *состоящую из двух членов*:

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\overline{E} + \frac{c^3}{8\pi\nu^2\, d\nu V}\, \overline{E}^2. \tag{116.9}$$

Первый член совпадает с формулой (116.6), т. е. соответствует чисто корпускулярному представлению о природе света. Второй член совпадает с формулой (116.8) и, следовательно, соответствует чисто волновому представлению. Мы приходим, таким образом, к поразительному выводу, что свет должен обладать как бы двумя аспектами: корпускулярным и волновым. Первый

проявляется с особенной отчетливостью и в коротковолновой части спектра, второй — в длинноволновой. Ни один из этих аспектов сам по себе не дает полной картины природы света; только их сочетание позволяет полностью объяснить все его проявления.

В настоящей главе нас будут интересовать исключительно корпускулярные свойства света. Нам необходимо убедиться в том, что существует большой круг явлений, которые наиболее непосредственно объясняются, если рассматривать свет как поток фотонов. Явления же, в которых проявляется волновой аспект природы света (интерференция, дифракция), достаточно хорошо известны из классической оптики.

§ 117. Фотоэффект и уравнение Эйнштейна

К числу явлений, в которых обнаруживаются корпускулярные свойства света, принадлежит прежде всего освобождение электронов под действием света — фотоэффект.

В 1888 г. Генрих Герц заметил, что проскакивание искры между цинковыми шариками разрядника значительно облегчается, если один из них осветить ультрафиолетовым светом. Это явление было подробно изучено в классических работах русского физика А. Г. Столетова, который разработал методику исследования фотоэффекта (конденсатор Столетова) и установил ряд важных закономерностей. Оказалось, что явление это основано на удалении *отрицательного* электричества с поверхности металла под действием ультрафиолетового света. Дальнейшие исследования выяснили, что сущность фотоэффекта заключается в освобождении *электронов*. Особенно ясно это было показано изящными опытами советского физика А. Ф. Иоффе с фотоэффектом на металлических пылинках. Микроскопические частицы металла, получавшиеся вследствие распыления электродов при горении дуги между ними, вводились в конденсатор. Разность потенциалов между пластинами конденсатора подбиралась так, чтобы одна из этих пылинок оставалась уравновешенной в поле зрения микроскопа. При освещении ультрафиолетовым светом пылинка время от времени изменяла свой заряд, и равновесие нарушалось; вновь подбирая соответствующую разность потенциалов, можно было вернуть пылинку в центр поля зрения. Зная уравновешивающие потенциалы, можно было вычислить величину заряда, каждый раз теряемого пылинкой (см. § 3). Оказалось, что этот заряд всегда представляет собою целое кратное заряда электрона.

Качественное объяснение фотоэффекта с волновой точки зрения *на первый взгляд* не представляет трудности. В самом деле, это объяснение могло бы выглядеть так: падающая электромагнитная волна вызывает вынужденные колебания электронов в металле; при резонансе между собственным периодом колебания электрона и периодом падающей волны амплитуда колебаний электрона становится настолько большой, что он может вырваться за пределы поверхности металла. Очевидно, что если эта картина верна, то кинетическая энергия, с какой электрон покидает металл, должна заимствоваться у падающей волны, и поэтому естественно ожидать, что энергия фотоэлектрона должна находиться в прямой связи с интенсивностью падающего света. На самом же деле многочисленные опыты показали, что энергия фотоэлектронов *абсолютно не зависит* от интенсивности света: повышение интенсивности увеличивает лишь *число* фотоэлектронов и притом в количестве, строго пропорциональном интенсивности, — но не их скорость. Последняя зависит только от частоты падающего света, а именно, с увеличением частоты *линейно* возрастает и энергия фотоэлектронов.

Все эти законы фотоэффекта представляются непонятными с точки зрения волновой природы света. Независимость энергии фотоэлектронов от интенсивности света пытались объяснить тем, что свету приписывалась роль «спускного механизма», т. е. предполагалось, что электрон набирает свою энергию не за счет падающей волны, но за счет тепловых движений в металле, так что роль света сводится только к освобождению электрона. Однако при этом остается совершенно непонятным влияние частоты света и, кроме того, если бы это было верно, фотоэффект должен был бы сильно зависеть от температуры металла, чего на самом деле нет.

Эйнштейн указал на то, что все эти трудности исчезают, если рассматривать свет как поток фотонов величины $h\nu$, т. е. стать на чисто корпускулярную точку зрения. Качественная картина механизма фотоэффекта с этой точки зрения такова: фотон, поглощаясь, отдает свою энергию электрону, и если эта энергия достаточна для того, чтобы освободить электрон от удерживающих его связей, то он выходит за пределы поверхности металла. Так как вероятность одновременного поглощения двух фотонов одним электроном ничтожно мала, то каждый освобожденный электрон заимствует свою энергию у *одного фотона* (обратное, вообще говоря, не имеет места, т. е. не каждый поглощенный фотон освобождает электрон).

Поэтому *число* освобожденных фотоэлектронов должно быть пропорционально числу поглощенных фотонов, т. е. пропорционально интенсивности света (закон Столетова). Но *энергия* фотоэлектрона зависит только от энергии поглощенного фотона; последняя же равна $h\nu$, откуда следует, что энергия фотоэлектрона должна линейно зависеть от частоты и вовсе не зависеть от интенсивности (числа фотонов).

Энергетический баланс при поглощении фотона может быть в самом общем случае выражен следующим простым уравнением, которое обычно называется уравнением Эйнштейна:

$$h\nu = P_1 + P_2 + eV. \qquad (117.1)$$

Здесь P_1 — энергия отрыва электрона от атома (энергия ионизации); P_2 — работа выхода электрона за пределы поверхности тела и eV — кинетическая энергия освобожденного фотоэлектрона.

Металлы характеризуются тем, что у них имеется большое количество свободных электронов; поэтому для металлов P_1 можно считать равным нулю. Зато для выхода за пределы поверхности металла электрон должен преодолеть поле, благодаря наличию которого электроны оказываются запертыми внутри металла как бы в ящике. Работа, которую нужно затратить на преодоление этого поля, и есть работа выхода P_2. Таким образом, для металлов уравнение Эйнштейна имеет вид

$$h\nu = eV + P_2. \qquad (117.2)$$

Очевидно, что если $h\nu < P_2$, то электрон не сможет выйти за пределы поверхности металла. Это значит, что существует некоторая минимальная частота $h\nu_0 = P_2$, которая еще способна вызвать фотоэффект; при меньших частотах он не наблюдается (красная граница фотоэффекта).

Необходимость затраты работы для освобождения электрона из металла проявляется не только в случае фотоэффекта, но также и в случае испускания электронов накаленными телами (термоионная эмиссия). Работа выхода может быть определена экспериментально, независимо от фотоэффекта, именно путем исследования термоионной эмиссии. Она имеет порядок величины нескольких электрон-вольт.

В таблице XVI дается несколько примеров величины работы выхода.

Таблица XVI

Металл	Работа выхода (в электрон-вольтах)	Металл	Работа выхода (в электрон-вольтах)
Li	2,4	W	4,5
Na	2,1	Pd	5,0
K	2,0	Pt	6,3
Cs	0,7		

Следует заметить, что на величину работы выхода существенное влияние оказывает состояние поверхности металла и в

особенности наличие пленки адсорбированного газа. Цифры, приведенные в таблице, относятся к металлам с обезгаженной поверхностью.

Зная работу выхода, можно вычислить длину волны красной границы фотоэффекта, λ_0:

$$P_2 = h\nu_0 = hc/\lambda_0.$$

Такие вычисления показывают, что для щелочных металлов λ_0 лежит в видимой части спектра (например, для калия $\lambda_0 = 0{,}6$ *мкм*), а для вольфрама, платины и других металлов с работой выхода порядка 5—6 *эв* — в ультрафиолете (например, для вольфрама $\lambda_0 = 0{,}27$ *мкм*).

Упражнение. Вычислить длины волн красной границы для всех металлов, приведенных в таблице XVI.

§ 118. Экспериментальная проверка уравнения Эйнштейна

Уравнение Эйнштейна допускает экспериментальную проверку. Согласно (117.2) между частотой падающего света и энергией вырванных им фотоэлектронов eV должна существовать линейная связь. Таким образом, возбуждая фотоэффект различными длинами волн и измеряя энергию освобождаемых фотоэлектронов, можно убедиться в правильности уравнения Эйнштейна и, кроме того, определить численное значение h как тангенс угла наклона получающейся прямой.

Для измерения энергии фотоэлектронов в большинстве случаев пользуются методом «задерживающего потенциала», описанным в § 91.

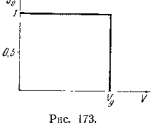


Рис. 173.

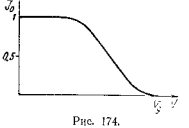


Рис. 174.

Если бы все освобождаемые электроны имели одинаковую скорость, то зависимость силы фототока от тормозящего потенциала имела бы вид, изображенный на рис. 173: до тех пор, пока тормозящий потенциал не достигнет определенной величины $V = V_s$, сила тока не зависит от потенциала. При $V = V_s$ ток сразу становится равным нулю. Это именно тот потенциал V_s,

при котором кинетическая энергия электрона равна работе, которую электрон должен совершить для преодоления тормозящего поля

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_g.$$

Таким образом, этот предельный потенциал V_g служит мерой энергии фотоэлектронов: она равна eV_g электрон-вольт.

В действительности такого резкого спадания тока никогда не наблюдается. Кривая зависимости тока от тормозящего потенциала обычно имеет вид, изображенный на рис. 174.

Постепенное спадание тока объясняется тем, что электроны освобождаются не с одной определенной скоростью, но имеется непрерывный набор скоростей. При этом кривая рис. 174, представляющая собою вольтамперную характеристику, позволяет отыскать и распределение электронов по энергиям. Для этого нужно произвести графическое дифференцирование вольтамперной характеристики, как это уже было разъяснено в § 91. Однако при экспериментальной проверке уравнения Эйнштейна нас интересует не распределение электронов по энергии, но *максимальная* энергия, так как это есть именно та энергия, с которой освобождаются фотоэлектроны с поверхности металла.

Два обстоятельства сильно затрудняют получение точных результатов. Во-первых, экспериментальная кривая J/J_0 в функции V_g не пересекает ось абсцисс, как показано на рис. 174, но подходит к ней асимптотически, ввиду чего максимальный задерживающий потенциал оказывается в известной степени неопределенным. Во-вторых, как и во всех подобных опытах, контактная разность потенциалов, трудно доступная для точного определения, смещает всю кривую.

Неизбежное присутствие этой контактной разности потенциалов и трудность ее учета, а также ряд других экспериментальных затруднений и источников ошибок — все это привело к тому, что безупречное подтверждение уравнения Эйнштейна было получено не сразу. После некоторых предварительных работ, вызвавших серьезные возражения, Милликену удалось при помощи остроумной, но очень сложной установки, дать искомое экспериментальное доказательство и точно определить h.

В настоящее время, благодаря усовершенствованию техники высокого вакуума и применению удобного метода сферического конденсатора, измерения чрезвычайно упростились. Преимущество метода сферического конденсатора, впервые разработанного П. И. Лукирским и использованного для экспериментальной проверки уравнения Эйнштейна П. И. Лукирским и С. С. Прилежаевым, заключается в том, что благодаря особенностям движения электронов в поле такого конденсатора кривая

тока в зависимости от задерживающего потенциала спадает к нулю круто, вследствие чего максимальный задерживающий потенциал может быть определен очень точно.

На рис. 175 приведена схема расположения опыта. Здесь L — источник света (кварцевая ртутная лампа), FM — кварцевый

Рис. 175. Схема исследования фотоэффекта при помощи сферического конденсатора.

монохроматор, позволяющий выделять из спектра одну линию. Через кварцевое окошко A свет попадает внутрь стеклянного посеребренного изнутри шара S, который служит наружной обкладкой конденсатора. Металлический шарик N, сделанный из исследуемого металла, служит внутренней обкладкой и освещается монохроматическим светом. Потенциометр R позволяет накладывать на обкладку конденсатора S определенный потенциал, измеряемый вольтметром V. Для измерения силы фототока был применен «метод зарядки»: по мере освобождения электронов из шарика N, положительный потенциал шарика возрастает. Скорость увеличения потенциала шарика, измерявшаяся при помощи квадрантного электрометра E, служила мерой силы фототока. Практически для характеристики скорости зарядки измерялось отклонение электрометра за определенный промежуток времени (1,5—2 минуты). На рис. 176 приведены три кривые, полученные при освещении цинкового шарика длинами волн: 1 — 2302 Å, 2 — 2537 Å и 3 — 3130 Å.

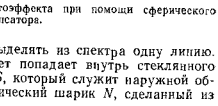


Рис. 176. Фотоэффект на цинке.

Спадание кривых начинается при одном и том же потенциале независимо от длины волны. Этот потенциал как раз равен контактной разности потенциалов, которая, таким образом, определяется без специальных измерений. Если найти при помощи таких кривых максимальную энергию фотоэлектронов и построить график зависимости этой энергии от частоты, то получаются прямые, приведенные на рис. 177. Тем самым подтверждается линейная связь между $h\nu$ и eV; тангенс угла наклона этих прямых равен h/e, так что, определив угол наклона, можно вычислить h при помощи известной величины e.

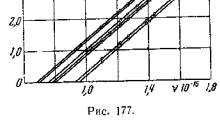


Рис. 177.

§ 119. Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

Если энергия связи внутренних электронов значительно меньше энергии фотона $h\nu$, вызывающего фотоэффект, то в уравнении Эйнштейна можно пренебречь и величиной P_2, и величиной P_1 по сравнению с $h\nu$. В этом случае уравнение Эйнштейна принимает самый простой вид

$$h\nu = eV. \qquad (119.1)$$

Если это уравнение прочитать слева направо, то оно указывает, какова энергия электрона, освобождаемого фотоном $h\nu$. Если же его прочитать справа налево, то оно требует, чтобы за счет электрона с энергией eV получался фотон $h\nu$. Такой процесс превращения энергии быстро движущегося электрона в энергию фотона представляет собою возникновение рентгеновских лучей при торможении электронов. На самом деле механизм явления не так прост, и при торможении электрона возникает целый сплошной спектр рентгеновских лучей. Однако уравнение Эйнштейна безусловно требует, чтобы максимальная энергия получающихся при этом фотонов удовлетворяла условию (119.1).

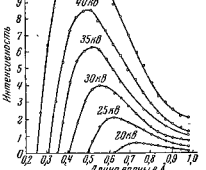


Рис. 178. Коротковолновая граница сплошного спектра рентгеновских лучей при различных потенциалах.

Опыт показывает, что распределение энергии в сплошном спектре рентгеновских лучей имеет вид, изображенный на рис. 178, где приведен ряд сплошных спектров, полученных при различных потенциалах на электродах рентгеновской трубки с вольфрамовым антикатодом. Каждый из этих спектров резко ограничен со стороны коротких длин волн (высоких частот). Эмпирически было найдено, что длина волны λ_{min}, соответствующая коротковолновой границе, связана с приложенным потенциалом соотношением

$$\lambda_{min} V = \text{const}, \qquad (119.2)$$

очевидно, тождественным с уравнением Эйнштейна (119.1). Действительно, заменяя в (119.1) ν через c/λ, получаем

$$\lambda_{min} V = ch/e = \text{const}. \qquad (119.3)$$

Соотношение (119.3) можно применить для определения h; получающееся при этом значение является наиболее достоверным.

§ 120. Точное определение постоянной Планка

Так как квантовые законы обмена энергией имеют место в большом числе явлений, то существует множество возможностей вычисления h из экспериментальных данных. Укажем прежде всего, что уже законы излучения абсолютно черного тела дают такую возможность. Например, в формулы Планка и Вина, выраженные через длину волны, входит постоянная $c_2 = hc/k$. Экспериментальное определение этой постоянной дает

$$c_2 = 1{,}4384 \ см \cdot град,$$

откуда, пользуясь значениями c и k:

$$c = 2{,}99793 \cdot 10^{10} \ см \cdot сек^{-1},$$

$$k = 1{,}3806 \cdot 10^{-16} \ эрг \cdot град^{-1},$$

получаем

$$h = 6{,}558 \cdot 10^{-27} \ эрг \cdot сек.$$

Более непосредственно определяется h из фотоэффекта. В самом деле, наклон прямых рис. 177 дает h/e, так что точность определения h этим путем, помимо точности самого эксперимента, зависит от достоверности еще одной константы e, тогда как в рассмотренном выше методе требуется знание еще двух констант c и k. Из фотоэффекта получено

$$h = 6{,}547 \cdot 10^{-27} \ эрг \cdot сек.$$

Наиболее точным методом определения h считается метод, основанный на определении коротковолновой границы рентгеновского спектра. Самое определение производится или из кривых, подобных изображенным на рис. 178, т. е. из распределения энергии в спектре при постоянном потенциале (рис. 179, *а*) или при помощи метода «изохромат». Метод «изохромат» заключается в следующем. Спектрометр для рентгеновских лучей устанавливается так, чтобы в ионизационную камеру попадали лучи одной и той же определенной длины волны, и измеряется интенсивность в зависимости от наложенного на трубку потенциала. На основании уравнения Эйнштейна

Рис. 179. *а*) Кривая распределения энергии в сплошном рентгеновском спектре. *б*) Изохромата.

$$eV = h\nu = hc/\lambda,$$

выбранная длина волны появляется при строго определенном потенциале $V_0 = hc/\lambda e$; при дальнейшем увеличении потенциала интенсивность растет по некоторой кривой, называемой «изохроматой» (рис. 179, *б*). Разница между методом определения λ_{min} из спектральной кривой и методом изохромат иллюстрируется рис. 179. Несколько примеров изохромат приведено на рис. 180. Экстраполируя каждую из кривых до пересечения с осью абсцисс, находим V_0, а затем при помощи уравнения Эйнштейна и h. Наиболее точные измерения, выполненные в последнее время, дали

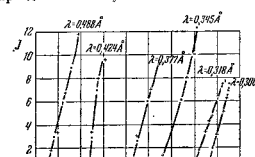


Рис. 180. Примеры изохромат.

$$\frac{h}{e} = (1{,}37920 \pm 0{,}00009) \cdot 10^{-17}\ эрг \cdot сек\ \text{СГСЭ}^{-1}.$$

Отсюда, полагая $e = 4{,}8030 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ, находим

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек.$$

Соответственно для $\hbar = h/2\pi$ получается значение, приведенное на стр. 341:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек}{2\pi} = 1{,}054 \cdot 10^{-27}\ эрг \cdot сек.$$

§ 121. Другие опыты, обнаруживающие корпускулярные свойства света

В § 116 мы видели, что корпускулярные свойства света должны наиболее отчетливо проявляться в опытах с коротковолновым излучением. Не случайно волновые свойства рентгеновских лучей были окончательно установлены лишь через 17 лет после открытия самих лучей.

Из многочисленных опытов с рентгеновскими и γ-лучами, обнаруживающих с большой ясностью корпускулярные свойства этих лучей, мы рассмотрим только два: первый принадлежит А. Ф. Иоффе и Н. И. Добронравову, второй — Боте.

Рис. 181. Схема опыта Иоффе и Добронравова.

На рис. 181 дана схема миниатюрной рентгеновской трубки, применявшейся в опытах Иоффе и Добронравова. В толстой эбонитовой пластинке просверлены отверстия R и L. Через R из образовавшейся полости удаляется воздух; через отверстие L, закрытое кварцевым окошком, освещается ультрафиолетовым светом конец алюминиевой проволоки K толщиной 0,2 *мм*. Освобождаемые при этом фотоэлектроны ускоряются потенциалом в 12 000 *в*, наложенным на проволочку K, и тормозятся тонким алюминиевым листочком A, закрывающим сверху отверстие в полости. Толщина этого листочка столь мала ($5 \cdot 10^{-3}$ *мм*), что он практически не поглощает рентгеновских лучей, образующихся при торможении электронов. Освещение проволочки подбиралось настолько слабым, чтобы она давала около 1000 фотоэлектронов в секунду, а следовательно, и число рентгеновских импульсов было около 1000 в секунду.

Алюминиевая фольга A служила вместе с тем нижней пластиной конденсатора Милликэна AB, в котором уравновешивалась микроскопическая висмутовая пылинка W радиусом около $3 \cdot 10^{-5}$ *см* на расстоянии от антикатода A примерно в 0,02 *см*.

Опыт показал, что время от времени пылинка выходит из равновесия, т. е. что рентгеновские лучи освобождают из нее фотоэлектрон, приобретающий энергию, согласно уравнению Эйнштейна, около 12 000 *в*. Это происходит в среднем через каждые 30 минут. В течение этих 30 минут через пылинку проходит около $1{,}8 \cdot 10^6$ рентгеновских импульсов. Если бы энергия этих импульсов распространялась в виде сферических волн, то каждый из них отдавал бы пылинке очень малую часть своей

энергии вследствие малой величины телесного угла, под которым видна пылинка из антикатода. Эта энергия, кроме того, распределялась бы между очень большим числом электронов, образующих пылинку, и совершенно невероятно, чтобы раз в 30 минут все эти электроны отдавали свою энергию каким-то загадочным механизмом одному электрону, который должен при этом приобрести ровно столько энергии, сколько ее имел фотоэлектрон, вырванный из проволочки и ускоренный потенциалом в 12 000 *в*.

Таким образом, с волновой точки зрения результаты опыта Иоффе и Добронравова непонятны. Напротив, с корпускулярной точки зрения они представляются вполне естественными.

Рис. 182. Схема опыта Боте.

Действительно, с этой точки зрения, энергия распространяется в виде локализованных в пространстве фотонов, и электрон выбивается из пылинки только тогда, когда в нее попадает фотон. Подсчитаем вероятность того, что фотон попадает в пылинку. В опытах Иоффе и Добронравова расстояние от пылинки до антикатода было $d = 0{,}02$ *см*, а радиус пылинки $r = 3 \cdot 10^{-5}$ *см*. Сфера радиуса d имеет поверхность $4\pi d^2 = 4\pi(0{,}02)^2 = 16\pi \cdot 10^{-4}$ *см*^{2}. Площадь, занимаемая пылинкой на этой сфере, т. е. эффективное сечение пылинки будет

$$\pi r^2 = \pi(3 \cdot 10^{-5})^2 = 9\pi \cdot 10^{-10}\ см^2.$$

Если считать, что для движения отдельного рентгеновского фотона все направления равновероятны, то очевидно, что вероятность попадания фотона в пылинку будет равна отношению эффективного сечения пылинки к поверхности сферы, т. е. будет равна $\frac{9\pi \cdot 10^{-10}}{16\pi \cdot 10^{-4}} = \frac{1}{1\,800\,000}$. Следовательно, в среднем один из 1 800 000 фотонов попадает в пылинку. Так как в 1 *сек* вылетает 1000 фотонов, то в среднем в пылинку будет попадать 1 фотон в 30 *мин*, что вполне согласуется с результатами рассматриваемого опыта.

Опыт Боте показывает, что при возбуждении рентгеновских лучей флуоресценции энергия распространяется не в виде сферических волн, но в виде направленных фотонов. Тонкая железная или медная фольга F (рис. 182) подвешивалась между двумя

счетчиками Гейгера Z_1 и Z_2. Первичные рентгеновские лучи достаточной жесткости освещали фольгу сверху (в направлении стрелки P) и возбуждали ее к испусканию характеристического излучения флуоресценции. Если бы энергия этого излучения распространялась в виде сферических волн, то оба счетчика должны были бы реагировать одновременно.

Опыт показывает, однако, что этого нет: счетчики реагируют совершенно независимо один от другого, и число совпадений не превышает ожидаемого числа *случайных* совпадений. Все происходит так, как если бы возникающее излучение флуоресценции распространялось в виде направленных фотонов, которые могут попадать либо в один, либо в другой счетчик.

§ 122. Флуктуации светового потока

Корпускулярные свойства света влекут за собой еще одно важное следствие: необходимость существования флуктуации в слабых световых потоках. В самом деле, если свет можно рассматривать как поток фотонов, то каждый фотон, попадая в приемное устройство (фотоэлемент, ионизационную камеру и т. п.), вызывает то или иное действие независимо от других фотонов. При обычных интенсивностях число этих элементарных актов поглощения настолько велико, что мы не замечаем никакой дискретности в излучении. Представим себе, однако, что поток настолько слаб, что число фотонов, попадающих в приемник в единицу времени, измеряется единицами или десятками; если, кроме того, приемник настолько чувствителен, что он реагирует на попадание малого числа фотонов, то неизбежно должны сказаться флуктуации этого числа.

Такие флуктуации были обнаружены прежде всего с очень коротковолновым излучением, именно с рентгеновскими и γ-лучами радиоактивных веществ. В этом случае, как уже неоднократно указывалось, вследствие высокой частоты излучения, фотоны очень велики. При поглощении их атомами или молекулами происходит ионизация и освобождаются быстрые электроны, которые в свою очередь вызывают ионизацию в большом числе других молекул ионизационной камеры или счетчика. Таким путем первичный эффект элементарного акта поглощения значительно усиливается, и наблюдение слабого потока облегчается. Рассмотренный в § 121 опыт Боте с двумя счетчиками, регистрирующими направленные в противоположные стороны фотоны слабого рентгеновского излучения железной фольги, в сущности относится к числу флуктуационных опытов.

Особенный интерес представляет обнаруженные флуктуации слабых потоков *видимого света*. Такие флуктуации на самом деле наблюдались С. И. Вавиловым и его сотрудниками в

обширной серии работ, а после него также и рядом других исследователей. Воспринимающим устройством во всех этих опытах является глаз человека, который обладает чувствительностью, пока еще не достигнутой *) фотоэлектрическими приборами. Именно, согласно опытам Вавилова, для глаза, достаточно долго пробывшего в темноте, максимальная чувствительность определенного периферического участка сетчатки составляет около 200 фотонов и довольно значительно колеблется у различных наблюдателей. При этом указанная чувствительность относится к энергии, *падающей* на глаз. Так как свет, прежде чем достигнуть сетчатки, проходит через ряд сред, в которых он отражается и частично поглощается, то минимальное число фотонов, вызывающих зрительное ощущение, значительно меньше указанного числа и составляет, по оценке Вавилова, немного десятков, а может быть, и несколько фотонов.

Для того чтобы постановка опытов Вавилова была понятна, необходимо напомнить некоторые факты, относящиеся к устройству и физиологическим функциям глаза.

Как известно, в сетчатой оболочке глаза распределены два типа воспринимающих свет элементов: колбочки и палочки. Колбочки преобладают в частях сетчатки, расположенных вблизи оптической оси глаза, а на периферии их нет совсем; наоборот, палочки преобладают в периферических частях сетчатки. Эти два рода элементов выполняют различные функции: с колбочками связан аппарат цветного зрения, тогда как палочки обусловливают серое, так называемое сумеречное или периферическое зрение. Чувствительность палочек во много раз выше чувствительности колбочек. Поэтому в опытах по определению предела воспринимающей способности глаза, каковыми и являются опыты с флуктуациями, используется именно бесцветное периферическое зрение. Все эти опыты основаны на существовании резкого *порога зрительного ощущения*: если энергия излучения, падающего на сетчатку, меньше некоторой определенной величины, то глаз совсем не ощущает света. Именно этим свойством зрительного ощущения и воспользовался Вавилов для наблюдения квантовых флуктуаций видимого света. Представим себе, что наблюдается кратковременная вспышка света; пусть порогу соответствует n_0 фотонов, поглощенных за время вспышки, и пусть z — действительное число фотонов, поглощенных за то же время. В таком случае глаз *увидит* вспышку лишь при условии $z \geqslant n_0$, если же $z < n_0$, то зрительное ощущение будет равно нулю, глаз не обнаружит такой вспышки. Очевидно, что если периодически, через определенные промежутки времени посылать

*) Характеристикой необычайной чувствительности глаза служит следующая цифра: при совершенно прозрачной атмосфере человек может видеть эталонную свечу на расстоянии около 25 *км*.

в глаз вспышки столь малой интенсивности, что, вследствие флуктуаций числа фотонов, z будет то больше, то меньше n_0, — глаз наблюдателя то будет, то не будет ощущать вспышку.

Таким образом, существование порога зрительного ощущения дает острый критерий наличия флуктуаций: при колебаниях z около величины n_0 свет или не наблюдают совсем, или видна вспышка. Что же касается колебаний интенсивности в зависимости от различного числа поглощаемых фотонов в условиях, когда $z \geqslant n_0$, то их, по свидетельству Вавилова, в этих опытах на пределе способности глаз к восприятию обнаружить не удается.

Опыты были поставлены следующим образом (рис. 183). Для того чтобы свет вспышки попадал на один и тот же периферический участок сетчатки, глаз наблюдателя фиксировался

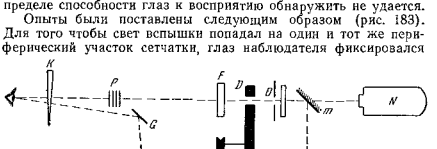


Рис. 183. Схема установки для измерения зрительных квантовых флуктуаций.

слабой лампочкой S, свет которой пропускался через красный фильтр; на получающееся красное пятно и был все время направлен глаз наблюдателя. Свет другой лампочки L, отразившись от зеркала m, падал на диск D с отверстием, вращавшийся синхронным мотором M (1 оборот в секунду). Отверстие имело такие размеры, что диск пропускал свет в течение 0,1 *сек* и задерживал его в течение 0,9 *сек*. Тем самым создавалась вспышка длительностью в 0,1 *сек*, а в течение 0,9 *сек* глаз отдыхал. Подобное устройство необходимо для того, чтобы исключить влияние способности глаза длительно сохранять зрительное впечатление. Зеленый фильтр F был необходим для получения потока определенной длины волны.

В момент, когда наблюдатель видел вспышку он нажимал кнопку хронографа, на движущейся ленте которого получалась отметка. Особое устройство связывало вращающийся диск с другим пером хронографа таким образом, что на той же ленте отмечался каждый оборот диска. Благодаря этому можно было

установить, наблюдается или не наблюдается вспышка, когда отверстие диска пропускает свет.

Яркость зеленого пятна можно было непрерывно уменьшать. При этом оказывается, что вначале наблюдатель отмечает каждую вспышку. При дальнейшем понижении яркости вспышки перестают соответствовать каждому прохождению отверстия диска; наблюдаются флуктуации: при одних прохождениях вспышки видны, при других — их нет. Изучая ленту хронографа после опыта, можно было подвергнуть наблюдения статистическому контролю. С одной стороны, отношение числа наблюденных вспышек к полному числу оборотов диска равно вероятности P появления вспышки; с другой стороны, некоторые дополнительные измерения, на которых мы не останавливаемся, позволяли определить отношение числа фотонов n, *поглощаемых* сетчаткой за одну вспышку, к числу фотонов n_0, поглощаемых сетчаткой в условиях порога зрительного ощущения. Если обозначить это отношение через x

$$n/n_0 = x,$$

то расчет, основанный на теории вероятностей, дает такое соотношение между P и x:

$$P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_0}{2}}\,\frac{1-x}{\sqrt{x}}.$$

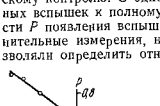


Рис. 184. Результаты флуктуационных наблюдений.

Большой экспериментальный материал, полученный С. И. Вавиловым, показывает во всех без исключения случаях линейную связь между вероятностью P и величиной $(1-x)/\sqrt{x}$. На рис. 184 приведен один пример: сплошная прямая проведена по формуле, а кружками нанесены наблюденные значения. Видно, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую, тем самым подтверждая статистический характер наблюдаемых флуктуаций.

§ 123. Рассеяние рентгеновских лучей (волновая теория)

Рассеяние рентгеновских лучей принадлежит к числу явлений, в которых с особенной ясностью сказывается двойственная природа излучения (см. § 116).

В самом деле, в настоящем и в следующих параграфах мы увидим, что некоторые свойства рассеянного рентгеновского излучения (поляризация, интенсивность) могут быть легко объяснены с волновой точки зрения, тогда как другие свойства (изменение частоты при рассеянии) без труда объясняются, если приписать рентгеновским лучам корпускулярную природу.

Один из важных выводов волновой теории рассеяния рентгеновских лучей состоит в том, что даже тогда, когда падающее излучение не поляризовано, рассеянное излучение должно быть, вообще говоря, частично поляризовано, а при определенных условиях—поляризовано полностью.

Рассмотрим возникновение этой поляризации. Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в направлении, параллельном оси z (рис. 185), падает в точке O на электрон. Электрический вектор этой волны, действуя на электрон, заставляет его совершать гармонические колебания, вследствие чего электрон становится центром сферической волны, которая и представляет собою рассеянную волну. Рассмотрим состояние поляризации этой волны в точке P, лежащей на продолжении оси y, т. е. в направлении, перпендикулярном к направлению падающей волны. Так как падающая волна не поляризована, то ее электрический вектор $\mathscr{E}$ может иметь любые направления, но он всегда остается в плоскости xy. Разложим его на составляющие $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$. В § 67 [см., например, формулу (67.6)] мы видели, что интенсивность дипольного излучения электрона пропорциональна $\sin^2\vartheta$, где ϑ — угол между направлением колебаний электрона и направлением в точку наблюдения. Поэтому колебания электрона под действием составляющей $\mathscr{E}_y$ в направлении OP не дают излучения ($\vartheta = 0$). Из этого следует,

Рис. 185.

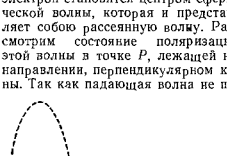


Рис. 186. Схема опыта Баркла для обнаружения поляризации рентгеновских лучей.

что в точку P приходит рассеянное излучение, обусловленное колебаниями под действием одной только составляющей $\mathscr{E}_x$, т. е. излучение, линейно поляризованное с направлением колебаний электрического вектора, перпендикулярным к плоскости, проходящей через направление падающей волны и точку наблюдения P.

Этот вывод подтверждается следующим опытом Баркла, аналогичным известному оптическому опыту с зеркалами Норренберга. Рентгеновские лучи падают в направлении S_1 (рис. 186) на пластинку R_1 (уголь или парафин), которая играет роль поляризатора. Согласно сказанному выше лучи, рассеянные в направлении S_2, должны быть полностью поляризованы. Эта поляризация обнаруживается при помощи второй пластинки R_2, играющей роль анализатора. С этой целью пластинка R_2 вместе с ионизационной камерой E может вращаться около оси, параллельной S_2 (как показано пунктиром). Опыт показывает, что камера E обнаруживает максимальную интенсивность рассеянного излучения, когда S_3 параллельно S_1 (как на чертеже), и минимальную, когда S_3 перпендикулярно к S_1 (т. е. при повороте на 90° по отношению к положению, показанному на чертеже). Но именно этого и следовало ожидать, так как на основании сказанного выше, электрический вектор падающей волны возбуждает в R_2 колебания электронов, перпендикулярные к S_1 и S_2.

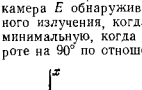


Рис. 187.

Вычислим теперь интенсивность рассеянных лучей. Рассмотрим для этого вынужденные колебания электрона, происходящие под действием плоской волны, распространяющейся в направлении оси z (рис. 187). Положим сначала, что волна линейно поляризована и ее электрический вектор $\mathscr{E}$ колеблется в направлении оси x с частотой ω

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}. \tag{123.1}$$

Интенсивность падающей волны будет тогда согласно § 67 [формула (67.5)]

$$J_0 = \frac{c}{4\pi}\mathscr{E}^2. \tag{123.2}$$

Электрическое поле $\mathscr{E}$ вызывает вынужденные колебания электрона, совершающиеся по оси x с той же частотой ω. Эти колебания дают начало новой сферической волне, мгновенная интенсивность которой в некоторой точке P на расстоянии R от электрона согласно формуле (67.6) равна

$$J = \frac{e^2\dot{x}^2}{4\pi c^3 R^2}\sin^2\vartheta, \tag{123.3}$$

где ϑ — угол между направлением к точке наблюдения P и направлением колебаний электрона. Ускорение электрона $\ddot{x}$, движущегося под действием силы поля $e\mathscr{E}$, очевидно, равно $e\mathscr{E}/m$. Подставляя это в (123.3), находим $J = \frac{e^4\mathscr{E}^2}{4c^3m^2R^2}\sin^2\vartheta$. Заменяя

здесь $\mathscr{E}^2$ через интенсивность падающей волны J_0 по (123.2), получаем

$$J = J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta. \tag{123.4}$$

Это и есть выражение для интенсивности рассеянного излучения в точке P. Мы видим, что распределение интенсивности по направлениям в случае, когда падающая волна линейно поляризована, содержит $\sin^2\vartheta$, т. е. в направлении колебаний интенсивность равна нулю и достигает максимума при $\vartheta = \pi/2$ (см. § 67).

В случае, когда падающая волна не поляризована, зависимость интенсивности рассеяния от направления несколько иная. Рассмотрим этот случай.

Пусть падающая волна по-прежнему распространяется параллельно оси z (рис. 185); электрический вектор поэтому будет лежать в плоскости yx. Разложим его на составляющие $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$ и вычислим интенсивность рассеянного излучения в точке P_1, лежащей в плоскости xz. Так как первичное излучение не поляризовано, то электрический вектор $\mathscr{E}$ может занимать любые положения в плоскости xy. Средние значения квадратов составляющих $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$ будут между собой равны

$$\overline{\mathscr{E}_x^2} = \overline{\mathscr{E}_y^2} = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0,$$

так что интенсивности, соответствующие этим составляющим, будут также равны

$$J_x = J_y = \frac{1}{2}J_0.$$

Каждая из составляющих $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$ создает рассеянную волну; интенсивности этих рассеянных волн в точке P_1 по формуле (123.4) будут (см. рис. 185)

$$J' = J_x\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta_1 = \frac{1}{2}J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\cos^2\varphi, \tag{123.5}$$

$$J'' = J_y\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\sin^2\vartheta_2 = \frac{1}{2}J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2} \tag{123.6}$$

($\sin^2\vartheta_2 = 1$, так как ϑ_2 — угол между плоскостью xz и осью y). Так как колебания $\mathscr{E}_x$ и $\mathscr{E}_y$ некогерентны, то для получения полной интенсивности в P_1 нужно сложить интенсивности J' и J'':

$$J = J' + J'' = J_0\frac{e^4}{m^2c^4R^2}\cdot\frac{1+\cos^2\varphi}{2}. \tag{123.7}$$

Экспериментальная проверка показала, что для рентгеновских лучей не слишком короткой длины волны формула (123.7) дает результаты, вполне удовлетворительно совпадающие с опытом. На рис. 188 сплошная кривая представляет распределение интенсивности, вычисленное по формуле (123.7); пунктирные кривые представляют экспериментальные результаты для двух резко различных длин волн. Видно, что для более длинных волн

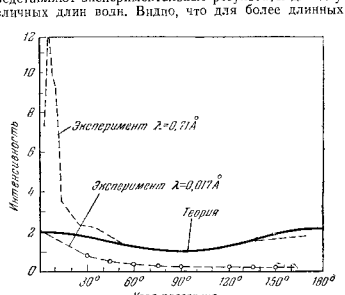


Рис. 188. Сопоставление волновой теории рассеяния с экспериментальными данными.

($\lambda = 0{,}71$ Å) и для не слишком малых углов рассеяния экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретической кривой. Сильное расхождение между экспериментальными и теоретическими данными для углов, меньших 30°, объясняется тем, что в приведенном простом выводе не учитывается интерференция волн, рассеянных соседними электронами атома.

Напротив, для малых длин волн ($\lambda = 0{,}017$ Å) экспериментальная кривая на всем протяжении расходится с теоретической. Она не обнаруживает около 90° никакого минимума, требуемого теорией, и, кроме того, экспериментально найденная интенсивность рассеяния для всех углов значительно меньше теоретической.

Это расхождение показывает, что для очень малых длин волн классическая волновая теория рассеяния рентгеновских лучей становится совершенно неудовлетворительной.

Упражнения: 1. Пользуясь формулой (123.4), доказать, что волновая энергия, рассеиваемая электроном по всем направлениям, выражается формулой

$$S = \frac{8\pi}{3}\,\frac{e^4}{m^2c^4}\cdot I_0.$$

2. Процент поляризация рассеянного излучения характеризуется дробью

$$\frac{I'' - I'}{I'' + I'}\cdot 100\%.$$

Доказать, что для точек наблюдения, лежащих в плоскости xy (рис. 185), поляризация полная (100%), а для точек, лежащих на оси z, процент поляризации равен нулю.

§ 124. Эффект Комптона

Недостаточность волновой теории рассеяния рентгеновских лучей, обнаруживающаяся при изучении интенсивности рассеяния очень коротких длин волн, особенно резко сказывается, если обратиться к рассмотрению частоты рассеянных лучей. Согласно волновой теории механизм рассеяния состоит «в раскачивании» электронов электромагнитным полем падающей волны. Естественно ожидать поэтому, что частота рассеянного излучения должна совпадать с частотой падающего излучения.

Между тем уже старые наблюдения показывали, что при рассеянии рентге-

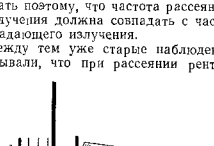


Рис. 189. Схема опыта Комптона.

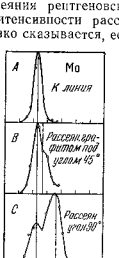


Рис. 190. Эффект Комптона на графите.

новских и особенно γ-лучей длина волны изменяется, а именно, в составе рассеянного излучения появляются более длинные волны, обладающие меньшей проницающей способностью. Так как до открытия спектроскопии рентгеновских лучей для

определения длины волны приходилось пользоваться грубыми методами, основанными на различии абсорбции лучей разных длин волн, то в деталях явления разобраться было трудно и его обычно приписывали влиянию вторичных факторов.

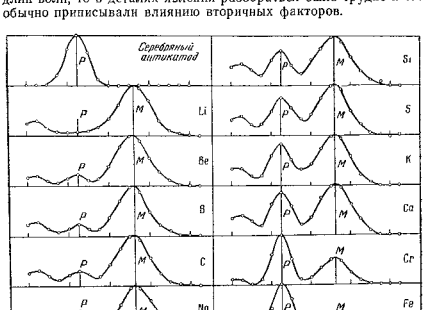


Рис. 191. Эффект Комптона на радиаторах различной природы (Комптон и Ву).

В 1922—1923 гг. А. Комптон, воспользовавшись рентгеновским спектрографом, тщательно изучил это явление и показал, что оно отнюдь не может быть сведено к влиянию побочных факторов, но непосредственно связано с самим механизмом рассеяния. Схема опыта Комптона приведена на рис. 189. Излучение рентгеновской трубки с молибденовым антикатодом T рассеивается куском графита R; рассеянное излучение, пройдя через ряд щелей, падает на кристалл рентгеновского спектрографа. Смещая и поворачивая около вертикальной оси трубку

вместе с радиатором R, можно было изменять угол рассеяния φ, не трогая остальной части прибора. Спектральное распределение интенсивности измерялось при помощи ионизационной камеры.

На рис. 190 сопоставлены полученные результаты. A представляет распределение интенсивности в первичной линии (линия K_α молибдена $\lambda = 0{,}712605$ Å); B, C, D дают спектральный состав излучения при различных углах рассеяния. Можно сразу установить следующие особенности явления: 1) в рассеянном излучении присутствуют как первоначальная длина волны возбуждающего излучения, так и длина волны, смещенная в сторону длинных волн; 2) величина смещения зависит от угла рассеяния, а именно, она возрастает при увеличении этого угла; 3) при увеличении угла рассеяния интенсивность несмещенной линии падает, а интенсивность смещенной линии возрастает.

На рис. 191 приведены спектры линии K_α серебряного антикатода ($\lambda = 0{,}56267$ Å), рассеянной под одним и тем же углом *различными* веществами. Можно установить следующие особенности процесса: 1) величина смещения не зависит от природы радиатора; 2) при возрастании атомного номера радиатора интенсивность несмещенной линии возрастает, а интенсивность смещенной линии падает. Так, у лития рассеянное излучение практически полностью состоит из смещенной длины волны, а у меди интенсивность смещенной линии невелика по сравнению с интенсивностью линии несмещенной.

§ 125. Элементарная теория эффекта Комптона

Описанные в предыдущем параграфе особенности эффекта Комптона очень легко объяснить, если считать, что излучение имеет чисто корпускулярную природу, т. е. представляет собою поток фотонов, и что в рассеянии принимают участие не все электроны, а только незначительная часть их, но каждый электрон рассеивает целый фотон. Для того чтобы провести это объяснение до конца, нужно допустить, что фотон обладает не только определенным запасом энергии ($h\nu$), но и определенным количеством движения, т. е. ведет себя, грубо говоря, как движущийся шарик. В таком случае рассеяние фотонов электронами связано с обменом энергии и *количества движения* при соударениях и, по образному выражению Комптона, происходит наподобие игры на биллиарде фотонами и электронами.

Для того чтобы на основе этого представления произвести расчет смещения длины волны, мы должны прежде рассмотреть некоторые свойства фотона. Фотон как частица обладает во всяком случае особыми свойствами, так как он движется со скоростью света. Поэтому формулы классической механики к

движению фотона неприменимы и нужно пользоваться релятивистскими соотношениями (см. § 64).

Согласно теории относительности масса частицы, движущейся со скоростью v, равна

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Но так как фотон движется со скоростью c, то $\beta = 1$, и знаменатель предыдущей формулы обращается в нуль. Если бы поэтому масса покоя фотона имела конечную величину (т. е. была отлична от нуля), то мы бы получили $m = m_0/0 = \infty$. Отсюда следует, что масса покоя фотона обязательно должна быть равной нулю. Этим фотон самым существенным образом отличается от таких частиц, как, например, электроны, которые имеют конечную массу покоя.

Вычислим теперь количество движения фотона. Очевидно, что для этой цели мы уже не можем воспользоваться обычной формулой $p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$ по указанной выше причине. Однако теория относительности дает другую формулу для импульса p, которая применима и к случаю частицы, движущейся со скоростью c. Эта формула такова:

$$p = \frac{v}{c^2} E. \tag{64.16}$$

В самом деле

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{v}{c^2} = E \frac{v}{c^2}.$$

Для частицы, движущейся со скоростью света ($v = c$), получаем

$$p = \frac{E}{c}. \tag{125.1}$$

Наконец, для фотона $E = h\nu$

$$p = \frac{h\nu}{c}. \tag{125.1'}$$

Это и есть искомое выражение для импульса фотона.

Из того факта, что фотон обладает определенным импульсом, следует, что, встречая какое-нибудь препятствие, поток фотонов должен оказывать давление на это препятствие подобно тому, как бомбардировка стенки сосуда молекулами газа в среднем складывается в давление газа. Давление, создаваемое потоком фотонов, и есть световое давление, экспериментально установленное в количественном согласии с формулой (125.1) знаменитыми работами выдающегося русского физика П. Н. Лебедева.

При этом, как известно, Лебедев доказал не только существование давления света на макроскопические твердые тела, но и с полной несомненностью установил тончайший эффект давления света на газы. Заметим, однако, что, предпринимая свои опыты, Лебедев руководствовался не корпускулярной теорией света, но электромагнитной теорией Максвелла, которая также приводит к выводу о необходимости светового давления и дает для давления формулу, совпадающую с (125.1). Сам Максвелл, исходя из наглядных представлений Фарадея о силовых линиях электрического поля, рассматривал световое давление как следствие поперечного давления силовых трубок. То, что существование светового давления и его количественное выражение могут быть выведены и из корпускулярной и из волновой картин природы света, является одним из проявлений уже неоднократно отмечавшейся двойственности природы света.

Положим теперь, что электрон до соударения покоился, т. е. импульс его до соударения с фотоном был равен нулю; начальный импульс фотона равен $\vec{h\nu_0}/c$. После соударения электрон приобретет импульс $\vec{mv}$, где $m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}$, а импульс фотона станет равным $\vec{h\nu}/c$.

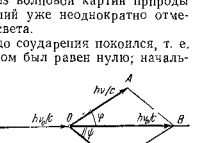


Рис 192.

Применяя законы сохранения энергии и количества движения, т. е. рассчитывая это соударение как удар упругих шаров, получим два уравнения. Из закона сохранения энергии имеем

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{125.2}$$

где m_0c^2 — «энергия покоя» электрона. Обозначив для краткости массу движущегося электрона через m, перепишем (125.2) так:

$$h\nu_0 + m_0c^2 = h\nu + mc^2. \tag{125.3}$$

Закон сохранения количества движения дает

$$\frac{\vec{h\nu_0}}{c} = \frac{\vec{h\nu}}{c} + \vec{mv}. \tag{125.4}$$

Из уравнений (125.3) и (125.4) первое — скалярное, а второе — векторное. Для расчета следовало бы векторное уравнение (125.4) заменить двумя скалярными уравнениями в проекциях на оси координат. Но мы поступим следующим образом. Векторное уравнение (125.4) фиксирует треугольник OAB (рис. 192). По формуле элементарной тригонометрии из этого треугольника

определяем квадрат стороны AB, равной по величине mv

$$m^2v^2 = \frac{h^2\nu_0^2}{c^2} + \frac{h^2\nu^2}{c^2} - 2h^2\frac{\nu_0\nu}{c^2}\cos\varphi$$

или

$$m^2v^2c^2 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu\cos\varphi. \qquad (125.5)$$

Уравнение (125.3) перепишем в виде

$$mc^2 = h(\nu_0 - \nu) + m_0c^2$$

и возведем в квадрат:

$$m^2c^4 = h^2\nu_0^2 + h^2\nu^2 - 2h^2\nu_0\nu + m_0^2c^4 + 2hm_0c^2(\nu_0 - \nu). \qquad (125.6)$$

Вычитая (125.5) из (125.6), получим

$$m^2c^4(1 - v^2/c^2) = m_0^2c^4 - 2h^2\nu_0\nu(1 - \cos\varphi) + 2m_0c^2h(\nu_0 - \nu). \qquad (125.7)$$

Заметив, что $m^2(1 - v^2/c^2) = m^2(1 - \beta^2) = m_0^2$ и произведя простые преобразования в (125.7), найдем

$$c(\nu_0 - \nu) = \frac{h}{m_0c}\nu_0\nu(1 - \cos\varphi), \qquad (125.8)$$

или

$$\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0} = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi). \qquad (125.9)$$

Вычисляя отсюда ν, найдем

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2}(1 - \cos\varphi)} = \frac{\nu_0}{1 + 2\frac{h\nu_0}{m_0c^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (125.10)$$

Это и есть формула для измененной частоты.

Из (125.10) легко получим для изменения длины волны формулу, которой чаще всего пользуются на практике. Принимая во внимание, что $c/\nu = \lambda$ и $c/\nu_0 = \lambda_0$, найдем

$$\lambda - \lambda_0 \equiv \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi)$$

или

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{m_0c}\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (125.11)$$

Величина h/m_0c, имеющая размерность длины, есть комбинация трех универсальных постоянных; она называется комптоновской длиной волны и обозначается через Λ:

$$\Lambda = \frac{h}{m_0c} = \frac{6{,}626\cdot10^{-27}}{9\cdot10^{-28}\cdot2{,}99\cdot10^{10}} = 0{,}0242\ \text{Å}.$$

Окончательная формула для изменения длины волны при рассеянии имеет вид

$$\Delta\lambda = 2\Lambda\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0{,}048\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}. \qquad (125.12)$$

Из этой формулы видно, что для $\varphi = 0$ $\Delta\lambda = 0$, для $\varphi = 90°$ $\Delta\lambda = \Lambda$ и, наконец, для $\varphi = 180°$ $\Delta\lambda = 2\Lambda$.

На рис. 190 и 191 вычисленные положения смещенных линий отмечены вертикальными прямыми. Как видно, максимумы экспериментально измеренных линий очень хорошо совпадают с предсказанными по формуле (125.12). Из наиболее точных измерений величина h/m_0c получается равной

$$\left(\frac{h}{m_0c}\right)_{\text{эксп}} = (0{,}02424 \pm 0{,}00004)\ \text{Å}$$

в хорошем совпадении с теоретической величиной, вычисленной по наиболее точным значениям h, m_0 и c:

$$\left(\frac{h}{m_0c}\right)_{\text{теор}} = (0{,}024265_{14} \pm 0{,}000005_7)\ \text{Å}.$$

Формула (125.11) показывает, что комптоновское смещение не зависит от длины волны первичного излучения. Поэтому, если бы можно было наблюдать эффект Комптона в видимом спектре, то для крайней фиолетовой части ($\lambda = 4000$ Å) он составлял бы тысячные доли процента основной длины волны; для рентгеновских лучей средней жесткости ($\lambda \sim 0{,}5$ Å) он составляет уже около 10%, а для γ-лучей величина его порядка самой длины волны.

Нам осталось еще объяснить, почему в рассеянном излучении наряду со смещенной линией наблюдается и несмещенная: из теории, изложенной выше, это не вытекает. Однако при рассмотрении механизма рассеяния мы предполагали, что фотон «соударяется» со свободным электроном. Для легких атомов и для периферических, слабо связанных электронов такое предположение вполне оправдано, так как энергия связи электрона (несколько электрон-вольт) ничтожно мала по сравнению с энергией фотона рентгеновских лучей. Но внутренние электроны, особенно в тяжелых атомах, связаны настолько прочно, что их уже нельзя рассматривать как свободные. Поэтому при «соударении» фотон обменивается энергией и количеством движения с атомом в целом. Так как масса последнего очень велика, то, по закону сохранения количества движения, фотон не передает ему своей энергии и количества движения; следовательно, $h\nu$ при рассеянии не изменяется.

На основании этих соображений можно качественно оценить соотношение интенсивностей смещенной и несмещенной линий в зависимости от массы атома. В легких атомах все электроны

связаны слабо; наоборот, в тяжелых атомах только периферические электроны связаны слабо. Поэтому можно ожидать, что при увеличении атомного номера при одинаковых условиях наблюдения интенсивность смещенной линии будет падать, а интенсивность несмещенной — возрастать. Это и наблюдается на самом деле, как показывает рис. 191.

Из аналогичных соображений следует, что в видимой части спектра эффект Комптона вовсе не может наблюдаться.

С оптической (волновой) точки зрения различие между смещенной и несмещенной линиями спектра рассеянного рентгеновского излучения состоит в том, что в первом случае мы имеем дело с некогерентным, а во втором — с когерентным рассеянием. В самом деле, уже тот факт, что при комптоновском рассеянии происходит смещение длины волны, т. е. изменение частоты, указывает на то, что между падающим и рассеянным излучением в этом случае когерентность отсутствует. Напротив, рассеянное излучение, дающее несмещенную линию, когерентно с падающим, и ряды волн, рассеянных различными атомами, когерентны между собой. Это видно также из картины интерференции рентгеновых лучей в кристаллах (см. § 33), особенно наглядно — из рассмотрения рассеяния в кристаллах монохроматических рентгеновых лучей по Брэгу (§ 34). В этом случае волны, рассеянные различными слоями атомов кристаллической решетки, интерферируют между собой, давая в конечном результате интерференционное отражение, подчиняющееся формуле Вульфа — Брэгга: $n\lambda = 2d \sin\theta$.

§ 126. Электроны отдачи

До сих пор мы сосредоточивали внимание на изменении спектра при рассеянии рентгеновских лучей. Простой расчет смещения, приведенный в § 125, показывает, что каждый элементарный акт рассеяния должен сопровождаться появлением быстрого электрона, получившего толчок со стороны фотона. Подсчитаем изменение кинетической энергии электрона при рассеянии.

По закону сохранения энергии это изменение должно быть равно разности энергии фотона до рассеяния и после рассеяния

$$E_k = h\nu - h\nu' = h\,\Delta\nu.$$

Отношение E_k к первоначальной энергии фотона равно

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu}. \qquad (126.1)$$

Но

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda}\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \nu\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda},$$

откуда

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Принимая во внимание (125.10), получим

$$\frac{E_k}{h\nu} = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda + 2\Lambda \sin^2\frac{\varphi}{2}}. \qquad (126.2)$$

Подсчитаем по этой формуле, какую часть энергии первичного фотона получает электрон отдачи. При $\lambda = 10\Lambda = 0{,}24$ Å (жесткие рентгеновские лучи) и $\varphi = 90°$ $E_k/h\nu$ составляет всего $^1/_{11}$ и только для $\lambda = \Lambda = 0{,}024$ Å (область γ-лучей) при $\varphi = 90°$ отношение $E_k/h\nu = 1/2$. Таким образом, для не слишком жестких рентгеновских лучей электрон отдачи получает сравнительно малую часть всей энергии фотона. Это позволяет отличать электроны отдачи от «фотоэлектронов», возникающих при полном поглощении фотона атомом, так как согласно уравнению Эйнштейна в последнем случае электрон приобретает энергию порядка величины самого фотона.

На рис. 193 приведена полярная диаграмма, показывающая соотношение направлений и энергий рассеянных фотонов ($h\nu$) и электронов отдачи (E). Диаграмма вычерчена для случая $\lambda_0 = \Lambda$, т. е. для жестких лучей; поэтому энергия электронов отдачи здесь составляет заметную долю энергии первичного фотона ($h\nu_0$). Как видно из диаграммы, электроны отдачи должны выбрасываться по преимуществу вперед, по направлению первичного фотона.

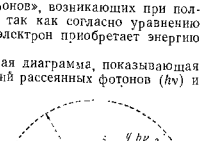


Рис. 193. Полярная диаграмма рассеянных фотонов и электронов отдачи.

Предсказание теории Комптона относительно необходимости появления электронов отдачи при рассеянии рентгеновских и γ-лучей было немедленно подтверждено опытами с камерой Вильсона. На фотографиях (рис. 194), снятых при прохождении рентгеновских лучей в воздухе, можно заметить наряду с длинными траекториями фотоэлектронов большое число коротких траекторий, расположенных по пути лучей и направленных преимущественно вперед, в соответствии с полярной диаграммой рис. 193. Это и есть пути электронов отдачи.

Заметим, что так как на сообщение скорости электронам отдачи затрачивается энергия, то с возникновением их связана абсорбция падающих рентгеновских или γ-лучей. Обозначим коэффициент этой абсорбции через σ, а коэффициент обычной или «фотоэлектрической» абсорбции через τ. Тогда мы можем ожидать, что между числом коротких траекторий электронов

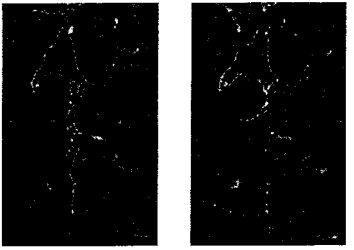


Рис. 194. Следы электронов отдачи в камере Вильсона.

отдачи N_r и числом длинных траекторий фотоэлектронов N_p должно иметь место соотношение

$$N_r/N_p = \sigma/\tau.$$

Опыт показывает, что коэффициент абсорбции τ убывает с уменьшением длины волны пропорционально λ^3, а σ медленно изменяется с длиной волны. Поэтому при уменьшении λ отношение N_r/N_p должно быстро возрастать. Таблица XVII показывает, что это имеет место на самом деле. Отсюда следует, между прочим, что абсорбция жестких γ-лучей почти исключительно связана с растратой энергии на создание электронов отдачи, а не с фотоэффектом.

Обширные исследования электронов отдачи были выполнены советским физиком Д. В. Скобельцыным. Для определения начальных энергий этих электронов Скобельцын использовал особый метод наблюдения, сыгравший впоследствии важную роль при изучении быстрых частиц космических лучей. Этот метод, впервые примененный П. Л. Капицей при исследовании природы

Таблица XVII

Длина волны (в Å)	N_r/N_p	σ/τ
0,71	0,10	0,27
0,44	0,9	1,2
0,29	2,7	3,8
0,20	9	10
0,17	17	17
0,13	72	32

α-частиц (см. стр. 97), состоит в том, что камера Вильсона помещается в сильное магнитное поле и по радиусам кривизны вильсоновских траекторий определяется энергия электронов. Одна из таких фотографий Скобельцына приведена на рис. 195

Рис. 195. Пути электронов отдачи в магнитном поле.

(рассеяние γ лучей RaC). При помощи этого метода Скобельцыну удалось решить ряд важных вопросов, связанных с поглощением γ-лучей.

§ 127. Элементарные акты рассеяния и законы сохранения

В § 121 мы видели, что опыт с элементарным фотоэффектом на висмутовой пылинке естественнее всего объясняется, если представить себе, что энергия рентгеновских лучей распространяется не в виде сферических волн, а в виде фотонов. Средний промежуток времени между двумя элементарными актами фотоэффекта как раз соответствует вероятности того, что один из фотонов, наудачу «выстреливаемых» из антикатода, попадает в «мишень», представляемую висмутовой пылинкой. Эффект Комптона, рассмотренный в предыдущих параграфах, свидетельствует об этом с еще большей ясностью.

В самом деле, весьма грубая модель соударяющихся биллиардных шаров позволяет легко объяснить все существенные черты явления. Мы даже можем наблюдать один из этих «биллиардных шаров» — электрон отдачи, который движется после рассеяния точь в точь так, как если бы перед этим его, по выражению Комптона, «ударил фотон».

Если бы мы попытались объяснить это явление с чисто классической точки зрения, т. е. рассматривая рентгеновские лучи как сферические волны, а электроны — как обычные частицы (грубо говоря, шарики), то для этого пришлось бы принести слишком тяжелую жертву: отказаться от применимости законов сохранения энергии и количества движения к элементарным актам рассеяния. Это вытекает из следующих соображений. Сферическая волна равномерно действует на все электроны, заставляя их совершать вынужденные колебания; вследствие ничтожной величины сечения электрона доля энергии и импульса, приходящаяся на каждый электрон, чрезвычайно мала. Между тем при комптоновском рассеянии появляются электроны отдачи, каждый из которых несет заметную долю энергии и импульса первичной волны. Для того чтобы понять, откуда они берут эту энергию и этот импульс, пришлось бы допустить, что происходит постепенное накопление энергии в течение длительных промежутков времени. Но это нельзя согласовать с тем фактом, что эффект Комптона возникает как на слабо связанных электронах (которые могут накоплять энергию), так и на свободных электронах (например, в металлах).

Желая спасти волновые представления, Бор, Крамерс и Слэтер в 1923 г. сделали даже попытку построить теорию, согласно которой законы сохранения энергии и импульса при рассеянии выполняются лишь *статистически*, в среднем за большие промежутки времени, но к элементарным актам неприменимы. По этой теории рассеяние должно происходить непрерывно, но электроны отдачи испускаются совершенно случайно. Оба процесса — рассеяние волн и испускание электронов отдачи — между собою не координированы. Теория эта, в основе которой лежит отрицание таких твердо установленных основных законов природы, как законы сохранения энергии и количества движения, неприемлема уже с методологической точки зрения. Как и следовало ожидать, несостоятельность ее вскоре была показана экспериментально.

Опыты, установившие выполнение законов сохранения энергии и количества движения в элементарных актах рассеяния рентгеновских лучей, основаны на следующих соображениях. Согласно «теории игры на биллиарде», требующей применения законов сохранения к элементарным актам рассеяния, оба процесса должны быть связаны между собой и во всяком случае

должны происходить одновременно. По статистической же теории Бора, Крамерса и Слэтера оба процесса совершенно независимы друг от друга.

Для проверки той и другой теорий оказалось возможным поставить соответствующие опыты. Если законы сохранения энергии и импульса применимы к элементарным актам рассеяния, то неизбежно должен выполняться ряд следствий. Например, в противоположность требованию статистической теории каждому электрону отдачи должен соответствовать одновременно с ним рассеянный фотон (фотоэлектрон в нашей модели). Кроме того, между углами полета электрона отдачи и фотона после рассеяния должно существовать определенное соотношение. Это соотношение иллюстрируется полярной диаграммой рис. 193; оно может быть получено непосредственным вычислением, если воспользоваться законами сохранения (формулы (125.2) и (125.4)] и заменить векторное уравнение (125.4) двумя скалярными в проекциях на оси координат. Получающееся соотношение имеет вид

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{1+\alpha}\operatorname{tg}\psi, \qquad (127.1)$$

где $\alpha = \Lambda/\lambda$; обозначения углов см. на рис. 192.

Опыты были поставлены в 1925 г. Боте и Гейгером, с одной стороны, и Комптоном и Саймоном — с другой. Опыты эти с полной определенностью показали неправильность основной предпосылки статистической теории о неприменимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния. Вместе с тем они послужили наилучшей иллюстрацией целесообразности корпускулярных представлений для объяснения некоторых свойств света. Впоследствии (1936—1937 гг.) аналогичные опыты были повторены вновь с улучшенной техникой и в разнообразных формах. И в этих новых опытах так же, как и в прежних, только с большей точностью и убедительностью, была подтверждена применимость законов сохранения к элементарным актам рассеяния рентгеновских и γ-лучей. Из этих опытов мы опишем наиболее характерные, а именно, первый опыт Боте и Гейгера и опыт Комптона и Саймона.

§ 128. Экспериментальное подтверждение применимости законов сохранения к элементарным актам рассеяния

Опыт Боте и Гейгера был поставлен для того, чтобы убедиться в одновременности появления электрона отдачи и рассеянного фотона. Узкий пучок рентгеновских лучей (рис. 196) проходил в атмосфере водорода между двумя счетчиками Гейгера. Водород был избран потому, что он слабо поглощает рентгеновские лучи, но достаточно сильно их рассеивает. Один

из счетчиков (левый на рис. 196) был закрыт платиновой фольгой и наполнен воздухом, другой был открыт и, следовательно, наполнен водородом. При этих условиях левый счетчик не реагировал на электроны отдачи, так как они поглощались платиновой фольгой, но реагировал на фотоны, которые, пройдя через фольгу, могли вырвать фотоэлектрон из воздуха, стенок счетчика или самой фольги. Правый же счетчик почти не реагировал на фотоны, так как они весьма слабо поглощаются водородом, но зато сильно реагировал на электроны отдачи. Так как далеко не каждый фотон, попадавший в левый счетчик, заставлял его работать, то не каждому отбросу электрометра, связанного с правым счетчиком, можно было сопоставить отброс электрометра левого счетчика. Наоборот, если совпадение действительно имеет место, то каждому отбросу счетчика квантов должен соответствовать отброс счетчика электронов. В действительности это соблюдалось не совсем точно, но число совпадений было настолько велико, что по статистическому подсчету Боте и Гейгера можно поставить 150 000 против 1 за то, что совпадения не случайны, но обусловлены одновременностью факта рассеяния и появления электронов отдачи.

Рис. 196. Схема опыта Боте и Гейгера.

Опыт Комптона и Саймона и его усовершенствованная модификация, осуществленная Крэйном, Гертнером и Турином, были поставлены с камерой Вильсона для того, чтобы проверить, осуществляется ли соотношение между углами полета электрона отдачи и рассеянного фотона, требуемое законами сохранения [см. диаграмму рис. 193 и формулу (127.1)]. Чтобы понять идею этого опыта, обратимся к диаграмме рис. 193.

Пусть, например, при рассеянии электрон отдачи полетел в направлении нижней стрелки *5*; тогда, по законам сохранения, рассеянный фотон должен полететь в направлении верхней стрелки *5*. Углы между нижней и верхней стрелками *5* и стрелкой *1* удовлетворяют соотношению (127.1). Направление нижней стрелки в действительном опыте установить легко, так как каждый электрон отдачи вызывает в камере Вильсона заметный след. Но фотон сам не ионизует воздуха; поэтому направление соответствующей верхней стрелки в камере Вильсона непосредственно установить нельзя. Косвенным образом это можно сделать так: если рассеянный фотон будет поглощен где-нибудь

внутри камеры, то он даст длинный след фотоэлектрона. Соединяя начало этого длинного следа с началом короткого следа электрона отдачи, можно получить обе стрелки. Известная неопределенность, которая при этом остается, связана с тем, что нельзя с достоверностью утверждать относительно найденного фотона, что это именно тот, который при рассеянии вызвал фиксированный нами электрон отдачи. Поэтому выводы из опыта можно делать только на основании достаточно большого статистического материала.

Схема опыта дана на рис. 197.

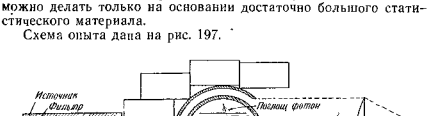


Рис. 197. Схема опыта Комптона и Саймона (в постановке Крейна и др.).

Опыт был выполнен не с рентгеновскими лучами, но с жесткими γ-лучами, чтобы увеличить энергию электронов отдачи и этим повысить точность опыта. Источник γ-лучей помещался в конце узкого канала в толстом свинцовом блоке; параллельный пучок фильтрованных γ-лучей, выйдя из канала, попадал в камеру Вильсона. Рассеивающим телом служил кусок целлулоида, помещенный в центре камеры. Чтобы увеличить вероятность поглощения рассеянного фотона внутри камеры, с той и другой сторон от рассеивающего тела располагалось по две свинцовые пластинки. Камера помещалась в магнитное поле, перпендикулярное к плоскости чертежа. Это давало возможность не только найти направление полёта электрона отдачи, но и определить по кривизне следа энергию этого электрона (метод Скобельцына, см. § 126). Такая постановка опыта имела следующее преимущество: по углу полета электрона отдачи и его энергии можно при помощи теории Комптона найти соответствующий угол полета рассеянного фотона без каких бы то ни было предположений относительно энергии падающего фотона. Это преимущество существенно потому, что нельзя быть уверенным в чистоте фильтрации первичных γ-лучей, а следовательно, и нельзя с полной уверенностью приписать падающему фотону

определенную энергию. На рис. 198 в качестве примера приведены три снимка, на которых виден электрон отдачи (в середине камеры) и место поглощения рассеянного фотона (у крайней верхней свинцовой пластинки). При обработке фотографий по углу полета электрона отдачи и его энергии вычислялся угол полета рассеянного фотона, и результат вычислений сравнивался с углом, найденным на фотографии. Всего было сделано около 10 000 фотографий, на которых было найдено 300 комбинаций

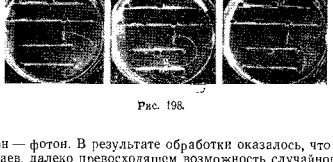


Рис. 198.

электрон — фотон. В результате обработки оказалось, что в числе случаев, далеко превосходящем возможность случайного совпадения, наблюденный угол полета рассеянного фотона совпадает с вычисленным.

Таким образом, в настоящее время не может быть никакого сомнения в том, что законы сохранения энергии и количества движения при элементарных актах рассеяния рентгеновских и γ-лучей выполняются.

§ 129. Эффект Мёссбауэра

В предыдущих параграфах мы видели, что рассеяние рентгеновских и γ-лучей свободными электронами можно рассматривать как упругое «соударение» фотона с электроном. При этом оказалось, что все расчеты, основанные на применении к подобного рода «соударениям» законов сохранения энергии и импульса, ведут к результатам, безупречно подтверждающимся на опыте.

Однако закон сохранения импульса должен иметь место не только при рассеянии, но и при любых взаимодействиях фотонов с атомными объектами, в частности он должен иметь место также при поглощении и испускании фотонов атомами.

В оптике известно явление, называемое резонансным излучением. Оно заключается в том, что атомы нередко с особенно большой вероятностью поглощают свет такой частоты, которая соответствует разности энергий между нормальным уровнем и ближайшим к нему возбужденным. Поглотив свет этой частоты, атом переходит в возбужденное состояние и через промежуток времени, равный времени жизни возбужденного состояния ($\tau \sim 10^{-7} - 10^{-8}$ *сек*), вновь испускает фотон *той же самой частоты*. Практически это явление наблюдается, когда излучающими и поглощающими являются атомы одного и того же вещества. Например, если освещать пары натрия светом желтой линии $\lambda = 5889{,}6$ Å, излучаемой возбужденными атомами натрия же, то этот свет будет интенсивно поглощаться атомами натрия, которые будут в свою очередь излучать свет той же длины волны. Отсюда и название — резонансное излучение. Аналогичное явление наблюдается в парах ртути и во многих других случаях.

При обсуждении условий возникновения этого резонансного излучения принимается во внимание только одно, а именно, что частота поглощаемого фотона должна быть такой, чтобы энергия фотона $h\nu$ была как раз достаточна для перевода атома с нормального на ближайший к нему возбужденный уровень, т. е. чтобы имело место равенство $h\nu = E_2 - E_1$. Другими словами, учитывается закон сохранения энергии, но условие сохранения импульса не принимается во внимание.

Ядра атомов также имеют квантовые уровни энергии — нормальный и возбужденные — и переходы между этими уровнями ведут к возникновению коротковолнового электромагнитного излучения в виде γ-лучей. Однако попытки осуществить с γ-лучами резонансное поглощение долгое время не приводили к положительному результату. Причина этого состояла именно в том, что при таких попытках руководствовались одним только законом сохранения энергии, т. е. автоматически переносили на ядра атомов и на γ-лучи то, что известно было для электронной оболочки и для оптической части спектра. Между тем тот факт, что частота, а следовательно также энергия и импульс γ-фотонов на много порядков величины больше соответствующих значений для фотонов оптической части спектра, влечет за собой необходимость принимать во внимание как закон сохранения энергии, так и закон сохранения импульса не только при обсуждении условий рассеяния, но и поглощения γ-лучей.

Разберем этот вопрос более детально. Если фотон действительно, подобно материальной частице, обладает импульсом, то процесс излучения его атомом или ядром должен сопровождаться отдачей, совершенно так же как выстрел из орудия создает отдачу, следствием которой является движение орудия в сторону, обратную вылету снаряда. Если при этом в случае атома импульс отдачи достаточно велик, чтобы сообщить «выстреливающему» атому отличную от нуля скорость, то, хотя в системе координат самого атома освобождается энергия, равная разности уровней $E_2 - E_1$, в лабораторной системе координат (см. § 45) энергия освобождаемого фотона будет несколько *меньше* этой величины, так как часть энергии пойдет на сообщение скорости самому атому вследствие отдачи. Аналогично, при поглощении, энергия, необходимая для осуществления квантового перехода $E_1 \to E_2$, в системе координат атома равна $E_1 - E_2$, но в лабораторной системе координат для осуществления этого перехода должна быть затрачена несколько *бо́льшая* энергия, так как вследствие импульса фотона (световое давление) часть ее должна пойти на сообщение некоторой скорости всему атому.

Этим качественным соображениям легко придать количественную форму. Импульс отдачи p, получаемый ядром при испускании фотона, равен $h\nu_0/c$, а кинетическая энергия, приобретаемая атомом вследствие отдачи, равна

$$R = \frac{p^2}{2M} = \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2}, \tag{129.1}$$

где M — масса ядра. Но, в силу закона сохранения энергии, эта энергия берется за счет разности энергий уровней $E_2 - E_1$, переход между которыми, при отсутствии затраты на отдачу, повел бы к испусканию фотона с энергией $h\nu_0 = E_2 - E_1$. Итак, освобожденный фотон должен иметь энергию

$$h\nu_{\text{исп}} = h\nu_0 - R. \tag{129.2}$$

Обратно, чтобы возбудить ядро, сообщив ему энергию $E_2 - E_1$, нужно затратить энергию, большую $h\nu_0$ на величину R: избыток энергии передается атому (или ядру), что необходимо для соблюдения закона сохранения импульса. Итак,

$$h\nu_{\text{погл}} = h\nu_0 + R. \tag{129.3}$$

Таким образом, частоты линий испускания и поглощения смещены относительно друг друга на величину $\nu_{\text{погл}} - \nu_{\text{исп}} = \Delta\nu$, удовлетворяющую условию $h\,\Delta\nu = 2R$.

Подсчитаем теперь величину R в двух случаях: а) для середины видимого спектра; б) для γ-излучения. Пусть, для примера, в случае а) $\lambda = 5000$ Å $= 5 \cdot 10^{-5}$ *см* и массовое число

атома $M = 100$ атомных единиц. Подсчитаем в электрон-вольтах величины $h\nu_0$ и Mc^2 (1 *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ *э*):

$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-12}} \approx 2{,}5 \text{ эв},$$

$$Mc^2 = \frac{100 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}} \approx 10^{11} \text{ эв}.$$

Отсюда

$$R = \frac{(h\nu_0)^2}{2Mc^2} = \frac{(2{,}5)^2}{2 \cdot 10^{11}} = 2{,}7 \cdot 10^{-11}.$$

В случае б) положим для величины фотона γ-лучей $h\nu_0 = 500$ *кэв* $= 5 \cdot 10^5$ *эв* и M — по-прежнему 100 атомных единиц. Здесь

$$R = \frac{(5 \cdot 10^5)^2}{2 \cdot 10^{11}} = 1{,}25 \text{ эв}.$$

Итак, в случае а) $h\,\Delta\nu = 6 \cdot 10^{-11}$ *эв*, т. е. линии поглощения и испускания практически полностью перекрываются, благодаря чему резонансное поглощение может осуществляться. Напротив, в случае б) максимумы поглощения и испускания, смещенные на величину, равную $2R$, разделены большим расстоянием

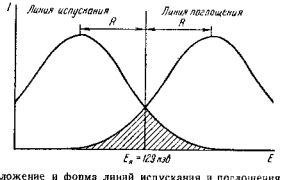


Рис. 199. Положение и форма линий испускания и поглощения γ-лучей Ir^{191} с энергией перехода 129 *кэв* при $T = 300°$ К.

(2,5 *эв*). На рис. 199 представлено относительное расположение кривых испускания и поглощения γ-лучей с энергией фотона $h\nu_0 = 129$ *кэв*, испускаемых радиоактивным изотопом иридия Ir^{191}. Ясно, что лишь ничтожная доля невозбужденных ядер Ir^{191} способна испытать резонансный захват излучения $h\nu_0 = 129$ *кэв*.

Чтобы улучшить перекрытие обеих кривых и тем самым сделать доступным наблюдению резонансное поглощение, было предложено и с успехом использовано смещение частоты линии испускания за счет эффекта Допплера. В случае линии Ir^{191}

$h\nu_0 = 129$ *кэв*, как показывает подсчет, для компенсации смещения $2R$ скорость источника должна быть равна $1{,}1 \cdot 10^5$ *см/сек*. Схема опыта изображена на рис. 200. Здесь *И* — источник γ-излучения, укрепленный на роторе ультрацентрифуги, приводившейся в быстрое вращение; скорость вращения можно было по произволу менять. На протяжении отрезка пути, изображенного жирной дугой *М*, γ-лучи источника могли выходить наружу из защитного ящика Pb; число фотонов, после прохождения через поглотитель *П*, подсчитывалось счетчиком фотонов *Д*. Если менять скорость вращения центрифуги, то вследствие эффекта Допплера будет меняться и частота γ-лучей. Очевидно, что, чем полнее будет при этом компенсация относительного сдвига кривых поглощения и испускания, *тем сильнее* будет поглощение в поглотителе *П* и *тем меньшее* число фотонов зарегистрирует счетчик. Таким путем удалось обнаружить слабо выраженное резонансное поглощение.

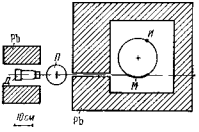


Рис. 200. Схема опыта для наблюдения резонансного поглощения γ-лучей.

Исследование резонансного излучения γ-лучей вступило в новую фазу, когда в 1958 г. германский физик Р. Мёссбауэр открыл новое в высшей степени замечательное явление. На теории этого явления (эффект Мёссбауэра) мы здесь останавливаться не можем *) и ограничимся намеком. Суть в том, что возбужденное ядро, которое мы до сих пор рассматривали как свободное, на самом деле входит в состав кристаллической решетки, атомы которой совершают колебания около положения равновесия, т. е. являются осцилляторами. Ясно, что в том случае, когда *средняя энергия* отдачи, обусловленной излучением или поглощением, значительно меньше энергии осциллятора решетки, большинство переходов в ядре не сопровождается передачей энергии осцилляторам, т. е. происходит *без отдачи*. При этом в области γ-лучей, так же как в оптической области, становится возможным полный резонанс. Линии поглощения и излучения при этих условиях характеризуются естественной шириной (см. § 72), которая в области γ-лучей очень узка, как это видно из приводимых ниже цифр.

Чтобы показать это и вместе с тем промерить ход кривой поглощения, Мёссбауэр воспользовался тем же расположением опыта, которое изображено на рис. 200. Вращая источник с

*) См. Г. Вертхейм, Эффект Мёссбауэра. «Мир», 1966.

различной скоростью, он менял за счет эффекта Допплера частоту γ-излучения, проходящего через поглотитель *П*. Интенсивность излучения за поглотителем, регистрируемая счетчиком, характеризовала интенсивность поглощения в *П*. Оказалось, что в условиях, когда поглощение происходит «без отдачи», резонанс обладает исключительной остротой. Об этом можно судить по следующим данным: в случае Ir^{191} γ-излучение с фотоном 129 *кэв* обнаруживало слабый резонанс при скорости ротора порядка нескольких десятков тысяч *см/сек*. Напротив, в условиях резонанса без отдачи достаточно было скорости в несколько *см/сек*, чтобы полностью подавить ядерное поглощение; например, поглощение падает наполовину при скорости 1,5 *см/сек*! Кривая рис. 201 демонстрирует это (обратить внимание на шкалу *v см/сек*). Полуширина линии поглощения, показанной на этом рисунке, составляет всего $4{,}5 \cdot 10^{-6}$ *эв*.

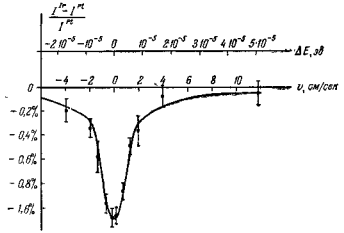


Рис. 201. Кривая резонансного поглощения без отдачи в Ir^{191}. Короткие вертикальные отрезки характеризуют пределы ошибки для каждой наблюденной точки.

Описанная картина резонансного поглощения страдает некоторой упрощенностью. В действительности линия, характеризуемая одной только естественной шириной, не является единственным результатом поглощения, но накладывается на значительно более широкий фон. Высота (или — точнее — глубина; см. рис. 201) максимума этой линии определяется вероятностью поглощения без отдачи, которая значительно меньше 100%. Квантовая теория этого процесса была развита Мёссбауэром и привела к формулам, которые позволяют заранее оценить условия, благоприятствующие возможности наблюдения резонансного поглощения без отдачи.

Свойства приведенного в качестве примера изотопа Ir^{191} ($h\nu_0 = 129$ *кэв*) таковы, что для наблюдения резонансного поглощения необходимо охлаждать образец до температуры жидкого гелия ($T = 4{,}2°$ K). О том, насколько узкая линия при этом излучается, можно судить по отношению полуширины линии Γ (выраженной в энергетических единицах) к энергии фотона E; для этой линии оно равно $\Gamma/E = 2 \cdot 10^{-11}$ и в 10^4 раз меньше, нежели соответствующая величина для видимой части спектра.

Еще более благоприятными свойствами обладает изотоп железа Fe^{57}. Он позволяет наблюдать резонансное поглощение уже при комнатной температуре. Отношение Γ/E в этом случае равно $3 \cdot 10^{-13}$, т. е. еще на два порядка меньше, нежели в случае Ir^{191}. Известен также и ряд других изотопов, у которых наблюдается эффект Мёссбауэра.

§ 130. Некоторые применения эффекта Мёссбауэра

Необычайно малая ширина линии резонансного испускания в эффекте Мёссбауэра, особенно в случае линии 14,4 *кэв* Fe^{57}, позволяет наблюдать некоторые очень тонкие и важные эффекты. Мы рассмотрим здесь два из возможных применений эффекта Мёссбауэра: допплер-эффект второго порядка и смещение спектральных линий в гравитационном поле (так называемое «красное смещение» в гравитационном поле).

А. Допплер-эффект второго порядка. Из оптики известно, что смещение спектральной линии вследствие эффекта Допплера равно

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\alpha,$$

где v — скорость источника света и α — угол между направлением скорости источника и направлением луча зрения. Наблюдаемая частота равна

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right). \tag{130.1}$$

При выводе этой формулы не учитывается, что в специальной теории относительности при переходе к другой системе координат, равномерно движущейся относительно первой, преобразуются не только пространственные координаты (см. § 67), но и время. Если принять во внимание преобразование времени, то вместо (130.1) получается *)

$$\nu = \frac{\nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{130.2}$$

*) См., например, П. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947, стр. 70.

Таким образом теория относительности требует, чтобы, наряду со смещением, зависящим от первой степени отношения v/c, существовал эффект, зависящий от квадрата этого отношения и не зависящий от направления скорости. Для случая, когда $v/c \ll 1$, имеем

$$\nu = \nu_0\left[1 - \frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \ldots\right].$$

Очевидно, что релятивистский эффект, зависящий от $(v/c)^2$, существенно перекрывается значительно большим эффектом первого порядка. Поэтому обнаружение и измерение эффекта второго порядка есть деликатная экспериментальная задача.

Айвс, который впервые проверил формулу (130.2) на примере линии H_β водорода, испускаемой быстро движущимися атомами в каналовых лучах, исключал эффект первого порядка, фотографируя спектр на одну и ту же пластинку дважды: в направлении полета каналовых лучей ($\alpha = 0$) и в противоположном направлении ($\alpha = 180°$). Это дает

$$\nu_1 = \nu_0\left[1 - \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right],$$

$$\nu_2 = \nu_0\left[1 + \frac{v}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right].$$

Отсюда не зависящее от знака v релятивистское смещение получается путем усреднения

$$\bar{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \nu_0 \cdot \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{и} \quad \Delta\nu = \nu_0 - \bar{\nu} = \nu_0\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Интерес и важность этого эффекта обусловлены тем, что в нем проявляется релятивистский эффект «замедления времени» в движущихся системах. В самом деле, поскольку излучаемая частота характеризует строго периодический процесс, излучающий атом можно рассматривать как «часы». Но, согласно формулам преобразований Лоренца для времени (§ 61), промежуток времени $\Delta t'$ в движущейся системе координат связан с промежутком времени в лабораторной системе координат Δt соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong \Delta t'(1 + v^2/2c^2).$$

Поэтому

$$\Delta t' = \Delta t(1 - v^2/2c^2), \tag{130.3}$$

т. е. в движущейся системе происходит «замедление времени» в соответствии с формулами для допплер эффекта второго порядка.

Допплер-эффект второго порядка отчетливо наблюдается в процессе резонансного поглощения и испускания без отдачи.

Ядра кристаллической решетки благодаря тепловым колебаниям находятся в непрерывном движении около положения равновесия. Вследствие этого средняя скорость $\bar{v}$, а с нею и доплер-эффект первого порядка равны нулю. Однако средняя квадратичная скорость $\overline{v^2}/c^2$ за время жизни радиоактивного ядра (в случае Fe^{57} — 10^{-7} *сек*) приобретает устойчивое значение (периоды колебаний решетки порядка 10^{-12} *сек*$^{-1}$). Так как ширина линии Мёссбауэра в Fe^{57} очень мала ($\Gamma/E = 3 \cdot 10^{-13}$), то уже при «расстройке» частот излучателя и поглотителя на на 10^{-12} у резонанс практически полностью снимается. Но частота в движущейся системе (излучающее ядро) связана с частотой в лабораторной системе (поглощающее ядро) соотношением

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c} = \nu (1 + v/c - v^2/2c^2),$$

а усреднение скорости дает

$$\nu' = \nu (1 - \overline{v^2}/2c^2),$$

т. е. как раз частоту, соответствующую релятивистскому «замедлению времени» по формуле (130.3). Так как в эту формулу входит средняя квадратичная скорость, то самый эффект должен зависеть от температуры. Поэтому, если излучающее и поглощающее ядра находятся при одинаковой температуре, то смещение в обоих ядрах будет одинаково и эффект не проявится. Напротив, при различии температур излучателя и поглотителя должно наблюдаться относительное смещение частот перехода, расстраивающее резонанс. Американские физики Паунд и Ребка произвели соответствующие эксперименты и показали, что в зависимости от разности температур наблюдается смещение, вполне удовлетворительно согласующееся с вычисленным теоретически для случая Fe^{57}.

В связи с этим сделаем дополнительно два замечания:

1. Как мы видели, доплер-эффект второго порядка есть просто следствие релятивистского замедления времени в движущихся системах. Однако проявление этого замедления в эффекте Мёссбауэра и его экспериментальное подтверждение оправдывают не только эффект замедления времени, но и вытекающий из него так называемый парадокс часов. Последний состоит в том, что если имеется двое тождественных часов в одном и том же месте, то их показания могут обнаружить различия в зависимости от разницы их предысторий. «Часами» в данном случае являются излучающее и поглощающее ядра. При этом ядро поглотителя сравнивает (наличие полного резонанса или его расстройка) частоту (показание) своих часов с показаниями часов излучателя, а чувствительность к обнаружению расстройки (в случае Fe^{57} $1:10^{12}$) недостижима ни для

каких других методов. Тот факт, что при различных температурах излучателя и поглотителя обнаруживается смещение резонанса, как раз и указывает на зависимость показаний обоих «часов» от их предыстории, т. е. подтверждает «парадокс часов».

2. Влияние температуры на резонансное поглощение и испускание может быть также интерпретировано энергетически. Интерпретация состоит в следующем. Хотя при любой температуре излучение и поглощение происходят без отдачи, т. е. импульс γ-фотона $h\nu/c$ не меняется *вследствие отдачи*, величина $h\nu$ немного изменяется по другой причине. Эта причина состоит в следующем: так как при излучении ядро переходит из возбужденного состояния в нормальное, то его энергия изменяется, а вследствие этого меняется и масса по релятивистскому соотношению $\Delta M = E/c^2$, где E — энергия перехода. Поэтому изменится также и средняя кинетическая энергия. Действительно, так как $R = p^2/2M$, причем $p = h\nu/c = \text{const}$ (излучение без отдачи), то

$$\Delta R = \Delta\left(\frac{p^2}{2M}\right) = -\frac{p^2 \Delta M}{2M^2} = -\frac{p^2 E}{2M^2 c^2} = -\frac{M^2 \overline{v^2}}{2M^2 c^2} E = -\frac{\overline{v^2}}{2c^2} E.$$

Далее, ввиду того, что энергия перехода с возбужденного на нормальный уровень распределяется между энергией излучаемого фотона и затратой на увеличение кинетической энергии решетки, то излучаемая энергия будет равна

$$E - \frac{v^2}{2c^2} E = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) E,$$

т. е. частота фотона, излучаемого без отдачи, должна изменяться на фактор $(1 - v^2/2c^2)$, точно такой же, какого требует доплер-эффект второго порядка.

Б. Гравитационное красное смещение спектральных линий. Одним из следствий общей теории относительности, доступных для экспериментальной проверки, является воздействие гравитационного поля на частоту спектральных линий Однако эффект этот очень мал, так, например, свет, исходящий от поверхности Солнца, должен испытывать смещение в красную сторону, относительная величина которого равна

$$\Delta\lambda/\lambda = 2{,}12 \cdot 10^{-6}.$$

Астрономические измерения, выполнявшиеся начиная с 1919 г., при всех солнечных затмениях, качественно подтверждали существование этого эффекта «гравитационного красного смещения спектральных линий» путем наблюдения смещения положения звезды, расположенной вблизи солнечного диска, однако из-за малой величины смещения количественные результаты были не всегда убедительны.

Очень малая ширина линии Мёссбауэра и связанная с ней возможность обнаружения смещения частоты в случае Fe^{57}, меньшего 10^{-12}, давала надежду на возможность наблюдения и измерения эффекта в легко доступных земных условиях. Эта надежда на самом деле оправдалась.

Предварительно заметим, что в общем случае эффект состоит в изменении частоты электромагнитного излучения при прохождении разности гравитационных потенциалов. Это смещение может рассматриваться как следствие принципа эквивалентности общей теории относительности. Последний состоит в том, что в ограниченной области пространства поле тяготения может быть заменено постоянным ускорением системы. Вообразим лабораторию, расположенную в области, где поле тяготения отсутствует, и пусть в ней точно над поглотителем на расстоянии l находится тождественный с ним источник. Пусть теперь наша лаборатория испытывает ускорение, направленное вверх (т. е. от поглотителя к источнику) и равное g. Допустим, что источник испускает монохроматический сигнал в виде электромагнитной волны частоты ν. Время, которое требуется сигналу, чтобы пройти от источника к поглотителю, равно

$$t = l/c;$$

за это время источник приобретет скорость

$$v = gt = gl/c$$

и вследствие эффекта Допплера первого порядка частота, воспринимаемая поглотителем, испытает относительное изменение

$$\Delta\nu/\nu = v/c = gl/c^2.$$

Наблюдаемая частота будет, таким образом, равна

$$\nu' = \nu(1 + gl/c^2).$$

Для явлений, происходящих внутри нашей «лаборатории», равномерно-ускоренное движение с ускорением g, направленным вверх, эквивалентно полю тяготения, направленному вниз с тем же ускорением g («лифт» Эйнштейна) *).

На основе принципа эквивалентности величина gl может интерпретироваться как разность гравитационных потенциалов, соответствующая разности высот l. Обозначив ее через $\Delta\varphi$, напишем

$$\nu' = \nu(1 + \Delta\varphi/c^2).$$

*) Доступное изложение см. А. Эйнштейн. О специальной и общей теории относительности. Собрание научных трудов, т. I. «Наука», 1965, стр. 550—600 (в особенности §§ 18—23). См. также А. Эйнштейн и Л. Инфельд. Эволюция физики. Гостехиздат, 1948, Глава III (в Собрании научных трудов, том IV, стр. 435—513).

В таком виде формула верна также и для неоднородных гравитационных полей. Ввиду присутствия величины c^2 порядка 10^{21} в знаменателе второго члена гравитационное смещение ничтожно мало.

Для изучения гравитационного смещения частоты Пауэр и Ребка в Гарвардском университете воспользовались резонансным поглощением излучения 14,4 *кэв* Fe^{57}. Так как $\Delta\nu/\nu$ пропорционально величине h, то важную роль играет расстояние по высоте между источником и поглотителем. Но вследствие необычайной чувствительности эффекта Мёссбауэра в Fe^{57} оказалось возможным наблюдать гравитационное смещение, поместив источник в башне физической лаборатории Гарвардского университета на высоте всего в 21 *м* над поглотителем *). Чтобы избежать ослабления пучка из-за поглощения в воздухе, источник и поглотитель были помещены в пластмассовый цилиндр, наполненный гелием. В первых опытах встретилось затруднение, так как обнаружились нерегулярные смещения частоты источника относительно частоты поглотителя. Однако вскоре было выяснено, что эти смещения обусловлены колебаниями разности температур между источником и поглотителем, которые в свою очередь вели к расстройству резонанса вследствие квадратичного эффекта Допплера. Расчет показал, что флуктуация температуры в 1° должна вызвать смещение почти равное гравитационному эффекту. После того, как причина незакономерных колебаний была установлена, начали контролировать температуры источника и поглотителя и вносить соответствующие поправки. При этом результаты стали устойчивыми. Отношение среднего из всех измерений к теоретической величине gl/c^2 оказалось равным $0{,}99 \pm 0{,}047$, т. е. в пределах ошибки — совпадающим с предсказанной величиной. Так в течение нескольких недель была решена проблема, ранее потребовавшая больших усилий астрофизиков и спектроскопистов на протяжении 45 лет!

*) Подробное описание этих экспериментов дано в статье Паунда в журнале «Успехи физических наук», т. 72, № 4, 1960, стр. 674.

ГЛАВА X

ВОЛНЫ И ЧАСТИЦЫ

§ 131. Введение

В предыдущей главе было показано, что в оптических явлениях (включая область рентгеновских лучей) обнаруживается своеобразный дуализм. Наряду с такими свойствами света, которые как бы самым непосредственным образом свидетельствуют о его волновой природе (интерференция, дифракция), имеются и другие свойства, столь же непосредственно обнаруживающие его корпускулярную природу (фотоэффект, эффект Комптона). Хотя мы никак не можем себе представить, чтобы один и тот же объект был одновременно и частицей и волной, мы вынуждены для объяснения всего круга оптических явлений пользоваться и той и другой картиной.

В настоящей главе мы увидим, что этот в высшей степени поразительный дуализм имеет место и для объектов, которые мы обычно называем «частицами» — для электронов, протонов, атомов. Существует большое число общеизвестных опытов, которые с полной очевидностью показывают, что эти элементарные составные части вещества ведут себя, как локализованные в пространстве частицы. Когда мы рассматриваем туманные следы на вильсоновских фотографиях, у нас не возникает никакого сомнения в том, что это — следы пролетевших частиц. И однако в этой главе мы увидим, что существуют другие опыты, в которых те же самые «частицы» ведут себя как волны, способные к интерференции.

В предыдущей главе мы особенно подчеркивали явления, в которых обнаруживается корпускулярная природа света. Настоящую главу мы начнем с более подробного рассмотрения *двойственности* в природе света, — того замечательного вывода, к которому привело нас в конце концов рассмотрение флуктуаций светового поля (§ 116). Так как, однако, для дальнейшего нам понадобится целый ряд сведений из теории волнового движения, то мы сначала коротко напомним эти необходимые сведения.

§ 132. Плоская монохроматическая волна в однородной среде

Когда мы говорим о волнах, то представляем себе прежде всего волны на поверхности воды или поперечные волны, бегущие в упругом шнуре при периодическом сотрясении его конца. Какова бы, однако, ни была природа волн, распространение их следует одинаковым законам.

Рассмотрим сначала простейший вид волн — плоские монохроматические или гармонические волны — и выберем направление распространения волн за ось x системы координат. Такие волны представляются формулой

$$u = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right) + \delta\right]. \tag{132.1}$$

Здесь a, ω, c' и δ — постоянные, смысл которых будет сейчас установлен, а u — величина волнообразно распространяющегося возмущения, например, отклонение частицы от положения равновесия в упругой волне, какая-нибудь составляющая напряженности электрического или магнитного поля в электромагнитной волне и т. д. Постоянная a есть амплитуда волны, $[\omega(t - x/c') + \delta]$ мы называем фазой волны, а постоянную δ, входящую в фазу, — начальной фазой. Поверхность, во всех точках которой фаза имеет одно и то же значение, есть поверхность равной фазы. Очевидно, что в рассматриваемом случае, когда фаза зависит линейно от координаты x, такой поверхностью будет плоскость $x = \text{const}$, нормаль к которой совпадает с осью x.

Постоянная c', входящая в фазу, имеет следующий смысл. Выберем какое-либо определенное значение фазы и посмотрим, при каких условиях оно будет сохранять одну и ту же величину при изменении x и t. Очевидно, что для постоянства фазы необходимо и достаточно, чтобы $t - x/c' = \text{const}$, откуда

$$x = c't + \text{const}.$$

Отсюда видно, что c' есть скорость перемещения плоскости равной фазы, или фазовая скорость волны.

Так как x и t входят в аргумент периодической функции, то волна должна обнаруживать периодичность во времени и в пространстве. Вследствие периодичности во времени должен существовать постоянный промежуток времени T, удовлетворяющий условию

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right) + \delta\right] = \cos\left[\omega\left(t + T - \frac{x}{c'}\right) + \delta\right].$$

Это может быть только в том случае, если $\omega T = 2\pi$ или $\omega = 2\pi/T$. Время T называется периодом волны, ω — угловой или циклической частотой; $1/T$ есть линейная частота ν, так что $\omega = 2\pi\nu$.

Вследствие периодичности в пространстве при данном t одни и те же значения u должны повторяться при изменении x на некоторый отрезок λ (длину волны), т. е. должно быть

$$\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c'}\right) + \delta\right] = \cos\left[\omega\left(t - \frac{x + \lambda}{c'}\right) + \delta\right].$$

Это значит, что $\omega\lambda/c' = 2\pi$ или $\lambda = 2\pi c'/\omega = c'/\nu$ или наконец

$$c' = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \lambda\nu \tag{132.2}$$

— соотношение, связывающее фазовую скорость с длиной волны.

Пусть теперь плоская волна распространяется в любом направлении, образующем с осями координат углы α, β, γ. Повернем оси координат так, чтобы ось x, как и раньше, совпадала с нормалью к плоскости равной фазы. Тогда в этой новой системе координат формула плоской волны будет

$$u = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x'}{c'}\right) + \delta\right].$$

Но согласно формулам преобразования координат при повороте осей

$$x' = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

и мы получаем

$$u = a\cos\left[\omega\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{c'}\right) + \delta\right] =$$
$$= a\cos\left[\left(\omega t - \frac{2\pi(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{\lambda}\right) + \delta\right]. \tag{132.3}$$

Уравнение плоскости равной фазы в этом случае будет

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \text{const}.$$

Введем теперь вектор $\mathbf{k}$, по направлению совпадающий с положительной нормалью к плоскости равной фазы, а по абсолютной величине равный

$$|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{132.4}$$

Компоненты этого вектора, который мы будем называть *волновым вектором*, или *вектором распространения волны*, таковы:

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma.$$

В таком случае

$$\frac{2\pi(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)}{\lambda} = xk_x + yk_y + zk_z = \mathbf{kr}, \tag{132.5}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный в произвольную точку плоскости равной фазы. При помощи (132.5) формула плоской волны приводится к следующему компактному виду:

$$u = a\cos[(\omega t - \mathbf{kr}) + \delta]. \tag{132.6}$$

Заметим, наконец, что так же, как и формулы колебаний (§ 47), формулу плоской волны можно писать в комплексном виде

$$u = ae^{i(\omega t - \mathbf{kr}) + \delta} \tag{132.7}$$

или, вводя комплексную амплитуду $A = ae^{i\delta}$,

$$u = Ae^{i(\omega t - \mathbf{kr})}. \tag{132.8}$$

При этом берется только действительная часть комплексного числа (132.7) или (132.8).

§ 133. Волновое уравнение

Рассмотренная в предшествующем параграфе формула плоской волны является частным решением некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым уравнением. Например, из основных уравнений электромагнитного поля в пустоте — уравнений Максвелла — для любой компоненты напряженности электрического или магнитного поля может быть получено следующее уравнение второго порядка в частных производных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{133.1}$$

где u — любая компонента напряженности электрического или магнитного поля. Уравнение (133.1), как доказывается в руководствах по электродинамике *), описывает электромагнитные волны, распространяющиеся в пустоте со скоростью c.

Легко убедиться в том, что формула плоской волны

$$u = Ae^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} = Ae^{i(xk_x + yk_y + zk_z - \omega t)} \tag{133.2}$$

удовлетворяет уравнению (133.1). Действительно, дифференцируя (133.2) дважды по всем координатам и по времени, находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\omega^2 k_x^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\omega^2 k_y^2 u,$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\omega^2 k_z^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2\nu^2 u.$$

Подставляя эти производные в (133.1), получаем после сокращений

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{133.3}$$

*) Волновое уравнение для электромагнитных волн выводится непосредственно из уравнений Максвелла: см. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966, стр. 476.

Это важное соотношение, связывающее частоту ω с компонентами волнового вектора, характерно для природы волны; его называют иногда законом дисперсии.

Вместо того, чтобы писать в правой части (133.1) сумму вторых частных производных по координатам, мы можем представить ее так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u,$$

где Δ — так называемый оператор Лапласа. Написав волновое уравнение в виде

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u, \tag{133.4}$$

мы не только пользуемся сжатым способом записи, но и получаем существенное обобщение, так как оператор Лапласа может быть выражен в любой системе координат. В частном случае прямоугольных декартовых координат он имеет вид

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{133.5}$$

В других системах координат оператор Δ выражается иначе. Из этих выражений для нас очень важно выражение оператора Δ в сферических полярных координатах. Оно таково:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{133.6}$$

Переход от декартовых координат к полярным можно, конечно, выполнить путем обычной замены переменных по правилам дифференциального исчисления. Однако вычисления в случае перехода к пространственным координатам r, θ и φ оказываются настолько громоздкими и утомительными, что идти таким путем не рекомендуется. В руководствах по векторному анализу обычно излагается очень простой и изящный метод для перехода к любым криволинейным ортогональным координатам, которым и пользуются для получения формулы (133.6). Излагать этот метод здесь не место *), и мы ограничимся приведением готовой формулы (133.6).

Волновое уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных. Как всякое линейное однородное уравнение, оно обладает следующим важным свойством. Положим, что мы нашли частное решение (133.1) u_1; тогда и c_1u_1, где c_1 — произвольная постоянная, будет также решением (133.1). Если нам известны частные решения

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1966, стр. 381.

u_1 и u_2, то $u=c_1u_1+c_2u_2$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, также будет решением волнового уравнения (133.1). В этом заключается математическое обоснование известного принципа наложения или суперпозиции волновых движений, который позволяет при помощи наложения плоских волн строить любые волновые поля. Мы воспользуемся этим принципом в ближайших параграфах.

§ 134. Суперпозиция плоских волн

Рассмотренные в предшествующем параграфе плоские монохроматические волны в природе никогда не осуществляются. В самом деле, по условию, эти волны представляют собой строго периодический процесс, а для этого они должны иметь бесконечное протяжение в пространстве и во времени. Реальные же световые «сигналы» всегда ограничены в пространстве, испускаются в течение ограниченных промежутков времени, а потому и не являются строго гармоническими (см. § 72). Поэтому мы можем их рассматривать как результат суперпозиции строго гармонических, плоских волн, которые в одной части пространства вследствие интерференции усиливают друг друга, а в остальном пространстве друг друга погашают. Такие сложные волны имеют некоторые важные особенности, которые мы выясним сначала на примере суперпозиции только двух плоских гармонических волн.

Положим, что обе эти волны распространяются вдоль оси x и что их частоты ω_0 и ω, а также абсолютные значения волнового вектора k_0 и k ($k_0=2\pi/\lambda_0$, $k=2\pi/\lambda$) очень мало различаются друг от друга: $k_0-k=\Delta k\to 0$, $\omega_0-\omega=\Delta\omega$. Итак, мы имеем:

$$u_1=a\cos(\omega_0t-k_0x),\quad u_2=a\cos(\omega t-kx).$$

Складывая u_1 и u_2, получаем сложную волну u:

$$u=u_1+u_2=a\cos(\omega_0t-k_0x)+a\cos(\omega t-kx)=$$
$$=2a\cos\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t-\frac{k_0-k}{2}x\right)\cos\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t-\frac{k_0+k}{2}x\right)$$

или, вследствие близости ν_0 и ν, k_0 и k, приближенно

$$u=2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(\omega_0t-k_0x). \tag{134.1}$$

Полученный результат можно истолковать следующим образом. Второй множитель формулы (134.1), $\cos(2\pi\nu_0t-k_0x)$, представляет фазу волны с частотой ν_0 и волновым числом k_0, а первый

$$2a\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta k}{2}x\right)$$

— медленно ($\Delta\omega \to 0$, $\Delta k \to 0$) и притом периодически меняющуюся амплитуду. Другими словами, волну *и* (134.1) мы рассматриваем как волну с частотой ω_0 и волновым числом k_0, но с *модулированной амплитудой*. Не следует забывать, однако, что волна, изображаемая формулой (134.1), строго говоря, уже не будет гармонической: гармоническая волна на всем протяжении от $-\infty$ до $+\infty$ должна иметь одну и ту же амплитуду и одну определенную частоту. Между тем волна (134.1) имеет периодически меняющуюся амплитуду, и соответствующий спектральный прибор обнаружит в ней не одну частоту, а две: ω_0 и ω.

Этот результат иллюстрируется рис. 202, где изображены для некоторого момента времени два участка гармонических

Рис. 202. Образование волновых групп.

волн, с мало различающимися λ_0 и λ, и волна, возникающая в результате их суперпозиции. Как видно, эта сложная волна распадается на ряд групп с амплитудами, меняющимися по косинусоидальному закону.

Скорость перемещения определенной фазы мы будем называть *фазовой скоростью волн*. Для того чтобы ее отыскать, напишем условие постоянства фазы волны

$$\omega_0 t - k_0 x = \text{const}. \tag{134.2}$$

Определив отсюда производную координаты x по времени, т. е. величину $\dot{x}$, мы и найдем скорость перемещения плоскостей равной фазы, т. е. фазовую скорость. Из (134.2) находим

$$\omega_0 - k_0 \frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда, обозначая фазовую скорость через c':

$$c' = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad \text{или} \quad c' = \frac{\omega_0}{2\pi}\lambda_0 = \nu_0\lambda_0 \tag{134.3}$$

— известное из элементарного курса физики соотношение, имеющее место, как видим, для *фазовой скорости*.

Найдем теперь отдельно скорость перемещения определенной амплитуды волны. Очевидно, что эта последняя скорость совпадает со скоростью перемещения группы в целом; она называется поэтому *групповой скоростью*. Для отыскания ее пишем, по аналогии с предыдущим, условие постоянства амплитуды:

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x = \text{const}. \tag{134.2'}$$

Найдя отсюда x, получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Предел этого выражения при $\Delta k \to 0$ мы и будем называть *групповой скоростью*

$$g = \frac{d\omega}{dk}. \tag{134.4}$$

Мы видим таким образом, что обе скорости — фазовая и групповая, выражаются различными формулами. Чтобы разобраться в соотношении между этими скоростями, нужно рассмотреть условия распространения волн в различных средах. Но для этого мы прежде всего должны обобщить полученные результаты на случай сложения многих волн, что и будет сделано в следующем параграфе.

§ 135. Волновой пакет

Покажем теперь, что путем суперпозиции плоских волн можно осуществить волновой процесс, в котором амплитуда отлична от нуля только в небольшой части пространства, а в остальном пространстве равна нулю. Будем по-прежнему для простоты рассматривать линейные процессы или, точнее, плоские волны, зависящие только от одной пространственной координаты x и от времени.

Для того чтобы образовать волновой процесс, имеющий ограниченное протяжение в пространстве, наложения двух плоских волн уже недостаточно. Оказывается, однако, что такой процесс можно образовать путем наложения волн с непрерывно меняющимися k в пределах некоторого интервала $2\Delta k$, размеры которого мы установим впоследствии. Выберем на интервале $2\Delta k$ некоторую среднюю точку k_0 и покажем, что при определенных условиях, в результате суперпозиции, которая теперь уже вследствие непрерывного изменения k должна представиться не суммой, но интегралом

$$u = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k) \cos(\omega t - kx)\, dk, \tag{135.1}$$

можно получить ограниченный плоский волновой процесс или, как его называют, волновой пакет.

Что касается амплитуды $a(k)$ складываемых гармонических волн, то мы условимся считать ее постоянной во всем интервале $\pm\Delta k$ и равной $a(k_0)$. Зависимость частоты ω от k дается, вообще, законом дисперсии волн интересующей нас природы (см. § 133). Но каков бы ни был этот закон, для малого интервала Δk мы можем представить $\omega(k)$ в виде степенного ряда

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0}+\ldots \tag{135.2}$$

Вычислим теперь интеграл (135.1) приближенно, полагая, что интервал $k-k_0$ настолько мал, что в (135.2) можно отбросить все члены, начиная с третьего, т. е. взять для $\omega(k)$ линейное выражение

$$\omega(k)=\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0}.$$

Подставляя это выражение $\omega(k)$ в (135.1), получаем

$$u=a(k_0)\int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k}\cos\left[\omega t+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-kx\right]dk.$$

Интеграл этот легко вычисляется, и мы находим после подстановки пределов и умножения числителя и знаменателя на Δk

$$u=2a(k_0)\Delta k\,\frac{\sin\Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]}{\Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]}\cos(\omega_0 t-k_0x). \tag{135.3}$$

Этот результат можно истолковать совершенно аналогично тому, как мы толковали формулу (134.1) в предыдущем параграфе: множитель $\cos(\omega_0 t-k_0x)$ в (135.3) связан с фазой нашего сложного процесса, а стоящий перед ним множитель представляет переменную (модулированную) амплитуду. Обозначив

$$\Delta k\left[\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t-x\right]=\xi,$$

мы видим, что характер изменения амплитуды определяется множителем $\frac{\sin\xi}{\xi}$. Этот модулирующий множитель мы уже встречали в § 74; при изменении аргумента он имеет следующий ход:

$$\text{при}\quad \xi\to 0\quad \lim\frac{\sin\xi}{\xi}=1,$$

$$\text{при}\quad \xi=\pm\pi\quad \frac{\sin\xi}{\xi}=0.$$

При дальнейшем увеличении абсолютной величины ξ функция $\frac{\sin\xi}{\xi}$ проходит через ряд максимумов и минимумов. Однако их величина мала по сравнению с главным максимумом при $\xi=0$ и быстро убывает с увеличением аргумента. Таким образом, можно сказать, что в результате суперпозиции получается практически одна группа, амплитуда которой отличается от нуля лишь в ограниченной области и в этой области изменяется как $\frac{\sin\xi}{\xi}$. На рис. 203 изображена «моментальная фотография» такой группы, т. е. ее форма в определенный момент времени.

Рис. 203. Волновой пакет.

Формула (135.3) показывает, что в случае волнового пакета, как и в случае сложения двух плоских волн, рассмотренном в предыдущем параграфе, можно говорить о двух скоростях — фазовой и групповой. Фаза, как уже было сказано, входит в множитель $\cos(\omega_0 t-k_0x)$; приравнивая фазу $(\omega_0 t-k_0x)$ постоянной и дифференцируя, находим фазовую скорость, как и в предыдущем параграфе, равной

$$c'=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega_0}{k_0}.$$

Множитель, модулирующий амплитуду, $\frac{\sin\xi}{\xi}$ при $\xi\to 0$, имеет постоянное значение, равное 1. При $\xi=0$ имеем

$$x-\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0 t=0.$$

Это показывает, что поверхность равных амплитуд есть плоскость, перемещающаяся со скоростью

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0=g. \tag{135.4}$$

Мы видим, что выражение для скорости перемещения плоскости равных амплитуд совпадает с найденной в предыдущем параграфе формулой для групповой скорости (134.3). Это есть вместе с тем скорость перемещения пакета как целого.

Необходимо теперь напомнить, что все полученные до сих пор результаты связаны с приближением, которое мы сделали

в формуле (135.3), отбросив в разложении $\omega(k)$ члены порядка выше первого, и надо еще исследовать, как влияет это приближение на результат. Если вторая производная $(d^2\omega/dx^2)_0$ равна нулю (что имеет место при отсутствии дисперсии среды), то результаты сохраняются. Если же $d^2\omega/dk^2 \neq 0$, то обнаруживается следующее своеобразное свойство пакета: пакет не сохраняет своей формы и с течением времени деформируется, постепенно расплываясь. Если, однако, дисперсия мала, так что $d^2\omega/dk^2$ близка к нулю, то можно говорить об определенной форме пакета и о перемещении его как целого с групповой скоростью g.

Мы получили таким образом полное описание нашего волнового процесса. Подчеркнем теперь следующую его особенность: хотя в формулу пакета (135.3) входит фазовый множитель с определенными ω_0 и k_0, в действительности *мы имеем дело со сложным процессом, с которым нельзя связывать какой-либо одной определенной длины волны*. Напротив, поскольку для образования пакета необходима суперпозиция многих гармонических волн с непрерывно меняющимися k, спектральный анализ пакета разверает его в целый участок сплошного спектра. Более того, оказывается, что для образования волнового пакета заданного протяжения Δx интервал сплошного спектра Δk не может быть меньше некоторой определенной величины.

Найдем теперь это очень важное для последующего соотношение между Δk и Δx. Для этого мы рассмотрим пакет в какой-нибудь определенный момент времени $t = 0$. Форма пакета определится тогда множителем

$$\frac{\sin \Delta k \cdot x}{\Delta k \cdot x} = \frac{\sin \xi_0}{\xi_0},$$

где $\xi_0 = \Delta k \cdot x$. Этот множитель обращается в нуль при $\xi_0 = \pm\pi$. Если мы выберем начало координат в точке оси, соответствующей главному максимуму (т. е. в точке, соответствующей $\xi_0 = 0$), то координаты первых минимумов слева и справа от этого максимума будут $\pm\Delta x/2$. Принимая во внимание, что следующие максимумы быстро убывают по величине (см. § 74, где более детально рассмотрен ход функции $\frac{\sin \xi}{\xi}$), мы можем за протяжение пакета приближенно принять отрезок Δx между двумя симметричными первыми минимумами. Для них имеем условие

$$\Delta k \cdot \frac{\Delta x}{2} = \pi,$$

откуда получаем $\Delta k \cdot \Delta x = 2\pi$.

Если бы мы захотели определить протяжение пакета точнее и приняли за его длину расстояние между следующими минимумами, симметричными относительно начала координат, то мы бы получили $\Delta k \cdot \Delta x = 4\pi$ и вообще

$$\Delta k \cdot \Delta x \geqslant 2\pi. \qquad (135.5)$$

До сих пор мы рассматривали образование групп в одном измерении, или «линейных групп», для получения которых мы складывали монохроматические волны с одинаково направленными векторами $\mathbf{k}$. Так как все предыдущие рассуждения справедливы для любой из трех осей координат, то для образования пространственного пакета с протяжением по осям координат Δx, Δy и Δz должны быть выполнены три условия:

$$\Delta x\, \Delta k_x \geqslant 2\pi, \quad \Delta y\, \Delta k_y \geqslant 2\pi, \quad \Delta z\, \Delta k_z \geqslant 2\pi. \qquad (135.6)$$

Мы видим, что между пространственным протяжением пакета в определенный момент ($t = 0$) и сплошным спектром гармонических волн, необходимых для образования этого пакета, имеет место то же соотношение взаимности, какое мы нашли в § 74 для функции времени $f(t)$ и распределения амплитуд по частотам. Безгранично протяженной синусоидальной волне e^{ikx} соответствует определенное k (определенная длина волны λ). Но если волна ограничена в пространстве, то определенное k отсутствует и неизбежно появляется спектр длин волн, имеющий ширину Δk такую, что $\Delta x\, \Delta k \sim 2\pi$.

§ 136. Фазовая и групповая скорости

Обратимся теперь к рассмотрению обеих скоростей — фазовой и групповой — и сравним их между собой в двух случаях:

1. Случай, когда фазовая скорость образующих пакет гармонических волн не зависит от k. Относительно сред, обладающих таким свойством, говорят, что у них отсутствует дисперсия.

2. Случай, когда среда обладает дисперсией, т. е. когда фазовая скорость есть функция k.

Обратимся к случаю (1). Из формулы для фазовой скорости $c' = \omega/k$ находим $\omega = c'k$. Вычислим теперь групповую скорость

$$g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(c'k) = c'.$$

Итак, в отсутствии дисперсии групповая скорость и фазовая скорость одинаковы.

В случае (2) c' есть функция k и потому

$$g = \frac{d}{dk}(c'k) = c' + k\frac{dc'}{dk}. \qquad (136.1)$$

Второй член справа преобразуем так:

$$\frac{dc'}{dk} = \frac{dc'}{d\lambda} \cdot \frac{dk}{d\lambda} = \frac{dc'}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{dc'}{d\lambda}.$$

Подставляя в (136.1), получаем

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}. \qquad (136.2)$$

Мы видим, что при наличии дисперсии групповая скорость не совпадает с фазовой, а именно, в зависимости от знака производной $\frac{dc'}{d\lambda}$ групповая скорость может быть как меньше фазовой $\left(\frac{dc'}{d\lambda} > 0\right)$, так и больше фазовой $\left(\frac{dc'}{d\lambda} < 0\right)$. В оптике осуществляются оба эти случая: 1) при нормальной дисперсии с увеличением λ показатель преломления μ (т. е. отношение c/c', где c — скорость света в вакууме) убывает, т. е. c' возрастает и $\frac{dc'}{d\lambda} > 0$; 2) при аномальной дисперсии, которая наблюдается внутри полос поглощения, зависимость μ от λ обратная и, следовательно, $\frac{dc'}{d\lambda} < 0$. Таким образом, в случае световых волн в вакууме обе скорости одинаковы; в среде же при нормальной дисперсии $g < c'$, при аномальной $g > c'$.

Возникает вопрос: какая же из двух скоростей измеряется на опыте при определении скорости света. Анализ различных методов измерения скорости света показывает, что ни один из них не дает возможности определять фазовую скорость, но все они дают групповую скорость. Это видно из того, что в различных методах определения скорости света либо находится скорость определенного сигнала (метод Ремера — затмения спутников Юпитера), либо скорость ограниченного ряда волн, пропускаемого вращающимся зубчатым колесом (метод Физо). Но всякий ограниченный ряд волн может быть подвергнут анализу при помощи интеграла Фурье и представлен как результат суперпозиции плоских монохроматических волн. Это значит, что всякий ограниченный ряд волн представляет собою волновой пакет, и мы измеряем скорость пакета, т. е. групповую скорость. Менее очевидно то же утверждение в случае метода аберрации света; однако анализ, выполненный П. С. Эренфестом, показал, что и в этом случае определяется групповая, а не фазовая скорость *).

Из сказанного следует, что фазовая скорость есть величина, недоступная для непосредственного измерения. Но при распространении пространственно ограниченных волн (т. е. волновых пакетов) в диспергирующей среде и самое понятие фазовой скорости теряет свой непосредственный смысл, так как в этом случае мы имеем дело не с одной фазой, а с фазами бесчисленного

*) См. Г. С. Ландсберг. Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 351.

множества гармонических волн, каждая из которых распространяется со своей скоростью.

Более подробный анализ показывает, что изменение скорости перемещения плоскости равной фазы, наблюдаемое при распространении волны в среде, наполненной резонаторами, обусловлено сдвигом фазы, возникающим при вынужденных колебаниях резонаторов под действием проходящей волны. Из этого следует, что фазовая скорость в точном соответствии со своим названием дает лишь скорость перемещения определенной фазы и, как показывает более подробный анализ, совершенно не связана, например, со скоростью движения фронта ограниченного в пространстве ряда волн или со скоростью движения энергии. Именно поэтому возникновение фазовой скорости, большей скорости света в пустоте, ни в какой степени не противоречит утверждению теории относительности о том, что скорость света в пустоте есть предельная скорость.

В частности, в оптике доказывается, что скорость фронта волны при любых условиях равна c, т. е. скорости света в пустоте *).

§ 137. Корпускулярно-волновой дуализм. Преломление света

Рассмотрение флуктуаций светового поля (§ 116) привело нас к выводу, что волновые и корпускулярные свойства представляют две равноправные стороны одного и того же явления — светового поля. В этом и в двух следующих параграфах мы покажем на других примерах, что целый ряд оптических явлений можно рассматривать как с волновой, так и с корпускулярной точек зрения.

Мы начнем с рассмотрения явления, возможность интерпретации которого с обеих точек зрения была известна давно, а именно, с преломления света.

Хотя объяснение преломления с волновой точки зрения излагается в элементарных курсах физики, — мы воспроизведем его здесь для того, чтобы подчеркнуть некоторые характерные черты этого объяснения. Волновое объяснение сводит преломление при переходе из одной среды в другую к изменению фазовой скорости волны. Представим себе две среды с различными показателями преломления, разделенные плоской границей (рис. 204). Для определенности положим, что верхняя среда есть вакуум, где скорость света равна c; в нижней среде

*) Вопрос о распространении волновых групп в диспергирующей среде принадлежит к числу самых трудных и тонких вопросов волновой оптики. См. по этому поводу: Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 351.

скорость света пусть будет c'. Плоская волна падает на поверхность раздела под углом ϑ. В момент $t=0$ положение плоскости равной фазы в верхней среде изображается прямой AA'. Пусть в момент $t=t'$ волна из точки A', пройдя расстояние $A'D=ct'$, достигнет границы раздела в точке D. За это время волна от точек, лежащих между A и D, будет распространяться в нижней среде.

Для отыскания положения плоскости равной фазы в нижней среде строим гюйгенсовы сферические волны из точек поверхности раздела между A и D и находим их огибающую. Очевидно, что в момент $t=t'$ радиус вторичной волны, исходящей из A, будет $AB=c't'$. Отсюда, как легко видеть из чертежа,

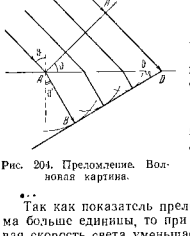


Рис. 204. Преломление. Волновая картина.

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{ct'}{c't'}=\frac{c}{c'}=\text{const} \qquad (137.1)$$

— закон Снеллиуса.

Принимая во внимание полученное выше соотношение для фазовых скоростей c и c'

$$c=\nu\lambda, \quad c=\nu\lambda',$$

мы можем представить закон Снеллиуса в виде

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{c}{c'}=\frac{\lambda}{\lambda'}. \qquad (137.1')$$

Так как показатель преломления среды относительно вакуума больше единицы, то при переходе из пустоты в среду фазовая скорость света уменьшается; в той же мере уменьшается и длина волны в среде по сравнению с длиной волны в вакууме.

Для того чтобы объяснить преломление с корпускулярной точки зрения, достаточно допустить, что световые частицы изменяют свое количество движения при переходе через поверхность раздела обеих сред. Пусть, в самом деле, количество движения «световой частицы» в верхней среде будет p, в нижней p', причем $p'>p$ (рис. 205). Вследствие симметрии тангенциальная составляющая количества движения при переходе через поверхность раздела не меняется:

$$p_t=p'_t, \qquad (137.2)$$

а меняется только нормальная составляющая ($p'_n>p_n$). Из чертежа имеем

$$\sin\vartheta=p_t/p, \quad \sin\vartheta'=p'_t/p',$$

что дает, принимая во внимание (137.2),

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{p'}{p}=\text{const}, \qquad (137.3)$$

т. е. опять закон Снеллиуса.

Посмотрим теперь, какие следствия относительно скорости света в пустоте и в среде вытекают из корпускулярного вывода закона Снеллиуса. Если рассматривать «световые частицы» как ньютоновы корпускулы, то импульс p выразится *через скорость* частицы v известной формулой

$$p=mv.$$

В этом случае из (137.3) следует

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{v'}{v}, \qquad (137.4)$$

т. е. показатель преломления равен отношению скорости в среде к скорости в вакууме.

Сравнение со (137.1′) показывает, что в корпускулярной интерпретации отношение скоростей обратное тому, какое имеет место в случае волновой интерпретации, т. е. в случае показателя преломления, большего 1, скорость световой частицы *в среде больше чем в пустоте*.

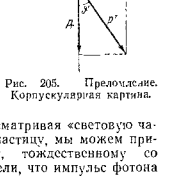


Рис. 205. Преломление. Корпускулярная картина.

Однако, не следует забывать, что при волновой и при корпускулярной интерпретации закона преломления у нас фигурировали по существу разные скорости. При волновой интерпретации скорости c и c' — фазовые скорости, тогда как v и v' — скорости частицы, вовсе не тождественные с фазовыми скоростями. Чтобы это увидеть с особенной ясностью, заметим, что, рассматривая «световую частицу» как фотон, а не как ньютонову частицу, мы можем привести соотношение (137.3) к виду, тождественному со (137.1′). Действительно, в § 125 мы видели, что импульс фотона равен

$$p=h\nu/c,$$

и, следовательно ($\nu\lambda=c$),

$$p=h/\lambda, \quad p'=h/\lambda'.$$

Подставляя это в (137.3), получаем

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'}=\frac{\lambda}{\lambda'},$$

т е., как и в (137.1′), показатель преломления равен отношению длины волны в вакууме к длине волны в среде или, что то же самое, — прямому отношению фазовых скоростей. Очевидно, что такой результат получился потому, что в выражении для импульса фотона $p = h\nu/c$ фазовая скорость стоит не в числителе, а в знаменателе.

Во второй половине XIX столетия, когда еще не было ясного понимания различия фазовой и групповой скоростей, была сделана попытка поставить решающий эксперимент, который должен был, как тогда казалось, дать окончательный ответ на вопрос о том, имеет ли свет волновую или корпускулярную природу. Хотя мы теперь понимаем, что этот и последующие эксперименты того же типа на самом деле никакого ответа на поставленный вопрос не дали и не могли дать, очень полезно ознакомиться с этими экспериментами и разобраться в том, почему они не являются «решающими».

Опыт, предложенный и поставленный Фуко (1850) был основан на сравнении формул (137.1) и (137.4) для выражения закона Снеллиуса. Не учитывая принципиальной разницы между скоростями c и c', с одной стороны, и v и v' — с другой, Фуко полагал, что для решения вопроса о природе света, нужно непосредственно измерить скорость света в какой-нибудь среде, а не судить о ней на основе показателя преломления. Если эта скорость окажется меньше скорости света в пустоте — верна волновая теория, в противном случае — верна корпускулярная (в ньютоновом смысле) теория.

Опыт был поставлен с определением скорости света в воде. Она оказалась *меньше* скорости света в пустоте, откуда Фуко (преждевременно) заключил, что окончательно доказана волновая природа света. Впоследствии Майкельсон проделал аналогичный опыт с большей точностью, сравнивая скорости света в воде и в сероуглероде со скоростью света в воздухе (практически равной скорости света в вакууме). И этот опыт также показал, что соотношение скоростей в воздухе и в воде равно 1,330, что практически равно показателю преломления воды для желтого света, которым пользовался Майкельсон (на самом деле показатель преломления воды этой части спектра равен 1,333, но разница в 0,003 лежит в пределах ошибок опыта). С сероуглеродом, обладающим высоким показателем преломления и большой дисперсией, результат получился несколько иной. Именно, оказалось, что отношение скоростей равно $1{,}76 \pm 0{,}02$, тогда как показатель преломления CS_2 равен 1,63. Таким образом, опыт обнаружил, что скорость света в сероуглероде меньше, чем в воздухе, как это требуется волновой теорией, но отношение скоростей не равно показателю преломления. Разгадка этого кажущегося противоречия лежит в том, что изме-

рения Майкельсона, как и всякие измерения скорости светового сигнала (см. § 136), дают групповые, но не фазовые скорости, отношению которых равен показатель преломления. В воздухе и в воде, где дисперсия очень мала, обе скорости одинаковы. Но в сероуглероде дисперсия настолько велика, что разница между фазовой и групповой скоростями должна быть заметна. Пользуясь формулой

$$g = c' - \lambda \frac{dc'}{d\lambda}, \tag{136.2}$$

можно показать, что отношение скорости света в пустоте c к групповой скорости света в среде связано с показателем преломления μ соотношением *)

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda}. \tag{137.5}$$

Для сероуглерода c/g оказалось равным 1,76; далее из кривой зависимости показателя преломления CS_2 от длины волны для

*) В самом деле, из (136.2) получаем

$$c' = g + \lambda \frac{dc'}{d\lambda},$$

откуда

$$\frac{c'}{g} = 1 + \frac{\lambda}{g}\frac{dc'}{d\lambda}. \tag{136.2′}$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{c'}{c}\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{c'}\right) = -\frac{1}{c'}\frac{dc'}{d\lambda}.$$

Определяя отсюда $\frac{dc'}{d\lambda}$ и подставляя в (136.2′), находим

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{c'}{g},$$

или, пользуясь вновь (136.2′),

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{g}\frac{dc'}{d\lambda}\right).$$

Принимая во внимание, что $\frac{\lambda}{g}\frac{dc'}{d\lambda}$ — малая величина, и отбрасывая малые величины второго порядка, находим в первом приближении

$$\frac{c'}{g} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}\frac{d\mu}{d\lambda},$$

откуда, наконец, имея в виду, что $\mu c' = c$,

$$\frac{c}{g} = \mu - \lambda \frac{d\mu}{d\lambda},$$

что и требовалось доказать.

использованной Майкельсоном длины волны $\lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = -0{,}126$ (показатель преломления убывает с увеличением длины волны). Таким образом, из (137.4) получается

$$\mu = \frac{c}{g} + \lambda \frac{d\mu}{d\lambda} = 1{,}76 - 0{,}126 \approx 1{,}63$$

в согласии с экспериментальными данными.

Таким образом, и в корпускулярной картине, поскольку «световыми частицами» являются фотоны, фазовая скорость света в среде должна быть меньше фазовой скорости в пустоте, а это означает, что опыты, аналогичные опыту Фуко, принципиально не могут дать ответа на вопрос о том, какую именно природу — волновую *или* корпускулярную — имеет свет.

Из этого следует, что описанные опыты, вопреки мнению, сложившемуся в XIX столетии, не решают вопроса о природе света: они не противоречат ни волновой, ни корпускулярной картине.

Отметим в заключение еще следующее важное обстоятельство. Волну мы характеризуем частотой ω и длиной волны λ; для частицы характерны ее энергия E и импульс p. Мы можем описывать предметление либо с корпускулярной, либо с волновой точек зрения. В первом случае мы пользуемся величинами E и p, во втором — ω и λ. Если, однако, мы хотим перейти от корпускулярной картины к волновой, то мы должны воспользоваться следующими известными нам соотношениями между обеими группами величин:

$$E = \hbar\omega \tag{137.6}$$

и

$$p = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \tag{137.7}$$

Мы видим, таким образом, что в этих соотношениях постоянная Планка играет роль переводного множителя или ключа, позволяющего переходить от одной картины к другой.

§ 138. Корпускулярно-волновой дуализм. Эффект Допплера

Покажем теперь на других примерах возможность истолкования оптических явлений с двух точек зрения — корпускулярной и волновой. Для этого обратимся сначала к эффекту Допплера.

Эффект Допплера, имеющий место как в акустике, так и в оптике, состоит, как известно, в изменении частоты при относительном движении источника и наблюдателя. Пусть источник света находится в A, а наблюдатель — в B. Если источник движется под углом θ к прямой, соединяющей A и B, со скоростью v, то частота, регистрируемая наблюдателем при движении источника, отличается от частоты, воспринимаемой при покоящемся источнике, на величину $\Delta\nu$, определяемую формулой

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v}{c}\cos\theta, \tag{138.1}$$

где c — скорость света. Волновая теория этого явления основана на рассмотрении изменения длины волны вследствие движения источника при сохранении скорости распространения света *).

Оказывается, однако, что это явление может быть объяснено и с корпускулярной точки зрения. При этом испускание света рассматривается как «выстреливание» фотона, и к этому процессу применяются законы сохранения энергии и количества движения совершенно так же как в корпускулярной теории эффекта Комптона.

Рис. 206 К корпускулярной теории эффекта Допплера.

Пусть атом с массой M, движущийся со скоростью v_1, т. е. обладающий количеством движения Mv_1, находясь в точке O, испускает фотон $h\nu$ (рис. 206). Количество движения этого фотона равно $h\nu/c$. В силу закона сохранения количества движения атом приобретает в момент испускания добавочный импульс $-h\nu/c$, направленный в противоположную сторону (отдача). Его импульс после испускания становится равным Mv_2. Из чертежа, построенного на основании импульса, видно, что

$$Mv_1 - Mv_2 = M\Delta v = \frac{h\nu}{c}\cos\theta. \tag{138.2}$$

Для того чтобы теперь применить закон сохранения энергии, будем рассуждать следующим образом. Если энергии покоящегося атома в стационарных состояниях, ведущих к испусканию фотона $h\nu$, равны соответственно E_1 и E_2, то

$$E_1 - E_2 = h\nu. \tag{138.3}$$

Энергия движущегося атома в возбужденном состоянии (перед испусканием) равна

$$E_1 + \frac{1}{2}Mv_1^2,$$

*) Мы здесь не можем останавливаться на волновой теории эффекта Допплера и на существенных различиях этого явления в акустике и оптике. Относящиеся сюда вопросы с большой ясностью изложены в книге Г. С. Ландсберга, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр 356

в нормальном состоянии (после испускания)

$$E_2 + \frac{1}{2} M v_2^2.$$

Энергия испущенного фотона равна

$$h(\nu + \Delta\nu).$$

На основании закона сохранения энергии

$$\frac{1}{2} M v_1^2 + E_1 = \frac{1}{2} M v_2^2 + E_2 + h(\nu + \Delta\nu), \qquad (138.4)$$

откуда, принимая во внимание (138.3),

$$\frac{1}{2} M (v_1^2 - v_2^2) = h\,\Delta\nu$$

или

$$M\,\Delta v\,\frac{v_1 + v_2}{2} = h\,\Delta\nu.$$

Пользуясь (138.2), вводя среднюю скорость $\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ и принимая во внимание, что $M\Delta v = (h\nu/c)\cos\vartheta$ (рис. 206), получаем

$$\bar{v}\,\frac{h\nu}{c}\cos\vartheta = h\,\Delta\nu,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\bar{v}}{c}\cos\vartheta,$$

т. е. соотношение (138.1), выводимое в волновой оптике.

§ 139. Корпускулярно-волновой дуализм. Дифракционная решетка

Рассмотрим отражательную плоскую дифракционную решетку. Из волновой теории известно, что если период решетки равен a и если на решетку падает плоская монохроматическая волна под углом ϑ относительно плоскости решетки, то при отражении в направлении, характеризуемом углом ϑ', мы получим свет при условии

$$a(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\lambda. \qquad (139.1)$$

Рассмотрим теперь это явление с корпускулярной точки зрения. Пусть на решетку падает поток фотонов под углом ϑ. Поскольку из опыта хорошо известно, что характер дифракционной картины не зависит от интенсивности света, но определяется только самой решеткой в *целом*, нам не следует детализировать картину, — например, рассматривать отражение каждого фотона от определенного отражающего штриха решетки (этот вопрос мы рассмотрим ниже). Мы можем, однако, утверждать, что при падении фотона на решетку последняя получает добавочный импульс, а при отражении — испытывает отдачу. В результате со-

ставляющая импульса решетки в направлении оси x, лежащей в плоскости решетки, изменится на

$$p_x - p'_x = \Delta p_x.$$

Представим себе теперь, что решетка подвижна, и пусть она может перемещаться, оставаясь в своей плоскости; тогда импульс Δp_x сообщит ей движение. Очевидно, что при перемещении решетки в направлении оси x на расстояние, равное ее периоду a, решетка вновь совместится со своим исходным положением. Поэтому движение решетки мы можем рассматривать как периодическое с периодом a. В таком случае его можно «проквантовать», пользуясь квантовыми условиями Бора — Зоммерфельда (§ 113)

$$\int_0^a \Delta p_x\,dx = nh,$$

откуда

$$a\,\Delta p_x = nh. \qquad (139.2)$$

Так как масса решетки очень велика по сравнению с массой фотона, то изменением абсолютной величины его импульса p при отражении можно пренебречь. Поэтому

$$p_x = p\cos\vartheta, \quad p'_x = p\cos\vartheta', \quad \Delta p_x = p(\cos\vartheta - \cos\vartheta'),$$

и (139.2) принимает вид

$$a(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\frac{h}{p}. \qquad (139.3)$$

Принимая во внимание, что p есть импульс фотона, связанный с длиной волны соотношением

$$p = h/\lambda = 2\pi\hbar/\lambda \qquad (137.8)$$

и подставляя это выражение в (139.3), получим

$$a(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = n\lambda, \qquad (139.1)$$

т. е. формулу дифракционной решетки в обычном виде.

Обратим внимание на то, что в формулу (139.3) входит импульс p — величина, характеризующая частицу, а в соотношение (139.1) — длина волны. Можно сказать, таким образом, что соотношения (139.3) и (139.1) представляют одну и ту же формулу, написанную, однако, в первом случае в терминах корпускулярной картины, а во втором — в терминах волновой картины. Как и в остальных случаях, переход от одной картины к другой производится при помощи соотношения

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p},$$

связывающего оба аспекта оптических явлений.

§ 140. Гипотеза де-Бройля

Дуализм «волны-частицы» был установлен, как мы видели, прежде всего при изучении природы света. В 1924 г. Луи де-Бройль, пытаясь выйти из затруднений, связанных с этим дуализмом, выдвинул смелую гипотезу, что дуализм не является особенностью одних только оптических явлений, но имеет универсальное значение. «В оптике, — говорит он, — в течение столетия слишком пренебрегали корпускулярным способом рассмотрения по сравнению с волновым; не делалась ли в теории материи обратная ошибка? Не думали ли мы слишком много о картине «частиц» и не пренебрегали ли чрезмерно картиной волн»? Таков был вопрос, поставленный де-Бройлем.

К допущению волновых свойств у материальных частиц его привели также следующие соображения. В двадцатых годах XIX столетия Гамильтон обратил внимание на замечательную аналогию между геометрической оптикой и механикой (само собой разумеется, что в то время речь могла идти только о механике Ньютона). Оказывается, что основные законы этих двух различных областей можно представить в математически тождественной форме. Это значит, что вместо того, чтобы рассматривать движение материальной частицы в поле с потенциалом $V(x, y, z)$, можно рассматривать движение световых лучей в оптически неоднородной среде с соответственно выбранным показателем преломления $\mu(x, y, z)$ и наоборот. Эта аналогия распространялась только на геометрическую оптику и классическую механику. Но хорошо известно, что геометрическая оптика не может объяснить всех свойств света. Для объяснения таких свойств, как интерференция и дифракция, нужно пользоваться волновой оптикой, которая имеет более общее значение; геометрическая же оптика является предельным случаем оптики волновой (имеющим место для очень коротких длин волн). С другой стороны, известно также, что и ньютонова механика имеет ограниченную применимость; она, например, не может объяснить существования дискретных уровней энергии в атомных системах. Идея де-Бройля состояла в том, что необходимо расширить аналогию между механикой и оптикой и волновой оптике сопоставить *волновую механику*, более общую, нежели механика классическая, и применимую к внутриатомным движениям.

Допуская, таким образом, что материальные «частицы» наряду с корпускулярными свойствами имеют также и волновые, де-Бройль перенес на случай материальных «частиц» правила перехода от одной картины к другой, с которыми мы уже неоднократно встречались, рассматривая дуализм «волны частицы» в оптике. Пусть мы имеем материальную «частицу» (например, электрон) с массой m, движущуюся в отсутствии поля, т. е. равномерно со скоростью v. В корпускулярной картине мы приписываем частице энергию E и импульс p; в волновой картине мы имеем дело с частотой ω и длиной волны λ. Если обе эти картины являются различными аспектами одного и того же объекта, то связь между характеризующими их величинами устанавливается соотношениями (см. § 137)

$$E = \hbar\omega \tag{140.1}$$

и

$$p = 2\pi\hbar/\lambda, \tag{140.2}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π.

В случае оптических явлений мы использовали соотношение (140.2) для определения импульса фотона, который представляет собою частицу с массой покоя, равной нулю, движущуюся со скоростью света c. Для материальных частиц то же соотношение по де-Бройлю дает длину волны тех плоских монохроматических волн, которые сопоставляются этим частицам:

$$\lambda = 2\pi\hbar/p.$$

В случае частиц с массой покой, не равной нулю, $p = mv$, причем для малых скоростей m есть постоянная, а для скоростей, сравнимых со скоростью света, релятивистская масса $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ зависит от скорости. Итак, для «частиц» с массой покоя, не равной нулю, по де-Бройлю

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{140.3}$$

Если ввести волновой вектор $\mathbf{k}$ с абсолютным значением $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, то на основании (140.2)

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}, \quad p_x = \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z. \tag{140.4}$$

Формула плоской волны, описывающей движение свободных материальных «частиц», имеет поэтому следующий вид *):

$$\psi = Ae^{i(kr-\omega t)} = Ae^{i(xk_x+yk_y+zk_z-\omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(xp_x+yp_y+zp_z-Et)}. \tag{140.5}$$

§ 141. Свойства волн де-Бройля

Вычислим скорость распространения волн де-Бройля, различая, как и во всех случаях, фазовую и групповую скорости. Фазовая скорость будет

$$c' = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}. \tag{141.1}$$

*) То, что в (140.5) показатель имеет обратный знак по сравнению со (132.8), не имеет значения, так как физический смысл имеет только квадрат модуля $|\psi^2|$, т. е. $\psi^*\psi = A^2$.

Так как $c > v$, то фазовая скорость волн де-Бройля больше скорости света в пустоте. Но это не должно нас смущать, так как мы уже знаем, что фазовая скорость не характеризует ни скорости «сигнала», ни скорости перемещения энергии, а потому и может быть как меньше, так и больше c.

Групповую скорость вычисляем при помощи формулы (134.3)

$$g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}. \qquad (141.2)$$

Нетрудно доказать, что $dE/dp = v$. В самом деле, изменение энергии частицы, движущейся под действием силы $\mathbf{F}$ на пути $d\mathbf{s}$, равно $dE = \mathbf{F}\,d\mathbf{s}$, но $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, а потому

$$dE = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\,d\mathbf{s} = d\mathbf{p}\,\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{v}\,d\mathbf{p}$$

или, так как $\mathbf{v}$ и $\mathbf{p}$ направлены одинаково

$$dE = v\,dp,$$

откуда

$$\frac{dE}{dp} = v.$$

Итак, мы получаем из (141.2)

$$g = v,$$

т. е. групповая скорость волн де-Бройля равна скорости частицы. К этому замечательному соотношению мы еще вернемся.

Найдем теперь связь между частотой волн де-Бройля и составляющими волнового вектора (закон дисперсии). С этой целью мы сначала установим соотношение между ν и $\mathbf{k}$ для общего случая релятивистских частиц, воспользовавшись релятивистским соотношением между импульсом и энергией *):

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2c^2 + \mathbf{p}^2 = m_0^2c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \qquad (141.3)$$

Подставляя сюда

$$E = \hbar\omega, \qquad (140.1)$$

$$p_x = \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z, \qquad (140.4)$$

*) Это соотношение можно легко получить из формул $p = \frac{v}{c^2}E$ (стр. 396) и $E = \frac{m_0c^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}$ (стр. 216). Имеем $p^2 = \frac{v^2}{c^4}E^2 = \frac{\beta^2}{c^2}E^2 = \frac{E^2}{c^2}[1-(1-\beta^2)] = \frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2}{c^2}(1-\beta^2) = \frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2$, откуда и получается (141.3).

получаем

$$\frac{\omega^2}{c^2} = 4\pi^2\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \qquad (141.4)$$

Вводя обозначение

$$2\pi\frac{m_0c^2}{h} = \frac{m_0c^2}{\hbar} = \omega_0, \qquad (141.5)$$

приводим (141.3) к виду

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} + (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \qquad (141.6)$$

Это и есть искомое релятивистское соотношение. Заметим, что для частиц с массой покоя, равной нулю, формула (141.5) дает $\omega_0 = 0$ и (141.6) принимает вид

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

— уже известное нам соотношение, вытекающее из волнового уравнения для электромагнитных волн, т. е. для волн, которым сопоставляются фотоны.

Рассмотрим, наконец, еще одно замечательное свойство волн де-Бройля. В элементарной теории водородоподобного атома по Бору мы пользовались следующим условием для отбора стационарных круговых орбит

$$mva = n\hbar \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Это условие можно переписать в виде

$$2\pi a = n\frac{2\pi\hbar}{mv}.$$

Принимая во внимание, что $2\pi\hbar/mv$ есть длина волны де-Бройля, имеем:

$$2\pi a = n\lambda, \qquad (141.7)$$

т. е. длина окружности стационарной орбиты должна быть равна целому числу волн де-Бройля.

§ 142. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Бройля. Метод Брэгга

Гипотеза де-Бройля очень быстро была блестяще оправдана экспериментально. А именно, было показано, что пучки электронов, протонов и даже целых атомов обнаруживают явления интерференции совершенно так же, как свет или рентгеновские лучи.

Рассмотрим прежде всего, каков порядок величины длины волны де-Бройля для материальных частиц. Это даст нам

указание на то, какие именно экспериментальные методы должны быть применены в данном случае для обнаружения интерференции. Пусть мы имеем пучок электронов, ускоряемых потенциалом V вольт; если этот потенциал невелик, так что можно еще пользоваться формулами классической (ньютоновой) механики, то скорость электронов определяется из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eV}{300}, \tag{142.1}$$

а длина волны де-Бройля — из соотношения

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}. \tag{140.3}$$

Исключая v из (142.1) и (140.3), получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{4\pi^2\hbar^2}{me}}\sqrt{\frac{150}{V}} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-27}}{\sqrt{9\cdot 10^{-28}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-10}}}\sqrt{\frac{150}{V}} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{150}{V}}\cdot 10^{-8}\ см = \sqrt{\frac{150}{V}}\ Å = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\ Å. \tag{142.2}$$

Итак мы видим, что для электронов, ускоряемых потенциалом 150 *в*, длина волны де-Бройля равна 1 Å; это — порядок величины длины волны мягких рентгеновских лучей.

Если скорость электронов велика, то формулы ньютоновой механики становятся неприменимыми, и нужно учитывать релятивистскую поправку на зависимость массы от скорости. В таких случаях для определения λ можно пользоваться следующей

Таблица XVIII

Ускоряющий потенциал в вольтах	Длина волны (в Å)	
	электроны	протоны
10^9	$1{,}2\cdot 10^{-5}$	$7{,}3\cdot 10^{-6}$
10^8	$1{,}2\cdot 10^{-4}$	$2{,}7\cdot 10^{-5}$
10^7	$1{,}2\cdot 10^{-3}$	$0{,}9\cdot 10^{-4}$
10^6	$0{,}87\cdot 10^{-3}$	$2{,}9\cdot 10^{-4}$
10^5	$3{,}7\cdot 10^{-2}$	$9{,}0\cdot 10^{-4}$
10^4	0,12	$2{,}9\cdot 10^{-3}$
10^3	0,39	$9{,}0\cdot 10^{-3}$
400	0,61	$1{,}4\cdot 10^{-2}$
200	0,86	$2{,}0\cdot 10^{-2}$
50	1,7	$4{,}0\cdot 10^{-2}$
10	3,9	$0{,}9\cdot 10^{-1}$

приближенной формулой:

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}(1 - 0{,}489\cdot 10^{-6}V)\ Å. \tag{142.3}$$

Для протонов длины волны де-Бройля при той же скорости в $\sqrt{1836}$ раз меньше. В таблице XVIII приведены вычисленные значения λ для электронов и протонов.

Из сказанного ясно, что для обнаружения интерференции материальных частиц следует пользоваться теми же методами,

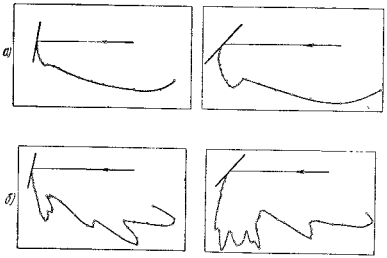


Рис. 207. Рассеяние электронов поликристаллической никелевой пластинкой: *а*) до прокаливания; *б*) после прокаливания.

которые применяются в случае рентгеновских лучей, т. е. интерференцией в кристаллической решетке. На самом деле, интерференция электронных пучков в кристаллах была обнаружена еще до появления теории де-Бройля. В 1921—1923 гг. Дэвисон и Кэнсман нашли, что при рассеянии электронов тонкими металлическими листочками наблюдается определенно выраженная зависимость интенсивности от угла рассеяния (рис. 207). При этом положение и величина получающихся максимумов существенно зависят от скорости электронов. Случайное обстоятельство показало, что в этом явлении решающую роль играет кристаллическая структура: во время опытов с отражением от никелевых пластинок стеклянный аппарат лопнул и никелевая пластинка окислилась. Для восстановления этой пластинки ее пришлось затем долго прокаливать в вакууме и в атмосфере водорода. После этой обработки пластинка

испытала рекристаллизацию: в ней образовалось некоторое количество крупных кристаллов. При повторных опытах с рассеянием электронов оказалось, что картина вследствие этой рекристаллизации резко изменилась: количество максимумов сильно возросло, а сами максимумы сделались значительно определеннее (см. рис. 207, *б*).

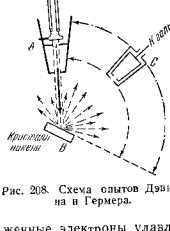


Рис. 208. Схема опытов Дэвисона и Гермера.

Объяснение этой своеобразной селективности в отражении электронов было крайне затруднительно до тех пор, пока не поняли, что здесь мы имеем пример интерференционного отражения. Следующие опыты Дэвисона и Гермера подтвердили правильность этого объяснения.

Параллельный пучок электронов (рис. 208) определенной скорости, получаемый при помощи «электронной пушки» *A*, направлялся на кристалл *B*; отраженные электроны улавливались коллектором *C*, соединенным с гальванометром. Коллектор мог устанавливаться под любым углом относительно падающего пучка, оставаясь все время в одной плоскости. Измеряя силу тока коллектора при разных положениях его, можно было судить об интенсивности отражения в различных направлениях. Результат представлялся в виде полярной диаграммы, образец которой приведен на рис. 209. На радиусах-векторах, проведенных под различными углами, откладывались отрезки, пропорциональные интенсивности отражения под соответствующими углами. Оказалось, что если поместить в *B* монокристалл никеля, то при отражении наблюдается резко выраженный селективный максимум, показывающий, что электроны отражаются, следуя оптическому закону: «угол падения равен углу отражения». Тот же опыт, повторенный с поликристаллической пластинкой никеля, состоящей из множества хаотически расположенных кристалликов, не обнаружил никакой селективности.

Рис. 209. Полярная диаграмма интенсивности отражения электронов от монокристалла никеля.

Опыт с правильным отражением электронов от монокристалла на самом деле представляет точную аналогию интерференционного отражения рентгеновских лучей от кристалла по методу Брэгга (или интерференционного отражения монохроматического света от тонкой пластинки). Как известно, рентгеновские лучи испытывают отражение от кристалла только в том случае, если их длина волны и угол скольжения удовлетворяют формуле Вульфа — Брэгга (см. гл. IV, § 33)

$$n\lambda = 2d \sin \varphi. \tag{142.4}$$

Эту формулу можно использовать для обнаружения интерференции двояким образом. Во-первых, можно направить на кристалл лучи определенной длины волны λ и, поворачивая кристалл, убедиться, что отражения происходят только при определенных углах $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, соответствующих значениям $n = 1, 2, \ldots$ в формуле Вульфа — Брэгга. Таким образом, получаются спектры первого, второго и т. д. порядков. Во-вторых, можно сохранять один и тот же угол скольжения φ и непрерывно менять длину волны. При этом отражения должны получаться только в тех случаях, когда

$$\lambda_n = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi. \tag{142.5}$$

т. е. для длин волн λ_1, $\lambda_2 = \lambda_1/2$, $\lambda_3 = \lambda_1/3$ и т. д.

В случае рентгеновских лучей пользуются первым способом, в случае электронов — вторым, так как потоки электронов обычно имеют определенную скорость (т. е. им соответствует определенная длина волны $\lambda = h/mv$) и менять эту скорость неизмеримо проще (изменяя ускоряющий потенциал), нежели поворачивать кристалл в вакууме.

Комбинируя формулы (142.2) и (142.5), получаем

$$\frac{12{,}25}{V^{1/2}} = \frac{1}{n} 2d \sin \varphi,$$

или

$$V^{1/2} = n \frac{12{,}25}{2d \sin \varphi}. \tag{142.6}$$

Таким образом, если при расположении, изображенном на рис. 208, постепенно менять ускоряющий потенциал V и каждый раз измерять силу тока коллектора (т. е. интенсивность отражения), то, откладывая затем по оси абсцисс $V^{1/2}$, а по оси ординат — интенсивность отражения, мы должны получить кривую с рядом равноотстоящих резких максимумов с расстоянием между максимумами, равным $12{,}25/2d \sin \varphi$.

На рис. 210 приведена кривая, полученная с монокристаллом никеля при определенных условиях ($\varphi = 80°$, $d = 2{,}03$ А).

Как видно, периодическое повторение максимумов выражено очень отчетливо. На том же чертеже стрелками показано положение максимумов, вычисленное по формуле Вульфа — Брэгга (142.6). Сравнение с положением максимумов на

экспериментальной кривой показывает, что для высоких значений n ($n = 7, 8$) имеется точное совпадение; для более низких n обнаруживается расхождение и притом тем большее, чем меньше n.

Поскольку это расхождение имеет систематический и закономерный характер, оно показывает, что какой-то фактор не учтен при расчете. Этот фактор есть показатель преломления волн де-Бройля. В самом деле при выводе формулы Вульфа — Брэгга (см. § 33) показатель преломления считается равным 1, а длина волны вне кристалла и внутри него — одинаковой. Это вполне допустимо для очень коротких длин волн. Для более длинных волн в области рентге-

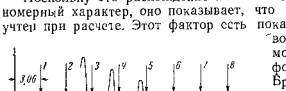


Рис. 210. Проверка формулы Вульфа — Брэгга для интерференционного отражения электронов от монокристалла никеля.

новских лучей при точном определении длины волны приходится учитывать показатель преломления и пользоваться исправленной формулой Вульфа — Брэгга, которая будет выведена ниже. То же самое должно иметь место и для волн де-Бройля. Качественно это подтверждается уже характером расхождения вычисленных и экспериментальных максимумов отражения. В самом деле, расхождение, как мы видели, уменьшается при увеличении n; но при фиксированном угле φ отражения для возрастающих n согласно формуле (142.5) суть отражения соответственно убывающих длин волн λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$ и т. д.

Упражнения 1. Вычислить длину волны, соответствующую α-частице RaC′ (энергия α-частицы равна $1{,}22 \cdot 10^{-5}$ *эрг*)

2. Вычислить ускоряющий потенциал, соответствующий максимуму первого порядка для интерференционного отражения от монокристалла никеля при угле между падающим и отраженным пучком в 50°.

§ 143. Преломление электронных волн и внутренний потенциал металла

Объяснение смещения максимумов, приведенное в конце предыдущего параграфа, количественно подтверждается вычислением внутреннего потенциала металла из наблюдений над электронной интерференцией. Вычисление это производится следующим образом. Фазовая скорость волн де-Бройля, как мы знаем, равна E/p. Когда электроны попадают внутрь металла, то их импульс меняется, и это именно есть причина преломле-

ния электронных потоков с корпускулярной точки зрения (см. § 137). Изменение импульса при попадании внутрь металла объясняется тем, что внутри металла имеется электрическое поле, обусловленное положительными ионами, из которых состоит кристаллическая решетка металла. Потенциал этого поля, таким образом, положителен. Если мы теперь представим себе прямую, проходящую через ряд положительных ионов металла, то при перемещении вдоль этой прямой потенциал, очевидно, должен меняться периодически, так как ионы расположены на равных расстояниях. Мы можем, однако, приближенно заменить этот периодически меняющийся потенциал некоторым средним потенциалом, который и называется внутренним потенциалом металла.

Фазовая скорость электронных волн вне металла равна

$$c'_a = \frac{E}{p_a} = \frac{E}{mv_a} = \frac{E}{\sqrt{m^2 v_a^2}} = \frac{E}{\sqrt{2mE}},$$

где E — полная энергия электронов. Если потенциальная энергия электрона внутри металла есть U, то импульс внутри металла будет $p_i = \sqrt{2m(E-U)}$, а фазовая скорость электронных волн

$$c'_i = \frac{E}{\sqrt{2m(E-U)}}.$$

Показатель преломления μ, по определению, равен

$$\mu = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \frac{c_a}{c_i} = \sqrt{\frac{E-U}{E}} = \frac{\lambda_a}{\lambda_i}, \qquad (143.1)$$

где φ и φ' — углы скольжения, т. е. дополнения до $\pi/2$ к углам падения и преломления.

Теперь нужно принять во внимание, что внутренний потенциал металла V_0 положителен, а заряд электрона отрицателен; поэтому потенциальная энергия U отрицательна:

$$U = -eV_0;$$

полная энергия E выражается, как обычно, через внешний ускоряющий потенциал $E = eV$. Принимая все это во внимание, получаем из (143.1)

$$\mu = \frac{\sqrt{V+V_0}}{\sqrt{V}} = \sqrt{1+\frac{V_0}{V}}. \qquad (143.2)$$

Мы получили, таким образом, выражение показателя преломления через внутренний потенциал V_0.

Выведем теперь формулу Вульфа — Брэгга для случая, когда $\mu \neq 1$. Рассмотрим два интерферирующих луча *1* и *2*

(рис. 211) Вследствие преломления внутренний угол скольжения φ' не равен внешнему φ. Разность хода лучей *1* и *2*, очевидно, равна

$$2d\sin\varphi' = 2d\sqrt{1-\cos^2\varphi'}$$

или, принимая во внимание, что

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = \mu,$$

$$2d\sin\varphi' = 2d\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\mu^2}}.$$

Условие максимума при интерференции теперь дает

$$2d\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{\mu^2}} = n\lambda_1 = n\frac{\lambda_a}{\mu}$$

[см. (143.1)] или

$$2d\sqrt{\mu^2-\cos^2\varphi} = n\lambda_a. \qquad (143.3)$$

Это и есть формула Вульфа — Брэгга для $\mu \neq 1$.

При помощи этой формулы можно вычислить внутренний потенциал металла следующим образом. Подставляя в (143.3)

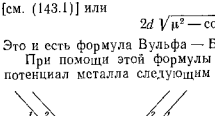


Рис. 211. К выводу формулы Вульфа—Брэгга с учетом показателя преломления.

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{150}{V}}, \text{ получаем}$$

$$4d^2(\mu^2-\cos^2\varphi) = n^2\frac{150}{V},$$

и заменяя здесь μ^2 через $1+V_0/V$, по формуле (143.2) находим

$$V_0 = n^2\frac{150}{4d^2} - V\sin^2\varphi. \qquad (143.4)$$

Итак, зная ускоряющий потенциал V и измерив угол скольжения φ, можно вычислить V_0 для кристалла с известной величиной d.

Таким путем получаются, например, значения V_0, приведенные в таблице XIX. Как видно, эти значения достаточно постоянны. Они согласуются со значениями, вычисленными из теории металлов.

Важную роль в истолковании связи между внутренним потенциалом металла и преломлением электронных волн сыграли работы советского физика В. Е. Лашкарева.

Упражнения: 1. Вычислить показатель преломления платины для пучка электронов с энергией 240 *эв*, падающего на поверхность платины под углом 30°. Внутренний потенциал платины равен 12 *в*, постоянная решетки — 3,9 А.

2. При данных предыдущей задачи вычислить угол преломления пучка электронов.

Таблица XIX

Металл	Ускоряющий потенциал (в вольтах)	λ в Å	n	μ	V_0 (вольт)
Ni	67	1,49	3	1,12	17
	142	1,03	4	1,05	16
	218	0,83	5	1,03	14
Pb	65	1,52	3	1,10	14
	125	1,09	4	1,06	15
	208	0,84	5	1,03	13
Ag	48	1,77	3	1,15	15
	96	1,25	4	1,08	15
	166	0,95	5	1,04	13

§ 144. Экспериментальное подтверждение гипотезы де-Бройля. Методы Лауэ и Дебая—Шеррера

Интерференция рентгеновских лучей в кристаллах осуществляется не только по методу Брэгга, но также и двумя другими главными методами: методом Лауэ и методом Дебая — Шеррера. Оба эти метода могут быть применены и для осуществления интерференции с волнами де-Бройля. Метод Лауэ, при помощи которого исторически впервые была осуществлена интерференция рентгеновских лучей в кристаллах, как известно, заключается в том, что узкий пучок рентгеновских лучей, имеющих сплошной спектр, пропускается через кристалл. Получающиеся при этом интерференционные пучки фиксируются на фотопластинке в виде системы симметричных пятен (см. § 32).

Причина, вследствие которой для осуществления опыта Лауэ необходимо, чтобы рентгеновские лучи имели сплошной спектр, подробно разъяснена в § 32. Однако в случае электронов получение пучка с набором скоростей, распределенных непрерывным образом, экспериментально невозможно: электроны, выходящие из электронной пушки, имеют одну и ту же скорость, или, точнее говоря, обладают распределением скоростей в узких пределах. Поэтому, направляя электронный пучок на кристалл, мы, вообще говоря, не удовлетворим условиям, необходимым для осуществления интерференции Лауэ. В этом случае приходится шаг за шагом отыскивать условия, при которых возникает максимум, соответствующий определенному интерференционному пучку, непрерывно меняя скорость электронов (т. е. ускоряющий потенциал, наложенный на пушку) и одновременно меняя положение коллектора, принимающего отраженные от кристалла электроны.

Практически опыт с электронами, аналогичный опыту Лауэ, был поставлен Дэвисоном и Гермером следующим образом. Монокристалл никеля, принадлежащий к кубической системе, сошлифовывался, как показано на рис. 212 [параллельно плоскостям с кристаллографическими индексами (111)]. На рис. 212

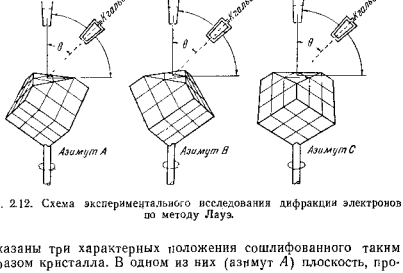


Рис. 212. Схема экспериментального исследования дифракции электронов по методу Лауэ.

показаны три характерных положения сошлифованного таким образом кристалла. В одном из них (азимут A) плоскость, проходящая через пучок и ось коллектора, проходит через одну из вершин треугольника; при другом (азимут B) — она делит сторону треугольника пополам и при третьем (азимут C) — она параллельна стороне треугольника.

Различие между условиями опыта в этих трех азимутах видно из рис. 213. Сошлифованная поверхность кристалла покрыта правильными рядами атомов. Ее можно рассматривать как совокупность линейных решеток; при этом постоянная решетки в различных азимутах неодинакова: например, в азимуте A она равна 2,15 Å, а в азимуте C — 1,24 Å. Экспериментальная установка позволяла вращать кристалл около вертикальной оси и, кроме того, перемещать коллектор в любое положение около вертикальной оси.

В опыте Дэвисона и Гермера пучок электронов направлялся перпендикулярно к сошлифованной плоскости и с помощью коллектора измерялась интенсивность отражения электронов под различными углами при фиксированном положении кристалла (в одном из трех указанных азимутов). Результаты такого рода измерений иллюстрируются на рис. 214 серией по-

лярных диаграмм интенсивности отражения в азимуте A при различных скоростях электронов (т. е. при разной длине волн де-Бройля). Здесь видно, что при скорости электронов, соответствующей 44 *эв*, максимум под углом 50° едва намечается

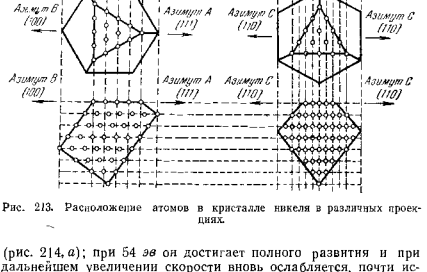


Рис. 213. Расположение атомов в кристалле никеля в различных проекциях.

(рис. 214, *а*); при 54 *эв* он достигает полного развития и при дальнейшем увеличении скорости вновь ослабляется, почти исчезая при 68 *эв*. Далее опыт видоизменялся следующим образом: положение коллектора и скорость электронов сохранялись

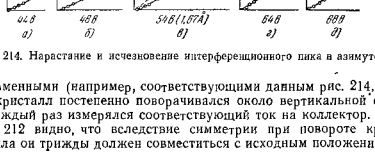


Рис. 214. Нарастание и исчезновение интерференционного пика в азимуте A.

неизменными (например, соответствующими данным рис. 214, *в*), но кристалл постепенно поворачивался около вертикальной оси и каждый раз измерялся соответствующий ток на коллектор. Из рис. 212 видно, что вследствие симметрии при повороте кристалла он трижды должен совместиться с исходным положением.

Поэтому резкий максимум должен повторяться через каждые 120°. Рис. 215 показывает, что это наблюдается на самом деле. Небольшие горбы, видные на этом рисунке между каждыми двумя резкими максимумами, представляют собою едва намечающиеся максимумы для электронов в 54 *эв* в азимутах *B* и *C*

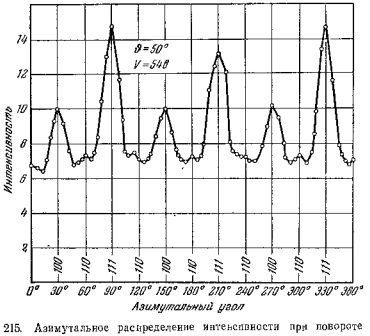


Рис. 215. Азимутальное распределение интенсивности при повороте кристалла.

Наконец, и третий метод изучения интерференции рентгеновских лучей — метод Дебая — Шеррера — также был применен для доказательства существования интерференции электронных пучков. Если тонкий пучок рентгеновских лучей проходит сквозь мелкокристаллический порошок или через тонкую металлическую пластинку, представляющую собой агрегат микрокристалликов, то среди них всегда найдутся такие, которые расположены к падающему пучку под углом, удовлетворяющим соотношению Вульфа — Брэгга. От таких кристалликов рентгеновские лучи испытывают отражения, причем все отраженные лучи для данного значения φ в формуле Вульфа — Брэгга пойдут по поверхности конуса. Поставив на пути рассеянных лучей фотографическую пластинку, расположенную перпендикулярно к направлению первичного пучка, мы получим на ней ряд ко-

лец. Совершенно такая же картина получается, если через тонкую металлическую пленку пропускать пучок электронов: рассеянные электроны дают на фотографической пластинке систему интерференционных колец.

Опыты с получением электронограмм дебаевского типа были впервые удачно поставлены Г. П. Томсоном с быстрыми электронами (17 500—56 500 *эв*) и П. С. Тартаковским — с относительно медленными электронами (до 1700 *эв*).

На рис. 216—217 приведены два снимка, полученных с листочками золота и меди. Как видно, в том и другом случаях

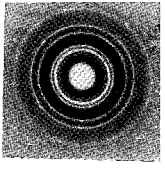


Рис. 216. Электронограмма тонких листков золота.

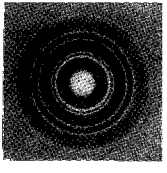


Рис. 217. Электронограмма тонких листков меди.

получаются типичные интерференционные кольца. Очень простым способом можно показать, что эти кольца образуются самими рассеянными электронами, а не вторичными рентгеновскими лучами: при включении магнитного поля вся интерференционная картина смещается и искажается, в то время как интерференционная картина, получаемая с рентгеновскими лучами, конечно, остается неизменной.

Количественная проверка может быть произведена следующим образом. Из геометрических соображений легко показать, что для данного металлического листка и при неизменном расстоянии от листка до фотопластинки между радиусом дифракционного кольца r и длиной волны λ должно иметь место соотношение

$$\frac{r}{\lambda} = \text{const}. \qquad (144.1)$$

Так как в этих опытах приходится пользоваться электронами, энергии которых измеряются килоэлектрон-вольтами (вследствие сильного поглощения медленных электронов металлическими листочками), то простое выражение для длины волны

$\lambda = 12{,}25\ V^{-1/2}$ становится неточным и нужно пользоваться формулой с поправкой на релятивистские эффекты *)

$$\lambda = \frac{12{,}25}{\sqrt{V}}\left(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6} V\right). \qquad (142.3)$$

Подставляя это выражение в (144.1), получаем

$$\frac{r}{\lambda} = \frac{rV^{1/2}}{12{,}25\left(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6} V\right)} \approx \frac{rV^{1/2}}{12{,}25}\left(1 + 0{,}489 \cdot 10^{-6} V\right) = \text{const}. \qquad (144.2)$$

В таблице XX приведены данные опыта с золотыми листочками. Как видно из третьего столбца таблицы, требуемое постоянство выполняется удовлетворительно.

Таблица XX

V (вольт)	r (см)	$rV^{1/2}(1+0{,}489\cdot10^{-6}V)$
24 600	2,50	398
31 800	2,15	390
39 400	2,0	404
45 600	1,86	405
54 300	1,63	388

Наконец, можно вычислить постоянную решетки различных кристаллов из дебай-шерреровских снимков с электронными лучами и сравнить с результатами, полученными для тех же кристаллов при помощи рентгеновских лучей. В том и другом случаях получаются цифры, весьма удовлетворительно между собою совпадающие (см. таблицу XXI). В настоящее время на основе опытов с интерференцией электронных пучков развился мощный

*) Это выражение получается следующим образом В формуле де-Бройля $\lambda = h/mv$ следует для массы m взять релятивистское выражение $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Тогда получится

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Вычислим теперь скорость v через ускоряющий потенциал, воспользовавшись выражением кинетической энергии в теории относительности (см § 64)

$$E_k = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) = eV.$$

Находим отсюда

$$v = c\,\frac{\sqrt{e^2V^2 + 2m_0c^2eV}}{m_0c^2 + eV}.$$

Подставляя в формулу де-Бройля, получим

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_0eV\left(1 + eV/2m_0c^2\right)}},$$

метод электронографического анализа, по своей точности и широте практических применений не уступающий рентгенографическому анализу, а в некоторых случаях даже более удобный *).

Таблица XXI

Металл	Постоянная решетки (в Å)	
	из интерференции электронов	из интерференции рентгеновских лучей
Al	4,035	4,063
Au	3,99—4,20	4,06
Pt	3,89	3,91
Pb	4,99	4,92
Fe	2,85	2,86

Упражнение. Пучок электронов с энергией в 30 *кэв* проходит через тонкий листок алюминия. Допуская применимость формулы Вульфа — Брэгга, вычислить угол отклонения для интерференционной картины первого порядка. Постоянную решетки Al взять из таблицы XXI.

§ 145. Интерференционные явления с молекулярными пучками и с нейтронами

Согласно гипотезе де-Бройля волновыми свойствами должны обладать не только электроны, но и любые материальные частицы, т. е. также атомы, молекулы или тяжелые элементарные частицы (протоны, нейтроны). Так как по формуле де-Бройля длина волны $\lambda = h/mv$ обратно пропорциональна массе, то при одинаковых скоростях в случае тяжелых частиц λ должна быть значительно меньше, нежели в случае электронов. Поэтому наблюдение дифракции волн де-Бройля в случае атомов и других тяжелых частиц возможно при малых скоростях последних. Подсчет показывает, что при комнатной температуре длина волны де-Бройля легких атомов — порядка 10^{-8} *см*, т. е.

или, если ускоряющий потенциал V выражен в электрон-вольтах,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{m_0e}{150}V\left(1 + \frac{eV}{600m_0c^2}\right)}} = \sqrt{\frac{h^2}{m_0e}}\sqrt{\frac{150}{V}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eV}{600m_0c^2}}}.$$

Подставляя численные значения констант, получаем

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{V}}\,\frac{1}{\left(1 + 0{,}978 \cdot 10^{-6} V\right)^{1/2}} \approx \frac{12{,}25}{V^{1/2}}\left(1 - 0{,}489 \cdot 10^{-6} V\right)$$

— формула (142.3), приведенная в тексте

*) См З. Г. Пинскер, Дифракция электронов. Изд. АН СССР, 1949.

того же порядка величины, что и длина волны рентгеновских лучей. Значительное усовершенствование техники работы с так называемыми молекулярными пучками, т. е. направленными прямолинейными потоками нейтральных атомов или молекул *), позволило наблюдать дифракционные явления также и с пучками атомов гелия и молекул нейтрального водорода. Так как атомы или молекулы при малых скоростях не могут проникать

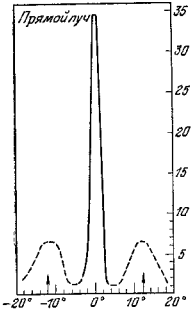


Рис. 218. Дифракция атомов гелия от кристалла фтористого лития.

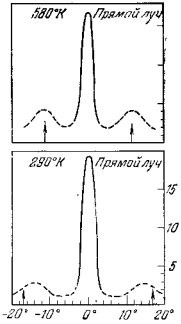


Рис. 219. Дифракция молекул водорода от кристалла фтористого лития.

внутрь кристалла, то последний действует для волн де Бройля, как двухмерная отражательная решетка. Дифракция рентгеновских лучей от такой решетки рассмотрена нами в § 32. Там было показано, что плоская решетка дает *двойное многообразие* дифракционных спектров, например, спектры порядка (+1, +1) или (+1, —1) и т. д. Аналогичный результат должен иметь место и в случае отражения волн де-Бройля от решетки кристалла.

На рис. 218 и 219 приведены картины дифракции атомов гелия и молекул водорода от кристалла фтористого лития. Два

*) Методу молекулярных пучков и его разнообразным применениям посвящена монография К. Ф. Смита, Молекулярные пучки, Физматгиз, 1950.

боковых максимума в обоих случаях соответствуют дифракции порядка (+1, —1). Расчет положения максимумов дает результаты, очень хорошо согласующиеся с экспериментальными. Таким образом, опыты с молекулярными пучками не только качественно подтверждают наличие волновых свойств материи, но и количественно оправдывают формулу де-Бройля в применении к атомам и молекулам.

С особенной наглядностью наличие волновых свойств у тяжелых частиц и применимость формулы де-Бройля обнаружили нейтроны. Нейтроны наряду с протонами — элементарные составные части атомных ядер; их масса приблизительно равна

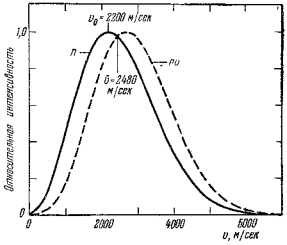


Рис. 220. Распределение нейтронов в равновесии с замедлителем ($T = 293°$ K; плотность и поток нейтронов даны в функции от v).

массе протона, но они лишены электрического заряда. Благодаря этому последнему свойству нейтроны свободно проникают внутрь твердых тел и с ними можно осуществить дифракцию на пространственной решетке кристалла.

Для получения дифракции по методу Лауэ, как мы знаем, необходим сплошной спектр длин волн. В случае нейтронов пучок со сплошным спектром волн де-Бройля (полиэнергетический пучок) получается благодаря тому, что, попадая внутрь тела, нейтроны приходят в тепловое равновесие с веществом. При этом их скорость подчиняется известному из кинетической теории закону распределения Максвелла, графически представленному для комнатной температуры на рис. 220. Здесь v_0 «наивероятнейшая скорость»; для комнатной температуры она равна 2 200 *м/сек*. Длина волны де-Бройля для нейтронов такой

скорости равна 1,8 Å, т. е. имеет как раз такую величину, какая необходима для осуществления дифракции на кристаллической

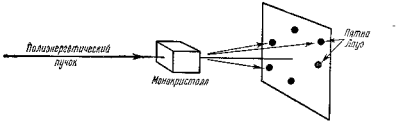


Рис. 221. Метод дифракции Лауэ для рентгеновских лучей и пучков нейтронов.

решетке. Величина $\bar{v} = 2480$ *м/сек* — средняя скорость нейтронов при комнатной температуре; на рисунке пунктиром представлена также кривая распределения для потока нейтронов

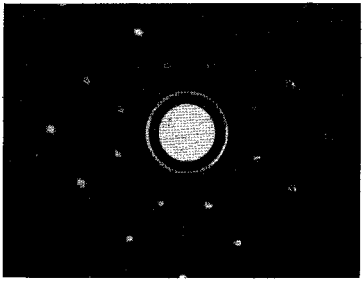


Рис. 222. Нейтронограмма кристалла NaCl, полученная Шуллом и Уолланом.

nv, т. е. числа нейтронов, пересекающих площадку в 1 *см*^{2} за секунду.

На рис. 221 представлена схема опыта с дифракцией для полиэнергетического пучка нейтронов, а на рис. 222 приведена

фотография, полученная при прохождении нейтронов через монокристалл NaCl. Типичное для дифракции на пространственной решетке распределение пятен соответствует симметрии кристалла.

Для получения дифракции по методу Брэгга требуется моноэнергетический поток нейтронов. Получение такого пучка достигается предварительным отражением пучка нейтронов от кристалла, которое выделяет нейтроны с определенной скоростью, а следовательно, с определенной длиной волны де-Бройля. Для определенного угла скольжения нейтроны отразятся в том случае, если будет удовлетворено условие Вульфа — Брэгга

$$\lambda = 2d \sin \theta,$$

причем

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Выбирая соответствующим образом угол θ, можно выделить из полиэнергетического пучка нейтроны с любой необходимой длиной волны де-Бройля и, пользуясь ими, исследовать строение кристаллов.

В настоящее время исследования строения кристаллов при помощи дифракции нейтронов развились в особую область структурного анализа, так называемую структурную нейтронографию, которая существенным образом дополняет методы рентгенографического и электронографического анализа. В частности, например, определение положения атомов водорода в кристаллических решетках стало возможным именно благодаря дифракции нейтронов.

§ 146. Волновой пакет и частица

В четырех последних параграфах мы убедились в том, что интерференционные опыты, поставленные с такими «частицами» как электроны или даже целые атомы, столь же хорошо свидетельствуют в пользу волновой природы этих «частиц», как и соответствующие опыты со светом. Мы вновь встречаемся с двойственностью, которую впервые обнаружили у света. Однако на первых порах развития квантовой механики была сделана заманчивая попытка разрешить противоречие волны-частицы, рассматривая частицы как *волновые пакеты*. Основания для этого были следующие. Электрон или другая материальная частица не может быть, конечно, плоской гармонической волной, так как подобная волна безгранична, а частица локализована в пространстве и во времени, т. е. в определенный момент времени занимает определенное место в пространстве. Мы

видели, однако (§ 135), что из плоских волн, подбирая соответственным образом их волновые векторы **k**, можно строить волновые пакеты, имеющие сколь угодно малое протяжение. Нельзя ли рассматривать частицу как волновой пакет? Подобная гипотеза, казалось бы, находит себе подтверждение в том замечательном свойстве волн де-Бройля, что их групповая скорость, т. е. именно та скорость, с которой перемещается максимум пакета, как раз равна скорости частицы v

$$g = v. \tag{141.2}$$

Сколь ни привлекательной кажется эта простая идея, при ближайшем рассмотрении она оказывается совершенно неправильной. Решающее возражение заключается в следующем. Те благоприятные свойства пакета, которые мы нашли в § 135, — именно его устойчивость и движение как целого с групповой скоростью, не дают полной картины свойств пакета. Они нами на самом деле были получены лишь в качестве первого приближения, так как при рассмотрении движения пакета в § 135 мы воспользовались приближенным соотношением между ω и k

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0)\left\{\frac{d\omega}{dk}\right\}_0,$$

отбросив все последующие члены разложения. Если же провести вычисление точно, то получается несколько иной результат, а именно, оказывается, что хотя максимум пакета перемещается со скоростью $\frac{d\omega}{dk}$, равной для волн де-Бройля v, самый пакет при движении в диспергирующей среде не сохраняет своей формы и размеров, но постепенно расширяется — расплывается.

Причину такого расплывания нетрудно понять из следующих качественных соображений. Положим, что в некоторый определенный момент путем суперпозиции плоских волн образовался пакет. Для образования его необходимо накладывать волны с длинами волн или, что то же, — волновыми числами k, непрерывно изменяющимися в некотором интервале $\pm\Delta k$. Если среда не имеет дисперсии, то все эти волны распространяются с одной и той же скоростью, и пакет сохраняется. Но если дисперсия имеется, то образующие пакет плоские волны будут распространяться с различной фазовой скоростью: более быстрые будут забегать вперед, а более медленные — отставать. Вследствие этого подходящие для образования пакета фазовые соотношения между плоскими волнами уже в следующий момент нарушатся, и пакет будет растягиваться — расплываться. Быстрота этого расплывания характеризуется разницей групповой скорости у самых быстрых и самых медленных волн, т. е. величиной $\frac{d^2\omega}{dk^2}\Delta k$, по член, содержащий $\frac{d^2\omega}{dk^2}$, мы как раз отбросили при первом рассмотрении пакетов.

Довольно громоздкие вычисления, которые мы здесь не приводим *), показывают, что если образовать из волн де-Бройля пакет, имеющий в момент $t = 0$ форму гауссовой кривой вероятности

$$u(x, 0) = Ce^{-x^2/2b^2},$$

где u — амплитуда пакета в точке с координатой x, а величина b характеризует полуширину пакета в момент $t = 0$, то протяжение пакета удваивается через промежуток времени, выражаемый формулой

$$t = \sqrt{3}\,\frac{b^2 m}{\hbar},$$

где m — масса частицы и $\hbar$ — постоянная Планка. Для частицы с массой $m = 1$ *г*, занимающей протяжение 2 *мм* ($b = 0{,}1$ *см*), соответствующий пакет удваивается через $6 \cdot 10^{17}$ лет. Но для частицы с массой электрона ($m = 0{,}9 \cdot 10^{-27}$ *г*) при $b \sim 10^{-12}$ *см* $t \approx 1{,}6 \cdot 10^{-25}$ *сек*, т. е. пакет, соответствующий электрону, расплывался бы мгновенно, что, конечно, противоречит элементарнейшим наблюдениям.

§ 147. Статистическое истолкование волн де-Бройля

В предыдущем параграфе мы видели, что попытка рассматривать частицы как волновые пакеты потерпела неудачу: пакеты расплываются и исчезают, а «частицы» этим свойством не обладают.

Существуют, кроме того, и общие соображения, указывающие на то, что микроскопические частицы нельзя рассматривать как пакеты волн. Необходимым признаком элементарных частиц является их неделимость. Мы утверждаем, что отрицательное электричество состоит из электронов потому, что в процессе перезарядки может быть передано количество электричества, равное заряду либо одного, либо нескольких электронов, но во всяком случае целого числа и не менее одного. Точно так же анализ законов фотоэффекта приводит к выводу о существовании фотонов, так как оказывается, что монохроматический свет частоты ν переносит энергию и передает ее в процессе поглощения только целыми фотонами $h\nu$, но не долями фотона.

*) Интересующихся подобными вычислениями мы отсылаем к книге Д. И. Блохинцева, Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1963, стр. 133

Этим свойством неделимости волны не обладают. На границе двух сред с различной фазовой скоростью волна разделяется на отраженную и преломленную, при прохождении через кристалл она разбивается на ряд дифракционных пучков и т. д. Если бы мы стали рассматривать электрон как агрегат волн, то, например, при дифракции очень слабого пучка, когда электроны проходят один за другим через кристалл, каждый дифракционный пучок должен был бы нести только часть электрона, чего на самом деле нет.

Если, однако, целостность частиц при таких процессах, как отражение, преломление, дифракция, должна сохраняться, то мы можем утверждать, что при падении на поверхность раздела двух сред частица *либо* отразится, *либо* пройдет во вторую среду. Но в таком случае связь между волнами и частицами может быть истолкована только статистически, а именно, следующим образом: квадрат амплитуды волны в данном месте, измеряющий ее интенсивность, есть мера *вероятности* найти частицу в этом месте.

Для того чтобы пояснить это истолкование, рассмотрим типичный интерференционный опыт: плоская волна падает на непрозрачный экран, в котором проделаны два отверстия S_1 и S_2 (рис. 223). В таком случае на достаточно удаленном воспринимающем экране (фотопластинка, флуоресцирующий экран) возникает интерференционная картина, состоящая из последовательности светлых и темных полос. Объяснение этой картины с волновой точки зрения общеизвестно: надо представить себе, что слева на экран *I* падает плоская волна; отверстия S_1 и S_2 становятся при этом центрами двух сферических гюйгенсовых волн, распространяющихся вправо от экрана и интерферирующих между собой. В том месте экрана *II*, где разность хода этих волн равна нулю или четному числу полуволн, мы получим максимальную амплитуду и вместе с тем — максимум светлой полосы; там же, где разность хода равна нечетному числу полуволн, волны при интерференции гасят друг друга, амплитуда равна нулю, мы получаем темную полосу.

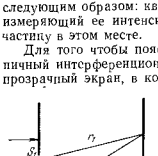


Рис. 223.

Как можно понять возникновение этих полос, рассматривая электроны как неделимые «частицы»? Представим себе, что падающий пучок электронов очень слаб. Опыт показывает, что характер интерференционной картины не зависит от интенсивности. Допустим, что фотопластинка может регистрировать попадание отдельных электронов *). В таком случае при прохождении слабого потока электронов через экран *I* на фотопластинке сначала появились бы хаотически разбросанные отдельные темные точки — следы попадания электронов. Можно было бы только заметить, что число этих пятнышек, т. е. число попаданий электронов, больше в тех местах, где должны быть максимумы интерференционной картины. При достаточно продолжительном эксперименте эти отдельные следы должны образовать интерференционные полосы. Таким образом, светлые интерференционные полосы — это места, куда электроны попадают чаще всего; темные полосы — это места, куда они вовсе не попадают **).

Если теперь применить эти соображения не к собранию большого числа электронов, но к отдельным электронам, то можно также сказать, что вероятность нахождения электрона максимальна там, где амплитуда волнового поля имеет максимальную величину и равна нулю там, где амплитуда равна нулю. Но так как амплитуда может быть и положительной, и отрицательной, а вероятность есть всегда положительное число, то необходимо характеризовать вероятность *квадратом* амплитуды.

Условившись в таком статистическом толковании волн де-Бройля, мы можем сохранить и волновые пакеты в качестве удобного метода рассуждения. Построим волновой пакет так, чтобы он занимал ту область пространства, где находится электрон в некоторый определенный момент, и предоставим пакет самому себе. Если мы теперь найдем форму пакета в какой-нибудь следующий момент времени t, то квадрат его амплитуды в том или ином месте будет пропорционален вероятности найти электрон в этом месте в момент t.

§ 148. Соотношения неопределенности

Статистическое истолкование волн де-Бройля, рассмотренное в предыдущем параграфе, позволяет связывать результаты, полученные теоретическим путем, с экспериментальными фактами. Однако оно оставляет в стороне вопрос о природе микроскопических объектов: электронов, фотонов и т. п. Основное затруднение состоит здесь в том, что для описания экспериментальных фактов нам приходится пользоваться то картиной частиц, то

*) В дальнейшем мы часто будем для определенности говорить об электронах, имея в виду любые микроскопические частицы.

**) Здесь имеется в виду позитивное изображение. На фотопластинке, само собой разумеется, места, куда попадает максимальное число электронов, выходят темными.

картиной волн. Одни и те же объекты — электроны — в опыте с камерой Вильсона оставляют резко очерченные следы, т. е. ведут себя как снаряды, движущиеся по определенным траекториям, а в опыте с прохождением через микрокристаллические листочки дают светлые и темные интерференционные кольца, т. е. ведут себя как волны, подчиняющиеся принципу суперпозиции. Поскольку, однако, свойства частиц и волн не только слишком различны, но и во многих отношениях исключают друг друга, а электроны, несомненно, имеют единую природу, приходится заключить, что электроны на самом деле не являются ни тем, ни другим, так что картины волн и частиц в в одних случаях подходят, а в других оказываются непригодными. Свойства микрочастиц настолько своеобразны, поведение их в такой степени не похоже на поведение окружающих нас в обыденной жизни макроскопических тел, что у нас нет для них подходящих образов. Однако ясно, что, поскольку мы вынуждены для описания *одних и тех же объектов* пользоваться и волновой, и корпускулярной картинами, мы уже не можем приписывать этим объектам *все* свойства частиц и *все* свойства волн. Например, наличие волновых свойств у электронов неизбежно должно внести какие-то ограничения в применимости к этим микрочастицам понятий, характеризующих частицу в классической механике.

Мы теперь и посмотрим, каковы же эти ограничения. В классической механике частицы имеют следующие основные свойства: всякая частица в любой момент времени занимает строго определенное место в пространстве (причем под «местом» разумеются координаты центра тяжести) и обладает определенным импульсом [для частиц с массой покоя, не равной нулю ($p = mv$), определенному импульсу соответствует определенная скорость v]. Возможность одновременного точного определения положения и скорости является столь характерным свойством макроскопических частиц, что в классической физике «состояние» системы частиц полностью характеризуется совокупностью всех координат и всех соответствующих им импульсов. Мы сейчас увидим, что наличие у электронов волновых свойств вносит существенное ограничение в возможность *такого* описания состояния системы микрочастиц.

Допустим, в самом деле, что нам известно положение микрочастицы на оси x с некоторой неточностью Δx, так что можно утверждать, что частица находится где-то между x_0 и $x_0 + \Delta x$. Теперь мы вспомним, что все факты атомной физики могут быть описаны также и с помощью картины волн (см. §§ 137—139). Тот факт, что положение частицы известно лишь с некоторой неточностью Δx, описывается в волновой картине, очевидно, тем, что амплитуда волновой функции отлична от

нуля лишь на протяжении отрезка, приблизительно равного Δx. Такая функция, как мы знаем, может быть построена путем суперпозиции гармонических волн, но сама она, разумеется, отнюдь не является гармонической волной. Ей поэтому нельзя приписать определенных значений ν и k: ограниченная в пространстве волновая функция представляет собой *волновой пакет*, для построения которого путем суперпозиции синусоидальных волн следует складывать волны с непрерывно меняющимися в пределах определенного интервала Δk значениями волнового вектора $\mathbf{k}$. Соотношение между протяжением пакета Δx и интервалом Δk, как мы знаем (§ 135), дается условием

$$\Delta x\, \Delta k_x \geqslant 2\pi. \tag{135.5}$$

Умножая обе части этого неравенства на постоянную Планка $\hbar$ и замечая, что согласно постулату де-Бройля $\hbar k_x = p_x$, получаем

$$\Delta x\, \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar. \tag{148.1}$$

Из этого соотношения следует, что x и p_x не могут одновременно иметь определенных значений: если значение x определенно, т. е. если $\Delta x = 0$, то $\Delta p_x \to \infty$, а значит, p_x не имеет никакого определенного значения, и наоборот. Если же x и p_x неопределенны в известных пределах Δx и Δp_x, то между этими неопределенностями имеет место соотношение (148.1), из которого следует, что чем меньше Δx, т. е. чем точнее локализовано положение частицы, тем больше Δp_x, т. е. тем больше неопределенность соответствующей составляющей импульса.

Для двух других координат получим аналогичные неравенства [см. формулы (135.6)]

$$\Delta y\, \Delta p_y \geqslant 2\pi\hbar, \tag{148.1'}$$

$$\Delta z\, \Delta p_z \geqslant 2\pi\hbar. \tag{148.1''}$$

Эти неравенства называются соотношениями неопределенности Гейзенберга. *Они представляют собой именно то ограничение применимости к микрочастицам классических понятий, о котором говорилось в начале этого параграфа.* В самом деле, для макроскопической частицы, как уже было сказано, характерна возможность точно определить в каждый момент времени положение и импульс. Соотношение (148.1) показывает, что такое описание состояния теряет смысл для частицы микроскопической. Это следует из того, что в силу соотношения (148.1) Δx и Δp_x не могут быть равны нулю *одновременно* [аналогичное имеет место для Δy и Δz и соответственно для Δp_y и Δp_z в силу соотношений (148.1′) и (148.1″)]. Из этого вытекает, что не

имеет смысла задаваться вопросом об одновременных точных значениях x и p_x, так как таких значений у микрочастицы просто не существует.

Необходимо отчетливо уяснить себе, что столь странная особенность есть неизбежное следствие того, что электроны и другие микрочастицы наряду с корпускулярными свойствами проявляют также и свойства волновые. Наличие корпускулярных свойств требует, чтобы частицу можно было локализовать в пространстве и во времени. Но даже приближенная локализация (конечное значение Δx, Δy, Δz) ведет к тому, что соответствующее волновое поле должно иметь ограниченное протяжение. А в таком случае на сцену выступает факт, имеющий место для любого волнового поля: *никаким способом нельзя построить волновое поле так, чтобы оно имело ограниченное протяжение и вместе с тем представляло собой волну с определенным значением* λ (т. е. с определенным значением k). Возможно либо одно, либо другое: либо гармоническая волна, характеризуемая определенным значением длины волны λ, но такая волна безгранична, а значит, не может быть и речи ни о какой локализации, либо ограниченное волновое поле, но тогда нет волны с определенным значением λ, а имеется волновой пакет, который разлагается в сплошной спектр, где λ непрерывно меняется в определенном интервале, тем более широком, чем уже пакет, т. е. чем точнее локализация.

§ 149. Определение места и импульса микрочастицы

В предыдущем параграфе мы вывели соотношения неопределенности, исходя из двойственной природы электрона. Обратимся теперь к рассмотрению экспериментов, с помощью которых можно определять координаты электрона и его импульс. При этом, как и в выводе предыдущего параграфа, мы естественно также будем руководствоваться твердо установленным на опыте фактом — двойственной, корпускулярно-волновой природой микрочастиц и на каждом этапе наших дальнейших рассуждений будем следить за тем, какие ограничения в применимость к микрочастицам способа описания, пригодного для макроскопических тел, вносит наличие волновых свойств у микрочастиц.

Обсуждение экспериментов, предназначенных для определения координаты и импульса микрочастицы, помимо наглядности, важно и по другой причине.

В самом деле, если бы оказалось, что теория приводит к выводу, что нельзя говорить об одновременных точных значениях координаты и импульса микрочастицы, но можно было бы указать эксперимент, — хотя бы неосуществимый вследствие *технических затруднений*, — с помощью которого обе эти величины

были бы доступны для измерения с любой степенью точности, то это бы означало, что в теории имеется внутреннее противоречие.

Рассмотрим экспериментальное устройство, позволяющее прямым путем определить положение электрона. Пусть на экран со щелью AB шириной Δx, который мы дальше будем называть «диафрагмой», слева падает электрон в направлении, перпендикулярном к плоскости диафрагмы (рис. 224). Направим ось x параллельно диафрагме, а ось y — перпендикулярно к ней. Если мы обнаружим электрон справа от диафрагмы, например, по сцинтилляции, которую он вызывает на флуоресцирующем экране CD, или по пятну на фотопластинке, то можно утверждать, что электрон прошел через щель AB. В этом случае «место электрона» *в момент прохождения через щель*, очевидно, можно определить как положение щели относительно остальных частей прибора. В самом деле, если диафрагма достаточно массивна и жестко скреплена с остальными частями прибора, то положение щели в диафрагме тем самым будет фиксировано относительно этой системы отсчета, а следовательно, положение электрона в момент прохождения через щель будет известно с неточностью Δx, равной ширине щели. Очевидно, что, сужая щель, мы можем определять таким путем положение электрона со все большей степенью точности, и нет никакого предела для этого повышения точности определения места электрона.

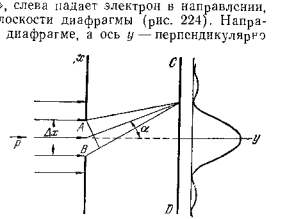


Рис. 224. Определение положения электрона при помощи экрана со щелью.

Посмотрим теперь, что можно сказать об импульсе электрона. На первый взгляд может показаться, что импульс известен нам также с полной определенностью. В самом деле, поскольку направление полета электрона *слева* от диафрагмы перпендикулярно к плоскости диафрагмы, то x-составляющая импульса *слева от экрана* равна нулю, а y-составляющая равна, например, p, т. е. импульс имеет определенное значение. Однако при прохождении через щель плоская волна де-Бройля, представляющая движение свободного электрона, испытывает дифракцию. А это означает следующее: представим себе вместо одного электрона параллельный поток их, проходящий через

диафрагму в направлении оси y. Тогда на фотопластинке мы получим дифракционную картину, состоящую из размытого главного максимума, расположенного симметрично относительно оси y, и меньших максимумов более высоких порядков по обе стороны от главного максимума (см. кривую в правой части рис. 224). Из вида дифракционной картины мы заключаем, что после прохождения через щель *большинство* электронов продолжает двигаться в первоначальном направлении, т. е. сохраняет значение $p_x = 0$. Но имеются также электроны, которые изменяют свое направление и попадают в различные точки фотопластинки с вероятностью, соответствующей ходу кривой в правой части рис. 224.

Обратим теперь внимание на следующее важное обстоятельство. Описанная выше дифракционная картина возникает тогда, когда через щель одновременно проходит большое число электронов. Можно было бы подумать, что участие большого числа электронов необходимо для дифракции, а отдельный электрон ведет себя как-нибудь иначе. Однако это не так. Из оптики уже давно известно, что характер дифракционной картины совершенно не зависит от интенсивности света. Что же касается электронов, то недавно советские физики Л. Биберман, Н. Сушкин и В. Фабрикант показали, что даже в том случае, когда отдельные электроны проходят через дифрагирующую систему поодиночке через относительно огромные промежутки времени и, следовательно, ведут себя абсолютно независимо друг от друга, — в конечном счете, при достаточной продолжительности опыта возникает дифракционная картина, в точности совпадающая с той, которую дают потоки в десятки миллионов раз более интенсивные.

В опыте Л. Бибермана, Н. Сушкина и В. Фабриканта промежуток времени между двумя последовательными прохождениями электрона через дифрагирующую систему был примерно в 30 000 раз (!) больше времени, затрачиваемого одним электроном на прохождение всего прибора. Несмотря на это, возникающая дифракционная картина ничем не отличалась от картины, получающейся с пучками, интенсивность которых в 10^7 раз больше. Это показывает, что изменение направления полета, ведущее к возникновению характерной дифракционной картины, происходит при индивидуальном прохождении электронов через дифрагирующую систему (в интересующем нас случае — через щель).

Возникает вопрос: как можно объяснить с *корпускулярной точки зрения* тот факт, что при прохождении через щель некоторые электроны меняют свое направление? Очевидно, что электрон-частица мог бы изменить свое направление только в результате взаимодействия с краями щели или со всем экраном.

Таким образом, изменение направления в корпускулярной картине есть результат того, что в момент прохождения через щель электрон приобретает добавочный импульс Δp_x в направлении оси x. Для большинства электронов, а именно тех, которые прошли через диафрагму без изменения направления и попали в место, соответствующее максимуму почернения фотопластинки, этот добавочный импульс равен нулю. Но так как почернение плавно уменьшается в обе стороны от максимума, то наряду с этим имеются и такие электроны, которые попадают в различные места фотопластинки, а следовательно, — при прохождении через щель приобретают добавочный импульс Δp_x, отличный от нуля.

Очевидно, что, подобно тому, как ширина щели Δx характеризует неточность, с какой нам будет известно положение электрона в момент прохождения через щель, величина добавочного импульса Δp_x будет характеризовать неточность, с какой нам известна x-составляющая импульса.

В самом деле, поскольку электрон имеет вероятность попасть в любую точку дифракционной картины (практически — в пределах главного максимума), Δp_x может принимать все возможные значения от нуля до некоторой предельной величины, зависящей от ширины главного максимума дифракционной картины.

Можно, однако, так видоизменить установку, чтобы с ее помощью было доступно экспериментальное определение Δp_x. Именно, импульс микрочастицы можно определить, применяя закон сохранения импульса (количества движения) к взаимодействию микрочастицы с диафрагмой, сквозь которую она проходит.

Так как при прохождении через щель частица получает добавочный импульс, параллельный диафрагме, т. е. в направлении оси x, то сама диафрагма со щелью испытывает отдачу также в направлении оси x, но в обратную сторону. Зная эту отдачу, мы бы знали и Δp_x, а поскольку y-составляющая остается без изменения, — мы точно знали бы импульс электрона в момент его прохождения через щель.

Для измерения отдачи нужно диафрагму сделать достаточно легкой и подвижной. Если диафрагма до прохождения электрона покоилась относительно остальных частей прибора, то, измеряя скорость, которую она получает при прохождении электрона, и зная ее массу, мы тем самым найдем добавочный импульс Δp_x, приобретаемый ею, а следовательно, и электроном.

Тот факт, что подобный эксперимент неосуществим по техническим причинам, например вследствие того, что нельзя осуществить столь легкий экран, чтобы он приобрел заметную скорость в результате взаимодействия с электроном, никак не

влияет на правильность заключений, выводимых на основании рассмотрения ожидаемого хода процесса. В самом деле, это рассмотрение ничем не отличается от теории эффекта Комптона, где возможность применения закона сохранения импульса к соударениям микрочастиц доказана экспериментально. Итак, установка с подвижной диафрагмой позволяет определять Δp_x, а следовательно и p, с любой желаемой степенью точности. Однако, если диафрагма будет подвижной, то она уже не сможет служить фиксированной системой отсчета для определения положения электрона в момент прохождения его через щель.

Таким образом, мы видим, что возможны два различных эксперимента. Один позволяет определить положение электрона в момент прохождения через щель. Иными словами этот эксперимент дает возможность осуществить пространственно-временную локализацию электрона. Другой эксперимент позволяет использовать законы сохранения импульса и энергии для точного определения импульса электрона, но он требует отказа от возможности пространственно-временной локализации электрона.

Вернемся к рассмотрению установки с неподвижной диафрагмой. В этом случае, как мы видим, установка позволяет измерить положение частицы с неопределенностью Δx, которая может быть сделана сколь угодно малой. Однако, поскольку при жестко закрепленной диафрагме мы лишены возможности учесть отдачу, испытываемую диафрагмой при прохождении частицы, добавочный импульс, приобретаемый частицей, остается в известных пределах Δp_x неопределенным. Докажем, что неопределенности Δx и Δp_x связаны соотношением $\Delta x \Delta p_x \geqslant 2\pi\hbar$.

Из рис. 224 видно, что

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \sin \alpha. \tag{149.1}$$

С другой стороны, если учитывать попадания электрона на фотопластинку в пределах одного только главного дифракционного максимума, то α будет углом между осью y и направлением к первому дифракционному минимуму. Положение этого минимума определяется условием, чтобы разность хода волн, дифрагированных от верхнего и нижнего краев диафрагмы, равнялась λ. Это дает (см. рис. 224)

$$\Delta x \sin \alpha = \lambda. \tag{149.2}$$

Комбинируя (149.1) и (149.2), получаем

$$\Delta x \Delta p_x = 2\pi\hbar. \tag{149.3}$$

Если учесть также побочные дифракционные максимумы, то вместо условия (149.3) будем иметь $\Delta x \Delta p_x = n2\pi\hbar$ и, следовательно, вообще

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar. \tag{149.4}$$

Это и есть соотношение неопределенности.

Для того чтобы оценить количественную сторону тех ограничений применимости к микрочастицам классических понятий, которые устанавливаются соотношениями неопределенности, полезно выразить p через скорость, $p = mv$, и найти из (149.4)

$$\Delta v \approx \frac{\hbar}{m\,\Delta x}. \tag{149.5}$$

Так как $\hbar$ — очень малая величина,

$$\hbar = 1{,}054 \cdot 10^{-27}\ \textit{эрг} \cdot \textit{сек},$$

то величина Δv главным образом зависит от соотношения между численными значениями $\hbar$ и m. Принципиально говоря, соотношения неопределенности должны иметь место для любых масс, в том числе и макроскопических, так как можно доказать, что классическая механика является предельным случаем механики квантовой. Однако из соотношения (149.5) видно, что при возрастании массы Δv стремится к нулю, поскольку разумные значения Δx для макроскопических масс во всяком случае значительно больше численного значения $\hbar$. Напротив, для микрочастиц, порядок величины массы которых близок к порядку величины $\hbar$, неопределенность Δv может приобрести большие значения в зависимости от точности определения положения, т. е. от величины Δx. Поясним это двумя примерами. Если речь идет о теле с массой m, равной 1 *г*, то очевидно, что вполне удовлетворительна точность определения положения центра тяжести, при которой Δx не будет превышать 10^{-4} *см* = = 1 *мкм*. В этом случае

$$\Delta v = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-27}}{10^{-4}} = 1{,}054 \cdot 10^{-23},$$

т. е. неопределенность скорости лежит далеко за пределами возможности измерения. Как и следовало ожидать, для макроскопических тел соотношения неопределенности практически не играют никакой роли.

Если, однако, применить то же соотношение к электрону, то результат получается иной. Масса электрона равна $9 \cdot 10^{-28}$ *г* $\approx 10^{-27}$ *г*, т. е. того же порядка величины, что и $\hbar$. В этом случае порядок величины Δv, очевидно, зависит от точности определения положения, т. е. величины Δx. Пусть, например, требуется установить принадлежность электрона определенному атому. В этом случае разумная точность определения положения должна быть, по крайней мере, $\Delta x = 10^{-9}$ *см*, так

как размеры атома — порядка 10^{-8} *см*. Соотношение (140.5) дает тогда

$$\Delta v = \frac{1{,}054 \cdot 10^{-27}}{0{,}9 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{-9}} = 1{,}17 \cdot 10^{9} \text{ см/сек}.$$

Но при энергии порядка 10 *эв* скорость электрона, выражаемая формулой (см. стр. 296) $v = 5{,}93 \cdot 10^{7}\sqrt{10}$ *см/сек* $= 1{,}87 \cdot 10^{8}$ *см/сек*. Мы видим, таким образом, что в этом случае неопределенность скорости на целый порядок величины больше самой измеряемой скорости. Это и показывает, что в атомных системах соотношения неопределенности играют решающую роль.

Тот факт, что в этом и аналогичных случаях самую существенную роль играет порядок величины Δx, позволяет разъяснить кажущееся парадоксальным поведение микрочастиц в камере Вильсона. В самом деле, здесь мы наблюдаем *при достаточно большой энергии частиц* строго прямолинейные траектории и никаких признаков неопределенности импульса, связанной с волновыми свойствами, не обнаруживается. Для объяснения следует принять во внимание, что при рассматривании фотографий этих прямолинейных траекторий в микроскоп видно, что они представляют собой гирлянду маленьких капелек тумана. Капелька представляет собой «измерительный прибор», отмечающий положение микрочастицы. Размеры капелек — порядка 10^{-4} *см*; поэтому в данном случае $\Delta x = 10^{-4}$ и Δp в случае электронов — порядка 10^{-23}. Так как, с другой стороны, прямолинейные траектории наблюдаются только при очень большой энергии микрочастиц, то Δp будет очень мало по сравнению с p и частица в указанных пределах точности будет вести себя вполне как классическая частица. Вообще, *при очень больших энергиях длина волны де-Бройля будет очень мала, и так же, как в оптике, при очень малых длинах волн вполне применимо геометрическое приближение*. В оптике при этом без большой ошибки можно рассматривать световые лучи, не учитывая явлений дифракции, а в случае микрочастиц — определенные траектории.

Упражнения 1 Энергия α-частиц, испускаемых радием, равна 4,8·10^{6} *эв*. Пользуясь соотношениями неопределенности, выяснить, при какой точности определения положения α-частицы еще можно пренебрегать неопределенностью импульса Δp по сравнению с величиной самого импульса p. Выполнить то же для электронов, обладающих энергией 10^{8} *эв*. (*Указание* При такой энергии электрон ведет себя уже как релятивистская частица, и его импульс следует вычислять по формуле $p = h/\lambda$.)

2. Частица «заперта» в области, линейные размеры которой порядка 10^{-8} *см*. Какова должна быть минимальная энергия этой частицы, необходимая для того, чтобы соотношения неопределенности были удовлетворены? Выразить эту энергию в эргах и в электрон-вольтах

3 Оценить роль соотношений неопределенности в механике молекулы водорода. Зная размеры молекулы, оценить минимальную разумную точность определения положения ее атомов и найти соответствующую неопределенность импульса.

4 Ньютонова механика становится неприменимой, когда длина волны де-Бройля порядка размеров изучаемой системы. Рассмотреть с этой точки зрения вопрос о применимости ньютоновой механики к водородному атому, предполагая, что электрон движется по круговой орбите с радиусом $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ *см* и что его момент количества движения равен $h/2\pi$ (первая боровская водородная орбита) Найти по этим данным скорость электрона и длину волны де-Бройля.

5 Выполнить аналогичное рассмотрение для атома водорода в водородной молекуле Массу водородного атома взять из таблиц. Скорость определить по следующим данным молекулу водорода считать линейным осциллятором и найти среднюю кинетическую энергию ($E = {}^1/_2kT$) атомов при тепловом равновесии при температуре 300° К Сравнить вычисленную таким путем длину волны де-Бройля с амплитудой колебаний водородного атома, полагая, что их частота равна 10^{14} *сек*$^{-1}$. Выполнить те же подсчеты для равновесия при температуре 10° К и сравнить между собой оба случая.

§ 150. Ошибочные толкования соотношений неопределенности

Соотношения неопределенности дали повод к различным неправильным толкованиям.

Нередко приходится встречать следующее толкование: «Микрочастицы — электроны, протоны, фотоны — очень малы, но они *имеют* в каждый момент времени определенные координаты и определенный импульс, т. е. представляют собою как бы сильно уменьшенные копии биллиардных шаров или дробинок, отличаясь от них лишь количественно, своими размерами. Наряду с этим существует закон природы, выражаемый соотношениями неопределенности, который запрещает нам узнавать одновременно с любой точностью их положение и импульс». Такое толкование прежде всего неприемлемо с философской точки зрения, так как оно устанавливает предел познания и потому может служить для обоснования агностицизма, т. е. одной из разновидностей идеализма. Оно, конечно, ошибочно и с физической точки зрения Чтобы в этом убедиться, рассмотрим еще один опыт.

Представим себе диафрагму с *двумя* щелями, на достаточно большом расстоянии от которой помещена фотопластинка. Если через такую диафрагму пропустить параллельный пучок электронов, то на фотопластинке должна возникнуть известная картина дифракции от двух щелей, всем своим характером, по отнюдь не просто интенсивностью, отличающаяся от картины дифракции от одной щели. Закроем одну из щелей; мы получим на фотопластинке изображение открытой щели, тождественное с самой щелью (или, если щель достаточна узка, — картину дифракции от одной щели) Закроем ту щель, которая ранее была открыта, и откроем вторую мы снова получим

изображение открытой щели. Откроем обе щели — возникающая при этом картина отнюдь не будет соответствовать сложению обеих картин, получающихся при одной открытой щели, но будет состоять из светлых и темных полос, положение которых определяется *обеими щелями*. На рис. 225 приведены две фотографии В. К. Аркадьева, иллюстрирующие сказанное. Фотографии получены со светом, но с электронами картина должна быть совершенно аналогичной.

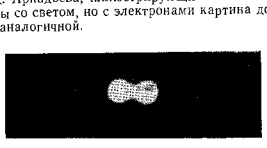


Рис. 225. Верхняя фотография снята при прохождении света сначала через одну, а затем через другую щель; нижняя фотография получена при одновременном прохождении света через обе щели.

Совершенно очевидно, что этот опыт никак не может быть согласован с представлением об электроне как о частице, двигающейся по определенной траектории, т. е. обладающей в каждый момент времени определенными, хотя бы и неизвестными, координатами и импульсом. Подобная частица, наглядным образом которой может служить дробинка, доведенная до крайних пределов малости, обязательно должна пройти через *одну* определенную щель; присутствие или отсутствие второй щели не может оказать никакого влияния на ее траекторию. Между тем электроны и другие микрочастицы ведут себя *существенно различным образом* в том и другом случаях, т. е. при открытой и закрытой второй щели. Описанный опыт показывает, что электроны и другие микрочастицы ни в коем случае нельзя рассматривать просто как микродробинки. Представление об очень маленькой частице, движущейся по определенной траектории и обладающей в каждой точке этой траектории определенной скоростью, пока над ней не произведено измерения, — такое представление отнюдь не может служить картиной движения электрона. Понятие траектории теряет смысл для электрона, *совершенно так же, как в волновой оптике теряет смысл понятие светового луча.*

Упомянутый на стр. 472 опыт Бибермана, Сушкина и Фабриканта является новым и еще более ярким доказательством того, что электроны никоим образом нельзя рассматривать как собрание «классических» частиц, т. е. частиц-шариков. В самом деле, в этом опыте дифрагирующей системой служил кристалл окиси магния. Электроны, пролетая через такой кристаллик поодиночке через относительно очень большие промежутки времени, в результате дифракции летят затем в определенных направлениях к дифракционным максимумам. Электрон-микродробинка взаимодействовал бы с одним или, во всяком случае, с очень небольшим числом атомов кристаллической решетки; между тем характер дифракционной картины, распределение ее максимумов и минимумов, определяется *всей решеткой в целом*, т. е. огромным числом атомов, расположенных в тысячах слоев. Заметим, кстати, что аналогичные дифракционные опыты осуществляются также и с нейтронами, не имеющими электрического заряда и взаимодействующими с атомами решетки через посредство ядерных сил, чрезвычайно быстро убывающих с расстоянием, ввиду чего возможность интерпретации дифракционной картины как результата взаимодействия нейтронов с отдельными атомами решетки абсолютно исключена.

Поэтому смысл соотношений неопределенности не в том, что они «запрещают» нам узнать какие-либо реально существующие свойства микрочастиц, т. е. не в том, что они в какой-либо мере ограничивают познание, а в том, что они ограничивают применимость к микрочастицам понятий классической механики, которая является по существу *корпускулярной* механикой. В классической механике, как уже подчеркивалось, одновременное задание всех координат q_i системы макроскопических частиц в всех соответствующих им импульсов p_i является необходимым для полного описания состояния системы. Для микрочастицы такое описание, как мы уже видели, неосуществимо. Из предыдущего, однако, ясно, что вопрос об *одновременных* значениях координат и импульсов электрона вообще лишен физического смысла, так как электрон *по самой своей природе* есть объект, которому *не свойственна* подобная характеристика.

Если тем не менее мы стремимся описывать поведение электрона в терминах классической механики, т. е. указывая одновременно его положение и импульс, то для этого имеется определенная причина. В самом деле, схема всякого эксперимента, производимого в атомной физике, такова, что мы при помощи какой-либо экспериментальной установки хотим получить ответ на вопрос, относящийся к протеканию того или иного объективного процесса, происходящего в пространстве и во времени.

Этот вопрос мы ставим, пользуясь в конечном счете приборами, представляющими собой макроскопические тела. Поведение этих приборов, например, поворот стрелки гальванометра или движение пера самописца, подчиняется классической механике; сама установка, геометрическое расположение ее частей — щелей, конденсаторов, магнитных полей и т. п. — представляет собой некую пространственно-временную систему отсчета. Само собой разумеется, что и поведение исследуемых микрочастиц нам необходимо описывать в той же пространственно-временной системе отсчета, пользуясь теми же понятиями классической механики, с помощью которых мы описываем нашу макроскопическую установку. Мы, например, измеряем смещение светлого пятна, образованного налетающими электронами на экране катодного осциллографа, или интересуемся отклонением электрона в данном месте установки и т. п. Поскольку мы при этом применяем к электрону или к другой микрочастице несвойственное этим объектам классическое описание, мы естественно должны указать *границу применимости* этого классического описания, так как микрочастицы подчиняются законам, отличным от законов классической механики, и последние применимы к ним лишь приближенно. Соотношения неопределенности как раз и указывают эту границу.

При рассмотрении эксперимента по определению координаты и импульса микрочастицы в § 149 мы видели, что при попытке одновременного определения обеих этих величин возникает затруднение: чем лучше удовлетворяет своему назначению установка для определения положения частицы, тем менее пригодной оказывается она для определения импульса. Причина этого состоит в том, что для определения положения должна служить жестко фиксированная в пространстве система отсчета. Но именно поэтому мы лишаемся возможности определить составляющую импульса, так как направленный в противоположную сторону импульс отдачи уходит в массивную общую подставку, неподвижность которой как раз и гарантирует возможность определения места. Наоборот, применение закона сохранения импульса к легко подвижной диафрагме лишает нас возможности использовать эту диафрагму для определения места частицы. Такая ситуация не является присущей именно той установке, которая рассмотрена в § 149. Анализ разнообразных устройств, которые можно было бы использовать для определения места и импульса микрочастицы, выполненный Н. Бором *), показал, что эта ситуация является общей. Она возникает потому, что, вследствие конечной величины (неравенство нулю) кванта действия h, взаимодействием между измеряемым объектом и измерительным прибором нельзя пренебрегать, когда речь идет об измерениях, выполняемых над микрочастицей. Количественное выражение этот факт находит в соотношениях неопределенности, как это и было показано в § 149.

*) Наиболее полно этот анализ проведен в статье Н. Бора «Дискуссии с Эйнштейном о проблемах теории познания в атомной физике» Русский перевод напечатан в журнале «Успехи физических наук», т 66, вып 4, стр 571, 1958 Эта статья вошла также в книгу Н. Бора «Атомная физика и человеческое познание», ИЛ, 1961.

Бор, однако, утверждает, что это обстоятельство имеет глубокий смысл и при том не только физический, но и философский. Именно, по Бору нет противоречия между волновыми и корпускулярными свойствами материи потому, что установки, предназначенные для обнаружения волновых свойств, только эти свойства и обнаруживают, тогда как другие установки обнаруживают только корпускулярные свойства. Таким образом, по Бору, волновые и корпускулярные свойства являются не взаимоисключающими, но дополнительными: мы не можем по указанным выше причинам в одном опыте выявить все свойства микрочастиц, но мы должны воспользоваться различными установками, каждая из которых позволяет описать одну сторону свойства микрочастиц и только сочетание этих установок, дополняя друг друга, на самом деле исчерпывает все, что мы можем узнать о предмете.

Это представление в начале породило множество недоразумений и неправильных как с физической, так и философской точек зрения формулировок. Причиной этих недоразумений отчасти является недостаточно отчетливая терминология, примененная Н. Бором в его первых статьях. Впоследствии Бор уточнил свои формулировки и улучшил терминологию, благодаря чему выявилось материалистическое содержание его позиций. Это уточнение ясно из приводимых ниже цитат из одной более новой работы Бора. Указав на то, что соотношения неопределенности Гейзенберга «...устанавливают связь между допусками в значениях кинематических и динамических переменных, фиксирующих состояние физической системы», Бор продолжает: «По самому характеру формального аппарата квантовой механики такие соотношения не могут быть, однако, использованы, как «модельные» свойства объектов, т. е. свойства, опирающиеся на классические наглядные представления».

И далее: «В связи с этим иногда говорят: «Наблюдение нарушает ход явления» или «Физические свойства атомных объектов создаются их измерением». Однако такие высказывания способны лишь внести путаницу, так как слова «явление» и «наблюдение», равно как и слова «свойства» и «измерение» употребляются здесь в смысле, несовместном с обычным языком и с практическим их определением ...Чрезвычайно характерную черту атомной физики представляет новое соотношение между

явлениями, наблюдаемыми при разных экспериментальных условиях, для описания которых приходится применять разные элементарные понятия. В самом деле, какими бы противоречивыми ни казались, при попытке изобразить ход атомных процессов в классическом духе, получаемые при таких условиях опытные данные, их надо рассматривать как дополнительные, в том смысле, что они представляют одинаково существенные сведения об атомных системах и, взятые вместе, исчерпывают эти сведения. *Понятие дополнительности ни в коем случае не предполагает отказа от нашего положения независимых наблюдателей природы...»* *) (курсив мой. — *Э. Ш.*).

§ 151. Соотношения неопределенности и принцип причинности

В 1927 г. Гейзенберг в той самой работе, в которой им были сформулированы соотношения неопределенности, в качестве общего вывода из этих соотношений утверждал, что «квантовая механика определенно установила несостоятельность закона причинности». Основания для такого утверждения состояли в следующем. Принцип причинности требует, чтобы на основании точного знания состояния системы для какого-нибудь определенного момента можно было точно предсказать ее состояние для любого будущего момента. Классическая механика Ньютона в полной мере удовлетворяет этому требованию, что особенно ярко показывает пример астрономии. Как известно, астрономия (небесная механика) позволяет предвычислять движения небесных тел — их траектории и скорости — для любого будущего момента времени с той степенью точности, какую допускает математическое решение задачи, и благодаря этому позволяет точно предсказывать астрономические явления (например, солнечные или лунные затмения) на сколько угодно времени вперед. Эта возможность имеет отчетливое выражение в самой математической форме основных уравнений классической механики. Эти уравнения в наиболее удобном для обсуждения принципиальных вопросов виде гамильтоновых канонических уравнений (§ 58) таковы:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, f. \qquad (151.1)$$

В простейшем случае одной материальной точки, движущейся в определенном силовом поле, $k = 1, 2, 3$, т. е. имеется всего шесть дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени. Решение этих уравнений дает возможность выразить все координаты q_k и все импульсы p_k в функции времени и шести произвольных постоянных

$$q_k = f_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6), \quad p_k = \varphi_k(t, C_1, C_2, \ldots, C_6). \qquad (151.2)$$

Если определить все координаты q_k^0 и импульсы p_k^0 для некоторого начального момента времени $t = 0$, выполнив для этого, разумеется, соответствующие измерения, то, подставляя эти известные величины q_k^0 и p_k^0 в уравнения (151.2), можно вычислить из них (при $t = 0$) все шесть произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_6$. После этого формулы (151.2) позволят предсказывать q_k и p_k для любого момента t. Тем самым оказывается, что из начального состояния (при $t = 0$), *определяемого совокупностью всех координат и всех импульсов*, можно предсказать состояние для любого будущего момента, в полном соответствии с законом причинности.

Соотношения неопределенности утверждают, однако, что одновременные значения координат и импульсов могут быть измерены лишь с неизбежными неточностями Δq_k и Δp_k, удовлетворяющими соотношениям $\Delta q_k \Delta p_k \approx \hbar$. Из этого Гейзенберг сделал вывод, что начальное состояние не может быть определено точно, а потому не может быть точно предсказано и будущее состояние — в противоречии с законом причинности. Это заключение, однако, ошибочно. Несомненно, конечно, что одновременные значения координат и импульсов микрочастицы могут быть определены лишь с неточностями, требуемыми соотношениями неопределенности. Однако самое понятие «состояние системы» в квантовой механике, очевидно, должно быть формулировано иначе, нежели в механике классической, а именно, для полного определения состояния требуется *иная совокупность параметров*. Между тем *количественная* формулировка закона причинности возможна лишь в том случае, когда указаны те переменные, которые определяют состояние.

Поясним это примером. Основные уравнения электромагнитного поля — уравнения Максвелла — представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени для напряженностей поля $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$, плотности зарядов ρ и плотности токов j, рассматриваемых как функция координат и времени. Поэтому задание $\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$, ρ и j для определенного момента времени позволяет предсказать их значения для любого (будущего или прошедшего) момента. Таким образом, принцип причинности для электромагнитного поля может быть количественно сформулирован только в том случае, если «состояние» поля определяется правильным выбором параметров ($\mathscr{E}$, $\mathscr{H}$, ρ, j).

*) Избранные научные труды, т. II, «Наука», 1971, стр. 486—488.

Из этого примера мы ясно видим, что для формулировки принципа причинности в той или иной области физических явлений необходимо отчетливое определение понятия «состояние системы» и явное указание тех параметров, от которых это состояние зависит.

Вернемся теперь к микроскопическим «частицам» и к квантовой механике. В следующих главах этой книги мы увидим, что состояние микрочастицы определяется некоторой функцией ψ, так называемой волновой функцией или просто ψ-функцией (простейшим примером ее может служить формула плоской волны де-Бройля в комплексном виде), которая является функцией *одних только координат и времени* или *одних только импульсов и времени*. Мы увидим также, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (общее уравнение Шредингера, см. § 152) первого порядка относительно времени.

Из этого следует, что задание ψ-функции для момента $t = 0$ предопределяет ее значения для любого будущего момента времени.

Таким образом, состояние системы микрочастиц, определенное в соответствии с требованиями *квантовой*, а не классической механики, однозначно вытекает из предшествующего состояния, *как того требует закон причинности*.

Нет ничего удивительного или парадоксального в том, что когда мы хотим описать состояние микрочастиц в *несвойственных им понятиях классической механики*, мы не можем сделать это точно и пользуемся статистическим описанием. Но из этого ни в коем случае нельзя делать вывод о несостоятельности закона причинности в микромире. Это показывает только, что к микрочастицам неприменима количественная формулировка принципа причинности, пригодная для системы малых твердых телец, и что описание состояния микрочастицы с помощью задания одновременных значений всех координат и всех импульсов *не соответствует природе микрочастицы*.

Между тем утверждение о том, что квантовая механика якобы «опровергла» закон причинности, послужило поводом для ряда идеалистических извращений, вплоть до обоснования фидеизма.

Так, например, А. Эддингтон в своей книге «Природа физического мира» утверждал даже, что «...доводы современной науки дают, быть может, возможность сделать заключение, что религия стала приемлемой для здравого научного ума, начиная с 1927 года».

Все подобные утверждения, разумеется, не имеют никакой почвы ни в соотношениях неопределенности, ни в квантовой механике.

В последних трех параграфах мы рассмотрели подробно соотношения неопределенности и вытекающие из них следствия. Мы видели, что эти соотношения вовсе не ставят какого-либо предела познанию, но являются лишь выражением неприменимости представлений классической механики к движению микроскопических частиц. Точнее говоря, эти соотношения дают количественную меру того, до каких пределов еще можно описывать состояние микрообъектов одновременным заданием координат и импульсов, подобно тому как это делается в классической механике для макроскопических тел: если, как это мы видели на примерах, рассмотренных на стр. 476, при разумной для данного случая неточности определения координаты Δq соотношения неопределенности $\Delta q \Delta p \sim \hbar$ дают для Δp пренебрежимо малую величину, то объект ведет себя вполне «классически», т. е. можно говорить о его траектории и его скорости в каждой точке траектории. В противном случае образ «классической частицы» оказывается непригодным и понятие траектории теряет смысл, *так же как в области применимости волновой оптики теряет смысл понятие светового луча*. Из этого следует, что источником соотношений неопределенности являются своеобразные физические свойства электронов и других микрочастиц, по отнюдь не свойства познающего субъекта.

Ограничение применимости классических представлений в области явлений атомного мира ни в коем случае не означает ограничения нашей способности познания, но означает лишь ограничение *механистической* картины мира. Эта картина оказалась несостоятельной уже в теории электромагнитного поля, механическую модель которого построить не удалось, несмотря на многочисленные попытки. Дальнейшее развитие физики, принесшее столь значительные успехи в познании внешнего мира, в частности развитие атомной физики, каждый раз с полной отчетливостью показывало всю ограниченность механистического мировоззрения. Но Ленин разъяснил в «Материализме и эмпириокритицизме», что «Признание каких-либо неизменных элементов, «неизменной сущности вещей» и т. п., не есть материализм, а есть *метафизический*, т. е. антидиалектический материализм» *).

С другой стороны, мы видели также, что соотношения неопределенности, основанные на объективных свойствах реально существующих микрочастиц, были использованы идеалистическими физическими школами для обоснования якобы «крушения материализма», «отмены» закона причинности и т. д. вплоть до «научного» обоснования религии (Эддингтон, А. Комптон). Это различие в материалистической и идеалистической интер-

*) В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 18, стр. 275.

претации одних и тех же фактов или явлений, как всегда с предельной ясностью охарактеризовано В. И. Лениным в следующих замечательных словах: «Действительно важный теоретико-познавательный вопрос, разделяющий философские направления, состоит не в том, какой степени точности достигли наши описания причинных связей и могут ли эти описания быть выражены в точной математической формуле, — *а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы, или свойства нашего ума, присущая ему способность познавать известные априорные истины и т. п.* *) (курсив мой. — *Э. Ш.*).

*) В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 18, стр. 164.

ГЛАВА XI

УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

§ 152. Уравнение Шрёдингера и физический смысл его решений

Одна из наиболее замечательных особенностей механики микроскопических частиц состоит в существовании дискретных уровней энергии. Необходимость постулирования такой дискретности выяснилась уже на первых этапах развития квантовой физики (см. гл. VI). Однако в рамках классической физики допущение дискретности атомных состояний было совершенно чуждым положением, шедшим вразрез со всей системой классической физики. В настоящей главе мы увидим, что в квантовой механике дискретность энергии не только не противоречит основам этой механики, но и вытекает из ее уравнений столь же естественным образом, как, например, существование гармонических обертонов струны вытекает из уравнений классической механики. В историческом развитии квантовой механики этот результат был получен одним из первых, и он казался в то время наиболее замечательным. Очень скоро, однако, выяснилось, что из основного уравнения квантовой механики и из толкования смысла его решений вытекают и другие следствия, не менее своеобразные, нежели квантование. Эти следствия дали возможность объяснить новый обширный круг явлений и обеспечили плодотворность развития квантовой механики. Наконец, в качестве завершения этого этапа оказалось возможным построить логически стройную, хотя и совершенно своеобразную систему квантовой механики.

Имея в виду подготовить читателя к усвоению этой системы, мы пойдем в нашем изложении путем, близким к историческому, и в настоящей главе ограничимся установлением основного уравнения квантовой механики и на примерах задач, особенно простых в математическом отношении, покажем некоторые применения этого уравнения. С самой системой квантовой механики мы познакомимся во втором томе этой книги.

До сих пор (гл. X) мы рассматривали движение только свободных микроскопических частиц и убедились в том, что это движение описывается плоскими волнами де Бройля. Нам необходимо теперь получить возможность исследовать движение частиц в различных силовых полях. С этой целью мы найдем

сначала дифференциальное уравнение, которому подчиняются волны де-Бройля, а затем обобщим это уравнение на случай движения в силовых полях. Таким путем мы получим основное уравнение квантовой механики — уравнение Шрёдингера.

Для получения искомого уравнения мы поступим следующим образом. В § 133 было указано, что волновое уравнение для электромагнитных волн (соответствующее фотонам) непосредственно вытекает из основных уравнений электромагнитного поля (уравнений Максвелла). Написав это волновое уравнение и подставив в него решение в виде плоских волн, мы получили соотношение между частотой и составляющими волнового вектора (закон дисперсии), характерное для природы электромагнитных волн:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \tag{133.3}$$

Здесь мы пойдем обратным путем; пользуясь законом дисперсии волн де-Бройля, найдем соответствующее ему дифференциальное уравнение. В § 141 мы установили закон дисперсии волн де-Бройля:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \tag{141.6}$$

где $\omega_0 = mc^2/\hbar$. Этот закон получен из релятивистского соотношения между импульсом и энергией

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2).$$

Однако интересующее нас уравнение Шрёдингера не удовлетворяет требованиям теории относительности — оно является уравнением нерелятивистским. Его мы получим из соотношения между импульсом и энергией ньютоновой механики. Это соотношение, как мы знаем, таково (см. § 58):

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \tag{152.1}$$

Воспользуемся теперь квантовыми соотношениями для энергии и составляющих импульса

$$E = \hbar\omega, \quad p_x = \hbar k_x, \quad p_y = \hbar k_y, \quad p_z = \hbar k_z.$$

Подставляя эти выражения в (152.1), найдем после сокращения на $\hbar$:

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2). \tag{152.2}$$

Это и есть искомый закон дисперсии волн де-Бройля в нерелятивистском приближении.

Чтобы получить уравнение Шрёдингера, возьмем формулу плоской волны де-Бройля

$$\psi = Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} = Ae^{i(xk_x+yk_y+zk_z-\omega t)}$$

и продифференцируем ее один раз по времени и дважды по всем координатам. Получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\omega\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -k_y^2\psi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k_z^2\psi.$$

Найдя отсюда ω, k_x, k_y, k_z и подставив в закон дисперсии (152.2), сразу получим

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\omega}{dt} = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),$$

так что

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi. \tag{152.3}$$

В этой главе нас будут интересовать только решения (152.3), соответствующие стоячим монохроматическим волнам. Для таких волн решение может быть представлено в виде произведения двух функций, из которых одна есть функция только координат, а другая — только времени, причем зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t} = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, так что

$$\psi(x, y, z, t) = \psi^0(x, y, z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}. \tag{152.4}$$

Заметим прежде всего, что для таких решений левая часть (152.3) дает

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi. \tag{152.5}$$

Подставляя решение (152.4) в (152.3) и имея в виду (152.5), находим после сокращения на временной множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ и перестановки членов

$$\Delta\psi^0 + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi^0 = 0. \tag{152.6}$$

Уравнение (152.3) и является искомым волновым уравнением для свободной частицы; часть его решения, зависящая только от координат, подчиняется уравнению (152.6). В дальнейшем мы будем писать удовлетворяющую (152.6) функцию без значка ^{0},

помня, что в настоящей главе речь идет о «монохроматических» решениях уравнения (152.3), для получения которых достаточно приписать к ψ^0 множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$.

Уравнение (152.6) мы получили для случая свободной микроскопической частицы. Посмотрим, как его можно разумно обобщить на случай частицы, движущейся в силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией U. Полная энергия частицы в таком поле равна сумме $T + U = E$. В случае же свободной частицы полная энергия совпадает с кинетической ($U = 0$), т. е. $E = T$. Для обобщения, которое нас интересует, следует решить вопрос, — как понимать при переходе к случаю движения в поле энергию E, входящую в уравнение (152.6),— как полную или как кинетическую? Ясно, что если бы мы стали рассматривать энергию E как полную, то в обобщенном уравнении не было бы члена, описывающего то или иное поле. Если же, наоборот, мы под E в случае *свободной частицы* будем разуметь только кинетическую энергию, то для случая движения в поле с потенциальной энергией U мы должны будем подставить вместо E в (152.6) кинетическую энергию $T = E - U$, и уравнение (152 6) примет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \tag{152.7}$$

Это и есть основное уравнение квантовой механики — уравнение Шрёдингера для частицы в потенциальном поле.

Само собой разумеется, что на приведенные соображения следует смотреть только как на соображения, поясняющие установление уравнения Шрёдингера, а не как на вывод его. Как и все основные уравнения физики (например, ньютоновы уравнения механики или уравнения Максвелла для электромагнитного поля), уравнение Шрёдингера не имеет строгого вывода. Оно не выводится, но устанавливается, и правильность его подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов.

Уравнению (152.7) соответствует более общее уравнение для функции ψ, зависящей не только от координат, но и от времени. В случае консервативного поля, когда потенциальная функция U не зависит явно от времени, можно всегда предположить, что зависимость ψ от времени выражается «монохроматическим» множителем $e^{-i\omega t} = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Принимая во внимание, что в этом случае имеет место соотношение (152.5) и переписав уравнение (152.7) в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = E\psi,$$

где

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \tag{152.8}$$

найдем

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{152.9}$$

Это есть общее уравнение Шрёдингера, содержащее время.

В заключение еще одно замечание. При получении уравнения Шрёдингера для свободной частицы мы бы могли воспользоваться вместо волновой функции свободной частицы, написанной в виде

$$\psi = Ae^{i(kr - \omega t)},$$

комплексно сопряженной функцией

$$\psi^* = A^* e^{-i(kr - \omega t)}. \tag{152.10}$$

В этом последнем случае, как легко видеть,

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = i\omega\psi^*, \ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi^* \text{ и т. д.}$$

Вместо уравнения (152.3) мы бы получили тогда

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^* \tag{152.11}$$

и соответственно изменилось бы уравнение (152.9). Однако сейчас мы увидим, что физический смысл имеет не сама функция ψ, но квадрат ее модуля, т. е. $\psi\psi^*$. Ввиду этого совершенно безразлично, в какой из двух возможных форм писать уравнение Шрёдингера.

Рассмотрим теперь физический смысл решений уравнения Шрёдингера. Напишем волновое уравнение классической физики, с которым мы встретились в § 133:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \tag{133.4}$$

и сравним его с уравнением Шрёдингера, содержащим время

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi. \tag{152.9}$$

Классическое волновое уравнение, как известно, имеет действительные решения вида $a\cos[(kr - \omega t) + \delta]$. Однако непосредственной проверкой легко убедиться в том, что уравнение Шрёдингера этими действительными решениями не удовлетворяется, но удовлетворяется только комплексными решениями, например, при $U = 0$

$$\psi = Ae^{i(kr - \omega t)}.$$

Эта особенность уравнения Шрёдингера обусловлена тем, что (в отличие от классического волнового уравнения) оно содержит *первую* производную по времени и вторые — по координатам. Мы показали, что это получилось потому, что мы искали волновое уравнение, которое соответствовало бы закону дисперсии волн де-Бройля (в ньютоновом приближении)

$$\omega = \frac{\hbar}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), \tag{152.2}$$

содержащему первую степень ω и вторые степени составляющих волнового вектора.

Этот факт весьма существен для понимания смысла уравнения Шрёдингера. Он показывает, что, хотя уравнение Шрёдингера в некоторых случаях удовлетворяется периодическими решениями, никаких реальных волн, распространяющихся в физической среде, оно не описывает. Если, несмотря на это, иногда говорят о «волнах» материи стоячих и бегущих, об узлах и пучностях и т. д., то это делается исключительно для наглядности. Согласно принятой в настоящее время статистической интерпретации смысл решений уравнения Шрёдингера совсем иной.

В самом деле, в предыдущей главе мы видели, что поведение свободного электрона описывается плоской волной де-Бройля, но физический смысл имеет только *квадрат амплитуды* этой волны, очевидно, равный квадрату модуля комплексной ψ-функции, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера (152.9) при $U = 0$. Действительно, при

$$\psi = Ae^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} \equiv ae^{i\delta} \cdot e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$
$$\psi^* = A^* e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)} \equiv ae^{-i\delta} \cdot e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

имеем

$$a^2 = |A|^2 = \psi^*\psi.$$

Этот квадрат амплитуды мы истолковали статистически: $a^2 d\tau = \psi^*\psi\, d\tau$, согласно § 147, есть вероятность нахождения частицы в объеме $d\tau = dx\,dy\,dz$, т. е. в области с координатами между x и $x + dx$, y и $y + dy$, z и $z + dz$. Это статистическое истолкование сохраняется и для решений уравнения (152.9) в общем случае: квадрат модуля комплексной функции ψ, удовлетворяющей этому уравнению, толкуется как плотность вероятности найти частицу в объеме $d\tau$ около точки с координатами x, y, z. Сама же вероятность пропорциональна $\psi\psi^* d\tau$.

Функция ψ по своему смыслу должна удовлетворять некоторым естественным условиям. Прежде всего она должна быть всюду непрерывной и однозначной. Далее, поскольку мы истолковываем $\psi\psi^* d\tau$ как вероятность, появляется необходимость нормировать эту функцию ψ таким образом, чтобы вероятность достоверного события равнялась 1. Так как декартовы координаты меняются от $-\infty$ до $+\infty$, то достоверное событие состоит в том, что частица находится *где-нибудь* в пространстве. Условие нормирования поэтому будет таково:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*\psi\, d\tau = 1. \tag{152.12}$$

В учебниках анализа доказывается *), что несобственный интеграл с бесконечными пределами существует в том случае, если функция достаточно быстро убывает при удалении от начала координат, а именно, функция с интегрируемым квадратом должна убывать по крайней мере как $1/r^p$, где $p > 1$. Мы увидим в настоящей и в следующих главах, что перечисленные естественные условия имеют в квантовой механике огромное значение. Свойства решений уравнения Шрёдингера таковы, что решения удовлетворяют этим требованиям только при очень определенных условиях, например при определенных дискретных значениях энергии, входящей в качестве параметра в уравнение. В этом, как будет показано на конкретных примерах, лежит ключ к объяснению дискретности механических величин в квантовой механике.

§ 153. Отражение и прохождение через потенциальный барьер

В главе X мы рассматривали движение частицы в пространстве, свободном от поля. В качестве первого примера применения уравнения Шрёдингера рассмотрим поведение частицы на границе двух областей *I* и *II*, в каждой из которых потенциальная энергия частицы постоянна, но эти потенциальные энергии различаются на конечную величину. Схематизируя реально встречающиеся условия, мы предположим, что на границе областей *I* и *II* потенциальная энергия изменяется скачком, как это показано на рис. 226—227.

Выберем систему координат так, чтобы ось x была параллельна направлению движения частицы. Тогда ψ будет функцией только x. Оператор Лапласа Δ сведется при этом к полной второй производной $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ и уравнение Шрёдингера примет более простой вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

При этом потенциальная энергия задается условиями:

(*I*) при $x \leqslant 0$ $U = 0$,

(*II*) при $x \geqslant 0$ $U = U_0 = \text{const}$.

*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, стр. 260, «Наука», 1967.

Для решения задачи, вообще говоря, следует подставить в уравнение Шрёдингера выражение U в функции координат и выполнить интегрирование. Но так как при заданных условиях U не может быть выражено в виде аналитической функции x, то мы поступим следующим образом. Напишем уравнение Шрёдингера отдельно для области I и для области II и найдем решения в обоих случаях, т. е. функции ψ_1 и ψ_2. Так как функция ψ должна быть непрерывна во всем пространстве, то мы потребуем, чтобы на границе областей, где происходит скачок потенциала, функции ψ_1 и ψ_2 были друг другу равны. Как будет показано далее, на границе обеих областей должна быть непрерывна не только сама функция ψ, но и ее первая производная. Оба условия непрерывности — непрерывности функции и ее первой производной — дадут нам возможность довести решение задачи до конца.

Итак, напишем уравнение Шрёдингера:

для области I

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi_1=0, \tag{153.1}$$

для области II

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U_0)\psi_2=0. \tag{153.2}$$

Введем обозначения

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{mv_1}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda_1}, \tag{153.3}$$

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}=\frac{mv_2}{\hbar}=\frac{2\pi}{\lambda_2}, \tag{153.4}$$

где λ_1 и λ_2 — соответственно длины волн де-Бройля в области I и в области II. Уравнения (153.1) и (153.2) теперь перепишутся в виде

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+k_1^2\psi_1=0, \tag{153.1'}$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+k_2^2\psi_2=0. \tag{153.2'}$$

Это — обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Частные решения их имеют вид $e^{\pm ik_1x}$ и $e^{\pm ik_2x}$.

Очевидно, что эти частные решения представляют собою плоские волны де-Бройля в области I и в области II. В самом деле, возьмем какое-нибудь из них, например e^{ik_1x}, и присоединим к нему «монохроматический» временной множитель $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}=e^{-i\omega t}$; мы получим

$$e^{ik_1x}e^{-i\omega t}=e^{i(xk_1-\omega t)}.$$

Но это и есть формула плоской волны, распространяющейся в области I в направлении положительной оси x.

Общие решения уравнений (153.1′) и (153.2′) таковы:

$$\psi_1=a_1e^{ik_1x}+b_1e^{-ik_1x}, \tag{153.5}$$

$$\psi_2=a_2e^{ik_2x}+b_2e^{-ik_2x}. \tag{153.6}$$

Рассмотрим теперь условия перехода частицы из области I в область II в двух случаях: а) когда полная энергия частицы E больше ее потенциальной энергии U в области II (рис. 226) и б) когда $E<U$ (рис 227)

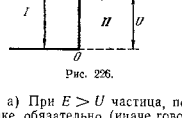


Рис. 226.

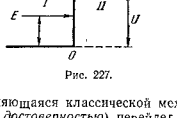


Рис. 227.

а) При $E>U$ частица, подчиняющаяся классической механике, обязательно (иначе говоря, с *достоверностью*) перейдет из области I в область II. В самом деле, положим, что эта частица несет электрический заряд и движется в области I слева направо. На границе I и II она попадает в поле задерживающего потенциала U, но так как ее полная энергия E больше U, то частица преодолевает это задерживающее поле и продолжает свое движение в области II с уменьшенной энергией $E-U$.

Мы сейчас увидим, что частица, подчиняющаяся уравнению Шрёдингера, например электрон, должна вести себя совершенно иначе. Это вытекает уже из следующих качественных соображений. Движение электрона представляется плоской волной де-Бройля. На границе двух областей, где происходит внезапное изменение потенциала, эта волна должна вести себя так, как ведет себя световая волна на границе двух областей с различным показателем преломления (см. § 143). Это значит, что на границе областей I и II волна де-Бройля частью отражается, а частью проходит в область II. Мы можем также сказать, что, переходя из одной области в другую, электрон имеет определенную вероятность отразиться и определенную вероятность пройти дальше в область II.

Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти эти вероятности. Для этого мы прежде всего заметим, что частное решение e^{ik_1x} соответствует волне, идущей в направлении положительной оси x (слева направо), т. е. падающей волне, а частное решение e^{-ik_1x} соответствует отраженной волне. То же самое

справедливо для частных решений $e^{\pm ik_1x}$. Принимая во внимание, что в области I распространяются как падающая, так и отраженная волны, мы видим, что для этой области имеет смысл общее решение (153.5), состоящее из двух членов:

$$\psi_1 = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \tag{153.5}$$

причем a_1^2 есть интенсивность падающей волны, а b_1^2 — интенсивность волны отраженной. В области же II распространяется только проходящая волна. Поэтому в (153.6) следует положить $b_2 = 0$ и тогда

$$\psi_2 = a_2 e^{ik_2x}. \tag{153.6'}$$

Положим теперь, что амплитуда падающей волны a_1 равна 1, и вычислим остальные две амплитуды b_1 и a_2. Для этого нам придется воспользоваться «граничными условиями», состоящими в том, что на границе областей не только сама функция ψ, но и ее первая производная — непрерывны. Непрерывность первой производной вытекает из следующих соображений. Представим себе, что вертикальная ступень слева на рис. 228 заменена наклонной (пунктир на рис. 228); пусть ширина переходной области равна $2l$ и потенциал в этой области непрерывно меняется от 0 до U. Приняв во внимание обозначение (153.3) и (153.4), перепишем оба уравнения (153.1′) и (153.2′) в виде

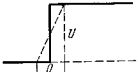


Рис. 228.

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k'^2\psi. \tag{153.7}$$

При этом коэффициент k' в области от $-l$ до $+l$ непрерывно меняется от $k' = k_1$ до $k' = k_2$. Для этой области мы имеем, с одной стороны,

$$\int_{-l}^{+l} \frac{d^2\psi}{dx^2}\,dx = \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l},$$

а, с другой стороны, применяя теорему о среднем значении к правой части (153.7),

$$\int_{-l}^{+l} k'^2\psi\,dx = 2l\overline{k'^2\psi}.$$

Итак,

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{+l} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{-l} = -2l\overline{k'^2\psi}$$

или, переходя к пределу при $l \to 0$,

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}.$$

Непрерывность функции ψ на границе обеих областей дает

$$(\psi_1)_{x=0} = (\psi_2)_{x=0}$$

или, если воспользоваться (153.5), при $a_1 = 1$ и (153.6′)

$$1 + b_1 = a_2. \tag{153.8}$$

Из условия непрерывности производной

$$\left(\frac{d\psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2}{dx}\right)_{x=0}$$

при помощи (153.5) и (153.6′) находим

$$1 - b_1 = \frac{k_2}{k_1} a_2. \tag{153.9}$$

Решая уравнения (153.8) и (153.9) относительно b_1 и a_2, получаем

$$b_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \tag{153.10}$$

Теперь мы можем, пользуясь аналогией с оптикой, определить коэффициент отражения R и коэффициент прозрачности D. Коэффициент отражения равен отношению квадратов амплитуд отраженной и падающей волн или, принимая во внимание, что амплитуда падающей волны a_1, по условию, равна 1:

$$R = b_1^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2. \tag{153.11}$$

При вычислении коэффициента прозрачности D нужно умножить отношение квадратов амплитуд проходящей и падающей волн на отношение скоростей частиц в той и другой областях по следующей причине. Коэффициент прозрачности равен отношению проходящего потока частиц к падающему. Представим себе цилиндр с основанием, равным 1 *см*², и высотой, равной скорости v. Если плотность частиц в этом цилиндре равна ρ, то полное число частиц в нем есть ρv и все эти частицы проходят через основание цилиндра в 1 *сек*. Итак, поток частиц равен ρv, а следовательно, коэффициент прозрачности

$$D = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{v_2}{v_1}.$$

Но плотность частиц ρ пропорциональна квадрату амплитуды волны де-Бройля, а отношение скоростей

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

или, учитывая (153.3) и (153.4),

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{k_2}{k_1}.$$

Поэтому имеем окончательно

$$D=\frac{a_2^2}{a_1^2}\frac{k_2}{k_1}=a_2^2\frac{k_2}{k_1} \qquad (153.12)$$

(a_1 по предыдущему есть 1) и, пользуясь выражением a_2 по (153.10), находим

$$D=\frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2}. \qquad (153.13)$$

Коэффициенты R и D мы можем истолковать с корпускулярной точки зрения следующим образом: R представляет вероятность частице испытать отражение на границе областей, а D — вероятность пройти в область II или, как принято говорить, вероятность преодолеть потенциальный барьер.

Складывая (153.11) и (153.13), находим $R+D=1$, что и следовало ожидать на основании теоремы сложения вероятностей, так как можно с достоверностью утверждать, что на границе областей частица либо отразится, либо пройдет дальше.

Вычислим теперь коэффициенты отражения и пропускания в зависимости от соотношения между полной энергией E и потенциальной энергией U. Мы имеем

$$k_1=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}=\frac{p_1}{\hbar}, \qquad k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}=\frac{p_2}{\hbar},$$

$$R=\left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2=\left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-U/E}}{1+\sqrt{1-U/E}}\right)^2,$$

$$D=1-R=4\frac{\sqrt{1-U/E}}{(1+\sqrt{1-U/E})^2}.$$

В таблице XXII приведено несколько численных значений R и D.

Таблица XXII

U/E	R	D	E/U
0,1	0,0007	0,9993	10
0,5	0,0296	0,9704	2
0,8	0,1459	0,8541	1,25
0,9	0,2700	0,7300	1,11
1,0	1,000	0,000	1,0

Из этой таблицы видно, что, когда энергия частицы вдвое больше высоты «потенциальной ступени» U, вероятность отражения

уже имеет вполне заметную величину (около 3%), а при $U=E$ проникновение в область II вообще невозможно, тогда как по классической механике в этом случае, так же, как и в остальных, частица с достоверностью переходит в область II, но только ее кинетическая энергия там равна нулю.

Причина, из-за которой мы не наблюдаем этого квантового отражения в обыкновенных макроскопических опытах с электронами, заключается в том, что потенциал на границе изменяется на участке «макроскопической» величины, а не возрастает внезапно, как на рис. 227. Если, однако, ширина переходной области имеет атомные размеры (1 — 10 Å), то этот эффект должен иметь место и его необходимо учитывать.

б) При $E<U$ *по классической механике* переход из области I в область II невозможен, так как при этом условии (потенциальная энергия больше полной) кинетическая энергия частицы в область I должна была бы сделаться отрицательной, а скорость — мнимой.

Вычислим коэффициент отражения R для этого случая, пользуясь квантовой механикой. Прежде всего следует обратить внимание на то, что при $E<U$ величина k_2 становится чисто мнимой:

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}=i\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}=ik,$$

где $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}$. Ввиду этого при вычислении R по формуле (153.11) возведение в квадрат следует заменить перемножением комплексно сопряженных величин RR^*, или, что то же, отысканием квадрата модуля:

$$R=\left|\frac{k_1-ik}{k_1+ik}\right|^2=1, \quad D=1-R=0.$$

Итак, при $E<U$ коэффициент отражения равен 1, т. е. отражение является полным. Как видно, этот результат вполне соответствует ожидаемому. Однако неожиданным является то, что, как мы сейчас покажем, хотя отражение и полное, — имеется определенная вероятность найти частицу в области II. Другими словами, отражение не обязательно происходит на самой границе областей, но некоторые частицы заходят в область II с тем, чтобы потом вернуться в область I. В самом деле, так как при $E<U$ коэффициент k_2 становится чисто мнимым и равным ik, то решение уравнения Шрёдингера для области II приобретает вид

$$\psi_2=a_2e^{ik_2x}=a_2e^{-kx},$$

а вероятность найти частицу на единице длины будет поэтому

$$\psi_2\psi_2^*=\psi_2^2=a_2^2e^{-2kx}=a_2^2e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,x}. \qquad (153.14)$$

Это означает, что имеется вполне определенная вероятность найти частицу в области II. Правда, эта вероятность экспоненциально (т. е. очень быстро) убывает с увеличением x, но она отлична от нуля: микроскопические частицы могут проникать в области, «запрещенные» для частиц макроскопических.

Подсчитаем, например, какова относительная вероятность найти электрон на расстоянии $x = 1$ Å $= 10^{-8}$ *см* от границы при условии, если $U - E = 1$ *эв* $= 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ *эрг*. Мы имеем

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,x = \frac{2}{1{,}05\cdot 10^{-27}}\sqrt{1{,}87\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}}\cdot 10^{-8} = 1{,}045,$$

$$e^{-1{,}045} \approx 0{,}29.$$

Как видно, вероятность очень большая (около 30%); при $x = 5$ Å она становится равной $e^{-5{,}2} = 0{,}005$, т. е. малой, но еще вполне заметной; однако уже при $x = 10$ Å экспоненциальный фактор становится равным ничтожной величине $e^{-10{,}45} = 4{,}54\cdot 10^{-5}$.

Истолкование полученных результатов с волновой точки зрения не представляет затруднений, так как случай $E < U$ аналогичен случаю полного внутреннего отражения в оптике. В самом деле, с точки зрения геометрической оптики при переходе света из более плотной среды в менее плотную, когда угол падения больше критического, свет не может проникнуть в менее плотную среду. Однако волновая оптика показывает, и опыт подтверждает, что в действительности в этой менее плотной среде, даже и при углах падения, больших критического, имеется волновое поле с экспоненциально убывающей амплитудой. При этом убывание амплитуды приблизительно определяется множителем $e^{-2\pi x/\lambda}$, а убывание интенсивности — множителем $e^{-4\pi x/\lambda}$ — закон, совершенно аналогичный закону убывания плотности вероятности ψ^2 для $E < U$. Далее, вычисление показывает, что несмотря на проникновение света во вторую среду, среднее значение составляющей вектора Умова — Пойнтинга (поток энергии), нормальной к поверхности раздела, за достаточно большой промежуток времени равно нулю. Это означает, что движения энергии, односторонне направленного из первой среды во вторую, не имеется.

Детальный анализ этого случая, выполненный А. А. Эйхенвальдом, показал, что при полном внутреннем отражении линии вектора Умова — Пойнтинга оказываются кривыми; они заходят во вторую среду и вновь выходят в первую; отражение продолжает оставаться полным, несмотря на установление поля во второй среде *). В соответствии с этим и в нашем случае коэффициент отражения R равен 1, а коэффициент пропускания ра-

*) См., например, Г. С. Ландсберг, Оптика, Гостехиздат, 1957, стр. 416.

вен нулю: частицы «заходят» в область II, проникают на некоторое расстояние и вновь возвращаются в область I.

Если, таким образом, волновое истолкование проникновения в «запрещенную» область оказывается очень простым, то с корпускулярной точки зрения это явление представляется на первый взгляд непонятным. В самом деле, если имеется не равная нулю вероятность найти частицу справа от барьера, то значит ее там можно обнаружить. С точки зрения классической механики обнаружить частицу в области, где $E < U$, как уже сказано, невозможно, так как прохождение частицы из области I в область II при $E < U$ было бы связано с нарушением закона сохранения энергии.

В квантовой механике, однако, нет никакого парадокса в том, что частицу можно обнаружить в области, где $E < U$. Во-первых, необходимо всегда помнить, что для микроскопических частиц, в силу соотношений неопределенности, одновременные точные значения x и p невозможны. Поэтому не имеет смысла говорить об одновременных определенных значениях потенциальной (функция x) и кинетической (функция p) энергии. Далее, что значит найти частицу справа от барьера? Для этого, очевидно, надо измерить ее координату x.

При анализе интересующего нас вопроса с этой точки зрения оказывается, что не всякий способ измерения координаты пригоден в случае $E < U$, а если он пригоден, то частица получает со стороны измерительного прибора такую добавочную порцию энергии, что закон сохранения энергии оказывается ненарушенным.

Приведем этот анализ. Пусть нам удалось измерить координату частицы приближенно, но так, что оказалось, что частица находится где-то справа от барьера в пределах отрезка, равного l. В таком случае координата частицы уже не будет совершенно неопределенна, но будет нам известна с неточностью $\Delta x = l$. Но если мы уже определили координату с неточностью $\Delta x = l$, то импульс должен приобрести неопределенность

$$\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{l}. \tag{153.15}$$

Откуда может возникнуть этот добавочный импульс Δp? Чтобы с уверенностью утверждать, что частица находится справа, а не слева от барьера, разрешающая способность оптического прибора, с помощью которого производится определение координаты частицы, должна быть достаточно высока. А для этого, как известно из оптики, длина волны света, применяемого для освещения частицы, должна быть соответственно мала. Но в таком случае частица при рассеянии света получает комптоновский отброс, который и создает неопределенность импульса.

Но неопределенности импульса Δp соответствует неопределенность энергии $\Delta E = \frac{(\Delta p)^2}{2m}$. Оценим ее. Так как вероятность нахождения частицы по формуле (153.14) убывает с увеличением x экспоненциально, то имеет смысл отыскивать частицу на таких расстояниях от барьера, для которых показатель степени в (153.14) порядка 1, т. е.

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\, l \sim 1,$$

откуда

$$l \sim \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U-E)}}.$$

Таким образом, неопределенность импульса по (153.15) будет

$$\Delta p \geqslant 2\sqrt{2m(U-E)},$$

а следовательно, и подавно

$$\Delta p > \sqrt{2m(U-E)}.$$

Поэтому

$$(\Delta p)^2 > 2m(U-E)$$

и

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} > U - E.$$

Итак, добавочная энергия, которую получает частица при измерении координаты, больше разности между потенциальной и кинетической энергиями, а потому возможность обнаружения частицы справа от барьера не противоречит закону сохранения энергии.

§ 154. Потенциальный барьер конечной ширины

Продолжим рассмотрение задачи о барьерах и займемся исследованием случая, когда барьер имеет конечную ширину. Условия задачи, которую мы будем решать в этом параграфе, таковы: частица движется слева направо параллельно оси x в поле, которое мы разделим на три области.

В области I, т. е. при $x \leqslant 0$ потенц. энергия $U = 0$,

» » II, » » $0 \leqslant x \leqslant d$, » » $U = \text{const} \neq 0$,

» » III, » » $x \geqslant d$, » » $U = 0$.

Этот тип барьера схематически представляет условия, встречающиеся при решении многих задач атомной физики (например, эмиссия электронов из металлов, радиоактивный распад и т. д.)

Напишем уравнение Шрёдингера для каждой области отдельно: для областей I и III $(U = 0)$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{154.1}$$

и для области II $(U \neq 0)$:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0. \tag{154.2}$$

Решения этих уравнений будут соответственно

$$\psi_{I,\,III} = e^{\pm ik_1x} \quad \left(k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\lambda}\right), \tag{154.3}$$

$$\psi_{II} = e^{\pm ik_2x} \quad \left(k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}\right). \tag{154.4}$$

В предыдущем параграфе мы рассмотрели случай перехода частицы в безгранично протяженную область с иной потенциальной энергией, и мы видели, что при любом соотношении между энергией частицы и высотой потенциального барьера имеется определенная вероятность частице испытать отражение и определенная вероятность проникнуть в область II. В случае, который нам предстоит рассмотреть, потенциальный барьер имеет конечную ширину; мы увидим, что здесь всегда имеется еще и определенная вероятность того, что частица пройдет *сквозь* область II и выйдет в область III. В особенности интересно, что даже тогда, когда полная энергия падающей частицы меньше ее потенциальной энергии в области II, эта вероятность имеет конечную величину, причем частица в этом случае выходит в область III с той же энергией, какой она обладала в области I.

Отличие рассматриваемого случая от изученного в предыдущем параграфе состоит в том, что здесь отражение имеет место как на границе областей I и II, так и на границе областей II и III. В соответствии с этим решениями будут

$$\begin{aligned} \psi_I &= e^{ik_1x} + b_1e^{-ik_1x}, \\ \psi_{II} &= a_2e^{ik_2x} + b_2e^{-ik_2x}, \\ \psi_{III} &= a_3e^{ik_1x}. \end{aligned} \tag{154.5}$$

При этом, как и в предыдущем параграфе, коэффициент a_1 положен равным единице.

Для вычисления коэффициентов R и D необходимо найти прежде всего постоянные b_1, b_2, a_2, a_3. С этой целью мы воспользуемся условиями непрерывности функции ψ и ее первой производной на границах областей I и II, II и III, т. е. при $x = 0$ и при $x = d$. Выпишем эти условия:

$$(\psi_I)_{x=0} = (\psi_{II})_{x=0}, \quad \left(\frac{d\psi_I}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=0}, \tag{154.6}$$

$$(\psi_{II})_{x=d} = (\psi_{III})_{x=d}, \quad \left(\frac{d\psi_{II}}{dx}\right)_{x=d} = \left(\frac{d\psi_{III}}{dx}\right)_{x=d}. \tag{154.7}$$

Эти условия дают

$$\left.\begin{aligned} &1+b_1=a_2+b_2, \quad k_1-k_1b_1=k_2a_2-k_2b_2,\\ &a_2e^{ik_2d}+b_2e^{-ik_2d}=a_3e^{ik_1d}, \quad a_2e^{ik_2d}-b_2e^{-ik_2d}=a_3\frac{k_1}{k_2}e^{ik_1d}. \end{aligned}\right\} \quad (154.8)$$

Решая эту систему уравнений, найдем следующее выражение для a_3

$$a_3=\frac{4k_1k_2e^{ik_1d}}{(k_1+k_2)^2e^{-ik_2d}-(k_1-k_2)^2e^{ik_2d}}. \quad (154.9)$$

Мы не будем вычислять коэффициент отражения R, так как это вычисление не дало бы ничего принципиально нового по сравнению со сказанным в предыдущем параграфе. Поэтому остальные постоянные b_1, a_2, b_2 нам не понадобятся. Коэффициент прозрачности барьера D [см. формулу (153.12)] в данном случае равен просто квадрату модуля a_3 ввиду того, что длина волны в областях I и III — одна и та же:

$$D=|a_3|^2=a_3a_3^*. \quad (154.10)$$

Для нас представляет интерес величина D в том случае, когда $E<U$. При этом

$$k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U)}$$

будет, очевидно, чисто мнимым числом. Положим

$$k_2=ik,$$

где

$$k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}. \quad (154.11)$$

Экспоненциальные функции $e^{\pm ik_2d}$, входящие в знаменатель (154.9), будут при этом условии действительными числами $e^{\pm kd}$. Вместо (154.9) мы получим

$$a_3=\frac{4k_1ke^{ik_1d}}{(k_1+ik)^2e^{kd}-(k_1-ik)^2e^{-kd}}, \quad a_3^*=\frac{-i4k_1ke^{-ik_1d}}{(k_1-ik)^2e^{kd}-(k_1+ik)^2e^{-kd}}.$$

Вводя гиперболические функции

$$\operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

приведем выражения для a_3 и a_3^* к виду

$$a_3=\frac{i2k_1ke^{ik_1d}}{(k_1^2-k^2)\operatorname{sh}kd+2ik_1\operatorname{ch}kd}, \quad a_3^*=\frac{-i2k_1ke^{-ik_1d}}{(k_1^2-k^2)\operatorname{sh}kd-2ik_1\operatorname{ch}kd}.$$

Это дает

$$D=a_3a_3^*=\frac{4k_1^2k^2}{(k_1^2-k^2)^2\operatorname{sh}^2kd+4k^2k_1^2\operatorname{ch}^2kd};$$

после преобразований, принимая во внимание, что

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,$$

получим

$$D=\frac{4k_1^2k^2}{(k_1^2+k^2)^2\operatorname{sh}^2kd+4k_1^2k^2}. \quad (154.12)$$

Примем теперь во внимание, что в значительном большинстве интересных для нас случаев можно считать sh^2kd равным просто $\frac{1}{2}e^{2kd}$. В самом деле, например, для электронов при

$$U-E=150\ \text{в} \quad \text{и} \quad d=10^{-8}\ \text{см} \quad kd=\frac{2\pi}{10^{-8}}\cdot10^{-8}=6{,}28.$$

Поэтому

$$e^{2kd}=e^{12{,}56}=2{,}8\cdot10^6, \quad e^{-2kd}=e^{-12{,}56}=3{,}5\cdot10^{-7}.$$

Написав теперь D в виде

$$D=\frac{4}{\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k}+\frac{k}{k_1}\right)^2e^{2kd}+4},$$

мы замечаем, что 4 в знаменателе можно отбросить по сравнению с e^{2kd} и так как k_1 и k — одного порядка величины, то с точностью до несущественного множителя:

$$D\sim e^{-2kd}=e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\,d}. \quad (154.13)$$

Эта формула показывает, что проницаемость барьера в очень сильной степени зависит от его ширины d.

Вычислим значение экспоненциального фактора для электронов. Возьмем для массы электрона $m=9{,}8\cdot10^{-28}$, для квантовой постоянной $\hbar=1{,}05\cdot10^{-27}$. Если разность между высотой барьера U и энергией электрона равна V электрон-вольт или $1{,}6\cdot10^{-12}\,V$ эргов, то

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}=1{,}08\cdot\sqrt{V}\cdot10^8\ \text{см}^{-1}.$$

Задаваясь разностью $U-E=V=5$ *эв*, получим следующие значения экспоненциального множителя для различной ширины барьера:

d (в Å)	1	1,3	1,5	1,8	2,0	5,0	10,0
D	0,1	0,04	0,03	0,016	0,008	$5{,}54\cdot10^{-7}$	$1{,}4\cdot10^{-12}$

Как видно, для ширины барьера в 1 А (атомные размеры) проницаемость довольно велика (несколько процентов), но уже для $d = 10$ А она становится ничтожно малой.

Интересно отметить, что прохождение через потенциальный барьер не сопровождается для частицы потерей энергии: она выходит из пределов барьера с тою же энергией, с какой в него попадает

Мы рассмотрели случай прохождения частицы через потенциальный барьер весьма упрощенной прямоугольной формы. Можно показать, что коэффициент прозрачности барьера произвольного вида (см. рис. 229) выражается с достаточным приближением формулой, которая является естественным обобщением формулы (154.13)

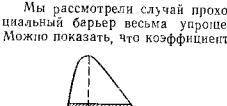


Рис. 229. Потенциальный барьер произвольной формы.

$$D = Ce^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{(U-E)}\,dx}, \tag{154.14}$$

где C — несущественная постоянная порядка единицы. Эту формулу мы в дальнейшем применим к некоторым конкретным физическим задачам.

Прохождение через потенциальный барьер часто образно называют *туннельным эффектом*: для преодоления барьера частица не взбирается на его вершину, но проходит *под ней* как бы через туннель. Основы теории туннельных переходов были заложены в работе Л. И. Мандельштама и М. А. Леонтовича.

Многие явления, недоступные для объяснения в классической механике, легко объясняются в квантовой механике именно благодаря рассмотренным в последних двух параграфах своеобразным свойствам микроскопических частиц. К этому вопросу мы еще вернемся в следующих параграфах.

§ 155. Колебания струны

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах, сразу раскрывают перед нами своеобразие законов, управляющих движением очень малых частиц. Дальше мы покажем, например, каким образом из уравнения Шрёдингера совершенно непринужденно вытекает уже известная нам особенность атомных систем, резко отличающая их от систем, подчиняющихся классической механике: существование дискретных уровней энергии. Мы увидим, что эта особенность находится в тесной связи с некоторыми свойствами дифференциального уравнения Шрёдингера, — свойствами, которые были открыты уже очень давно, при решении определенных задач классической физики.

Для того чтобы облегчить понимание дальнейшего, рассмотрим сначала одну из таких классических задач — задачу о колебаниях натянутой струны, имеющей по всей длине одну и ту же плотность ($\rho = \text{const}$) и одинаковое натяжение ($T = \text{const}$).

Уравнение колебаний струны *) есть волновое уравнение для одного измерения

$$\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{155.1}$$

где $u(x, t)$ — отклонение струны от положения равновесия, а c' — скорость распространения волны на струне, связанная с натяжением T струны и ее плотностью ρ формулой

$$c' = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{155.2}$$

При постоянных T и ρ, $c' = \text{const}$.

Положим сначала, что струна безгранична, и рассмотрим случай, когда волна гармоническая (монохроматическая). Тогда каждый участок струны совершает гармонические колебания, и мы можем искать решение уравнения (155.1) в виде

$$u(x, t) = y(x)\,e^{i2\pi\nu t}. \tag{155.3}$$

Подставив это решение в (155.1), получим после сокращения на $e^{i2\pi\nu t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2\nu^2}{c'^2}\,y = 0, \tag{155.4}$$

или, заменяя ν/c' через $1/\lambda$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\,y = 0. \tag{155.5}$$

Это уравнение удовлетворяется решениями $e^{\pm i\frac{2\pi}{\lambda}x}$. Общее решение будет поэтому

$$y = B_1 e^{i\frac{2\pi}{\lambda}x} + B_2 e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}x}, \tag{155.6}$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные, вообще говоря, комплексные, т. е. включающие начальные фазы δ_1 и δ_2 (см. § 47):

$$B_1 = b_1 e^{i\delta_1}, \quad B_2 = b_2 e^{-i\delta_2}.$$

*) Вывод уравнения колебаний струны см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, § 163, «Наука», 1967.

Вводя в решение (155.6) действительные амплитуды b_1 и b_2, получим

$$y = b_1 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_1\right)} + b_2 e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta_2\right)}, \qquad (155.7)$$

Если мы теперь припишем к каждому члену (155.7) временной множитель $e^{i\omega t} = e^{i\frac{2\pi}{\lambda}c't}$, то получим общее решение уравнения (155.1):

$$u(x, t) = b_1 e^{i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right]} + b_2 e^{-i\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]}, \qquad (155.8')$$

действительная часть равна

$$u(x, t) = b_1 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+c't)+\delta_1\right] + b_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-c't)+\delta_2\right]. \qquad (155.8)$$

Каждый из членов этого решения представляет собою волну, распространяющуюся на струне; при этом, если первый член соответствует волне, распространяющейся слева направо (скорость $+c'$), то второй соответствует волне, бегущей справа налево (скорость $-c'$).

Положим, что $b_1 = b_2 = a/2$, и преобразуем сумму косинусов, входящих в (155.8). Получим

$$u(x, t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}c't+\delta\right) = \\ = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right)\cos(\omega t+\delta), \qquad (155.9)$$

где $\frac{\delta_1+\delta_2}{2} = \delta'$, $\frac{\delta_1-\delta_2}{2} = \delta$. Очевидно, что это решение представляет стоячие волны на струне, так как при тех значениях x, которые удовлетворяют условию

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x+\delta'\right) = 0,$$

отклонение $u(x, t)$ будет равно нулю при любом t. Это значит, что на струне имеются места, где отклонение все время равно нулю, — узлы, между которыми располагаются места, где оно имеет максимальную величину, — пучности.

Положим теперь, что струна жестко закреплена с одного конца (например, при $x = 0$). Мы имеем, таким образом, одно краевое условие:

$$u(0, t) = 0. \qquad (155.10)$$

Это краевое условие будет удовлетворено, если

$$u(0, t) = a\cos\delta' \cdot \cos(\omega t+\delta),$$

что может быть (исключая тривиальный случай $a = 0$) только в том случае, когда $\delta' = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$u(x, t) = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}x \cdot \cos(\omega t+\delta). \qquad (155.11)$$

Если струна имеет конечную длину l и закреплена на обоих концах, то решение (155.9) должно удовлетворять двум краевым условиям

$$u(0, t) = 0 \quad \text{и} \quad u(l, t) = 0.$$

Применяя первое условие, мы получаем уже известное решение (155.11); второе краевое условие, записанное в явном виде, требует, чтобы

$$a\sin\frac{2\pi}{\lambda}l\cos(\omega t+\delta) = 0$$

при любых значениях t. Это требование будет удовлетворено, если

$$\frac{2\pi}{\lambda_n}l = n\pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (155.12)$$

откуда

$$\frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{l} \quad \text{и} \quad \omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n}c' = n\frac{\pi c'}{l}. \qquad (155.13)$$

Итак, решения, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (155.1) и краевым условиям (155.12), представляют собою совокупность бесконечного числа *избранных* функций

$$\sin n\frac{\pi x}{l}\cos(\omega_n t+\delta) = \sin n\frac{\pi x}{l}\cos\left(n\frac{\pi c'}{l}t+\delta\right) \qquad (155.14)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Эти функции описывают различные *стоячие волны* или *собственные колебания*, которые может совершать струна, закрепленная на обоих концах. Действительно, полагая в (155.14) $n = 1$, получаем решение

$$u_1 = \sin\pi\frac{x}{l}\cos\left(\frac{\pi c'}{l}t+\delta\right). \qquad (155.15)$$

Это решение представляет стоячую волну, имеющую два узла — при $x = 0$ и при $x = l$, так как только при этих значениях x функция (155.15) обращается в нуль для любых значений t.

При $n = 2$ мы получаем стоячую волну

$$u_2 = \sin 2\frac{\pi x}{l}\cos\left(2\frac{\pi c'}{l}t + \delta\right),$$

которая имеет три узла при $x = 0$, $l/2$, l, т. е. два узла по концам струны и один — посредине. Вообще, m-я функция

$$u_m = \sin m\frac{\pi x}{l}\cos\left(m\frac{\pi c'}{l}t + \delta\right)$$

описывает стоячую волну, имеющую $m + 1$ узлов. Заметим уже сейчас, что целое число m играет здесь ту самую роль, которую играют квантовые числа в задачах атомной физики.

Длины волн, способных устанавливаться на струне, закрепленной на обоих концах, найдутся из формулы (155.12):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \tag{155.16}$$

причем только эти длины волн и могут распространяться на струне, так как в противном случае краевые условия не будут удовлетворены. Соответствующий этим длинам волн избранный ряд частот будет

$$\nu_n = n\frac{c'}{2l} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{155.17}$$

Эти частоты называются *собственными частотами* колебаний струны. Как видно, они образуют дискретный ряд: наименьшая собственная частота равна $\nu_1 = c'/2l$; следующие частоты будут $2\nu_1, 3\nu_1, \ldots$

Введем следующую терминологию, которой мы будем пользоваться в дальнейшем. Функции

$$y_n = \sin n\frac{\pi x}{l} \tag{155.18}$$

удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}y = 0 \tag{155.19}$$

и краевым условиям

$$y(0) = y(l)$$

только в том случае, если длина волны λ, входящая в уравнение (155.19) в качестве параметра, принимает одно из следующих значений:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}.$$

Эти значения мы будем называть *собственными значениями* параметра, а соответствующие им функции — *собственными функциями* дифференциального уравнения (155.19).

§ 156. Частица в потенциальном ящике

Вернемся теперь к уравнению Шрёдингера и прежде всего на самом простом примере покажем, каким образом из этого уравнения следует квантование энергии.

Рассмотрим микроскопическую частицу, находящуюся в поле, которое характеризуется следующим образом: от $x = 0$ до $x = l$ потенциальная энергия U постоянна и равна нулю; на границах же области $(0, l)$ U внезапно возрастает до бесконечности (рис. 230). При таких условиях можно утверждать, что частица не выходит за пределы области $0, l$. Для наглядности можно себе представить частицу, запертую в ящике с идеально отражающими стенками; внутри ящика частица свободно движется между его стенками, но за пределы ящика выйти не может.

Рис. 230.

Установим прежде всего краевые условия этой задачи. С этой целью мы напишем уравнение Шрёдингера для одномерного движения, параллельного оси x:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \tag{156.1}$$

Потенциальная энергия U в нашей задаче должна удовлетворять требованиям:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \infty & \text{при } x = 0 \text{ и при } x = l. \end{cases} \tag{156.2}$$

Покажем, что для удовлетворения этих требований $\psi(x)$ должна обращаться в нуль у стенок ящика. Действительно, обозначив $d^2\psi/dx^2$ через ψ'', мы можем переписать (156.1) в виде

$$\frac{\psi''}{\psi} = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - U). \tag{156.3}$$

Для всех значений x между 0 и l значение $U = 0$ и отношение ψ''/ψ имеет конечную величину; при $x \to 0$ и $x \to l$ потенциальная энергия стремится к бесконечности. В силу стандартных условий (§ 152, конечность и непрерывность ψ и ψ') это может быть только в том случае, когда $\psi(x) \to 0$. Итак, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0 \tag{156.4}$$

при краевых условиях

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0. \tag{156.5}$$

Как видно, эта задача совершенно тождественна с рассмотренной в предыдущем параграфе задачей о стоячих колебаниях струны. Поэтому мы можем использовать все полученные там результаты, давая им соответствующее нашему случаю истолкование. А именно, собственные функции уравнения (156.4) будут (см. (155.18))

$$\psi_n = \sin n\frac{\pi x}{l}. \tag{156.6}$$

Для нахождения собственных значений энергии мы примем во внимание, что коэффициент $2mE/\hbar^2$ в уравнении (156.4) стоит вместо коэффициента $4\pi^2/\lambda^2$ в уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}y = 0. \tag{155.19}$$

Так как собственные значения λ в (155.19) определяются формулой $\lambda_n = 2l/n$, то $4\pi^2/\lambda_n^2 = 4\pi^2(n/2l)^2$. Мы получаем, таким образом,

$$\frac{2m}{\hbar^2}E_n = 4\pi^2\left(\frac{n}{2l}\right)^2,$$

откуда

$$E_n = n^2\frac{\hbar^2}{\pi^2\hbar^2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{156.7}$$

Итак, мы видим, что краевые условия задачи будут удовлетворены лишь для дискретного ряда значений энергии (156.7). А это и означает, что частица, «запертая» в потенциальном ящике, может иметь только квантованные значения энергии (156.7).

Этот вывод кажется сначала неожиданным. Мы сейчас покажем, однако, что даже для очень малой частицы квантование становится заметным лишь в том случае, когда «ящик» имеет атомные размеры. Вычислим для этого расстояние между уровнями энергии для электрона с массой $m = 9{,}8\cdot 10^{-28}$ *г*, помещенного в ящик длиною $l = 1$ *см*. Тогда

$$E_n = n^2\frac{(1{,}05\cdot 10^{-27})^2\cdot 9{,}8}{8\cdot 10^{-28}} = n^2\cdot 5{,}4\cdot 10^{-27}\ \text{эрг} = n^2\cdot 3{,}37\cdot 10^{-15}\ \text{эв}.$$

Расстояние между соседними уровнями ($\Delta n = 1$) будет, таким образом,

$$\Delta E_n \approx 2n\cdot 3{,}37\cdot 10^{-15}\ \text{эв} = 6{,}74\cdot 10^{-15}n\ \text{эв}.$$

Эти расстояния столь малы, что практически мы имеем дело со сплошным рядом энергий. В следующем параграфе мы увидим, однако, что наличие дискретных уровней даже в случае ящика макроскопических размеров имеет большое значение для элементарных частиц, обладающих определенными квантовыми свойствами (например, для электронов, см. стр. 516).

Положим теперь, что ящик имеет размеры атомного порядка, например $l = 10$ Å $= 10^{-7}$ *см*. Тогда

$$E_n = 5{,}4\cdot 10^{-13}n^2\ \text{эрг} = 0{,}34\,n^2\ \text{эв},$$

а расстояния между уровнями при $\Delta n = 1$

$$\Delta E_n = 0{,}68n\ \text{эв}.$$

Это — уже вполне заметные расстояния.

До сих пор мы интересовались только собственными значениями энергии. Рассмотрим теперь свойства собственных функций нашей задачи. Докажем прежде всего, что собственные функции обладают свойствами *ортогональности*, выражаемым равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

Для доказательства заметим прежде всего, что в силу краевых условий (156.5) функция ψ обращается в нуль при $x=0$ и $x=l$. Поэтому интегрирование между бесконечными пределами сводится к интегрированию от 0 до l. Принимая во внимание общее выражение собственных функций (156.6), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \int_0^l \sin m\frac{\pi x}{l}\sin n\frac{\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos(m-n)\frac{\pi x}{l} - \cos(m+n)\frac{\pi x}{l}\right]dx = 0,$$

что мы и хотели доказать.

При $m = n$ интеграл не равен нулю, и это позволяет *нормировать* к 1 функции ψ_n. В самом деле, пусть мы нашли такой множитель N_n, что функция $N_n\psi_n$ будет нормирована, т. е. будет выполняться условие

$$N_n^2\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^2(x)\,dx = 1.$$

По-прежнему интегралы от $-\infty$ до 0 и от l до $+\infty$ равны нулю вследствие того, что функция ψ_n в этих промежутках равна нулю, и мы получим

$$1 = N_n^2\int_0^l \sin^2 n\frac{\pi x}{l}\,dx = N_n^2\frac{l}{2},$$

откуда

$$N_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Итак, нормирующий множитель для всех функций ψ_n одинаков и нормированные собственные функции таковы:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin 2\frac{\pi x}{l}, \ \ldots$$

Напомним, что, когда частица находится в состояниях, описываемых собственными функциями ψ_n, зависимость от времени выражается «монохроматическим» множителем $e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$, так что функция, описывающая состояние частицы, обладающей энергией E_n, в любой момент времени такова:

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} = \sin n\frac{\pi x}{l}\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}.$$

При этом согласно сказанному в § 152 временной множитель должен быть комплексным по существу, т. е. не следует брать

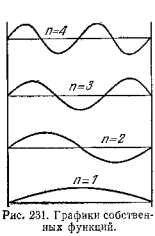


Рис. 231. Графики собственных функций.

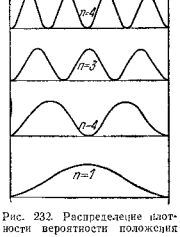


Рис. 232. Распределение плотности вероятности положения частицы в потенциальном ящике.

только его действительную часть. Однако физический смысл имеет не сама функция $\psi_n(x, t)$, но квадрат ее модуля

$$|\psi_n(x, t)|^2 = \psi_n^*(x, t)\,\psi_n(x, t) = \psi_n^2(x) = \sin^2 n\frac{\pi x}{l}.$$

Очевидно, что состояния, описываемые функциями $\psi_n(x, t)$, от времени не зависят: это — *стационарные состояния*.

На рис. 231 приведены графики собственных функций (156.6), а на рис. 232 — квадраты их модулей. По смыслу последние представляют распределение вероятности найти микроскопиче-

скую частицу на единице длины в том или ином месте внутри ящика при различных значениях энергии частицы. Как видно из рисунка, в низшем энергетическом состоянии ($n = 1$) с наибольшей вероятностью можно найти частицу около середины ящика, а вероятность найти ее у стенок равна нулю. Этот результат резко отличается от того, что можно ожидать для макроскопической частицы. Такую частицу мы, очевидно, с равной вероятностью можем найти в любом месте ящика, так что кривая плотности вероятности для нее должна идти параллельно оси абсцисс. Рисунок показывает, что при увеличении энергии частицы (возрастание квантового числа n) максимумы кривой $|\psi_n|^2$ располагаются все ближе и ближе друг к другу, так что для очень больших значений квантового числа n получается распределение, соответствующее макроскопической частице. Здесь, как и во всех случаях, принцип соответствия удовлетворяется.

§ 157. Электрон в потенциальной яме

В качестве применения результатов, полученных в предыдущих параграфах, рассмотрим поведение электрона в поле, изображаемом потенциальной «кривой» рис. 233: потенциальная энергия электрона вне ящика или «ямы» $OABC$ равна нулю, внутри ямы она равна $-U$. В таком поле находится, например, электрон внутри металла.

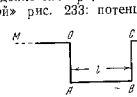


Рис. 233.

Поскольку выбор нуля потенциальной энергии произволен, выберем его так, чтобы потенциальная энергия покоящегося электрона внутри металла была положительна и равна, например, U'' (рис. 234). Тогда вне металла (в вакууме) потенциальная энергия покоящегося электрона будет также положительна и равна U', а разность $U' - U'' = U_0$ и есть глубина той потенциальной ямы, внутри которой находится электрон в металле.

Если электрон в металле движется, то его полная энергия будет больше U'' и равна, например, E. Избыток энергии по сравнению с U'', т. е. величина $E - U'' = T$, будет при этом, очевидно, равен кинетической энергии.

Мы знаем, что электрон, помещенный в потенциальный ящик, может обладать только избранными значениями энергии, образующими дискретный ряд (§ 156). Правда, при конечной величине куска металла расстояние между этими уровнями энергии будет ничтожно мало. Однако наличие их сказывается очень определенным образом благодаря важному закону природы — так называемому *принципу Паули*. Дело в том, что элементар-

ные частицы (электроны, протоны, нейтроны и др.) обладают особым свойством, неизменно присущим им в такой же степени, как заряд и масса и состоящим в наличии у них собственного момента количества движения, называемого спином (английское слово spin означает нечто вращающееся) и магнитным моментом. Важная особенность спина электрона состоит в том, что вектор его может ориентироваться относительно выбранного направления, в частности — относительно вектора спина другого электрона, *только двумя способами: параллельно или антипараллельно.* Во II-м томе мы посвятим этому свойству электрона значительное место, а пока отметим, что в силу упомянутого принципа Паули, на каждом уровне энергии электрона в металле может находиться *только два электрона с антипараллельными спинами*, но если представить себе вначале только решетку положительных ионов, внутрь которой вносятся один за другим электроны при абсолютном нуле температуры, то первые два электрона расположатся на самом нижнем уровне; третий электрон уже не сможет поместиться на этом уровне и должен будет расположиться на следующем, более высоком уровне, т. е. будет обладать не только потенциальной энергией, но и некоторой незначительной кинетической. Так как число свободных электронов в металле очень велико (например, один грамм-атом одновалентного металла, скажем натрия, имеет $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ свободных электронов), то будет заполнено соответствующее, т. е. вдвое меньшее, число уровней энергии. Верхний из этих заполненных уровней при абсолютном нуле образует резкую границу между заполненными и свободными уровнями. Этот верхний уровень ζ называется критическим уровнем или границей Ферми. Очевидно, что для освобождения электрона из металла нужно сообщить ему энергию, по крайней мере равную разности между глубиной потенциальной ямы и кинетической энергией критического уровня (рис. 235). Эта разность

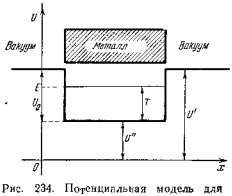


Рис. 234. Потенциальная модель для электрона в металле.

$$w = U_0 - \zeta$$

и есть работа выхода электрона из металла, проявляющаяся в фотоэффекте (слагаемое P в уравнении Эйнштейна).

Электрон, однако, может быть освобожден из металла не только под действием света, но и вследствие нагревания (термоионная эмиссия). При температурах выше абсолютного нуля часть электронов располагается на верхних свободных уровнях, т. е. на уровнях, лежащих выше границы Ферми. Если вследствие нагревания металла энергия электрона станет настолько большой, что он сможет преодолеть тормозящее поле и выйти за пределы металла, то возникнет термоионный эффект.

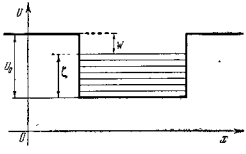


Рис. 235. Работа выхода и внутренний потенциал.

Холодная эмиссия. Оказывается, однако, что под влиянием сильного электрического поля электроны начинают выходить из металла при сколь угодно низких температурах. Качественно это явление можно объяснить и с классической точки зрения, но получаемые таким путем величины силы тока резко противоречат экспериментальным данным.

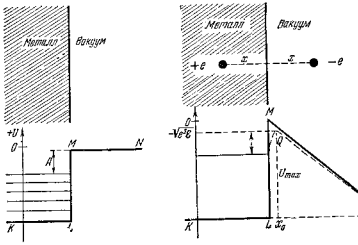


Рис. 236. Рис. 237.

Классическое объяснение этого явления *холодного разряда* состоит в следующем. Распределение потенциала внутри металла и вблизи его поверхности в отсутствии поля приближенно представляется, как и раньше, ломаной линией $KLMN$ (рис. 236),

Пусть теперь к металлу приложено электрическое поле с напряженностью $\mathscr{E}$. Сила, действующая на электрон, находящийся вне металла, складывается из силы $e\mathscr{E}$, с которой на него действует поле, плюс так называемая «сила изображения». Последняя возникает вследствие того, что сам электрон создает на поверхности металла путем электростатической индукции положительные заряды, которые притягивают электрон так, как если бы внутри металла на расстоянии x от его поверхности был расположен заряд $+e$ — зеркальное электрическое изображение электрона (рис. 237). Таким образом, полная сила равна

$$F = e\mathscr{E} - \frac{e^2}{4x^2},$$

а потенциальная энергия электрона в поле этой силы будет

$$U = U_0 - e\mathscr{E}x - \frac{e^2}{4x}. \qquad (157.1)$$

На рис. 237 пунктиром изображена кривая этой потенциальной энергии. Эта кривая, как видно, имеет максимум на расстоянии $x = x_0$ от поверхности. Для отыскания x_0 пишем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=x_0} = -e\mathscr{E} + \frac{e^2}{4x_0^2} = 0,$$

откуда $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{\mathscr{E}}}$. Подставляя это x_0 в (157.1), получаем для глубины потенциальной ямы

$$U_{\max} = U_0 - \sqrt{e^3\mathscr{E}}.$$

Мы видим, что поле *понижает* высоту стенки потенциальной ямы на величину

$$\sqrt{e^3\mathscr{E}}.$$

С точки зрения классической механики электроны внутри металла, имеющие энергию, меньшую $U_{\max}$, еще не могут выйти за пределы его поверхности, так как этому препятствует потенциальный барьер LQN, но электроны, обладающие энергией, большей $U_{\max}$, уже освобождаются. Таким образом, в присутствии поля работа выхода электрона уменьшается и становится равной

$$w' = U_{\max} - \zeta = U_0 - \sqrt{e^3\mathscr{E}} - \zeta = w - \sqrt{e^3\mathscr{E}},$$

где w — работа выхода в отсутствии поля.

Очевидно, что максимальный ток получился бы в том случае, если бы работа w' обратилась в нуль. Напряженность приложенного поля в этом случае, очевидно, будет

$$\mathscr{E} = \frac{w^2}{e^3} = 7 \cdot 10^6 w^2 \ в/см,$$

Для вольфрама $w = 4{,}9$ *в*; поэтому $\mathscr{E} = 2 \cdot 10^8$ *в/см*. Между тем Милликэн получал сильные токи холодного разряда уже при $\mathscr{E} = 4 \cdot 10^6$ *в/см*.

Ключ к разгадке этого резкого противоречия дает как раз способность электронов совершать туннельные переходы, не учитываемая классической механикой. Рассмотрим снова потенциал вблизи поверхности металла в присутствии поля. Если мы не будем учитывать силу изображения (учет силы изображения дал бы более точный результат, но сильно усложнил вычисления), то ход потенциала изобразится ломаной линией $KLMN$ (рис. 238). Электрон, обладающий энергией E, по абсолютному значению меньшей высоты барьера U_0, в силу законов квантовой механики может выйти из металла непосредственно путем туннельного перехода. Вероятность этого выхода дается прозрачностью барьера, равной по формуле (154.14)

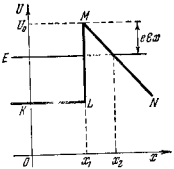


Рис. 238.

$$D = Ce^{-\frac{2}{\hbar}\int_{x}^{x_2}\sqrt{2m}\sqrt{U-E}\,dx},$$

где U — потенциальная энергия в какой-нибудь точке барьера, а E — энергия частицы, отсчитываемая от того же уровня, что и высота барьера.

Очевидно (рис. 238), что

$$U = U_0 - e\mathscr{E}x.$$

Поэтому, полагая $x_1 = 0$, можем написать

$$\int_0^{x_2}\sqrt{U-E}\,dx = \int_0^{x_2}\sqrt{U_0 - e\mathscr{E}x - E}\,dx =$$

$$= -\frac{2}{3e\mathscr{E}}(U_0 - e\mathscr{E}x_2 - E)^{3/2} + \frac{2}{3e\mathscr{E}}(U_0 - E)^{3/2}.$$

Из чертежа непосредственно видно, что $U_0 - e\mathscr{E}x_2 = E$, вследствие чего первый член равен нулю, и мы получаем для прозрачности барьера

$$D = Ce^{-\frac{2(U-E)^{3/2}\sqrt{2m}}{3e\hbar}\frac{1}{\mathscr{E}}}$$

или, обозначая $\frac{2(U_0-E)^{3/2}\sqrt{2m}}{3e\hbar} = \alpha$, получим $D = Ce^{-\alpha/\mathscr{E}}$.

Именно такая зависимость «холодного тока» от напряженности поля и была найдена экспериментально.

Интересно привести данные для прозрачности барьера и силы холодного тока при разных напряжениях (см. таблицу XXIII). Здесь интересен необычайно быстрый рост прозрачности при увеличении поля, а также и то, что при очень малых значениях D получаются большие токи. Последнее объясняется тем, что число электронов, бомбардирующих в секунду стенку барьера, столь велико, что даже при ничтожной вероятности выхода возникают сильные токи.

Таблица XXIII

$\mathscr{E}$ (в/см)	$E = -2a$		$E = -5a$	
	D	I (а/см²)	D	I (а/см²)
10^6	10^{-30}	10^{-74}	10^{-322}	10^{-322}
$5 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{-13}$	$1{,}5 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-95}$	$6 \cdot 10^{-88}$
10^7	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	100	10^{-31}	$3 \cdot 10^{-24}$
$2 \cdot 10^7$	0,013	$4 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{-13}$	$3 \cdot 10^{-7}$
$3 \cdot 10^7$	1	$7 \cdot 10^8$	$6 \cdot 10^{-10}$	0,18

Контактная разность потенциалов. Если привести в соприкосновение два металла различной природы (например, медь и цинк), то между ними устанавливается разность потенциалов (контактная разность потенциалов). Это явление, открытое еще Вольта, становится понятным, если рассмотреть условия, в которых находятся электроны в обоих металлах.

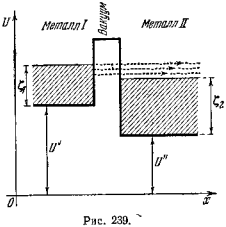


Рис. 239.

Представим себе два металла с различными внутренними потенциалами и различными работами выхода w_1 и w_2 и пусть $w_1 < w_2$. Сблизим их так, чтобы расстояние между их параллельными поверхностями было порядка атомных размеров $\sim (10^{-8}$ *см*). В том и другом металле все уровни энергии ниже границы Ферми ζ заняты электронами, выше ее — свободны. Но граница Ферми в металле I лежит выше относительно нулевого уровня OX, нежели граница Ферми в металле II относительно того же уровня (рис. 239). Поэтому электроны

с верхних уровней металла I могут переходить сквозь потенциальный барьер, разделяющий оба металла (туннельным переходом), на свободные уровни металла II. Но электроны металла II не могут переходить в металл I, так как все уровни этого последнего, лежащие на одной высоте с ζ_2 и ниже ее в металле I, заняты парами электронов. Поэтому металл II будет заряжаться отрицательно, а металл I — положительно. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока критические уровни обоих металлов не сравняются. При этом между обоими металлами установится внешняя разность потенциалов, равная разности их работ выхода.

В этом можно убедиться из следующих соображений. Пусть мы имеем два соприкасающихся металла I и II с работами выхода w_1 и w_2, причем $w_1 < w_2$. Рассмотрим точку A, расположенную в вакууме вблизи поверхности металла I, и точку B — вблизи поверхности металла II (рис. 240). При переходе электрона из точки A внутрь металла I на уровень его границы Ферми освободится работа w_1; при переходе из точки B внутрь металла II на уровень его границы Ферми освободится работа w_2. Но граница Ферми в обоих соприкасающихся металлах, по сказанному, устанавливается на одной высоте. Работа же выхода, характерная для каждого металла, не зависит от того, что он находится в соприкосновении с другим металлом. Если поэтому $w_2 > w_1$, то при одинаковой высоте границы Ферми это может быть только в том случае, если потенциал в точке B выше потенциала в точке A как раз на величину разности $w_2 - w_1$.

Рис. 240.

§ 158. Линейный гармонический осциллятор

Одной из важных моделей, используемых в атомной физике, является линейный гармонический осциллятор. В предыдущем мы уже неоднократно пользовались этой моделью. Потенциальная энергия гармонического осциллятора, как мы знаем, равна

$$U = \frac{fx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}, \tag{158.1}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}}$ — частота колебаний осциллятора, вычисляемая по классической механике. Соответствующая потенциальная кривая есть парабола, изображенная на рис. 241. Легко видеть, что эта потенциальная кривая образует нечто вроде ящика с отражающими стенками, наподобие рассмотренного в § 156.

Макроскопический осциллятор, имеющий энергию E, колеблется между «стенками» туда и сюда, оставаясь в пределах отрезка x_1x_2, т. е. не проникая правее x_2 и левее x_1. Для решения задачи о микроскопическом осцилляторе надо рассмотреть стоячие волны, возникающие внутри такого потенциального ящика; в принципе процедура совершенно аналогична отысканию собственных колебаний струны. Однако здесь имеется особенность, из-за которой математически задача довольно сильно осложняется; в пределах ящика потенциальная энергия не имеет всюду постоянного значения, но изменяется по параболическому закону; поэтому длина волны $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E-U)}}$ не остается одной и той же в разных местах ящика, но увеличивается по краям его и уменьшается посредине.

Рис. 241. Потенциальная кривая линейного гармонического осциллятора.

Уравнение Шрёдингера для задачи о гармоническом осцилляторе имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0, \tag{158.2}$$

причем функция ψ должна удовлетворять требованию при $x \to \pm\infty$ $\psi(x) = 0$ и всем остальным стандартным условиям (§ 152).

Для сокращения записи введем обозначения

$$\frac{2m}{\hbar^2}E = \lambda, \quad \frac{m\omega_0}{\hbar} = \alpha; \tag{158.3}$$

уравнение Шрёдингера при этом перепишется так:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\,\psi = 0. \tag{158.4}$$

Для интегрирования (158.4) рассмотрим сначала предельный случай, когда x очень велико, так что $\alpha x \gg \lambda$. Тогда в (158.4) можно отбросить λ как величину, малую по сравнению с α^2x^2, и мы получаем

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2 x^2 \psi = 0. \tag{158.5}$$

При $x \gg 1$ это уравнение с достаточной точностью удовлетворяется решением

$$\psi = e^{\pm \alpha x^2/2}. \tag{158.6}$$

В самом деле, имеем,

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \alpha x e^{\pm \alpha x^2/2}, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2 x^2 e^{\pm \alpha x^2/2} \pm \alpha e^{\pm \alpha x^2/2}.$$

Но при $x \gg 1$ второй член в правой части последнего равенства несущественен по сравнению с первым и, следовательно, уравнение (158.5) асимптотически удовлетворяется решением (158.6). Из двух возможных знаков в этом решении здесь следует взять знак минус

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2},$$

так как решение со знаком плюс безгранично возрастает при $x \to \infty$, что противоречит естественным условиям, накладываемым на функцию ψ (§ 152).

Принимая во внимание рассмотренный предельный случай, будем искать решение (149.4) в виде

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x), \tag{158.7}$$

где $f(x)$ — некоторая, пока неизвестная функция, которая должна быть подобрана так, чтобы (158.7) удовлетворяло уравнению (158.4). Подставим решение (158.7) в (158.4), найдя для этого прежде всего производные

$$\frac{d\psi}{dx} = \left(-\alpha x f + \frac{df}{dx}\right)e^{-\alpha x^2/2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left(-\alpha f - 2\alpha x \frac{df}{dx} + \alpha^2 x^2 f + \frac{d^2 f}{dx^2}\right)e^{-\alpha x^2/2}.$$

Произведя подстановку в (158.4), получим после простых преобразований и сокращения на $e^{-\alpha x^2/2}$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2\alpha x \frac{df}{dx} + (\lambda - \alpha) f = 0. \tag{158.8}$$

Это уравнение мы еще преобразуем, введя вместо x новую независимую переменную ξ

$$\xi = \sqrt{\alpha} \cdot x; \tag{158.9}$$

ξ есть безразмерное число, так как α имеет размерность [$см^{-2}$] [в чем легко убедиться непосредственно из выражения α (158.3)]. Имеем теперь

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\alpha}\frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\sqrt{\alpha}\frac{d}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \alpha\frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Уравнение (158.8) после замены переменной и сокращения на α приобретает вид

$$\frac{d^2 H}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dH}{d\xi} + \left(\frac{\lambda}{\alpha} - 1\right)H = 0, \tag{158.10}$$

где $H(\xi)$ — функция, которая получается после замены в $f(x)$ независимой переменной x на ξ. Будем искать $H(\xi)$ в виде степенного ряда

$$H(\xi)=a_\nu\xi^\nu+a_{\nu+1}\xi^{\nu+1}+a_{\nu+2}\xi^{\nu+2}+\ldots=\sum_{k=\nu}^{\infty}a_k\xi^k. \quad (158.11)$$

Для того чтобы гарантировать конечность решения, мы начинаем ряд с некоторой степени ν и только в последующем определяем это ν так, чтобы функция $H(\xi)$ нигде не обращалась в бесконечность. Выпишем производные от $H(\xi)$:

$$\frac{dH}{d\xi}=\nu a_\nu\xi^{\nu-1}+(\nu+1)\,a_{\nu+1}\xi^\nu+(\nu+2)\,a_{\nu+2}\xi^{\nu+1}+\ldots,$$

$$\frac{d^2H}{d\xi^2}=\nu(\nu-1)\,a_\nu\xi^{\nu-2}+(\nu+1)\,\nu a_{\nu+1}\xi^{\nu-1}+$$
$$+(\nu+2)(\nu+1)\,a_{\nu+2}\xi^\nu+\ldots$$

Подставляя это в (158.10), получим после простых преобразований

$$\nu(\nu-1)\,a_\nu\xi^{\nu-2}+(\nu+1)\,\nu a_{\nu+1}\xi^{\nu-1}+$$
$$+(\nu+2)(\nu+1)\,a_{\nu+2}\xi^\nu+\ldots=\left[2\nu-\left(\frac{\lambda}{a}-1\right)\right]a_\nu\xi^\nu+\ldots$$

Так как это равенство должно иметь место тождественно, то коэффициенты при одинаковых степенях ξ слева и справа должны быть равны друг другу. Низший член слева есть $\nu(\nu-1)\,a_\nu\xi^{\nu-2}$; его коэффициент должен быть равен нулю, так как справа не имеется члена с такой степенью ξ. Это дает $\nu(\nu-1)=0$, откуда $\nu=0$ или $\nu=1$. Приравнивая нулю коэффициент при следующем члене, получаем $\nu=0$ или -1. Первое решение не дает ничего нового, второе же непригодно, так как ряд, начинающийся членом с ξ^{-1}, обращается в бесконечность при $\xi=0$.

Сравнивая коэффициенты при каком-нибудь члене, содержащем ξ^i, находим

$$(i+1)(i+2)\,a_{i+2}=\left[2i-\left(\frac{\lambda}{a}-1\right)\right]a_i,$$

откуда

$$a_{i+2}=\frac{2i+1-\dfrac{\lambda}{a}}{(i+1)(i+2)}\,a_i. \quad (158.12)$$

Эта формула (рекуррентная формула) позволяет последовательно вычислять все члены ряда через один. Так как ряд может начинаться либо со степени $\nu=0$, либо со степени $\nu=1$,

то рекуррентная формула (158.12) дает два ряда, из которых один состоит только из четных членов:

$$a_0+a_2\xi^2+a_4\xi^4+\ldots, \quad (158.13)$$

а другой — только из нечетных:

$$a_1\xi+a_3\xi^3+a_5\xi^5+\ldots \quad (158.14)$$

Эти ряды представляют частные решения уравнения (158.10).

Исследуем теперь поведение полученных рядов при больших значениях ξ. Возьмем любой из них, например (158.13), и покажем, что при достаточно большом ξ он ведет себя, как e^{ξ^2}. Для этого мы сравним ряд (158.13) с рядом для e^{ξ^2}. Известно, что

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots$$

и, следовательно,

$$e^{\xi^2}=1+\frac{\xi^2}{1!}+\frac{\xi^4}{2!}+\frac{\xi^6}{3!}+\ldots+\frac{\xi^\tau}{\left(\frac{\tau}{2}\right)!}+\frac{\xi^{\tau+2}}{\left(\frac{\tau}{2}+1\right)!}+\ldots$$

При достаточно большом ξ первые члены этой суммы не имеют существенного значения по сравнению с высшими. Обозначим коэффициенты при ξ^τ и $\xi^{\tau+2}$ через b_τ и $b_{\tau+2}$; отношение их

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{(\tau/2)!}{(\tau/2+1)!}=\frac{1}{\tau/2+1}. \quad (158.15)$$

При достаточно большом τ в знаменателе (158.15) можно отбросить 1:

$$\frac{b_{\tau+2}}{b_\tau}=\frac{1}{\tau/2}=\frac{2}{\tau}. \quad (158.16)$$

Для отношения соответствующих членов ряда (158.13) рекуррентная формула дает

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau}=\frac{2\tau+1-\lambda/a}{(\tau+2)(\tau+1)};$$

при достаточно большом τ

$$\frac{a_{\tau+2}}{a_\tau}=\frac{2}{\tau}. \quad (158.17)$$

Сравнивая (158.16) и (158.17), мы видим, что

$$\frac{b_{\tau+2}}{a_{\tau+2}}=\frac{b_\tau}{a_\tau}=\ldots=\text{const},$$

т. е. высшие члены нашего ряда отличаются от высших членов ряда e^{ξ^2} лишь постоянным множителем, а это значит, что $H(\xi)$

при больших ξ возрастает, как e^{ξ^2}, а следовательно, принимая во внимание (158.7) и (158.9),

$$\psi = e^{-\alpha x^2/2} f(x) = e^{-\xi^2/2} H(\xi) \to e^{\xi^2/2},$$

т. е. при $\xi \to \infty$ и $\psi \to \infty$.

Отсюда видно, что решения, представляемые степенными рядами с рекуррентной формулой (158.12), вообще говоря, не удовлетворяют краевым условиям. Однако легко заметить, что при избранных значениях λ/α наши ряды обрываются на некотором члене, т. е. обращаются в полиномы. Так, например, при $\lambda/\alpha = 5$ ряд (158.13) состоит только из одного члена a_0, так как из (158.12) видно, что при $\lambda/\alpha = 5$ коэффициент $a_2 = 0$, а значит, и все последующие коэффициенты будут нулями. При $\lambda/\alpha = 9, 13, \ldots$ тот же ряд будет обрываться на втором, третьем и т. д. членах.

Но если $H(\xi)$ сводится к полиному, то присутствие экспоненциального множителя обеспечит обращение ψ в нуль при $\xi \to \infty$. Итак, решения, удовлетворяющие стандартным требованиям, получаются лишь в тех случаях, когда ряды (158.13) и (158.14) обращаются в полиномы. На основании рекуррентной формулы (158.12) мы получим полином, заканчивающийся членом степени n, если

$$\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1.$$

Подставляя сюда значения λ и α из (149.3), получаем

$$\frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{m\omega_0}{\hbar}(2n+1),$$

откуда

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{158.18}$$

Мы видим, таким образом, что из функций ψ, удовлетворяющих волновому уравнению осциллятора, удовлетворяют вместе с тем и краевым условиям только те, которые соответствуют дискретному ряду значений энергии осциллятора (158.18). Обратим внимание на то, что эта формула несколько отличается от формулы старой квантовой теории

$$E_n = n\hbar\omega_0.$$

Именно, согласно формуле (158.18) квантовое число линейного осциллятора всегда выражается «половинчатым» числом $n + 1/2$. Вследствие этого в низшем квантовом состоянии (при $n = 0$) энергия осциллятора не обращается в нуль, но равна

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}. \tag{158.19}$$

Это значение E_0 называется «нулевой энергией». Происхождение этого названия связано с тем, что энергия $^1/_2\hbar\omega_0$ не исчезает также и при абсолютном нуле температуры. Ее смысл и значение будут выяснены в следующих параграфах.

В § 156 мы видели, что квантование энергии частицы в потенциальном ящике получается в результате применения краевых условий, аналогичных краевым условиям в задаче о струне. В задаче о линейном осцилляторе, рассмотренной в настоящем параграфе, квантование оказалось следствием естественного условия конечности функции во всем пространстве. Возможность получения квантования в качестве простого следствия подобных естественных условий является той замечательной особенностью уравнения Шрёдингера, о которой упоминалось в § 158.

§ 159. Нормальное и возбужденные состояния линейного осциллятора

Каждому собственному значению энергии линейного осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

соответствует своя собственная функция

$$\psi = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

где N_n — постоянный нормирующий множитель, а $H_n(\xi)$ — полином степени n, коэффициенты которого вычисляются при помощи рекуррентной формулы (158.12) при $\frac{\lambda}{\alpha} = 2n + 1$. Найдем несколько первых полиномов $H_n(\xi)$. Коэффициент при ξ^n выразится при помощи (158.12) так:

$$a_n = \frac{[2(n-2)+1] - (2n+1)}{(n-1)n} a_{n-2} = -\frac{1 \cdot 2^2}{n(n-1)} a_{n-2},$$

откуда

$$a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2} a_n;$$

далее легко получим

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} a_n \text{ и т. д.}$$

Искомый полином будет поэтому таков:

$$H_n(\xi) = a_n\left[\xi^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2^2}\xi^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}\xi^{n-4} - \ldots\right]. \tag{159.1}$$

Полагая в (159.1) $a_n = 2^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, получим следующие полиномы:

$$\left.\begin{aligned} &H_0(\xi) = 1, && H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi, \\ &H_1(\xi) = 2\xi, && H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12, \\ &H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2, && H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi \text{ и т. д.} \end{aligned}\right\} \quad (159.2)$$

Это — так называемые полиномы Чебышева — Эрмита, которые можно представить в следующем, легко запоминаемом виде:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n (e^{-\xi^2})}{d\xi^n}. \quad (159.2')$$

В самом деле, например, имеем при $n = 1$

$$H_1 = -e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (e^{-\xi^2}) = 2\xi,$$

при $n = 2$

$$H_2 = e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi^2} (e^{-\xi^2}) = e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (-2\xi e^{-\xi^2}) = 4\xi^2 - 2,$$

и т. д.

Для вычисления различных полиномов удобно пользоваться рекуррентной формулой, позволяющей по двум полиномам вычислить третий. Эта формула получается следующим образом. По определению имеем

$$H_{n+1}(\xi) = (-1)^{n+1} e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = -(-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}). \quad (159.3)$$

Далее,

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = \frac{d^n}{d\xi^n} \left(\frac{de^{-\xi^2}}{d\xi} \right) = \frac{d^n}{d\xi^n} (-2\xi e^{-\xi^2}) = -2 \frac{d^n}{d\xi^n} (\xi e^{-\xi^2}).$$

Воспользуемся теперь известной формулой для производной n-го порядка произведения двух функций uv

$$\frac{d^n}{dx^n} (uv) = u \frac{d^n v}{dx^n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \ldots$$

С помощью этой формулы получаем

$$\frac{d^n}{d\xi^n} (\xi e^{-\xi^2}) = \xi \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}),$$

вследствие чего

$$\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} (e^{-\xi^2}) = -2 \left[\xi \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + n \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}) \right],$$

и по (159.3)

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) + 2n (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-2}} (e^{-\xi^2}) =$$

$$= 2\xi (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}) - 2n (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2}),$$

или, по общему определению (159.2′),

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi). \quad (159.4)$$

Это и есть искомая рекуррентная формула, связывающая между собой H_{n+1}, H_n и H_{n-1}. Легко проверить, что полиномы (159.2) получаются из H_0 и H_1 по этой формуле. Ее можно применить для вычисления полинома любого порядка по двум предшествующим.

Собственные функции линейного осциллятора обладают следующим важным свойством: они ортогональны в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. *)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x)\, dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n.$$

В случае $m = n$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\, dx$$

имеет конечное значение и этим можно воспользоваться для вычисления нормирующего множителя N_n. Условие нормирования (см. § 152) состоит в том, что

$$N_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\, dx = 1.$$

Подставляя сюда выражение функции ψ_n и производя вычисления **), найдем

$$N_n^2 \frac{2^n n! \pi^{1/2}}{\alpha^{1/2}} = 1,$$

откуда

$$N_n = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2} n!\, 2^n}}.$$

*) Доказательство см. в приложении V в конце книги.
**) См. приложение V в конце книги.

Для нулевого состояния $n = 0$ имеем

$$N_0 = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}}.$$

Таким образом, собственная функция нулевого состояния есть

$$\psi_0(x) = N_0 e^{-\xi^2/2} H_0(\xi) = \sqrt{\frac{\alpha^{1/2}}{\pi^{1/2}}} e^{-\alpha x^2/2},$$

а соответствующая плотность вероятности

$$\psi_0^2(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}.$$

Кривая, изображающая $\psi_0^2(x)$, — типа гауссовой кривой ошибок (рис. 242, б). Эта кривая показывает, что, выполнив большое

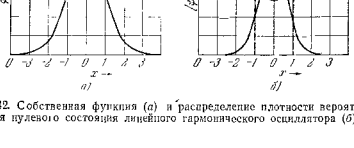


Рис. 242. Собственная функция (а) и распределение плотности вероятности для нулевого состояния линейного гармонического осциллятора (б).

число определений положения частицы в нулевом состоянии осциллятора, мы чаще всего будем находить ее около положения равновесия ($x = 0$). Кроме того, однако, имеется конечная вероятность найти частицу не только в пределах всего отрезка, равного удвоенной амплитуде колебаний классического осциллятора, но также и в «запрещенной» области (вправо и влево от вертикальных пунктирных прямых), где потенциальная энергия частицы больше полной (см. рис. 242).

Интересно сравнить с этой кривой соответствующую кривую распределения вероятности найти макроскопическую частицу, совершающую гармоническое колебание на участке пути dx, в каком-нибудь месте пути. Представим себе, например, что мы имеем маятник, совершающий малые колебания, и будем кинематографировать положения шарика маятника. Не может быть

никакого сомнения в том, что в наибольшем числе кадров мы найдем шарик где-нибудь около одного из крайних положений, так как в этих местах скорость его будет близка к нулю; меньше всего окажется кадров, где шарик будет находиться около положения равновесия, потому что именно в этом месте он имеет наибольшую скорость. Очевидно, что вероятность найти шарик в определенном месте обратно пропорциональна его скорости в этом месте или, что то же, пропорциональна обратной величине квадратного корня из кинетической энергии, т. е. $1/\sqrt{E - U}$, где E — полная энергия и U — потенциальная энергия. Соответствующая кривая представлена пунктиром на рис. 242, б; она существенно отличается от кривой для квантового осциллятора.

Рассмотрим теперь несколько подробнее различные состояния квантового осциллятора и начнем с нулевого состояния. Особенность этого состояния заключается в том, что энергия осциллятора равна не нулю, а $^1/_2\hbar\omega_0$. Именно в соответствии с этим квантовый осциллятор при абсолютном нуле не находится в покое: мы можем отыскать его с определенной вероятностью в любом месте отрезка, равного удвоенной амплитуде колебаний классического осциллятора, и даже за пределами этого отрезка. Нетрудно видеть, что этот факт является неизбежным следствием соотношений неопределенности. В самом деле, если бы квазиупруго связанная частица при абсолютном нуле покоилась, т. е. имела определенную координату, то это означало бы, что существует состояние, в котором и координата частицы и ее импульс определенны (импульс равен нулю). Но это противоречит соотношению неопределенности. Более того, мы сейчас покажем, что нулевая энергия $^1/_2\hbar\omega_0$ и есть как раз та минимальная энергия, которой по крайней мере должен обладать осциллятор в нулевом состоянии, чтобы соотношения неопределенности были удовлетворены.

За неопределенность положения частицы примем среднюю квадратичную ошибку, т. е. положительный квадратный корень из средней квадратичной флуктуации:

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{\varepsilon^2}}.$$

Но $\overline{\varepsilon^2} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ и так как без ограничения общности можно положить $\overline{x} = 0$ (это означает только, что начало координат следует поместить в точке, совпадающей с положением равновесия), то

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

Итак,

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\overline{a^2 \cos^2 \omega_0 t}} = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}. \qquad (159.5)$$

где a — амплитуда колебаний классического осциллятора. Легко видеть, однако, что так как $^1/_2 ma^2\omega_0^2 = E_0$ (см. § 46), то $a^2 = \frac{2E_0}{m\omega_0^2} = \frac{2E_0}{f}$, а потому

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{E_0}{f}}. \tag{159.6}$$

Далее, аналогично имеем

$$\overline{\Delta p} = \sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{m^2a^2\omega_0^2\,\overline{\sin^2\omega_0 t}} = \sqrt{\frac{1}{2}m^2a^2\omega_0^2} = \sqrt{mE_0}. \tag{159.7}$$

Итак,

$$\overline{\Delta x}\,\overline{\Delta p} = E_0\sqrt{\frac{m}{f}} = \frac{E_0}{\omega_0}. \tag{159.8}$$

Но согласно соотношениям неопределенности $\Delta x\,\Delta p \approx \hbar$. Точная величина нижнего предела произведения средних квадратичных ошибок есть $\hbar/2$, так что

$$\Delta x\,\Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{159.9}$$

Беря здесь знак равенства (т. е. выбирая нижний предел произведения ошибок) и сопоставляя (159.8) со (159.9), находим

$$\frac{E_0}{\omega_0} = \frac{\hbar}{2}, \quad E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}.$$

Итак, нулевая энергия осциллятора есть действительно минимальная энергия, которой осциллятор должен обладать в нулевом состоянии для соблюдения соотношений неопределенности.

Следует еще объяснить, почему кривая распределения вероятности положения дает не равные нулю значения этой вероятности за пределами классической траектории осциллятора, т. е. в областях, где полная энергия меньше его потенциальной. Поскольку, однако, потенциальная кривая осциллятора представляет собою потенциальный ящик (см. начало § 158) и колебания частицы можно рассматривать как «отражения» от стенок этого ящика, объяснение здесь такое же, как и в случае отражения от прямоугольного барьера (§ 153).

Обратимся теперь к возбужденным состояниям. На рис. 243 представлен ход собственных функций для нескольких значений n. Если присоединить еще периодический временной множитель $e^{i\omega t}$, то получится нечто вроде стоячих волн. При $n = 0$ (рис. 243) мы имели два узла и максимум («пучность») посредине; разумеется, узлы получаются не на стенках потенциального ящика, а на бесконечности. При $n = 1$ (рис. 243) мы имеем два узла на бесконечности и один узел в середине отрезка, соответствующего области колебаний классического осциллятора; при $n = 2$, кроме двух узлов на бесконечности, получается еще

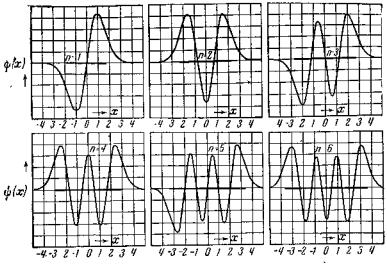


Рис. 243. Собственные функции линейного гармонического осциллятора для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, (по Полингу и Вильсону).

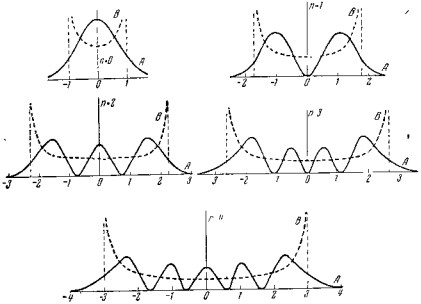


Рис. 244. Распределение плотности вероятности для $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (по Полингу и Вильсону).

два узла и т. д. При рассматривании рисунков легко заметить, что у середины жирного отрезка, изображающего классическую траекторию, расстояние между узлами меньше, чем у краев. Это соответствует тому, что длина волны де-Бройля $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E-U)}}$ около положения равновесия, где U проходит через нулевое значение, должна быть наименьшей.

На рис. 244 приведены кривые распределения плотности вероятности $|\psi|^2$ для различных состояний квантового осциллятора (при $n = 0, 1, 2, 3, 4$) и одновременно пунктиром — кривая для макроскопического осциллятора (шарик маятника). Мы видим, что при малых квантовых числах n квантовый осциллятор ведет себя совершенно иначе, нежели классический. Наоборот, чем выше n, тем в большей степени квантовое распределение вероятности приближается к классическому. Это особенно ясно видно на рис. 245, где дано распределение для $n = 10$. Если

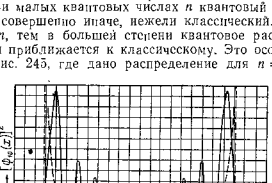


Рис. 245. Распределение плотности вероятности для $n = 10$ (по Полингу и Вильсону).

провести сплошную кривую через максимумы квантового распределения, то эта кривая будет приблизительно параллельна классической кривой. При дальнейшем увеличении n максимумы сближаются все теснее и ход кривой вероятности все в большей степени приближается к классическому, как того и требует принцип соответствия.

Упражнения. 1. Вычислить нулевую энергию осциллятора, классическая частота колебаний которого равна 10^{14} *сек*$^{-1}$. Выразить ее в электронвольтах. В какой части спектра лежит длина волны, соответствующая этой частоте?

2. Осциллятор состоит из частицы с массой 1 *г*, связанной с положением равновесия пружиной с $f = 10^5$ *дин·см*$^{-1}$. Вычислить нулевую энергию этого осциллятора.

3. Вычислить квантовое число осциллятора предыдущей задачи, если его энергия равна kT, где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ *эрг·град*$^{-1}$ — постоянная Больцмана, а $T = 300°$ K. Убедиться в том, что при этом квантовом числе энергия осциллятора меняется практически непрерывно (вычислить изменение энергии $\Delta n = 1$)

§ 160. Связанные осцилляторы. Силы Ван-дер-Ваальса

В § 159 мы видели, что решение задачи о линейном осцилляторе в квантовой механике приводит к выводу, что даже при абсолютном нуле должна существовать «нулевая энергия», равная $\hbar\omega_0/2$. Как ни своеобразен этот вывод, опыт показывает, что полученная нами формула для энергии линейного осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0$$

лучше соответствует фактам, чем прежняя «полуклассическая» формула $E_n = n\hbar\omega_0$, которой пользовался Планк. Об этом свидетельствует, например, исследование молекулярных спектров, но, быть может, особенно интересно то, что существование нулевой энергии играет неожиданно важную роль в объяснении некоторых давно известных, но не поддававшихся объяснению явлений. Сюда относятся так называемые силы молекулярного сцепления, которые привлекаются для объяснения поверхностного натяжения, адсорбции и других молекулярных явлений. Так как эти силы проявляются уже в ван-дер-ваальсовом уравнении состояния реальных газов

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

то их называют силами Ван-дер-Ваальса.

Не было недостатка в попытках объяснить эти силы в рамках классической физики, причем во всех объяснениях им, конечно, приписывалось чисто электрическое происхождение. Поскольку ван-дер-ваальсовы силы проявляются во взаимодействиях между нейтральными атомами или молекулами, существование их можно понять только в том случае, если считать, что эти взаимодействующие нейтральные системы являются электрическими диполями или — в случае более симметричных систем — квадруполями. Силы взаимодействия между диполями убывают обратно пропорционально четвертой степени расстояния, а силы взаимодействия между квадруполями — обратно пропорционально шестой степени расстояния. Это качественно

согласуется с тем давно известным фактом, что и силы молекулярного взаимодействия чрезвычайно быстро падают с расстоянием (вспомним о радиусах «сферы действия», которые привлекаются при элементарном объяснении молекулярных сил).

Однако попытки детального и, в особенности, количественного объяснения молекулярных взаимодействий в рамках классической физики встречали непреодолимые препятствия. Во-первых, совершенно загадочным представлялось существование молекулярных взаимодействий у благородных газов. Атомы этих газов обладают высокой электрической симметрией, ввиду чего невозможно приписывать им в статическом состоянии постоянный дипольный или даже квадрупольный момент. А между тем все они могут быть сгущены в жидкости и, следовательно, определенно обнаруживают существование молекулярных сил. Далее, попытки построения количественной теории даже для таких веществ, как галоидоводородные соединения HCl, HBr, HI, заведомо обладающих большим дипольным моментом, привели к неудовлетворительным результатам.

Затруднения устраняются, если кроме указанных чисто статических взаимодействий учесть также и взаимодействия, обусловленные быстрыми движениями электронов в молекуле.

Пусть мы имеем дас молекулы, у которых в *состоянии покоя* заряды распределены со сферической симметрией, так что молекулы между собою не взаимодействуют. Если сместить заряды из их положений равновесия, то молекула приобретает дипольный момент и взаимодействие становится возможным. Такое смещение на самом деле возникает вследствие не исчезающих ни при каких условиях нулевых колебаний с энергией $^1/_2\hbar\omega_0$. Но появление дипольного момента в одной молекуле вызывает в окружающем пространстве поле и индуцирует дипольный момент в другой. Эти быстро меняющиеся дипольные моменты находятся друг относительно друга в такой фазе, что в результате возникает притяжение. Таково качественное объяснение молекулярных сил. Оно, как видно, неизбежно связано с существованием нулевых колебаний, необходимость которых вытекает из соотношений неопределенности.

Покажем теперь, что эта простая картина позволяет сделать также количественный расчет и установить закон молекулярных взаимодействий. Для этого, однако, нам необходимо сначала вспомнить, как решается в классической механике задача о колебаниях двух взаимодействующих или иначе говоря, связанных осцилляторов.

Пусть мы имеем два электрических диполя, отстоящих друг от друга на расстоянии r и расположенных вдоль прямой (рис. 246). Масса, связанная с каждым из зарядов, пусть будет равна m, расстояние между противоположными зарядами в первом диполе пусть будет x_1, во втором x_2. Энергия взаимодействия диполей обусловлена притяжениями противоположных зарядов и отталкиваниями одноименных. По закону Кулона она равна

$$U_{12} = -\frac{e^2}{r-x_1} - \frac{e^2}{r+x_2} + \frac{e^2}{r+x_2-x_1} + \frac{e^2}{r} =$$
$$= \frac{e^2}{r}\left(-\frac{1}{1-\frac{x_1}{r}} - \frac{1}{1+\frac{x_2}{r}} + \frac{1}{1+\frac{x_2-x_1}{r}} + 1\right).$$

Так как r всегда значительно больше x_2 и x_1, то мы можем разложить дроби, стоящие в скобках, в ряды по общей формуле

$$\frac{1}{1+\frac{a}{r}} = \left(1+\frac{a}{r}\right)^{-1} = 1 - \frac{a}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \ldots$$

Если ограничиться в каждом из этих разложений первыми тремя членами, то после простых вычислений получим

$$U_{12} = -\frac{2e^2}{r^3}x_1x_2. \tag{160.1}$$

Это и есть потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием диполей.

Пусть теперь в наших диполях возникают колебания; при небольших смещениях эти колебания будут гармоническими. Так как массы зарядов и силы, связывающие их, в каждом диполе одинаковы, то в *отсутствии связи между диполями* (например, в случае очень больших расстояний между ними) оба они будут совершать простые гармонические колебания *с одной и той же частотой* ω_0:

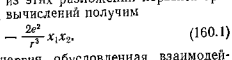


Рис. 246.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{f}{m}},$$

где f — постоянная квазиупругой силы, одинаковая у обоих диполей.

Примем теперь во внимание связь между осцилляторами. Смещение заряда, скажем, в первом осцилляторе вызывает в нем квазиупругую силу $-fx_1$, смещение заряда во втором осцилляторе вызывает в нем силу $-fx_2$. Но вследствие связи между осцилляторами изменение дипольного момента второго осциллятора вызывает добавочную силу в первом, и наоборот. Эти добавочные силы F_{12} и F_{21} мы найдем, зная энергию взаимодействия U_{12}: именно,

$$F_{12} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_1} = \frac{2e^2}{r^3}x_2, \quad F_{21} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial x_2} = \frac{2e^2}{r^3}x_1.$$

находим

$$a = a\cos\delta_1 + b\cos\delta_2, \quad 0 = a\omega_+ \sin\delta_1 + b\omega_- \sin\delta_2,$$
$$0 = a\cos\delta_1 - b\cos\delta_2, \quad 0 = a\omega_+ \sin\delta_1 - b\omega_- \sin\delta_2.$$

Второе и четвертое уравнения дают

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Подставляя это в первое и третье уравнения, получим

$$a = b = {}^1/_2 a.$$

Итак, при заданных начальных условиях колебания наших осцилляторов представляются формулами:

$$x_1 = \frac{A}{2}(\cos\omega_- t + \cos\omega_+ t) = A\cos\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\cos\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t,$$

$$x_2 = \frac{A}{2}(\cos\omega_- t - \cos\omega_+ t) = A\sin\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\sin\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t.$$

В каждом из этих выражений мы имеем медленно [с частотой $(\omega_- - \omega_+)/2$] меняющийся множитель, представляющий модулированную амплитуду, и быстро [с частотой $(\omega_- + \omega_+)/2$] меняющийся фазовый множитель. Кроме того, видно, что колебания x_1 и x_2 смещены друг относительно друга по фазе на $\pi/2$,

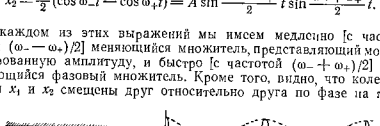


Рис. 249. Флуктуации энергии в связанных маятниках.

так что, когда первый осциллятор колеблется с максимальной амплитудой, второй находится в покое. Постепенно амплитуда первого уменьшается, а амплитуда второго увеличивается, и через четверть периода модуляций роли осцилляторов меняются, после чего весь процесс идет в обратном направлении (рис. 249).

Эти «странствования» или флуктуации энергии нагляднее всего наблюдаются в известном демонстрационном опыте с двумя связанными одинаковыми маятниками.

Вычислим теперь полную энергию наших связанных осцилляторов. Потенциальная энергия отдельного осциллятора равна ${}^1/_2 m\omega_0^2 x^2$, а потенциальная энергия системы связанных осцилляторов, как мы видели в начале этого параграфа, содержит, кроме суммы потенциальных энергий обоих осцилляторов, еще член $-(2e^2/r^3)x_1x_2$, соответствующий энергии их взаимодействия.

Мы имеем, таким образом,

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3}x_1x_2,$$

кинетическая же энергия равна

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

Следовательно,

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3}x_1x_2.$$

Если бы взаимодействием осцилляторов можно было пренебречь, отбросив последний член, то полная энергия системы была бы просто равна сумме энергий обоих осцилляторов, совершающих колебания со своей неизменной частотой ω_0. Но такое приближение годится только в том случае, когда осцилляторы находятся на большом расстоянии друг от друга (r велико). Мы можем, однако, представить полную энергию $T + U$ в таком виде, чтобы ее можно было рассматривать как сумму энергий осцилляторов, колеблющихся с *измененными частотами*.

Для того чтобы в этом убедиться, введем вместо x_1 и x_2 новые координаты ξ и η, связанные со старыми при помощи соотношений

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

Отсюда, обратно

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$$

и, далее,

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1x_2 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2).$$

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем выражение для полной энергии:

$$T + U = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\xi^2 + \eta^2) - \frac{e^2}{r^3}(\xi^2 - \eta^2) =$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1 - \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1 + \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\eta^2$$

находим

$$a = a\cos\delta_1 + b\cos\delta_2, \quad 0 = a\omega_+\sin\delta_1 + b\omega_-\sin\delta_2,$$
$$0 = a\cos\delta_1 - b\cos\delta_2, \quad 0 = a\omega_+\sin\delta_1 - b\omega_-\sin\delta_2.$$

Второе и четвертое уравнения дают

$$\delta_1 = \delta_2 = 0.$$

Подставляя это в первое и третье уравнения, получим

$$a = b = {}^1/_2 a.$$

Итак, при заданных начальных условиях колебания наших осцилляторов представляются формулами:

$$x_1 = \frac{A}{2}(\cos\omega_- t + \cos\omega_+ t) = A\cos\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\cos\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t,$$
$$x_2 = \frac{A}{2}(\cos\omega_- t - \cos\omega_+ t) = A\sin\frac{\omega_- - \omega_+}{2}t\sin\frac{\omega_- + \omega_+}{2}t.$$

В каждом из этих выражений мы имеем медленно [с частотой $(\omega_- - \omega_+)/2$] меняющийся множитель, представляющий модулированную амплитуду, и быстро [с частотой $(\omega_- + \omega_+)/2$] меняющийся фазовый множитель. Кроме того, видно, что колебания x_1 и x_2 смещены друг относительно друга по фазе на $\pi/2$,

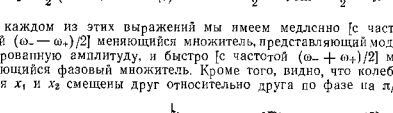


Рис. 249. Флуктуации энергии в связанных маятниках.

так что, когда первый осциллятор колеблется с максимальной амплитудой, второй находится в покое. Постепенно амплитуда первого уменьшается, а амплитуда второго увеличивается, и через четверть периода модуляций роли осцилляторов меняются, после чего весь процесс идет в обратном направлении (рис. 249).

Эти «странствования» или флуктуации энергии нагляднее всего наблюдаются в известном демонстрационном опыте с двумя связанными одинаковыми маятниками.

Вычислим теперь полную энергию наших связанных осцилляторов. Потенциальная энергия отдельного осциллятора равна $\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$, а потенциальная энергия системы связанных осцилляторов, как мы видели в начале этого параграфа, содержит, кроме суммы потенциальных энергий обоих осцилляторов, еще член $-\left(2e^2/r^3\right)x_1x_2$, соответствующий энергии их взаимодействия. Мы имеем, таким образом,

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3}x_1x_2,$$

кинетическая же энергия равна

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2.$$

Следовательно,

$$T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2x_2^2 - \frac{2e^2}{r^3}x_1x_2.$$

Если бы взаимодействием осцилляторов можно было пренебречь, отбросив последний член, то полная энергия системы была бы просто равна сумме энергий обоих осцилляторов, совершающих колебания со своей неизменной частотой ω_0. Но такое приближение годится только в том случае, когда осцилляторы находятся на большом расстоянии друг от друга (r велико). Мы можем, однако, представить полную энергию $T + U$ в таком виде, чтобы ее можно было рассматривать как сумму энергий осцилляторов, колеблющихся с *измененными частотами*.

Для того чтобы в этом убедиться, введем вместо x_1 и x_2 новые координаты ξ и η, связанные со старыми при помощи соотношений

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2).$$

Отсюда, обратно

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$$

и далее,

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad x_1x_2 = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2).$$

Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем выражение для полной энергии:

$$T + U = \frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(\xi^2 + \eta^2) - \frac{e^2}{r^3}(\xi^2 - \eta^2) =$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1 - \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(1 + \frac{2e^2}{mr^3\omega_0^2}\right)\eta^2$$

или, принимая во внимание (160.4) и (160.1′),

$$T+U=\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2-\frac{1}{2}m\omega_+^2\xi^2+\frac{1}{2}m\dot{\eta}^2+\frac{1}{2}m\omega_-^2\eta^2. \qquad (160.5)$$

Мы видим, таким образом, что в этом преобразованном виде $T+U$ есть не что иное, как сумма энергий двух независимых осцилляторов, совершающих колебания с найденными ранее нормальными частотами ω_+ и ω_-!

Согласно полученному в § 158 результату энергия этих осцилляторов имеет квантованные значения:

$$E_{n_+}=\hbar\omega_+\left(n_++\frac{1}{2}\right), \quad E_{n_-}=\hbar\omega_-\left(n_-+\frac{1}{2}\right)$$

и, следовательно, полная энергия системы будет

$$E_{n_+}+E_{n_-}=\hbar\omega_+\left(n_++\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega_-\left(n_-+\frac{1}{2}\right). \qquad (160.6)$$

Вычислим теперь частоты ω_+ и ω_- с достаточным для нашей цели приближением.

Введя вместо k его выражение из (160.1′), получим

$$\omega_+=\omega_0\left(1-\frac{2e^2}{r^3f}\right)^{1/2}, \quad \omega_-=\omega_0\left(1+\frac{2e^2}{r^3f}\right)^{1/2} \quad (f=m\omega_0^2).$$

Теперь воспользуемся разложением в ряд

$$(1+\varepsilon)^{1/2}=1+\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon^2}{8}+\ldots$$

Мы получим

$$\omega_+=\omega_0\left(1-\frac{e^2}{r^3f}-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right), \quad \omega_-=\omega_0\left(1+\frac{e^2}{r^3f}-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right).$$

Подставляя это в (160.1), найдем

$$E=E_{n_+}+E_{n_-}=$$
$$=\hbar\omega_0\left[(n_++n_-+1)+\frac{e^2}{r^3f}(n_--n_+)-\frac{e^4}{2r^6f^2}(n_-+n_++1)\right]. \qquad (160.7)$$

В том случае, когда оба осциллятора находятся в основном состоянии, $n_+=n_-=0$ и, кроме того, второй член в квадратных скобках обращается в нуль *), мы получаем

$$E=\hbar\omega_0\left(1-\frac{e^4}{2r^6f^2}\right). \qquad (160.8)$$

*) Этот член представляет большой интерес в том случае, когда один из диполей находится в возбужденном состоянии, т. е. когда n_+ или $n_-\neq 0$. Однако на этом случае мы здесь останавливаться не будем.

Принимая во внимание, что сумма нулевых энергий обоих осцилляторов равна $^1/_2\hbar\omega_0+{}^1/_2\hbar\omega_0=\hbar\omega_0$, мы видим, что полная энергия системы меньше этой суммы на величину $\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2r^6}$. Величина $-\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2r^6}$ и есть энергия связи

$$W=-\frac{e^4\hbar\omega_0}{2f^2}\cdot\frac{1}{r^6}=-\frac{C}{r^6}, \qquad (160.9)$$

где C — некоторая константа. Отрицательный знак указывает на то, что связь заключается всегда в притяжении. Константу C для различных атомов можно вычислить из оптических данных и значений универсальных констант e и $\hbar$.

Таким образом, мы приобретаем возможность вычислять заранее энергию молекулярных взаимодействий. С другой стороны, мерой этой энергии может служить работа, которую нужно затратить, чтобы освободить атом или молекулу от ее связи в твердой кристаллической решетке, или, иначе, теплота возгонки (сублимации). Насколько хорошо совпадают между собой вычисленные при помощи формулы (160.9) и найденные на опыте величины теплоты сублимации (приведенные к абсолютному нулю), показывает приводимая таблица.

Вещество	Теплоты сублимации	
	вычисленные	наблюденные
Ne	0,47	0,58
N_2	1,64	1,86
Ar	2,08	2,03
CH_4	2,42	2,70

Возвращаясь к сказанному в начале этого параграфа, мы покажем, что возможность объяснения сил сцепления Ван-дер-Ваальса обусловлена появлением в формуле энергии осциллятора столь странной на первый взгляд нулевой энергии $^1/_2\hbar\omega_0$. В самом деле, если бы мы для окончательного расчета воспользовались полуклассической формулой Планка $E_n=n\hbar\omega_0$, то в формуле (160.7) выпали бы две единицы (в первых и последних круглых скобках). Поэтому в основном состоянии (при $n_+=n=0$) мы получили бы для энергии связи нуль. Это как раз соответствует тому факту, что покоящиеся осцилляторы согласно классической теории не могут взаимодействовать, если они в силу распределения зарядов не обладают заметным электрическим моментом (атомы благородных газов He, Ne, Ar!).

Таким образом, *появление сил молекулярных взаимодействий в нормальном состоянии связано с существованием нулевой энергии.*

§ 161. Частица в трехмерном потенциальном ящике

В задачах, с которыми мы имели дело до сих пор, функция ψ зависела только от одной координаты. В заключение этой главы мы рассмотрим простейший пример трехмерной задачи.

Пусть мы имеем трехмерный потенциальный ящик, т. е. ограниченную во всех направлениях область, внутри которой потенциальная энергия всюду равна нулю, но на границах которой она сразу возрастает до бесконечности и остается таковой во всем остальном пространстве. Положим, что область, где потенциальная энергия равна нулю, имеет форму параллелепипеда с ребрами l_1, l_2, l_3. Мы можем представить $U(x, y, z)$ как сумму трех слагаемых:

$$U(x, y, z) = U_x(x) + U_y(y) + U_z(z),$$

причем

$$\begin{array}{llll} \text{при} & 0 \leqslant x \leqslant l_1 & U_x = 0, & \text{при } x \leqslant 0 \text{ и } x \geqslant l_1 \quad U_x = \infty, \\ \text{»} & 0 \leqslant y \leqslant l_2 & U_y = 0, & \text{» } y \leqslant 0 \text{ и } y \geqslant l_2 \quad U_y = \infty, \\ \text{»} & 0 \leqslant z \leqslant l_3 & U_z = 0, & \text{» } z \leqslant 0 \text{ и } z \geqslant l_3 \quad U_z = \infty. \end{array}$$

Уравнение Шредингера мы напишем для этого случая в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_x - U_y - U_z) = 0. \quad (161.1)$$

Это — дифференциальное уравнение в частных производных. Метод решения, которым мы будем пользоваться здесь, состоит в том, что уравнение в частных производных стараются разделить на три обыкновенных уравнения. Возможность этого разделения в значительной степени связана с рациональным выбором системы координат, а выбор этот обычно подсказывается симметрией задачи. В данном случае разделение осуществляется очень просто.

Будем искать ψ в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты

$$\psi(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z). \quad (161.2)$$

Подставив решение (161.2) в уравнение (161.1), разделив обе части на XYZ, получим

$$\left(\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_x\right) + \left(\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_y\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_z\right) = -\frac{2m}{\hbar^2}E. \quad (161.3)$$

Здесь первая пара членов зависит только от x, вторая — только от y, третья — только от z, однако сумма их равняется постоянной. Это может быть лишь в том случае, когда каждая из ско-

бок в левой части сама равна какой-то постоянной. Итак,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_x = C_x,$$
$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_y = C_y, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U_z = C_z. \quad (161.4)$$

Мы получили три обыкновенных дифференциальных уравнения — разделение оказалось возможным. Очевидно, что

$$C_x + C_y + C_z = -\frac{2m}{\hbar^2}E.$$

Но вместо постоянных C_x, C_y, C_z удобно ввести другие: E_x, E_y, E_z, полагая, например, $C_x = -\frac{2m}{\hbar^2}E_x$. Тогда уравнения (161.4) можно будет переписать в виде

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E_x - U_x)X = 0 \text{ и т. д.} \quad (161.5)$$

Очевидно, что уравнение (161.5) совпадает с уравнением (156.1) задачи об одномерном потенциальном ящике. Краевые условия для обеих задач также одинаковы:

$$X(0) = X(l_1) = 0. \quad (161.6)$$

По аналогии с решениями § 156 мы можем сразу написать решения, удовлетворяющие уравнению (161.5) и краевым условиям (161.6). В нормированном виде они таковы:

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{l_1}}\sin\frac{n_x\pi x}{l_1} \quad (n_x = 1, 2, 3, \ldots) \quad (161.7)$$

при условии

$$E_{nx} = n_x^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_1^2}. \quad (161.8)$$

Два других уравнения из группы (161.4) имеют аналогичные решения:

$$\left.\begin{aligned} Y_n &= \sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin\frac{n_y\pi y}{l_2}, \\ Z_n &= \sqrt{\frac{2}{l_3}}\sin\frac{n_z\pi z}{l_3} \end{aligned}\right\} \quad (n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots) \quad (161.9)$$

при условиях

$$E_{ny} = n_y^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_2^2}, \quad E_{nz} = n_z^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml_3^2}. \quad (161.8')$$

Теперь мы уже можем написать решения исходного уравнения, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\psi_n(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l_1 l_2 l_3}} \sin\frac{n_x \pi x}{l_1} \sin\frac{n_y \pi y}{l_2} \sin\frac{n_z \pi z}{l_3}, \quad (161.10)$$

причем энергия может принимать только следующий дискретный ряд значений:

$$E(n_x, n_y, n_z) = E_{nx} + E_{ny} + E_{nz} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{l_1^2} + \frac{n_y^2}{l_2^2} + \frac{n_z^2}{l_3^2}\right) \quad (161.11)$$

$$(n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots).$$

Собственные функции (161.10) нашей задачи характеризуются следующим образом (см. § 156): они представляют собою стоячие волны, имеющие $n_x + 1$ узловых плоскостей, параллельных координатной плоскости yz, $n_y + 1$ узловых плоскостей, параллельных плоскости xz, и $n_z + 1$ узловых плоскостей, параллельных плоскости xy.

Возможные значения энергии согласно формуле (161.11) образуют дискретную последовательность, причем каждой тройке целых чисел n_x, n_y, n_z соответствует определенный уровень энергии. Эти три числа n_x, n_y, n_z являются *квантовыми числами* задачи.

Для наглядного представления возможных состояний и значений энергии частицы в ящике удобно пользоваться следующим геометрическим образом. Представим себе пространственную решетку с элементарной ячейкой в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами $1/l_1$, $1/l_2$, $1/l_3$ (рис. 250). Объем этой ячейки будет $1/l_1 l_2 l_3$. Так как каждое состояние частицы характеризуется совокупностью целых значений n_x, n_y, n_z, то мы можем представить любое состояние тем узлом решетки, который имеет координаты n_x/l_1, n_y/l_2, n_z/l_3. Энергию, соответствующую этому состоянию, мы найдем при помощи нашей геометрической картины следующим образом. Вообразим вектор **A**, соединяющий начало координат с точкой, изображающей состояние. Квадрат его длины будет

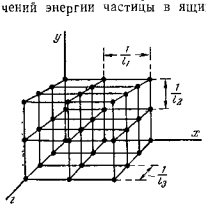


Рис. 250.

$$A^2 = n_x^2/l_1^2 + n_y^2/l_2^2 + n_z^2/l_3^2.$$

Поэтому энергия представится как

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} A^2.$$

При помощи описанной геометрической картины мы можем установить чрезвычайно важную особенность решений данной задачи. Если ребра потенциального ящика l_1, l_2, l_3 — несоизмеримые числа, то *каждому состоянию* соответствует своя изображающая точка и свое значение энергии. Не то будет в случае, когда ребра находятся в рациональном отношении. Пусть для простоты мы имеем дело с кубическим ящиком, так что $l_1 = l_2 = l_3 = l$. Для этого случая

$$\psi = \sqrt{\frac{8}{l^3}} \sin\frac{n_x \pi x}{l} \sin\frac{n_y \pi y}{l} \sin\frac{n_z \pi z}{l}, \quad E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Очевидно, что для каждой совокупности целых значений n_x, n_y, n_z мы будем иметь свою функцию ψ, но значения энергии для всех состояний, для которых сумма $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ имеет одну и ту же величину, будет между собой совпадать. Таким образом, различным узлам нашей воображаемой кубической решетки будут всегда соответствовать различные состояния, но энергия в некоторых из этих состояний будет одинакова.

Рассмотрим для примера два частных случая. Пусть $n_x = 1$, $n_y = 1$, $n_z = 1$; в этом случае $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 3$. Так как нельзя подобрать три других целых числа, сумма квадратов которых равна 3, то состоянию (1, 1, 1) соответствует только одно значение энергии. Но положим, что $n_x = 1$, $n_y = 2$, $n_z = 3$. Тогда

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 14,$$

и соответствующее значение энергии будет

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \cdot 14.$$

Этому значению энергии отвечает шесть различных состояний (см. таблицу XXIV).

Таблица XXIV

n_x	n_y	n_z	$n_x^2+n_y^2+n_z^2$
1	2	3	14
1	3	2	
2	3	1	
3	1	2	
2	1	3	
3	2	1	

Нетрудно убедиться в том, что в случае кубического ящика подавляющее большинство состояний будет характеризоваться той особенностью, что нескольким различным состояниям соответствует одинаковая энергия. Такие состояния называются вырожденными, а число совпадающих уровней энергии называется квантовым весом состояния. В первом из разобранных примеров квантовый вес равен 1, во втором он равен 6.

Упражнения: 1 Решить задачу о колебаниях трехмерного линейного осциллятора (см. § 113). Потенциальная энергия такого осциллятора выражается суммой

$$U = {}^1/_2 f_x x^2 + {}^1/_2 f_y y^2 + {}^1/_2 f_z z^2,$$

где f_x, f_y, f_z — константы квазиупругой силы в направлениях трех декартовых прямоугольных осей координат. Вводя соответствующие классические частоты $\omega_x = \sqrt{f_x/m}$ и т. д, можно представить потенциальную энергию в виде

$$U = \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z z^2\right).$$

Воспользоваться этим выражением потенциальной энергии в уравнении Шредингера и показать, что собственные значения энергии осциллятора в этом случае таковы:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\left[(n_x + {}^1/_2)\,\omega_x + (n_y + {}^1/_2)\,\omega_y + (n_z + {}^1/_2)\,\omega_z\right],$$

где целые числа n_x, n_y, n_z — квантовые числа данной задачи, а собственные функции имеют вид

$$\psi_{n_x, n_y, n_z} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_x x^2 + \alpha_y y^2 + \alpha_z z^2)} H n_x\left(\sqrt{\alpha_x}\, x\right) H n_y\left(\sqrt{\alpha_y}\, y\right) H n_z\left(\sqrt{\alpha_z}\, z\right),$$

где

$$\alpha_x = \frac{2\pi m}{\hbar}\,\omega_x \text{ и т. д.}$$

Указание. Выполнить разделение уравнения Шредингера по схеме, разобранной в настоящем параграфе, и воспользоваться результатами § 158 для одномерного линейного осциллятора

2 Убедиться в том, что в случае трехмерного изотропного линейного осциллятора собственные значения энергии будут:

$$E_n = (n_x + n_y + n_z + {}^3/_2)\,\hbar\omega_0 = (n + {}^3/_2)\,\hbar\omega_0 \quad (n = n_x + n_y + n_z).$$

Показать, что все уровни, за исключением нулевого ($n_x = n_y = n_z = 0$), — вырожденные, с квантовым весом $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть мы участвуем в беспроигрышной лотерее, в которой имеется n_1 билетов с выигрышем a_1 рублей, n_2 билетов с выигрышем a_2 рублей и т. д. Каков средний выигрыш? Пусть полное число билетов равно N:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k \equiv \sum_{i=1}^{k} n_i = N.$$

Очевидно, что средний выигрыш $\bar{a}$ найдется по «правилу смешения»:

$$\bar{a} = \frac{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_k n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = a_1 \frac{n_1}{N} + a_2 \frac{n_2}{N} + \ldots + a_k \frac{n_k}{N}. \quad (1.1)$$

Но отношения n_1/N, n_2/N, ... суть вероятности для участвующего в лотерее получить тот или иной выигрыш *):

$$w_1 = n_1/N,\ w_2 = n_2/N,\ \ldots,\ w_k = n_k/N. \quad (1.2)$$

Поэтому (1. 1) можно переписать в виде

$$\bar{a} = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_k w_k \equiv \sum_{i=1}^{k} a_i w_i. \quad (1.3)$$

Выражение, стоящее в правой части (1. 3), т. е. сумма произведений значений, которые может принимать величина a, на соответствующие вероятности, в теории вероятностей обычно называется математическим ожиданием.

В более общем случае величины x, принимающей дискретный ряд значений $x_1, x_2, \ldots, x_k$, среди которых могут быть и отрицательные, причем вероятности получить эти значения равны соответственно $w_1, w_2, \ldots, w_k$, математическое ожидание определяется как *алгебраическая сумма*

$$\bar{x} = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k. \quad (1.4)$$

*) См., например, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, стр. 17, Гостехиздат, 1946.

Заметим, что вероятности (1.2) определены таким образом, что сумма вероятностей всех возможных значений величины a в (1.3) или x в (1.4) равна 1:

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_k = \frac{n_1 + n_2 + \ldots n_k}{N} = 1. \qquad (1.5)$$

Смысл такого определения состоит в следующем: так как $a_1, a_2, \ldots, a_k$ исчерпывают все возможные величины выигрыша и лотерея беспроигрышная, то сумма вероятностей $w_1 + w_2 + \ldots + w_k$, по теореме сложения вероятностей равная вероятности получить *какой-нибудь* выигрыш, есть вероятность достоверного события. По обычному условию, вероятность достоверного события принимается равной 1. Если вероятности всех возможных значений величины удовлетворяют условию (1.5), то говорят, что вероятность нормирована к 1.

В физике в некоторых случаях приходится иметь дело с вероятностями, не нормированными к 1. Можно было бы, например, вероятность получить той или иной выигрыш характеризовать числом билетов, дающих этот выигрыш. Тогда

$$w_1 = n_1, \; w_2 = n_2, \; \ldots, \; w_k = n_k,$$

и по формуле (1.1)

$$\bar{a} = \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_k w_k}{w_1 + w_2 + \ldots + w_k} = \frac{\sum_i a_i w_i}{\sum_i w_i}$$

или вместо (1.4)

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i}. \qquad (1.6)$$

Приведенные определения относились к величинам, распределенным дискретно (например, различные возможные выигрыши $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различаются на конечное число рублей). В физике же часто приходится иметь дело с величинами, изменяющимися непрерывным образом. В этом случае вероятность какой-либо величине иметь значение, лежащее в узком интервале между x и $x + dx$, пропорциональна величине интервала dx и выражается в виде $w(x)\,dx$. Здесь функция $w(x)$, которая называется функцией распределения или *плотностью вероятности*, имеет следующий смысл. Построим кривую, изображающую $w(x)$ (рис. 251); на малом участке от x до $x + dx$ функцию $w(x)$ можно считать постоянной и произведение $w(x)\,dx$, изображаемое площадью заштрихованной полоски, есть вероятность переменной величине иметь значение, лежащее в указанном интервале. Если эта переменная величина может непрерывно изменяться на конечном интервале от $x = a$ до $x = b$, то интеграл $\int_a^b w(x)\,dx$, изображаемый площадью, ограничиваемой кривой между ординатами $x = a$ и $x = b$, есть вероятность того, что значение x лежит где-нибудь в указанном конечном интервале (a, b). В том случае, когда в этом интервале заключены все возможные значения x, интеграл $\int_a^b w(x)\,dx$ представляет вероятность достоверного события. Если функция $w(x)$ выбрана так, что

$$\int_a^b w(x)\,dx = 1, \qquad (1.7)$$

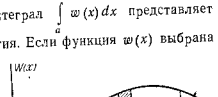


Рис. 251.

то говорят, что плотность вероятности нормирована к 1. В частности, областью изменения x может быть интервал от 0 до ∞ или даже от $-\infty$ до $+\infty$. Чтобы условие (1.7) имело смысл в этом случае, функция $w(x)$ должна достаточно быстро убывать при возрастании x (по крайней мере, как x^{-p}, где $p > 1$) *).

Для отыскания среднего значения x весь интервал (a, b) разбивается на малые участки x_i, $x_i + dx$. На каждом из них $w(x) = w(x_i)$ можно считать постоянной; $w(x_i)\,dx$ приближенно равно вероятности величине x иметь значение между x_i и $x_i + dx$. Предел суммы $\sum_i x_i w(x_i)\,dx$, равный интегралу $\int_a^b x w(x)\,dx$, и будет в этом случае математическим ожиданием или средним значением непрерывно изменяющейся величины **)

$$\bar{x} = \int_a^b x w(x)\,dx. \qquad (1.8)$$

Предполагается при этом, что плотность вероятности нормирована к 1, т. е. что имеет место равенство (1.7). Если же $w(x)$ не нормирована, то для вычисления $\bar{x}$ следует пользоваться

*) См. например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967, стр. 263.

**) За строгими доказательствами следует обратиться к руководствам по теории вероятностей, например, Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, «Наука», 1969, стр. 168.

формулой, аналогичной (I.6):

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x w(x)\,dx}{\int_a^b w(x)\,dx}. \tag{I.9}$$

Среднее значение квадрата $\overline{x^2}$ будет [в случае, когда $w(x)$ нормирована]:

$$\overline{x^2} = \int_a^b x^2 w(x)\,dx \tag{I.10}$$

и вообще среднее значение любой функции $f(x)$

$$\overline{f(x)} = \int_a^b f(x)\,w(x)\,dx. \tag{I.11}$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$w(x) = e^{-\lambda x}, \tag{I.12}$$

причем x может принимать все значения от 0 до ∞. Проверяем нормирование функции $w(x) = e^{-\lambda x}$:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda},$$

т. е. вероятность не нормирована. Для вычисления средних значений нужно либо пользоваться формулой (I.9), либо нормировать $w(x)$. Очевидно, что в данном случае $\lambda e^{-\lambda x}$ и есть нормированная плотность вероятности. Среднее значение x будет

$$\bar{x} = \int_0^\infty x w(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx.$$

Интегрируем по частям

$$\int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x\,d\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right) = \left(-\frac{1}{\lambda}xe^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda^2}$$

(двойная подстановка при верхнем пределе дает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$; раскрывая ее по правилу Лопиталя, получаем нуль).

Итак,

$$\bar{x} = \lambda \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Аналогично,

$$\overline{x^2} = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty x^2 d\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right) = 2\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,x\,dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Плотность вероятности типа $e^{-\lambda x}$ неоднократно встречается в этой книге.

II. ВЫВОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Пусть мы имеем атом или молекулу, которые могут находиться в квантовых состояниях с энергиями $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ В дальнейшем будем называть интересующий нас объект (атом, молекула) «системой». Зададимся вопросом: какова вероятность найти систему в состоянии с энергией E_1? Для решения будем поступать так, как это обычно делается в статистике: вообразим очень большое число N одинаковых систем, находящихся в различных квантовых состояниях в тепловом равновесии между собой. Пусть в состоянии с энергией E_1 будет находиться N_1 систем, в состоянии с энергией E_2 — N_2 систем и т. д. Чтобы найти вероятность такого распределения систем по состояниям, определим, сколькими способами может быть осуществлено заданное состояние, т. е. состояние, характеризуемое числами $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$ для систем с энергиями $E_1, E_2, \ldots, E_i, \ldots$ Это — типичная задача теории вероятностей. Она решается следующим способом. Найдем сначала, сколькими способами из N систем может быть выбрано N_1 систем с энергией E_1. Это число равно числу сочетаний из N элементов по N_1, т. е.

$$\binom{N}{N_1} = \frac{N!}{N_1!\,(N-N_1)!}.$$

Теперь найдем, сколькими способами из оставшихся $N - N_1$ систем может быть выбрано N_2 систем в состоянии с энергией E_2. Это число равно

$$\binom{N-N_1}{N_2} = \frac{(N-N_1)!}{N_2!\,(N-N_1-N_2)!}.$$

Из остальных $N - N_1 - N_2$ может быть выбрано N_3 систем числом способов, равным

$$\binom{N-N_1-N_2}{N_3} = \frac{(N-N_1-N_2)!}{N_3!\,(N-N_1-N_2-N_3)!}$$

и т. д. Очевидно, что число способов, каким N систем может быть распределено по $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_i, \ldots$ группам, равно произведению всех аналогичным образом построенных выражений, т. е.

$$W = \frac{N!}{N_1!\,(N-N_1)!}\,\frac{(N-N_1)!}{N_2!\,(N-N_1-N_2)!}\,\frac{(N-N_1-N_2)!}{N_3!\,(N-N_1-N_2-N_3)!}\cdots = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\,N_3!\ldots}. \qquad \text{(II.1)}$$

Так как, кроме того, общее число систем и их полная энергия должны быть определенными величинами, то должны удовлетворяться два дополнительных условия:

$$N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_i + \ldots = N, \qquad \text{(II.2)}$$

$$N_1E_1 + N_2E_2 + N_3E_3 + \ldots + N_iE_i + \ldots = E. \qquad \text{(II.3)}$$

Чтобы получить наивероятнейшее распределение, надо найти максимум выражения (II. 1) при добавочных условиях (II. 2) и (II. 3). Вместо функции W будем оперировать с ее логарифмом: очевидно, что $\ln W$ достигает максимума при тех же условиях, что и W.

Итак, ищем максимум функции

$$\ln W = \ln N! - \sum_i \ln N_i!. \qquad \text{(II.4)}$$

Для факториалов больших чисел имеет место формула Стирлинга

$$x! = \sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x},$$

так что

$$\ln x! = x\ln x - x + \frac{1}{2}\ln(2\pi x).$$

При больших значениях x первые два члена дают достаточно точный результат, т. е.

$$\ln x! = x\ln x - x.$$

Применяя эту формулу к вычислению правой части (II. 4) и учитывая (I. 2), получим

$$\ln W = N\ln N - N - \sum_i N_i\ln N_i + \sum_i N_i = N\ln N - \sum_i N_i\ln N_i. \qquad \text{(II.5)}$$

Для нахождения максимума $\ln W$ при условиях (II. 2) и (II. 3), воспользуемся методом неопределенных коэффициентов: умножим (II. 2) на $-\alpha$, (II.3) — на $-\beta$, сложим с (II. 5) и

будем искать абсолютный максимум функции

$$N \ln N - \sum_i N_i \ln N_i - \alpha \sum_i N_i - \beta \sum_i N_i E_i. \qquad (\text{II}.6)$$

По известному правилу приравниваем нулю частные производные (II. 6) по $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots$ Это дает i уравнений вида

$$-\ln N_i - 1 - \alpha - \beta E_i = 0,$$

откуда

$$N_i = e^{-1-\alpha} e^{-\beta E_i},$$

или, вводя постоянную $C = e^{-1-\alpha}$,

$$N_i = C e^{-\beta E_i}.$$

Постоянная β имеет то же значение, как и в классической статистике

$$\beta = \frac{1}{kT}, \qquad (\text{II}.7)$$

где k — постоянная Больцмана. Это следует из принципа соответствия: при больших квантовых числах все квантовые выражения должны переходить в классические. Но так как β по (II. 7) не зависит от квантовых чисел, то оно должно сохранять свое значение и для малых квантовых чисел. Итак,

$$N_i = C e^{-E_i/kT}.$$

Это и есть формула Больцмана. Постоянная C легко находится из условия нормировки

$$\sum_i N_i = N,$$

что дает

$$N = C \sum_i e^{-E_i/kT},$$

$$C = \frac{N}{\sum_i e^{-E_i/kT}}.$$

В тех случаях, когда состояние с энергией E_j вырождено g_j-кратно, т. е. имеется g_j состояний с равной энергией, в выражение N_j войдет еще множитель g_j:

$$N_j = g_j C e^{-E_j/kT}.$$

III. К КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА

Покажем, что при медленном возрастании магнитного поля радиус орбиты электрона не меняется, но меняется только его угловая частота. Согласно второму уравнению Максвелла в интегральной форме (обобщенный закон электромагнитной индукции) при изменении магнитного поля $\mathscr{H}$ возникает вихревое электрическое поле $\mathscr{E}$ с осью, направленной по $\mathscr{H}$, причем

$$\oint \mathscr{E}_s\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi r^2 \frac{d\mathscr{H}}{dt}. \qquad (\text{III}.1)$$

Если за время, пока магнитное поле возрастает от 0 до $\mathscr{H}$, электрон успевает сделать n оборотов, то, предполагая, что $\mathscr{H}$ возрастает равномерно, имеем

$$\frac{d\mathscr{H}}{dt} = \frac{\mathscr{H}}{nT}, \qquad (\text{III}.2)$$

где T — период обращения электрона. Работа, совершаемая полем над электроном в течение одного оборота, равна

$$\frac{\Delta W}{n} = e \oint \mathscr{E}_s\, ds$$

или принимая во внимание (III. 1) и (III. 2),

$$\frac{\Delta W}{n} = \frac{e}{c}\frac{\mathscr{H}}{nT}\pi r^2,$$

так что

$$\Delta W = \frac{e}{c}\frac{\mathscr{H}}{T}\pi r^2 = \frac{e}{c}\mathscr{H} v \pi r^2 = \frac{e}{2c}\mathscr{H}\omega r^2.$$

Эта работа затрачивается прежде всего на увеличение кинетической энергии электрона, а если изменяется радиус орбиты, то также и на увеличение потенциальной энергии. Поэтому

$$\frac{e}{2c}\mathscr{H}\omega r^2 = \Delta E_{\text{кин}} + \Delta E_{\text{пот}}. \qquad (\text{III}.3)$$

Но

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2, \quad \Delta E_{\text{кин}} = m(r^2\omega\Delta\omega + \omega^2 r\Delta r), \tag{III.4}$$

$$E_{\text{пот}} = -\frac{e^2}{r}, \quad \Delta E_{\text{пот}} = \frac{e^2}{r^2}\Delta r$$

или, принимая во внимание равенство между силой притяжения e^2/r^2 и центробежной силой инерции $mr\omega^2$, имеем

$$\Delta E_{\text{пот}} = mr\omega^2\Delta r. \tag{III.5}$$

Подставляя (III. 4) и (III. 5) в (III. 3), находим

$$\frac{e}{2c}\mathscr{H}\omega r^2 = m(r^2\omega\,\Delta\omega + 2\omega^2 r\,\Delta r).$$

Разделив обе части на $mr^2\omega^2$, получаем

$$\frac{e}{2mc}\frac{\mathscr{H}}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + 2\frac{\Delta r}{r}. \tag{III.6}$$

Далее, принимая во внимание, что при бесконечно медленном (адиабатическом) изменении состояния в каждый момент имеет место равенство между силами, действующими на электрон (т. е. кулоновской силой притяжения плюс сила Лоренца), и центробежной силой инерции, для установившегося состояния получаем

$$m(r+\Delta r)(\omega+\Delta\omega)^2 = \frac{e^2}{(r+\Delta r)^2} + \frac{e}{c}\mathscr{H}r\omega$$

или, после умножения на $(r+\Delta r)^2$,

$$m(r+\Delta r)^3(\omega+\Delta\omega)^2 = e^2 + \frac{e}{c}\mathscr{H}r^3\omega$$

[членами, содержащими $r\,\Delta r$ и $(\Delta r)^2$, пренебрегаем]. Отсюда простыми преобразованиями находим

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{3}{2}\frac{\Delta r}{r} = \frac{e}{2mc}\frac{\mathscr{H}}{\omega}. \tag{III.7}$$

Сравнивая (III. 6) и (III. 7), получаем прежде всего

$$\Delta r = 0$$

и далее

$$\Delta\omega = \frac{e}{2mc}\mathscr{H},$$

что и требовалось доказать.

IV. ФОРМУЛА СРЕДНЕЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФЛУКТУАЦИИ

I. Формула средней квадратичной флуктуации

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(\Delta n)^2} = \bar{n}$$

встречается в этой книге так часто, что целесообразно дать ее вывод.

Рассмотрим следующую задачу кинетической теории газов: в некотором объеме V находится N молекул; какова вероятность того, что в части этого объема v находится n молекул? Вероятность того, что одна молекула находится в объеме v, есть v/V (см. § 116); вероятность того, что n *определенных* молекул соберутся в объеме v, есть $(v/V)^n$, а вероятность того, что $N-n$ молекул будут в объеме $V-v$, есть $\left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}$. Наконец, вероятность того, что n молекул будут в объеме v, а остальные $(N-n)$ — в объеме $V-v$, есть

$$\left(\frac{v}{V}\right)^n \cdot \left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \tag{IV.1}$$

Эта формула, как уже подчеркивалось выше, дает вероятность того, что какие-то *определенные* молекулы числом n находятся в объеме v; можно, например, себе представить, что все N молекул перенумерованы и из них n молекул с такими-то номерами находятся в объеме v. Для нас, однако, не существенно, какие именно молекулы находятся в объеме v; важно, чтобы их число было n. Но из данного распределения N молекул по объемам v и $V-v$ можно получить еще

$$\frac{N!}{n!\,(N-n)!} \tag{IV.2}$$

различных распределений, при которых, однако, n молекул будет по-прежнему в объеме v, а $N-n$ — в объеме $V-v$. В самом деле, из N объектов можно осуществить $N!$ перестановок, но не все эти перестановки дадут различные распределения,

Именно $n!$ перестановок молекул, находящихся в объеме v, и $(N-n)!$ перестановок молекул, находящихся в объеме $V-v$, дадут одно и то же распределение. Таким образом, из всего числа $N!$ перестановок нужно исключить $n!(N-n)!$ перестановок, не меняющих распределения молекул, и следовательно, число перестановок, дающих *различные* распределения, выразится формулой (IV.2).

Итак, существует всего $\frac{N!}{n!(N-n)!}$ альтернативных распределений, при которых n молекул находятся в объеме v, а $N-n$ — в объеме $V-v$. Вероятность каждого из этих распределений выражается формулой (IV.1), а следовательно, вероятность того, что *любые* n молекул будут находиться в объеме v по теореме сложения вероятностей, есть

$$w_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(\frac{V-v}{V}\right)^{N-n}. \qquad \text{(IV.3)}$$

Если, в частности, требуется найти вероятность того, что *все* N молекул соберутся в части v объема V, то в этом случае $n=N$, и формула (IV.3) дает

$$w_n = \frac{N!}{N!0!}\left(\frac{v}{V}\right)^N = \left(\frac{v}{V}\right)^N,$$

т. е. вновь получается формула, приведенная в тексте, стр. 369. Очевидно, что при равномерном распределении N молекул по объему V на объем v придется Nv/V молекул. Пользуясь формулой (IV.3), можно показать, что такое распределение будет наивероятнейшим. Но формула (IV.3) дает вероятность того, что в объеме v будет находиться любое число молекул ($\leqslant N$), т. е. вероятность состояний, любым образом отклоняющихся от наивероятнейшего. Сумма вероятностей (IV.3) по всем n от 0 до N дает вероятность того, что в объеме v будет находиться *какое-нибудь* число молекул между 0 и N. Такое событие есть достоверность, и поэтому $\sum_{n=0}^{N} w_n$ должна быть равна 1, если вероятность (IV.3) нормирована к 1. Это имеет место на самом деле. Действительно, правая часть (IV.3) есть общий член бинома $\left(\frac{V-v}{V}+\frac{v}{V}\right)^N$, а потому

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \left(\frac{V-v}{V}+\frac{v}{V}\right)^N = 1^N = 1.$$

Зная вероятность w_n, можно найти среднее число молекул в объеме v:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n w_n. \qquad \text{(IV.4)}$$

Обозначив в (IV.3) $\frac{v}{V}$ через p, напишем (IV.4) в явном виде:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} n\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(n-1)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} =$$

$$= Np\sum_{n=0}^{N}\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}p^{n-1}(1-p)^{N-n}.$$

Вводя обозначения

$$n-1=n', \quad N-1=N'$$

и замечая, что

$$N'-n' = [(N-1)-(n-1)] = N-n,$$

получаем

$$\bar{n} = Np\sum_{n'=0}^{N'}\frac{N'!}{n'!(N'-n')!}p^{n'}(1-p)^{N'-n'}.$$

Но по формуле бинома сумма равна $(p+1-p)^{N'}$, т. е. опять равна 1. Итак,

$$\bar{n} = Np = N\frac{v}{V}. \qquad \text{(IV.5)}$$

Это значит, что среднее число молекул в объеме v равно числу молекул, приходящемуся на этот объем при равномерном распределении по всему объему V, как и следовало ожидать.

Вычислим теперь среднее значение квадрата n, т. е. $\overline{n^2}$

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{N} n^2 w_n.$$

Заменим n^2 через $n(n-1)+n$ и напишем

$$\overline{n^2} = \sum_{n=0}^{N}[n(n-1)+n]w_n = \sum_{n=0}^{N} n w_n + \sum_{n=0}^{N} n(n-1)w_n =$$

$$= \bar{n} + \sum n(n-1)\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} =$$

$$= \bar{n} + \sum\frac{N!}{(n-2)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} =$$

$$= \bar{n} + N(N-1)p^2\sum\frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!}p^{n-2}(1-p)^{N-n}.$$

В сумме полагаем

$$N-2=N'', \quad n-2=n''$$

и замечаем, что

$$N''-n''=[(N-2)-(n-2)]=N-n.$$

Сделав указанную замену, сразу увидим, что сумма по формуле бинома опять равна $(p+1-p)^{N''}$, т. е. равна единице, так что

$$\overline{n^2}=\bar{n}+N(N-1)p^2=\bar{n}+(Np)^2-Np^2=$$
$$=\bar{n}+\bar{n}^2-\bar{n}p=\bar{n}^2+\bar{n}(1-p). \qquad (\text{IV. 6})$$

По определению квадратичной флуктуации

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{(n_k-\bar{n})^2}.$$

Возводя в квадрат и усредняя, находим

$$\overline{(\Delta n)^2}=\overline{n_k^2}-2\bar{n}_k\bar{n}+\bar{n}^2=\overline{n^2}-\bar{n}^2. \qquad (\text{IV. 7})$$

Подставляя из (IV. 6) выражение для $\overline{n^2}$, получаем

$$\overline{n^2}-\bar{n}^2=\bar{n}-\bar{n}p,$$

так что

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}-\bar{n}p. \qquad (\text{IV. 8})$$

Если v — малая часть объема V, то $p=v/V$ — малое число. В этом случае второй член в (IV. 8) можно отбросить, и мы получаем искомую формулу

$$\overline{(\Delta n)^2}=\bar{n}. \qquad (\text{IV. 9})$$

Само собой разумеется, что эта формула применима не только к флуктуациям числа молекул газа, но и к любым флуктуациям. Смысл ее пояснен в тексте на стр. 371.

2. Формула (116.5) для квадратичной флуктуации энергии (см. стр. 371)

$$\overline{\varepsilon^2}=kT^2\frac{d\bar{E}}{dT} \qquad (116.5)$$

выводится следующим образом. Имеем прежде всего по (IV. 7)

$$\overline{\varepsilon^2}=\overline{E^2}-\bar{E}^2. \qquad (\text{IV. 10})$$

Для вычисления среднего значения $\bar{E}$ воспользуемся канонич-

ским распределением Гиббса *)

$$\bar{E}=\frac{\int E(p,q)\,e^{-E(p,q)/kT}\,d\tau}{\int e^{-E(p,q)/kT}\,d\tau}, \qquad (\text{IV. 11})$$

где $d\tau$ — элемент объема *фазового* пространства. Дифференцируя (IV. 11) по T, находим

$$\frac{d\bar{E}}{dT}=\frac{\frac{1}{kT^2}\int E^2e^{-E/kT}\,d\tau\int e^{-E/kT}\,d\tau-\frac{1}{kT^2}\left[\int Ee^{-E/kT}\,d\tau\right]^2}{\left[\int e^{-E/kT}\,d\tau\right]^2}=$$
$$=\frac{1}{kT^2}\frac{\int E^2e^{-E/kT}\,d\tau}{\int e^{-E/kT}\,d\tau}-\frac{1}{kT^2}\left\{\frac{\int Ee^{-E/kT}\,d\tau}{\int e^{-E/kT}\,d\tau}\right\}^2. \qquad (\text{IV. 12})$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\int E^2e^{-E/kT}\,d\tau}{\int e^{-E/kT}\,d\tau}=\overline{E^2},$$

видим, что (IV. 12) дает

$$kT^2\frac{d\bar{E}}{dT}=\overline{E^2}-\bar{E}^2,$$

а потому по (IV. 10)

$$\overline{\varepsilon^2}=kT^2\frac{d\bar{E}}{dT},$$

что и требовалось доказать.

*) См., например, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, «Наука», 1964, гл. III.

V. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И НОРМИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА

Собственные функции уравнения Шрёдингера для линейного осциллятора обладают свойством ортогональности в промежутке от $-\infty$ до $+\infty$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n$$

(так как ψ_n — действительная функция x, то $\overset{*}{\psi}_n = \psi_n$).

В этом проще всего можно убедиться следующим образом. Напишем уравнение Шрёдингера для осциллятора в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\lambda - \alpha^2 x^2)\,\psi = 0. \tag{158.4}$$

Собственные значения параметра λ, соответствующие собственным функциям ψ_n, суть $\lambda_n = 2n + 1$. Мы имеем, таким образом

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + (2n + 1 - \alpha^2 x^2)\,\psi_n = 0,$$

$$\frac{d^2\psi_m}{dx^2} + (2m + 1 - \alpha^2 x^2)\,\psi_m = 0.$$

Умножая первое из этих уравнений на ψ_m, второе на ψ_n, вычитая и интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_m \frac{d^2\psi_n}{dx^2} - \psi_n \frac{d^2\psi_m}{dx^2}\right) dx = 2\,(m - n) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n \psi_m\,dx.$$

Левую часть этого равенства можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx}\right) dx = \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_m \frac{d\psi_n}{dx} - \psi_n \frac{d\psi_m}{dx}\right).$$

Принимая во внимание, что собственные функции стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, так как

$$\psi_n = C_n e^{-\alpha x^2/2} H_n(\sqrt{\alpha}\,x),$$

видим, что подстановка даст нуль как при верхнем, так и при нижнем пределе Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

При $m = n$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\,dx$$

равен конечному числу (вследствие квадратичной интегрируемости функции ψ_n), и этим можно воспользоваться для отыскания нормирующего множителя C_n. Заметим, что C_n есть, вообще говоря, комплексное число

$$C_n = |C_n|\,e^{-i\delta}.$$

Поскольку, однако, нас интересует квадрат *модуля* $|\psi_n|^2$, нам достаточно отыскать модуль $|C_n|$; фазовый множитель остается неопределенным. Обозначив для краткости $|C_n|$ через N_n, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\,dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\,d\xi$$

$$(\xi = \sqrt{\alpha}\,x).$$

Заменим один из двух множителей в $H_n^2(\xi)$ его выражением из (159.2)

$$H_n = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}; \tag{159.2'}$$

представим интеграл в виде

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n\left(e^{-\xi^2}\right)}{d\xi^n} H_n(\xi)\,d\xi.$$

Выполним интегрирование по частям, полагая

$$dv = \frac{d^n\left(e^{-\xi^2}\right)}{d\xi^n}\,d\xi, \qquad u = H_n(\xi),$$

так что

$$v = \frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}},$$

$$du = \frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\, d\xi;$$

получим

$$(-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n(e^{-\xi^2})}{d\xi^n} H_n(\xi)\, d\xi = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} H_n(\xi)\right] +$$

$$+ (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}(e^{-\xi^2})}{d\xi^{n-1}} \frac{dH(\xi)}{d\xi}\, d\xi.$$

Принимая во внимание, что $e^{-\xi^2}$ и все его производные обращаются в нуль при $\xi = \pm\infty$, видим, что первый член как произведение полинома на $e^{-\xi^2}$ равен нулю. Если повторить подобное интегрирование по частям n раз, каждый раз полагая

$$dv = \frac{d^k e^{-\xi^2}}{d\xi^k}\, d\xi$$

и

$$u = \frac{d^l H_n(\xi)}{d\xi^l}$$

и замечая, что uv каждый раз на пределах обращается в нуль, то в результате получится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n}\, d\xi.$$

Так как $H_n(\xi)$ есть полином степени n, т. е.

$$H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \ldots,$$

то

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!$$

Мы получаем, таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi)\, d\xi = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Итак,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\, dx = \frac{N_n}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Из условия нормирования находим

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n|^2\, dx = \frac{N_n^2}{\sqrt{\alpha}} 2^n n! \sqrt{\pi},$$

откуда

$$N_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}.$$

VI. ТЕОРЕМА ВИРИАЛА

В конце своей первой работы о строении атома Бор формулирует следующую теорему: «*В любой системе покоящихся ядер и электронов, обращающихся по круговым орбитам со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света, кинетическая энергия с точностью до знака равна половине потенциальной*» *). Эту теорему Бор характеризует, как «легко доказуемую», *однако доказательства не приводит*. Мы получим теорему Бора как следствие очень общей теоремы, называемой *теоремой о вириале*. Особенность этой теоремы состоит в том, что она имеет место статистически, а именно — для средних значений.

Мы будем пользоваться для системы материальных точек декартовыми координатами, по обозначать будем координаты через $q_1, q_2, \ldots, q_i, \ldots$, соответствующие импульсы будут $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, причем $p_i = m_i \dot{q}_i = m_i v_i$. Уравнения движения точек будут $\dot{p}_i = F_i$, где F_i — силы, действующие на точки. Возьмем величину

$$G = \sum_i p_i q_i \tag{VI. 1}$$

и найдем ее полную производную по времени

$$\frac{dG}{dt} = \sum_i \dot{q}_i p_i + \sum_i \dot{p}_i q_i. \tag{VI. 2}$$

Преобразуем первый член суммы справа

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i m_i \dot{q}_i \equiv \sum_i m_i \dot{q}_i^2 = \sum_i m_i v_i^2 = 2T \text{**)}; \tag{VI. 3}$$

второй член напишем в виде

$$\sum_i \dot{p}_i q_i = \sum_i F_i q_i \tag{VI. 4}$$

*) Н. Бор, Избранные научные труды, «Наука», 1970, стр. 105.

**) Мы придерживаемся тех же обозначений, какими пользовались в основном тексте (см., например, формулу (59.9)).

(мы воспользовались равенством $\dot{p}_i = F_i$). Теперь (VI. 2) можно переписать в виде

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i p_i q_i\right) = 2T + \sum_i F_i q_i. \tag{VI. 5}$$

Найдем теперь среднее за промежуток времени $t_2 - t_1$. Имеем

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \frac{dG}{dt}\, dt \equiv \overline{\frac{dG}{dt}} = 2\overline{T} + \sum_i \overline{F_i q_i}.$$

Это можно записать подробно в виде

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\left\{\left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_2} - \left(\frac{dG}{dt}\right)_{t_1}\right\} = 2\overline{T} + \sum_i \overline{F_i q_i}. \tag{VI. 6}$$

Если движение — непериодическое и координаты и скорости всех точек остаются ограниченными, то, выбрав промежуток времени усреднения $(t_2 - t_1)$ достаточно большим, мы сделаем левую часть (VI. 6) сколь угодно близкой к нулю. В случае, когда движение — периодическое, мы можем взять $(t_2 - t_1)$ равным периоду этого движения или большому числу периодов и тогда левая часть (VI. 6) заведомо будет равна нулю. В обоих случаях (VI. 6) дает

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\sum \overline{F_i q_i}. \tag{VI. 7}$$

Правая часть (VI. 7) называется *вириалом Клаузиуса*, а равенство (VI. 7) выражает *теорему вириала* в общем виде *).

Предположим теперь, что силы F_i имеют потенциал U; тогда

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \equiv -\operatorname{grad} U$$

и теорема вириала (VI. 7) примет вид

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\sum_i \overline{\operatorname{grad} U \cdot q_i}. \tag{VI. 8}$$

*) Теорема вириала в общем виде имеет разнообразные применения, в особенности в кинетической теории газов. Так, например, легко может быть получено соотношение

$$PV = NkT + \frac{1}{3}\sum\sum r f(r):$$

P — давление, V — объем газа, T — здесь абсолютная температура. Второй член справа учитывает внутренние силы между молекулами. В случае достаточно разреженного газа вторым членом можно пренебречь, и мы получаем уравнение состояния идеального газа. Учет второго члена позволяет получить в качестве первого приближения формулу Ван-дер-Ваальса.

Для отдельной точки, движущейся под действием центральной силы, получаем

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q}q. \qquad \text{(VI. 9)}$$

Если выбрать потенциал в виде степенной функции, например $U = aq^{n+1}$, то сила будет равна $F = -\frac{\partial U}{\partial q} = -(n+1)aq^n$; далее по (VI. 9)

$$\overline{T} = \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial q^n}\cdot q = -\frac{n+1}{2}aq^{n+1} = -\frac{n+1}{2}\overline{U}. \qquad \text{(VI. 10)}$$

В случае кулонова поля $n = -2$. Подставляя в (VI. 10), находим

$$\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{U}. \qquad \text{(VI. 11)}$$

Для круговых орбит $\overline{T} = T$ и $\overline{U} = U$, так что

$$T = -\frac{1}{2}U. \qquad \text{(VI. 12)}$$

Но это и есть теорема Бора, формулированная вначале *).

*) См. также А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, том I, стр. 529. Оговорка относительно $v \ll c$ существенна, так как в релятивистской механике соотношение (VI. 11) не имеет места, потому что там формула (VI. 3) не справедлива.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно черное тело 273, 274
Авогадро постоянная 139, 140
α-частица, рассеяние 98, 101, 178
—, свойства 97
Астона масс-спектрограф 53, 61, 62
Атом 42
—, модель 101, 145
—, — планетарная 247
—, радиус 94
Атомные коэффициенты 113, 116
Атомный номер 44

Бальмера серия 329, 333
— формула 341, 362
Бейнбриджа масс-спектрограф 59, 60
— и Джордана масс-спектрограф 65, 66
Бибермана, Сушкина и Фабриканта опыт 472, 479
Больцмана распределение для квантовых систем 318, 554
— формула 556
Бора — Зоммерфельда квантовые условия 354, 441
— квантовые постулаты 294, 295
Боте и Гейгера опыт 405, 406
Брэгга — Вульфа формула 126, 449
Брэкета серия 332

Вавилова опыт 388—388
— — Черенкова излучение 257
— — —, применение 264, 265
Ван дер Ваальса силы 535
Вина закон смещения 276
— формула 274, 369
Вириала теорема 568
Вода тяжелая 86
Водорода изотоп тяжелый 345
Волна де-Бройля 443, 446, 494, 495
— —, статистическое истолкование 465
Волновое уравнение 424
Волновой вектор 442
— пакет 427, 428
Время релаксации 232
Вульфа — Брэгга формула 126, 449, 451, 452
Вырождение 355, 548

Галилея преобразования 205
Гамильтона функция 191, 204
Генераторы квантовые оптические 324
Герца метод определения ионизационных потенциалов 307
Главное квантовое число 355
Гравитационное красное смещение 417
Граница сплошного спектра коротко волновая 110
— Ферми 516
Групповая скорость 427, 431

Движение в центральном поле 172
— в электромагнитном поле 19, 200
— условно-периодическое 353
Дебая — Шеррера метод 456
Де-Бройля гипотеза 442
— —, экспериментальная проверка 445
Дейтерий 86
Демпстера масс-спектрограф 62
Джинса — Рэлея формула 281, 285, 319, 373
Джордана и Бейнбриджа масс-спектрограф 65
Диаграмма Мозели 135
Дипольный момент 224
Дисперсия 370, 431, 437, 444
— закон 424
Дифракция атомов 459
— рентгеновских лучей 118
— электронов, метод Брэгга 448
— —, — Дебая — Шеррера 456

Дифракция электронов, метод Лауэ 454
Допплера эффект 438
— — второго порядка 414
Дэвиссона и Гермера опыт 448, 454

Зависимость массы от скорости 35, 210
Задерживающего потенциала метод 297, 298, 377
Закон взаимосвязи массы и энергии 217
— дисперсии 423, 444
— сохранения импульса 152
— — релятивистской массы 220
— — энергии 146
Законы излучения абсолютно черного тела 274
— сохранения 198, 200
— — и элементарные акты рассеяния 403, 405
Зеемана эффект 251, 557, 558
— —, общий случай 354

Излучение абсолютно черного тела 274
— Вавилова — Черенкова 257
— возбужденных атомов 311
— равновесное в полости 270
— резонансное 409
— тепловое 267, 276
— характеристическое рентгеновских лучей 110, 111
— электромагнитное 224
Изобары 44
Изотоп водорода тяжелый 345
Изотопы 43, 66, 88, 89
—, разделение диффузией 67
—, — конвекцией 75
—, — путем обменных реакций 82
—, — термодиффузией 73
—, — фракционированной перегонкой 82
—, — центрифугированием 84
—, — электромагнитное 78
Импульс обобщенный 188
Интеграл Фурье 237
Интерференция электронных пучков 447
— — — по методу Брэгга 448
— — — — — Дебая-Шеррера 456
Ионизации потенциал 307
— — первый 309
Иоффе и Добронравова опыт 383
Испускание вынужденное 316
— индуцированное 320
Испускание индуцированное, когерентность 327
— спонтанное 312
Испускательная способность 273

Канонические уравнения 190
Капицы — Триккера опыт 38, 39
«Катастрофа ультрафиолетовая» 286
Кауфмана опыт 36, 37
Квантование круговых орбит 336
— эллиптических орбит 352
Квантовые числа 354
Кванты световые 366, 374, 383
— энергии 290
Кеплера законы 175, 176, 177
Кеплерова задача 173
Кирхгофа закон 272
Колебания струны 506
Коллайса и Рейлинга опыт 262
Комбинационный принцип 334
Комптона и Саймона опыт 406
— эффект 393, 395
Контактная разность потенциалов 520
Координаты нормальные 280
— обобщенные 181
— циклические 194
Корпускулярно-волновой дуализм 433, 438, 440
Коэффициент ослабления 113
— отражения 497
— прозрачности 497
Коэффициенты атомные 113, 116
— рассеяния 113

Лабораторная система координат 158
Лагранжа уравнения 182, 184, 185
— функция 184, 201
Лазеры 324
Лаймана серия 332
Лапласа оператор 421
Ларморе теорема 248
— частота 250, 254
Лауэ метод 118, 453
Лоренца преобразования 207
— сила 252
— формула 38, 200
— — Эйнштейна формула 38, 39, 213
Лукирского и Прилежаева опыт 378, 379
Луммера и Принсгейма модель черного тела 276

Магнитный момент орбитальный 248, 249
Мазеры 324

Масса покоя 216
— приведенная 180
Масс-спектрографы 53
Масс-спектрометры 61
Менделеева периодическая система элементов 42, 43, 48, 49
Метастабильный уровень 325
Метод задерживающего потенциала 297, 298
— «иэохромат» 382
Мёссбауэра эффект 408, 413
Милликена опыт 12, 14
Модель атома 101, 145, 247, 294
— электрона в металле 515
Мозели закон 133
Момент дипольный 224

Неопределенности соотношения 467
Непериодические процессы 243
Нормирование собственных функций 495, 529, 564
Нулевая энергия осциллятора 527, 543

Оптическая локация 326
Ортогональность собственных функций 513, 529, 564
Осциллятор анизотропный 352
—, возбуждение состояния 527
— гармонический линейный 160, 521
— негармонический 229
—, нормальное состояние 521, 527
—, нулевая энергия 543
—, полное излучение 227
—, среднее излучение 228
—, энергия 232
Осцилляторы связанные 537
Отрицательное поглощение 321

Пакет волновой 427
Парабол метод 50
Пашена серия 332
Переходы вынужденные 313
— спонтанные 313
Периодическая система элементов Менделеева 43, 48, 49
Пикеринга серия 342
Планка постоянная 291
— —, точное определение 381
— формула 288, 317, 319
Поглощательная способность тела 273
Поглощение отрицательное 321, 324
— резонансное 410, 411
Постулаты теории относительности 205
Потенциал ионизационный 307
— кинетический 184
— критический 302
— металла внутренний 450
Потенциальные кривые 149
Потенциальный барьер 495, 502
— —, отражение 495
— —, прохождение 495
— — трехмерный 543, 544
— — ящик 512, 543
Преобразования Лоренца 204
Принцип детального равновесия 317
— комбинационный 334
— соответствия 361, 365
Прицельное расстояние 101, 102
Пуассона скобки 196
Пфунда серия 332

Работа выхода 516
Радиус эффективного сечения 94
Разделения коэффициент 68, 72, 75, 83, 85
Разложение спектральное 165, 243
Рассеяние α-частиц 99, 101, 178
— рентгеновских лучей 112, 116
— электронов 95
Резерфорда и Ройдса опыт 99
— формула 103, 104
Резонансные спектральные линии 311
Релаксации время 232
Релятивистская масса 216, 220
Рентгеновские лучи 108
— —, дифракция 109, 113, 124
— —, — по методу Вульфа — Брэгга 124
— —, — — — Лауэ 124, 126
— —, длина волны 129, 137
— —, поглощение 112
— —, рассеяние 112, 116
— —, спектр 130
Рентгеновский спектр, коротковолновая граница 380
— — сплошной 109
— — характеристический 110, 130
— спектрограф 127
Ридберга постоянная 341
Рубиновый лазер 325
Рэлея — Джинса формула 281, 285, 319, 373
Ряд Фурье 166

Свет, дифракция 440
—, преломление 433
Связанных маятников колебания 538
Серия Бальмера 326
— Пикеринга 342

Сила лучистого трения 234, 235
Силы Ван-дер-Ваальса 535
Система координат лабораторная 158
Скобельцына метод 402, 407
Скорость групповая 427, 431
— секториальная 173
— фазовая 426, 431
Снеллиуса закон 434
Собственные значения 510
— функции 510, 530, 532
— —, нормирование 495, 529, 564
— —, ортогональность 513, 529, 564, 565
Соответствия принцип 361, 365
Соотношения неопределенности 467
— — и принцип причинности 482
— —, ошибочные толкования 477
Состояние неравновесное 323
— системы 181
Соударения 154
— неупругие 301
— упругие 299
Спектр граничный сплошной 350
Спектральная плотность излучения 271
Спектральные линии, ширина естественная 241
— серии 329, 332
— термы 333
Спектрограф рентгеновский 127
Спектры водородоподобных ионов 342
— рентгеновских лучей 130
Средние значения 549
Стационарные состояния 514
Стефана — Больцмана закон 275
Стокса закон 16
Столетова работы по фотоэффекту 374

Тартаковского опыт 457
Тело абсолютно черное 273
— — —, законы излучения 274
— — —, модели 276, 277
Температура отрицательная 324
Теорема вириала 568
Теплота возгонки (сублимации) 543
Термодиффузии коэффициент 74
Томсона Г. П. опыт 457
Томсона Дж. Дж. метод парабол 66
Тормозное излучение 109
Трение лучистое 233
Триккера — Каплицы опыт 38
Туннельный эффект 506

Умова — Пойнтинга вектор 225, 500
Уравнение волновое 423
Уравнение Гамильтона 190
— Лагранжа 182, 185
— Шредингера 490
Уровни энергии, диаграммы 349

Фабриканта Бибермана и Сушкина опыт 472, 479
Фазовая скорость 426, 431
Фильтры скоростей 32—34
Флуктуации броуновские 141
— светового поля 368
— — потока 365
— энергии 540
Флуктуация средняя квадратичная 370, 559
Фокусировка пучков заряженных частиц 30, 31, 32
Фотон 370
Фотоэффект 374
—, красная граница 376, 377
Франка и Герца опыты 295, 299, 303
Фурье интеграл 237
— ряд 166

Цана и Списса опыт 40
Центр инерции 157
Центральное поле 172, 178, 185
Центральные силы 170

Чадвика опыт 106
Частоты нормальные (главные) 539
— собственные 510
Число волновое 330
— квантовое азимутальное 356
— — главное 355

Шредингера уравнение 487

Эйнштейна коэффициенты 320, 322
— теорема сложения скоростей 211
— теория испускания 316, 317
— уравнение 376
— формула 217
— —, экспериментальная проверка 221
Эйхенвальда анализ полного внутреннего отражения 500
Эквивалентности принципа 418
Электромагнитное излучение 223
— — осциллятора 224
Электрон-вольт 25
Электрон в потенциальной яме 515
Электрон в продольном электростатическом поле 23
—, движение в электрическом и магнитном полях 19
—, дифракция 448, 454, 457
—, зависимость массы от скорости 35, 220
—, заряд 12, 140
—, определение удельного заряда 25, 27, 29, 143, 347
— отдачи 400, 401
—, открытие 11
—, рассеяние атомами 95
—, уравнение орбиты 175
Электрограмма 457
Электронных пучков интерференция 447
Энергия 215
—, закон сохранения 146
— кинетическая 146, 170
— осциллятора 152
Энергия покоя 216
—, распределение по степеням свободы 278
—, схема уровней 305, 349
Эрмита полиномы 528
Эффект Доплера 438
— Зеемана 251, 254, 360, 557
— Комптона 393, 395
— Мёссбауэра 408, 414
Эффективное сечение рассеяния 92
— — —, радиус 94

Юза, Рожарского и Мак-Миллана метод 306
Юнга опыт 327

Ядро заряд 106