

А. С. ШВАРУ

# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

БОЗОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ



А. С. ШВАРЦ

# ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

**БОЗОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1975

Шварц А. С. Элементы квантовой теории поля. Бозонные взаимодействия. М., Атомиздат, 1975, 192с.

Изложены основные понятия квантовой теории поля. Ради простоты рассмотрены почти исключительно теории, описывающие один тип частиц — бесспиновые бозоны. Главной особенностью книги является проведенное в ней максимально полное отделение проблемы перенормировок от проблемы ультрафиолетовых расходимостей (прежде всего рассматриваются теории, приводящие к конечным перенормировкам; лоренц-инвариантные взаимодействия исследуются с помощью предельного перехода от таких теорий). Благодаря предварительному изучению конечных перенормировок удастся достичь большей четкости изложения и избежать рассмотрения математически неопределенных выражений.

Рисунков 26. Библиография — 39 наименований.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
<b>Глава 1. Взаимодействия вида <math>V(\varphi)</math> . . . . .</b>	<b>9</b>
§ 1. Квантование классической системы . . . . .	9
§ 2. Основные определения . . . . .	18
§ 3. Функции Грина . . . . .	26
§ 4. Теория возмущений для функций Грина . . . . .	35
§ 5. Операторы и гамильтонианы, записанные в нормальной форме . . . . .	42
<b>Глава 2. Трансляционно-инвариантные гамильтонианы . . . . .</b>	<b>52</b>
§ 6. Трансляционно-инвариантные взаимодействия . . . . .	52
§ 7. Двухточечная функция Грина и массовый оператор . . . . .	54
§ 8. Вершинные функции . . . . .	63
<b>Глава 3. Перестройка ряда теории возмущений . . . . .</b>	<b>67</b>
§ 9. Перенормировка энергии . . . . .	67
§ 10. Перенормировка константы связи . . . . .	69
<b>Глава 4. Исследование взаимодействий вида <math>V(\varphi)</math> с помощью предельного перехода от потенциальных взаимодействий . . . . .</b>	<b>76</b>
§ 11. Потенциальные взаимодействия . . . . .	76
§ 12. Теорема Хори . . . . .	85
§ 13. Диаграммная техника . . . . .	88
§ 14. Предельный переход к бесконечному числу степеней свободы . . . . .	92
§ 15. Построение операторной реализации трансляционно-инвариантного гамильтониана . . . . .	96
<b>Глава 5. Матрица рассеяния . . . . .</b>	<b>99</b>
§ 16. Построение матрицы рассеяния с помощью $\hat{i}n$ - и $\hat{o}u$ t-операторов . . . . .	99
§ 17. Адиабатическое определение матрицы рассеяния . . . . .	115
<b>Глава 6. Лоренц-инвариантные взаимодействия . . . . .</b>	<b>120</b>
§ 18. Постановка задачи . . . . .	120
§ 19. Расходящиеся диаграммы . . . . .	128
§ 20. Взаимодействие $g\varphi^4$ . . . . .	138

<b>Глава 7. Взаимодействия фермионов и бозонов . . . . .</b>	<b>142</b>
§ 21. Классические лоренц-инвариантные уравнения . . . . .	142
§ 22. Свободные фермионы . . . . .	154
§ 23. Взаимодействие фермионов спина $1/2$ со скалярными бозонами . . . . .	160
Дополнение А . . . . .	166
Дополнение Б . . . . .	175
Дополнение В . . . . .	184
Список литературы . . . . .	190

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги — дать четкое изложение основных понятий квантовой теории поля.

В книгах по квантовой теории поля (см., например, [1—5]) изложение во многом нечетко. Разумеется, нельзя требовать математической строгости от физической книги, но уровень строгости и просто логической ясности в перечисленных книгах несколько отстает от уровня, принятого в других областях физики. Например, в учебниках по квантовой теории поля по аналогии с квантовой механикой исходят обычно из определения матрицы рассеяния с помощью  $T$ -экспоненты, иными словами, с помощью формулы

$$S = \lim_{t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty} S(t, t_0),$$

где

$$S(t, t_0) = \exp(iH_0 t) \exp(-iH(t - t_0)) \exp(-iH_0 t_0)$$

— оператор эволюции в представлении взаимодействия. Это определение неудовлетворительно уже потому, что матрица рассеяния в квантовой теории поля определяется самим гамильтонианом  $H$  и не зависит от способа выделения свободного гамильтониана  $H_0$ ; основной физический недостаток этого определения матрицы рассеяния состоит в том, что оно не учитывает различия между «голыми» и «одетыми» частицами\*. Но все конечные результаты оказываются правильными, поскольку в процессе вычислений определение матрицы рассеяния изменяется. Это изменение происходит из-за процедуры перенормировки. Однако в представлении большинства читателей необходимость перенормировки связана с существованием ультрафиолетовых расходимостей, хотя из тех же книг можно

---

\* Под «голыми» понимаются частицы, отвечающие гамильтониану  $H_0$ , а под «одетыми» — частицы, отвечающие гамильтониану  $H$ .

заклучить, что при построении матрицы рассеяния конечные перенормировки необходимы и в случае отсутствия расходимостей.

Наиболее последовательное изложение квантовой теории поля содержится в работе [6], однако в ней вопрос о перенормировках полностью слит с вопросом об устранении расходимостей.

В книгах по квантовой теории поля авторы нередко оперируют понятиями, не имеющими строгого смысла. В частности, гамильтонианы квантовой теории поля обычно рассматривают как операторы в фокковском пространстве. На самом деле они не становятся операторами в фокковском пространстве, даже если обрезать их по импульсам, чтобы избежать ультрафиолетовых расходимостей; это сказывается на расходимости вакуумных петель.

Для применения обычных в квантовой теории поля рассуждений (например, чтобы установить связь между матрицей рассеяния и функциями Грина) следует рассматривать гамильтониан как оператор в пространстве, отличном от фокковского. Можно, впрочем, ограничиться рассмотрением фокковского пространства, введя в гамильтониан дополнительное обрезание по объему, но такой подход также связан с трудностями и требует более серьезных модификаций в стандартном изложении, чем переход к другому пространству. Этот подход используется в § 11—15, 17 настоящей книги; остальная часть книги основана на построении оператора энергии в пространстве, отличном от фокковского. Ради простоты рассматриваются в основном теории, описывающие один тип частиц — бесспиновые бозоны. Распространение результатов на другие теории требует лишь небольших формальных усложнений, пока мы не сталкиваемся с инфракрасными расходимостями. В книге почти не затрагивается вопрос о том, какими гамильтонианами описываются реально существующие элементарные частицы. Совершенно не приводятся примеры применения правил вычисления матрицы рассеяния к анализу конкретных процессов рассеяния. Эти вопросы хорошо освещены во многих книгах.

Физик должен рассматривать настоящую книгу как дополнение к уже существующим. Для математика, не интересующегося приложениями основных принципов квантовой теории поля к конкретным расчетам, она может служить источником для первоначального ознакомления с квантовой теорией поля.

Настоящая книга написана не на математическом уровне строгости, однако принятый в ней уровень строгости доста-



точно высок, чтобы не вызывать чувства протеста у математика (предполагается, что математик не будет пропускать набранные петитом разъяснения точного смысла вводимых понятий).

Некоторые сведения, необходимые для понимания книги, содержатся в дополнении А и в начале дополнения Б. Доказательства ряда утверждений, приведенных в основном тексте без строгого обоснования, включены в дополнения Б и В.

## Обозначения

1. Четырехмерные векторы:

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x});$$

$$y = (y^0, y^1, y^2, y^3) = (\tau, y^1, y^2, y^3) = (\tau, \mathbf{y});$$

$$k = (k^0, k^1, k^2, k^3) = (\omega, k^1, k^2, k^3) = (\omega, \mathbf{k})$$

$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{k}]$  — трехмерные векторы,  $t = x^0$  и  $\tau = y^0$  — время,  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  и  $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$  — пространственные координаты,  $\omega = k^0$  — энергия,  $\mathbf{k} = (k^1, k^2, k^3)$  — трехмерный импульс.

2. Индефинитное скалярное произведение  $xy$  в четырехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} xy &= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = t\tau - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \alpha \leq 3 \\ 0 \leq \beta \leq 3}} h_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = \sum_{\substack{0 \leq \alpha \leq 3 \\ 0 \leq \beta \leq 3}} h^{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \sum_{0 \leq \alpha \leq 3} x^\alpha y_\alpha. \end{aligned}$$

(Здесь  $h^{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ ,  $h^{0,0} = 1$ ,  $h^{1,1} = h^{2,2} = h^{3,3} = -1$ ,  $h_{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta}$ ,  $x_0 = x^0$ ,  $x_1 = -x^1$ ,  $x_2 = -x^2$ ,  $x_3 = -x^3$ .)

3. Под преобразованием Лоренца понимается ортохронное собственное преобразование Лоренца, т. е. преобразование

$$x'^\alpha = \sum g_{\nu}^{\alpha} x^\nu$$

с матрицей  $g_{\nu}^{\alpha}$ , удовлетворяющей условиям:

$$\sum h_{\alpha\beta} g_{\nu}^{\alpha} g_{\delta}^{\beta} = h_{\nu\delta}, \quad g_0^0 > 0, \quad \det (g_{\nu}^{\alpha}) > 0.$$

4.  $[A, B] = AB - BA$  — коммутатор,  $[A, B]_+ = AB + BA$  — антикоммутатор операторов  $A, B$ .

5. Оператор, эрмитово сопряженный к оператору  $A$ , обозначается  $A^+$ .

6. Число, комплексно сопряженное к числу  $z$ , обозначается  $\bar{z}$  или  $z^*$ .

7.  $E^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство.

8.  $L^2(E^n)$  — пространство интегрируемых с квадратом функций от  $n$  переменных.

9.  $F(X)$  — фокковское пространство.

10. Всюду в книге постоянная Планка  $\hbar$  и скорость света  $c$  приняты равными 1.

11.  $\delta_k = 0$  при  $k \neq 0$ ,  $\delta_0 = 1$ ;  $\delta_{kl} = \delta_l^k = \delta_{k-l}$  — символ Кронекера.

12.  $\theta(t) = 1$  при  $t \geq 0$ ,  $\theta(t) = 0$  при  $t < 0$ .

13.  $\frac{1}{\omega + i0} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{\omega + i\alpha} = \frac{1}{i} \int \theta(t) \exp(i\omega t) dt$ .

14. Для перехода от  $(\mathbf{x}, t)$ -представления (пространственно-временного представления) к  $(\mathbf{k}, t)$ -представлению (импульсно-временному) и  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлению (импульсно-энергетическому) в разных ситуациях применяются разные формулы с целью уменьшения числа несущественных множителей типа  $(2\pi)^5$ .

Приведем некоторые из используемых соотношений.

Для взаимодействий вида  $V(\Phi)$  полевые операторы в  $(\mathbf{x}, t)$ - и  $(\mathbf{k}, t)$ -представлениях связаны формулой

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k},$$

а функции Грина соответственно в  $(\mathbf{x}, t)$ -,  $(\mathbf{k}, t)$ - и  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлениях определяются соотношениями:

$$G_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = G_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) =$$

$$= \langle T(\varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n, t_n)) \Phi, \Phi \rangle;$$

$$\check{G}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) = \langle T(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)) \Phi, \Phi \rangle =$$

$$= (2\pi)^{-3n/2} \int \exp\left(-i \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j\right) G_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) d^n \mathbf{x};$$

$$\tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) =$$

$$= (2\pi)^{-2n} \int \exp\left(i \sum_{j=1}^n \omega_j t_j - i \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \mathbf{x}_j\right) G_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) d^n \mathbf{x} d^n t.$$

Двухточечная функция Грина свободного гамильтониана соответственно в  $(\mathbf{x}, t)$ -,  $(\mathbf{k}, t)$ - и  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлениях обозначается так:

$$G_2^{(0)}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) = D_F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2);$$

$$\check{G}_2^{(0)}(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) = \check{D}_F(\mathbf{k}_1, t_1 - t_2) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2);$$

$$\tilde{G}_2^{(0)}(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2) = \tilde{D}_F(\mathbf{k}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) =$$

$$= i [\omega_1^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1) + i0]^{-1} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВИДА  $V(\varphi)$ 

## § 1. Квантование классической системы

Классическую механическую систему с конечным числом степеней свободы можно, как известно, описать с помощью функции Гамильтона  $\mathcal{H}(p, q)$ , зависящей от обобщенных координат  $q = (q_1, \dots, q_n)$  и обобщенных импульсов  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Закон изменения во времени обобщенных координат и импульсов определяется уравнениями Гамильтона:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}. \quad (1.1)$$

Важный класс механических систем образуют системы, функции Гамильтона которых имеют вид

$$\mathcal{H}(p, q) = T(p) + U(q), \quad (1.2)$$

где  $T(p)$  — положительно определенная квадратичная форма. В таком виде можно, в частности, записать функцию Гамильтона системы нерелятивистских частиц в декартовых координатах. Функция  $U(q)$  имеет физический смысл потенциальной энергии, поэтому взаимодействие с функцией Гамильтона (1.2) назовем потенциальным взаимодействием.

Классической механической системе с функцией Гамильтона (1.2) естественно сопоставляется квантовая механическая система. Именно импульсам  $p_1, \dots, p_n$  сопоставляются самосопряженные операторы  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n$ , а координатам  $q_1, \dots, q_n$  — операторы  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n$ , подчиняющиеся соотношениям:

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0; \quad [\hat{p}_i, \hat{q}_j] = (1/i) \delta_{ij}. \quad (1.3)$$

Оператор Гамильтона  $H$  выражается через  $\hat{p}_i, \hat{q}_j$  формулой

$$H = T(\hat{p}) + U(\hat{q}) = T(\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) + U(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n). \quad (1.4)$$

Отметим, что в (1.4) операторы  $T(\hat{p})$  и  $U(\hat{q})$  представляют собой функции от коммутирующих самосопряженных операторов.

В общем случае существует много различных способов квантования (см., например, [7]), т. е. много разных гамильтонианов  $H$ , которые можно считать соответствующими классической функции Гамильтона  $\mathcal{H}(p, q)$ .

Будем считать, что пространством состояний рассматриваемой системы является пространство  $L^2(E^n)$  интегрируемых с квадратом функций  $\psi(q_1, \dots, q_n)$ . Операторы координат  $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n$  реализуем как операторы умножения на независимые переменные  $q_1, \dots, q_n$ , а операторы импульса — как операторы дифференцирования  $\hat{p}_j = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}$ .

Важно отметить, что конструкция самосопряженных операторов, удовлетворяющих условиям (1.3), по существу единственная. Точнее, справедливо следующее утверждение [8]: *если неприводимая\* система самосопряженных операторов  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n$  в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  удовлетворяет условиям:*

$$\left. \begin{aligned} \exp(i\alpha\hat{p}_j) \exp(i\beta\hat{p}_k) &= \exp(i\beta\hat{p}_k) \exp(i\alpha\hat{p}_j); \\ \exp(i\alpha\hat{q}_j) \exp(i\beta\hat{q}_k) &= \exp(i\beta\hat{q}_k) \exp(i\alpha\hat{q}_j); \\ \exp(i\alpha\hat{p}_j) \exp(i\beta\hat{q}_k) &= \\ &= \exp(i\alpha\beta\delta_{jk}) \exp(i\beta\hat{q}_k) \exp(i\alpha\hat{p}_j), \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

*то существует унитарный оператор, отображающий пространство  $\mathcal{H}$  на пространство  $L^2(E^n)$  и переводящий операторы  $\hat{q}_j$  в операторы умножения на независимые переменные  $q_j$ , а операторы  $\hat{p}_j$  — в операторы  $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_j}$ .*

С помощью формальных вычислений нетрудно проверить эквивалентность условий (1.3) и условий (1.5), однако из-за того, что  $\hat{p}_i$  и  $\hat{q}_j$  не ограничены и, следовательно, не всюду определены, эти формальные рассуждения нельзя превратить в математическое доказательство.

---

\* Система операторов называется неприводимой, если не существует нетривиального подпространства, инвариантного для всех операторов системы.

Уравнения Гейзенберга для операторов  $\hat{p}_j(t) = \exp(iHt) \hat{p}_j \exp(-iHt)$  и  $\hat{q}_j(t) = \exp(iHt) \hat{q}_j \exp(-iHt)$  имеют вид

$$\frac{d\hat{q}_j(t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_j}(\hat{p}(t)); \quad \frac{d\hat{p}_j(t)}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}(\hat{q}(t)), \quad (1.6)$$

т. е. внешне совпадают с уравнениями Гамильтона для классической системы. Если  $T(p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2$  (к этому случаю всегда можно прийти с помощью линейной замены координат), то  $\frac{d\hat{q}_j(t)}{dt} = \hat{p}_j(t)$ , а значит,

$$\frac{d^2 \hat{q}_j(t)}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}(\hat{q}(t)). \quad (1.7)$$

Рассмотрим классическую механическую систему, являющуюся аналогом систем с потенциальным взаимодействием для случая бесконечного числа степеней свободы. Будем считать, что состояние системы описывается функциями  $\pi(\xi)$  и  $\varphi(\xi)$ , где  $\xi$  пробегает бесконечное множество. Ради определенности предположим, что  $\xi$  пробегает трехмерное пространство  $E^3$ . Числа  $\varphi(\xi)$  можно рассматривать как обобщенные координаты, а числа  $\pi(\xi)$  — как обобщенные импульсы. Очевидно, мы имеем бесконечное число обобщенных координат и обобщенных импульсов. Функция Гамильтона  $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$  представляет собой функционал от функций  $\pi$  и  $\varphi$ . Полагаем:

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2} \int \pi^2(\xi) d\xi + V(\varphi), \quad (1.8)$$

где

$$V(\varphi) = \sum_n \int V_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \varphi(\xi_1) \dots \varphi(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (1.9)$$

(функции  $V_n$  считаем симметричными).

Уравнения Гамильтона можно тогда записать как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t} &= \pi(\xi, t), \\ \frac{\partial \pi(\xi, t)}{\partial t} &= \\ &= - \sum_n n \int V_n(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \varphi(\xi_1, t) \dots \varphi(\xi_{n-1}, t) d^{i-1} \xi. \end{aligned}$$

Исключая из них  $\pi(\xi, t)$ , получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi(\xi, t)}{\partial t^2} + \sum_n n \int V_n(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \varphi(\xi_1, t) \dots \dots \varphi(\xi_{n-1}, t) d^{n-1} \xi = 0. \quad (1.10)$$

Нашей основной задачей является изучение квантовой системы, появляющейся при квантовании описанной классической системы. По аналогии со случаем конечного числа степеней свободы можно предположить, что при квантовании возникнут операторные функции  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$ , удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\pi}^+(\xi) &= \hat{\pi}(\xi), \quad \hat{\varphi}^+(\xi) = \hat{\varphi}(\xi); \\ [\hat{\pi}(\xi), \hat{\pi}(\xi')] &= [\hat{\varphi}(\xi), \hat{\varphi}(\xi')] = 0; \\ [\hat{\pi}(\xi), \hat{\varphi}(\xi')] &= (1/i) \delta(\xi - \xi') \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

(точнее говоря,  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  представляют собой операторные обобщенные функции). Соотношения (1.11) называют *каноническими коммутационными соотношениями* (CCR).

Гамильтониан квантовомеханической системы, получающейся при квантовании классической системы с функцией Гамильтона (1.7), можно записать в виде

$$H = \frac{1}{2} \int \pi^2(\xi) d\xi + \sum_n \int V_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \hat{\varphi}(\xi_1) \dots \dots \hat{\varphi}(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n, \quad (1.12)$$

где  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  удовлетворяют CCR.

Однако оказывается, что операторные обобщенные функции  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  можно построить существенно различными способами. При наиболее простых способах построения  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  выражение (1.12) во многих случаях не определяет самосопряженного оператора.

Эти трудности преодолеваются разными методами. Один из них заключается в построении для каждого выражения (1.12) своего гильбертова пространства, в котором действуют операторы  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$ , удовлетворяющие условиям (1.11), и в котором формальному выражению (1.12) можно сопоставить самосопряженный оператор. Другой метод основан на предельном переходе от потенциальных взаимодействий с конечным

числом степеней свободы. Ему посвящена гл. 4. Во всех главах (кроме четвертой) использован первый из указанных методов.

Остановимся более подробно на представлениях ССР, т. е. на построении операторных обобщенных функций, удовлетворяющих ССР. Называя  $\hat{\pi}(\xi)$  или  $\hat{\varphi}(\xi)$  операторной обобщенной функцией, мы имеем в виду, что эта функция приобретает смысл оператора после интегрирования с «хорошей» функцией. Иными словами, считаем заданными операторы  $\hat{\pi}(f)$ ,  $\hat{\varphi}(f)$ , которые можно формально записать так

$$\hat{\pi}(f) = \int f(\xi) \hat{\pi}(\xi) d\xi; \quad \hat{\varphi}(f) = \int f(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi.$$

В соответствии с этим будем говорить, что в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  задано представление ССР, если каждой функции из пространства  $R$  основных функций сопоставлены эрмитовы операторы  $\hat{\pi}(f)$ ,  $\hat{\varphi}(f)$ , линейно зависящие от  $f$ :

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 \hat{\pi}(f_1) + \lambda_2 \hat{\pi}(f_2); \\ \hat{\varphi}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 \hat{\varphi}(f_1) + \lambda_2 \hat{\varphi}(f_2) \end{aligned}$$

и удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} [\hat{\pi}(f_1), \hat{\pi}(f_2)] &= [\hat{\varphi}(f_1), \hat{\varphi}(f_2)] = 0; \\ [\hat{\pi}(f_1), \hat{\varphi}(f_2)] &= \frac{1}{i} \int f_1(\xi) f_2(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

(пространство  $R$  основных функций должно быть линейным многообразием в пространстве действительных интегрируемых с квадратом функций; предполагается, что все  $\hat{\pi}(f)$ ,  $\hat{\varphi}(f)$  определены на одном и том же множестве  $D$  и переводят множество  $D$  в себя). Соотношения (1.13) можно истолковать как другую запись (1.11).

Если операторные обобщенные функции  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  удовлетворяют соотношениям (1.11), то операторные обобщенные функции

$$\begin{aligned} \hat{a}(\xi) &= (1/\sqrt{2}) (\hat{\varphi}(\xi) + i \hat{\pi}(\xi)), \\ \hat{a}^+(\xi) &= (1/\sqrt{2}) (\hat{\varphi}(\xi) - i \hat{\pi}(\xi)) \end{aligned} \quad (1.14)$$

сопряжены друг к другу и удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} [\hat{a}(\xi), \hat{a}(\xi')] &= [\hat{a}^+(\xi), \hat{a}^+(\xi')] = 0; \\ [\hat{a}(\xi), \hat{a}^+(\xi')] &= \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Поскольку задача о построении  $\hat{\varphi}(\xi)$ ,  $\hat{\pi}(\xi)$ , удовлетворяющих (1.11), эквивалентна задаче о построении  $\hat{a}(\xi)$ ,  $\hat{a}^+(\xi)$ , удовлетворяющих (1.15), то соотношения (1.15) также называют CCR.

В теории систем тождественных частиц соотношениям (1.15) удовлетворяют операторы рождения  $\hat{a}^+(\xi)$  и уничтожения  $\hat{a}(\xi)$  в фоковском пространстве (см. дополнение А). Представление (1.15) с помощью этих операторов называется фоковским. Исходя из фоковского представления (1.15), можно построить представление (1.11) с помощью формул

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= (1/\sqrt{2}) (\hat{a}(\xi) + \hat{a}^+(\xi)); \\ \hat{\pi}(\xi) &= (i/\sqrt{2}) (\hat{a}^+(\xi) - \hat{a}(\xi))\end{aligned}$$

или с помощью более общих формул:

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(\xi) &= \int A(\xi, \eta) \hat{a}(\eta) d\eta + \int \bar{A}(\xi, \eta) \hat{a}^+(\eta) d\eta; \\ \hat{\pi}(\xi) &= \int B(\xi, \eta) \hat{a}(\eta) d\eta + \int \bar{B}(\xi, \eta) \hat{a}^+(\eta) d\eta,\end{aligned}$$

где  $A(\xi, \eta)$ ,  $B(\xi, \eta)$  — обобщенные функции, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}\int A(\xi, \eta) \bar{A}(\xi', \eta) d\eta &= \int \bar{A}(\xi, \eta) A(\xi', \eta) d\eta; \\ \int B(\xi, \eta) \bar{B}(\xi', \eta) d\eta &= \int \bar{B}(\xi, \eta) B(\xi', \eta) d\eta; \\ \int B(\xi, \eta) \bar{A}(\xi', \eta) d\eta - \int \bar{B}(\xi, \eta) A(\xi', \eta) d\eta &= \frac{1}{i} \delta(\xi - \xi')\end{aligned}$$

(подробнее о представлениях CCR см., например, [9]).

Сделаем несколько замечаний, объясняющих, как возникает задача о квантовании механических систем с функцией Гамильтона вида (1.8).

Рассмотрим одночастичное уравнение Шредингера

$$i \frac{d\psi}{dt} = H\psi,$$

где  $\psi \in L^2(E^3)$ ,  $H = \frac{1}{2m} \Delta + U(\hat{\xi})$ , и разделим в нем действительную и мнимую части, положив  $\psi(\xi) = (1/\sqrt{2}) (\varphi(\xi) +$



+  $i\pi(\xi)$ ). Тогда получим уравнения:  $\frac{d\varphi}{dt} = H\pi$ ;  $\frac{d\pi}{dt} = -H\varphi$ , или, подробнее,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(\xi, t)}{\partial t} &= \left(-\frac{1}{2m}\Delta + U(\xi)\right)\pi(\xi, t); \\ \frac{\partial\pi(\xi, t)}{\partial t} &= -\left(-\frac{1}{2m}\Delta + U(\xi)\right)\varphi(\xi, t).\end{aligned}$$

Легко видеть, что они образуют гамильтонову систему, т. е. являются уравнениями Гамильтона классической механической системы с функционалом Гамильтона:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\pi, \varphi) &= \frac{1}{2}(\langle H\pi, \pi \rangle + \langle H\varphi, \varphi \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \int \pi(\xi) \left(-\frac{\Delta}{2m} + U(\xi)\right) \pi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int \varphi(\xi) \left(-\frac{\Delta}{2m} + U(\xi)\right) \varphi(\xi) d(\xi).\end{aligned}\quad (1.16)$$

Полученную систему можно проквантовать; эта операция носит название вторичного квантования, поскольку само уравнение Шредингера получается с помощью квантования классической механической системы с функцией Гамильтона  $(\mathbf{p}^2/2m) + U(\xi)$ .

В результате квантования приходим к гамильтониану

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2} \int \hat{\pi}(\xi) \left(-\frac{\Delta}{2m} + U(\xi)\right) \hat{\pi}(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2} \int \hat{\varphi}(\xi) \left(-\frac{\Delta}{2m} + U(\xi)\right) \hat{\varphi}(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

где  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  — операторы, удовлетворяющие соотношениям (1.11) [функционал Гамильтона (1.16) не принадлежит к классу (1.8), но для квантования описываемой им механической системы вполне можно применить соображения, использованные для квантования функционалов Гамильтона вида (1.8)].

Перейдя к операторам (1.14), запишем гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} = \int \hat{a}^+(\xi) \left(-\frac{\Delta}{2m} + U(\xi)\right) \hat{a}(\xi) d\xi,\quad (1.17)$$

где  $\hat{a}(\xi)$ ,  $\hat{a}^+(\xi)$  — операторы, удовлетворяющие соотношениям (1.15). В виде (1.17) записывается оператор Гамильтона системы из любого числа тождественных не взаимодействующих нерелятивистских частиц с массой  $m$ , движущихся в потенциальном поле  $U(\xi)$  (см., например, [10]). Это означает, что с помощью вторичного квантования одночастичного уравнения Шредингера мы получаем уравнение Шредингера для системы тождественных не взаимодействующих бозонов. Аналогично можно получить и уравнение Шредингера для системы тождественных не взаимодействующих фермионов; для этого проведем вторичное квантование, пользуясь не коммутационными соотношениями (1.15), а каноническими антикоммутационными соотношениями (CAR):

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\xi), \hat{a}(\xi')]_+ &= [a^+(\xi), \hat{a}^+(\xi')]_+ = 0; \\ [\hat{a}(\xi), \hat{a}^+(\xi')]_+ &= \delta(\xi - \xi'). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Эту процедуру можно применить к любому гамильтониану, действующему в пространстве  $L^2(X)$ . В самом деле, пусть  $H(\xi, \eta)$  — ядро гамильтониана. Тогда уравнение Шредингера запишется следующим образом:

$$i \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} = \int H(\xi, \eta) \psi(\eta, t) d\eta. \quad (1.19)$$

Представляя функции  $\psi(\xi, t)$  и  $H(\xi, \eta)$  в виде

$$\psi(\xi, t) = (1/\sqrt{2}) (\varphi(\xi, t) + i\pi(\xi, t)); \quad H(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) + iB(\xi, \eta),$$

где  $\varphi$ ,  $\pi$ ,  $A$  и  $B$  — действительные функции, можно переписать (1.19) как систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t} &= \int A(\xi, \eta) \pi(\eta, t) d\eta + \int B(\xi, \eta) \varphi(\eta, t) d\eta; \\ \frac{\partial \pi(\xi, t)}{\partial t} &= - \int A(\xi, \eta) \varphi(\eta, t) d\eta + \int B(\xi, \eta) \pi(\eta, t) d\eta. \end{aligned}$$

Эти уравнения являются уравнениями Гамильтона классической механической системы с функционалом Гамильтона:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\pi, \varphi) &= \frac{1}{2} \int A(\xi, \eta) \pi(\xi) \pi(\eta) d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{2} \int A(\xi, \eta) \varphi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta + \\ &+ \int B(\xi, \eta) \pi(\xi) \varphi(\eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (1.20)$$

(при проверке данного утверждения следует воспользоваться тем, что из самосопряженности гамильтониана вытекают соотношения  $A(\xi, \eta) = A(\eta, \xi)$ ,  $B(\xi, \eta) = -B(\eta, \xi)$ ). Квантование полученной классической системы приводит к гамильтониану\*

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int A(\xi, \eta) \hat{\pi}(\xi) \hat{\pi}(\eta) + \frac{1}{2} \int A(\xi, \eta) \hat{\varphi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta) d\xi d\eta + \frac{1}{2} \int B(\xi, \eta) (\hat{\pi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta) + \hat{\varphi}(\eta) \hat{\pi}(\xi)) d\xi d\eta, \quad (1.21)$$

где  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\eta)$  — операторы, удовлетворяющие соотношениям (1.11).

Как было отмечено, придать операторный смысл выражению (1.21) не просто, поэтому, строго говоря, следует рассматривать (1.21) как формальное выражение, а  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\eta)$  — как символы, удовлетворяющие соотношениям (1.11). Введя обозначения (1.14) и отбросив несущественное постоянное слагаемое, запишем выражение (1.21) в виде

$$\hat{H} = \int H(\xi, \eta) \hat{a}^+(\xi) \hat{a}(\eta) d\xi d\eta, \quad (1.22)$$

где  $\hat{a}(\xi)$ ,  $\hat{a}^+(\eta)$  удовлетворяют соотношениям (1.15).

Гамильтониан (1.22) также описывает систему невзаимодействующих тождественных бозонов.

Если провести вторичное квантование уравнения (1.19), пользуясь CAR (каноническими антикоммутиационными соотношениями), то придем к гамильтониану, описывающему систему невзаимодействующих тождественных фермионов [он имеет тот же вид (1.22), но символы  $\hat{a}(\xi)$ ,  $\hat{a}^+(\eta)$  следует считать удовлетворяющими соотношениям (1.18)].

При построении релятивистской теории можно сначала написать релятивистское одночастичное уравнение, а затем, произведя вторичное квантование, получить из него гамильтониан системы тождественных частиц. Наиболее простым лоренц-инвариантным аналогом нерелятивистского уравнения Шредингера для свободной частицы

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi \quad (1.23)$$

\* При квантовании заменяем  $\pi(\xi) \varphi(\eta)$  симметризованным произведением  $1/2 (\hat{\pi}(\xi) \hat{\varphi}(\eta) + \hat{\varphi}(\eta) \hat{\pi}(\xi))$ ; это необходимо для самосопряженности гамильтониана  $\hat{H}$ .

является уравнение Клейна — Гордона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi + m^2 \varphi = 0 \quad (1.24)$$

(подробнее о лоренц-инвариантных уравнениях см. в § 21). Его можно рассматривать как уравнение движения классической механической системы с функционалом Гамильтона:

$$\mathcal{H}_0(\pi, \varphi) = \frac{1}{2} \int \pi^2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int (\nabla \varphi(\xi))^2 d\xi + \frac{1}{2} m^2 \int \varphi^2(\xi) d\xi. \quad (1.25)$$

Квантование этого уравнения приводит к гамильтониану

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \hat{\pi}^2(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int (\nabla \hat{\varphi}(\xi))^2 d\xi + \frac{1}{2} m^2 \int \hat{\varphi}^2(\xi) d\xi,$$

где  $\hat{\pi}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}(\xi)$  удовлетворяют соотношениям (1.11).

По аналогии с нерелятивистским случаем можно сказать, что  $H_0$  представляет собой гамильтониан системы тождественных релятивистских свободных частиц со спином 0. Чтобы рассмотреть взаимодействующие частицы, нужно к гамильтониану  $H_0$  добавить член вида  $V(\varphi)$ , описывающий взаимодействие. Таким образом, приходим к гамильтонианам вида (1.12).

Отметим, что уравнение Клейна — Гордона — не единственный релятивистский аналог уравнения Шредингера. В § 21 рассмотрено уравнение Дирака, описывающее релятивистские фермионы со спином 1/2. Применение к нему вторичного квантования приводит к гамильтониану системы тождественных свободных фермионов спина 1/2.

## § 2. Основные определения

Рассмотрим гамильтонианы вида

$$H = \frac{1}{2} \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + V, \quad (2.1)$$

где

$$V = \sum_m \int V_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_m) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_m, \quad (2.2)$$

а  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$  — символы\*, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \pi^+(x) &= \pi(x), & \varphi^+(x) &= \varphi(x); \\ [\pi(x), \pi(x')] &= [\varphi(x), \varphi(x')] = 0; \\ [\pi(x), \varphi(x')] &= (1/i) \delta(x-x') \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

(здесь  $x, x' \in E^3$ ).

Гамильтониан (2.1) будем пока понимать как формальное выражение, не сопоставляя ему никакого оператора. Будем считать этот гамильтониан формально эрмитовым, т. е. функции  $V_m$  будем предполагать действительными. Эти функции всегда можно считать симметричными. Иногда удобно записывать  $H$  в  $k$ -представлении, т. е. выражать его через символы  $\tilde{\pi}(k)$ ,  $\tilde{\varphi}(k)$ , связанные с  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$  преобразованием Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \pi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\pi}(k) \exp(i kx) dk, \\ \varphi(x) &= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\varphi}(k) \exp(i kx) dk. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Эти символы удовлетворяют соотношениям.

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\pi}^+(k) &= \tilde{\pi}(-k), & \tilde{\varphi}^+(k) &= \tilde{\varphi}(-k); \\ [\tilde{\pi}(k), \tilde{\pi}(k')] &= [\tilde{\varphi}(k), \tilde{\varphi}(k')] = 0; \\ [\tilde{\pi}(k), \tilde{\varphi}(k')] &= (1/i) \delta(k+k'). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Гамильтониан  $H$  записывается в  $k$ -представлении следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} \int \tilde{\pi}(k) \tilde{\pi}(-k) dk + V,$$

где

$$\tilde{V} = \sum_m \int \tilde{V}_m(k_1, \dots, k_m) \tilde{\varphi}(k_1) \dots \tilde{\varphi}(k_m) dk_1 \dots dk_m.$$

Условимся, что самосопряженный оператор  $\hat{H}$  (оператор энергии) в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  представляет собой операторную реализацию формального гамильтониана  $H$ , если в этом

\* Вместо обозначений  $\hat{\pi}(x)$ ,  $\hat{\varphi}(x)$ , использовавшихся в § 1 для символов, удовлетворяющих CCR, применим здесь обозначения  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$ .



пространстве заданы нормированный вектор  $\Phi$  и операторная функция  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ , обобщенная по переменной  $\mathbf{x}$  таким образом, что выполняются условия:

1)  $\hat{H}\Phi = 0$ ; вектор  $\Phi$  является основным состоянием оператора энергии  $\hat{H}$ ;

2) для операторной функции  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  справедливы соотношения:

$$\exp(i\hat{H}\tau)\varphi(\mathbf{x}, t)\exp(-i\hat{H}\tau) = \varphi(\mathbf{x}, t + \tau); \quad (2.6)$$

$$\varphi^+(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t); \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= [\pi(\mathbf{x}', t), \pi(\mathbf{x}', t)] = 0; \\ [\pi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] &= (1/i)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

где

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t); \quad (2.9)$$

3) вектор  $\Phi$  — циклический относительно операторов

$$\varphi(f, t) = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x};$$

4) операторная функция  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет также уравнениям, зависящим от вида функций  $V_m$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = - \sum_m m \int V_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{m-1}) \varphi(\mathbf{x}_1, t) \dots \dots \varphi(\mathbf{x}_{m-1}, t) d^{m-1} \mathbf{x}. \quad (2.10)$$

Точнее было бы сказать, что операторной реализацией формального гамильтониана  $H$  называется набор, состоящий из всех описанных выше объектов  $\mathcal{H}, \hat{H}, \Phi, \varphi(\mathbf{x}, t)$ . Операторную обобщенную функцию  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  называют полевым оператором (по отношению к  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  употребляется также термин «квантованное поле»).

Отметим, что условия 1—3 носят общий характер и не зависят от конкретного вида функций  $V_m$ . Уравнения (2.10) представляют собой гейзенберговские уравнения, формально написанные по гамильтониану  $H$ . Можно сказать, что построение операторной реализации по  $H$  состоит в отыскании решения гейзенберговских уравнений (2.10), удовлетворяющего естественным условиям 1—3.

Требование  $\hat{H} \Phi = 0$  следует рассматривать просто как соглашение отсчитывать энергию от энергии основного состояния (если оно не выполнено, то всегда можно добиться его выполнения, заменив оператор  $\hat{H}$  на  $\hat{H} - \langle \hat{H} \Phi, \Phi \rangle$ ). Выполнить условие 3 можно, заменив пространство  $\mathcal{H}$  наименьшим подпространством пространства  $\mathcal{H}$ , содержащим все векторы вида  $\varphi(f_1, t_1) \dots \varphi(f_n, t_n) \Phi$ . Из равенства (2.6) следует, что полевой оператор  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = i [\hat{H}, \varphi(\mathbf{x}, t)],$$

т. е.  $\hat{H}$  определяет изменение со временем полевого оператора. Наконец, равенства (2.7), (2.8) означают, что  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\pi(\mathbf{x}, t)$  при фиксированном  $t$  удовлетворяют CCR.

Указанное определение операторной реализации нуждается в некоторых уточнениях. Говоря, что полевой оператор  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  является обобщенной функцией по переменной  $\mathbf{x}$ , имеем в виду, что заданы операторы  $\varphi(f, t)$ , линейно зависящие от основной функции  $f$ ; записываем их в виде  $\varphi(f, t) = \int f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ . Предполагаем, что  $\varphi(f, t)$  определены на одном и том же множестве  $D$ , и переводят это множество в себя. Условие (2.7) означает, что оператор  $\varphi(f, t)$  эрмитов, если функция  $f$  действительна. Операторы  $\pi(f, t) = \frac{d}{dt} \varphi(f, t)$  определяют операторную обобщенную функцию  $\pi(\mathbf{x}, t)$  с помощью соотношения  $\pi(f, t) = \int \dot{f}(\mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ . (Предполагается, что для всякого вектора  $\Psi \in D$  предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(f, t+h) - \varphi(f, t)}{h} \Psi$$

существует и принадлежит множеству  $D$ ; таким образом, оператор  $\pi(f, t)$  также определен на  $D$  и переводит множество  $D$  в себя.) Равенства (2.8) означают, что

$$[\pi(f_1, t), \pi(f_2, t)] = [\varphi(f_1, t), \varphi(f_2, t)] = 0;$$

$$[\pi(f_1, t), \varphi(f_2, t)] = (1/i) \int \dot{f}_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Ради определенности основные функции  $f$  считаем принадлежащими пространству гладких, быстро убывающих функций  $\mathcal{S}(E^3)$ . Предполагаем также, что для любых  $\Psi_1, \Psi_2 \in D$  функция  $\langle \varphi(f, t) \Psi_1, \Psi_2 \rangle$  непрерывно зависит от  $f \in \mathcal{S}$  в топологии пространства  $\mathcal{S}$ . При этом условии можно придать смысл оператора, определенного на множестве  $D$ , любому выражению вида

$$\int g(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n, t_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n,$$

где  $g \in \mathcal{S}(E^{3n})$  (см., например, [11]).



Уравнение (2.10) более аккуратно следует записать в виде

$$\frac{d^2\varphi(f, t)}{dt^2} = - \sum_m m \int f(x) V_m(x, x_1, \dots, x_{m-1}) \varphi(x_1, t) \dots \varphi(x_{m-1}, t) dx dx_1 \dots dx_{m-1}, \quad (2.11)$$

где  $f \in \mathcal{S}(E^3)$ ; из сделанного замечания вытекает, что правая часть равенства (2.11) имеет смысл, если для всякой функции  $f \in \mathcal{S}(E^3)$  функция  $\int f(x) V_m(x, x_1, \dots, x_{m-1}) dx$  принадлежит пространству  $\mathcal{S}(E^{3(m-1)})$  (это требование выполнено, например, когда  $V_m \in \mathcal{S}(E^{3m})$  или  $V_m(x_1, \dots, x_m) = v_m(x_1 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m)$ , где  $v_m \in \mathcal{S}(E^{3(m-1)})$ , а также когда  $m = 2$ ,  $V_2(x_1, x_2) = v(x_1 - x_2)$ , преобразование Фурье функции  $v(x)$  является гладкой функцией, все производные которой имеют не более чем степенной рост.

В гл. 4 несколько подробнее рассматривается построение операторной реализации формального гамильтониана. Здесь же считаем, что это построение тем или иным способом произведено.

Нередко вместо операторной обобщенной функции  $\varphi(x, t)$  бывает удобно рассматривать ее преобразование Фурье по переменной  $x$ :

$$\tilde{\varphi}(k, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i kx) \varphi(x, t) dx.$$

Данная функция, очевидно, удовлетворяет соотношениям:

$$\exp(i \hat{H}\tau) \tilde{\varphi}(k, t) \exp(-i \hat{H}\tau) = \tilde{\varphi}(k, t + \tau); \quad (2.12)$$

$$\tilde{\varphi}^+(k, t) = \tilde{\varphi}(-k, t); \quad (2.13)$$

$$[\tilde{\varphi}(k, t), \tilde{\varphi}(k', t)] = [\tilde{\pi}(k, t), \tilde{\pi}(k', t)] = 0; \quad (2.14)$$

$$[\tilde{\pi}(k, t), \tilde{\varphi}(k', t)] = (1/i) \delta(k + k'); \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(k, t)}{\partial t^2} = \\ & = - \sum_m m \int V_m(-k, k_1, \dots, k_{m-1}) \tilde{\varphi}(k_1, t) \dots \tilde{\varphi}(k_{m-1}, t) d^{m-1} k, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{\pi}(k, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(k, t) = (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i kx) \pi(x, t) dx;$$

$$\begin{aligned} & \tilde{V}_m(k_1, \dots, k_m) = \\ & = (2\pi)^{-\frac{3}{2}m} \int V_m(x_1, \dots, x_m) \exp\left(i \sum_j k_j x_j\right) d^m k. \end{aligned}$$

Простейшими из гамильтонианов (2.1) являются выражения

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int v(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \quad (2.17)$$

(свободные гамильтонианы).

Гейзенберговские уравнения для полевых операторов  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  и  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)$  в этом случае приобретают вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\mathbf{x}, t) + \int v(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = 0; \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) + \tilde{v}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где  $\tilde{v}(\mathbf{k}) = \int v(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Легко убедиться, что, если существует операторная реализация формального гамильтониана  $H_0$ , функция  $\tilde{v}(\mathbf{k}) \geq 0$ . В самом деле, рассмотрим в пространстве  $\mathcal{H}$  операторной реализации гамильтониана  $H_0$  вектор (точнее, обобщенную векторную функцию)  $\Phi(\mathbf{k}, t) = \varphi(\mathbf{k}, t) \Phi$ . Пользуясь, с одной стороны, уравнением (2.18), а с другой — соотношением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(\mathbf{k}, t) &= i \frac{\partial}{\partial t} [\hat{H}, \varphi(\mathbf{k}, t)] = - [\hat{H}, [\hat{H}, \varphi(\mathbf{k}, t)]] = \\ &= -\hat{H}^2 \varphi(\mathbf{k}, t) + 2\hat{H} \varphi(\mathbf{k}, t) \hat{H} - \varphi(\mathbf{k}, t) \hat{H}^2, \end{aligned}$$

убеждаемся, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\mathbf{k}, t) = -\tilde{v}(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}, t) = -\hat{H}^2 \Phi(\mathbf{k}, t). \quad (2.19)$$

Если  $\tilde{v}(\mathbf{k}) < 0$  в некоторой области, то из неотрицательности оператора  $\hat{H}^2$  и равенства (2.19) заключаем, что  $\Phi(\mathbf{k}, t) = 0$  при  $\mathbf{k}$ , пробегающем эту область. Таким образом,

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) \Phi = 0; \quad \tilde{\pi}(\mathbf{k}, t) \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) \Phi = 0$$

в области, где  $\tilde{v}(\mathbf{k}) < 0$ , а это противоречит соотношению (2.15).

Более тонкие рассуждения показывают, что если формальный гамильтониан  $H_0$  имеет операторную реализацию, функ-

ция  $\tilde{v}(\mathbf{k})$  почти везде положительна (т. е.  $\tilde{v}(\mathbf{k})$  может обращаться в нуль только на множестве меры  $0^*$ ).

Рассмотрим операторную реализацию гамильтониана  $H_0$ , считая, что  $\tilde{v}(\mathbf{k}) = \varepsilon^2(\mathbf{k})$ , где  $\varepsilon(\mathbf{k})$  — почти везде положительная функция. Удобно ввести операторные обобщенные функции в пространстве  $\mathcal{H}$ :

$$a(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})} \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}, t) - \frac{i}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})}} \tilde{\pi}(-\mathbf{k}, t) \right];$$

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) + \frac{i}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})}} \tilde{\pi}(\mathbf{k}, t) \right].$$

Как легко видеть, они удовлетворяют ССР при фиксированном  $t^{**}$  и подчиняются уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= i[\hat{H}, a(\mathbf{k}, t)] = -i\varepsilon(\mathbf{k})a(\mathbf{k}, t); \\ \frac{\partial a^+(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= i[\hat{H}, a^+(\mathbf{k}, t)] = i\varepsilon(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Решая уравнения (2.20), получаем:

$$a(\mathbf{k}, t) = \exp(-i\varepsilon(\mathbf{k})t) a(\mathbf{k}, 0);$$

$$a^+(\mathbf{k}, t) = \exp(i\varepsilon(\mathbf{k})t) a^+(\mathbf{k}, 0).$$

Справедливо соотношение  $a(\mathbf{k}, t)\Phi = 0$ , так как если бы  $a(\mathbf{k}, t)\Phi \neq 0$ , то равенство

$$\hat{H}a(\mathbf{k}, t)\Phi = a(\mathbf{k}, t)\hat{H}\Phi - \varepsilon(\mathbf{k})a(\mathbf{k}, t)\Phi = -\varepsilon(\mathbf{k})a(\mathbf{k}, t)\Phi$$

противоречило бы положительности оператора  $\hat{H}$ . Поскольку вектор  $\Phi$  — циклический относительно операторной обобщенной функции  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)$ , он циклический и относительно  $a^+(\mathbf{k}, t)$ ,  $a(\mathbf{k}, t)$ . Отсюда следует, что представление ССР в пространстве  $\mathcal{H}$ , определяемое операторными обобщенными функциями  $a^+(\mathbf{k}, t)$ ,  $a(\mathbf{k}, t)$  при фиксированном  $t$ , фоковское.

\* Говорят, что некоторое свойство выполняется почти везде, если множество тех  $\mathbf{k}$ , для которых оно нарушается, имеет нулевой объем (точнее, меру  $0$  в смысле Лебега). В этом случае пользуются также выражением: свойство выполнено для почти всех  $\mathbf{k}$ .

\*\* При проверке ССР следует использовать четность функции  $\varepsilon(\mathbf{k})$  [по предположению, функция  $v(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  симметрична, т. е.  $v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = v(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ , а отсюда вытекает четность  $v(\mathbf{x})$ ,  $\tilde{v}(\mathbf{k})$  и  $\varepsilon(\mathbf{k})$ ].

Можно теперь сконструировать по формальному выражению  $H_0$  пространство  $\mathcal{H}$  как фоковское пространство  $F(E^3)$ . Оператор  $\hat{H}$  и операторную обобщенную функцию  $\varphi(x, t)$  определим через операторы рождения  $a^+(\mathbf{k})$  и уничтожения  $a(\mathbf{k})$ :

$$\varphi(x, t) = (2\pi)^{-3/2} \int [a^+(\mathbf{k}) \exp(i\varepsilon(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}x) + a(\mathbf{k}) \exp(-i\varepsilon(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}x)] \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k})}}.$$

Вектор  $\Phi$  зададим как вакуумный вектор фоковского представления. Легко проверить, что условия 1—4 выполнены, т. е. построена операторная реализация гамильтониана  $H_0$ . Из приведенных выше рассуждений вытекает однозначность этой конструкции (с точностью до унитарной эквивалентности).

Отметим, что в пространстве  $\mathcal{H}$  можно ввести (векторный) оператор импульса  $\mathbf{P} = \int \mathbf{k} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ , имеющий физический смысл оператора бесконечно малого параллельного переноса. Эта интерпретация оператора  $\mathbf{P}$  подсказывается соотношением

$$\exp(i\mathbf{P}\alpha) \varphi(x, t) \exp(-i\mathbf{P}\alpha) = \varphi(x - \alpha, t).$$

Все компоненты  $\mathbf{P}$  коммутируют между собой и с оператором энергии  $\hat{H}$ .

Пусть теперь гамильтониан  $H$  имеет вид  $H = H_0 + W$ , где  $H_0$  — свободный гамильтониан, а

$$W = \sum \int W_m(x_1, \dots, x_m) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_m) d^m x.$$

Тогда напрашивается следующий метод построения операторной реализации  $H$ . Рассмотрим операторную реализацию свободного гамильтониана  $H_0$ ; оператор энергии в ней обозначим  $\hat{H}_0$ , его основное состояние —  $\Phi_0$ , а полевой оператор —  $\varphi_0(x, t)$ . В пространстве этой операторной реализации рассмотрим оператор  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$ , где

$$\hat{W} = \sum \int W_m(x_1, \dots, x_m) \varphi_0(x_1, 0) \dots \varphi_0(x_m, 0) d^m x,$$

и операторные обобщенные функции

$$\varphi(x, t) = \exp(i\hat{H}t) \varphi_0(x, 0) \exp(-i\hat{H}t).$$

Простые формальные вычисления показывают, что  $\hat{H}$  и  $\varphi(x, t)$  удовлетворяют условиям 2 и 4 операторной реализации. Чтобы построить операторную реализацию формального гамильтониана  $H$ , остается проверить только наличие у оператора  $\hat{H}$  основного состояния  $\Phi$  (как было замечено выше, выполнения условия  $\hat{H}\Phi = 0$  и условия 3 можно тогда добиться с помощью простых модификаций оператора энергии

и гильбертова пространства). К сожалению, описанная конструкция операторной реализации работает далеко не во всех случаях. Главным препятствием к ее применению является то, что указанное определение оператора  $\hat{H}$  не всегда имеет смысл (пересечение областей определения  $\hat{H}_0$  и  $\hat{W}$  может не быть плотным множеством; иногда оно состоит из единственной точки 0). В частности, нельзя описанным выше способом поставить в соответствие выражению  $H$  самосопряженный оператор в наиболее интересном случае, когда гамильтониан  $H$  трансляционно-инвариантен, т. е. функции  $W_m$  зависят только от разностей  $x_i - x_m$ . В самом деле, оператор импульса  $P$  имеет единственный *нормированный* собственный вектор  $\Phi_0$ . В трансляционно-инвариантном случае  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{W}$  должен коммутировать с  $P$ , поэтому вектор  $\hat{H}\Phi_0$  также должен быть собственным вектором оператора  $P$ , откуда

$$\hat{H}\Phi_0 = \lambda\Phi_0. \quad (2.21)$$

Однако прямые вычисления показывают, что равенство (2.21) не выполнено (более того, вектор  $\Phi_0$  не входит в область определения  $\hat{H}$ ). Существенно лучше ситуация, когда все функции  $W_m$  принадлежат пространству  $\mathcal{S}$ . В этом случае нетрудно проверить, что выражение  $\hat{H}_0 + \hat{W}$  определяет эрмитов оператор, а также указать условия на функции  $W_m$ , обеспечивающие ограниченность снизу этого оператора (напомним, что ограниченный снизу эрмитов оператор всегда можно расширить до самосопряженного). Операторы вида  $\hat{H}_0 + \hat{W}$  изучались во многих работах (см., например, [12]).

### § 3. Функции Грина

Пусть  $\mathcal{H}$ ,  $\hat{H}$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi(x, t)$  — операторная реализация гамильтониана вида (2.1).

Назовем *n-точечной функцией Грина*  $G_n$  среднее значение  $T$ -произведения  $T(\varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n))$  по вектору  $\Phi$ :

$$G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \langle T(\varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n)) \Phi, \Phi \rangle. \quad (3.1)$$

$T$ -произведение операторов  $\varphi(x_1, t_1), \dots, \varphi(x_n, t_n)$  определяется как произведение этих операторов, расположенных в порядке убывания времен:

$$T(\varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n)) = \varphi(x_{i_1}, t_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_n}, t_{i_n}),$$

где  $i_1, \dots, i_n$  — перестановка, для которой  $t_{i_1} \geq \dots \geq t_{i_n}$ . Иными словами,

$$T(\varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n)) = \sum_P \theta(t_{j_1} - t_{j_2}) \dots \\ \dots \theta(t_{j_{n-1}} - t_{j_n}) \varphi(x_{j_1}, t_{j_1}) \dots \varphi(x_{j_n}, t_{j_n}).$$

[Здесь сумма берется по всем перестановкам  $P = (j_1, \dots, j_n)$ .]

Функция Грина  $G_n$  является обобщенной функцией от переменных  $x_1, \dots, x_n$  и обычной от переменных  $t_1, \dots, t_n$ . Сделаем, однако, предположение, что ее можно рассматривать также как обобщенную функцию от  $t_1, \dots, t_n$ , т. е. она растет не быстрее некоторой степени  $|t_1| + \dots + |t_n|$ . Это предположение позволяет рассматривать преобразование Фурье по  $t_1, \dots, t_n$ .

Функцией Грина в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении называется функция  $\tilde{G}_n$ , связанная с  $G_n$  соотношением

$$\begin{aligned} G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) &= \\ &= (2\pi)^{-2n} \int \exp(-i \sum \omega_j t_j + i \sum \mathbf{k}_j x_j) \times \\ &\times \tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) d^n \mathbf{k} d^n \omega. \end{aligned}$$

Часто удобно считать функции  $G_n$  и  $\tilde{G}_n$  зависящими от точек четырехмерного пространства  $x_1 = (x_1, t_1), \dots, x_n = (x_n, t_n)$  [соответственно  $k_1 = (\mathbf{k}_1, \omega_1), \dots, k_n = (\mathbf{k}_n, \omega_n)$ ].

Функция Грина в  $(\mathbf{k}, t)$ -представлении определяется формулой

$$\begin{aligned} \check{G}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) &= \langle T(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n) \Phi, \Phi) \rangle = \\ &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}n} \int \exp(-i \sum \mathbf{k}_j x_j) G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) d^n \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отметим следующие простые свойства функций Грина:

1) функции  $G_n(x_1, \dots, x_n)$  и  $\tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n)$  симметричны, поскольку под знаком  $T$ -произведения можно переставлять сомножители;

2) из соотношения

$$\exp(i \hat{H}\tau) \varphi(\mathbf{x}, t) \exp(-i \hat{H}\tau) = \varphi(\mathbf{x}, t + \tau)$$

легко получить

$$G_n(x_1, t_1 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau) = G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$$

для любого числа  $\tau$ .

Для свободного гамильтониана  $H_0$  вида (2.17)  $n$ -точечную функцию Грина просто вычислить, пользуясь указанной в конце § 1 операторной реализацией. В частности, двухточечные функции Грина для гамильтониана  $H_0$  имеют вид:

$$G_2^{(0)}(x_1, t_1, x_2, t_2) = D_F(x_1 - x_2, t_1 - t_2);$$

$$\tilde{G}_2^{(0)}(\mathbf{k}_1, \omega_1, \mathbf{k}_2, \omega_2) = \tilde{D}_F(\mathbf{k}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2),$$

где

$$D_F(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (\exp(-i \varepsilon(\mathbf{p}) t) \theta(t) + \exp(i \varepsilon(\mathbf{p}) t) \theta(-t)) \exp(i \mathbf{p} x) \frac{d\mathbf{p}}{2\varepsilon(\mathbf{p})};$$

$$\tilde{D}_F(\mathbf{p}, \omega) = \frac{i}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{p}) + i0}.$$

Чтобы убедиться в справедливости этих соотношений, достаточно воспользоваться тем, что

$$\begin{aligned} \check{G}_2(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{p}_2, t_2) &= \langle T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2)) \Phi, \Phi \rangle = \\ &= [\langle T(a^+(-\mathbf{p}_1, t_1) a(\mathbf{p}_2, t_2)) \Phi, \Phi \rangle + \\ &+ \langle T(a(\mathbf{p}_1, t_1) a^+(-\mathbf{p}_2, t_2)) \Phi, \Phi \rangle] \frac{1}{2 \sqrt{\varepsilon(\mathbf{p}_1) \varepsilon(\mathbf{p}_2)}} = \\ &= \frac{1}{2\varepsilon(\mathbf{p}_1)} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) (\theta(t_1 - t_2) \exp[-i \varepsilon(\mathbf{p}_1)(t_1 - t_2)] + \\ &+ \theta(t_2 - t_1) \exp[i \varepsilon(\mathbf{p}_1)(t_1 - t_2)]). \end{aligned}$$

Через  $G_2^{(0)}$  легко выражается  $n$ -точечная функция Грина  $G_n^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$  гамильтониана  $H_0$ . Именно при  $n$  нечетном  $G_n^{(0)} = 0$ , при  $n = 2m$

$$G_{2m}^{(0)}(x_1, \dots, x_{2m}) = \sum D_F(x_{i_1} - x_{j_1}) \dots D_F(x_{i_m} - x_{j_m})$$

[сумма берется по всем разбиениям множества  $\{1, \dots, 2m\}$  на пары  $(i_1, j_1) \dots (i_m, j_m)$ ].

Пользуясь (2.10), можно написать систему зацепляющихся уравнений для функций  $G_n$  произвольного гамильтониана  $H$ . Дважды дифференцируя соотношение (3.1) по  $t_1$  и усредняя по вектору  $\Phi$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) &= - \sum_m m \int V_m(x_1, y_1, \dots, y_{m-1}) \times \\ &\times G_{n+m-2}(y_1, t_1, \dots, y_{m-1}, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dy_1 \dots dy_{m-1} + \\ &+ \frac{1}{i} \sum_{j=2}^n \delta(t_1 - t_j) \delta(x_1 - x_j) G_{n-2}(x_2, t_2, \dots, x_{j-1}, t_{j-1}; \\ &x_{j+1}, t_{j+1}, \dots, x_n, t_n). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проведем подробно вывод уравнения (3.2) при  $n = 2$ . Выражение для  $T$ -произведения при  $n=2$  приобретает вид

$$\begin{aligned} T(\varphi(x_1, t_1) \varphi(x_2, t_2)) &= \\ &= \theta(t_1 - t_2) \varphi(x_1, t_1) \varphi(x_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \varphi(x_2, t_2) \varphi(x_1, t_1). \end{aligned}$$

Дифференцируя его дважды по  $t_1$  и воспользовавшись одновременными коммутационными соотношениями, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} T(\varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \varphi(\mathbf{x}_2, t_2)) = \\ & = \theta(t_1 - t_2) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1^2} \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1^2} + \\ & + \delta(t_1 - t_2) \left[ \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1} \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) - \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial t_1} [\delta(t_1 - t_2) (\varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) - \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) \varphi(\mathbf{x}_1, t_1))] = \\ & = \theta(t_1 - t_2) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1^2} \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \varphi(\mathbf{x}_2, t_2) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}_1, t_1)}{\partial t_1^2} + \\ & + \frac{1}{i} \delta(t_1 - t_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}_1, t)}{\partial t^2} = - \sum_n n \int V_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \varphi(\mathbf{x}_2, t) \dots \varphi(\mathbf{x}_n, t) d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_n$$

и что

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G_2(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} T(\varphi(\mathbf{x}_1, t_1) \varphi(\mathbf{x}_2, t_2)) \Phi, \Phi \right\rangle,$$

получаем нужное уравнение.

На выводе (3.2) в общем случае не будем останавливаться, так как он отличается от проведенного только большей громоздкостью вычислений.

Уравнения (3.2) неоднозначно определяют функции  $G_n$  уже потому, что при их выводе не использовались какие-либо свойства вектора  $\Phi$ . Поэтому нужно присоединить к этим уравнениям, так сказать, «граничные условия» — свойства функций  $G_n$ , отражающие то, что вектор  $\Phi$  является основным состоянием гамильтониана  $H$ .

Пойдем по другому пути — вместо дифференциальных по времени уравнений (3.2) напомним интегральные уравнения, имеющие уже (по крайней мере в рамках теории возмущений) единственное решение.

Запишем гамильтониан  $H$  как сумму

$$\begin{aligned} H = H_0 + V = & \frac{1}{2} \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int v(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} + \\ & + \sum_n \int V_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n, \end{aligned} \quad (3.3)$$



заменяя в (2.1) обозначения: функция  $V_2(x_1, x_2)$  в новых обозначениях есть  $\frac{1}{2}v(x_1 - x_2) + V_2(x_1, x_2)$ ; функции  $V_n$  при  $n \geq 3$  не меняются. Считаем, что  $v(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \times$

$\times \int \exp(-ikx) \tilde{v}(k) dk, \tilde{v}(k) = \varepsilon^2(k), \varepsilon(k)$  почти везде положительно,  $V_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \int \exp(-i \sum_{j=1}^n k_j x_j) \times$   
 $\times \tilde{V}_n(k_1, \dots, k_n) dk_1, \dots, dk_n$ . Напомним, что гамильтонианы вида  $H_0$  мы называем *свободными*;  $V = H - H_0$  будем называть *возмущением* или *взаимодействием*.

Гамильтониан  $H_0$  можно выделить *разными способами*: деление  $H$  на свободный гамильтониан и возмущение *не имеет физического смысла* и производится только из соображений удобства вычислений.

Уравнения (3.2) для гамильтониана  $H = H_0 + V$  имеют вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \\ & = - \int v(x_1 - y_1) G_n(y_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) dy_1 - \\ & \quad - \sum_m m \int V_m(x_1, y_1, \dots, y_{m-1}) \times \\ & \times G_{n+m-2}(y_1, t_1, \dots, y_{m-1}, t_{m-1}, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) d^{m-1}y + \\ & \quad + \frac{1}{i} \sum_{j=2}^n \delta(x_1 - x_j) \delta(t_1 - t_j) \times \\ & \times G_{n-2}(x_2, y_2, \dots, x_{j-1}, t_{j-1}, x_{j+1}, t_{j+1}, \dots, x_n, t_n). \end{aligned}$$

Удобнее переписать их в  $(k, \omega)$ -представлении:

$$\begin{aligned} & (\omega_1^2 - \varepsilon^2(k_1)) G_n(k_1, \omega_1, \dots, k_n, \omega_n) = \\ & = \sum_m m \int \tilde{V}_m(-k_1, q_1, \dots, q_{m-1}) \times \\ & \times \tilde{G}_{n+m-2}(q_1, \tilde{\omega}_1, \dots, q_{m-1}, \tilde{\omega}_{m-1}, k_2, \omega_2, \dots, k_n, \omega_n) \times \\ & \times \delta(\tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_{m-1} - \omega_1) \frac{d^{m-1}q d^{m-1}\tilde{\omega}}{(2\pi)^{(m-2)/2}} - \\ & \quad - \frac{1}{i} \sum_j \delta(\omega_1 + \omega_j) \delta(k_1 + k_j) \times \\ & \times \tilde{G}_{n-2}(k_2, \omega_2, \dots, k_{j-1}, \omega_{j-1}, k_{j+1}, \omega_{j+1}, \dots, k_n, \omega_n), \quad (3.4) \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) = & F(\mathbf{k}_1, \omega_1) \times \\
 & \times \left\{ \sum_m m \int \tilde{V}_m(-\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m-1}) \times \right. \\
 & \times \tilde{G}_{n+m-2}(\mathbf{q}_1, \tilde{\omega}_1, \dots, \mathbf{q}_{m-1}, \tilde{\omega}_{m-1}, \mathbf{k}_2, \omega_2, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) \times \\
 & \times \delta(\tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_{m-1} - \omega_1) \frac{d^{m-1} \mathbf{q} d^{m-1} \tilde{\omega}}{(2\pi)^{(m-2)/2}} - \\
 & \left. - \frac{1}{i} \sum_{j=2}^m \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_j) \delta(\omega_1 + \omega_j) \times \right. \\
 & \left. \times \tilde{G}_{n-2}(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_{j-1}, \omega_{j-1}, \mathbf{k}_{j+1}, \omega_{j+1}, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) \right\}, \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

где  $F(\mathbf{k}, \omega)$  удовлетворяет условию

$$(\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k})) F(\mathbf{k}, \omega) = 1.$$

Это условие неоднозначно определяет функцию  $F(\mathbf{k}, \omega)$ . При  $V = 0$ , очевидно,

$$F(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{i} \tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega).$$

Если исходить из того, что при  $V \neq 0$  следует выбирать функцию  $F$  точно в таком же виде, то приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) = & \sum_{j=2}^n \tilde{D}_F(\mathbf{k}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_j) \delta(\omega_1 + \omega_j) \times \\
 & \times \tilde{G}_{n-2}(\mathbf{k}_2, \omega_2, \dots, \mathbf{k}_{j-1}, \omega_{j-1}, \mathbf{k}_{j+1}, \omega_{j+1}, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) + \\
 & + \frac{1}{i} \tilde{D}_F(\mathbf{k}_1, \omega_1) \sum_m m \int \tilde{V}_m(-\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_{m-1}) \times \\
 & \times \tilde{G}_{m+n-2}(\mathbf{q}_1, \tilde{\omega}_1, \dots, \mathbf{q}_{m-1}, \tilde{\omega}_{m-1}, \mathbf{k}_2, \omega_2, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) \times \\
 & \times \delta(\tilde{\omega}_1 + \dots + \tilde{\omega}_{m-1} - \omega_1) \frac{d^{m-1} \mathbf{q} d^{m-1} \tilde{\omega}}{(2\pi)^{(m-2)/2}}, \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

или в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении

$$\begin{aligned}
 G_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = & \sum_{j=2}^n D_F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_j, t_1 - t_j) \times \\
 & \times G_{n-2}(\mathbf{x}_2, t_2, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, t_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, t_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) + \\
 & + \frac{1}{i} \int D_F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'_1, t_1 - t'_1) \sum_m m V_m(\mathbf{x}'_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}) \times \\
 & \times G_{n+m-2}(\mathbf{y}_1, t'_1, \dots, \mathbf{y}_{m-1}, t'_1, \mathbf{x}_2, t_2, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \times \\
 & \times d\mathbf{x}'_1 dt'_1 d^{m-1} \mathbf{y}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Не будем приводить полное обоснование перехода от уравнений (3.4) к (3.6). Исследуем только случай  $n = 2$ .

Учтем прежде всего, что функцию  $G_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2)$  можно записать в форме

$$\begin{aligned} \check{G}_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) &= \langle T(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2, t_2)) \Phi, \Phi \rangle = \\ &= \theta(t_1 - t_2) \check{\omega}_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) + \theta(t_2 - t_1) \check{\omega}_2(\mathbf{k}_2, t_2, \mathbf{k}_1, t_1), \end{aligned}$$

где  $\check{\omega}_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle$  (функции  $\check{\omega}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n) \Phi, \Phi \rangle$  носят название функций Уайтмана). Пользуясь инвариантностью относительно сдвига по времени, представим функцию Уайтмана в виде

$$\check{\omega}_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) = v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t_1 - t_2),$$

а функцию Грина — как

$$\check{G}_2(\mathbf{k}_1, t_1, \mathbf{k}_2, t_2) = \check{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t_1 - t_2),$$

где

$$\check{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) = \theta(t) v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) + \theta(-t) v(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -t). \quad (3.8)$$

Заметим, что обобщенная функция  $\check{v}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \int \exp(i\omega t) v(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) dt$  обращается в нуль при  $\omega < 0$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \check{v}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) &= \int \exp(i\omega t) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2, 0) \Phi, \Phi \rangle dt = \\ &= \int \langle \exp(i\omega t) \exp(-i\hat{H}t) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_2, 0) \Phi, \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}_1, 0) \Phi \rangle dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что для любого вектора  $\Psi \in \mathcal{H}$  в силу неотрицательности оператора  $\hat{H}$

$$\int \exp(i\omega t) \exp(-i\hat{H}t) \Psi dt = 0, \quad (3.9)$$

при  $\omega < 0$  получаем нужное свойство функции  $\check{v}$ . Соотношение (3.9) легко получается, если разложить вектор  $\Psi$  по обобщенным собственным векторам  $\Psi_\lambda$  оператора  $\hat{H}$ :

$$\begin{aligned} &\int \exp(i\omega t) \exp(-i\hat{H}t) \left( \int c(\lambda) \Psi_\lambda d\lambda \right) dt = \\ &= \int \exp[i(\omega - E_\lambda)t] c(\lambda) \Psi_\lambda d\lambda dt = 2\pi \int \delta(\omega - E_\lambda) c(\lambda) \Psi_\lambda d\lambda. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье к (3.8), убеждаемся, что функцию  $\tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \int \exp(i\omega t) G_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, t) dt$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) &= \frac{i}{2\pi} \int \frac{\tilde{v}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \sigma)}{\omega - \sigma + i0} d\sigma + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int \frac{\tilde{v}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \sigma)}{-\omega - \sigma + i0} d\sigma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\tilde{v}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \sigma) = 0$  при  $\sigma < 0$ . Формула (3.10) является одной из форм представления Челлена — Лемана (см. также § 16). Представление (3.10) играет роль «граничного условия» к уравнению (3.4), позволяющего преобразовать его в (3.6).

Введем функции:

$$\begin{aligned} A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) &= \frac{i}{2\pi} \int \frac{\tilde{v}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \sigma)}{z - \sigma} d\sigma; \\ A^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) &= \frac{i}{2\pi} \int \frac{\tilde{v}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, \sigma)}{-z - \sigma} d\sigma = A^{(1)}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1, -z), \end{aligned}$$

где  $z$  — комплексное число. Функция  $A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z)$  аналитична всюду в плоскости  $z$ , за исключением положительной действительной полуоси; функция  $A^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z)$  аналитична всюду, за исключением отрицательной действительной полуоси. В силу равенства (3.10) функция  $\tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega)$  может быть представлена в форме

$$\tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \tilde{G}_a(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) + \tilde{G}_r(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega),$$

где

$$\tilde{G}_a(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega + i0);$$

$$\tilde{G}_r(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = A^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega - i0),$$

т. е.  $\tilde{G}_a$  — предельное значение функции  $A^{(1)}$  при подходе к действительной оси со стороны верхней полуплоскости, а функция  $\tilde{G}_r$  — предельное значение функции  $A^{(2)}$  при подходе со стороны нижней полуплоскости. Отметим, однако, что  $\tilde{G}_a$  и  $\tilde{G}_r$  можно получить из функций  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  с помощью одного и того же предельного перехода:

$$\tilde{G}_a(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega(1 + i\alpha)); \quad (3.11)$$

$$\tilde{G}_r(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} A^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega(1 + i\alpha)). \quad (3.12)$$

Например, соотношение (3.11) при  $\omega > 0$  эквивалентно соотношению (3.10), а при  $\omega < 0$  функция  $A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega)$  аналитична, и поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega(1+i\alpha)) &= A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \\ &= A^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega+i0). \end{aligned}$$

Определим функции  $I^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z)$ ,  $I^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z)$  соотношением

$$I^{(\sigma)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z) = [z^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)] A^{(\sigma)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, z).$$

В силу равенств (3.11), (3.12)

$$\begin{aligned} \tilde{G}_\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{[\omega(1+i\alpha)]^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)} I^{(1)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega(1+i\alpha)) = \\ &= \frac{1}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1) + i0} \{[\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)] \tilde{G}_\alpha(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega)\}; \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_r(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{[\omega(1+i\alpha)]^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)} I^{(2)}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega(1+i\alpha)) = \\ &= \frac{1}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1) + i0} \{[\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)] \tilde{G}_r(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega)\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\left( \text{здесь мы воспользовались тем, что } \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{1}{[\omega(1+i\alpha)]^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k})} = \frac{1}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}) + i0} \right).$$

Сложение равенств (3.13) и (3.14) приводит к соотношению

$$\tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega) = \frac{1}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1) + i0} \{[\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1)] \tilde{G}_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \omega)\}, \quad (3.15)$$

позволяющему получить из (3.4) уравнение (3.6) при  $n = 2$ .

Проведенные рассуждения не претендуют на полную строгость. В связи с этим не может считаться вполне строгим и вывод разложения функций Грина в ряд теории возмущений, который проводится в следующем параграфе с помощью уравнений (3.6). Однако разложение в ряд по  $g$  обосновывается аккуратно другими способами.

## § 4. Теория возмущений для функций Грина

Уравнение (3.6) или (3.7) можно использовать для построения ряда теории возмущений для функций Грина гамильтониана  $H_g = H_0 + gV$ , т. е. для получения разложений функций Грина по степеням  $g$ . Члены этого ряда удобно изображать с помощью предложенных Фейнманом диаграмм. Начнем с описания фейнмановской диаграммной техники для функций Грина, а затем наметим вывод этой техники из уравнений для функций Грина.

Назовем *звездой* точку, из которой выходит  $n$  непересекающихся линий (топологических отрезков); их свободные концы называются вершинами звезды.

На рис. 1 изображены звезды с тремя и пятью вершинами (линии, входящие в состав звезд, изображаются пунктиром). *Диаграммой* называется совокупность нескольких звезд и нескольких ребер (топологических отрезков, крайние точки которых мы также называем вершинами).



Рис. 1.

Будем предполагать, что две звезды или два ребра из диаграммы не имеют общих точек, а ребро и линия из звезды могут иметь общую вершину (и не могут иметь другие общие точки). Вершины, которые принадлежат одновременно ребру и линии из звезды, называются *внутренними*, остальные вершины — *внешними*.

Будем рассматривать только такие диаграммы, у которых каждая связная компонента содержит по крайней мере одну внешнюю вершину. Предполагаем, что все вершины диаграммы упорядочены (перенумерованы), причем первые номера присвоены внешним вершинам, а нумерация внутренних вершин такова, что вершины, принадлежащие одной и той же звезде, нумеруются соседними числами (если вершины с номерами  $i$  и  $j$  принадлежат одной звезде, то вершина с номером  $k$ , где  $i < k < j$ , принадлежит той же звезде). Две диаграммы считаются одинаковыми, если соответствие, при котором сопоставляются друг другу вершины с одинаковыми номерами, является топологической эквивалентностью (см. дополнение Б). На рис. 2 приведены примеры диаграмм (ребра изображены сплошными линиями). Отметим, что диаграммы  $a$  и  $b$  различны, хотя и одинаковы геометрически, поскольку они различаются нумерацией. Диаграммы  $a$  и  $b$ , наоборот, согласно нашему оп-

ределению одинаковы. В дальнейшем будем изображать диаграммы, не отмечая порядка вершин; следует помнить, однако, что до тех пор, пока вершины не упорядочены, диаграмма задана не полностью\*.

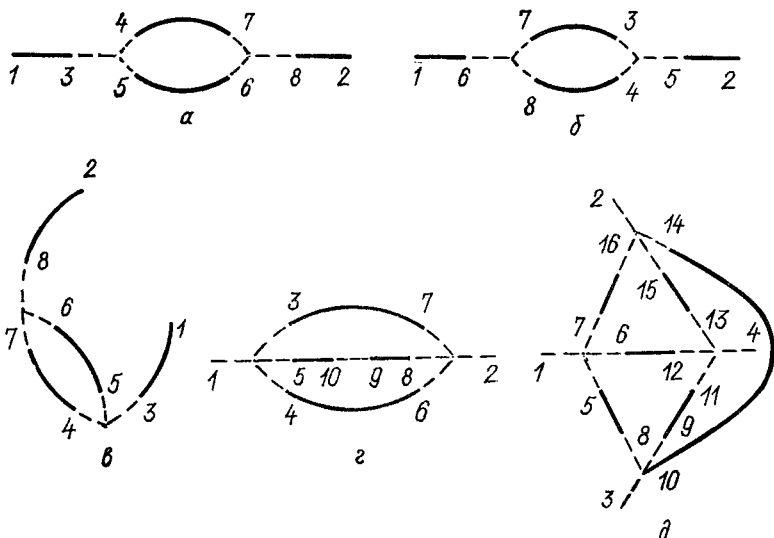


Рис. 2.

Отметим, что линии, входящие в состав введенных диаграмм, не считаются направленными.

Фиксируем гамильтониан  $H = H_0 + V$  вида (3.3). Удобно включить  $H$  в семейство гамильтонианов  $H_g = H_0 + gV$ , зависящее от параметра  $g$  ( $g$  принято называть *константой связи*). В дальнейшем будем все время иметь дело с гамильтонианом  $H_g$  и построенными по нему величинами, однако в обозначениях не всегда будет отмечаться зависимость от константы связи  $g$ .



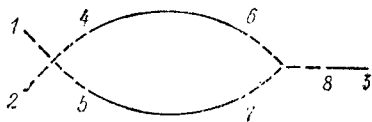
Рис. 3.

\* Обычно диаграммы изображаются несколько иначе. Пунктирные линии не включаются в их состав, а все вершины, принадлежащие одной звезде, объединяются в одну точку (в соответствии с этим вместо термина «звезда» используется термин «вершина»). Например, диаграмма рис. 2, а изображается так, как это показано на рис. 3. Такой способ изображения хорош при изучении локальных взаимодействий (см. гл. 6), но менее удобен в рассматриваемом нами случае.

По каждой диаграмме и гамильтониану  $H_g$  построим некоторую функцию. Считаем, что  $l$ -й вершине диаграммы отвечает переменная точка четырехмерного пространства  $x_l = (x_l, t_l)$ . Каждой звезде поставим в соответствие функцию  $\frac{g}{i} V_n(x_{l_1}, \dots, x_{l_n}) \delta(t_{l_1} - t_{l_2}) \dots \delta(t_{l_1} - t_{l_n})$ , где  $(x_{l_1}, t_{l_1}), \dots, (x_{l_n}, t_{l_n})$  — точки, отвечающие вершинам этой звезды, а каждому ребру условимся сопоставлять функцию Грина гамильтониана  $H_0$ :

$$G_2^{(0)}(x_i, t_i, x_j, t_j) = D_F(x_i - x_j, t_i - t_j).$$

Здесь  $(x_i, t_i), (x_j, t_j)$  — точки, отвечающие вершинам ребра. Тогда всей диаграмме ставится в соответствие функция, которая получается из произведения функций, сопоставленных звездам и ребрам диаграммы интегрированием по переменным, отвечающим внутренним вершинам. (Она зависит от переменных, отвечающих внешним вершинам.) Условимся включать в эту функцию еще множитель  $1/m!$ , где  $m$  — число звезд в диаграмме.



Р и с. 4.

Очевидно, что функция, соответствующая диаграмме, имеет вид  $g^m f$  (функция  $f$  не зависит от  $g$ ). Иными словами, она имеет порядок  $m$  по константе связи  $g$ . Например, диаграмме рис. 4 соответствует функция

$$g^2 f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2!} g^2 \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int V_4(x_1, x_2, x_4, x_5) D_F(x_4 - x_6) \times \\ \times D_F(x_5 - x_7) V_3(x_6, x_7, x_8) D_F(x_3 - x_3) dx_4 dx_5 dx_6 dx_7 dx_8.$$

Здесь введено обозначение

$$V_\alpha(x_1, \dots, x_\alpha) = V_\alpha(x_1, \dots, x_\alpha) \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_1 - t_\alpha), \quad (4.1)$$

которое мы часто будем использовать в дальнейшем.

Легко видеть, что функции, соответствующие двум топологически эквивалентным диаграммам, переходят друг в друга при некоторой перестановке аргументов. Например, диаграммы  $a$  и  $b$  на рис. 2 топологически эквивалентны, причем при топологической эквивалентности вершины 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 переходят соответственно в вершины 2, 1, 5, 3, 4, 8, 7, 6. Поэтому функции  $g^2 f_1(x_1, x_2)$  и  $g^2 f_2(x_1, x_2)$ , построенные по этим диаграммам, связаны соотношением

$$g^2 f_1(x_1, x_2) = g^2 f_2(x_2, x_1).$$



Назовем диаграмму гриновской, если все ее внешние вершины принадлежат ребрам (из диаграмм рис. 2 гриновскими являются диаграммы  $a$ ,  $b$ ,  $v$ ).

Справедливо следующее важное утверждение.

Если функции Грина разлагаются в (сходящиеся или асимптотические) степенные ряды по степеням  $g$ , то ряд для функции  $G_k(x_1, \dots, x_k)$  может быть записан как сумма функций, соответствующих всем различным гриновским диаграммам с  $k$  внешними вершинами.

Это утверждение обычно формулируют короче: функция Грина  $G_k$  представляется в виде суммы всех гриновских диаграмм с  $k$  внешними вершинами. (Функция, соответствующая диаграмме, часто называется просто диаграммой.)

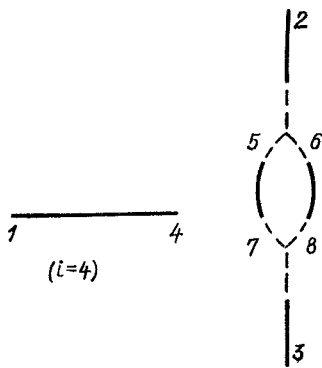
Отметим, что работа по вычислению диаграмм облегчается тем, что из класса топологически эквивалентных диаграмм достаточно вычислить только одну.

Вывод диаграммного представления функций Грина основан на

соотношениях, связывающих гриновскую диаграмму с диаграммами, имеющими меньшее число вершин. Рассмотрим гриновскую диаграмму с  $k$  внешними вершинами и  $n$  звездами. Функцию, соответствующую ей, обозначим  $F_k^n(x_1, \dots, x_k)$ . Номер вершины, с которой соединена ребром первая вершина, обозначим  $i$ . Предположим сначала, что первая вершина принадлежит ребру, обе вершины которого — внешние ( $i \leq k$ ). Тогда, вычеркнув это ребро из диаграммы, получим гриновскую диаграмму с  $k - 2$  внешними вершинами и  $n$  звездами; соответствующую функцию обозначим  $F_{k-2}^n(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k)$  (рис. 5). Очевидно, что

$$F_k^n(x_1, \dots, x_k) = D_F(x_1 - x_i) F_{k-2}^n(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k). \quad (4.2)$$

Пусть теперь первая вершина соединена с вершиной некоторой звезды ( $i > k$ ). Тогда, вычеркнув из диаграммы эту звезду и ребро, содержащее первую вершину, получим гринов-



Р и с. 5.

скую диаграмму с  $k - 2 + \alpha$  внешними вершинами и  $n - 1$  звездами (рис. 6). Функцию, соответствующую этой диаграмме обозначим  $\Phi_{k-2+\alpha}^{n-1}(x_2, \dots, x_k, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j+\alpha})$  (здесь  $\alpha$  — число вершин в вычеркнутой звезде,  $j + 1, \dots, j + \alpha$  — номера этих вершин,  $j + 1 \leq i \leq j + \alpha$ ). Легко видеть, что

$$F_k^n(x_1, \dots, x_k) = \frac{g}{i n} \int D_F(x_1 - x_i) V_\alpha(x_{j+1}, \dots, x_i, \dots, x_{j+\alpha}) \times \\ \times \Phi_{k-2+\alpha}^{n-1}(x_2, \dots, x_k, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j+\alpha}) \times \\ \times dx_{j+1} \dots dx_{j+\alpha} \quad (4.3)$$



Р и с. 6.

(множитель  $1/n$  появляется из-за множителя  $1/n!$ , содержащегося в  $F_k^n$ ). Если обозначить сумму всех различных гриновских диаграмм с  $k$  вершинами и  $n$  звездами  $G_k^n(x_1, \dots, x_k)$ , то, просуммировав (4.2) и (4.3) для всех таких диаграмм, придем к соотношению

$$G_k^n(x_1, \dots, x_k) = \sum_j D_F(x_1 - x_j) G_{k-2}^n(x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) + \\ + \frac{g}{i} \int D_F(x_1 - x') \sum_\alpha \alpha V_\alpha(x', y_1, \dots, y_{\alpha-1}) \times \\ \times G_{k-2+\alpha}^{n-1}(y_1, \dots, y_{\alpha-1}, x_2, \dots, x_k) dx' dy. \quad (4.4)$$

(При получении этого равенства следует учесть, что каждой диаграмме с  $k - 2 + \alpha$  внешними вершинами и  $n - 1$  звездой соответствует  $n\alpha$  диаграмм с  $k$  внешними вершинами и  $n$  звездами.)

Из равенства (4.4) вытекает, что

$$G_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} G_k^n(x_1, \dots, x_k)$$

удовлетворяют уравнениям (3.7) для функций Грина.

Справедливо также утверждение, обратное доказанному. Пусть известно, что функции Грина  $G_k$  разлагаются в (сходящийся или асимптотический) степенной ряд по степеням  $g$ :

$$G_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \Psi_k^n(x_1, \dots, x_k).$$

Тогда из уравнений (3.7) вытекает, что  $g^n \Psi_k^n$  удовлетворяют таким же уравнениям, как функции  $G_k^n$ . Легко видеть, что  $G_k^0$  — функции Грина гамильтониана  $H_0$  — совпадают с функциями  $\Psi_k^0$ . Учитывая это, с помощью уравнений (4.4) по индукции убеждаемся, что  $g^n \Psi_k^n = G_k^n$ . (Шаг индукции заключается в доказательстве того, что из равенства  $g^{n-1} \Psi_m^{n-1} = G_m^{n-1}$  при всех  $m$  и равенства  $g^n \Psi_{k-2}^n = G_{k-2}^n$  следует соотношение  $g^n \Psi_k^n = G_k^n$ .)

Из диаграммного представления  $G_r(x_1, \dots, x_r)$  с помощью преобразования Фурье можно получить диаграммное представление функции  $\tilde{G}_r(k_1, \dots, k_r)$ . Впрочем оно получается также непосредственно из уравнений (3.6). В  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении  $i$ -й вершине диаграммы сопоставляется точка  $\tilde{k}_i = (\mathbf{k}_i, \omega_i)$  четырехмерного пространства, но функция, соответствующая диаграмме, строится иным способом.

Именно, каждому ребру ставится в соответствие множитель

$$\tilde{D}_F(k_i) \delta(k_i + k_j) = \frac{i \delta(\omega_i + \omega_j) \delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j)}{\omega_i^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_i) + i0},$$

если обе вершины ребра внутренние или обе внешние, и множитель  $\tilde{D}_F(k_i) \delta(k_i - k_j)$ , если одна из вершин ребра внутренняя, а другая внешняя ( $k_i$  и  $k_j$  — точки, сопоставленные началу и концу ребра).

Звезде с вершинами, которым соответствуют точки  $k_{l_1}, \dots, k_{l_n}$ , отвечает множитель

$$\frac{g}{i} \tilde{V}_n(k_{l_1}, \dots, k_{l_n}) = \frac{g}{i} \tilde{V}_n(\mathbf{k}_{l_1}, \dots, \mathbf{k}_{l_n}) \delta(\omega_{l_1} + \dots + \omega_{l_n}) (2\pi)^{-(n-2)/2}$$

(мы пользуемся здесь обозначением

$$\tilde{V}_n(k_1, \dots, k_n) = (2\pi)^{-2n} \int V_n(x_1, \dots, x_n) \times \exp(i \sum \mathbf{k}_j x_j - i \sum \omega_j t_j) d^n x.$$

Функция, соответствующая диаграмме, получается из произведения множителей, соответствующих вершинам и ребрам диаграммы, интегрированием по внутренним вершинам и умножением на  $1/m!$ , где  $m$  — число звезд в диаграмме.

Удобно несколько модифицировать описанное диаграммное представление. Будем называть две диаграммы *t-эквивалентными*, если между ними можно установить топологическую эквивалентность, сохраняющую порядок внешних вершин. Очевидно, функции, соответствующие *t-эквивалентным* диаграммам, совпадают.

Число различных диаграмм, *t-эквивалентных* данной, равно

$$\frac{m! n_1! \dots n_m!}{d}, \quad (4.5)$$

где  $m$  — число звезд в диаграмме,  $n_1, \dots, n_m$  — число вершин в звездах,  $d$  — порядок группы симметрии диаграммы. В самом деле, вершины данной диаграммы можно перенумеровать  $m!n_1! \dots n_m!$  способами. Вспомним, что вершины каждой звезды занумерованы соседними числами, поэтому чтобы перенумеровать вершины диаграммы, следует сначала перенумеровать звезды (это можно сделать  $m!$  способами), а затем — вершины каждой из звезд (если у звезды  $n_k$  вершин, то их нумерацию можно провести  $n_k!$  способами).

Однако не все различные нумерации вершин данной диаграммы приводят к различным диаграммам. Действительно, если соответствие, при котором друг другу сопоставляются вершины с одинаковыми номерами, является топологической эквивалентностью, то диаграммы считаются одинаковыми. С другой стороны, такое соответствие можно рассматривать как преобразование симметрии диаграммы. Учитывая это, приходим к формуле (4.5) для числа различных диаграмм, *t-эквивалентных* данной.

Рассмотрим в качестве примера диаграмму рис. 2, а. Порядок группы симметрии этой диаграммы равен двум (кроме тождественного преобразования группа симметрии содержит преобразование, при котором четвертая вершина меняется местами с пятой, шестая — с седьмой, остальные вершины остаются на месте). Таким образом, существует  $\frac{2!3!3!}{2} = 36$  различных диаграмм, *t-эквивалентных* диаграмме рис. 2, а.

С помощью (4.5) можно привести построенное выше диаграммное представление к форме, более удобной для практического применения. Именно, в дальнейшем всегда предполагаем, что

в рассматриваемых нами диаграммах перенумерованы только внешние вершины. Две диаграммы будем считать одинаковыми, если существует топологическая эквивалентность между ними, сохраняющая нумерацию внешних вершин. Определение функции, сопоставленной диаграмме, оставим прежним, заменив, однако, множитель  $1/m!$  множителем  $1/d$  и дополнительно включив в множитель, сопоставленный каждой звезде,  $n!$  ( $n$  — число вершин в звезде).

Легко видеть, что новое определение функции, отвечающей диаграмме, отличается от старого множителем (4.5) и, значит, класс  $t$ -эквивалентных диаграмм в старом смысле можно заменить одной диаграммой в новом смысле.

Таким образом, изменив описанным способом основные определения, по-прежнему можно утверждать, что функция Грина  $G_k$  равна сумме всех различных гриновских диаграмм с  $k$  внешними вершинами.

### § 5. Операторы и гамильтонианы, записанные в нормальной форме

Пусть фиксирован свободный гамильтониан вида (2.17). Запишем его в  $k$ -представлении:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int \tilde{\pi}(\mathbf{k}) \tilde{\pi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int \varepsilon^2(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Операторная реализация  $\mathcal{H}$ ,  $\hat{H}_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  гамильтониана  $H_0$  может быть построена (см. § 2) в фоковском пространстве  $F$ , причем «свободные поля» в  $(\mathbf{k}, t)$ -представлении определяются формулой

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k})}} \left( a^+(-\mathbf{k}) \exp(i\varepsilon(\mathbf{k})t) + a(\mathbf{k}) \exp(-i\varepsilon(\mathbf{k})t) \right), \quad (5.1)$$

где  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  задают фоковское представление ССР.

Введем определение нормального произведения. Обозначим  $A_i$  операторы, линейно выражающиеся через  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$ ; иными словами, оператор  $A_i$  должен иметь вид

$$A_i = \int \alpha_i(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \int \beta_i(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (5.2)$$

Нормальное произведение  $N(A_1 \dots A_n)$  операторов  $A_1, \dots, A_n$  определим по индукции с помощью соотношений:

$$\left. \begin{aligned} N(A_1) &= A_1; \\ N(A_1 \dots A_{n+1}) &= N(A_1 \dots A_n) A_{n+1} - \\ &- \sum_{i=1}^n N(A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n) \underline{A_i A_{n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

где  $\underline{A_i A_j}$  — число  $\langle A_i A_j \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ , которое будем называть связкой операторов  $A_i$  и  $A_j$ .

Исходя из данного определения, без труда проверяем, что нормальное произведение  $N(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) \dots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n))$  операторов  $a(\mathbf{k}, \varepsilon)$  равно произведению фигурирующих в нем операторов, расставленных в нормальном порядке\*. (Мы пользуемся обозначениями  $a^+(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}, 1)$ ,  $a(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}, -1)$ ; порядок операторов считается нормальным, если все  $a^+(\mathbf{k})$  стоят левее всех  $a(\mathbf{k})$ .) Например:

$$N(a(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2)) = a(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_2) - a(\mathbf{k}_1) \underline{a^+(\mathbf{k}_2)} = a^+(\mathbf{k}_2) a(\mathbf{k}_1);$$

$$N(a^+(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2)) = a^+(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) - a^+(\mathbf{k}_1) \underline{a(\mathbf{k}_2)} = a^+(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2);$$

$$\begin{aligned} N(a^+(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2) a^+(\mathbf{k}_3)) &= \\ &= N(a^+(\mathbf{k}_1) a(\mathbf{k}_2)) a^+(\mathbf{k}_3) - a(\mathbf{k}_2) \underline{a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_3)} - \\ &- a^+(\mathbf{k}_1) \underline{a(\mathbf{k}_2) a^+(\mathbf{k}_3)} = a^+(\mathbf{k}_1) a^+(\mathbf{k}_3) a(\mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Нормальное произведение (5.3) обладает, очевидно, свойством дистрибутивности, поэтому его вычисление можно свести к вычислению произведений вида  $N(a(\mathbf{k}_1, \varepsilon_1) \dots a(\mathbf{k}_n, \varepsilon_n))$ . Это замечание позволяет дать другое определение нормального произведения: *нормальным произведением  $N(A_1 \dots A_n)$  операторов вида (5.2) называется выражение, которое получится, если в произведении  $A_1 \dots A_n$  все операторы  $A_i$  выразить че-*

\* Это можно доказать, например, по индукции с помощью соотношений  $\underline{a^+(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{l})} = a(\mathbf{k}) \underline{a(\mathbf{l})} = a^+(\mathbf{k}) \underline{a(\mathbf{l})} = 0$ ;  $a(\mathbf{k}) \underline{a^+(\mathbf{l})} = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{l})$  и формулы  $[A_1 \dots A_n, B] = \sum_{1 \leq i \leq n} A_1 \dots A_{i-1} [A_i, B] A_{i+1} \dots A_n$ .

рез  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$ , раскрыть скобки, пользуясь законом дистрибутивности, и в каждом из получившихся произведений операторов  $a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  переставить сомножители в нормальном порядке.

Из второго определения нормального произведения сразу следует, что оно не зависит от порядка сомножителей. Отметим соотношения:

$$N(A_1 \dots A_n A_{n+1}) = A_{n+1} N(A_1 \dots A_n) - \sum_{i=1}^n N(A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n) \underbrace{A_{n+1} A_i}_{\quad} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} & [N(A_1 \dots A_n), A_{n+1}] = \\ & = \sum_{i=1}^n N(A_1 \dots A_{i-1} A_{i+1} \dots A_n) \underbrace{(A_i A_{n+1} - A_{n+1} A_i)}_{\quad}. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Первое из этих равенств доказывается сначала для случая, когда  $A_i = a(\mathbf{k}_i, \varepsilon_i)$ , и затем по дистрибутивности распространяется на общий случай; второе получается комбинацией формул (5.3) и (5.4).

Многократно применив (5.3) и (5.4), можно выразить через нормальные произведения оператор вида  $A_1 \dots A_k N(A_{k+1} \dots A_l) A_{l+1} \dots A_r$ . Ответ сформулируем, введя понятие нормального произведения со связками. Предположим, что из операторов  $A_1, \dots, A_n$  выделены пары  $A_{i_1}, A_{j_1}; \dots; A_{i_k}, A_{j_k}$ . Будем говорить, что  $A_{i_r}$  связан с  $A_{j_r}$  (все  $A_{i_r}, A_{j_s}$  предполагаются различными). *Нормальным произведением операторов  $A_1, \dots, A_n$  со связками  $\underbrace{A_{i_1}, A_{j_1}}; \dots; \underbrace{A_{i_k}, A_{j_k}}$  называется нормальное произведение операторов  $A_i$ , не входящих в выделенные пары, умноженное на связки  $\underbrace{A_{i_1}, A_{j_1}}; \dots; \underbrace{A_{i_k}, A_{j_k}}$ .* Например, нормальное произведение операторов  $A_1, \dots, A_6$ , в котором  $A_1$  связан с  $A_4$  и  $A_2$  с  $A_6$ , обозначается  $N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6})$  и равно  $N(A_3 A_5) \underbrace{A_1 A_4}_{\quad} \underbrace{A_2 A_6}_{\quad}$ .

По индукции легко доказывается следующее утверждение (одна из форм теоремы Вика): *оператор  $A_1 \dots A_k N(A_{k+1} \dots A_l) A_{l+1} \dots A_r$  равен сумме всех таких нормальных произведений операторов  $A_1, \dots, A_n$  со связками, в которых не связываются*

друг с другом операторы  $A_{k+1}, \dots, A_l$  (т. е. нет связок  $\underbrace{A_{i_r} A_{j_r}}_{i_r, j_r}$  с  $k+1 \leq i_r, j_r \leq l$ ). Так,

$$\begin{aligned}
 A_1 A_2 N(A_3 A_4) A_5 A_6 &= N(A_1 \dots A_6) + N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + \dots + \\
 &+ N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + \dots + \\
 &+ N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + \\
 &+ N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + \dots + N(\underbrace{A_1 \dots A_5 A_6}) + \\
 &+ N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}) + \dots N(\underbrace{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6}).
 \end{aligned}$$

В силу соотношения (5.1)  $\varphi(x, t)$  и  $\tilde{\varphi}(p, t)$  линейно выражаются через операторы  $a^+(p)$ ,  $a(p)$ , поэтому можно рассматривать их нормальное произведение. Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\varphi}(p, t) \tilde{\varphi}(q, \tau) &= \check{D}^-(p, t - \tau) \delta(p + q); \\
 \varphi(x, t) \varphi(y, \tau) &= D^-(x - y, t - \tau),
 \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 \check{D}^-(p, t) &= \frac{\exp(-i \varepsilon(p) t)}{2\varepsilon(p)}; \\
 D^-(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i p x) \check{D}^-(p, t) dp.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Пользуясь этими соотношениями и формулой (5.3), получаем, например,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_1, t_1) \varphi(x_2, t_2) &= N(\varphi(x_1, t_1) \varphi(x_2, t_2)) + \\
 &+ D^-(x_1 - x_2, t_1 - t_2);
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) &= N(\varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4)) + \\
 &+ D^-(x_1 - x_2) N(\varphi(x_3) \varphi(x_4)) + D^-(x_1 - x_3) N(\varphi(x_2) \varphi(x_4)) + \\
 &+ D^-(x_1 - x_4) N(\varphi(x_2) \varphi(x_3)) + D^-(x_2 - x_3) N(\varphi(x_1) \varphi(x_4)) + \\
 &+ D^-(x_2 - x_4) N(\varphi(x_1) \varphi(x_3)) + D^-(x_3 - x_4) N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) + \\
 &+ D^-(x_1 - x_2) D^-(x_3 - x_4) + D^-(x_1 - x_3) D^-(x_2 - x_4) + \\
 &+ D^-(x_1 - x_4) D^-(x_2 - x_3).
 \end{aligned} \quad (5.9)$$



Операторы, действующие в пространстве  $F$ , удобно представлять как

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n(x_1, \dots, x_n) N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.10)$$

Этот вид носит название нормальной формы оператора  $A$ . Функции  $a_n$  всегда будем выбирать симметричными. Указанное условие еще не фиксирует их однозначно; о степени произвола в выборе этих функций речь будет идти чуть позже.

Представление в нормальной форме особенно удобно, если нужно вычислить вакуумное среднее  $\langle A\Phi_0, \Phi_0 \rangle$ . В самом деле, очевидно,  $\langle N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) \Phi_0, \Phi_0 \rangle = 0$  при  $n \geq 1$  и, следовательно,  $\langle A\Phi_0, \Phi_0 \rangle = 0$ .

С помощью (5.8) и (5.9) без труда представим в нормальной форме операторы вида

$$\begin{aligned} & \int L(x_1, x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2 = \\ & = \int L(x_1, x_2) N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) dx_1 dx_2 + \\ & + \int L(x_1, x_2) D^-(x_1 - x_2) dx_1 dx_2; \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} & \int L(x_1, x_2, x_3, x_4) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\ & = \int L(x_1, \dots, x_4) N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_4)) dx_1 \dots dx_4 + \\ & + \int L(x_1, \dots, x_4) [D^-(x_1 - x_2) N(\varphi(x_3) \varphi(x_4)) + \\ & + D^-(x_1 - x_3) N(\varphi(x_2) \varphi(x_4)) + D^-(x_1 - x_4) N(\varphi(x_2) \varphi(x_3)) + \\ & + D^-(x_2 - x_3) N(\varphi(x_1) \varphi(x_4)) + D^-(x_2 - x_4) N(\varphi(x_1) \varphi(x_3)) + \\ & + D^-(x_3 - x_4) N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) + D^-(x_1 - x_2) D^-(x_3 - x_4) + \\ & + D^-(x_1 - x_3) D^-(x_2 - x_4) + D^-(x_1 - x_4) D^-(x_2 - x_3)] dx_1 \dots dx_4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Если оператор  $A$  записан в нормальной форме в  $(k, t)$ -представлении

$$\begin{aligned} A = \sum_{n=0}^{\infty} \int \tilde{a}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) N(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \\ \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)) d^n \mathbf{k} d^n t, \end{aligned} \quad (5.13)$$

то, используя (5.5), можно просто записать в нормальной форме оператор  $[A, \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)]$ :

$$[A, \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \int \tilde{b}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n | \mathbf{k}, t) \times \\ \times N(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)) d^n \mathbf{k} d^n t, \quad (5.14)$$

где

$$\tilde{b}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n | \mathbf{k}, t) = \\ = -(n+1) \int \tilde{a}_{n+1}(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n, -\mathbf{k}, \tau) \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau) d\tau, \quad (5.15)$$

а функция  $\check{D}(\mathbf{k}, t)$  определяется соотношением

$$\check{D}(\mathbf{k}, t) = \check{D}^-(\mathbf{k}, t) - \check{D}^-(-\mathbf{k}, t) = \frac{1}{i} \frac{\sin(\varepsilon(\mathbf{k})t)}{\varepsilon(\mathbf{k})}. \quad (5.16)$$

(Отметим, что функция  $\check{D}(\mathbf{k}, t)$  может быть определена также, как решение уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2(\mathbf{k}) \right) \check{D}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad (5.17)$$

с начальными условиями  $\check{D}(\mathbf{k}, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \check{D}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{i}$ .)

Применяя несколько раз соотношение (5.14), убеждаемся, что

$$\langle [\dots [A, \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1)], \dots, \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)] \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \\ = n! (-1)^n \int \tilde{a}_n(-\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, -\mathbf{k}_n, \tau_n) \check{D}(\mathbf{k}_1, t_1 - \tau_1) \dots \\ \dots \check{D}(\mathbf{k}_n, t_n - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad (5.18)$$

Формула (5.18) неоднозначно определяет  $\tilde{a}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n)$ ; функция  $\tilde{a}_n$  находится лишь с точностью до слагаемого  $f$ , удовлетворяющего уравнению

$$\int \check{D}(\mathbf{k}_1, t_1 - \tau_1) \dots \check{D}(\mathbf{k}_n, t_n - \tau_n) f(\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{k}_n, \tau_n) d^n \tau = 0. \quad (5.19)$$

Но это несущественно, поскольку для такой функции  $f$  справедливо равенство

$$\int f(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) N(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)) d^n t = 0 \quad (5.20)$$

(равенство (5.20) становится очевидным, если заметить, что в силу (5.17) имеет место соотношение

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) = i \left[ \frac{\partial \check{D}(\mathbf{k}, t - \tau)}{\partial t} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) + \check{D}(\mathbf{k}, t - \tau) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} \right].$$

Таким образом, чтобы записать оператор  $A$  в нормальной форме, достаточно найти функции  $\tilde{a}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n)$ , удовлетворяющие условиям (5.18).

Если оператор  $A$  записан в нормальной форме в  $(x, t)$ -представлении [см. (5.10)], то

$$[A, \varphi(x)] = \sum_n \int b_n(x_1, \dots, x_n | x) N(\varphi(x_1) \dots \dots \varphi(x_n)) dx_1 \dots dx_n, \quad (5.21)$$

где

$$b_n(x_1, \dots, x_n | x) = -(n+1) \int a_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \times \times D(x - x_{n+1}) dx_{n+1}, \quad (5.22)$$

а

$$D(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \check{D}(\mathbf{k}, t) \exp(i \mathbf{k}x) d\mathbf{k} = \\ = \langle [\varphi(x + \xi, t + \tau), \varphi(\xi, \tau)] \Phi, \Phi \rangle$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} D(x, t) + \int v(x-y) D(y, t) dy = 0 \quad (5.23)$$

с начальными условиями  $D(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} D(x, t)|_{t=0} = \frac{1}{i} \delta(x)$ . (Формулы (5.22) и (5.23) можно, очевидно, получить из (5.14) и (5.15) преобразованием Фурье.)

Коснемся вопроса о вычислении матричных элементов оператора, записанного в нормальной форме, в обобщенном базисе  $a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_n) \Phi$ . Докажем следующее утверждение: *матричные элементы оператора*

$$A = \sum_n \int \tilde{a}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) N(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n, t_n)) d\mathbf{k}_1 dt_1 \dots d\mathbf{k}_n dt_n$$

выражаются при условии  $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{q}_j$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) следующей формулой:

$$A_{m, n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \langle Aa^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n) \Phi, a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle = (m+n)! \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k}_i)}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{q}_j)}} \times \\ \times \tilde{a}_{m+n}(-\mathbf{k}_1, \varepsilon(\mathbf{k}_1), \dots, -\mathbf{k}_m, \varepsilon(\mathbf{k}_m), \mathbf{q}_1, -\varepsilon(\mathbf{q}_1), \dots, \mathbf{q}_n, -\varepsilon(\mathbf{q}_n)), \quad (5.24)$$

где

$$\tilde{a}_m(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_m, \omega_m) = \\ = \int \exp(i\omega_1 t_1 + \dots + i\omega_m t_m) \tilde{a}_m(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_m, t_m) d^m t.$$

В самом деле

$$A_{m, n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \\ = \langle Aa^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n) \Phi; a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle = \\ = \langle a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_m) Aa^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n) \Phi, \Phi \rangle,$$

поэтому для вычисления функций  $A_{m, n}$  достаточно представить в нормальной форме оператор  $a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_m) Aa^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n)$ . Пользуясь теоремой Вика о представлении  $A_1 \dots A_l N(A_{l+1} \dots A_l) A_{l+1} \dots A_n$  в виде суммы нормальных произведений со связками, получаем, что вакуумное среднее

$$\langle a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_m) N(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_r, t_r)) a^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n) \Phi, \Phi \rangle$$

есть сумма таких нормальных произведений операторов  $a(\mathbf{k}_1) \dots a(\mathbf{k}_m) N(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_r, t_r)) a^+(\mathbf{q}_1) \dots a^+(\mathbf{q}_n)$  со связками вида  $a(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t)$ ,  $\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) a^+(\mathbf{q})$  и  $a(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{q})$ ,

в которых все операторы связаны. При принятых нами условиях связки  $a(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{q})$  равны нулю, поэтому ненулевой ответ

получится лишь в случае  $r = m + n$  ( $r$  — число операторов  $\varphi$ ). Нужные нормальные произведения со связками получаются перестановкой индексов в нормальном произведении, в котором  $a(\mathbf{k}_i)$  связаны с  $\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_i, t)$ ,  $\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_{l+m}, t)$  — с  $a^+(\mathbf{q}_i)$ ; это произведение со связками выражается как

$$\prod_{i=1}^m \frac{\delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{p}_i)}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k}_i)}} \exp(i\varepsilon(\mathbf{k}_i) t_i) \prod_{j=1}^n \frac{\delta(\mathbf{p}_{m+j} - \mathbf{q}_j)}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{q}_j)}} \times \\ \times \exp(-i\varepsilon(\mathbf{q}_j) t_j).$$

$$\left( \text{Мы воспользовались тем, что } \underline{a(\mathbf{k})} \varphi(\mathbf{p}, t) = \frac{\exp(i\varepsilon(\mathbf{k})t) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p})}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k})}}, \right. \\ \left. \varphi(\mathbf{p}, t) \underline{a^+(\mathbf{q})} = \frac{\exp(-i\varepsilon(\mathbf{q})t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{q})}}. \right)$$

Учитывая симметричность функции  $a_n$ , получаем:

$$A_{m, n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) = \\ = (m+n)! \int \prod_{i=1}^m \frac{\delta(\mathbf{k}_i + \mathbf{l}_i)}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k}_i)}} \exp(i\varepsilon(\mathbf{k}_i)t_i) \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{\delta(\mathbf{l}_{m+j} - \mathbf{q}_j)}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{q}_j)}} \exp(-i\varepsilon(\mathbf{q}_j)t_j) \times \\ \times \check{a}_{m+n}(\mathbf{l}_1, t_1, \dots, \mathbf{l}_{m+n}, t_{m+n}) d\mathbf{l}_1 dt_1 \dots d\mathbf{l}_{m+n} dt_{m+n} = \\ = (m+n)! \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{k}_i)}} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\mathbf{q}_j)}} \tilde{a}_{m+n}(-\mathbf{k}_1, \varepsilon(\mathbf{k}_1), \dots \\ \dots, -\mathbf{k}_m, \varepsilon(\mathbf{k}_m), \mathbf{q}_1, -\varepsilon(\mathbf{q}_1), \dots, \mathbf{q}_n, -\varepsilon(\mathbf{q}_n)).$$

Рассмотрим теперь формальный гамильтониан  $H = H_0 + V$  вида (3.3). Его также бывает удобно записывать в нормальной форме, т. е. представлять  $V$  как

$$V = \sum_n \int W_n(x_1, \dots, x_n) N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.25)$$

Здесь символ  $N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n))$  определяется аналогично нормальному произведению операторов. Например, если выражение для  $V$  имеет вид

$$V = \int V_2(x_1, x_2) \varphi(x_1) \varphi(x_2) dx_1 dx_2 + \\ + \int V_4(x_1, \dots, x_4) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_4) dx_1 \dots dx_4, \quad (5.26)$$

то оно приводится к нормальной форме следующим образом:

$$V = \int V_4(x_1, \dots, x_4) N(\varphi(x_1) \dots \varphi(x_4)) dx_1 \dots dx_4 + \\ + 6 \int V_4(x_1, \dots, x_4) D^-(x_3 - x_4, 0) N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) dx_1 \dots dx_4 + \\ + \int V_2(x_1, x_2) N(\varphi(x_1) \varphi(x_2)) dx_1 dx_2 + \\ + 3 \int V_4(x_1, \dots, x_4) D^-(x_1 - x_2, 0) D^-(x_3 - x_4, 0) dx_1 \dots dx_4 + \\ + \int V_2(x_1, x_2) D^-(x_1 - x_2, 0) dx_1 dx_2. \quad (5.27)$$

Если выражение  $V$  трансляционно-инвариантно, то при приведении его к нормальной форме возникает бесконечная константа. Условимся ее отбрасывать.

Легко построить диаграммную технику для вычисления функций Грина формального гамильтониана, исходя из взаимодействия  $V$ , записанного в виде (5.25) (в нормальной форме). Отличия от изложенной выше диаграммной техники состоят в сокращении числа диаграмм (не следует рассматривать диаграммы с ребрами, обе вершины которых принадлежат одной звезде)\* и, конечно, в замене функций  $V_n$  функциями  $W_n$ . Проверка того, что описанная диаграммная техника приводит к правильному результату, может быть проведена сравнением с диаграммной техникой для гамильтонианов, не приведенных к нормальной форме. Убедимся, например, что для взаимодействий вида (5.26) обе диаграммные техники дают один и тот же результат. Для этого достаточно заметить, что звезда с четырьмя вершинами, две из которых соединены ребром, в диаграммной технике, построенной по взаимодействию в форме (5.26), дает такой же вклад, как и звезда с двумя вершинами в диаграммной технике, построенной по взаимодействию в форме (5.27).

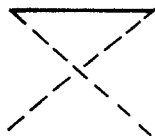


Рис. 7.

\* Диаграмма такого типа изображена на рис. 7.

## ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

### § 6. Трансляционно-инвариантные взаимодействия

В этой главе мы будем рассматривать трансляционно-инвариантные гамильтонианы вида (2.1) (т. е. те, коэффициентные функции которых зависят только от разностей аргументов). Считаем, что гамильтониан  $H$  представлен в виде  $H = H_0 + V$ , где  $H_0$  — свободный гамильтониан (2.17),  $V$  — возмущение (2.2), коэффициентные функции которого имеют вид

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = v_n(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n).$$

Тогда для вычисления функций Грина этого гамильтониана применима описанная в предыдущей главе диаграммная техника теории возмущений\*.

При вычислении диаграмм в  $(\mathbf{k}, t)$ - и  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлениях возникают некоторые упрощения в связи с тем, что функция

$$\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \tilde{v}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)$$

содержит в качестве множителя  $\delta$ -функцию. В самом деле, наличие  $\delta$ -функций в подынтегральном выражении диаграммы позволяет сократить число интегрирований\*\*. К примеру,

---

\* Чтобы гейзенберговские уравнения, написанные по формальному гамильтониану  $H$ , обладали четким смыслом, достаточно предположить, что  $v_n$  принадлежит пространству  $\mathcal{S}$ , а преобразование Фурье функции  $v(\mathbf{x})$  является гладкой функцией, все производные которой имеют не более чем степенной рост (см. замечания, сделанные в § 2 после определения операторной реализации). Выполнения этих же требований достаточно для того, чтобы все диаграммы ряда теории возмущений имели смысл (в противном случае в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении можно встретиться с расходящимися интегралами, а в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении — с не имеющими смысла произведениями обобщенных функций).

\*\* Подробнее этот вопрос рассмотрен в дополнении Б.

диаграмма *a* рис. 2 в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении записывается как

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{i}\right)^2 \frac{(3!)^2}{2} (2\pi)^{-1} \int \tilde{D}_F(k_1) \delta(k_1 + k_3) \tilde{v}_3(\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(k_3 + k_4 + k_5) \times \\ & \quad \times \tilde{D}_F(k_4) \delta(k_4 + k_7) \tilde{D}_F(k_5) \delta(k_5 + k_6) \tilde{v}_3(\mathbf{k}_6, \mathbf{k}_7) \times \\ & \quad \times \delta(k_6 + k_7 + k_8) \tilde{D}_F(k_2) \delta(k_2 + k_8) dk_3 \dots dk_8 = \\ & = -\frac{(3!)^2}{2} (2\pi)^{-1} \frac{1}{(\omega_1^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1) + i0)(\omega_2^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_2) + i0)} \delta(k_1 + k_2) \times \\ & \quad \times \int \frac{\tilde{v}_3(-\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_4) \tilde{v}_3(\mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_4) d\mathbf{k}_4 d\omega_4}{(\omega_4^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_4) + i0)[(\omega_1 - \omega_4)^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) + i0]} . \end{aligned}$$

Легко видеть, что из трансляционной инвариантности функций  $V_n$  вытекает трансляционная инвариантность каждой из диаграмм, поэтому, по крайней мере в рамках теории возмущений, можно утверждать, что функции Грина также трансляционно-инвариантны. Вспоминая, что они инвариантны также относительно сдвига по времени (см. § 3), запишем в  $(x, t)$ - и в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлениях функции Грина в форме

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = G_n(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n); \quad (6.1)$$

$$\tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n) = \tilde{G}_n(k_1, \dots, k_{n-1}) \delta(k_1 + \dots + k_n). \quad (6.2)$$

Исходя из действительности функций  $V_n$ , нетрудно проверить также, что в каждом порядке теории возмущений выполнены соотношения

$$G_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = G_n(x_1, -t_1, \dots, x_n, -t_n); \quad (6.3)$$

$$\tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, \omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, \omega_n) = \tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, -\omega_1, \dots, \mathbf{k}_n, -\omega_n) \quad (6.4)$$

(эти соотношения не зависят от предположения трансляционной инвариантности; они выражают инвариантность относительно обращения времени).

В частности, функцию  $\tilde{G}_2(k_1, k_2)$  можно представить в виде

$$\tilde{G}_2(k_1, k_2) = \tilde{G}_2(k_1) \delta(k_1 + k_2).$$

Из соотношения (6.4) следует четность функции  $\tilde{G}_2(k) = \tilde{G}_2(\mathbf{k}, \omega)$  от  $\omega$ , а из симметричности  $\tilde{G}_2(k_1, k_2)$  вытекает четность  $\tilde{G}_2(k)$  по переменной  $k$ .



Таким образом,

$$\tilde{G}_2(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{G}_2(\mathbf{k}, -\omega) = \tilde{G}_2(-\mathbf{k}, \omega) = \tilde{G}_2(-\mathbf{k}, -\omega)$$

(т. е.  $\tilde{G}_2(\mathbf{k}, \omega)$  — четная функция и от  $\omega$ , и от  $\mathbf{k}$ ).

Соотношения (6.1) — (6.4) позволяют предположить, что в пространстве  $\mathcal{H}$  операторной реализации трансляционно-инвариантного гамильтониана можно построить оператор импульса  $\hat{P} = (\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$  (т. е. три коммутирующих самосопряженных оператора  $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ ) и антиунитарный оператор обращения времени  $\hat{\tau}$ , удовлетворяющие условиям:

$$\hat{H}\hat{P}_i = \hat{P}_i\hat{H}, \quad \hat{H}\hat{\tau} = \hat{\tau}\hat{H}, \quad \hat{P}_i\hat{\tau} = -\hat{\tau}\hat{P}_i, \quad \hat{\tau}^2 = 1; \quad (6.5)$$

$$\exp(-i\hat{P}a)\varphi(x, t)\exp(i\hat{P}a) = \varphi(x+a, t); \quad (6.6)$$

$$\hat{\tau}\varphi(x, t)\hat{\tau} = \varphi(x, -t). \quad (6.7)$$

(Если такие операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{\tau}$  существуют, то соотношения (6.1) — (6.4), очевидно, выполнены.) Удастся проверить в рамках теории возмущений, что  $\hat{P}$  и  $\hat{\tau}$  можно построить. Более подробное обсуждение вопроса о построении  $\hat{P}$  и  $\hat{\tau}$  проводится в гл. 4.

В дальнейшем, рассматривая операторную реализацию трансляционно-инвариантного гамильтониана  $H$ , будем всегда считать, что в пространстве этой операторной реализации *существуют операторы  $\hat{P}$  и  $\hat{\tau}$ , удовлетворяющие условиям (6.5) — (6.7)*.

## § 7. Двухточечная функция Грина и массовый оператор

Определим функцию  $G_2^c(x_1, x_2)$  как сумму всех связанных гриновских диаграмм с двумя внешними вершинами. Всякая несвязная гриновская диаграмма с двумя внешними вершинами состоит, очевидно, из двух гриновских диаграмм с одной внешней вершиной. Пользуясь этим, легко убедиться, что двухточечная функция Грина  $G_2^r(x_1, x_2)$  может быть представлена в виде

$$G_2(x_1, x_2) = G_2^c(x_1, x_2) + G_1(x_1)G_1(x_2).$$

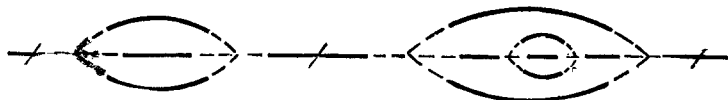
В силу известных нам свойств функций Грина  $G_1(x)$  является константой,  $G_1(x) = \gamma$ , а  $G_2(x_1, x_2)$  и, следовательно,  $G_2^c(x_1, x_2)$

зависят только от разности аргументов  $x_1 - x_2$ . Функцию  $G_2^c(x_1, x_2)$  можно, таким образом, записать в виде

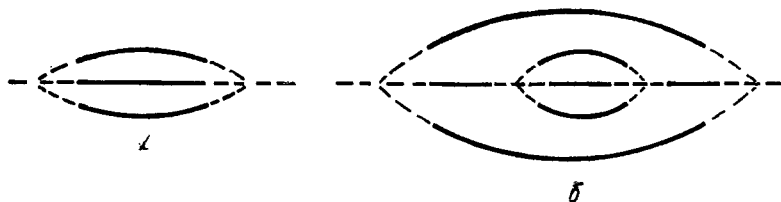
$$G_2^c(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(k) \exp(i k(x_1 - x_2)) dk, \quad (7.1)$$

где  $G(k)$  — функция, которую также будем называть функцией Грина. Двухточечную функцию Грина в  $(k, \omega)$ -представлении можно выразить через  $G(k)$ :

$$\tilde{G}_2(k_1, k_2) = G(k_1) \delta(k_1 + k_2) + (2\pi)^4 \gamma^2 \delta(k_1) \delta(k_2). \quad (7.2)$$



Р и с. 8.



Р и с. 9.

Заметим, что когда взаимодействие содержит только четные степени  $\varphi$ , т. е. функции  $V_{2i-1} \equiv 0$ , всякая (ненулевая) гриновская диаграмма имеет четное число внешних вершин\*, а значит, функции  $G_{2i+1}$  (в частности,  $G_1$ ) равны нулю. В этом случае  $G_2^c = G_2$ .

Рассмотрим произвольную диаграмму для  $G_2^c$  и выделим в ней ребра, при разрезании которых она распадается на две части (рис. 8). К числу таких ребер относятся, например, ребра, содержащие внешние вершины. После удаления выделенных ребер остается диаграмма, распадающаяся на несколько связанных диаграмм (рис. 9). Каждая из получающихся связанных диаграмм обладает следующими свойствами: а) не распадается

\* Для гриновской диаграммы справедливо равенство  $\alpha_{зв} + \alpha_{в} = 2r$ , где  $\alpha_{зв}$  — число вершин, принадлежащих звездам,  $\alpha_{в}$  — число внешних вершин,  $r$  — число ребер. Поскольку в ненулевой диаграмме все звезды имеют четное число вершин,  $\alpha_{зв}$  и, стало быть,  $\alpha_{в}$  четно.

на две части, если удалить какое-либо из ее ребер; б) имеет две внешних вершины, причем обе эти вершины принадлежат звездам диаграммы. Диаграммы, обладающие свойствами а) и б), называются массовыми, а сумма  $M(x_1, x_2)$  всех различных массовых диаграмм — массовым оператором. (Функцию  $M(x_1, x_2)$ , так же как и  $G_2(x_1, x_2)$ , удобно рассматривать как ядро оператора в пространстве  $L^2(E^4)$ .)

Функция  $G_2^c(x_1, x_2)$  связана с массовым оператором соотношениями

$$G_2^c(x_1, x_2) = G_2^{(0)}(x_1, x_2) + \int G_2^{(0)}(x_1, \xi) \times \\ \times M(\xi, \eta) G_2^c(\eta, x_2) d\xi d\eta; \quad (7.3)$$

$$G_2^c(x_1, x_2) = G_2^{(0)}(x_1, x_2) + \sum_{k=1}^{\infty} \int G_2^{(0)}(x_1, \xi_1) M(\xi_1, \eta_1) \times \\ \times G_2^{(0)}(\eta_1, \xi_2) \dots M(\xi_k, \eta_k) G_2^{(0)}(\eta_k, x_2) d\xi_1 \dots d\xi_k d\eta_1 \dots d\eta_k, \quad (7.4)$$

или в операторной форме

$$G_2^c = G_2^{(0)} + G_2^{(0)} M G_2^c; \quad G_2^c = G_2^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} G_2^{(0)} (M G_2^{(0)})^k.$$

Чтобы доказать эти соотношения, носящие название уравнений Дайсона, заметим, что гриновская диаграмма  $F$  с двумя внешними вершинами выражается через массовые диаграммы  $\Phi_1, \dots, \Phi_h$ , получающиеся из  $F$  при удалении выделенных ребер, следующим образом:

$$F(x_1, x_2) = \int G_2^{(0)}(x_1, \xi_1) \Phi_1(\xi_1, \eta_1) G_2^{(0)}(\eta_1, \xi_2) \dots \\ \dots \Phi_h(\xi_h, \eta_h) G_2^{(0)}(\eta_h, x_2) d^k \xi d^k \eta. \quad (7.5)$$

Суммируя (7.5) для всех диаграмм  $F$ , получаем равенство (7.4), а из него сразу следует (7.3), которое, впрочем, нетрудно вывести и непосредственно.

Соотношения (7.3) и (7.4) удобно записывать в  $(k, \omega)$ -представлении. Функция  $M(x_1, x_2)$ , так же как  $G_2(x_1, x_2)$ , зависит только от разности  $x_1 - x_2$ , поэтому она может быть представлена в виде

$$M(x_1, x_2) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \exp(ik(x_1 - x_2)) \tilde{M}(k) dk. \quad (7.6)$$

Из соотношений (7.1), (7.3), (7.6) вытекает:

$$G(k) = \tilde{D}_F(k) + \frac{1}{i} \tilde{D}_F(k) \tilde{M}(k) G(k), \quad (7.7)$$

откуда

$$\tilde{D}_F^{-1}(k) = G^{-1}(k) + \frac{1}{i} \tilde{M}(k),$$

т. е.

$$G^{-1}(k) = \frac{1}{i} (\omega^2 - \varepsilon^2(k) - \tilde{M}(k, \omega)). \quad (7.8)$$

Этой формулой удобно пользоваться для нахождения по теории возмущений полюса функции  $G(k, \omega)$  по переменной  $\omega$ . В самом деле, если вычислять по теории возмущений  $G(k, \omega)$ , то в любом порядке получим функцию с особенностью в точке  $\varepsilon(k)$  и не будем иметь никакой информации о положении полюса функции  $G(k, \omega)$ . Однако из (7.8) следует, что в полюсе функции  $G(k, \omega)$  выполняется соотношение

$$\omega^2 - \varepsilon^2(k) - \tilde{M}(k, \omega) = 0. \quad (7.9)$$

Вычисляя по теории возмущений массовый оператор  $\tilde{M}(k, \omega)$  и подставляя приближенное выражение для него в (7.9), получаем уравнение, из которого приближенно определяется положение полюса (например, снова по теории возмущений). Функция  $G(k, \omega)$ , а следовательно, и  $\tilde{M}(k, \omega)$  — четные функции  $\omega$  (см. § 6), и их можно рассматривать как функции от  $\omega^2$ . Таким образом, если  $G(k, \omega)$  при данном  $k$  имеет полюс в точке  $\omega$ , то она имеет полюс и в точке  $(-\omega)$ . Считаем, что *при каждом  $k$  функция  $G(k, \omega)$ , так же как и  $\tilde{D}_F(k, \omega)$ , имеет ровно два полюса*; эти полюса обозначим  $\pm \omega(k)$ , где  $\omega(k) > 0$ . Используя (7.9), запишем уравнение для  $\omega(k)$ :

$$\omega^2(k) - \varepsilon^2(k) = \tilde{M}(k, \omega(k)). \quad (7.10)$$

Позже (в § 16) увидим, что  $\omega(k)$  имеет смысл энергии одетого одночастичного состояния с импульсом  $k$ . Поэтому назовем  $\omega(k)$  энергией одетых частиц.

Отметим, что через массовый оператор легко выражаются также вычеты функции  $G(k, \omega)$  в полюсах  $\pm \omega(k)$ . Будем решать эквивалентную задачу о нахождении вычета функции  $G(k, \omega)$ , рассматриваемой как функция от  $\omega^2$ , в полюсе  $\omega^2(k)$ ,

т. е. о вычислении предела  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \omega^2(\mathbf{k})} (\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})) G(\mathbf{k}, \omega)$ .  
Покажем, что этот вычет равен

$$i \left( 1 - \frac{\partial \tilde{M}}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega^2 = \omega^2(\mathbf{k})} \right)^{-1} \quad (7.11)$$

В самом деле, пусть  $\frac{\partial \tilde{M}}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega^2 = \omega^2(\mathbf{k})} = A(\mathbf{k})$ . Вычитая из (7.8) равенство (7.10), умноженное на  $1/i$ , получаем

$$\begin{aligned} G^{-1}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{i} [\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - (\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})))] = \\ &= \frac{1}{i} [\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - (A(\mathbf{k}) + \alpha)(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}))] = \\ &= \frac{1}{i} (1 - A(\mathbf{k}) - \alpha)(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})), \end{aligned}$$

где  $\alpha \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \pm \omega(\mathbf{k})$ . Таким образом,

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm \omega(\mathbf{k})} = \frac{iG^{-1}(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})} = 1 - A(\mathbf{k}),$$

что эквивалентно нужному нам соотношению (7.10).

Вычет функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$  по переменной  $\omega^2$  обозначим  $iZ(\mathbf{k})$  [в § 16 показано, что этот вычет — чисто мнимая величина и что  $0 \leq Z(\mathbf{k}) \leq 1$ ]\*. Пользуясь этим обозначением, получаем:

$$(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})) G(\mathbf{k}, \omega) = iZ(\mathbf{k}) + B(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \omega^2(\mathbf{k})} B(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . Функция  $B(\mathbf{k}, \omega)$  связана с массовым оператором  $\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением

$$B(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})) [1 - Z(\mathbf{k})] + Z(\mathbf{k}) [\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))]}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega) + \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))}. \quad (7.12)$$

Если предположить, что  $\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega)$  дважды непрерывно дифференцируема по  $\omega^2$  в точке  $\omega^2 = \omega^2(\mathbf{k})$  и  $Z(\mathbf{k}) \neq 0$ , то из (7.12) вытекает, что функция

$$R(\mathbf{k}, \omega) = \frac{B(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})}$$

\*Полезно отметить, что  $\omega(\mathbf{k})$  и  $Z(\mathbf{k})$  являются четными функциями  $\mathbf{k}$ ; это вытекает из четности  $G(\mathbf{k}, \omega)$  по переменной  $\mathbf{k}$  (см. § 6).

может быть определена по непрерывности также при  $\omega^2 = \omega^2(\mathbf{k})$ . С помощью соображений, использованных в конце § 3 [например, применяя соотношения (3.15)], убеждаемся, что

$$G(\mathbf{k}, \omega) = i \frac{Z(\mathbf{k})}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i0} + R(\mathbf{k}, \omega), \quad (7.13)$$

где функция  $R(\mathbf{k}, \omega)$  непрерывна в точках  $\omega = \pm \omega(\mathbf{k})$ .

Разумеется, массовый оператор  $\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega)$  зависит от выбора  $H_0$ . Если свободный гамильтониан выбран в виде

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k} \tilde{\pi}(\mathbf{k}) \tilde{\pi}(-\mathbf{k}) + \frac{1}{2} \int \omega^2(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (7.14)$$

где  $\omega(\mathbf{k})$  — энергия одетых частиц, то соответствующий массовый оператор  $\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$  связан с функцией Грина  $G(\mathbf{k}, \omega)$  равенством

$$G^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - \tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega). \quad (7.15)$$

Очевидно, функция  $\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$  удовлетворяет условию

$$\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = 0. \quad (7.16)$$

Комбинируя равенства (7.8), (7.10) и (7.15), получаем

$$\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega) - \tilde{M}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})). \quad (7.17)$$

Функцию  $G_2^z$  удобно рассматривать как «кирпичик», входящий в состав диаграмм для более сложных функций, представленных в виде суммы диаграмм (например, для функций Грина  $G_n$  при  $n \geq 3$ ). Введем в связи с этим следующие определения.

Назовем диаграмму *G-неприводимой*, если ни одна из ее поддиаграмм не является массовой диаграммой (иными словами, если всякая ее связная гриновская поддиаграмма с двумя внешними вершинами состоит из одного ребра). Например, диаграмма на рис. 10 *G-неприводима*, а диаграммы на рис. 11 — *G-приводимы*. Легко убедиться, что диаграмму функции  $\tilde{G}_n$  можно получить единственным способом из *G-неприводимой*, вставляя вместо ребер гриновские диаграммы с двумя внешними

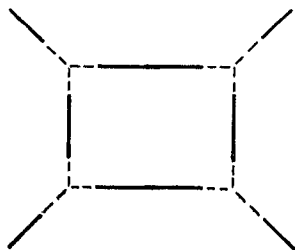
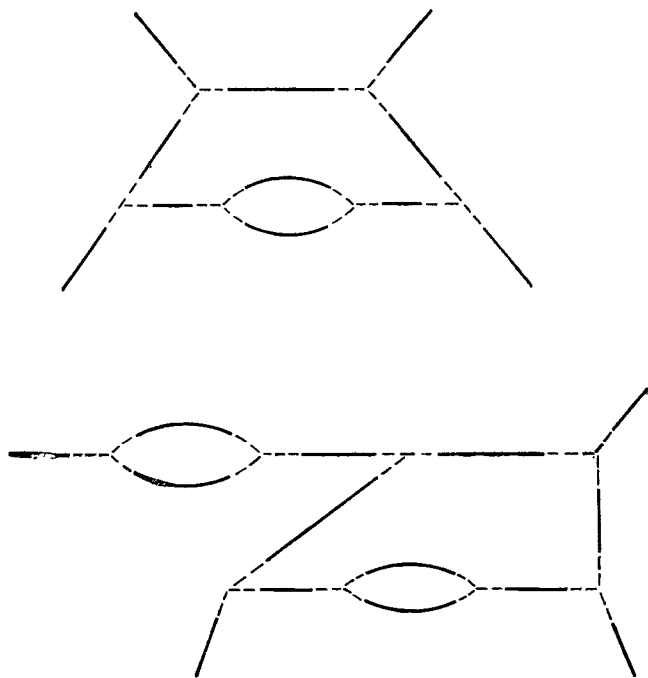


Рис. 10.

вершинами (на рис. 11 изображены диаграммы, которые получаются таким образом из диаграммы на рис. 10).

Используя это, нетрудно проверить, что в диаграммном представлении функции Грина  $G_n$  можно рассматривать только  $G$ -неприводимые диаграммы, если в определении функции,



Р и с. 11.

соответствующей диаграмме, заменить свободную функцию Грина  $\tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}) + i0}$  функцией  $G(\mathbf{k}, \omega)$ .

Если в определении функции, соответствующей  $G$ -неприводимой диаграмме,  $\tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega)$  заменяется на  $G(\mathbf{k}, \omega)$ , то эту диаграмму будем называть  $G$ -скелетной. Ее ребра условимся изображать жирными линиями.

Переформулируем теперь сделанное выше утверждение: функция Грина  $\tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n)$  может быть представлена как сумма всех различных гриновских  $G$ -скелетных диаграмм с  $n$

внешними вершинами. Простейшие  $G$ -скелетные диаграммы для функции  $G_4$  изображены на рис. 12.

Считаем теперь, что деление гамильтониана  $H$  на свободный гамильтониан  $H_0$  и взаимодействие  $V$  произведено так, что к взаимодействию отнесены только слагаемые, имеющие степень  $\geq 3$  по символам  $\varphi$ . Тогда в диаграммной технике, по-

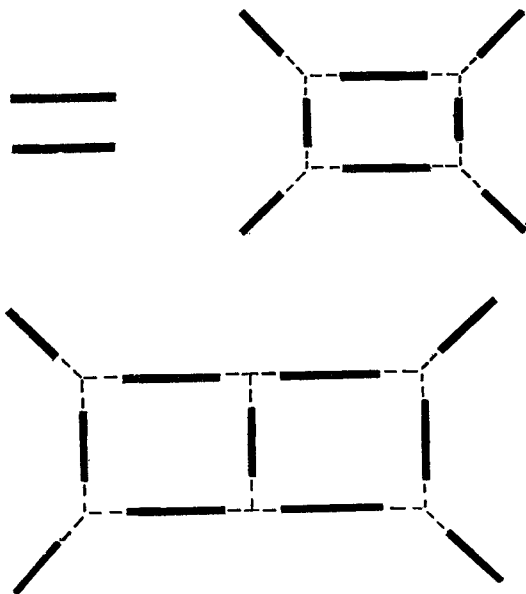


Рис. 12.

строенной по этому разбиению, все звезды имеют не менее трех вершин. Воспользовавшись этим, нетрудно доказать, что массовый оператор  $\tilde{M}(\mathbf{k}, \omega)$ , построенный по выбранному разбиению гамильтониана  $H$  на  $H_0$  и  $V$ , может быть представлен в виде суммы всех различных массовых  $G$ -скелетных диаграмм.

Заменим в определении функции, соответствующей  $G$ -неприводимой диаграмме  $\alpha$ , функцию  $\tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega)$  произвольной функцией  $t(\mathbf{k}, \omega)$ ; полученную функцию обозначим  $\mathcal{W}_\alpha(t)$ . Можно сказать, что по  $G$ -неприводимой диаграмме построен (нелинейный) оператор  $\mathcal{W}_\alpha$ , ставящий в соответствие функции  $t(k)$  функцию  $\mathcal{W}_\alpha(t)$ ; функция, соответствующая  $G$ -скелетной диаграмме, очевидно, записывается как  $\mathcal{W}_\alpha(G)$ . Опишем, например, оператор  $\mathcal{W}_\alpha$ , соответствующий  $G$ -неприводимой мас-



совой диаграмме, изображенной на рис. 13. Он сопоставляет функции  $t(k)$  функцию

$$h(k_1, k_2) = \frac{i}{2} g^2 \int \tilde{V}_3(k_1, k_3, k_4) t(k_3) t(k_4) \times \\ \times \tilde{V}_3(-k_3, -k_4, k_2) dk_3 dk_4.$$

Отметим, что все звезды, содержащиеся в  $G$ -неприводимой диаграмме, имеют не менее трех вершин, поэтому операторы  $\mathcal{W}'_\alpha$  выражаются только через функции  $V_n$  при  $n \geq 3$ . Это означает, что операторы  $\mathcal{W}'_\alpha$  определяются только взаимодействием  $V$  и не зависят от свободного гамильтониана  $H_0$ .



Р и с. 13.

Обозначим  $\mathcal{W}$  сумму операторов  $\mathcal{W}'_\alpha$ , соответствующих всем  $G$ -неприводимым массовым диаграммам. Тогда

$$\tilde{M}(k_1, k_2) = \mathcal{W}(G), \quad (7.18)$$

т. е. массовый оператор равен сумме  $G$ -скелетных массовых диаграмм. Легко убедиться, что функция  $\mathcal{W}(t)$  имеет вид  $h(k_1) \delta(k_1 + k_2)$ ; введем обозначение  $\mathcal{W}(t|k) = h(k)$ . С помощью этого обозначения и соотношения  $\tilde{M}(k_1, k_2) = = \tilde{M}(k_1) \delta(k_1 + k_2)$  можно записать равенство (7.15) в виде

$$\tilde{M}(k) = \mathcal{W}(G|k). \quad (7.19)$$

Из равенства (7.19) получим уравнения, позволяющие вычислить функцию Грина  $G(k|\omega)$ , если известны взаимодействие  $V$  и энергия одетых частиц  $\omega(k)$ , т. е. положение полюсов функции  $G(k, \omega)$  по переменной  $\omega$ . Для этого рассмотрим введенный выше массовый оператор  $\tilde{M}(k, \omega)$ . Очевидно,

$$\tilde{M}_1(k, \omega) = W(G|k, \omega) - W(G|k, \omega(k)); \quad (7.20)$$

$$G^{-1}(k, \omega) = \frac{1}{i} [\omega^2 - \omega^2(k) - \tilde{M}_1(k, \omega)]. \quad (7.21)$$

Эти соотношения представляют собой нужную нам систему уравнений, так как оператор  $\mathcal{W}$  определяется взаимодействием  $V$  и не зависит от свободного гамильтониана [решение (7.20), (7.21) следует искать в классе функций, допускающих представление вида (3.10)]. Систему уравнений (7.20), (7.21)

можно решать методом итераций, т. е.  $n$ -е приближение  $\tilde{M}_1^{(n)}$  для функции  $\tilde{M}_1$  получать по формуле

$$\tilde{M}_1^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{W}^p(G^{(n-1)} | \mathbf{k}, \omega) - \mathcal{W}^p(G^{(n-1)} | \mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})),$$

где  $G^{(n-1)}$  —  $(n-1)$ -е приближение для функции  $G$ , а  $n$ -е приближение  $G^{(n)}$  для  $G$  вычислять, пользуясь соотношением

$$(G^{(n)}(\mathbf{k}, \omega))^{-1} = \frac{1}{i}(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - \tilde{M}_1^{(n)}(\mathbf{k}, \omega))$$

и считая, что функция  $G^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$  допускает представление вида (3.10). В качестве нулевого приближения следует выбрать  $M_1^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ , тогда  $G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i0}$ . К сожалению, оператор  $\mathcal{W}^p$  можно вычислить только по теории возмущений, поэтому модифицируем описанный выше метод итераций таким образом, чтобы он позволял получить разложение в ряд теории возмущений функции  $G$ . Для этого нужно при вычислении  $\tilde{M}^{(n)}$  и  $G^{(n)}$  разлагать по степеням константы связи  $g$ , отбрасывая члены, содержащие  $g^v$  в степени, превышающей  $n$ . При этом достаточно вычислить оператор  $\mathcal{W}^p$  по теории возмущений с точностью до членов порядка  $n$  по  $g$ . Члены построенного для  $G$  ряда выражаются через взаимодействие  $V$  и энергию одетых частиц  $\omega(\mathbf{k})$ . Функции Грина  $G_n$  при  $n \geq 3$  также легко представить в виде аналогичного ряда, поскольку можно выразить их через  $G$ -скелетные диаграммы, а функция, сопоставленная  $G$ -скелетной диаграмме, выражается только через  $V$  и  $G$ .

Таким образом, вместо гамильтониана  $H$  можно задавать энергию одетых частиц  $\omega(\mathbf{k})$  и взаимодействие  $V$ . Это нередко оказывается удобным, в частности, потому, что функция  $\omega(\mathbf{k})$  тесно связана с наблюдаемыми в эксперименте величинами.

В § 9 указан другой способ получать разложение функций  $G_n$  в ряд теории возмущений, члены которого выражаются через  $\omega(\mathbf{k})$  и  $V$ .

## § 8. Вершинные функции

Связную диаграмму будем называть *вершинной диаграммой*, если в ней нет ребер, при разрезании которых она распадается на две части. Все внешние вершины вершинной диаграммы принадлежат звездам (если внешняя вершина принадлежит ребру,

то при разрезании его она распадается на две части). Примеры вершинных диаграмм изображены на рис. 14.

*Вершинной функцией*  $\Gamma_m(x_1, \dots, x_m)$  называется сумма всех вершинных диаграмм, имеющих  $m$  внешних вершин. Вершинная функция в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении определяется формулой

$$\begin{aligned} \Gamma_m(k_1, \dots, k_m) &= (2\pi)^{-2m} \int \Gamma_m(x_1, \dots, x_m) \times \\ &\quad \times \exp\left(i \sum_j \omega_j t_j - i \sum_j \mathbf{k}_j x_j\right) d^m x = \\ &= (2\pi)^{-2m} \int \Gamma_m(x_1, \dots, x_m) \exp\left(i \sum_j \mathbf{k}_j x_j\right) d^m x. \end{aligned}$$

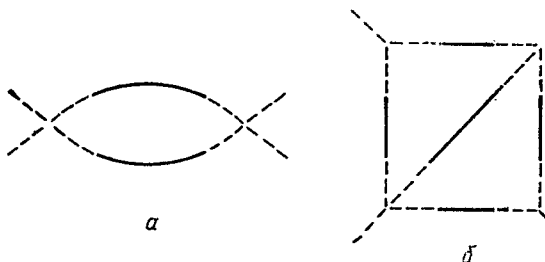


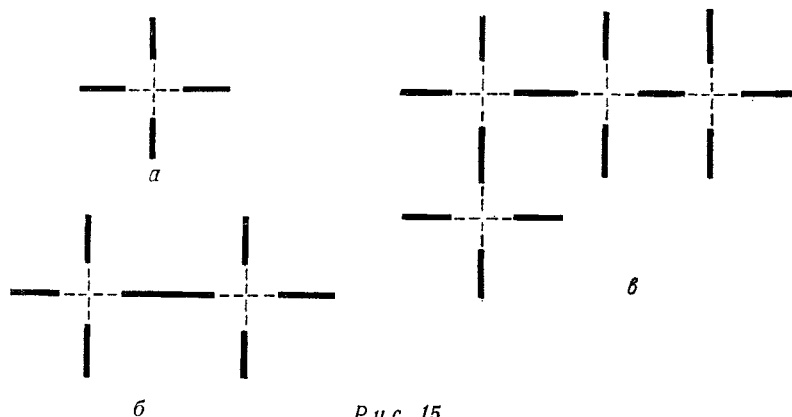
Рис. 14.

Будем рассматривать вершинные функции лишь при  $m \geq 3$ ; это объясняется тем, что  $\Gamma_2(x_1, x_2)$  совпадает с массовым оператором  $M(x_1, x_2)$ .

Важно отметить, что функции  $\Gamma_m$  при  $m \geq 3$  определяются самим гамильтонианом  $H$  и не зависят от способа его разбиения на  $H_0$  и  $V$  (хотя диаграммное представление, с помощью которого мы определили эти функции, зависит от способа разбиения).

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим древесные гриновские диаграммы, содержащие только звезды, имеющие не менее трех вершин. (Диаграмма называется древесной, если в ней нет циклов. Примеры древесных диаграмм см. на рис. 15.) Из древесных диаграмм можно получать более сложные гриновские диаграммы, вставляя вместо звезд вершинные диаграммы, а вместо ребер — связные диаграммы с двумя вершинами (например, диаграмму на рис. 16 получаем из диаграммы  $b$  на рис. 15, вставляя вместо одной из звезд диаграмму с рис. 14а). Легко убедиться, что так получается любая гриновская диа-

грамма, причем единственным способом. Это позволяет утверждать, что функция Грина  $\tilde{G}_m(k_1, \dots, k_m)$  может быть получена как сумма функций, соответствующих древесным гриновским диаграммам с  $m$  внешними вершинами и со звездами, имеющими не менее трех вершин, если при построении функций, отвечающих диаграммам, слегка изменить описанные в § 4 правила. Именно, каждой звезде следует сопоставить вместо  $\frac{n!}{i} V_n(k_1, \dots, k_n)$  функцию  $\tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n)$ , а ребру вместо мно-



Р и с. 15.

жителя  $\tilde{D}_F(k_1) \delta(k_1 \pm k_2)$  — множитель  $G(k_1) \delta(k_1 \pm k_2)$ . Остальные правила остаются теми же. Сделанное замечание позволяет выразить  $\tilde{G}_m(k_1, \dots, k_m)$  через  $G(k)$  и  $\tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n)$  с  $3 \leq n \leq m$ . Например,

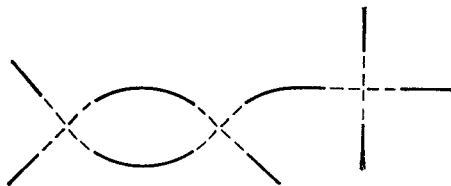
$$\begin{aligned} \tilde{G}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = & G(k_1) \delta(k_1 + k_2) G(k_3) \delta(k_3 + k_4) + \\ & + G(k_1) \delta(k_1 + k_3) G(k_2) \delta(k_2 + k_4) + \\ & + G(k_1) G(k_2) G(k_3) G(k_4) \tilde{\Gamma}_4(k_1, k_2, k_3, k_4); \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_6(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) = & G(k_1) \delta(k_1 + k_2) G(k_3) \delta(k_3 + k_4) G(k_5) \delta(k_5 + k_6) + \\ & + G(k_1) \delta(k_1 + k_2) G(k_3) G(k_4) G(k_5) G(k_6) \tilde{\Gamma}_4(k_3, k_4, k_5, k_6) + \\ & + G(k_1) G(k_2) G(k_3) \Gamma(k_1, k_2, k_3) G(k_1 + k_2 + k_3) \Gamma(k_4, k_5, k_6) \times \\ & \times G(k_4) G(k_5) G(k_6) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6) + \\ & + G(k_1) G(k_2) G(k_3) G(k_4) G(k_5) G(k_6) \times \\ & \times \tilde{\Gamma}_6(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6) + \dots \end{aligned} \quad (8.2)$$

В (8.2) функция  $\Gamma$  определяется соотношением

$$\tilde{\Gamma}_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4);$$

многоточие обозначает члены, отличающиеся от выписанных только перестановкой индексов. В выписанных формулах для простоты ограничиваемся случаем, когда взаимодействие содер-



Р и с. 16.

жит только четные степени  $\varphi$ , и, значит,  $G_k = \Gamma_k \equiv 0$  при нечетном  $k$ .

Функции Грина  $G_n$  и функция  $G$  определяются самим гамильтонианом  $H$ , поэтому доказанные соотношения позво-

ляют установить независимость  $\Gamma_n$  от представления  $H$  в форме  $H_0 + V$ .

Вершинные функции и массовый оператор были определены выше только для трансляционно-инвариантных гамильтонианов. Следует заметить, однако, что указанные определения сохраняют смысл, даже если трансляционная инвариантность отсутствует. В этом случае также остаются справедливыми многие из доказанных в настоящем и предыдущем параграфах утверждений.

## ПЕРЕСТРОЙКА РЯДА ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

### § 9. Перенормировка энергии

Будем исходить из трансляционно-инвариантного гамильтониана  $H = H_0 + V$ , определяемого формулой (3.3).

В § 4 была указана диаграммная техника для вычисления функций Грина  $\tilde{G}_n$ . Построенные там диаграммы выражались через функции  $\varepsilon(\mathbf{k})$  и  $\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  (мы все время используем  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представление). Перестроим в этом параграфе диаграммное представление так, чтобы вместо  $\varepsilon(\mathbf{k})$  в выражение для функции, соответствующей диаграмме, входила энергия одетых частиц  $\omega(\mathbf{k})$ , определяющая положение полюсов функции Грина  $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$ . (Другой способ построения ряда теории возмущений по энергии одетых частиц  $\omega(\mathbf{k})$  и взаимодействию  $V$  был указан в § 7.) Как и раньше, удобно включить  $H$  в семейство гамильтонианов, зависящих от параметра  $g$ , но сейчас сделаем это по-другому. Рассмотрим семейство гамильтонианов  $H_g = H_0(g) + gV$ , где

$$H_0(g) = \frac{1}{2} \int \tilde{\pi}(\mathbf{k}) \tilde{\pi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k} + \frac{1}{2} \int \varepsilon^2(\mathbf{k} | g) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

и функция  $\varepsilon(\mathbf{k} | g)$  определяется из условия, чтобы для  $H_g$  полюса функции Грина  $\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$  находились в точках  $\omega = \pm \omega(\mathbf{k})$  (функцию  $\omega(\mathbf{k})$  считаем не зависящей от  $g$ ). Очевидно, что при  $g = 0$  справедливо равенство  $\varepsilon(\mathbf{k} | 0) = \omega(\mathbf{k})$ , поэтому разложение функции  $\varepsilon^2(\mathbf{k} | g)$  по степеням  $g$  имеет вид

$$\varepsilon^2(\mathbf{k} | g) = \omega^2(\mathbf{k}) + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \mu_n(\mathbf{k}).$$

Чтобы получить нужную перестройку ряда теории возмущений, разобьем гамильтониан  $H$  по-другому на «свободный

гамильтониан» и «возмущение». Именно, положим  $H_g = H'_0 + gV'$ , где  $H'_0$  задается формулой (7.14), а

$$\begin{aligned} gV' = H_g - H'_0 &= g \sum_n \int \tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n + \\ &+ \frac{1}{2} \int (\varepsilon^2(\mathbf{k} | g) - \omega^2(\mathbf{k})) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \\ &= g \sum_n \int \tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n + \\ &+ \sum_n \frac{1}{2} \int \mu_n(\mathbf{k}) g^n \tilde{\varphi}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(-\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Массовый оператор  $\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$ , отвечающий новому способу выделения свободного гамильтониана, связан с функцией Грина  $G$  соотношением (7.15) и обращается в нуль при  $\omega^2 = \omega^2(\mathbf{k})$  [см. (7.16)].

Строя диаграммную технику по разбиению  $H_g = H'_0 + gV'$ , получаем диаграммное представление, где каждая диаграмма выражается через функции  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ ,  $\mu_n(\mathbf{k})$  и константу  $g$ . Кроме звезд, которым соответствует в подынтегральном выражении диаграммы множитель

$$\frac{n!}{i} g \tilde{v}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_{n-1}) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{(n-2)/2},$$

в диаграммах, построенных по разбиению  $H'_0 + gV'$ , появляется счетное число типов звезд с двумя вершинами, причем звезде  $n$ -го типа соответствует множитель  $g^n \mu_n(\mathbf{k}) \delta(k_1 + k_2)$ . Покажем, что функции  $\mu_n(\mathbf{k})$  можно по индукции выразить через  $\omega(\mathbf{k})$  и  $\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  и тем самым построить диаграммное представление функций  $\tilde{G}_n$  и  $\tilde{\Gamma}_n$ , в котором каждая диаграмма выражается через  $g$ ,  $\omega(\mathbf{k})$  и  $\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$ .

Пусть для функций  $\mu_1(\mathbf{k}) \dots \mu_{n-1}(\mathbf{k})$  построены нужные выражения. Вычислим сумму  $\tilde{M}_1^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$  всех диаграмм, имеющих  $n$ -й порядок по  $g$ , для массового оператора  $\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$ . В ней функция  $\mu_n(\mathbf{k})$  встречается только в одной диаграмме (все остальные содержат  $\mu_i(\mathbf{k})$  лишь с индексами  $i < n$ ). Эта единственная диаграмма состоит из одной звезды  $n$ -го типа с двумя вершинами и равна  $g^n \mu_n(\mathbf{k})$ . Таким образом,

$$\tilde{M}_1^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = g^n \mu_n(\mathbf{k}) + \tilde{P}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $\tilde{P}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$  выражается через  $\mu_i(\mathbf{k})$  при  $i < n$ . Но нам известно, что  $\tilde{M}_1(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = 0$ , поэтому также  $\tilde{M}_1^{(n)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = 0$ . Отсюда

$$\mu_n(\mathbf{k}) = -g^{-n} \tilde{P}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})),$$

что дает возможность по индукции вычислить  $\mu_n(\mathbf{k})$ .

## § 10. Перенормировка константы связи

Введем нормированные функции Грина  $\tilde{G}'_n$  и нормированные вершинные функции  $\tilde{\Gamma}'_n$ :

$$\tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) = Z^{-n/2} \tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n), \quad (10.1)$$

$$\tilde{\Gamma}'_n(k_1, \dots, k_n) = Z^{n/2} \tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n), \quad (10.2)$$

где

$$Z = Z(0) = \frac{1}{i} \lim_{\omega^2 \rightarrow \omega^2(0)} (\omega^2 - \omega^2(0)) G(0, \omega).$$

Ради определенности будем рассматривать гамильтониан  $H = H_0 + V$ , где  $H_0$ , как всегда, задается соотношением (2.17), а

$$V = \int v_4(x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) d^4x.$$

Как и в § 9, включим его в семейство гамильтонианов  $H(g) = H_0(g) + gV$ , для которых функция Грина  $G(\mathbf{k}, \omega)$  имеет полюса в точках  $\pm \omega(\mathbf{k})$ .

Рассмотрим нормированную вершинную функцию

$$\tilde{\Gamma}'_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

и обозначим  $\lambda$  значение функции  $i \Gamma(k_1, k_2, k_3)$  в фиксированной каким-либо образом точке  $(k_1^0, k_2^0, k_3^0)$ :

$$\lambda = i \Gamma(k_1^0, k_2^0, k_3^0). \quad (10.3)$$

Назовем  $\lambda$  *перенормированной константой связи* (позже будет показано, что при некоторых условиях величина  $\lambda$  тесно связана с амплитудой рассеяния). Отметим, что для свободного гамильтониана  $\lambda = 0$ , поэтому разложение  $\lambda$  по степеням  $g$  имеет вид

$$\lambda = a_1 g + a_2 g^2 + \dots \quad (10.4)$$



Для вычисления коэффициента  $a_1$  заметим, что в первом порядке теории возмущений

$$\Gamma_4(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{4!}{i} (2\pi)^{-1} g \tilde{v}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$

(существует только одна вершинная диаграмма первого порядка, и она состоит из единственной звезды). Далее, ряд теории возмущений для массового оператора начинается со второго порядка по  $g$ , поэтому  $Z$  отличается от единицы только во втором порядке. Отсюда убеждаемся, что

$$a_1 = 4! (2\pi)^{-1} \tilde{v}_4(\mathbf{k}_1^0, \mathbf{k}_2^0, \mathbf{k}_3^0).$$

В дальнейшем считаем всегда, что  $\tilde{v}_4(\mathbf{k}_1^0, \mathbf{k}_2^0, \mathbf{k}_3^0) \neq 0$  и, значит,  $a_1 \neq 0$ .

Укажем разложение функций  $\tilde{G}'_n$  и  $\tilde{\Gamma}'_n$  по степеням перенормированной константы связи  $\lambda$ , представив его в виде суммы диаграмм, каждая из которых выражается через  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $\lambda$  и функцию  $\tilde{v}_4$ .

Будем исходить из уравнений для функции  $\tilde{G}'_n$ , получающихся из (3.4) подстановкой  $\tilde{G}_n = Z^{nI^2} \tilde{G}'_n$ :

$$\begin{aligned} Z_g (\omega_1^2 - \varepsilon^2(\mathbf{k}_1 | g)) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n | g) = \\ = i \sum_j \delta(k_1 + k_j) \tilde{G}'_{n-2}(k_2, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n | g) + \\ + \frac{2}{\pi} g Z_g^2 \int \tilde{v}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta(k_1 + q_1 + q_2 + q_3) \times \\ \times \tilde{G}'_{n+2}(q_1, q_2, q_3, k_2, \dots, k_n | g) dq_1 dq_2 dq_3. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Функции  $\tilde{G}'_n$ ,  $\varepsilon(\mathbf{k} | g)$  и число  $Z_g$  будем рассматривать как ряды по перенормированной константе связи  $\lambda$ . В силу (10.4) и условия  $a_1 \neq 0$  ряд по  $g$  можно преобразовать в ряд по  $\lambda$ . При  $\lambda = 0$ , очевидно,  $g = 0$ ,  $\varepsilon(\mathbf{k} | 0) = \omega(\mathbf{k})$ ,  $Z = 1$ , поэтому можно написать:

$$\begin{aligned} Z_g (\varepsilon^2(\mathbf{k} | g) - \omega^2(\mathbf{k})) &= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r v_r(\mathbf{k}), \\ Z_g &= 1 - \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \eta_r, \\ g Z_g^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r \zeta_r. \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями, преобразуем (10.5):

$$\begin{aligned}
 & (\omega_1^2 - \omega^2(\mathbf{k}_1)) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) = \\
 & = i \sum_f \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_j) \tilde{G}'_{n-2}(k_2, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n) + \\
 & \quad + \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \nu_r(\mathbf{k}_1) \right) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) + \\
 & \quad + \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \eta_r \right) (\omega_1^2 - \omega^2(\mathbf{k}_1)) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) + \\
 & + \frac{2}{\pi} \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \zeta_r \right) \int \tilde{v}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \times \\
 & \quad \times \tilde{G}'_{n+2}(q_1, q_2, q_3, k_2, \dots, k_n) dq_1 dq_2 dq_3
 \end{aligned}$$

и, далее, сведем их к уравнениям

$$\begin{aligned}
 & \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) = \\
 & = \tilde{D}_F(k_1) \left[ \sum_f \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_j) \tilde{G}'_{n-2}(k_2, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_n) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{i} \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \nu_r(\mathbf{k}) \right) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) + \\
 & \quad + \frac{1}{i} \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \eta_r \right) (\omega_1^2 - \omega^2(\mathbf{k}_1)) \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n) + \\
 & \quad \left. + \frac{2}{\pi i} \left( \sum_{r \geq 1} \lambda^r \zeta_r \right) \int \tilde{v}_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \times \right. \\
 & \quad \left. \times \tilde{G}'_{n+2}(q_1, q_2, q_3, k_2, \dots, k_n) dq_1 dq_2 dq_3 \right], \quad (10.6)
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) + i0}.$$

(Переход от уравнений (10.5) к (10.6) аналогичен переходу от (3.4) к (3.6) и обосновывается теми же соображениями.)

Из уравнений (10.6) так же, как и в § 4, получается диаграммное представление функций  $\tilde{G}'_n$ ; диаграммы в нем выражаются через функции  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{v}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$ ,  $\nu_m(\mathbf{k})$  и числа  $\eta_m$ ,  $\zeta_m$ . Именно, в диаграммах участвуют звезды с двумя и четырьмя вершинами; каждому натуральному  $m$  соответствуют два типа звезд с двумя вершинами, один из которых вносит в подынтегральное выражение множитель  $\frac{1}{i} \lambda^m \nu_m(\mathbf{k}_1) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ , а другой — множитель  $\frac{1}{i} \lambda^m \eta_m (\omega_1^2 - \omega^2(\mathbf{k}_1)) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  и один тип звезд с четырьмя вер-

шинами [этому типу звезд соответствует в диаграммах множитель  $\frac{4!}{2\pi i} \lambda^m \zeta_m \tilde{v}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ ]. Ребрам диаграмм отвечают множители

$$i(\omega_1^2 - \omega^2(\mathbf{k}_1) + i0)^{-1} \delta(k_1 + k_2).$$

Числа  $\eta_m$ ,  $\zeta_m$  и функции  $v_m(\mathbf{k})$  пока неизвестны.

Покажем, однако, что их можно вычислить по индукции. Для этого заметим, что нормированная вершинная функция  $\tilde{\Gamma}'_n$  может быть представлена как сумма всех вершинных диаграмм описанного диаграммного представления, а сумма всех массовых диаграмм из него дает нормированный массовый оператор  $\tilde{M}'(\mathbf{k}, \omega)$ , связанный с нормированной функцией Грина  $G'(\mathbf{k}, \omega) = Z^{-1} G(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением

$$(G'(\mathbf{k}, \omega))^{-1} = \frac{1}{i}(\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k}) - \tilde{M}'(\mathbf{k}, \omega)). \quad (10.7)$$

(Соотношение (10.7) получается так же, как равенство (7.8). Рассуждения § 8 позволяют установить связь между суммой  $\gamma_n$  вершинных диаграмм с  $n$  внешними вершинами и функциями  $\tilde{G}'_n$ . Например:

$$\begin{aligned} G'_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \\ &= G'(k_1) \delta(k_1 + k_2) G'(k_3) \delta(k_3 + k_4) + \\ &+ G'(k_1) \delta(k_1 + k_3) G'(k_2) \delta(k_2 + k_4) + \\ &+ G'(k_1) G'(k_2) G'(k_3) G'(k_4) \gamma_4(k_1, k_2, k_3, k_4). \end{aligned}$$

Сравнивая это соотношение с (8.1), (10.1), (10.2), видим, что  $\gamma_4 = \tilde{\Gamma}'_4$ ; аналогично доказывается, что  $\gamma_n = \tilde{\Gamma}'_n$  при любом  $n$ .)

Чтобы вычислить  $v_n(\mathbf{k})$ ,  $\eta_n$ ,  $\zeta_n$ , воспользуемся (10.3) и равенствами:

$$\tilde{M}'(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) = 0; \quad (10.8)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{M}'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\substack{\mathbf{k} = 0 \\ \omega^2 = \omega^2(0)}} = 0. \quad (10.9)$$

В силу (10.7) соотношение (10.8) означает, что  $\pm \omega(\mathbf{k})$  — полюса функции Грина  $G(\mathbf{k}, \omega)$  по переменной  $\omega$ , а (10.9) эквивалентно условию:  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \omega^2(0)} (\omega^2 - \omega^2(0)) G'(0, \omega) = i$ .

Обозначим  $\tilde{M}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\tilde{\Gamma}_4^{(n)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \Gamma^{(n)}(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$  сумму диаграмм  $n$ -го порядка по  $\lambda$  в разложениях функций  $\tilde{M}'$  и  $\tilde{\Gamma}'_4$ . Легко убедиться, что

$$\tilde{M}^{(n)}(\mathbf{k}, \omega) = \lambda^n v_n(\mathbf{k}) + \lambda^n \eta_n (\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})) + R^{(n)}(\mathbf{k}, \omega); \quad (10.10)$$

$$\Gamma^{(n)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{4!}{2\pi i} \zeta_n \lambda^n \tilde{v}_4(k_1, k_2, k_3) + S^{(n)}(k_1, k_2, k_3), \quad (10.11)$$

где функции  $R^{(n)}$  и  $S^{(n)}$  выражаются только через  $v_r(\mathbf{k})$ ,  $\eta_r$ ,  $\zeta_r$  с  $r < n$ . Пользуясь соотношениями (10.3), (10.8) — (10.11), получаем формулы для вычисления  $v_n(\mathbf{k})$ ,  $\eta_n$ ,  $\zeta_n$ , если известны  $v_r(\mathbf{k})$ ,  $\eta_r$ ,  $\zeta_r$  с  $r < n$ :

$$v_n(\mathbf{k}) = -\lambda^{-n} R^{(n)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})); \quad (10.12)$$

$$\eta_n = -\lambda^{-n} \left. \frac{\partial R^{(n)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega^2} \right|_{\substack{\mathbf{k}=0 \\ \omega^2=\omega^2(0)}}; \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \zeta_n &= -\frac{i2\pi i}{4! \tilde{v}_4(k_1^0, k_2^0, k_3^0)} \lambda^{-n} S^{(n)}(k_1^0, k_2^0, k_3^0) = \\ &= -i \zeta_1 \lambda^{-n} S^{(n)}(k_1^0, k_2^0, k_3^0) \end{aligned} \quad (10.14)$$

при  $n > 1$ ;

$$\zeta_1 = \frac{i2\pi}{4! \tilde{v}_4(k_1^0, k_2^0, k_3^0)}. \quad (10.15)$$

С помощью (10.12) — (10.14) удастся рекуррентно выразить через  $\lambda$ ,  $\omega(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{v}_4$  все функции  $v_n(\mathbf{k})$  и числа  $\eta_n$ ,  $\zeta_n$ , а стало быть, и все диаграммы описанного выше диаграммного представления функций  $\tilde{G}'_n$ .

Полезно отметить, что в построенном диаграммном представлении функций  $\tilde{G}'_n$  можно не рассматривать диаграммы, в которых содержатся ребра с вершинами, принадлежащими одной звезде. В самом деле, рассмотрим вместо взаимодействия  $V$  взаимодействие

$$V' = N \int v_4(x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4) \varphi(x_1) \varphi(x_2) \varphi(x_3) \varphi(x_4) d^4 x.$$

Взаимодействия  $V$  и  $V'$  отличаются друг от друга только квадратичным по  $\varphi$  слагаемым (см. § 5). Отсюда видно, что исследуемый нами гамильтониан  $H(g) = H_0(g) + gV$  совпадает с  $H'(g) = H'_0(g) + gV'$ , где  $H'_0(g)$  определяется из условия, чтобы функция Грина гамильтониана  $H'(g)$  имела полюса в точках  $\pm \omega(\mathbf{k})$ . Как было замечено в § 5, при построении диаграммной техники по взаимодействию, записанному в нормальной форме, не возникают диаграммы, содержащие ребра с вершинами, принадлежащими одной звезде. Это замечание вместе с соотношением  $H(g) = H'(g)$  показывает, что в диаграммном представлении функций  $\tilde{G}'_n$  также можно не рассматривать такие диаграммы.

В качестве примера произведем вычисление  $\tilde{M}'$  и  $\Gamma$  с точностью до второго порядка. Легко проверить, что  $v_1(\mathbf{k}) = 0$ ,  $\eta_1 = 0$  (поскольку нет ненулевых диаграмм первого порядка для массового оператора). В  $R^{(2)}$  дает вклад только диаграмма рис. 9, а; таким образом \*,

$$R^{(2)}(k) = i \frac{(4!)^2}{6} \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 \zeta_1^2 \int \tilde{v}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \tilde{D}_F(p_1) \times \\ \times \tilde{D}_F(p_2) \tilde{D}_F(-k - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \tilde{v}_4(-\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2, \mathbf{k} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) dp_1 dp_2. \quad (10.16)$$

Из равенств (10.10), (10.12), (10.13) получаем

$$\tilde{M}^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) = R^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) - R^{(2)}(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) - \\ - \frac{\partial R^{(2)}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\substack{\mathbf{k}=0 \\ \omega^2 = \omega^2(0)}} (\omega^2 - \omega^2(\mathbf{k})). \quad (10.17)$$

В первом порядке по  $\lambda$

$$\Gamma^{(1)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{4!}{2\pi} \frac{\lambda}{i} \zeta_1 \tilde{v}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3), \quad (10.18)$$

где  $\zeta_1$  определяется формулой (10.15). Комбинируя (10.18) и (10.5), видим, что

$$\Gamma^{(1)}(k_1, k_2, k_3) = \frac{\lambda}{i} \frac{\tilde{v}_4(k_1, k_2, k_3)}{\tilde{v}_4(k_1^0, k_2^0, k_3^0)}.$$

\* Множитель 6 в знаменателе появляется из-за того, что рассматриваемая диаграмма имеет группу симметрии порядка 6.

При вычислении функции  $S^{(2)}$  вносит вклад только диаграмма рис. 14,а. Отсюда\*

$$\begin{aligned}
 S^{(2)}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{2} \frac{(41)^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 \zeta_1^2 \times \\
 &\times \int \tilde{v}_4(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, p) \tilde{D}_F(-p - k_1 - k_2) \tilde{v}_4(-p, p + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) dp = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{i}\right)^2 \int \frac{\tilde{v}_4(k_1, k_2, p)}{\tilde{v}_0(k_1^0, k_2^0, k_3^0)} \tilde{D}_F(p) \tilde{D}_F(-p - k_1 - k_2) \times \\
 &\quad \times \frac{\tilde{v}_4(-p, p + k_1 + k_2, k_3)}{\tilde{v}_4(k_1^0, k_2^0, k_3^0)} dp. \tag{10.19}
 \end{aligned}$$

С помощью (10.11), (10.14), (10.19) получаем:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2)}(k_1, k_2, k_3) &= S^{(2)}(k_1, k_2, k_3) - \\
 &- \frac{\tilde{v}_4(k_1, k_2, k_3)}{\tilde{v}_4(k_1^0, k_2^0, k_3^0)} S^{(2)}(k_1^0, k_2^0, k_3^0). \tag{10.20}
 \end{aligned}$$

Отметим в заключение, что перенормированная константа связи, определенная соотношением (10.3), может оказаться комплексной. Тогда бывает удобно модифицировать определение перенормированной константы связи, положив

$$\lambda = \text{Re}(i\Gamma(k_1^0, k_2^0, k_3^0)).$$

Существенных изменений проведенных выше рассуждений при этом не требуется.

---

\* Группа симметрии рассматриваемой диаграммы состоит из двух элементов, поэтому в выражении (10.19) появляется множитель  $1/2$ .

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ВИДА $V(\varphi)$ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА ОТ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

### § 11. Потенциальные взаимодействия

Рассмотрим в пространстве  $R = L^2(E^k)$  интегрируемых с квадратом функций  $f(x)$  от  $k$  действительных переменных  $x_1, \dots, x_k$  гамильтонианы вида  $H = A + B(t)$ , где  $A = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ,  $B(t)$  — оператор умножения на  $v(x, t) = v(x_1, \dots, x_k, t)$ . Функция  $v$ , а следовательно, и  $H$  могут явно зависеть от времени  $t$ . Считаем, что эта функция достаточно хорошая (например, непрерывная и ограниченная снизу).

Напомним, что рассматриваемые гамильтонианы получаются при квантовании классических систем с функциями Гамильтона:

$$\mathcal{H}(p, x, t) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^k p_i^2 + v(x, t).$$

Представим различные величины, связанные с такими гамильтонианами, в виде континуальных интегралов. Начнем с замечания, что при малых  $\tau$

$$\exp(-i(A + B(t))\tau) \approx \exp(-iA\tau) \exp(-iB(t)\tau),$$

причем ошибка этого равенства — бесконечно малая величина второго порядка по  $\tau$ . Для вычисления оператора эволюции  $U(t_1, t_0)$  разделим промежуток  $[t_0, t_1]$  на малые части точками  $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_1$  и запишем приближенное равенство:

$$\begin{aligned} U(t_1, t_0) &= U(\tau_n, \tau_{n-1}) U(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}) \dots U(\tau_1, \tau_0) \approx \\ &\approx \exp[-i(A + B(\tau_n))\Delta\tau_n] \dots \exp[-i(A + B(\tau_1))\Delta\tau_1] \approx \\ &\approx \exp(-iA\Delta\tau_n) \exp(-iB(\tau_n)\Delta\tau_n) \dots \exp(-iA\Delta\tau_1) \times \\ &\quad \times \exp(-iB(\tau_1)\Delta\tau_1), \end{aligned}$$

где  $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ . В пределе  $\max \Delta\tau_i \rightarrow 0$  получаем точное соотношение:

$$U(t_1, t_0) = \lim_{\max \Delta\tau_i \rightarrow 0} \exp(-iA\Delta\tau_n) \exp[-iB(\tau_n)\Delta\tau_n] \dots \\ \dots \exp(-iA\Delta\tau_1) \exp[-iB(\tau_1)\Delta\tau_1] \quad (11.1)$$

(формула Далецкого — Троттера).

Если  $\varphi_\lambda$  — обобщенный базис в пространстве  $R$ , то из формулы Далецкого — Троттера вытекает:

$$\langle \lambda | U(t_1, t_0) | \mu \rangle = \lim_{\max \Delta\tau_i \rightarrow 0} \int \langle \lambda | \exp(-iA\Delta\tau_n) | \lambda_n \rangle \times \\ \times \langle \lambda_n | \exp[-iB(\tau_n)\Delta\tau_n] | \mu_n \rangle \dots \langle \mu_2 | \exp[-iA\Delta\tau_1] | \lambda_1 \rangle \times \\ \times \langle \lambda_1 | \exp[-iB(\tau_1)\Delta\tau_1] | \mu \rangle d\lambda_1 \dots d\lambda_n d\mu_2 \dots d\mu_n$$

здесь введено обозначение  $\langle \lambda | A | \mu \rangle = \langle A\varphi_\mu, \varphi_\lambda \rangle$ .

До сих пор никак не использовалась специфика операторов  $A$  и  $B$ . Теперь выберем в качестве  $\varphi_\lambda$  функции  $\varphi_x(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n)$ , тогда  $\langle \mathbf{x} | A | \mathbf{x}' \rangle = \langle A\varphi_{\mathbf{x}'}, \varphi_{\mathbf{x}} \rangle$  представляет собой ядро оператора  $A$  (матрицу оператора  $A$  в координатном представлении). Ядра операторов  $\exp(-iA\Delta\tau)$  и  $\exp[-iB(t)\Delta\tau]$  легко вычисляются:

$$\langle \mathbf{x} | \exp(-iA\Delta\tau) | \mathbf{x}' \rangle = \left( \frac{m}{2\pi i \Delta\tau} \right)^{k/2} \exp\left( i \frac{m}{2} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{\Delta\tau} \right);$$

$$\langle \mathbf{x} | \exp[-iB(t)\Delta\tau] | \mathbf{x}' \rangle = \exp[-iv(\mathbf{x}, t)\Delta\tau] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Подставляя эти соотношения в (11.1), получаем

$$\langle \mathbf{x} | U(t_1, t_0) | \mathbf{x}' \rangle = \lim_{\max \Delta\tau_j \rightarrow 0} \int \prod_{j=1}^n \left( \frac{m}{2\pi i \Delta\tau_j} \right)^{k/2} \times \\ \times \exp \left[ i \left( \sum_{j=1}^n \frac{m}{2} \left( \frac{x_j - x_{j-1}}{\Delta\tau_j} \right)^2 \Delta\tau_j - \sum_{j=1}^{n-1} v(x_j, \tau_j) \Delta\tau_j \right) \right] \times \\ \times dx_1 \dots dx_{n-1} \quad (11.2)$$

(здесь  $x_0 = \mathbf{x}'$ ,  $x_n = \mathbf{x}$ ). Соотношение (11.2) и есть нужное нам представление ядра оператора  $U(t_1, t_0)$ ; это соотношение



принято кратко записывать в виде

$$\langle x | U(t_1, t_0) | x' \rangle = \int_{\substack{x(t_0)=x' \\ x(t_1)=x}} \exp \left[ i \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m\dot{x}^2(\tau)}{2} - v(x(\tau), \tau) \right) d\tau \right] \prod_{t_0 \leq \tau \leq t_1} dx(\tau) \quad (11.3)$$

и называть правую часть *континуальным интегралом* от функционала  $\exp [iS(x(\tau))]$  по пространству траекторий  $x(\tau)$ , начинающихся в точке  $x'$  и кончающихся в  $x$  (мы ввели обозначение  $S(x(\tau)) = \int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}^2(\tau)/2 - v(x(\tau), \tau)) d\tau$ ; величина  $S(x(\tau))$  носит название классического действия вдоль траектории  $x(\tau)$ , а стоящая под интегралом функция  $L(x, \dot{x}, \tau) = m\dot{x}^2/2 - v(x, \tau)$  называется функцией Лагранжа). Следует помнить, что мера в пространстве траекторий не задается и континуальный интеграл по определению является пределом конечнократных интегралов, так что формула (11.3) содержит столько же информации, сколько (11.2).

Если  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  — две функции из пространства  $R$ , то

$$\begin{aligned} \langle U(t_1, t_0) \varphi_0, \varphi_1 \rangle &= \int \langle x | U(t_1, t_0) | x' \rangle \varphi_0(x') \overline{\varphi_1(x)} dx dx' = \\ &= \lim_{\max \Delta\tau_j \rightarrow 0} \int \prod_{j=1}^n \left( \frac{m}{2\pi i \Delta\tau_j} \right)^{k/2} \varphi_0(x_0) \overline{\varphi_1(x_n)} \times \\ &\times \exp \left[ i \left( \sum_{j=0}^n \frac{m}{2} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{\Delta\tau_j} - \sum_{j=1}^{n-1} v(x_j, \tau_j) \Delta\tau_j \right) \right] \times \\ &\times dx_0 dx_1 \dots dx_n, \end{aligned} \quad (11.4)$$

или кратко:

$$\begin{aligned} \langle U(t_1, t_0) \varphi_0, \varphi_1 \rangle &= \int \varphi_0(x(t_0)) \overline{\varphi_1(x(t_1))} \times \\ &\times \exp \left[ i \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2(\tau) - v(x(\tau), \tau) \right) d\tau \right] \prod_{t_0 \leq \tau \leq t_1} dx(\tau). \end{aligned} \quad (11.5)$$

Правая часть (11.5) интерпретируется как континуальный интеграл по пространству траекторий со свободными концами.

Предположим, что функция  $v$ , а стало быть, и гамильтониан  $H$  не зависят от времени. Определим  $n$ -точечную функцию Грина  $G_n(\alpha_1, t_1, \dots, \alpha_n, t_n)$  гамильтониана  $H$  как среднее значение  $T$ -произведения гейзенберговских операторов  $T(\hat{x}_{\alpha_1}(t_1) \dots \hat{x}_{\alpha_n}(t_n))$  по основному состоянию  $\Phi$  гамильтониана  $H$  (напомним, что  $\hat{x}_\alpha(t) = \exp(iHt) \hat{x}_\alpha \times \exp(-iHt)$ ,  $\alpha = 1, \dots, k$ , а  $T$ -произведение определяется как произведение операторов  $\hat{x}_{\alpha_j}(t_j)$ , расставленных в порядке убывания времен  $t_j$ \*. Производящий функционал функций Грина

$$G(\mathbf{J}(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{1}{n!} \int dt_1 \dots dt_n \times \\ \times \sum_{\alpha_1=1}^k \dots \sum_{\alpha_n=1}^k G_n(\alpha_1, t_1, \dots, \alpha_n, t_n) J_{\alpha_1}(t_1) \dots J_{\alpha_n}(t_n) \quad (11.6)$$

будем называть функционалом Грина. [Через  $J_\alpha(t)$  здесь и дальше обозначаются финитные гладкие действительные функции, векторную функцию  $(J_1(t), \dots, J_k(t))$  обозначаем  $\mathbf{J}(t)$ ].

Рассмотрим вспомогательный гамильтониан  $H_{\mathbf{J}} = H + \sum_{\alpha=1}^k J_\alpha(t) \hat{x}_\alpha$ , зависящий от времени  $t$ , и построим по паре  $H_{\mathbf{J}}$ ,  $H$  оператор

$$S(t, t_0 | \mathbf{J}) = \exp(iHt) U(t, t_0 | \mathbf{J}) \exp(-iHt_0), \quad (11.7)$$

где  $U(t, t_0 | \mathbf{J})$  — оператор эволюции, определяемый гамильтонианом  $H_{\mathbf{J}}$ .

Представим  $S(t, t_0 | \mathbf{J})$  в виде ряда (см. дополнение А):

$$S(t, t_0 | \mathbf{J}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t d\tau_1 \dots d\tau_n \times \\ \times \sum_{\alpha_1=1}^k \dots \sum_{\alpha_n=1}^k T(\hat{x}_{\alpha_1}(\tau_1) \dots \hat{x}_{\alpha_n}(\tau_n)) J_{\alpha_1}(\tau_1) \dots J_{\alpha_n}(\tau_n).$$

\* Функции Грина легко выразить через функции Уайтмана  $w_n(\alpha_1, t_1, \dots, \alpha_n, t_n) = \langle \hat{x}_{\alpha_1}(t_1) \dots \hat{x}_{\alpha_n}(t_n) \Phi, \Phi \rangle$ .

Отсюда получаем следующее утверждение: если носитель функции  $\mathbf{J}(t) = (J_1(t), \dots, J_k(t))$  лежит в интервале  $[t_0, t_1]$ ,

$$G(\mathbf{J}) = \langle S(t_1, t_0 | \mathbf{J}) \Phi, \Phi \rangle = \\ = \langle U(t_1, t_0 | \mathbf{J}) \Phi, \Phi \rangle \exp [iE(t_1 - t_0)] \quad (11.8)$$

( $E$  — энергия основного состояния).

Формулу (11.8) можно рассматривать как определение функционала Грина  $G(\mathbf{J})$ ; это избавляет от рассмотрения тонких вопросов, связанных со сходимостью ряда (11.6). При таком определении формула

$$G_n(\alpha_1, t_1, \dots, \alpha_n, t_n) = i^n \frac{\delta^n}{\delta J_{\alpha_1}(t_1) \dots \delta J_{\alpha_n}(t_n)} G(\mathbf{J}) \Big|_{\mathbf{J}=0}$$

получается без предположений о сходимости ряда (11.6).

Вычислим, например, функционал Грина  $G_0(\mathbf{J})$  гамильтониана

$$H_0 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \omega_j^2 \hat{x}_j^2.$$

Для этого найдем функцию  $\Phi(t) = U(t, t_0 | \mathbf{J}) \Phi \in L^2(E^k)$  из уравнения

$$i \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_\alpha^2} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha^2 x_\alpha^2 \Phi(\mathbf{x}, t) + \\ + \sum_{\alpha=1}^k J_\alpha(t) x_\alpha \Phi_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (11.9)$$

с начальным условием

$$\Phi(\mathbf{x}, t_0) = \Phi(\mathbf{x}) = \prod_{\alpha=1}^k \left( \frac{\omega_\alpha}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \omega_\alpha x_\alpha^2 \right).$$

Легко проверить, что решение (11.9) может быть записано как

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \prod_{\alpha=1}^k \left( \frac{\omega_\alpha}{\pi} \right)^{1/4} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k [\omega_\alpha (x_\alpha - \mu_\alpha(t))^2 + 2c_\alpha(t)] \right\},$$

где  $\mu_\alpha(t)$  и  $c_\alpha(t)$  определяются из уравнений:

$$i \frac{d\mu_\alpha(t)}{dt} = \omega_\alpha \mu_\alpha(t) + \frac{J_\alpha(t)}{\omega_\alpha};$$

$$-i \frac{dc_\alpha(t)}{dt} = \frac{1}{2} \omega_\alpha^2 \mu_\alpha^2(t) + J_\alpha(t) \mu_\alpha(t) + \frac{1}{2} \omega_\alpha$$

с начальными условиями  $\mu_\alpha(t_0) = c_\alpha(t_0) = 0$ .

Отсюда с помощью (11.8) получаем, что функционал Грина  $G_0(\mathbf{J})$  гамильтониана  $H_0$  имеет вид

$$G_0(\mathbf{J}) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \int A_\alpha(t, \tau) J_\alpha(t) J_\alpha(\tau) dt d\tau \right],$$

где

$$A_s(t, \tau) = \frac{i}{2} \left[ \frac{\theta(t-\tau)}{\omega_s} \exp[-i\omega_s(t-\tau)] + \frac{\theta(\tau-t)}{\omega_s} \exp[-i\omega_s(\tau-t)] \right].$$

Более общий гамильтониан

$$H_0 = - \sum_{\alpha=1}^k \frac{1}{2m_\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2} + \sum_{\alpha, \beta=1}^k \frac{k_{\alpha\beta} \hat{x}_\alpha \hat{x}_\beta}{2} \quad (11.10)$$

линейной заменой переменных сводится к уже рассмотренному, поэтому можно утверждать, что для него

$$G_0(\mathbf{J}) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^k \int A_{\alpha, \beta}(t, \tau) J_\alpha(t) J_\beta(\tau) dt d\tau \right].$$

Вспоминая, что  $G_0(\mathbf{J})$  — производящий функционал функций Грина, убеждаемся в совпадении  $A_{\alpha, \beta}(t, \tau)$  с двухточечной функцией Грина  $G_2^{(0)}(\alpha, t, \beta, \tau)$  гамильтониана  $H_0$ .

Представим  $H$  как сумму  $H = H_0 + V$ , где  $H_0$  — оператор вида (11.10),  $V$  — оператор умножения на функцию  $w(x)$ . Введем еще один вспомогательный гамильтониан

$$H_\alpha = H_0 + \exp(-\alpha|t|) V$$

и определяемый им оператор эволюции  $U_\alpha(t, t_0)$ . Очевидно, при малых  $\alpha$  гамильтониан  $H_\alpha$  медленно (адиабатически) изменяется со временем, причем  $H_\alpha(t) \approx H$  при  $|t| \ll 1/\alpha$  и  $H_\alpha(t) \approx H_0$  при  $|t| \gg 1/\alpha$  (множитель  $\exp(-\alpha|t|)$ )

описывает адиабатическое включение и выключение взаимодействия  $V$ ). Как известно,  $U_\alpha(t, t_0)$  переводит основное состояние гамильтониана  $H_\alpha(t_0)$  в основное состояние гамильтониана  $H_\alpha(t)$ ; это означает, в частности, что существуют такие функции  $d_+(\alpha, t, T)$  и  $d_-(\alpha, t, T)$ , равные по модулю единице, для которых

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow -\infty} d_-(\alpha, t, T) U_\alpha(t, T) \Phi_0; \\ \Phi &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} d_+(\alpha, t, T) U_\alpha(t, T) \Phi_0, \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

где  $\Phi_0$  — основное состояние гамильтониана  $H_0$ . Доказательство соотношений (11.11) может быть получено с помощью адиабатической теории возмущений [13].

Выразим теперь функционал Грина через оператор эволюции  $U_\alpha(t, t_0 | \mathbf{J})$ , определяемый гамильтонианом

$$H_{\alpha, \mathbf{J}} = H_0 + \exp(-\alpha |t|) V + \sum_{\alpha=1}^k J_\alpha(t) \hat{x}_\alpha.$$

Именно, покажем, что

$$G(\mathbf{J}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle U_\alpha(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle}{\langle U_\alpha(T, -T) \Phi_0, \Phi_0 \rangle}. \quad (11.12)$$

Для этого проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{J}) &= \langle U(t, t_0 | \mathbf{J}) \Phi, \Phi \rangle \exp[iE(t-t_0)] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \langle U_\alpha(t, t_0 | \mathbf{J}) \Phi, \Phi \rangle \exp[iE(t-t_0)] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \exp[iE(t-t_0)] \times \\ &\quad \times \langle U_\alpha(t, t_0 | \mathbf{J}) d_-(\alpha, t_0, -T) \times \\ &\quad \times U_\alpha(t_0, -T) \Phi_0, d_+(\alpha, t, T) U_\alpha(t, T) \Phi_0 \rangle = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle U_\alpha(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle}{\exp[-iE(t-t_0)] \bar{d}_-(\alpha, t_0, -T) d_+(\alpha, t, T)}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Промежуток  $[t_0, t]$  выбран так, чтобы вне его функция  $\mathbf{J}$  обращалась в нуль; тогда при  $-T \leq t_0$ ,  $t \leq T$  имеем  $U_\alpha(t_0, -T | \mathbf{J}) = U_\alpha(t_0, -T)$ ,  $U_\alpha(t, T, \mathbf{J}) = U_\alpha(t, T)$ . Мы воспользовались при преобразовании групповым свойством:

$$U_\alpha(T, -T | \mathbf{J}) = U_\alpha(T, t | \mathbf{J}) U_\alpha(t, t_0 | \mathbf{J}) U_\alpha(t_0, -T | \mathbf{J}).$$

При  $\mathbf{J} = 0$  функционал Грина  $G(\mathbf{J})$  равен единице; отсюда ясно, что знаменатель в (11.13) можно заменить на  $\langle U_\alpha(T, -T) \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ . Это и доказывает (11.12).

Определим адиабатический функционал Грина  $G^\alpha(\mathbf{J})$  формулой

$$G^\alpha(\mathbf{J}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\langle U_\alpha(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle}{\langle U_\alpha(T, -T) \Phi_0, \Phi_0 \rangle}. \quad (11.14)$$

Его коэффициентные функции  $G_n^\alpha(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)$  назовем адиабатическими функциями Грина:

$$G_n^\alpha(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n) = i^n \frac{\delta^n}{\delta J_{\lambda_1}(t_1) \dots \delta J_{\lambda_n}(t_n)} G_\alpha(\mathbf{J}) |_{\mathbf{J}=0}.$$

Из (11.12) следует, что

$$G(\mathbf{J}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} G^\alpha(\mathbf{J});$$

$$G_n(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n^\alpha(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n), \quad (11.15)$$

поэтому вычисление функций Грина удобно основывать на предварительном вычислении адиабатических функций Грина.

Используя (11.5), представим числитель (11.14) в форме континуального интеграла:

$$\begin{aligned} & \langle U_\alpha(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \\ & = \int \Phi_0(x(-T)) \overline{\Phi_0(x(T))} \times \\ & \times \exp \left[ i \int_{-T}^T L_\alpha(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau | \mathbf{J}) d\tau \right] \prod_{-T \leq \tau \leq T} dx(\tau), \quad (11.16) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_\alpha(x, \dot{x}, \tau | \mathbf{J}) &= \sum_{\lambda=1}^k \frac{m_\lambda \dot{x}_\lambda^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \nu=1}^k k_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu - \\ & - \exp(-\alpha |\tau|) \omega(x) - \sum_{\lambda=1}^k J_\lambda(\tau) x_\lambda. \end{aligned}$$

Знаменатель в (11.14) получается из числителя, если положить  $\mathbf{J} = 0$ , и, стало быть, тоже представляется континуальным интегралом.

Таким образом, мы имеем выражение адиабатического функционала Грина  $G^\alpha(\mathbf{J})$  через континуальные интегралы:

$$G^\alpha(\mathbf{J}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\int \Phi_0(\mathbf{x}(-T)) \overline{\Phi_0(\mathbf{x}(T))} \times \rightarrow}{\int \Phi_0(\mathbf{x}(-T)) \overline{\Phi_0(\mathbf{x}(T))} \times} \times \exp \left[ i \int_{-T}^T L_\alpha(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau | \mathbf{J}) d\tau \right] \prod_{-T < \tau < T} dx(\tau) \cdot (11.17)$$

$$\times \exp \left[ i \int_{-T}^T L_\alpha(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau | 0) d\tau \right] \prod_{-T < \tau < T} dx(\tau)$$

Для  $G_n^\alpha(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n)$  из формулы (11.17) получаем:

$$G_n^\alpha(\lambda_1, t_1, \dots, \lambda_n, t_n) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\int \Phi_0(\mathbf{x}(-T)) \overline{\Phi_0(\mathbf{x}(T))} \times \rightarrow}{\int \Phi_0(\mathbf{x}(-T)) \overline{\Phi_0(\mathbf{x}(T))} \times} \times \exp \left[ i \int_{-T}^T L_\alpha(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau | 0) d\tau \right] x_{\lambda_1}(t_1) \dots x_{\lambda_n}(t_n) \prod_{-T < \tau < T} dx(\tau) \cdot (11.18)$$

$$\times \exp \left[ i \int_{-T}^T L_\alpha(\mathbf{x}(\tau), \dot{\mathbf{x}}(\tau), \tau | 0) d\tau \right] \prod_{-T < \tau < T} dx(\tau)$$

Похожие континуальные интегралы можно написать для матричных элементов адиабатической  $S$ -матрицы  $S_\alpha$  (напомним, что  $S_\alpha = S_\alpha(\infty, -\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty} S_\alpha(t, t_0)$ , где  $S_\alpha(t, t_0) = \exp(iH_0 t) U_\alpha(t, t_0) \exp(-iH_0 t_0)$ ,  $U_\alpha(t, t_0)$  — оператор эволюции, определяемый гамильтонианом  $H_\alpha = H_0 + \exp(-\alpha|t|) V$ ). Ограничимся замечанием, что среднее значение  $\langle S_\alpha \Phi_0, \Phi_0 \rangle$  оператора  $S_\alpha$  по основному состоянию  $\Phi_0$  гамильтониана  $H_0$  равно

$$\langle S_\alpha \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle \exp(iH_0 T) U_\alpha(T, -T) \exp[-iH_0(-T)] \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \exp(i2E_0 T) \langle U_\alpha(T, -T) \Phi_0, \Phi_0 \rangle,$$

и, значит,  $\langle S_\alpha \Phi_0, \Phi_0 \rangle$  можно представить с помощью формулы (11.16) при  $J = 0$  в виде континуального интеграла.

## § 12. Теорема Хори

Укажем преобразование фейнмановских континуальных интегралов, позволяющее просто получить в рассматриваемом случае ряды теории возмущений. Начнем с известного соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^{k/2}} \int \exp \left( \frac{i}{2} \sum_{m, n=1}^k a_{mn} \xi_m \xi_n + i \sum_{m=1}^k \lambda_m \xi_m \right) d\xi_1 \dots d\xi_k = \\ = \exp \left( -\frac{i}{2} \sum_{m=1}^k b_{mn} \lambda_m \lambda_n \right) (\det a_{mn})^{-1/2}, \quad (12.1) \end{aligned}$$

где  $a_{mn}$  — действительная симметричная невырожденная матрица,  $\lambda_m$  — действительные числа,  $b_{mn}$  — матрица, обратная матрице  $a_{mn}$ . Это равенство легко получается, если линейной заменой переменных привести квадратичную форму  $\sum a_{mn} \xi_m \xi_n$  к сумме квадратов; тогда интеграл (12.1) распадется в произведение однократных интегралов вида

$$\int \exp \left( \frac{i}{2} a \eta^2 + i b \eta \right) d\eta = \left( \frac{2\pi i}{a} \right)^{1/2} \exp \left( -i \frac{b^2}{2a} \right).$$

Далее покажем, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^{k/2}} \int \exp \left( \frac{i}{2} \sum_{m, n=1}^k a_{mn} \xi_m \xi_n \right) F(\xi_1, \dots, \xi_k) d\xi_1 \dots d\xi_k = \\ = (\det a_{mn})^{-1/2} \times \\ \times \exp \left( \frac{i}{2} \sum_{m, n=1}^k b_{mn} D_m D_n \right) F(\xi_1, \dots, \xi_k) \Big|_{\xi_1 = \dots = \xi_k = 0}. \quad (12.2) \end{aligned}$$

Здесь  $D_m = \frac{\partial}{\partial \xi_m}$  — оператор дифференцирования по переменной  $\xi_m$ .

Равенство (12.2) фактически уже доказано, когда  $F(\xi_1, \dots, \xi_k) = \exp \left( i \sum_m \lambda_m \xi_m \right)$ . В силу формулы

$$\begin{aligned} f(D_1, \dots, D_k) \exp \left( i \sum_{m=1}^k \lambda_m \xi_m \right) = \\ = f(i \lambda_1, \dots, i \lambda_k) \exp \left( i \sum_{m=1}^k \lambda_m \xi_m \right) \end{aligned}$$



оно сводится к (12.1). Отсюда следует (12.2) в общем случае, если заметить, что произвольную функцию  $F(\xi_1, \dots, \xi_h)$  можно представить в виде суперпозиции функций  $\exp(i \sum \lambda_m \xi_m)$ , т. е. разложить в интеграл Фурье:

$$F(\xi_1, \dots, \xi_h) = \\ = (2\pi)^{-k/2} \int \exp\left(i \sum_{m=1}^k \lambda_m \xi_m\right) \tilde{F}(\lambda_1, \dots, \lambda_h) d\lambda_1 \dots d\lambda_h.$$

Предельным переходом от конечнократных интегралов получаем аналог формулы (12.2) для континуальных интегралов: континуальный интеграл

$$\int \exp\left[\frac{i}{2} \int A(t, \sigma) x(t) x(\sigma) dt d\sigma\right] F(x(\tau)) \Pi dx(\tau).$$

можно записать как

$$C \exp\left[\frac{i}{2} \int B(t, \sigma) \frac{\delta}{\delta x(t)} \frac{\delta}{\delta x(\sigma)} dt d\sigma\right] F(x(\tau)) \Big|_{x(\tau)=0}$$

(здесь квадратичная форма  $\int A(t, \sigma) x(t) x(\sigma) dt d\sigma$  должна быть невырожденной; функция  $A(t, \sigma)$  может быть обобщенной функцией). Отсюда видим, что континуальный интеграл

$$I = \int \Phi_0(x(-T)) \overline{\Phi_0(x(T))} \times \\ \times \exp\left[i \int_{-T}^T \left(\sum_{\lambda=1}^k \frac{m_\lambda \dot{x}_\lambda^2(\tau)}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \nu=1}^k k_{\lambda\nu} x_\lambda(\tau) x_\nu(\tau)\right) dt\right] F(x(\tau)) \prod_{-T < \tau < T} dx(\tau)$$

записывается в форме

$$I = C \exp\left[\frac{i}{2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \sum_{\lambda, \nu=1}^k B_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma) \frac{\delta}{\delta x_\lambda(\rho)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta}{\delta x_\nu(\sigma)} d\rho d\sigma\right] F(x(\tau)) \Big|_{x(\tau)=0},$$

где функция  $B_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma)$  и константа  $C$  пока неизвестны\*. Чтобы найти их, достаточно вычислить интеграл

$$\begin{aligned}
 I(\gamma) &= \int \Phi_0(\mathbf{x}(-T)) \overline{\Phi_0(\mathbf{x}(T))} \times \\
 &\times \exp \left[ i \int_{-T}^T \left( \sum_{\lambda=1}^k \frac{m_{\lambda} \dot{x}_{\lambda}^2(\tau)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \nu=1}^k k_{\lambda \nu} x_{\lambda}(\tau) x_{\nu}(\tau) \right) d\tau \right] \times \\
 &\times \exp \left( i \sum_{\lambda=1}^k \int \gamma_{\lambda}(\tau) x_{\lambda}(\tau) d\tau \right) \prod_{-T \leq \tau \leq T} dx(\tau) = \\
 &= C \exp \left[ \frac{i}{2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \sum_{\lambda, \nu=1}^k B_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma) \frac{\delta}{\delta x_{\lambda}(\rho)} \frac{\delta}{\delta x_{\nu}(\sigma)} d\rho d\sigma \right] \times \\
 &\times \exp \left[ i \sum_{\lambda=1}^k \int \gamma_{\lambda}(\tau) x_{\lambda}(\tau) d\tau \right] \Big|_{\mathbf{x}(\tau)=0} = \\
 &= C \exp \left[ \frac{-i}{2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \sum_{\lambda, \nu} B_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma) \gamma_{\lambda}(\rho) \gamma_{\nu}(\sigma) d\rho d\sigma \right].
 \end{aligned}$$

Применив это преобразование к континуальному интегралу (11.16), представим  $\langle U_{\alpha}(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle$  в виде

$$\begin{aligned}
 &\langle U_{\alpha}(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle = \\
 &= C \exp \left[ \frac{i}{2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \sum B_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma) \frac{\delta}{\delta x_{\lambda}(\rho)} \frac{\delta}{\delta x_{\nu}(\sigma)} d\rho d\sigma \right] \times \\
 &\times \exp \left\{ -i \left( \int_{-T}^T \exp(-\alpha|\tau|) \omega(\mathbf{x}(\tau)) d\tau + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\lambda} \int_{-T}^T J_{\lambda}(\tau) x_{\lambda}(\tau) d\tau \right) \right\} \Big|_{\mathbf{x}(\tau)=0}. \quad (12.3)
 \end{aligned}$$

Для вычисления  $C$  и  $B_{\lambda, \nu}(\rho, \nu)$  достаточно найти  $\langle U_{\alpha}(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle$  при  $\omega = 0$ , т. е. отыскать  $\langle \tilde{U}(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle$ , где  $\tilde{U}(t, t_0 | \mathbf{J})$  — оператор эволюции для гамильтониана  $H_0 + \sum_{\lambda=1}^k J_{\lambda}(t) \hat{x}_{\lambda}$ .

\* Для проверки этого утверждения необходимо воспользоваться тем, что функция  $\Phi_0(\mathbf{x})$  имеет вид квадратичной экспоненты.

Из сказанного ранее вытекает, что функционал Грина  $G_0(\mathbf{J})$  для  $H_0$  задается формулой

$$G_0(\mathbf{J}) = \langle \tilde{U}(T, -T | \mathbf{J}) \Phi_0, \Phi_0 \rangle \exp(2i E_0 T) = \\ = \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \nu=1}^k \int_{-T}^T \int_{-T}^T G_2^{(0)}(\lambda, \rho, \nu, \sigma) J_\lambda(\rho) J_\nu(\sigma) d\rho d\sigma \right].$$

Отсюда вытекает, что в (12.3)  $C = \exp(-2i E_0 T)$ , а  $iB_{\lambda, \nu}(\rho, \sigma) = G_2^{(0)}(\lambda, \rho, \nu, \sigma)$ . Комбинируя (12.3) и (11.4), запишем адиабатический функционал Грина  $G_\alpha(\mathbf{J})$  для гамильтониана  $H = H_0 + V$ , где  $V$  — оператор умножения на функцию  $\omega(x)$ , в виде

$$G^\alpha(\mathbf{J}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_T \mathcal{F}_T(\mathbf{x}, \mathbf{J})}{A_T \mathcal{F}_T(\mathbf{x}, \mathbf{0})} \Big|_{\mathbf{x}(\tau)=0}, \quad (12.4)$$

где  $\mathcal{F}_T(\mathbf{x}, \mathbf{J})$  — функционал

$$\mathcal{F}_T(\mathbf{x}, \mathbf{J}) = \exp \left[ -i \int_{-T}^T \exp(-\alpha|\tau|) \omega(\mathbf{x}(\tau)) d\tau - \right. \\ \left. -i \sum_{\lambda=1}^k \int_{-T}^T J_\lambda(\tau) x_\lambda(\tau) d\tau \right],$$

$A_T$  — оператор

$$A_T = \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \nu=1}^k \int_{-T}^T \int_{-T}^T G_2^{(0)}(\lambda, \rho, \nu, \sigma) \frac{\delta}{\delta x_\lambda(\rho)} \frac{\delta}{\delta x_\nu(\sigma)} d\rho d\sigma \right].$$

### § 13. Диаграммная техника

Соотношение (12.4) позволяет без труда построить фейнмановские диаграммы для разложения  $G^\alpha(\mathbf{J})$  в ряд по возмущению  $V$ . Для этого рассмотрим сначала выражение

$$I = \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha, \beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \times \\ \times \exp \left( \sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} \right) \Big|_{x_\alpha=0} \quad (13.1)$$

(здесь индексы  $\alpha, \beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  пробегает конечное множество  $N$ ). Легко показать, что  $I$  можно представить в виде суммы диаграмм. Именно, следует рассмотреть диаграммы, не имеющие внешних вершин; каждой вершине сопоставляем точку множества  $N$ , каждому ребру — множитель  $R_{\alpha\beta}$ , где  $\alpha \in N, \beta \in N$  — точки, отвечающие вершинам ребра, каждой звезде сопоставляем множитель  $\omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)}$ , где  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in N$  — точки, соответствующие вершинам звезды\*. Всей диаграмме ставится в соответствие число, получающееся из произведения множителей, сопоставленных вершинам и ребрам диаграммы, суммированием по точкам множества  $N$ , сопоставленным вершинам, и умножением на  $1/d$ , где  $d$  — порядок группы симметрии диаграммы. (В дальнейшем нам придется рассматривать также диаграммы, содержащие внешние вершины; здесь суммирование следует производить только по точкам множества  $N$ , соответствующим внутренним вершинам; число, сопоставленное диаграмме, зависит в этом случае от точек, соответствующих внешним вершинам.) Например, диаграмме рис. 17 отвечает число

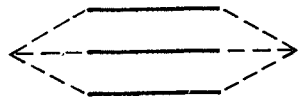


Рис. 17.

$$\frac{1}{12} \sum \omega_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}^{(3)} \omega_{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6}^{(3)} R_{\alpha_1 \alpha_4} R_{\alpha_2 \alpha_5} R_{\alpha_3 \alpha_6}.$$

Доказательство того, что  $I$  равно сумме всех описанных диаграмм, не имеющих внешних вершин, получается с помощью элементарного, хотя и довольно громоздкого подсчета.

Напишем также диаграммное представление для функции

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) \times \\ \times \left(x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_n} \exp\left(\sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n}\right)\right) \Big|_{x_\alpha=0}.$$

Именно,  $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  можно представить как сумму диаграмм с  $n$  внешними вершинами, принадлежащими ребрам. Чтобы

\* Так же, как и в § 4, мы рассматриваем диаграммы, состоящие из нескольких звезд и нескольких ребер, и считаем все вершины упорядоченными.

убедиться в этом, проще всего заметить, что

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{\partial^n}{\partial J_{\lambda_1} \dots \partial J_{\lambda_n}} B(\mathbf{J}) \Big|_{\mathbf{J}=\mathbf{0}},$$

где

$$B(\mathbf{J}) = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} R_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right) \times \\ \times \exp\left(\sum_n \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{(n)} x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n} + \sum_\alpha J_\alpha x_\alpha\right) \Big|_{x_\alpha=0}.$$

Для  $B(\mathbf{J})$  нетрудно написать диаграммное представление, поскольку добавление слагаемого  $\sum_\alpha J_\alpha x_\alpha$  в показателе выражения  $I$  можно рассматривать просто как изменение функций  $\omega_\alpha^{(1)}$ . Это диаграммное представление отличается от диаграммного представления для  $I$  появлением в диаграммах нового типа звезд — звезд с одной вершиной, которым соответствует множитель  $J_\alpha$ . Чтобы получить диаграммную технику для вычисления  $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , достаточно выделить из диаграммного представления для  $B(\mathbf{J})$  те диаграммы, которые содержат множитель  $J_{\lambda_1} \dots J_{\lambda_n}$ .

Воспользовавшись описанной диаграммной техникой для вычисления  $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  и  $I$ , получим диаграммное представление функции  $I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)/I$ . Эта функция равна сумме всех таких диаграмм с  $n$  внешними вершинами, принадлежащими ребрам, каждая из компонент которых имеет хотя бы одну внешнюю вершину, т. е. сумме всех гриновских диаграмм. Убедиться в этом можно, воспользовавшись тем, что функция, соответствующая несвязной диаграмме, разлагается в произведение функций, соответствующих ее связным компонентам.

Полученные диаграммные представления легко обобщить на выражения вида

$$I = \exp\left[\frac{1}{2} \int R(\alpha, \beta) \frac{\delta}{\delta x(\alpha)} \frac{\delta}{\delta x(\beta)} d\alpha d\beta\right] \times \\ \times \exp\left[\sum_n \frac{1}{n!} \int \omega_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x(\alpha_1) \dots x(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n\right] \Big|_{x(\alpha)=0}; \\ B(\mathbf{J}) = \exp\left[\frac{1}{2} \int R(\alpha, \beta) \frac{\delta}{\delta x(\alpha)} \frac{\delta}{\delta x(\beta)} d\alpha d\beta\right] \times \\ \times \exp\left[\sum_n \frac{1}{n!} \int \omega_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x(\alpha_1) \dots x(\alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n + \right. \\ \left. + \int J(\alpha) x(\alpha) d\alpha\right] \Big|_{x(\alpha)=0};$$

$$I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{\delta^n}{\delta J(\lambda_1) \dots \delta J(\lambda_n)} B(J) \Big|_{J(\lambda)=0};$$

$$G_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{I_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{I},$$

где  $\alpha, \beta, \lambda$  пробегает произвольное пространство с мерой  $N$ . Единственное отличие от уже рассмотренного случая состоит в том, что вместо суммирования по конечному множеству в определении функции, соответствующей диаграмме, входит интегрирование по точкам множества  $N$ , сопоставленным внутренним вершинам.

Воспользовавшись этими соображениями и формулой (12.4), можно сразу написать диаграммное представление для адиабатических функций Грина  $G_n^\alpha(\beta_1, t_1, \dots, \beta_n, t_n)$ , построенных по гамильтониану  $H = H_0 + V$ , где  $H_0$  — оператор (11.10),  $V$  — оператор умножения на функцию  $\omega(x) = \sum_n \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \omega_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n)} x_{\lambda_1} \dots x_{\lambda_n}$ . Именно, условимся каждой вершине диаграммы сопоставлять пару  $(\lambda, t)$ , где  $\lambda = 1, \dots, k, -\infty < t < \infty$ , ребру сопоставлять функцию  $G_2^{(\alpha)}(\lambda, t, \lambda', t')$ , где  $(\lambda, t), (\lambda', t')$  соответствуют вершинам ребра, а звезде — функцию

$$\frac{n!}{i} \omega_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n)} \delta(t_1 - t_2) \dots \delta(t_{n-1} - t_n) \exp(-\alpha |t_1|),$$

где  $(\lambda_1, t_1), \dots, (\lambda_n, t_n)$  соответствуют вершинам звезды. Функцию, соответствующую диаграмме, строим из произведения функций, сопоставленных ребрам и вершинам, обычным способом, т. е. с помощью интегрирования по  $t$  и суммирования по  $\lambda$ , отвечающим внутренним вершинам. Тогда  $G_n^\alpha(\beta_1, t_1, \dots, \beta_n, t_n)$  можно представить как сумму всех гриновских диаграмм.

Напомним теперь, что функцию Грина  $G_n(\beta_1, t_1, \dots, \beta_n, t_n)$  можно записать как предел адиабатических функций Грина:

$$G_n(\beta_1, t_1, \dots, \beta_n, t_n) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n^\alpha(\beta_1, t_1, \dots, \beta_n, t_n).$$

Это позволяет получить диаграммное представление  $G_n$ , переходя к пределу  $\alpha \rightarrow 0$  в диаграммах для  $G_n^\alpha$ . Мы видим,

что функцию  $G_n$  также можно представить как сумму всех гриновских диаграмм, если только в определении функции, соответствующей диаграмме, положить  $\alpha = 0$ , т. е. не включать в функцию, сопоставленную вершине, адиабатический множитель  $\exp(-\alpha |t_1|)$ .

#### § 14. Предельный переход к бесконечному числу степеней свободы

Основным предметом рассмотрения в предшествующих главах были гамильтонианы (2.1). Покажем, каким образом их можно изучить с помощью предельного перехода от потенциальных взаимодействий. Ограничимся при этом наиболее интересным случаем трансляционно-инвариантных гамильтонианов, т. е. будем считать, что функции  $V_n$  можно представить в виде  $V_n(x_1, \dots, x_n) = v_n(x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n)$ ; функцию  $v_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  предполагаем убывающей быстрее любой степени  $|\xi_1| + \dots + |\xi_{n-1}|$ . Заметим, однако, что в случае гамильтонианов, не являющихся трансляционно-инвариантными, требуются несущественные изменения указанных ниже определений.

Чтобы получить из гамильтониана  $H$  потенциальное взаимодействие  $H_{L, \Lambda}$ , заменим в выражении (2.1) интегрирование по трехмерному пространству  $E^3$  суммированием по множеству  $T_{L, \Lambda}$  точек  $x \in E^3$ , имеющих вид  $x = \frac{2\pi}{\Lambda} \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n}$  — неотрицательный целочисленный вектор, компоненты которого не превышают  $\Lambda \cdot \frac{L}{2\pi}$  (иными словами, множество  $T_{L, \Lambda}$  состоит из тех точек решетки  $\frac{2\pi}{\Lambda} \mathbf{n}$ , которые лежат в кубе  $0 \leq x_1 \leq L$ ,  $0 \leq x_2 \leq L$ ,  $0 \leq x_3 \leq L$ ). Числа  $L/2\pi$  и  $\Lambda$  будем считать натуральными; при этом условии множество  $T_{L, \Lambda}$  можно рассматривать как группу относительно покомпонентного сложения по модулю  $L$ .

Если говорить точнее, гамильтониан  $H_{L, \Lambda}$  определяется формулой

$$H_{L, \Lambda} = \frac{1}{2} \sum \pi_{\xi}^2 + \sum_n \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n} \left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right)^{3n/2} V_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \varphi_{\xi_1} \dots \varphi_{\xi_n}, \quad (14.1)$$

где  $\pi_{\xi}$ ,  $\varphi_{\xi}$  — символы, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} \pi_{\xi}^{\dagger} &= \pi_{\xi}; & \varphi_{\xi}^{\dagger} &= \varphi_{\xi}; & [\pi_{\xi}, \pi_{\xi'}] &= \\ &= [\varphi_{\xi}, \varphi_{\xi'}] = 0; & [\pi_{\xi}, \varphi_{\xi'}] &= \frac{1}{i} \delta_{\xi\xi'}'. \end{aligned} \quad (14.2)$$

(Здесь  $\xi, \xi' \in T_{L, \Lambda}$ ; суммирование в формуле (14.1) ведется по индексам, пробегающим  $T_{L, \Lambda}$ .) Переход к суммированию по решетке означает обрезание больших импульсов, а выделение точек решетки, лежащих в кубе, — обрезание в координатном пространстве.

Если  $V_n$  являются обобщенными функциями, то определение гамильтониана  $H_{L, \Lambda}$  должно быть модифицировано. В этом случае  $H_{L, \Lambda}$ , удобно определять в импульсном представлении формулой

$$\begin{aligned} H_{L, \Lambda} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\pi}_{\mathbf{k}} \tilde{\pi}_{-\mathbf{k}} + \sum_n \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n} \left( \frac{2\pi}{L} \right)^{3(n-2)/2} \tilde{v}_n(\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_{n-1}) \times \\ &\quad \times \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_1} \dots \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}_n}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Здесь суммы берутся по множеству  $\tilde{T}_{L, \Lambda}$ , состоящему из векторов вида  $\frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ , компоненты которых принадлежат отрезку  $[0, \Lambda]$ , вектор  $\mathbf{n}$  имеет целочисленные координаты; символы  $\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}$ ,  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= \tilde{\pi}_{-\mathbf{k}}; & \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}^{\dagger} &= \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}; & [\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}, \tilde{\pi}_{\mathbf{k}'}] &= 0, \\ [\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}}, \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}'}] &= 0; & [\tilde{\pi}_{\mathbf{k}}, \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}'}] &= \frac{1}{i} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}'}. \end{aligned}$$

Переход к координатному представлению осуществляем, пользуясь равенствами:

$$\pi_{\xi} = \left( \frac{2\pi}{L\Lambda} \right)^{3/2} \sum_{\mathbf{k} \in \tilde{T}_{L, \Lambda}} \tilde{\pi}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\xi); \quad \varphi_{\xi} = \left( \frac{2\pi}{L\Lambda} \right) \sum_{\mathbf{k} \in \tilde{T}_{L, \Lambda}} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\xi).$$

Два сформулированных определения гамильтониана  $H_{L, \Lambda}$  не эквивалентны, но в пределе  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  приводят к одним и тем же результатам.

Будем рассматривать гамильтониан  $H_{L, \Lambda}$  как оператор в пространстве  $R_{L, \Lambda} = L^2(E^i(L, \Lambda))$  суммируемых с квадратом функций от  $t(L, \Lambda)$  переменных [здесь  $t(L, \Lambda)$  — число точек в множестве  $T_{L, \Lambda}$ ]. Именно, пространство  $R_{L, \Lambda}$  предста-



вим как пространство суммируемых с квадратом функций от переменных  $x_{\xi}$ , где  $\xi \in T_{L, \Lambda}$ . Символу  $\varphi_{\xi}$  сопоставим оператор умножения на  $x_{\xi}$ , а символу  $\pi_{\xi}$  — оператор  $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_{\xi}}$ . [Как отмечалось в § 1, это по существу единственная возможность построить операторы, удовлетворяющие соотношениям (14.2).]

Величины, связанные с формальным гамильтонианом  $H$ , можно определить с помощью предельного перехода от величин, построенных по  $H_{L, \Lambda}$ . В частности, функции Грина  $G_n$  гамильтониана  $H$  определим предельным переходом от функций Грина  $G_n^{L, \Lambda}$  операторов  $H_{L, \Lambda}$ :

$$G_n(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n) = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{\Lambda}{2\pi} \right)^{3n/2} G_n^{L, \Lambda}(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n). \quad (14.4)$$

Напомним, что, в силу данного в § 11 определения, функция  $G_n^{L, \Lambda}(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n)$  задана при  $\xi_i \in T_{L, \Lambda}$ . Предельный переход в (14.4) понимается в смысле обобщенных функций, т. е. считаем, что для каждой основной функции  $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} & \int \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) G_n(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ & = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{\Lambda} \right)^{3n/2} \sum_{\xi_1, \dots, \xi_n} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) G_n^{L, \Lambda}(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n). \end{aligned}$$

Адиабатические функции Грина  $G_n^{\alpha}$  гамильтониана  $H$  определяются с помощью аналогичного предельного перехода от адиабатических функций Грина гамильтонианов  $H_{L, \Lambda}$ .

Для функций  $G_n^{L, \Lambda}$  в § 13 была построена диаграммная техника теории возмущений. Предельным переходом  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  из диаграммного представления функций  $G_n^{L, \Lambda}$  легко получается диаграммное представление функций  $G_n$  (считаем, что предельный переход  $L \rightarrow \infty$ ,  $\Lambda \rightarrow \infty$  можно совершать в каждом члене ряда теории возмущений).

Это диаграммное представление функций  $G_n$  с очевидностью совпадает с представлением функций Грина, построенным в § 4. Таким образом, по крайней мере в рамках теории возмущений, определенные в настоящем параграфе функции  $G_n$  совпадают с обозначавшимися точно так же функциями, определенными в § 3. Аналогично получается диаграммное представление адиабатических функций Грина  $G_n^{\alpha}(\xi_1, t_1, \dots,$

$\xi_n, t_n$ ); оно отличается от диаграммного представления обычных функций Грина множителями  $\exp(-\alpha|t|)$ , соответствующими каждой звезде в интегралах, определяющих диаграммы. Из этого диаграммного представления легко заключить, что

$$G_n(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} G_n^\alpha(\xi_1, t_1, \dots, \xi_n, t_n)$$

(по крайней мере в рамках теории возмущений).

Предельный переход  $L \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow \infty$  позволяет получить также представление адиабатических функций Грина  $G_n^\alpha$  с помощью континуальных интегралов. Производящий функционал  $G^\alpha(J)$  функций  $G_n^\alpha$  может быть записан в виде

$$G^\alpha(J) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \frac{I^\alpha(T, \Omega | J)}{I^\alpha(T, \Omega | 0)}, \quad (14.5)$$

где

$$\begin{aligned} I^\alpha(T, \Omega | J) = & \int \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2(x, -T) dx - \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2(x, T) dx + iS_{T, \Omega}^{\alpha, J}(\varphi) \right] \prod_{\substack{x \in \Omega \\ -T \leq t \leq T}} d\varphi(x, t); \\ S_{T, \Omega}^{\alpha, J}(\varphi) = & \frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{\Omega} dx \dot{\varphi}^2(x, t) - \\ & -\frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{\Omega} dx \int_{\Omega} dy v(x-y) \varphi(x, t) \varphi(y, t) - \\ & - \int_{-T}^T \exp(-\alpha|t|) dt \sum_n \int_{\Omega} dx_1 \dots \int_{\Omega} dx_n V_n(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, t) \dots \\ & \dots \varphi(x_n, t) - \int_{-T}^T dt \int_{\Omega} dx J(x, t) \varphi(x, t). \end{aligned} \quad (14.6)$$

Интеграл (14.6) берется по пространству функций  $\varphi(x, t)$ , где  $x \in \Omega, -T \leq t \leq T$  (здесь  $\Omega$  — куб, выделяемый неравенствами  $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq L$ ). Строго говоря, нужно еще определить, как понимать интеграл вида (14.6). Проще всего считать его пределом континуальных интегралов, фигурирующих в формуле (12.4), примененной к адиабатическим функциям Грина гамильтонианов  $H_{L, \Lambda}$ . Тогда соотношение (14.5) становится совершенно очевидным.

Используя рассуждения § 12, функционал  $I^\alpha(T, \Omega | J)$  можно записать по-другому:

$$I^\alpha(T, \Omega | J) = \exp \left[ \frac{1}{2} \int_{-T}^T dt_1 \int_{-T}^T dt_2 \int_{\Omega} dx_1 \int_{\Omega} dx_2 G_2^{(0)}(x_1, t_1, x_2, t_2) \times \right. \\ \left. \times \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1, t_1)} \frac{\delta}{\delta \varphi(x_2, t_2)} \right] \exp [iS_{T, \Omega}^{\alpha, J}(\varphi)] |_{\varphi=0}.$$

(О представлении функций Грина с помощью континуальных интегралов см. в работах [1, 6, 14].)

### § 15. Построение операторной реализации трансляционно-инвариантного гамильтониана

Укажем конструкцию операторной реализации трансляционно-инвариантного гамильтониана  $H$  с помощью предельного перехода  $L \rightarrow \infty, \Lambda \rightarrow \infty$ . Определим прежде всего функции Уайтмана  $\omega_n$  трансляционно-инвариантного гамильтониана  $H$  предельным переходом от функций Уайтмана  $w_n^{L, \Lambda}$ , построенных по потенциальному взаимодействию  $H_{L, \Lambda}$ :

$$\omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{\Lambda}{2\pi} \right)^{3n/2} w_n^{L, \Lambda}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n). \quad (15.1)$$

Функции  $w_n^{L, \Lambda}(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$  определены для  $x_i \in T_{L, \Lambda}$ ,  $-\infty < t_i < \infty$ ; предельный переход в (15.1) понимается в смысле обобщенных функций. Существование предела (15.1) можно доказать в рамках теории возмущений.

Легко проверить, что функции  $\omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$  имеют следующие свойства:

1) трансляционная инвариантность

$$\omega_n(x_1 + a, t_1, \dots, x_n + a, t_n) = \omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n);$$

2) инвариантность при сдвиге по времени:

$$\omega_n(x_1, t_1 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau) = \omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n);$$

3) эрмитовость

$$\omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \overline{\omega_n(x_n, t_n, \dots, x_1, t_1)};$$

4) положительная определенность для любой последовательности основных функций  $f_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ , отличных

от нуля лишь для конечного числа индексов  $n$ , справедливо неравенство

$$\sum_{k, l \geq 0} \int \omega_{k+l}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_k, t_k, \mathbf{y}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{y}_l, \tau_l) \times \\ \times \bar{f}(\mathbf{x}_k, t_k, \dots, \mathbf{x}_1, t_1) f(\mathbf{y}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{y}_l, \tau_l) d^k \mathbf{x} d^k t d^l \mathbf{y} d^l \tau \geq 0;$$

5) спектральность:

$$\int \exp(i\omega a) \omega_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_i, t_i, \mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1} + \\ + a, \dots, \mathbf{x}_n, t_n + a) da = 0,$$

если  $\omega < 0$ ;

6) перестановка аргументов: пусть  $\omega_n^{(i)}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n)$  — функция, получающаяся из функции  $\omega_n$  перестановкой аргументов  $(\mathbf{x}_i, t_i)$  и  $(\mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1})$ . Тогда имеют место соотношения:

$$\omega_n^{(i)}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \omega_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \Big|_{t_i=t_{i+1}}; \\ \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_{i+1}} \omega_n^{(i)}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_{i+1}} \omega_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \Big|_{t_i=t_{i+1}}; \\ \frac{\partial}{\partial t_i} \omega_n^{(i)}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \Big|_{t_i=t_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial t_i} \omega_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \Big|_{t_i=t_{i+1}} = \\ = i\omega_{n-2}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}, t_{i+2}, t_{i+2}, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1});$$

7) инвариантность относительно обращения времени:

$$\omega_n(\mathbf{x}_1, -t_1, \dots, \mathbf{x}_n, -t_n) = \bar{\omega}_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n);$$

8) уравнения движения: если  $v_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  — основные функции, то функции  $\omega_n$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t_i^2} \omega_n(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) = - \sum_k k \int V_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{k-1}) \times \\ \times \omega_{n+k-2}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}, \mathbf{y}_1, t_i, \dots, \mathbf{y}_{k-1}, t_i, \mathbf{x}_{i-1}, t_{i+1}, \dots \\ \dots, \mathbf{x}_n, t_n) d^{k-1} \mathbf{y}.$$

Эти свойства получаются предельным переходом из соответствующих свойств функций  $\omega_n^{L, \Lambda}$ . Не будем проводить их подробное доказательство. Отметим лишь, что свойство 7 вытекает из того, что гамильтониан  $H_{L, \Lambda}$  коммутирует с антиунитарным оператором комплексного сопряжения в пространстве

$L^2(E^t(L, \Lambda))$ , а свойство 1 — из того, что  $H_{L, \Lambda}$  коммутирует с оператором сдвига  $U_a^{L, \Lambda}$ , где  $a \in T_{L, \Lambda}$  (вектору  $a \in T_{L, \Lambda}$  ставится в соответствие перестановка элементов множества  $T_{L, \Lambda}$ , при которой элемент  $x \in T_{L, \Lambda}$  переходит в  $x + a \in T_{L, \Lambda}$ ; эта перестановка индуцирует унитарное преобразование пространства  $L^2(E^t(L, \Lambda))$ , обозначаемое  $U_a^{L, \Lambda}$ ).

Теперь следует воспользоваться рассуждениями, которые применяются в аксиоматической квантовой теории поля для доказательства теоремы реконструкции, т. е. теоремы о возможности по функциям Уайтмана при некоторых условиях построить полевые операторы, удовлетворяющие аксиомам Уайтмана (см., например, [11, с. 93]). С помощью этих рассуждений и перечисленных свойств функций Уайтмана можно построить по трансляционно-инвариантному гамильтониану  $H$  гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , вектор  $\Phi \in \mathcal{H}$ , четыре самосопряженных оператора  $\hat{H}, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$ , антиунитарный оператор  $\hat{\tau}$  и операторные функции  $\varphi(x, t)$ , обобщенные по переменной  $x$ , таким образом, что:

1) выполняются требования 1—3 определения операторной реализации гамильтониана (2.1), а также условия (6.5) — (6.7), дополнительно наложенные на операторную реализацию трансляционно-инвариантного гамильтониана;

2) функции Уайтмана  $\omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$  гамильтониана  $H$  равны средним значениям произведения  $\varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n)$  по физическому вакууму  $\Phi^*$

$$\omega_n(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) = \langle \varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n) \Phi, \Phi \rangle.$$

Условия 1, 2 определяют  $\mathcal{H}, \hat{H}, \hat{P}, \hat{\tau}, \Phi, \varphi(x, t)$  однозначно (с точностью до унитарной эквивалентности).

Сформулированное утверждение подсказывает новое определение операторной реализации. Именно, можно определить операторную реализацию трансляционно-инвариантного гамильтониана как набор объектов  $\mathcal{H}, \hat{H}, \hat{P}, \Phi, \hat{\tau}, \varphi(x, t)$ , удовлетворяющий условиям 1, 2. Нетрудно проверить, что когда  $v_k(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})$  принадлежит пространству  $\mathcal{S}$ , операторная реализация в описанном смысле является операторной реализацией в смысле определения, указанного в § 2 (видимо, это справедливо и при более слабых условиях на функции  $v_k$ ).

Все наши построения можно основывать на любом из двух указанных определений операторной реализации.

\* Аналогичное равенство справедливо и для функций Грина.

## МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

### § 16. Построение матрицы рассеяния с помощью in- и out-операторов

Рассмотрим операторную реализацию  $(\mathcal{H}, \hat{H}, \Phi, \varphi(x, t))$  трансляционно-инвариантного гамильтониана  $H$ . Мы хотим определить in- и out-операторы  $\varphi_{in}(x, t)$  и  $\varphi_{out}(x, t)$  как операторные функции, обобщенные по переменной  $x$ , которые, с одной стороны, в некотором смысле аппроксимируют при  $t \rightarrow \mp \infty$  операторные обобщенные функции  $\varphi(x, t)$ , а с другой — являются свободными полями, т. е. удовлетворяют «свободным» уравнениям движения:

$$\frac{\partial^2 \varphi_{out}(x, t)}{\partial t^2} + \int \omega(x-y) \varphi_{out}(y, t) = 0$$

и коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [\varphi_{out}(x, t), \varphi_{out}(y, t)] &= 0; \quad [\pi_{out}(x, t), \pi_{out}(y, t)] = 0; \\ [\pi_{out}(x, t), \varphi_{out}(y, t)] &= \frac{1}{i} \delta(x-y), \end{aligned}$$

где  $\pi_{out}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{out}(x, t)$ .

Говоря одновременно об in- и out-операторах, будем употреблять обозначение  $\varphi_{ex}(x, t)$ . Удобно воспользоваться  $(\mathbf{k}, t)$ -представлением, т. е. вместо  $\varphi(x, t)$  применять операторы  $\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)$ , а вместо  $\varphi_{ex}(x, t)$ ,  $\pi_{ex}(x, t)$  — операторы

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{ex}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-i\mathbf{kx}) \varphi_{ex}(x, t) dx; \\ \tilde{\pi}_{ex}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(-i\mathbf{kx}) \pi_{ex}(x, t) dx, \end{aligned}$$

подчиняющиеся уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) + \tilde{\omega}(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (16.1)$$

Из (16.1) вытекает, что

$$\tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) = \cos(\omega(\mathbf{k})(t-\tau)) \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{k})} \tilde{\pi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau),$$

где  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\omega}(\mathbf{k})}$ . Иными словами,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) &= i \left( \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau)}{\partial t} \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) \right); \\ \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t) &= i \int \left[ D(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{y}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial D(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau)}{\partial t} \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{y}, \tau) \right] d\mathbf{y}, \end{aligned} \right\} (16.2)$$

где  $\check{D}(\mathbf{k}, t)$ ,  $D(\mathbf{x}, t)$  — функции, встречавшиеся в § 5. Отметим, что из (5.6) и (5.16) вытекают соотношения:

$$[\varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t), \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{y}, \tau)] = D(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau);$$

$$[\tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t), \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{p}, \tau)] = \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}).$$

Равенство (16.2) подсказывает следующее определение in-операторов. Операторные функции  $\tilde{\varphi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t)$ ,  $\tilde{\pi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t)$ , обобщенные по переменной  $\mathbf{k}$  и удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\text{in}}^+(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\varphi}_{\text{in}}(-\mathbf{k}, t); \\ [\tilde{\varphi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t), \tilde{\varphi}_{\text{in}}(\mathbf{p}, t)] &= [\tilde{\pi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t), \tilde{\pi}_{\text{in}}(\mathbf{p}, t)] = 0, \\ [\tilde{\pi}_{\text{in}}(\mathbf{k}, t), \tilde{\varphi}_{\text{in}}(\mathbf{p}, t)] &= \frac{1}{i} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}), \end{aligned} \right\} (16.3)$$

будем называть *in-операторами*, если найдутся такие неотрицательные действительные функции  $\omega(\mathbf{k})$  и  $\Lambda(\mathbf{k})$ , что

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t) &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left[ \cos(\omega(\mathbf{k})(t-\tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} \right]; \\ \tilde{\pi}_{in}(\mathbf{k}, t) &= \frac{\partial \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \times \\ &\times \left[ -\omega(\mathbf{k}) \sin(\omega(\mathbf{k})(t-\tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega(\mathbf{k})(t-\tau)) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau)}{\partial \tau} \right] \end{aligned} \right\} (16.4)$$

(функция  $\omega(\mathbf{k})$  подбирается из условия существования предела\*,  $\Lambda(\mathbf{k})$  — из условия, чтобы операторы  $\tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t)$  удовлетворяли соотношениям (16.3); предельный переход здесь и дальше понимается в смысле слабого предела операторных обобщенных функций). Иначе: операторные обобщенные функции  $\tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t)$ ,  $\tilde{\pi}_{in}(\mathbf{k}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t)$ , удовлетворяющие соотношениям (16.3), называются *in-операторами*, если

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}, t) &= i \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left( \frac{\partial \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau)}{\partial t} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) \right); \\ \tilde{\pi}_{in}(\mathbf{k}, t) &= i \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left( \frac{\partial^2 \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau)}{\partial t^2} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \check{D}(\mathbf{k}, t-\tau)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau) \right). \end{aligned}$$

В  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении определение *in-операторов* принимает следующую форму: операторные функции  $\varphi_{in}(\mathbf{x}, t)$ ,

---

\* Позже мы увидим, что в качестве  $\omega(\mathbf{k})$  следует выбирать обозначавшуюся тем же символом функцию, определяющую положение полюсов функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$ . Из этого, в частности, вытекает четность функции  $\omega(\mathbf{k})$ .



$\pi_{in}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{in}(x, t)$ , обобщенные по переменной  $x$  и удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}^{\dagger}(x, t) &= \varphi_{in}(x, t); \quad \pi_{in}^{\dagger}(x, t) = \pi_{in}(x, t); \\ [\varphi_{in}(x, t), \varphi_{in}(y, t)] &= [\pi_{in}(x, t), \pi_{in}(y, t)] = 0; \\ [\pi_{in}(x, t), \varphi_{in}(x, t)] &= \frac{1}{i} \delta(x-y), \end{aligned}$$

называются in-операторами, если их можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_{in}(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int \left[ \frac{\partial \Delta(x-y, t-\tau)}{\partial t} \varphi(y, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta(x-y, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(y, \tau) \right] dy; \\ \pi_{in}(x, t) &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \int \left[ \frac{\partial^2 \Delta(x-y, t-\tau)}{\partial t^2} \varphi(y, \tau) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta(x-y, t-\tau)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(y, \tau) \right] dy, \end{aligned}$$

где  $\Delta(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta(x, t) + \int \omega(x-y) \Delta(y, t) dy = 0$$

и условию  $\Delta(x, 0) = 0$ .

Определение out-операторов отличается от определения in-операторов только заменой предельного перехода  $\tau \rightarrow -\infty$  предельным переходом  $\tau \rightarrow +\infty$ . Ясно, что out-операторы могут быть получены из in-операторов с помощью оператора обращения времени  $\hat{\tau}$ ; именно\*:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \hat{\varphi}_{in}(x, t) &= \varphi_{out}(x, -t) \hat{\tau}; \\ \hat{\tau} \tilde{\varphi}_{in}(k, t) &= \tilde{\varphi}_{out}(-k, -t) \hat{\tau}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Покажем, что in- и out-операторы удовлетворяют соотношениям:

$$\exp(iHt) \tilde{\varphi}_{ex}(k, \tau) \exp(-iHt) = \tilde{\varphi}_{ex}(k, t + \tau); \quad (16.6)$$

$$\exp(-iPa) \tilde{\varphi}_{ex}(k, \tau) \exp(iPa) = \tilde{\varphi}_{ex}(k, \tau) \exp(ika); \quad (16.7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\varphi}_{ex}(k, t) + \tilde{\omega}(k) \tilde{\varphi}_{ex}(k, t) = 0, \quad (16.8)$$

\* Напомним, что по сделанному в § 6 предположению в пространстве  $\mathcal{H}$  действуют оператор обращения времени  $\hat{\tau}$  и оператор импульса  $\hat{P}$ , удовлетворяющие условиям (6.5) — (6.7).

или в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении:

$$\begin{aligned} \exp(iHt) \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, \tau) \exp(-iHt) &= \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t + \tau), \\ \exp(-i\mathbf{P}\mathbf{a}) \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, \tau) \exp(i\mathbf{P}\mathbf{a}) &= \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tau); \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t) + \int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi_{\text{ex}}(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} &= 0. \end{aligned}$$

Равенство (16.7) сразу вытекает из (6.6). Соотношение (16.6) доказывается следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} &\exp(iH\sigma) \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) \exp(-iH\sigma) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left\{ \cos(\omega(\mathbf{k})(t - \tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau + \sigma) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t - \tau))}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \tau + \sigma) \right\} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left\{ \cos(\omega(\mathbf{k})(t + \sigma - \rho)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t + \sigma - \rho))}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho)}{\partial \rho} \right\} = \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t + \sigma) \end{aligned}$$

(мы ввели обозначение  $\rho = \tau + \sigma$ ). Чтобы проверить (16.8), заметим, что

$$\begin{aligned} &\cos(\omega(\mathbf{k})(t - \tau)) \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t - \tau))}{\omega(\mathbf{k})} \tilde{\pi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \left[ \cos(\omega(\mathbf{k})(t - \tau)) \Lambda(\mathbf{k}) \left\{ \cos(\omega(\mathbf{k})(\tau - \rho)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(\tau - \rho))}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho)}{\partial \rho} \right\} + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t - \tau))}{\omega(\mathbf{k})} \cdot \Lambda(\mathbf{k}) \times \right. \\ &\quad \times \left\{ -\omega(\mathbf{k}) \sin(\omega(\mathbf{k})(\tau - \rho)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(\omega(\mathbf{k})(\tau - \rho)) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho)}{\partial \rho} \right\} \right] = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} \Lambda(\mathbf{k}) \left[ \cos(\omega(\mathbf{k})(t - \rho)) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{k})(t - \rho))}{\omega(\mathbf{k})} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, \rho)}{\partial \rho} \right] = \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t). \end{aligned}$$

Из полученного равенства и аналогично доказываемого соотношения

$$\begin{aligned}
 & - \omega(\mathbf{k}) \sin(\omega(\mathbf{k})(t - \tau)) \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) + \\
 & + \cos(\omega(\mathbf{k})(t - \tau)) \tilde{\pi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau) = \tilde{\pi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, \tau)
 \end{aligned}$$

сразу следует уравнение (16.8).

Сделаем предположение, что вектор  $\Phi$  является циклическим вектором семейства in-операторов  $\varphi_{\text{in}}(f) = \int f(\mathbf{x}) \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , где  $f \in \mathcal{S}$  (это предположение можно проверить в рамках теории возмущений). Поскольку при обращении времени in-операторы переходят в out-операторы [см. (16.5)], можно утверждать также, что вектор  $\Phi$  циклический относительно семейства out-операторов  $\varphi_{\text{out}}(f) = \int f(\mathbf{x}) \varphi_{\text{out}}(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x}$ .

Соотношения (16.3), (16.6), (16.8) вместе с предположением о цикличности вектора  $\Phi$  показывают, что пространство  $\mathcal{H}$ , вектор  $\Phi$ , оператор  $\hat{H}$  и операторные обобщенные функции  $\varphi_{\text{ex}}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют всем условиям определения операторной реализации свободного гамильтониана. Отсюда получаем, что функции  $\tilde{\omega}(\mathbf{k})$  и  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\omega}(\mathbf{k})}$  почти везде положительны и можно найти операторные обобщенные функции  $a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k})$ ,  $a_{\text{ex}}(\mathbf{k})$ , задающие фоковское представление ССР и удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\varphi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} [a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) + a_{\text{ex}}^+(-\mathbf{k}, t)]; \\
 \tilde{\pi}_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) &= i \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2}} [a_{\text{ex}}^+(-\mathbf{k}, t) - a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t)]; \\
 a_{\text{ex}}(\mathbf{k}, t) &= a_{\text{ex}}(\mathbf{k}) \exp[-i\omega(\mathbf{k})t]; \\
 a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k}, t) &= a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k}) \exp[i\omega(\mathbf{k})t]; \\
 \hat{H} &= \int \omega(\mathbf{k}) a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k}) a_{\text{ex}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}; \\
 \hat{P} &= \int \mathbf{k} a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k}) a_{\text{ex}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.
 \end{aligned} \right\} (16.9)$$

Таким образом, при наложенных нами условиях оператор  $\hat{H}$  унитарно эквивалентен гамильтониану

$$\hat{H}_0 = \int \omega(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

описывающему свободные частицы с зависимостью энергии от импульса, выражаемой функцией  $\omega(\mathbf{k})$ . Состояние

$$\Phi(\mathbf{k}) = a_{\text{ex}}^+(\mathbf{k}) \Phi \quad (16.10)$$

является собственным для операторов  $\hat{H}$  и  $\hat{\mathbf{P}}$ , т. е.

$$\hat{H}\Phi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}); \quad \hat{\mathbf{P}}\Phi(\mathbf{k}) = \mathbf{k}\Phi(\mathbf{k}).$$

Это состояние имеет физический смысл одетого одночастичного состояния с импульсом  $\mathbf{k}$ ; функция  $\omega(\mathbf{k})$  — энергия этого состояния (следует заметить, что  $\Phi(\mathbf{k})$  — обобщенная векторная функция от  $\mathbf{k}$ )\*. Установим связь  $\omega(\mathbf{k})$  с положением полюсов функции Грина  $G(\mathbf{k}, \omega)$ , а  $\Lambda(\mathbf{k})$  — с вычетами в этих полюсах. Именно, покажем, что полюса функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$  по переменной  $\omega$  находятся в точках  $\pm\omega(\mathbf{k})$ ; этим будет оправдано использование термина «энергия одетых частиц» в применении к функции, определяющей положение полюсов функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$ . Функция  $\Lambda(\mathbf{k})$  равна

$$\Lambda(\mathbf{k}) = (Z(\mathbf{k}))^{-1/2},$$

где  $iZ(\mathbf{k})$  — вычет в полюсе функции  $G(\mathbf{k}, \omega)$  по переменной  $\omega^2$ .

Чтобы проверить эти утверждения, введем прежде всего функции  $\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  соотношением

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle &= \\ &= \delta\left(\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \end{aligned} \quad (16.11)$$

и выразим через них функцию Грина  $G(\mathbf{p}, \omega)$ . Легко получить:

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{p}\boldsymbol{\alpha}) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle &= \\ = \langle \exp(-i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{\alpha}) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \exp(i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{\alpha}) \Phi, a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle &= \\ = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, \exp(i\hat{\mathbf{P}}\boldsymbol{\alpha}) a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle &= \\ = \exp[-i\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)] \langle \varphi(\mathbf{p}, 0) \Phi, a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle, \end{aligned}$$

\* Мы покажем ниже, что  $a_{\text{in}}^+(\mathbf{k}) \Phi = a_{\text{out}}^+(\mathbf{k}) \Phi$  и, значит, формула (16.10) однозначно определяет состояние  $\Phi(\mathbf{k})$ .

откуда следует, что функцию  $\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle$  можно представить в виде (16.11). Тогда

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle = \\ & = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, \exp(-i\hat{H}t) a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle = \\ & = \exp \left[ it \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right] \rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta \left( \mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \right). \end{aligned}$$

Вычисляя скалярное произведение

$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle = \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \tilde{\varphi}(-\mathbf{p}_1, t_1) \Phi \rangle$$

в базисе  $a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi$ , получаем

$$\begin{aligned} & \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle \times \\ & \quad \times \overline{\langle \tilde{\varphi}(-\mathbf{p}_1, t_1) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle} d^n \mathbf{k} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta \left( -\mathbf{p}_1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \right) \delta \left( \mathbf{p}_2 + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \right) \times \\ & \quad \times \exp \left[ -i(t_1 - t_2) \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right] |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n = \\ & = \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta \left( -\mathbf{p}_1 + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \right) \times \\ & \quad \times \exp \left[ -i(t_1 - t_2) \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right] |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n. \quad (16.12) \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{p}_2, t_2) &= \theta(t_1 - t_2) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle + \\ & \quad + \theta(t_2 - t_1) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \Phi, \Phi \rangle = \\ & = \theta(t_1 - t_2) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle + \\ & \quad + \theta(t_2 - t_1) \overline{\langle \tilde{\tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \Phi, \tilde{\tau} \Phi \rangle} = \\ & = \theta(t_1 - t_2) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, t_2) \Phi, \Phi \rangle + \\ & \quad + \theta(t_2 - t_1) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, -t_1) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_2, -t_2) \Phi, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_2(\mathbf{p}_1, \omega_1, \mathbf{p}_2, \omega_2) = \frac{1}{2\pi} \int \exp[i\omega_1 t_1 + i\omega_2 t_2] \hat{G}_2(\mathbf{p}_1, t_1, \mathbf{p}_2, t_2),$$

находим из (16.12) соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\mathbf{p}_1, \omega_1, \mathbf{p}_2, \omega_2) &= \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta\left(-\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \times \\ &\times \left[ \frac{i}{\omega_1 - \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) + i0} + \frac{i}{\omega_1 + \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) + i0} \right] |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k}, \end{aligned}$$

из которого получается следующее представление функции Грина  $\tilde{G}(\mathbf{p}, \omega)$ :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{p}, \omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta\left(-\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \times \\ &\times \left[ \frac{i}{\omega - \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) + i0} - \frac{i}{\omega + \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) - i0} \right] |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k} = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta\left(\mathbf{p} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \frac{2 \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)}{\omega^2 - \left(\sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right)^2 + i0} \times \\ &\times |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

При выводе (16.13) мы воспользовались формулой

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\mathbf{p}_1, \omega_1, \mathbf{p}_2, \omega_2) &= G(\mathbf{p}_1, \omega_1) \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) + \\ &+ 2\pi |\rho_0|^2 \delta(\mathbf{p}_1) \delta(\omega_1) \delta(\mathbf{p}_2) \delta(\omega_2), \end{aligned}$$

где  $\rho_0$  определяется равенством

$$\begin{aligned} \rho_0 \delta(\mathbf{p}) &= \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, 0) \Phi, \Phi \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x}) \langle \varphi(\mathbf{x}, 0) \Phi, \Phi \rangle d\mathbf{x} = (2\pi)^{3/2} \gamma \delta(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Представление (16.13) для функции  $G(\mathbf{p}, \omega)$  называется представлением Челлена — Лемана. Формула (16.13) может

быть переписана в виде

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \frac{iZ(\mathbf{p})}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{p}) + i0} +$$

$$+ i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta\left(\mathbf{p} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \frac{2 \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)}{\omega^2 - \left(\sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right)^2 + i0} \times$$

$$\times |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k}.$$

Отсюда ясно, что точка  $\omega^2 = \omega^2(\mathbf{p})$  является полюсом функции  $G(\mathbf{p}, \omega)$  по переменной  $\omega^2$ , а вычет в этом полюсе равен

$$iZ(\mathbf{p}) = i |\rho_1(\mathbf{p})|^2 \cdot 2\omega(\mathbf{p}). \quad (16.14)$$

Далее можно написать:

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) \Phi = \exp[i\omega(\mathbf{p})t] \rho_1(-\mathbf{p}) a_{in}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \Phi +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta\left(\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \times$$

$$\times \exp\left[it \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right] a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_n) \Phi d^n \mathbf{k},$$

откуда

$$\cos(\omega(\mathbf{p})(t-\tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) \Phi + \frac{\sin(\omega(\mathbf{p})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) \Phi =$$

$$= \exp[i\omega(\mathbf{p})t] \rho_1(-\mathbf{p}) a_{in}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \Phi +$$

$$+ \cos(\omega(\mathbf{p})(t-\tau)) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta\left(\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \times$$

$$\times \exp\left[i\tau \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right] a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_n) \Phi d^n \mathbf{k} +$$

$$+ i \frac{\sin(\omega(\mathbf{p})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{p})} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \times$$

$$\times \delta\left(\mathbf{p} + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \left(\sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right) \exp\left[i\tau \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j)\right] a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_1) \dots$$

$$\dots a_{in}^{\dagger}(\mathbf{k}_n) \Phi d^n \mathbf{k}.$$

Переходя к пределу при  $\tau \rightarrow \pm \infty$  и учитывая, что слагаемые, содержащие интегралы, стремятся к нулю (из-за быстро осциллирующей экспоненты), получаем:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} \left( \cos(\omega(\mathbf{p})(t-\tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) \Phi + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{p})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) \Phi \right) = \exp[i\omega(\mathbf{p})t] \rho_1(-\mathbf{p}) a_{in}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \Phi. \end{aligned} \quad (16.15)$$

С другой стороны, в силу (16.4)

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} \Lambda(\mathbf{p}) \left( \cos(\omega(\mathbf{p})(t-\tau)) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) + \right. \\ & \left. + \frac{\sin(\omega(\mathbf{p})(t-\tau))}{\omega(\mathbf{p})} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, \tau) \right) \Phi = \varphi_{out}^{in}(\mathbf{p}, t) \Phi = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\omega(\mathbf{p})}} \exp[i\omega(\mathbf{p})t] a_{out}^{\dagger}(-\mathbf{p}) \Phi. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Из (16.15) и (16.16) вытекает равенство

$$\Lambda(\mathbf{p}) \rho_1(-\mathbf{p}) = (2\omega(\mathbf{p}))^{-1/2}, \quad (16.17)$$

а также упоминавшееся выше соотношение  $a_{in}^{\dagger}(\mathbf{p}) \Phi = a_{out}^{\dagger}(\mathbf{p}) \Phi$ . Комбинируя равенства (16.14) и (16.17), получаем нужное выражение для  $\Lambda(\mathbf{p})$  (при его выводе следует учесть неотрицательность функции  $\Lambda(\mathbf{p})$  и четность функций  $Z(\mathbf{p})$  и  $\omega(\mathbf{p})$ ).

Из представления Челлена — Лемана вытекают сформулированные без доказательства в § 7 утверждения, что  $Z(\mathbf{p})$  действительно и заключено в пределах  $0 \leq Z(\mathbf{p}) \leq 1$ . В самом деле, из соотношения (16.14) следует неотрицательность  $Z(\mathbf{p})$ . С другой стороны, из (16.12) и (2.15) легко вывести равенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) \langle \tilde{\varphi}(\mathbf{p}, t) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}', t') \Phi, \Phi \rangle |_{t=t'} = \\ & = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta\left(\mathbf{p} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \delta\left(\mathbf{p}' + \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \left( 2 \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right) \times \\ & \quad \times |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k} = \\ & = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \delta\left(\mathbf{p} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j\right) \left( 2 \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right) \times \\ & \quad \times |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 d^n \mathbf{k}, \end{aligned}$$



откуда

$$1 = Z(\mathbf{p}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int |\rho_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)|^2 \left( 2 \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{k}_j) \right) \times \\ \times \delta \left( \mathbf{p} - \sum_{j=1}^n \mathbf{k}_j \right) d^n \mathbf{k}_j. \quad (16.18)$$

Поскольку  $Z(\mathbf{p}) = |\rho_1(\mathbf{p})|^2 2\omega(\mathbf{p})$  — одно из слагаемых в сумме (16.18), а все слагаемые неотрицательны, то  $0 \leq Z(\mathbf{p}) \leq 1$ .

Назовем *матрицей рассеяния* (*S-матрицей*) унитарный оператор  $S$  в пространстве  $\mathcal{H}$ , удовлетворяющий условиям

$$\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, t) S = S \varphi_{\text{out}}(\mathbf{x}, t); \quad S \Phi = \Phi. \quad (16.19)$$

Чтобы доказать существование и единственность такого оператора, заметим, что требования (16.19) эквивалентны условиям

$$a_{\text{in}}(\mathbf{k}) S = S a_{\text{out}}(\mathbf{k}); \quad S \Phi = \Phi, \quad (16.20)$$

а из теоремы об унитарной эквивалентности двух фоковских представлений CCR (см. дополнение А) вытекает существование единственного оператора  $S$ , удовлетворяющего условиям (16.20).

Легко видеть, что оператор  $S$  коммутирует с операторами  $\hat{H}$  и  $\hat{\mathbf{P}}$ . Проверим, например, что  $S$  коммутирует с  $\hat{H}$ . Из (16.9) вытекает:

$$\left. \begin{aligned} & \exp(it\hat{H}) a_{\text{in}}(\mathbf{k}) S \exp(-it\hat{H}) = \\ & = \exp(it\hat{H}) a_{\text{in}}(\mathbf{k}) \exp(-it\hat{H}) \exp(it\hat{H}) \times \\ & \times S \exp(-it\hat{H}) = a_{\text{in}}(\mathbf{k}) \exp(-i\omega(\mathbf{k})t) \times \\ & \quad \times \exp(it\hat{H}) S \exp(-it\hat{H}); \\ & \exp(it\hat{H}) S a_{\text{out}}(\mathbf{k}) \exp(-it\hat{H}) = \\ & = \exp(it\hat{H}) S \exp(-it\hat{H}) \hat{a}_{\text{out}}(\mathbf{k}) \times \\ & \quad \times \exp(-i\omega(\mathbf{k})t). \end{aligned} \right\} \quad (16.21)$$

Из равенств (16.20), (16.21) получаем:

$$a_{\text{in}}(\mathbf{k}) \exp(it\hat{H}) S \exp(-it\hat{H}) = \exp(it\hat{H}) S \exp(-it\hat{H}) a_{\text{out}}(\mathbf{k}),$$

откуда, в силу единственности оператора, удовлетворяющего условиям (16.20),  $\exp(it\hat{H}) S = S \exp(it\hat{H})$ .

Рассмотрим матричные элементы  $S_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n)$  оператора  $S$  в обобщенном базисе  $a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_n) \Phi$  (в in-базисе):

$$\begin{aligned} S_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) &= \\ &= \langle Sa_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle = \\ &= \langle a_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, S^{-1} a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle = \\ &= \langle a_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, a_{out}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{out}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что оператор  $S$  коммутирует с  $\hat{H}$  и  $\hat{P}$ , представим функции  $S_{m,n}$  в виде

$$\begin{aligned} S_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) &= \sigma_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) \times \\ &\times \delta\left(\sum_{j=1}^m k_j - \sum_{j=1}^n l_j\right) \delta\left(\sum_{j=1}^m \omega(\mathbf{k}_j) - \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{l}_j)\right). \end{aligned}$$

Функции  $\sigma_{m,n}$  называются амплитудами рассеяния (иногда этот термин употребляют также по отношению к  $S_{m,n}$ ). Квадраты модулей этих функций задают вероятности переходов из in-состояний в out-состояния. (Подробнее о связи  $|\sigma_{m,n}|^2$  с дифференциальными эффективными сечениями рассеяния можно прочесть, например, в книге [6].)

Полезно отметить, что  $S$  переводит out-состояния в in-состояния:

$$Sa_{out}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{out}^+(\mathbf{k}_m) \theta = a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_m) \theta.$$

Матрицу рассеяния можно рассматривать как оператор в пространстве  $\mathcal{H}_{as} = F(E^3)$  (пространстве фоковского представления ССР). Тогда ее следует определять формулой  $\tilde{S} = S_+^\dagger S_-$ , где  $S_+$  и  $S_-$  — операторы, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{aligned} S_+ a(\mathbf{k}) &= a_{out}(\mathbf{k}) S_+, \quad S_+ \theta = \Phi; \\ S_- a(\mathbf{k}) &= a_{in}(\mathbf{k}) S_-, \quad S_- \theta = \Phi \end{aligned}$$

(матрицы Меллера). Это определение просто связано с определением, используемым в настоящей книге, — матричные элементы оператора  $\tilde{S}$  в базисе  $a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_n) \theta$  совпадают с матричными элементами  $S$  в in-базисе:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{S} a^+(\mathbf{l}_1) \dots a^+(\mathbf{l}_n) \theta, a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_m) \theta \rangle &= \\ = \langle S_- a^+(\mathbf{l}_1) \dots a^+(\mathbf{l}_n) \theta, S_+ a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_m) \theta \rangle &= \\ = \langle a_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, a_{out}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{out}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle &= \\ = \langle a_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, S^{-1} a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle &= \\ = \langle Sa_{in}^+(\mathbf{l}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{l}_n) \Phi, a_{in}^+(\mathbf{k}_1) \dots a_{in}^+(\mathbf{k}_m) \Phi \rangle. \end{aligned}$$

$S$ -матрицу удобно представлять в нормальной форме (см. § 5)\*:

$$S = \sum_n \int v_n(x_1, \tau_1, \dots, x_n, \tau_n) N(\varphi_{in}(x_1, \tau_1) \dots \varphi_{in}(x_n, \tau_n)) \times \\ \times d^n x d^n \tau = \sum_n \int \check{v}_n(\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{k}_n, \tau_n) N(\tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}_1, \tau_1) \dots \\ \dots \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{k}_n, \tau_n)) d^n k d^n \tau. \quad (16.22)$$

Зная функции  $v_n$ , нетрудно вычислить амплитуды рассеяния  $S_{m,n}$ . При условии  $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{q}_j$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) имеет место формула

$$\check{v}_{m+n}(-\mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1), \dots, -\mathbf{k}_m, \omega(\mathbf{k}_m), \mathbf{q}_1, -\omega(\mathbf{q}_1), \dots, \mathbf{q}_n, - \\ -\omega(\mathbf{q}_n)) = \int d^m \tau d^n \tau' \exp \left[ i \sum_{j=1}^m \omega(\mathbf{k}_j) \tau_j - i \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{q}_j) \tau'_j \right] \times \\ \times \check{v}_{m+n}(-\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, -\mathbf{k}_m, \tau_m, \mathbf{q}_1, \tau'_1, \dots, \mathbf{q}_n, \tau'_n) = \\ = \frac{1}{(m+n)!} \sqrt{2\omega(\mathbf{k}_1)} \dots \sqrt{2\omega(\mathbf{k}_m)} \sqrt{2\omega(\mathbf{q}_1)} \dots \sqrt{2\omega(\mathbf{q}_n)} \times \\ \times S_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n),$$

вытекающая из соотношения (5.24).

Покажем, каким образом  $S$ -матрица записывается в нормальной форме, если известны функции Грина  $G_n$  гамильтониана  $H$ . Убедимся, что в  $(\mathbf{k}, t)$ -представлении функции  $\check{v}_n$  можно выбрать в виде

$$\check{v}_n(-\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, -\mathbf{k}_n, \tau_n) = \frac{i^n}{n!} \Lambda(\mathbf{k}_1) \dots \Lambda(\mathbf{k}_n) \times \\ \times \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \omega^2(\mathbf{k}_1) \right) \dots \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_n^2} + \omega^2(\mathbf{k}_n) \right) \times \\ \times \check{G}_n(\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{k}_n, \tau_n). \quad (16.23)$$

[В § 5 говорилось, что существуют разные способы записи оператора в нормальной форме; формула (16.23) указывает один из возможных выборов  $\check{v}_n$ .]

Напомним, что уже было установлено, каким образом функции  $\Lambda(\mathbf{k})$  и  $\omega(\mathbf{k})$  можно выразить через функцию  $G(\mathbf{k}, \omega)$ .

---

\* Использование результатов § 5 правомерно, так как  $\varphi_{in}(\mathbf{x}, t)$  можно рассматривать как свободные поля.

Для доказательства равенства (16.23) воспользуемся соотношением

$$[ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)), \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}, t)] = -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Lambda(\mathbf{q}) \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau) \times \\ \times \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \omega^2(\mathbf{q}) \right) ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)). \quad (16.24)$$

Это соотношение (редукционная формула) доказывается следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} [ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)), \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}, t)] &= ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \times \dots \\ &\dots \times \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)) \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}, t) - \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}, t) ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)) = \\ &= ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)) \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}, t) - S \tilde{\varphi}_{out}(\mathbf{q}, t) T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \times \dots \\ &\dots \times \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)) = iS \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Lambda(\mathbf{q}) \left\{ -\frac{\partial D(\mathbf{q}, t-\tau)}{\partial \tau} \times \right. \\ &\quad \times T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) + D(\mathbf{q}, t-\tau) \times \\ &\quad \times \left. \frac{\partial}{\partial \tau} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) \right\} - iS \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Lambda(\mathbf{q}) \times \\ &\quad \times \left\{ -\frac{\partial \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau)}{\partial \tau} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) + \right. \\ &\quad \left. + \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) \right\} = \\ &= iS \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Lambda(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial D(\mathbf{q}, t-\tau)}{\partial \tau} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) - \right. \\ &\quad \left. - \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) \right\} = \\ &= iS \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Lambda(\mathbf{q}) \left\{ \frac{\partial^2 \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau)}{\partial \tau^2} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) - \right. \\ &\quad \left. - \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)) \right\} = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Lambda(\mathbf{q}) \check{D}(\mathbf{q}, t-\tau) \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \omega^2(\mathbf{q}) \right) ST(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \\ &\quad \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)). \end{aligned}$$

(Мы воспользовались здесь тем, что при  $\tau \rightarrow -\infty$   $T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n)) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau)$  можно заменить оператором  $T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n) \tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau))$ , а при  $\tau \rightarrow +\infty$   $\tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau) T(\tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n))$  заменить оператором  $T(\tilde{\varphi}(\mathbf{q}, \tau) \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_1, t_1) \dots \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{p}_n, t_n))$ .) Многократное применение (16.24) позволяет написать:

$$\begin{aligned} & [\dots [S, \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_1, t_1)] \dots \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_n, t_n)] = (-i)^n S \times \\ & \times \int d\tau_n \int d\tau_{n-1} \dots \int d\tau_1 \Lambda(\mathbf{q}_1) \dots \Lambda(\mathbf{q}_n) \cdot \check{D}(\mathbf{q}_1, t_1 - \tau_1) \dots \\ & \dots \check{D}(\mathbf{q}_n, t_n - \tau_n) \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \omega^2(\mathbf{q}_1) \right) \dots \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_n^2} + \omega^2(\mathbf{q}_n) \right) \times \\ & \times T(\tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1, \tau_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_n, \tau_n)) \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} & \langle [\dots [S, \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_1, t_1)] \dots \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_n, t_n)] \Phi, \Phi \rangle = \\ & = (-i)^n \int d\tau_n \int d\tau_{n-1} \dots \int d\tau_1 \Lambda(\mathbf{q}_1) \dots \Lambda(\mathbf{q}_n) \check{D}(\mathbf{q}_1, t_1 - \tau_1) \dots \\ & \dots \check{D}(\mathbf{q}_n, t_n - \tau_n) \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \omega^2(\mathbf{q}_1) \right) \dots \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_n^2} + \omega^2(\mathbf{q}_n) \right) \times \\ & \times \check{G}_n(\mathbf{q}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{q}_n, \tau_n). \end{aligned} \quad (16.25)$$

С другой стороны, из (5.18) вытекает:

$$\begin{aligned} & \langle [\dots [S, \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_1, t_1)] \dots \tilde{\varphi}_{in}(\mathbf{q}_n, t_n)] \Phi, \Phi \rangle = \\ & = n! (-1)^n \int \check{D}(\mathbf{q}_1, t_1 - \tau_1) \dots \check{D}(\mathbf{q}_n, t_n - \tau_n) \times \\ & \times \check{v}_n(-\mathbf{q}_1, \tau_1, \dots, -\mathbf{q}_n, \tau_n) d^n \tau. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Комбинируя (16.25) и (16.26), получаем нужное соотношение (16.23).

Функции  $v_n$  удобно выражать через регуляризованные функции Грина  $G_n^{\text{reg}}$ . Для этого введем регуляризованный полевой оператор в  $(\mathbf{k}, t)$ -представлении:

$$\tilde{\varphi}_{\text{reg}}(\mathbf{k}, t) = \Lambda(\mathbf{k}) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t)$$

и в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении:

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{reg}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) \tilde{\varphi}_{\text{reg}}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = \int \tilde{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \\ & \times \varphi(\mathbf{y}, t) dy, \end{aligned}$$

где  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \Lambda(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k}$ . Функции Грина, построенные с помощью регуляризованных полевых операторов, назовем *регуляризованными функциями Грина*:

$$\begin{aligned} \check{G}_n^{\text{reg}}(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n) &= \Lambda(\mathbf{k}_1) \dots \Lambda(\mathbf{k}_n) \check{G}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n); \\ G_n^{\text{reg}}(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) &= \\ &= \int \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1) \dots \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) G_n(\mathbf{y}_1, t_1, \dots, \mathbf{y}_n, t_n) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_n. \end{aligned}$$

Выражения  $\check{v}_n$ ,  $v_n$  через регуляризованные функции Грина имеют более простой вид:

$$\begin{aligned} \check{v}_n(-\mathbf{k}_1, \tau_1, \dots, -\mathbf{k}_n, \tau_n) &= \frac{i^n}{n!} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \omega^2(\mathbf{k}_1) \right) \dots \\ &\dots \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_n^2} + \omega^2(\mathbf{k}_n) \right) \check{G}_n^{\text{reg}}(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_n, t_n); \\ v_n(\mathbf{x}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{x}_n, \tau_n) &= \frac{i^n}{n!} \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + \omega^2\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right) \right) \dots \\ &\dots \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau_n^2} + \omega^2\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_n}\right) \right) G_n^{\text{reg}}(\mathbf{x}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{x}_n, \tau_n) = \\ &= \frac{i^n}{n!} K_1 \dots K_n G_n^{\text{reg}}(\mathbf{x}_1, \tau_1, \dots, \mathbf{x}_n, \tau_n), \end{aligned}$$

где  $K_i$  — оператор, действующий по формуле

$$\begin{aligned} K_i f(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) &= \frac{\partial^2}{\partial t_i^2} f(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) + \\ &+ \int \omega(\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i) f(\mathbf{x}_1, t_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, t_{i-1}, \mathbf{y}_i, t_i, \mathbf{x}_{i+1}, t_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n, t_n) d\mathbf{y}_i. \end{aligned}$$

## § 17. Адиабатическое определение матрицы рассеяния

Данное в § 16 определение матрицы рассеяния основано на построении операторной реализации трансляционно-инвариантного гамильтониана. В гл. 4 был развит другой подход к взаимодействиям вида  $V(\varphi)$ , основанный на предельном переходе от потенциальных взаимодействий. В этой главе по трансляционно-инвариантному гамильтониану  $H = H_0 + V$  вида (3.3) был построен гамильтониан  $H_{L, \Lambda} = H_0 + V_{L, \Lambda}$ , получающийся обрезанием по импульсам и координатам.

Как говорилось, трансляционная инвариантность гамильтониана  $H$  означает, что коэффициентные функции  $V_m$  возмущения  $V$  можно представить в виде  $V_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = v_m(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_m, \dots, \mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_m)$ ; функции  $v_m$  предполагаем принадлежащими пространству  $\mathcal{S}$ . Функцию  $\varepsilon(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{v}(\mathbf{k})}$ , где  $\tilde{v}(\mathbf{k})$  фигурирует в  $\mathbf{k}$ -представлении гамильтониана  $H_0$ , считаем гладкой функцией, все производные которой имеют не более чем степенной рост.

Обозначим  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$  адиабатическую  $S$ -матрицу, построенную по операторам  $H_{L, \Lambda}, H_{0, L, \Lambda}$ . (Определение адиабатической  $S$ -матрицы, построенной по операторам  $H, H_0$ , дается в дополнении А.)

В нерелятивистской квантовой механике матрицу рассеяния можно получить из адиабатической  $S$ -матрицы с помощью предельного перехода  $\alpha \rightarrow 0$ . В квантовой теории поля также часто пытаются определить матрицу рассеяния с помощью аналогичной конструкции. Однако при этом приходится сталкиваться с существенными затруднениями. В частности, вычисляя по теории возмущений матричные элементы оператора  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$ , получаем расходящиеся выражения как при снятии обрезания по объему, т. е. при  $L \rightarrow \infty$ , так и в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  (напротив, при снятии обрезания по импульсам  $\Lambda \rightarrow \infty$  при наложенных нами условиях на функции  $\varepsilon(\mathbf{k})$  и  $\tilde{v}_m$  получается конечный предел). Чтобы убедиться в этом, запишем оператор  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$  в нормальной форме:

$$S_{\alpha}^{L, \Lambda} = \sum_m \int dt_1 \dots dt_m \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m} \rho_{\alpha, m}^{L, \Lambda}(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_m, t_m) \times \\ \times N(\tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_m, t_m)), \quad (17.1)$$

где

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \exp(iH_{0, L, \Lambda} t) \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} \exp(-iH_{0, L, \Lambda} t), \quad \mathbf{k} \in \tilde{T}_{L, \Lambda}.$$

Для вычисления функций  $\rho_{\alpha, m}^{L, \Lambda}$  по теории возмущений может быть построена диаграммная техника, аналогичная диаграммной технике для функций Грина. Представление оператора  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$  в виде ряда теории возмущений получается с помощью соотношения

$$S_{\alpha}^{L, \Lambda} = \sum_n \left(\frac{1}{i}\right)^n \int dt_1 \dots dt_n \exp(-\alpha|t_1|) \dots \exp(-\alpha|t_n|) \times \\ \times T(\tilde{V}_{L, \Lambda}(t_1) \dots \tilde{V}_{L, \Lambda}(t_n)),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{L,\Lambda}(t) &= \exp(iH_{0,L,\Lambda}t) V_{L,\Lambda} \exp(-iH_{0,L,\Lambda}t) = \\ &= \sum_m \sum_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}(m-2)} \tilde{v}_m(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m) \delta_{\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_m} \times \\ &\quad \times \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1, t) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_m, t) \end{aligned}$$

(см. дополнение А); приведение к нормальной форме осуществляем, применяя теорему Вика. Мы не останавливаемся на описании диаграммного представления функций  $\rho_{\alpha, m}^{L, \Lambda}$ , поскольку оно подробно описано во многих книгах по квантовой теории поля, и мы его в дальнейшем не будем использовать.

Легко видеть, что число  $\rho_{\alpha, 0}^{L, \Lambda}$  не имеет конечного предела ни при  $L \rightarrow \infty$ , ни при  $\alpha \rightarrow 0$  (для проверки этого достаточно заметить, что диаграммы, не имеющие внешних вершин, — вакуумные петли — расходятся как при  $L \rightarrow \infty$ , так и при  $\alpha \rightarrow 0$ ). Однако в каждом порядке теории возмущений существует конечный предел:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\rho_{\alpha, m}^{L, \Lambda}(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_m, t_m)}{\rho_{\alpha, 0}^{L, \Lambda}} = \\ = \rho_m(\mathbf{k}_1, t_1, \dots, \mathbf{k}_m, t_m). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Естественно предположить, что функции  $\rho_m$  тесно связаны с амплитудами рассеяния. Но ситуация оказывается не столь простой: чтобы с помощью описанной конструкции получить матрицу рассеяния, следует включить в исходный гамильтониан  $H$  добавочные слагаемые (контрчлены, соответствующие перенормировке одночастичной энергии и волновой функции). В стандартных изложениях квантовой теории поля пользуются именно такой процедурой, но там рассматривается сразу лоренц-инвариантный случай и контрчлены вводятся для конечности теории; при этом остается в тени то обстоятельство, что в случае отсутствия расходимостей для получения физической матрицы рассеяния также нужно вводить контрчлены, правда, конечные.

Не будем подробно описывать намеченную выше конструкцию матрицы рассеяния. Существует другая конструкция, позволяющая построить матрицу рассеяния по адиабатическим  $S$ -матрицам  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$ , не прибегая к введению в гамильто-



ниан каких-либо контрчленов. Именно, матрицу рассеяния  $\tilde{S}$  можно определить как оператор в фоковском пространстве  $F(E^3)$ , имеющий матричные элементы

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) = \\ & = \langle \tilde{S} a^+(\mathbf{l}_1) \dots a^+(\mathbf{l}_n) \theta, a^+(\mathbf{k}_1) \dots a^+(\mathbf{k}_m) \theta \rangle = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{L \rightarrow \infty} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{L}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}(m+n)} \times \\ & \times \frac{\sigma_{\alpha, m, n}^{L, \Lambda}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) (\sigma_{\alpha, 0, 0}^{L, \Lambda})^{\frac{m+n}{2}-1}}{\sqrt{\prod_{i=1}^m \sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}(\mathbf{k}_i | \mathbf{k}_i) \prod_{j=1}^n \sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}(\mathbf{l}_j | \mathbf{l}_j)}}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \sigma_{\alpha, m, n}^{L, \Lambda}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) = \\ & = \langle S_{\alpha}^{L, \Lambda} a_{\mathbf{l}_1}^+ \dots a_{\mathbf{l}_n}^+ \theta_{L, \Lambda}, a_{\mathbf{k}_1}^+ \dots a_{\mathbf{k}_m}^+ \theta_{L, \Lambda} \rangle, \end{aligned}$$

$a^+(\mathbf{k})$ ,  $a(\mathbf{k})$  — операторы рождения и уничтожения в фоковском пространстве  $F(E^3)$ ; операторы  $a_{\mathbf{k}}^+$ ,  $a_{\mathbf{k}}$ , где  $\mathbf{k} \in T_{L, \Lambda}$ , определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})} \tilde{\varphi}_{-\mathbf{k}} - \frac{i}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})}} \tilde{\pi}_{-\mathbf{k}} \right); \\ a_{\mathbf{k}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}} + \frac{i}{\sqrt{\varepsilon(\mathbf{k})}} \tilde{\pi}_{\mathbf{k}} \right). \end{aligned}$$

$\theta_{L, \Lambda}$  — основное состояние оператора  $H_{0, L, \Lambda}$ . Этот оператор записывается через  $a_{\mathbf{k}}^+$ ,  $a_{\mathbf{k}}$ :

$$H_{0, L, \Lambda} = \sum \varepsilon(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \text{const.}$$

Предельный переход от функции дискретного аргумента, стоящих в правой части (17.3), к функциям непрерывного аргумента понимается в смысле обобщенных функций. Когда функция  $\varepsilon(\mathbf{k})$  удовлетворяет условию  $\varepsilon(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) < \varepsilon(\mathbf{k}_1) + \varepsilon(\mathbf{k}_2)$ , можно, используя теорию возмущений и применяя частичное суммирование ряда теории возмущений, установить связь между оператором  $\tilde{S}$  и матрицей рассеяния  $S$ , определенной в предыдущем параграфе с помощью in- и out-операторов.

Удается доказать, что функции  $\tilde{S}_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n)$  совпадают с матричными элементами оператора  $S$  в  $\text{in}$ -базисе:

$$\begin{aligned} & \tilde{S}_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) = \\ & = \langle Sa_{\text{in}}^{\dagger}(\mathbf{l}_1) \dots a_{\text{in}}^{\dagger}(\mathbf{l}_n) \Phi, a_{\text{in}}^{\dagger}(\mathbf{k}_1) \dots a_{\text{in}}^{\dagger}(\mathbf{k}_n) \Phi \rangle = \\ & = S_{m,n}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m | \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n). \end{aligned}$$

Таким образом, сечения рассеяния с равным успехом вычисляются по оператору  $\tilde{S}$  и по оператору  $S$ . Доказательство этого утверждения (адиабатической теоремы) можно получить с помощью незначительной модификации рассуждений статьи [15]. Мы не будем проводить здесь доказательства адиабатической теоремы. Отметим только, что асимптотику матричных элементов  $\sigma_{\alpha, m, n}^{L, \Lambda}$  оператора  $S_{\alpha}^{L, \Lambda}$  при  $\alpha \rightarrow 0$  нельзя получить с помощью соотношения (17.2). Дело в том, что они выражаются через преобразования Фурье функций  $\rho_{\alpha, m, n}^{L, \Lambda}$  по переменным  $t_1, \dots, t_m$ , однако вычислять предел функций  $\sigma_{\alpha, m, n}^{L, \Lambda}$  с помощью (17.2) нельзя в силу того, что предел в (17.2) неравномерен по  $t_1, \dots, t_m$ . Асимптотику матричных элементов  $\sigma_{\alpha, 0, 0}^{L, \Lambda}$  и  $\sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}$  можно получить с помощью адиабатической теории возмущений (см., например, [13]). Именно, при  $\alpha \rightarrow 0$  оказывается:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha, 0, 0}^{L, \Lambda} & \approx \exp\left(\frac{2i}{\alpha} \int_0^1 \frac{E_{L, \Lambda}(g) - E_{L, \Lambda}(0)}{g} dg\right); \\ \sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}(\mathbf{k} | \mathbf{k}) & \approx \exp\left(\frac{2i}{\alpha} \int_0^1 \frac{\omega_{L, \Lambda}(\mathbf{k} | g) - \omega_{L, \Lambda}(\mathbf{k} | 0)}{g} dg\right), \end{aligned}$$

где  $E_{L, \Lambda}(g)$  и  $\omega_{L, \Lambda}(\mathbf{k} | g)$  — энергии стационарных состояний оператора  $H_{0, L, \Lambda} + gV_{L, \Lambda}$ , получающихся по теории возмущений соответственно из основного состояния  $\theta_{L, \Lambda}$  и одночастичного состояния  $a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \theta_{L, \Lambda}$  оператора  $H_{0, L, \Lambda}$  (иначе  $E_{L, \Lambda}(g)$  определяется как энергия основного состояния оператора  $H_{0, L, \Lambda} + gV_{L, \Lambda}$ , а  $\omega_{L, \Lambda}(\mathbf{k} | g)$  — как наименьшая энергия того же оператора при условии, что импульс равен  $\mathbf{k}$ ). Таким образом, видим, что в пределе  $\alpha \rightarrow 0$  числа  $\sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}$  и  $\sigma_{\alpha, 1, 1}^{L, \Lambda}(\mathbf{k} | \mathbf{k})$  по модулю равны единице.

## ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### § 18. Постановка задачи

До сих пор мы рассматривали практически произвольные взаимодействия вида  $V(\varphi)$ . Наиболее интересны взаимодействия, приводящие к лоренц-инвариантной  $S$ -матрице. Разумеется, чтобы имело смысл говорить о лоренц-инвариантности  $S$ -матрицы, следует предположить, что функция  $\omega(\mathbf{k})$ , выражающая энергию одетых частиц через их импульс, имеет релятивистский вид  $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Лоренц-инвариантность можно понимать, например, как возможность записать  $S$ -матрицу в виде (16.22) с функциями  $v_n$ , инвариантными относительно преобразований Лоренца. Для выделения взаимодействий, которые обладают этим свойством, вспомним, что рассматриваемые гамильтонианы получаются при квантовании классических систем с функционалом Гамильтона (1.8). Естественно предполагать, что при квантовании лоренц-инвариантной классической системы получается лоренц-инвариантная квантовая система.

Уравнения движения (1.10), соответствующие функционалу Гамильтона  $\mathcal{H}(\pi, \varphi)$ , лоренц-инвариантны, если

$$\mathcal{H}(\pi, \varphi) = \frac{1}{2} \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int (\nabla\varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + \int f(\varphi(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

где  $f(\varphi)$  — произвольная функция, поскольку тогда они принимают форму

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \Delta\varphi(\mathbf{x}, t) = -f'(\varphi(\mathbf{x}, t)). \quad (18.1)$$

Лоренц-инвариантность уравнений (18.1) означает, что они сохраняют свой вид при замене  $\varphi(x)$  на  $\varphi(gx)$ , где  $g$  — преобразование Лоренца. Наиболее простым уравнением вида (18.1) является линейное уравнение (1.24) (уравнение Клейна — Гордона); ему соответствует функция Гамильтона (1.25).

Таким образом, следует рассмотреть формальные гамильтонианы

$$H = \frac{1}{2} \left( \int (\pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int (\nabla\varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \right) + \int f(\varphi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (18.2)$$

где  $\pi(\mathbf{x})$ ,  $\varphi(\mathbf{x})$  — символы, удовлетворяющие соотношениям (2.7), (2.8). Такие гамильтонианы носят название *локальных*. Ограничимся случаем, когда функция  $f$  является полиномом, так как достаточно полная теория неполиномиальных гамильтонианов пока еще не построена (см. [16—18]).

Обычно гамильтонианы вида (18.2) записывают как сумму свободного гамильтониана  $H_0$  и взаимодействия  $V$ :

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2} \left( \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int (\nabla\varphi(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} + m^2 \int \varphi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) + \int P(\varphi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (18.3)$$

Основное внимание в этой главе уделено взаимодействию

$$V = g \int \varphi^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (18.4)$$

которое во многом аналогично квантовой электродинамике — единственной лоренц-инвариантной квантовополевой теории, с достоверностью, подтвержденной экспериментом.

Взаимодействие в гамильтониане (18.3) может быть записано в виде (2.2), где

$$\begin{aligned} V_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= v_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n) = \\ &= \lambda_n \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n) \dots \delta(\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

Однако фейнмановская диаграммная техника непосредственно неприменима в рассматриваемом случае, поскольку  $V_n$  — обобщенные функции [при вычислении фейнмановских диаграмм возникают математически неопределенные выражения — произведения обобщенных функций в  $(\mathbf{x}, t)$ -представлении и расходящиеся интегралы в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении]. Чтобы придать смысл взаимодействию в гамильтониане (18.3), естественно использовать предельный переход от взаимодействий  $V_\Lambda$  вида (2.2) с гладкими функциями  $V_n^\Lambda(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ , т. е. представлять  $V_n = \lambda_n \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n) \dots \delta(\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n)$  в виде

$$\begin{aligned} V_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= v_n(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n) = \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} v_n^\Lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

где  $v_n^\Lambda$  — гладкие функции; предел понимается в смысле обобщенных функций [для построения последовательности  $v_n^\Lambda$  можно, например, воспользоваться соотношением  $\delta(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{\Lambda^3}{\pi^{3/2}} \exp(-x^2 \Lambda^2)$ ].

Описанную замену  $v_n$  «хорошими» функциями называют обрезанием по импульсам, так как в импульсном представлении ей соответствует замена функции

$$\tilde{V}_n(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \lambda_n (2\pi)^{-\frac{3}{2}(n-2)} \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n)$$

функцией

$$\lambda_n (2\pi)^{-\frac{3}{2}(n-2)} f_\Lambda(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n),$$

где  $f_\Lambda(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)$  — быстро убывающая функция импульсов  $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n$ , удовлетворяющая условию

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} f_\Lambda(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = 1.$$

Величину  $\Lambda$  называют параметром обрезания.

Если  $H = H_0 + V$  — гамильтониан вида (18.3),  $H_\Lambda = H_0 + V_\Lambda$  — гамильтонианы, полученные из  $H$  обрезанием по импульсам ( $H = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} H_\Lambda$ ), то напрашивается определение матрицы рассеяния  $S$  и функций Грина  $G_n$  гамильтониана  $H$  как предела при  $\Lambda \rightarrow \infty$  матриц рассеяния  $S_\Lambda$  и функций Грина  $G_n^\Lambda$ , построенных по гамильтонианам  $H_\Lambda$ . Конечно, при таком определении матрица рассеяния может оказаться зависящей от способа обрезания (т. е. гамильтониану  $H$  будет соответствовать целое семейство матриц рассеяния).

К сожалению, как правило, последовательность операторов  $S_\Lambda$  либо расходится, либо слабо сходится к единичному оператору, и, стало быть, указанная конструкция приводит к тривиальной  $S$ -матрице. Однако эта конструкция модифицируется так, чтобы в некоторых случаях она давала нетривиальную лоренц-инвариантную  $S$ -матрицу (по крайней мере в рамках теории возмущений). Модифицированная конструкция сопоставляет матрицу рассеяния (точнее, семейство матриц рассеяния) не одному гамильтониану (18.3), а целому семейству гамильтонианов такого вида.

Рассмотрим семейство взаимодействий (18.4). Введем обрзанное по импульсам взаимодействие

$$V(g, \Lambda) = g \int v_{\Lambda}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4) \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_4) d^4 \mathbf{x}, \quad (18.5)$$

где

$$v_{\Lambda}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Lambda^9 f(\Lambda \xi_1, \Lambda \xi_2, \Lambda \xi_3), \quad (18.6)$$

$f$  — функция из пространства  $\mathcal{S}$ , удовлетворяющая условию

$$\int f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = 1.$$

Построим матрицу рассеяния  $S(m, g, \Lambda)$ , отвечающую взаимодействию  $V(g, \Lambda)$  и энергии одетых частиц  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  (напомним, что в § 7 и 9 строились варианты теории возмущений, в которых матрица рассеяния выражалась через взаимодействие и энергию одетых частиц). Параметр  $m$  называется физической массой; говоря о частицах с физической массой  $m$ , мы всегда имеем в виду одетые частицы, энергия которых задается законом  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .

*Матрицей рассеяния частиц с физической массой  $m$ , отвечающей семейству взаимодействий (18.4), называем оператор, который может быть представлен в виде*

$$S = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} S(m, g_{\Lambda}, \Lambda), \quad (18.7)$$

где  $g_{\Lambda}$  — произвольная функция  $\Lambda$  (предел операторов здесь и дальше понимается в смысле слабого предела).

Справедливо (по крайней мере в рамках теории возмущений) следующее утверждение: *для каждой массы  $m$  существует однопараметрическое семейство  $S$ -матриц, отвечающих семейству взаимодействий (18.4); эти  $S$ -матрицы лоренц-инвариантны\**. Доказательство данного утверждения намечено в следующих параграфах; там же указано представление  $S$ -матриц, отвечающих взаимодействиям (18.4), с помощью фейнмановских диаграмм.

Сделанное утверждение называют теоремой о перенормируемости (18.4) и формулируют обычно следующим образом: *чтобы построить  $S$ -матрицу по взаимодействию  $g \int \varphi^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ,*

\* При определении взаимодействия  $V(g, \Lambda)$  мы использовали функцию  $f \in \mathcal{S}$ , от выбора которой а priori может зависеть, какие  $S$ -матрицы соответствуют нашему семейству взаимодействий. На деле оказывается, что семейство  $S$ -матриц не зависит от выбора  $f$ .

нужно сделать перенормировку массы и заряда. Слова «перенормировка массы» означают, что при снятии обрезания по импульсам, т. е. в процессе предельного перехода  $\Lambda \rightarrow \infty$ , считаем фиксированной энергию одетых частиц  $\sqrt{k^2 + m^2}$ ; свободный гамильтониан  $H_0$  при этом зависит от  $\Lambda$ . Говоря о перенормировке заряда, имеют в виду, что константу связи  $g$  (голый заряд) в процессе предельного перехода  $\Lambda \rightarrow \infty$  следует считать зависящей от  $\Lambda$ .

Остановимся немного на физическом смысле наших построений. Предположим, что в природе существует только один тип частиц — бозоны массы  $m$  с взаимодействием (18.4), причем константа связи  $g$  неизвестна. Заменяем взаимодействие  $V$  обрезанным взаимодействием  $V(g, \Lambda)$  и вычислим  $S$ -матрицу  $S(m, g, \Lambda)$ , соответствующую рассеянию частиц с физической массой  $m$  и взаимодействием  $V(g, \Lambda)$ . При больших  $\Lambda$  оператор  $S(m, g, \Lambda)$  достаточно точно описывает интересующий нас процесс рассеяния. Неизвестный параметр  $g$  нужно при этом определить, найдя экспериментально какую-нибудь одну физическую величину  $a$  и сравнив ее значение с теоретически вычисленным [если  $r(m, g, \Lambda)$  — значение выбранной величины при параметрах  $m, g, \Lambda$ , то  $g$  определяется из уравнения  $r(m, g, \Lambda) = a$ ]. Разумеется, пользоваться описанным рецептом можно при условии, что окончательный ответ не зависит от выбора  $\Lambda$ , если, конечно,  $\Lambda$  достаточно большое. Теорема о перенормируемости и означает выполнение этого условия [если устремить  $\Lambda$  к бесконечности, считая, что  $g$  зависит от  $\Lambda$  и определяется из уравнения  $r(m, g_\Lambda, \Lambda) = a$ , то матрица рассеяния  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$  имеет предел, зависящий от параметров  $m$  и  $a$ ].

Оставляет некоторое чувство неудовлетворенности то, что в рассматриваемом случае нельзя поставить в соответствие отдельно взятому гамильтониану  $S$ -матрицу, а нужно говорить о  $S$ -матрице, построенной по семейству гамильтонианов. В связи с этим можно, например, предположить, что гравитационное взаимодействие порождает эффективное обрезание по импульсам локальных взаимодействий, т. е. реализуются именно взаимодействия типа  $V(g, \Lambda)$ , где  $\Lambda$  велико. Это предположение обсуждалось в некоторых работах, например [19, 20]; его подтверждение объяснило бы, с одной стороны, успех локальной квантовой теории поля, а с другой — освободило бы от трудностей, связанных с локальностью.

Существуют и другие предположения, сводящиеся к тому, что локальные теории — лишь идеализация осущест-

вляющихся в природе нелокальных в каком-то смысле взаимодействий. Однако заметим, что независимо от справедливости этих предположений невозможно построить  $S$ -матрицу по взаимодействию (18.4) с фиксированным  $g$  еще и по чисто математическим причинам, а именно: выражения, с которыми приходится встречаться при попытке анализировать это взаимодействие, не вводя обрезания по импульсам, не имеют четкого смысла. В качестве модели рассмотрим трехмерную нерелятивистскую частицу, движущуюся в поле потенциала  $U(x) = \lambda \delta(x)$ . Здесь также можно ввести обрезание по импульсам, другими словами, заменить этот потенциал, например, на  $V_\Lambda^\lambda(x) = \lambda \Lambda^3 f(\Lambda x)$ , где  $f \in \mathcal{S}$ ,  $\int f(x) dx = 1$ . Оказывается, что операторы  $\exp[iH(\lambda, \Lambda)t]$  с  $H(\lambda, \Lambda) = H_0 + V_\Lambda^\lambda$ ,  $H_0 = -\Delta$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$  сходятся к  $\exp(iH_0 t)$ , т. е. при снятии обрезания взаимодействие исчезает. Однако удастся подобрать зависимость  $\lambda$  от  $\Lambda$  и  $a$ , при которой существует сильный предел:

$$s \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \exp[iH(\lambda_\Lambda(a), \Lambda)t] = U_a(t),$$

и операторы  $U_a(t)$  можно представить в виде  $U_a(t) = \exp[iH(a)t]$ , где  $H(a)$  — самосопряженный оператор, который, к сожалению, описать довольно сложно. Итак, в этой простой модели также нельзя придать смысл формальному гамильтониану

$$-\Delta + \lambda \delta(x),$$

но семейству таких формальных гамильтонианов соответствует семейство самосопряженных операторов Гамильтона  $H(a)$ , по которым можно вычислять различные физические величины (например,  $S$ -матрицу). Подробное исследование разобранной модели и аналогичных моделей проводится в работах [21, 22].

Данное выше определение семейства  $S$ -матриц, отвечающих семейству взаимодействий (18.4), можно пытаться применить в других случаях, например для семейства  $g \int \varphi^n(x) dx$ . При  $n=3$  также справедлива теорема о перенормируемости; более того, в этом случае нет необходимости перенормировывать заряд. Иными словами, справедливо следующее утверждение (в рамках теории возмущений): *для взаимодействия*



$g \int \varphi^3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  матрицы рассеяния  $S_\Lambda = S(m, g, \Lambda)$ , построенные по «обрезанному взаимодействию»

$$V(g, \Lambda) = g \int v_\Lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \varphi(\mathbf{x}_3) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{x}_3$$

и энергии одетых частиц  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , при снятии обрезания стремятся к лоренц-инвариантной матрице рассеяния  $S(m, g)$  (снятие обрезания означает предельный переход  $\Lambda \rightarrow \infty$ , функция  $v_\Lambda(\xi_1, \xi_2) = \Lambda^6 f(\Lambda \xi_1, \Lambda \xi_2)$ , где  $f \in \mathcal{S}$ ). Оператор  $S(m, g)$  имеет физический смысл матрицы рассеяния частиц с физической массой  $m$  и с законом взаимодействия  $g \int \varphi^3(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Перенося определение семейства  $S$ -матриц на семейство взаимодействий  $g \int \varphi^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  при  $n \geq 5$ , приходим совсем к другим результатам. Оказывается, что у такого семейства взаимодействий нет нетривиальных  $S$ -матриц в определенном выше смысле. Иначе говоря, если у последовательности матриц рассеяния  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$  существует предел при снятии обрезания, то он обязательно является единичным оператором. Это утверждение назовем теоремой о неперенормируемости взаимодействий  $g \int \varphi^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  при  $n \geq 5$ , поскольку оно показывает, что перенормировкой массы и заряда нельзя получить нетривиальную  $S$ -матрицу для этих взаимодействий. Все известные к настоящему времени определения  $S$ -матрицы либо также не дают возможности построить для  $g \int \varphi^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  при  $n \geq 5$  нетривиальную  $S$ -матрицу, либо приводят к семейству  $S$ -матриц, зависящему от бесконечного числа параметров.

Данное выше определение семейства  $S$ -матриц для взаимодействий (18.4) можно записать в различных формах. Ввиду большой важности этого определения и теоремы о перенормируемости приведем несколько модификаций.

Рассмотрим семейство гамильтонианов  $H(\omega, g) = H_0(\omega) + gV$ , где

$$H_0(\omega) = \frac{1}{2} \int \pi^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y};$$

$$V = \int \varphi^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$\omega(\mathbf{x})$  — произвольная функция.

Матрицей рассеяния семейства гамильтонианов  $H(\omega, g)$  называем оператор  $S$ , который можно представить в виде пре-

дела матриц рассеяния  $S(\omega_\Lambda, g_\Lambda, \Lambda)$ , построенных по гамильтонианам

$$H(\omega_\Lambda, g_\Lambda, \Lambda) = H_0(\omega_\Lambda) + V(g_\Lambda, \Lambda)$$

(здесь  $\Lambda \rightarrow \infty$ , взаимодействие  $V(g, \Lambda)$  определено формулой (18.5), зависимость  $\omega_\Lambda$  и  $g_\Lambda$  от  $\Lambda$  произвольна).

Нетрудно видеть, что теорема о перенормируемости взаимодействия (18.4) эквивалентна следующему утверждению: среди матриц рассеяния семейства гамильтонианов  $H(\omega, g)$  существует зависящее от двух параметров семейство лоренц-инвариантных матриц рассеяния; матрицы рассеяния из этого дупараметрического семейства совпадают с определенными выше матрицами рассеяния, отвечающими семейству взаимодействий (18.4).

Семейство гамильтонианов  $H(\omega, g)$  в сформулированном определении можно заменить семейством

$$H'(\omega, g) = H_0(\omega) + gV',$$

где

$$V' = N \int \varphi^4(x) dx.$$

В самом деле, для любой  $\omega$  и любого  $\Lambda$  легко найти такую функцию  $\omega'$ , что

$$H_0(\omega) + V(g, \Lambda) = H_0(\omega') + V'(g, \Lambda) + \text{const}$$

(взаимодействие  $V'(g, \Lambda)$  определяется по взаимодействию  $gV'$  так же, как  $V(g, \Lambda)$  строится по  $gV$ ). Пользуясь этим соотношением, убеждаемся, что семейства  $S$ -матриц, построенные по семействам гамильтонианов  $H(\omega, g)$  и  $H'(\omega, g)$ , совпадают. То же рассуждение показывает совпадение матриц рассеяния частиц с физической массой  $m$ , построенных по взаимодействиям  $gV$  и  $gV'$ .

Во всех приведенных определениях  $S$ -матрицы способ обрезания по импульсам можно было фиксировать (например, положив  $v_\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\Lambda^9/\pi^{9/2}) \exp[-(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)\Lambda^2]$ ) или, наоборот, считать, что  $v_\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  — почти произвольная последовательность функций, сходящихся к  $\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)$ . Как увидим дальше, получающееся семейство  $S$ -матриц от этого не зависит.

Мы говорили пока только о построении лоренц-инвариантной  $S$ -матрицы. Другие физические величины следует определять с помощью того же предельного перехода. Пусть, например, последовательность  $g_\Lambda$  выбрана такой, что  $S$ -матрицы  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$ , построенные по взаимодействию  $V(g, \Lambda)$ , опре-

деляемому формулой (18.5), и энергии одетых частиц  $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  сходятся при  $\Lambda \rightarrow \infty$  к оператору  $S$ . Тогда нормированные функции Грина  $G'_n(\Lambda)$  и регуляризованные функции Грина  $G_n^{\text{reg}}(\Lambda)$ , построенные по  $V_\Lambda = V(g_\Lambda, \Lambda)$  и  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , стремятся при снятии обрезания к одному и тому же пределу:

$$G_n = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} G'_n(\Lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} G_n^{\text{reg}}(\Lambda).$$

функции  $G_n$  лоренц-инвариантны; они называются регуляризованными функциями Грина семейства взаимодействий  $g \int \varphi^4(x) dx$  (каждой  $S$ -матрице соответствуют свои регуляризованные функции Грина). Сформулированное утверждение переносится также на нормированные вершинные функции  $G'_n$  и регуляризованные вершинные функции  $G_n^{\text{reg}}$ . Заметим, однако, что обычные функции Грина  $G_n(\Lambda)$  не имеют конечного предела при снятии обрезания.

Доказательства всех перечисленных утверждений намечены в дальнейших параграфах.

## § 19. Расходящиеся диаграммы

Рассмотрим формальный гамильтониан

$$H = H_0 + V = \frac{1}{2} \int (\pi^2(x) + (\nabla\varphi(x))^2 + m^2\varphi^2(x)) dx + gN \left( \int \varphi^n(x) dx \right) \quad (19.1)$$

и попытаемся применить к вычислению функций Грина этого гамильтониана развитую выше диаграммную технику. Мы столкнемся при этом с расходимостями. Здесь мы лишь перечислим расходящиеся диаграммы; вопросом о построении конечной матрицы рассеяния по гамильтониану (19.1) займемся в следующем параграфе\*. Речь пойдет только о расходимостях при больших значениях импульсов (ультрафиолетовых расходимостях).

Сходимость будет всегда пониматься в смысле абсолютной сходимости (суммируемости по Лебегу); если в подын-

---

\* Если взаимодействие записано в виде  $V = \int g\varphi^n(x) dx$ , то к диаграммам, построенным по гамильтониану (19.1), добавляют диаграммы, содержащие ребра с вершинами, принадлежащими одной и той же звезде. Такие диаграммы, очевидно, расходятся.

тегральном выражении содержатся  $\delta$ -функции, то под сходимостью интеграла понимается абсолютная сходимость интеграла, который получается из данного при сокращении числа интегрирований с помощью  $\delta$ -функций.

В интересующем нас случае диаграммная техника строится следующим образом:  $i$ -й вершине вершинной диаграммы сопоставляется точка  $k_i = (\mathbf{k}_i, \omega_i) \in E^4$ , ребру — функция

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_F(k_\alpha) \delta(k_\alpha + k_\beta) &= G_2^{(0)}(k_\alpha, k_\beta) = \\ &= \frac{i \delta(k_\alpha + k_\beta)}{-m^2 + (k_\alpha, k_\alpha) + i0} = \frac{i \delta(k_\alpha + k_\beta) \delta(\omega_\alpha + \omega_\beta)}{-(m^2 + k_\alpha^2) + \omega_\alpha^2 + i0}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta$  — номера начала и конца рассматриваемого ребра, а звезде — функция  $n! \frac{g}{i} (2\pi)^{-2n+4} \delta(k_{i+1} + \dots + k_{i+n})$  где  $i+1, \dots, i+n$  — номера вершин этой звезды. Функция, соответствующая диаграмме, получается из произведения функций, соответствующих вершинам и ребрам, с помощью интегрирования по точкам, отвечающим внутренним вершинам (по внутренним импульсам); она зависит от точек, соответствующих внешним вершинам (от внешних импульсов).

Рассмотрим произвольную вершинную диаграмму  $\alpha$ . Введем обозначения:  $r$  — число ребер в диаграмме,  $s$  — число звезд,  $b$  — число внешних вершин. Число внутренних вершин, очевидно, равно  $2r$  (в вершинной диаграмме ребра не содержат внешних вершин и, стало быть, каждому ребру соответствуют две внутренние вершины). Отметим еще соотношение  $ns = b + 2r$  (у каждой звезды  $n$  вершин, каждая вершина в вершинной диаграмме принадлежит одной из звезд).

Интеграл  $I(\alpha)$ , соответствующий диаграмме  $\alpha$ , является  $8r$ -кратным ( $8r = 4 \cdot 2r$ ). Однако  $\delta$ -функции позволяют сократить число интегрирований до  $4(r - s + 1)$ . В самом деле, в подынтегральном выражении содержится  $r + s$  четырехмерных  $\delta$ -функций; после интегрирования остается только одна четырехмерная  $\delta$ -функция, выражающая закон сохранения энергии-импульса (мы воспользовались здесь тем, что вершинная диаграмма связна; в несвязной диаграмме после интегрирования остается столько четырехмерных  $\delta$ -функций, сколько компонент в диаграмме). Таким образом, с помощью  $\delta$ -функций можно снять  $4(r - s + 1)$  интегрирований; останется  $4(r - s + 1)$ -кратный интеграл. (Аккуратное доказательство содержится в дополнении Б.)

После использования  $\delta$ -функций интеграл, соответствующий вершинной диаграмме, приобретает вид

$$\int Q^{-1} d^4(r-s+1)k, \quad (19.2)$$

где  $Q$  — полином степени  $2r$  от переменных интегрирования ( $Q$  — произведение  $r$  квадратичных выражений)\*.

Перейдем к сферическим координатам в  $4(r-s+1)$ -мерном пространстве, т. е. зададим точку этого пространства с помощью числа  $p$  — ее расстояния от начала координат — и точки  $\sigma$  на единичной сфере, или, иными словами, с помощью радиального импульса  $p$  и  $4r-4s+3$  угловых координат  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{4r-4s+3})$ . Тогда интеграл (19.2) запишется в форме

$$\int \frac{p^{4(r-s)+3} dp d\sigma}{Q(p, \sigma)},$$

причем при больших  $p$  знаменатель ведет себя как  $p^{2r}$ . Следовательно, сходимость интеграла по  $p$  при больших  $p$  определяется числом  $\omega(\alpha) = 2r - 4s + 4$ , которое называется *индексом диаграммы*\*\* . Именно, когда  $\omega(\alpha) \geq 0$ , интеграл по  $p$  расходится, а в случае  $\omega(\alpha) < 0$  он сходится. Разумеется, сходимость интеграла по  $p$  еще не гарантирует сходимости интеграла (19.2) в целом; однако условие  $\omega(\alpha) < 0$  необходимо для сходимости интеграла (19.2)\*\*\*. (Это вытекает из теоремы Фубини, в силу которой из суммируемости  $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$  следует суммируемость этой функции как функции переменных  $\xi_1, \dots, \xi_k$  при почти всех  $\xi_{k+1}, \dots, \xi_m$ .)

Выберем какую-нибудь вершинную поддиаграмму  $\alpha'$  вершинной диаграммы  $\alpha$ . Легко видеть, что интеграл  $I(\alpha')$ , соответствующий диаграмме  $\alpha'$ , содержится в  $I(\alpha)$  (точнее, подынтегральное выражение  $I(\alpha')$  получается из подынтегрального выражения  $I(\alpha)$ , если фиксировать некоторые переменные и поделить его на функцию от фиксированных пере-

\* Если диаграмма не вершинная, то полином  $Q$  может иметь вид  $Q = Q_1 Q_2$ , где  $Q_1$  — полином от внешних импульсов, а  $Q_2$  — полином степени, меньшей, чем  $2r$ , от переменных интегрирования.

\*\* Индекс диаграммы равен, очевидно, числу независимых импульсов (числу переменных интегрирования в интеграле, соответствующем диаграмме) минус степень полинома  $Q$ .

\*\*\* Единственным исключением является тривиальный случай диаграммы, состоящей из одной звезды (не будем в дальнейшем рассматривать такую диаграмму).

менных). Отсюда следует, что сходимость интеграла  $I(\alpha)$  влечет за собой отрицательность индекса диаграммы  $\alpha'$  (строгое доказательство основано на теореме Фубини).

Таким образом, для сходимости вершинной диаграммы  $\alpha$  необходимо, чтобы

$$\max \omega(\alpha') < 0.$$

(максимум берется по всем вершинным поддиаграммам  $\alpha'$  диаграммы  $\alpha$ ). Этого условия уже достаточно для сходимости диаграммы  $\alpha$  при больших импульсах (доказательство достаточности см. в дополнении В). Итак, во всякой расходящейся диаграмме содержится диаграмма с неотрицательным индексом.

Поясним более аккуратно термин «сходимость диаграммы при больших импульсах». Расходимости рассматриваемых диаграмм могут возникать также из-за обращения в нуль функции  $Q$  (знаменателя подынтегрального выражения). Чтобы отделить эти расходимости от ультрафиолетовых, изменим определение функции, соответствующей диаграмме, считая, что ребру сопоставляется функция

$$G_\varepsilon(k_1, k_2) = \frac{i}{-(m^2 + k_1^2) + \omega_1^2(1 + i\varepsilon)^2} \delta(k_1 + k_2) \delta(\omega_1 + \omega_2),$$

где  $\varepsilon > 0$ . Расходимости, возникающие при вычислении модифицированной функции, происходят только из-за ее поведения при больших импульсах. Функцию, соответствующую диаграмме при обычном определении, можно получить из введенной только что функции с помощью предельного перехода  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; это вытекает из соотношения

$$\tilde{D}_F(k_1) \delta(k_1 + k_2) = G_2^{(0)}(k_1, k_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(k_1, k_2).$$

Расходимости, которые могут получиться при этом предельном переходе, появляются из-за нулей знаменателя и связаны с существующими всегда особенностями матрицы рассеяния.

До сих пор рассматривались только вершинные диаграммы, так как все остальные выражаются через вершинные диаграммы без привлечения операции интегрирования, и, следовательно, исследование их сходимости можно свести к исследованию сходимости вершинных диаграмм (см. § 8).

Отсюда получаем, что произвольная диаграмма расходится тогда и только тогда, когда в ней содержится вершинная диаграмма с неотрицательным индексом.

Итак, чтобы показать расходящиеся диаграммы, достаточно перечислить вершинные диаграммы с неотрицательным индексом. Займемся этой задачей. Пользуясь соотношением  $ns = b + 2r$ , запишем индекс диаграммы  $\alpha$  в виде

$$\omega(\alpha) = (n - 4)s - b + 4.$$

При  $n = 3$

$$\omega(\alpha) = -s - b + 4$$

и, стало быть,  $\omega(\alpha) \geq 0$  только при условии  $s + b \leq 4$ . Все вершинные диаграммы, удовлетворяющие этому условию, изображены на рис. 18; видно, что число их ограничено.

При  $n = 4$

$$\omega(\alpha) = -b + 4,$$

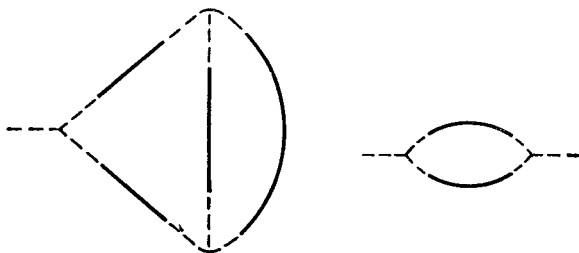


Рис. 18.

т. е. индекс диаграммы определяется лишь количеством внешних вершин. Неотрицательный индекс имеют диаграммы с двумя и четырьмя внешними вершинами (диаграмм с нечетным

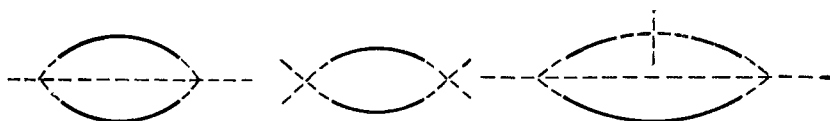


Рис. 19.

числом внешних вершин не существует). Это диаграммы из диаграммного представления массового оператора  $M$  и вершинной функции  $\Gamma_4$ . Таких диаграмм бесконечное число; простейшие из них изображены на рис. 19.

Наконец, при  $n \geq 5$  существуют диаграммы неотрицательного индекса со сколь угодно большим числом внешних вершин.

Остановимся коротко на одномерных и двумерных моделях. До этого рассматривались теории, где символы  $\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$ , через которые выражается гамильтониан, зависели от точки трехмерного пространства ( $x \in E^3$ ). Считая, что  $x \in E^v$ ,  $v = 1, 2$ , получаем гамильтониан одномерной или двумерной модели квантовой теории поля. На такие гамильтонианы легко переносится все сказанное выше с небольшим

модификациями. В частности, индексом диаграммы для  $\nu$ -мерной модели будем называть число

$$\omega(\alpha) = (1 + \nu)(r - s + 1) = (\nu - 1) \frac{ns - b}{2} - (1 + \nu)s + 1 + \nu.$$

Для одномерной модели

$$\omega(\alpha) = 2(1 - s),$$

откуда следует, что неотрицательный индекс имеет только исключенная нами из рассмотрения вершинная диаграмма, состоящая из единственной звезды.

Таким образом, в этом случае расходящихся нет вовсе. В работах [23, 24] показано, что при  $n = 2m$  и достаточно малых положительных  $g$  одномерные модели с гамильтонианами (19.1) приводят к конечным результатам не только в рамках теории возмущений. Точнее, в этих работах построена операторная реализация таких гамильтонианов и доказано существование лоренц-инвариантной матрицы рассеяния. Для двумерной модели

$$\omega(\alpha) = \frac{ns - b}{2} - 3s + 3 = \left(-3 + \frac{n}{2}\right)s - \frac{b}{2} + 3 = \frac{n-6}{2}s - \frac{b}{2} + 3.$$

Отсюда видно, что при  $n < 6$  число диаграмм с неотрицательным индексом конечно, при  $n = 6$  неотрицательный индекс имеют диаграммы с двумя, четырьмя и шестью внешними вершинами, наконец, при  $n > 6$  есть диаграммы с неотрицательным индексом со сколь угодно большим количеством внешних вершин.

Взаимодействия, для которых существуют диаграммы неотрицательного индекса со сколь угодно большим количеством внешних вершин, называют *взаимодействиями второго рода*; в противном случае они называются *взаимодействиями первого рода*. Оказывается, *взаимодействию первого рода можно сопоставить конечнопараметрическое семейство лоренц-инвариантных матриц рассеяния* (иными словами, взаимодействие первого рода перенормируемо). Четкое доказательство этого утверждения дано Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком [25] (см. также [26—29]). Для взаимодействия второго рода конструкцию конечнопараметрического семейства матриц рассеяния указать не удается.

Проведем более подробное исследование расходящихся диаграмм. Назовем диаграмму *примитивно расходящейся*, если она сама расходится, а все ее поддиаграммы сходятся. Очевидно, что в каждой расходящейся диаграмме содержится примитивно расходящаяся.

Важную роль играет следующее утверждение: *если подынтегральное выражение примитивно расходящейся диаграммы с индексом  $\omega(\alpha)$  продифференцировать по внешним импуль-*



сам  $\omega(\alpha) + 1$  раз, то интеграл по внутренним импульсам станет сходящимся. Строгое доказательство этого намечено в дополнении В; сейчас ограничимся, как и при установлении условия расходимости диаграммы, формальным подсчетом степеней в числителе и знаменателе подинтегрального выражения. Напомним, что после использования  $\delta$ -функций подинтегральное выражение приобретает вид  $\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} \dots \frac{1}{Q_r}$ , где  $Q_i = m^2 - l_i^2$ , а  $l_i$  — линейная комбинация внешних и независимых внутренних импульсов. При больших радиальных импульсах  $D^\lambda \frac{1}{Q_i}$  ведет себя как  $p^{-(|\lambda|+2)}$  (здесь  $D^\lambda$  обозначен дифференциальный оператор порядка  $|\lambda|$  по внешним импульсам). Отсюда ясно, что  $D^\lambda(1/Q)$  ведет себя как  $p^{-(2r+|\lambda|)}$ , т. е. дифференцирование улучшает сходимость по радиальному импульсу. Дифференцируя  $\omega(\alpha) + 1$  раз, превращаем интеграл по радиальному импульсу  $p$  в сходящийся; как было указано выше, подробный анализ позволяет утверждать, что интеграл по угловым переменным в рассматриваемом случае также не приводит к расходимостям.

Введем обрезание больших импульсов, например, рассматривая вместо взаимодействия  $gN \int \varphi^4(x) dx$  взаимодействие

$$\begin{aligned} V(g, \Lambda) &= gV_\Lambda = \\ &= gN \left( \int v_\Lambda(x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4) \varphi(x_1) \dots \varphi(x_4) d^4x \right) = \\ &= gN \left( \int \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_1) \dots \tilde{\varphi}(\mathbf{k}_4) d^4\mathbf{k} \right), \end{aligned} \quad (19.3)$$

где

$$\begin{aligned} v_\Lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \Lambda^{9f}(\Lambda\xi_1, \Lambda\xi_2, \Lambda\xi_3); \\ \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= \Lambda^{-9\tilde{f}}\left(\frac{\mathbf{k}_1}{\Lambda}, \frac{\mathbf{k}_2}{\Lambda}, \frac{\mathbf{k}_3}{\Lambda}\right). \end{aligned}$$

Функция  $\tilde{f}$  непрерывна в начале координат и равна там единице, достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности и ограничена.

Функцию, построенную по диаграмме  $\alpha$  и взаимодействию  $V(g, \Lambda)$ , обозначим  $I_\alpha(k_1, \dots, k_{b-1} | g, \Lambda)^*$ . Если диаграмма

---

\* Точнее,  $I_\alpha$  получается из функции, сопоставленной диаграмме  $\alpha$ , выделением множителя  $\delta(k_1 + \dots + k_b)$ .

$\alpha$  сходится, то  $I_\alpha$  имеет конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , который равен функции  $I_\alpha(k_1, \dots, k_{b-1}|g)$ , построенной по диаграмме  $\alpha$  и взаимодействию  $V$  (это следует из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла). Если  $\alpha$  — расходящаяся диаграмма, то у функции  $I_\alpha$  нет конечного предела при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Нетрудно проверить, что при  $\omega(\alpha) = 0, 1, 2$  и т. д. функция  $I_\alpha$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$  ведет себя соответственно как  $C \ln \Lambda, C\Lambda, C\Lambda^2$  и т. д. В связи с этим диаграммы с  $\omega(\alpha) = 0$  называют логарифмически расходящимися, диаграммы с  $\omega(\alpha) = 1$  — линейно расходящимися, с  $\omega(\alpha) = 2$  — квадратично расходящимися.

Из утверждения о дифференцировании примитивно расходящейся диаграммы  $\alpha$  сразу получаем следующее: при  $\Lambda \rightarrow \infty$  существует конечный предел выражения  $D^\gamma I_\alpha(k_1, \dots, k_{b-1}|g, \Lambda)$ , где  $\alpha$  — примитивно расходящаяся диаграмма,  $D^\gamma$  — дифференциальный оператор порядка  $|\gamma| = \omega(\alpha) + 1$ . Отсюда вытекает другое полезное утверждение: если  $\alpha$  — примитивно расходящаяся диаграмма, то функция  $\mathcal{M}_{q_1, \dots, q_{b-1}}^{\omega(\alpha)} I_\alpha(k_1, \dots, k_{b-1}|g, \Lambda)$  имеет конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Здесь  $\mathcal{M}_{\eta_1, \dots, \eta_b}^\rho \psi(\xi_1, \dots, \xi_b)$  — функция, получающаяся из функции  $\psi$  вычитанием членов разложения ее в ряд Тейлора в точке  $\eta_1, \dots, \eta_b$ , имеющих степень не большую, чем  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\eta_1, \dots, \eta_b}^\rho \psi(\xi_1, \dots, \xi_b) &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_b) - \\ &\sum_{0 < |\gamma| < \rho} \frac{\partial^{|\gamma|} \psi(\xi_1, \dots, \xi_b)}{\partial \xi_1^{\gamma_1} \dots \partial \xi_b^{\gamma_b}} \Big|_{\xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_b = \eta_b} \times \\ &\times \frac{(\xi_1 - \eta_1)^{\gamma_1}}{\gamma_1!} \dots \frac{(\xi_b - \eta_b)^{\gamma_b}}{\gamma_b!}. \end{aligned}$$

При выводе используется то, что функцию  $\mathcal{M}_{\eta_1, \dots, \eta_b}^\rho \times \psi(\xi_1, \dots, \xi_b)$  легко выразить через производные порядка  $\rho + 1$  от функции  $\psi$ . Например, для одной переменной

$$\mathcal{M}_\eta^\rho \psi(\xi) = \int_\eta^\xi d\xi_1 \int_\eta^{\xi_1} d\xi_2 \dots \int_\eta^{\xi_{\rho-1}} d\xi_\rho \frac{\partial^{\rho+1} \psi(\xi_\rho)}{\partial \xi_\rho^{\rho+1}}; \quad (19.4)$$

общий случай с помощью замены  $\xi_i = \eta_i + \mu a_i$  сводится к случаю одной переменной. В частности, при  $\rho = 0$

$$\begin{aligned} M_{\eta_1, \dots, \eta_b}^0 \psi(\xi_1, \dots, \xi_b) &= \psi(\xi_1, \dots, \xi_b) - \psi(\eta_1, \dots, \eta_b) = \\ &= \int_0^1 d\mu \frac{\partial \psi(\eta_1 + \mu(\xi_1 - \eta_1), \dots, \eta_b + \mu(\xi_b - \eta_b))}{\partial \mu} = \\ &= \sum_{i=1}^b \int_{\eta_i}^{\xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i'} \psi(\eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \xi_i', \xi_{i+1}, \dots, \xi_b) d\xi_i'. \end{aligned}$$

Из сделанных утверждений вытекает, что функцию  $I_\alpha(k_1, \dots, k_{b-1} | g, \Lambda)$  при больших  $\Lambda$  можно представить как сумму полинома степени  $\omega(\alpha)$  от внешних импульсов с коэффициентами, зависящими от  $\Lambda$ , и функции, имеющей конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

Применим полученные результаты к диаграммам, изображенным на рис. 2, а, б. Диаграмма рис. 2, б — примитивно расходящаяся диаграмма с индексом 0, поэтому для построенной по ней функции

$$\begin{aligned} I_b(k_1, k_2, k_3 | g, \Lambda) &= \frac{1}{2} \frac{(4!)^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{g}{i}\right)^2 \times \\ &\times \int \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{q}) \tilde{D}_F(q) \tilde{D}_F(-q - k_1 - k_2) \times \\ &\times \tilde{v}_\Lambda(-\mathbf{q}, \mathbf{q} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) dq \end{aligned}$$

существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (I_b(k_1, k_2, k_3 | g, \Lambda) - I_b(k_1^0, k_2^0, k_3^0 | g, \Lambda)) &= \\ &= \frac{(4!)^2}{(2\pi)^8} g^2 \rho(k_1, k_2, k_3), \end{aligned} \quad (19.5)$$

где

$$\begin{aligned} \rho(k_1, k_2, k_3) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \tilde{D}_F(q) (\tilde{D}_F(-q - k_1 - k_2) - \\ &- \tilde{D}_F(-q - k_1^0 - k_2^0)) dq. \end{aligned} \quad (19.6)$$

Диаграмма рис. 4 представляет собой примитивно расходящуюся диаграмму с индексом 2. Ей соответствует функция

$$I_a(k|g, \Lambda) = \frac{i}{6} \frac{(4!)^2}{(2\pi)^2} \left(\frac{g}{i}\right)^2 \int \tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \tilde{D}_F(q_1) \tilde{D}_F(q_2) \times \\ \times \tilde{D}_F(-k - q_1 - q_2) \tilde{v}_\Lambda(-\mathbf{q}_1, -\mathbf{q}_2, \mathbf{k} + \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) dq_1 dq_2.$$

Легко видеть, что функция  $I_a(k|g, \Lambda) = I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda)$  является четной функцией  $\omega$ , поэтому ее можно рассматривать как функцию  $\omega^2$ . Из проведенных рассуждений получаем при  $\Lambda \rightarrow \infty$  существование конечного предела выражений

$$\frac{\partial^r}{\partial \omega^r} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda); \quad \frac{\partial^r}{\partial (\omega^2)^r} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda),$$

если  $r \geq 3$ . Однако, используя четность функции  $I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda)$  по  $\omega$ , нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial^2}{\partial (\omega^2)^2} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda)$$

тоже стремится к конечному пределу при  $\Lambda \rightarrow \infty$ . При  $\omega^2 = 0$  это вытекает из соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial (\omega^2)^2} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) \Big|_{\omega^2=0} = \frac{1}{12} \frac{\partial^4}{\partial \omega^4} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) \Big|_{\omega=0}$$

(второй член разложения Тейлора по  $\omega^2$  совпадает с четвертым членом разложения по  $\omega$ ), а в общем случае следует из формулы

$$\frac{\partial^2}{\partial (\omega^2)^2} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) = \\ = \frac{\partial^2}{\partial (\omega^2)^2} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) \Big|_{\omega=0} + \int_0^{\omega^2} \frac{\partial^3}{\partial (\sigma^2)^3} I_a(\mathbf{k}, \sigma|g, \Lambda) d(\sigma^2).$$

С помощью (19.4) отсюда можно вывести, что выражение

$$I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) - I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) \Big|_{\substack{\omega = \sqrt{k^2 + m^2} \\ \mathbf{k} = 0}} - \\ - \frac{\partial}{\partial \omega^2} I_a(\mathbf{k}, \omega|g, \Lambda) \Big|_{\substack{\omega = \sqrt{k^2 + m^2} \\ \mathbf{k} = 0}} (\omega^2 - k^2 - m^2) = \\ = I_a(k|g, \Lambda) - I_a(k|g, \Lambda) \Big|_{\substack{k^2 = m^2 \\ \mathbf{k} = 0}} - \\ - \frac{\partial}{\partial k^2} I_a(k|g, \Lambda) \Big|_{\substack{k^2 = m^2 \\ \mathbf{k} = 0}} (k^2 - m^2) \quad (19.7)$$

также имеет конечный предел при  $\Lambda \rightarrow \infty$  (дифференцирование по  $k^2$ , как и по  $\omega^2$ , производится при фиксированном  $\mathbf{k}$ ). Этот предел равен, очевидно,  $\frac{(4!)^2}{(2\pi)^8} g^2 \sigma(k)$ , где

$$\sigma(k) = \frac{i}{6} \left(\frac{1}{i}\right)^2 \int \tilde{D}_F(q_1) \tilde{D}_F(q_2) (\tilde{D}_F(-k-q_1-q_2) - \tilde{D}_F(-k-q_1-q_2) \Big|_{\substack{k^2=m^2 \\ k=0}} - \frac{\partial}{\partial k^2} \tilde{D}_F(-k-q_1-q_2) \Big|_{\substack{k^2=m^2 \\ k=0}} (k^2 - m^2)) dq_1 dq_2. \quad (19.8)$$

Из явного вида предельных выражений для обеих диаграмм ясно, что в локальном пределе получаются лоренц-инвариантные функции.

## § 20. Взаимодействие $g\varphi^4$

Рассмотрим взаимодействие  $V(g, \Lambda)$ , определяемое формулой (19.3). Построим нормированные функции Грина  $\tilde{G}'_n$  и нормированные вершинные функции  $\tilde{\Gamma}'_n$  по взаимодействию  $V(g, \Lambda)$  и энергии одетых частиц  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . [Здесь  $\tilde{v}_\Lambda(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \Lambda^{-9} \tilde{f}\left(\frac{\mathbf{k}_1}{\Lambda}, \frac{\mathbf{k}_2}{\Lambda}, \frac{\mathbf{k}_3}{\Lambda}\right)$ , функция  $\tilde{f}$  непрерывна в начале координат и равна там единице, достаточно быстро стремится к нулю на бесконечности и ограничена; например, можно считать, что  $\tilde{f} \in \mathcal{S}$ .]

В § 10 было показано, как выразить функции  $\tilde{G}'_n$  и  $\tilde{\Gamma}'_n$  через энергию одетых частиц  $\omega(\mathbf{k})$ , функцию  $\tilde{v}_\Lambda$  и перенормированную константу связи  $\lambda$  [мы фиксировали точку  $(\mathbf{k}_1^0, \mathbf{k}_2^0, \mathbf{k}_3^0)$  и определяли перенормированную константу связи соотношением (10.3)].

Снимем обрезание по импульсам, т. е. устремим  $\Lambda$  к бесконечности, меняя при этом константу связи  $g$  так, чтобы  $\lambda$  оставалась постоянной. Иными словами, считаем, что зависимость  $g$  от  $\Lambda$  определяется формулой

$$\lambda = i\Gamma(\mathbf{k}_1^0, \mathbf{k}_2^0, \mathbf{k}_3^0 | g_\Lambda, \Lambda). \quad (20.1)$$

Тогда в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  каждый член построенного в § 10 диаграммного представления функций  $\tilde{G}'_n$ ,  $\tilde{\Gamma}'_n$  имеет конечный предел (об обосновании этого утверждения речь пойдет несколько ниже).

В результате предельного перехода  $\Lambda \rightarrow \infty$  получаем диаграммное представление функций:

$$\tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n | g_\Lambda, \Lambda);$$

$$\tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{\Gamma}'_n(k_1, \dots, k_n | g_\Lambda, \Lambda).$$

Эти функции зависят от двух параметров  $m$  и  $\lambda$  (физической массы и перенормированной константы связи).

Легко видеть, что  $\tilde{G}_n(k_1, \dots, k_n)$  и  $\tilde{\Gamma}_n(k_1, \dots, k_n)$  лоренц-инвариантны (каждый член их диаграммного представления лоренц-инвариантен). Из лоренц-инвариантности этих функций следует, в частности, что  $\tilde{G}_n$  и  $\tilde{\Gamma}_n$  можно представить так же, как пределы регуляризованных функций Грина  $\tilde{G}_n^{\text{reg}}$  и  $\tilde{\Gamma}_n^{\text{reg}}$ , построенных по  $V(g, \Lambda)$  и  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . (Определение функций  $\tilde{G}_n^{\text{reg}}$  и  $\tilde{\Gamma}_n^{\text{reg}}$  и выражение матрицы рассеяния через эти функции см. в § 16.)

В самом деле, рассмотрим функцию  $G(k | g, \Lambda)$ , связанную с  $\tilde{G}_2(k_1, k_2 | g, \Lambda)$  соотношением

$$\tilde{G}_2(k_1, k_2 | g, \Lambda) = G(k_1 | g, \Lambda) \delta(k_1 + k_2).$$

Эта функция, как мы знаем, может быть представлена в виде

$$G(k | g, \Lambda) = \frac{i Z(\mathbf{k} | g, \Lambda)}{k^2 - m^2 + i0} + R(k | g, \Lambda),$$

где  $R(k | g, \Lambda)$  — функция, не имеющая особенностей при  $k^2 = m^2$  [см. (7.13)].

Нормированная функция Грина  $\tilde{G}'_2(k_1, k_2 | g, \Lambda)$  выражается через функцию  $G'(k | g, \Lambda) = Z^{-1}(0 | g, \Lambda) G(k | g, \Lambda)$ :

$$\tilde{G}'_2(k_1, k_2 | g, \Lambda) = G'(k_1 | g, \Lambda) \delta(k_1 + k_2).$$

Чтобы функция  $G'$  в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  была лоренц-инвариантной, необходима лоренц-инвариантность ее сингулярной части. Иными словами, в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  множитель  $\frac{Z(\mathbf{k} | g_\Lambda, \Lambda)}{Z(0 | g_\Lambda, \Lambda)}$  не должен зависеть от  $\mathbf{k}$ ; поскольку при  $\mathbf{k} = 0$  он равен единице, то

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{Z(\mathbf{k} | g_\Lambda, \Lambda)}{Z(0 | g_\Lambda, \Lambda)} = 1. \quad (20.2)$$

Определение функций  $\tilde{G}_n^{\text{reg}}$ ,  $\tilde{\Gamma}_n^{\text{reg}}$  отличается от определения функции  $\tilde{G}'_n$  и  $\tilde{\Gamma}'_n$  заменой множителей  $Z = Z(0)$  на множители  $Z(\mathbf{k})$ . Соотношение (20.2) показывает, таким образом, что в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$  различие между регуляризованными и нормированными функциями Грина, регуляризованными и нормированными вершинными функциями исчезает.

Вспомнив указанную в § 16 связь между регуляризованными функциями Грина и матричными элементами матрицы рассеяния, получаем следующее утверждение: матрицы рассеяния  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$  имеют конечный лоренц-инвариантный предел  $S(m, \lambda)$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , если  $g_\Lambda$  зависит от  $\Lambda$  так, что перенормированная константа  $\lambda$  остается постоянной. [Здесь  $S(m, g, \Lambda)$  — матрица рассеяния, построенная по  $\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{k^2 + m^2}$  и  $V(g, \Lambda)$ ; предел операторов  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$  понимается в смысле слабого предела; точнее говоря, при  $\Lambda \rightarrow \infty$  все члены разложений по  $\lambda$  матричных элементов оператора  $S(m, g_\Lambda, \Lambda)$  стремятся к соответствующим членам разложений по  $\lambda$  матричных элементов оператора  $S(m, \lambda)$ .]

Итак, мы получили *двупараметрическое семейство*  $S(m, \lambda)$  лоренц-инвариантных матриц рассеяния; их естественно считать матрицами рассеяния, соответствующими локальному взаимодействию  $g\varphi^4$ .

Чтобы доказать сделанные в данном параграфе утверждения, необходимо прежде всего проверить, что, переходя к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty$  в каждом члене указанного в § 10 диаграммного представления функций  $\tilde{G}'_n(k_1, \dots, k_n | g_\Lambda, \Lambda)$  и  $\tilde{\Gamma}'_n(k_1, \dots, k_n | g_\Lambda, \Lambda)$ , мы получим конечный предел. Не будем приводить полное доказательство этого утверждения, представляющего частный случай теоремы Боголюбова — Парасюка о перенормируемости теорий, содержащих конечное число типов расходящихся диаграмм (в нашей ситуации не удастся существенно упростить рассуждения, применяемые в доказательстве теоремы Боголюбова — Парасюка). Ограничимся только проверкой интересующего нас утверждения в низших порядках теории возмущений для нормированного массового оператора  $\tilde{M}'$  и функции  $\tilde{\Gamma}'_4$  (все остальные функции  $\tilde{G}'_n$  и  $\tilde{\Gamma}'_n$  можно представить с помощью скелетных диаграмм через  $\tilde{M}'(k)$  и  $\tilde{\Gamma}'_4(k_1, \dots, k_4)$ , поэтому, изучив предельный переход  $\Lambda \rightarrow \infty$  для  $\tilde{M}'$  и  $\tilde{\Gamma}'_4$  и зная, как себя ведут функции  $\tilde{M}'$  и  $\tilde{\Gamma}'_4$  при больших значениях аргументов, нетрудно доказать конечность предела и для остальных функций).

В § 10 были выписаны выражения для функций  $\tilde{M}'$  и  $\tilde{\Gamma}'_4$  через энергию одетых частиц и перенормированную константу связи  $\lambda$  до членов второго порядка по  $\lambda$  [см. (10.17), (10.20)].

Чтобы установить, что эти выражения при  $\Lambda \rightarrow \infty$  имеют конечный предел, следует использовать установленную в § 19 конечность предела для (19.5) и (19.7). Формулы (19.6), (19.8), дающие пределы выражений (19.5), (19.7) при  $\Lambda \rightarrow \infty$ , позволяют выписать локальные пределы величин  $\tilde{M}'$  и  $\tilde{\Gamma}'_4$ ; до второго порядка по  $\lambda$  они равны соответственно  $\lambda^2 \sigma(k)$  и  $\left(\frac{1}{i} \lambda + \lambda^2 \rho(k_1, k_2, k_3)\right) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$ , где  $\rho(k_1, k_2, k_3)$  и  $\sigma(k)$  определяются соотношениями (19.6) и (19.8). Как уже говорилось в § 19, из явных выражений для функций  $\rho$  и  $\sigma$  вытекает их лоренц-инвариантность.

В более высоких порядках теории возмущений доказательство остается по существу тем же для примитивно расходящихся диаграмм; немногим сложнее случай диаграмм без перекрывающихся расходимостей (не будем давать точное определение этого класса диаграмм). Однако полный анализ диаграмм с перекрывающимися расходимостями достаточно громоздок.

Описанные конструкции пригодны и в других случаях, в частности для гамильтониана вида

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int (\pi_i^2(x) + (\nabla \varphi_i(x))^2 + \mu_i^2 \varphi_i^2(x)) dx + \int P(\varphi_1(x), \dots, \dots, \varphi_n(x)) dx, \quad (20.3)$$

где  $[\pi_i(x), \pi_j(x')] = [\varphi_i(x), \varphi_j(x')] = 0$ ;

$$[\pi_i(x), \varphi_j(x')] = (1/i) \delta(x - x') \delta_i^j.$$

Повторяя намеченные выше рассуждения можно убедиться, что взаимодействие (20.3) перенормируемо, если  $P$  — полином степеней, не превышающей четырех.



## ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРМИОНОВ И БОЗОНОВ

### § 21. Классические лоренц-инвариантные уравнения

В гл. 6 рассматривались некоторые гамильтонианы квантовой теории поля, приводящие к лоренц-инвариантной матрице рассеяния. При конструировании этих гамильтонианов было использовано квантование классических механических систем с бесконечным числом степеней свободы, описываемых лоренц-инвариантными уравнениями. Мы ограничивались при этом системами с функциями Гамильтона вида (1.8).

Укажем конструкции некоторых других лоренц-инвариантных классических механических систем. В частности, опишем классическую механическую систему, квантование которой приводит к построению квантовой электродинамики.

Поставим перед собой прежде всего задачу написать релятивистский аналог уравнения Шредингера для одной свободной частицы (1.23). Плоские волны  $e^{i(-Et + \mathbf{p}\mathbf{x})}$  являются решениями уравнения (1.23), если энергия  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$  связаны нерелятивистским соотношением  $E = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2$ .

У релятивистского аналога уравнения (1.23) также должны быть решения в виде плоских волн, но энергия и импульс здесь связаны уже релятивистским соотношением  $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Этому условию удовлетворяет уравнение Клейна—Гордона (1.24). Его можно записать в форме

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (21.1)$$

где

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \sum_{\mu, \nu} h^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu};$$

$$x^0 = t, \quad h^{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu, \quad h^{00} = 1, \quad h^{11} = h^{22} = h^{33} = -1.$$

Рассмотрению уравнения (21.1) как релятивистского аналога уравнения (1.23) мешает то, что оно содержит вторую

производную по времени, тогда как уравнение Шредингера содержит первую производную по времени. Это затруднение, однако, легко преодолимо: достаточно ввести функции

$$\psi_0(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \psi_i(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \psi_4 = \varphi.$$

и выразить уравнение Клейна — Гордона в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_0}{\partial x^0} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi_i}{\partial x^i} - m^2 \psi_4; \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial x^0} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3; \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial x^0} &= \psi_0. \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

Обозначим  $\psi(x)$  столбец из пяти функций  $\psi_\alpha$ , тогда система (21.2) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} \psi + \nu \psi, \quad (21.3)$$

где  $\lambda^i, \nu$  — матрицы:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (21.3) называют уравнением Кеммера — Даффина. Оно, очевидно, лоренц-инвариантно в следующем смысле: если функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению (21.3), то  $V_g \times \psi(g^{-1}x)$  также удовлетворяет этому уравнению; под  $g$  по-

нимается произвольное преобразование Лоренца,  $V_g$  — матрица:

$$V_g = \begin{pmatrix} (g^{-1})^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако уравнение (21.3) не может описывать частицы с полуцелым спином (уже потому, что полуцелый спин связан с двузначными представлениями группы вращений). Между тем наиболее важные элементарные частицы — фермионы со спином  $1/2$ , и мы должны отыскать уравнение, описывающее их движение. Предположим, что это уравнение можно записать в виде

$$i \gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} + i \gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + i \gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + i \gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial x^3} - m \psi = 0, \quad (21.4)$$

где  $\psi(x)$  — функция, значениями которой являются столбцы из  $n$  комплексных чисел,  $\gamma^v$  — матрицы  $n$ -го порядка,  $m$  — число, не равное нулю. Следует потребовать также от уравнения (21.4) лоренц-инвариантности, т. е. для всякого преобразования Лоренца  $g$  должна существовать невырожденная матрица  $U_g$ , для которой функция  $\psi'(x) = U_g \psi(g^{-1}x)$  удовлетворяет уравнению (21.4), если этому уравнению удовлетворяет  $\psi(x)$ . Конечно, матрица  $U_g$  определяется наложенным нами условием неоднозначно. Удастся показать, что матрицы  $U_g$  для каждого лоренц-инвариантного уравнения можно выбрать так, чтобы они задавали либо однозначное, либо двузначное представление группы Лоренца.

Лоренц-инвариантные уравнения вида (21.6) полностью перечислены (см., например, [30, 31]). Среди нераспадающихся лоренц-инвариантных уравнений интересующего нас вида имеется единственное, описывающее только частицы со спином  $1/2$ , т. е. такое уравнение, что все собственные значения оператора проекции спина на ось  $z$  равны  $\pm 1/2$  [оператор  $s_z$  проекции спина на ось  $z$  определяется формулой  $s_z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (V_{g_\varepsilon} - 1)$ , где  $V_{g_\varepsilon}$  — матрица  $V_g$ , соответствующая повороту  $\tilde{g}_\varepsilon$  вокруг оси  $z$  на угол  $\varepsilon$ ]. Это уравнение называется уравнением Дирака. Не будем здесь перечислять линейные лоренц-инвариантные уравнения; остановимся только на уравнении Дирака. Оно имеет вид

$$i \sum_{v=0}^3 \gamma^v \frac{\partial}{\partial x^v} \psi(x) - m \psi(x) = 0 \quad (21.5)$$

где значениями функции  $\psi(x)$  являются столбцы из четырех комплексных чисел,  $m$  — положительное число,  $\gamma^\nu$  — четырехмерные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2h^{\mu\nu}. \quad (21.6)$$

Матрицы  $\gamma^\nu$  можно выбрать разными способами. Существенно заметить, однако, что две системы матриц  $\gamma^\nu$  и  $\gamma'^\nu$ , удовлетворяющих (21.6), подобны, т. е. существует такая невырожденная матрица  $D$ , для которой  $\gamma'^\nu = D\gamma^\nu D^{-1}$ ; она определяется этим соотношением с точностью до численного множителя (доказательство приводится, например, в книге [32]). При замене  $\psi' = D\psi$  уравнение

$$i \sum_{\nu=0}^3 \gamma'^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \psi'(x) - m\psi'(x) = 0$$

переходит в (21.5), иными словами, уравнения Дирака, получающиеся при разных выборах матриц  $\gamma^\nu$ , эквивалентны друг другу.

В качестве матриц  $\gamma^\nu$  можно взять, в частности, матрицы

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3; \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (21.7)$$

где 0 и 1 — нулевая и единичная двумерные матрицы,  $\sigma_i$  — матрицы Паули, определяемые формулами:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор  $\hat{\partial} = \sum_{\nu=0}^3 \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  называют оператором Дирака. Уравнение Дирака, очевидно, записывается в виде

$$(i\hat{\partial} - m)\psi = 0. \quad (21.8)$$

Каждая компонента решения уравнения Дирака удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. В самом деле,

$$\begin{aligned} \hat{\partial}^2 &= \left( \sum_{\nu=0}^3 \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^2 = \sum_{\mu, \nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \\ &= \sum_{\mu, \nu} \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \\ &= \sum h^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \square. \end{aligned}$$

Применяя к обеим частям (21.8) оператор  $i\hat{\partial} + m$ , убеждаемся, что следствием уравнения (21.10) является уравнение

$$(i\hat{\partial} + m)(i\hat{\partial} - m)\psi = (-\square - m^2)\psi = 0,$$

т. е. уравнение Клейна — Гордона. Сам Дирак пришел к своему уравнению и к условиям (21.6) на матрицы  $\gamma^\nu$ , отыскивая такое уравнение вида (21.5), следствием которого было бы уравнение Клейна — Гордона.

Убедимся в лоренц-инвариантности уравнения Дирака. Заметим, что при замене неизвестной функции  $\psi(x)$  по формуле  $\tilde{\psi}(x) = \psi(g^{-1}x)$ , где  $g$  — преобразование Лоренца, (21.5) переходит в уравнение

$$i \sum_{\mu=0}^3 \gamma'^{\mu} \frac{\partial \tilde{\psi}(x)}{\partial x^{\mu}} - m \tilde{\psi}(x) = 0,$$

где  $\gamma'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 g_{\nu}^{\mu} \gamma^{\nu}$ . Матрицы  $\gamma'^{\mu}$  удовлетворяют соотношениям (21.6):

$$\begin{aligned} \gamma'^{\mu} \gamma'^{\nu} + \gamma'^{\nu} \gamma'^{\mu} &= \sum_{\rho, \sigma} g_{\rho}^{\mu} \gamma^{\rho} g_{\sigma}^{\nu} \gamma^{\sigma} + \sum_{\rho, \sigma} g_{\sigma}^{\nu} \gamma^{\sigma} g_{\rho}^{\mu} \gamma^{\rho} = \\ &= \sum_{\rho, \sigma} 2h^{\rho\sigma} g_{\rho}^{\mu} g_{\sigma}^{\nu} = 2h^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Следовательно, как было указано выше, существует матрица  $D_g$ , удовлетворяющая условию  $D_g^{-1} \gamma'^{\mu} D_g = \gamma^{\mu}$ . Отсюда без труда убеждаемся, что функция  $\psi'(x) = D_g \tilde{\psi}(x) = D_g \psi(g^{-1}x)$  удовлетворяет (21.5); тем самым доказана лоренц-инвариантность уравнения Дирака.

Уравнение Дирака удобно записывать в виде

$$\left( \sum_{\rho=0}^3 \gamma^{\rho} \hat{p}_{\rho} - m \right) \psi = 0, \quad (21.9)$$

где

$$\hat{p}_{\rho} = i \frac{\partial}{\partial x^{\rho}}; \quad \rho = 0, 1, 2, 3.$$

Четыре оператора ( $\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ ) назовем оператором энергии-импульса. Он ведет себя при преобразованиях Лоренца как четырехмерный вектор. Компонента  $\hat{p}_0$  имеет физический смысл оператора энергий, а  $\hat{p}_i$  при  $i=1, 2, 3$  с точностью

до знака совпадают с компонентами оператора импульса  $p$ , т. е.  $\hat{p} = (p^1, p^2, p^3) = (-p_1, -p_2, -p_3)$ .

Перепишем уравнение Дирака в форме уравнения Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (21.10)$$

с оператором Гамильтона

$$H = \sum_{j=1}^3 \alpha^j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \beta m = \frac{1}{i} \alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \beta m,$$

где

$$\alpha^j = \gamma^0 \gamma^j \quad (j = 1, 2, 3); \quad \beta = \gamma^0.$$

Считаем, что матрицы  $\alpha^j$  и  $\beta$  эрмитовы; этого можно добиться, например, выбрав  $\gamma^\mu$  в виде (21.7). Нетрудно проверить самосопряженность оператора  $H$  относительно скалярного произведения:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{\sigma=0}^4 \int \psi_{\sigma}^* (\mathbf{x}) \varphi_{\sigma} (\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \psi^+ (\mathbf{x}) \varphi (\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(значениями функций  $\varphi$  и  $\psi$  являются столбцы;  $\psi^+(\mathbf{x})$  — строка из функций  $\psi_{\sigma}^*(\mathbf{x})$ ).

Обобщенный собственный вектор гамильтониана  $H$  ищем в виде плоской волны  $u(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ . Легко показать, что такая плоская волна — собственная функция оператора  $H$ , если столбец  $u(\mathbf{p})$  — собственный вектор четырехмерной матрицы

$\sum_{j=1}^3 \alpha^j p_j + \beta m$ . При выборе матриц  $\gamma^\nu$ , определяемом форму-

лами (21.7), матрица  $\sum_{j=1}^3 \alpha^j p_j + \beta m$  выражается следующим образом:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha^j p_j + \beta m = \begin{pmatrix} m & (\sigma\mathbf{p}) \\ (\sigma\mathbf{p}) & -m \end{pmatrix},$$

где  $(\sigma\mathbf{p}) = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$ .

Ее собственные значения определяются из уравнения

$$\det \left( \sum_{i=1}^3 \alpha^i p_i + \beta m - \lambda \right) = -(m - \lambda)(m + \lambda) - \mathbf{p}^2 = 0$$

и равны  $\pm \omega(\mathbf{p}) = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Ортонормированную систему собственных векторов можно выбрать в виде

$$\begin{aligned}
 u_1 = \rho(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{p_3}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ \frac{p_1 + i p_2}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \rho(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \frac{p_1 - i p_2}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ -\frac{p_3}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 u_3 = \rho(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ \frac{p_1 + i p_2}{\omega(\mathbf{p}) + m} \end{pmatrix}, \quad u_4 = \rho(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1 - i p_2}{\omega(\mathbf{p}) + m} \\ -\frac{p_3}{\omega(\mathbf{p}) + m} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{21.11}$$

где  $\rho(\mathbf{p}) = \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{(\omega(\mathbf{p}) + m)^2}\right)^{-1/2}$ . Первые два из них отвечают собственному значению  $\omega(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ , два последних — собственному значению  $-\omega(\mathbf{p}) = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Плоские волны

$$(2\pi)^{-3/2} u_\alpha(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$$

образуют обобщенный собственный базис оператора  $H$ , нормированный на  $\delta$ -функцию. Отсюда следует, что спектр оператора  $H$  состоит из двух лучей  $(-\infty, -m]$  и  $[m, +\infty)$ , разделенных щелью шириной  $2m$ .

Как принято считать, уравнение Дирака (21.5) описывает движение свободного электрона, причем волновые функции  $(2\pi)^{-3/2} u_1(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ ,  $(2\pi)^{-3/2} u_2(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$  описывают движение электрона с импульсом  $\mathbf{p}$  (наличие двух волновых функций с импульсом  $\mathbf{p}$  связано со спином электрона, который равен  $1/2$ ). Волновые функции  $(2\pi)^{-3/2} u_3(\mathbf{p}) \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$  и  $(2\pi)^{-3/2} u_4(\mathbf{p}) \times \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ , отвечающие отрицательной энергии, связывают с движением позитрона. К сожалению, такую интерпретацию в рамках одночастичного уравнения Дирака нельзя провести достаточно последовательно (разумеется, энергия частицы должна быть неотрицательной, а оператор энергии в физических задачах должен быть ограничен снизу). Для построения последовательной теории необходимо рассмотреть уравнение

Дирака как уравнение движения классической механической системы с бесконечным числом степеней свободы и проквантовать эту систему [напомним, что эта операция называется вторичным квантованием (см. § 1)]. Тогда мы придем к корректной теории, описывающей движение системы свободных электронов и позитронов. Применяя к уравнению Дирака, записанному в виде (21.10), процедуру вторичного квантования, получаем гамильтониан

$$H_f = \sum_{j=1}^3 \int \psi^+(\mathbf{x}) \alpha^j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int \psi^+(\mathbf{x}) \beta m \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (21.12)$$

или, подробнее,

$$H_f = \sum_{j=1}^3 \sum_{\rho=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 \int \psi_{\rho}^+(\mathbf{x}) \alpha_{\rho\sigma}^j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + m \sum_{\rho=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 \int \psi_{\rho}^+(\mathbf{x}) \beta_{\rho\sigma} \psi_{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь  $\psi_{\alpha}^+(\mathbf{x})$ ,  $\psi_{\beta}(\mathbf{x})$  — символы, удовлетворяющие CAR:

$$\left. \begin{aligned} [\psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \psi_{\beta}(\mathbf{x}')]_{+} &= [\psi_{\alpha}^+(\mathbf{x}), \psi_{\beta}^+(\mathbf{x}')]_{+} = 0; \\ [\psi_{\alpha}(\mathbf{x}), \psi_{\beta}^+(\mathbf{x}')]_{+} &= \delta_{\beta\alpha}^{\alpha} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \right\} \quad (21.13)$$

а  $\psi(\mathbf{x})$  и  $\psi^+(\mathbf{x})$  — соответственно столбец и строка, составленные из символов  $\psi_{\alpha}(\mathbf{x})$  и  $\psi_{\beta}^+(\mathbf{x})$ .

Исследование гамильтониана  $H_f$  проводится в § 22, а сейчас, оставаясь в рамках одночастичного подхода, напомним уравнение Дирака в электромагнитном поле. Как известно, электромагнитное поле можно описывать с помощью четырехмерного потенциала  $A_{\nu}(\mathbf{x})$  ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ). Трехмерный вектор  $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3) = -(A_1, A_2, A_3)$  называется векторным потенциалом, а компонента  $A_0 = A^0$  — скалярным потенциалом. При преобразованиях Лоренца  $A_{\nu}$  ведет себя как четырехмерный вектор. Функция Гамильтона классической частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в электромагнитном поле имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = eA_0 + \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2},$$

где  $\mathbf{p}$  — обобщенный импульс. Эта функция получается из функции Гамильтона свободной частицы  $\mathcal{H} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$  за-



меной  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{p} - e\mathbf{A}$  и  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H} - eA_0$ . Естественно предполагать поэтому, что уравнение Дирака в электромагнитном поле получается из уравнения Дирака для свободной частицы (21.9) с помощью замены  $\hat{p}_\mu$  на  $\hat{p}_\mu - eA_\mu$ .

Таким образом, уравнение Дирака в электромагнитном поле  $A_\mu$  можно записать в форме

$$\left[ \gamma^0 (\hat{p}_0 - eA_0) + \sum_{j=1}^3 \gamma^j (\hat{p}_j - eA_j) \right] \psi - m\psi = 0, \quad (21.14)$$

или, более подробно,

$$\left[ \gamma^0 \left( i \frac{\partial}{\partial x^0} - eA_0 \right) - \sum_{j=1}^3 \gamma^j \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} + eA_j \right) \right] \psi - m\psi = 0.$$

Напишем его также, как уравнение Шредингера с оператором Гамильтона  $H_A = \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \beta m + eA_0$ :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_A \psi = - \sum_{j=1}^3 \alpha^j \hat{p}_j \psi + \beta m \psi + e \sum_{j=1}^3 \alpha^j A_j \psi + eA_0 \psi. \quad (21.15)$$

Уравнение (21.14) может быть использовано, например, для нахождения релятивистских поправок к уровням энергии атома водорода. Но так как оно страдает теми же дефектами, что и уравнение Дирака для свободных частиц, к нему тоже следует применить процедуру вторичного квантования. Она приводит, очевидно, к гамильтониану

$$H_f^A = \sum_{j=1}^3 \int \psi^\dagger(\mathbf{x}) \alpha^j \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} + eA_j(\mathbf{x}) \right) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int \psi^\dagger(\mathbf{x}) (\beta m + eA_0(\mathbf{x})) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (21.16)$$

или, подробнее,

$$H_f^A = \sum_{j=1}^3 \sum_{\rho=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 \int \psi_\rho^\dagger(\mathbf{x}) \alpha_{\rho\sigma}^j \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} + eA_j(\mathbf{x}, t) \right) \psi_\sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{\rho=1}^4 \sum_{\sigma=1}^4 \int \psi_\rho^\dagger(\mathbf{x}) (\beta_{\rho\sigma} m + eA_0(\mathbf{x}, t)) \psi_\sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Здесь  $\psi_\rho^\dagger(\mathbf{x})$ ,  $\psi_\sigma(\mathbf{x})$  — символы, удовлетворяющие CAR, а  $A_\mu(\mathbf{x})$  — заданные числовые функции. Гамильтониан  $H_f^A$

описывает движение электронов и позитронов в электромагнитном поле, которое рассматривается как классическое поле.

Вернемся к одночастичному уравнению Дирака в электромагнитном поле и дополним его уравнением, описывающим изменение со временем электромагнитного поля. Его можно записать, как известно, в виде

$$\square A_\mu - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x^k} - \frac{\partial A_0}{\partial x^0} \right) = j_\mu, \quad (21.17)$$

где  $j_\mu$  — четырехмерный вектор плотности тока (компонента  $j_0$  этого вектора имеет смысл плотности заряда, а трехмерный вектор  $\mathbf{j} = -(j_1, j_2, j_3) = (j^1, j^2, j^3)$  — смысл плотности тока). Чтобы применять уравнение (21.17) в рассматриваемой ситуации, необходимо знать, как выражается  $j_\mu$  для частицы, описываемой уравнением Дирака. Правильное выражение для  $j_\mu$  через функции  $\psi_\alpha$  нетрудно угадать, если заметить, что:

а) в качестве плотности заряда  $j_0$  целесообразно принять выражение

$$j_0(x) = e \sum_{\alpha=0}^3 \psi_\alpha^*(x) \psi_\alpha(x) = e\psi^+ \psi;$$

б) вектор  $j_\mu$  должен удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial j_0}{\partial x^0} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial j_k}{\partial x^k} = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

или, в трехмерной форме,

$$\frac{\partial}{\partial t} j_0(x) + \operatorname{div} \mathbf{j}(x) = 0.$$

Соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_0(x)}{\partial t} &= e \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial \psi_\alpha^*(x)}{\partial t} \psi_\alpha(x) + e \sum_{\alpha=1}^4 \psi_\alpha^*(x) \frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial t} = \\ &= e \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi + e\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = e \left( -\frac{\partial \psi^+}{\partial x} \alpha \psi + i\beta m \psi^+ \psi \right) + \\ &+ e \left( -\psi^+ \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\beta m \psi^+ \psi \right) = -\operatorname{div} (e\psi^+ \alpha \psi) \end{aligned}$$

показывает, что четырехмерный вектор плотности тока  $j^\nu(x)$  для уравнения Дирака естественно записывать в виде

$$j^\nu = e\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\nu \psi, \quad (21.18)$$

т. е.  $j^0 = j_0 = e\psi^\dagger \psi$ ,  $\mathbf{j} = (j^1, j^2, j^3) = -(j_1, j_2, j_3) = e\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha}\psi$ .

Легко проверить, что формула (21.18) действительно определяет четырехмерный вектор.

Таким образом, мы пришли к системе уравнений (21.14), (21.17), (21.18), описывающей изменение во времени функций  $\psi(x, t)$  и  $A_\mu(x, t)$ . Эти уравнения релятивистски-инвариантны, т. е. им удовлетворяют и функции  $\psi'(x) = D_g \psi(g^{-1}x)$ ,  $A'_\mu(x) = \sum_{\nu=0}^3 g_\mu^\nu A_\nu(g^{-1}x)$ . Отметим их инвариантность также относительно калибровочных преобразований:

$$\psi'(x) = \exp[i\alpha(x)]\psi(x); \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x).$$

Все физические величины должны выражаться через комбинации  $\psi(x)$  и  $A_\mu(x)$ , не меняющиеся при калибровочных преобразованиях. Так, напряженности электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

являются компонентами тензора напряженностей:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta},$$

остающегося инвариантным при калибровочных преобразованиях.

Наличие калибровочной инвариантности можно использовать для упрощения уравнений. Наложим, например, на потенциалы  $A_\mu$  условие Лоренца:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \frac{\partial A_0}{\partial x^0} = 0. \quad (21.19)$$

С помощью калибровочного преобразования от любых потенциалов  $A_\mu$  всегда возможно перейти к потенциалам, для кото-

рых условие Лоренца выполнено. При этом уравнение (21.17) принимает вид

$$\square A_{\mu} = j_{\mu}. \quad (21.20)$$

Уравнения (21.14), (21.17) (21.18) можно рассматривать как уравнения движения классической системы. Квантование этой системы приводит к построению квантовой электродинамики; оно сопряжено с затруднениями, которые проявляются уже при квантовании уравнений свободного электромагнитного поля:

$$\square A_{\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x^i} - \frac{\partial A_0}{\partial x^0} \right) = 0.$$

Эти затруднения связаны с тем, что в классической теории нельзя стандартно перейти к гамильтонову формализму из-за вырожденности лагранжиана.

Для электромагнитного поля действие  $S$  и функционал Лагранжа  $L$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S &= - \frac{1}{16\pi} \int \sum F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) dx; \\ L(A_{\mu}(x), \dot{A}_{\mu}(x)) &= \\ &= \frac{1}{8\pi} \left[ \int (\dot{A} + \text{grad } A_0)^2 dx - \int (\text{rot } \mathbf{A})^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Обобщенный импульс

$$\pi_0(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_0(x)}$$

тождественно равен нулю; это показывает, что функционал Лагранжа электромагнитного поля вырожден (см. дополнение А). Обобщенные импульсы

$$\pi_i(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{A}_i(x)} = \frac{1}{4\pi} \left( \dot{A}_i(x) + \frac{\partial A_0}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

совпадают с компонентами электрической напряженности с точностью до множителя.

Отмеченные трудности не возникают, если, воспользовавшись градиентной инвариантностью, наложить на векторный потенциал  $\mathbf{A}$  дополнительное условие  $\text{div } \mathbf{A} = 0$  (ввести кулоновскую калибровку). Однако в кулоновской калибровке лоренц-инвариантность теории не очевидна, что осложняет проведение перенормировок. Поэтому часто пользуются дру-

гими способами преодоления затруднений, связанных с вырожденностью лагранжиана (см., например, [1, 2, 6])\*. Мы не будем в этой книге заниматься построением квантовой электродинамики. Рассмотрим лишь квантование свободного фермионного поля, в частности квантование свободного уравнения Дирака и теорию фермионов спина 1/2, взаимодействующих со скалярными бозонами (эта теория является близким аналогом квантовой электродинамики, но более проста благодаря невырожденности лагранжиана и отсутствию инфракрасных расходимостей).

## § 22. Свободные фермионы

Свободные фермионы описываются формальным гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha, \beta} \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}) v_{\alpha, \beta}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \psi_{\beta}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \int \tilde{v}_{\alpha, \beta}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_{\beta}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (22.1)$$

Здесь  $\psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})$ ,  $\psi_{\beta}(\mathbf{x})$  удовлетворяют соотношениям (21.13). Символы  $\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k})$ ,  $\tilde{\psi}_{\beta}(\mathbf{k})$  связаны с  $\psi_{\alpha}(\mathbf{x})$ ,  $\psi_{\beta}(\mathbf{x})$  преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k}; \\ \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2} \int \tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k} \end{aligned}$$

и также удовлетворяют CAR:

$$\begin{aligned} [\tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}), \tilde{\psi}_{\beta}(\mathbf{k}')]_{+} &= [\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}), \tilde{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{+} = 0; \\ [\tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}), \tilde{\psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}')]_{+} &= \delta_{\beta}^{\alpha} \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Гамильтониан  $H$  предполагается формально эрмитовым; это означает, что при каждом  $\mathbf{k}$  матрица  $\tilde{v}_{\alpha, \beta}(\mathbf{k})$  эрмитова.

Определение операторной реализации гамильтониана (22.1) аналогично определению, данному в § 2 для гамильтонианов (2.1). Именно, под операторной реализацией формального гамильтониана (22.1) понимаются гильбертово пространство  $\mathcal{H}$ , вектор  $\Phi \in \mathcal{H}$ , самосопряженный оператор  $\hat{H}$  (оператор энер-

\* Способы преодоления этих затруднений, пригодные в общей ситуации (не только в квантовой электродинамике, но и, к примеру, для полей Янга — Миллса), описаны в работах [33, 34].

гии) и обобщенные по  $x$  операторные функции  $\psi_{\alpha}^{+}(x, t)$ ,  $\psi_{\beta}(x, t)$ , действующие в  $\mathcal{H}$  и удовлетворяющие следующим условиям:

1)  $\hat{H}\Phi = 0$ ; вектор  $\Phi$  — основное состояние оператора  $\hat{H}$ ;  
 2) операторные обобщенные функции  $\psi_{\alpha}^{+}(x, t)$ ,  $\psi_{\beta}(x, t)$  сопряжены друг другу; для них справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \exp(i\hat{H}\sigma)\psi_{\alpha}(x, t)\exp(-i\hat{H}\sigma) &= \psi_{\alpha}(x, t + \sigma); \\ \exp(i\hat{H}\sigma)\psi_{\alpha}^{+}(x, t)\exp(-i\hat{H}\sigma) &= \psi_{\alpha}^{+}(x, t + \sigma); \\ [\psi_{\alpha}(x, t), \psi_{\beta}(y, t)]_{+} &= [\psi_{\alpha}^{+}(x, t), \psi_{\beta}^{+}(y, t)]_{+} = 0; \\ [\psi_{\alpha}(x, t), \psi_{\beta}(y, t)]_{+} &= \delta_{\beta}^{\alpha}\delta(x - y); \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

3) вектор  $\Phi$  — циклический вектор семейства операторов  $\psi_{\alpha}(f, t) = \int f(x)\psi_{\alpha}(x, t)dx$ ,  $\psi_{\alpha}^{+}(f, t) = \int \bar{f}(x)\psi_{\alpha}^{+}(x, t)dx$ , где  $f \in \mathcal{S}$ ;

4) выполняются равенства:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_{\alpha}(x, t)}{\partial t} &= \sum_{\beta} \int v_{\alpha\beta}(x - y)\psi_{\beta}(y, t)dy; \\ i \frac{\partial \psi_{\alpha}^{+}(x, t)}{\partial t} &= - \sum_{\beta} \int \bar{v}_{\alpha\beta}(x - y)\psi_{\beta}^{+}(y, t)dy, \end{aligned}$$

т. е.  $\psi_{\alpha}^{+}(x, t)$ ,  $\psi_{\alpha}(x, t)$  подчинены гейзенберговским уравнениям, формально написанным по гамильтониану  $H$ .

Из соотношений CAR вытекает ограниченность операторов  $\psi_{\alpha}(f, t)$ ,  $\psi_{\alpha}^{+}(f, t)$ . Можно считать поэтому, что они определены во всем пространстве  $\mathcal{H}$ . Вместо операторных обобщенных функций  $\psi_{\alpha}^{+}(x, t)$ ,  $\psi_{\alpha}(x, t)$  часто удобно рассматривать операторные обобщенные функции:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(k, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \psi_{\alpha}^{+}(x, t)\exp(ikx)dx; \\ \tilde{\psi}_{\alpha}(k, t) &= (2\pi)^{-3/2} \int \psi_{\alpha}(x, t)\exp(-ikx)dx, \end{aligned}$$

удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha}(k, t)}{\partial t} &= \sum_{\beta} \tilde{v}_{\alpha\beta}(k)\tilde{\psi}_{\beta}(k, t); \\ i \frac{\partial \tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(k, t)}{\partial t} &= - \sum_{\beta} \tilde{v}_{\beta\alpha}(k)\tilde{\psi}_{\beta}^{+}(k, t) \end{aligned}$$

и соотношениям:

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{H}\sigma)\tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{k}, t)\exp(-i\hat{H}\sigma) &= \tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{k}, t+\sigma); \\ \exp(i\hat{H}\sigma)\tilde{\Psi}_\alpha^+(\mathbf{k}, t)\exp(-i\hat{H}\sigma) &= \tilde{\Psi}_\alpha^+(\mathbf{k}, t+\sigma). \end{aligned}$$

Уравнения для  $\tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{k}, t)$ ,  $\tilde{\Psi}_\alpha^+(\mathbf{k}, t)$  можно решать как обычные (числовые) дифференциальные уравнения. Решение сразу получается, если унитарной заменой переменных сделать матрицу коэффициентов диагональной, т. е. ввести новые операторы:

$$c_\alpha(\mathbf{k}, t) = \sum_\beta \bar{u}_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) \tilde{\Psi}_\beta(\mathbf{k}, t); \quad c_\alpha^+(\mathbf{k}, t) = \sum_\beta u_{\beta\alpha}(\mathbf{k}) \tilde{\Psi}_\beta^+(\mathbf{k}, t),$$

так, чтобы они удовлетворяли уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} i \frac{\partial c_\alpha(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= \lambda_\alpha(\mathbf{k}) c_\alpha(\mathbf{k}, t); \\ i \frac{\partial c_\alpha^+(\mathbf{k}, t)}{\partial t} &= -\lambda_\alpha(\mathbf{k}) c_\alpha^+(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \right\} \quad (22.3)$$

Нужную унитарную матрицу  $u_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  можно найти, поскольку эрмитова матрица  $\tilde{v}_{\alpha\beta}$  унитарным преобразованием приводится к диагональному виду. Предполагаем, что при почти всех  $\mathbf{k}$  матрица  $\tilde{v}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  не вырождена, тогда функции  $\lambda_\alpha(\mathbf{k})$  почти всюду отличны от нуля. Из уравнений (22.3) вытекает:

$$\begin{aligned} c_\alpha(\mathbf{k}, t) &= \exp(-i\lambda_\alpha(\mathbf{k})t) c_\alpha(\mathbf{k}, 0) = \\ &= \exp(i\hat{H}t) c_\alpha(\mathbf{k}, 0) \exp(-i\hat{H}t), \end{aligned} \quad (22.4)$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{k}, t) &= \sum_\beta u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \exp[-i\lambda_\beta(\mathbf{k})t] c_\beta(\mathbf{k}, 0); \\ \tilde{\Psi}_\alpha^+(\mathbf{k}, t) &= \sum_\beta \bar{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \exp[i\lambda_\beta(\mathbf{k})t] c_\beta^+(\mathbf{k}, 0). \end{aligned}$$

Легко проверить, что операторы  $c_\alpha^+(\mathbf{k}, t)$ ,  $c_\alpha(\mathbf{k}, t)$  при фиксированном  $t$  удовлетворяют CAR.

Введем новые операторы, также удовлетворяющие CAR:

$$\begin{aligned} d_\alpha(\mathbf{k}, t) &= \theta(\lambda_\alpha(\mathbf{k})) c_\alpha(\mathbf{k}, t) + \theta(-\lambda_\alpha(\mathbf{k})) c_\alpha^+(\mathbf{k}, t); \\ d_\alpha^+(\mathbf{k}, t) &= \theta(\lambda_\alpha(\mathbf{k})) c_\alpha^+(\mathbf{k}, t) + \theta(-\lambda_\alpha(\mathbf{k})) c_\alpha(\mathbf{k}, t). \end{aligned}$$

Из соотношения (22.4) следуют равенства:

$$\begin{aligned} d_{\alpha}(\mathbf{k}, t) &= \exp(i \hat{H}t) d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) \exp(-i \hat{H}t) = \\ &= \exp[-i |\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})| t] d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0), \end{aligned}$$

и, значит,

$$[\hat{H}, d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0)] = -|\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})| d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0). \quad (22.5)$$

С помощью (22.5) получаем

$$\hat{H}d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) \Phi = -|\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})| d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) \Phi;$$

в силу неотрицательности оператора  $\hat{H}$  отсюда вытекает:

$$d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) \Phi = 0.$$

Из того, что вектор  $\Phi$  циклический относительно семейства операторов  $\psi_{\alpha}(f, t)$ ,  $\psi_{\alpha}^{\dagger}(f, t)$ , следует, что он циклический относительно семейства операторов  $\int f(\mathbf{k}) d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k}$ ,  $\int \bar{f}(\bar{\mathbf{k}}) d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k}$ . Можно поэтому утверждать, что  $d_{\alpha}(\mathbf{k}) = d_{\alpha}(\mathbf{k}, 0)$ ;  $d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) = d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}, 0)$  задают фоковское представление CAR, а вектор  $\Phi$  — вакуумный вектор данного представления. Операторы  $d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k})$ ,  $d_{\alpha}(\mathbf{k})$  имеют физический смысл операторов рождения и уничтожения частиц; это подтверждается тем, что оператор  $\hat{H}$  выражается через них формулой

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \int |\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})| d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) d_{\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (22.6)$$

Полученные соотношения позволяют без труда построить операторную реализацию гамильтониана  $H$ ; в качестве пространства  $\mathcal{H}$  следует взять пространство фоковского представления операторов  $d_{\alpha}(\mathbf{k})$ ,  $d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k})$ , удовлетворяющих CAR, оператор  $\hat{H}$  задать формулой (22.6), а операторы  $\tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}, t)$ ,  $\tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$  — формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\beta} u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \{ \theta(\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) d_{\beta}(\mathbf{k}) \exp(-i |\lambda_{\beta}(\mathbf{k})| t) + \\ &\quad + \theta(-\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(i |\lambda_{\beta}(\mathbf{k})| t) d_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \}; \\ \tilde{\psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) &= \sum_{\beta} \bar{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \{ \theta(\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) d_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{k}) \exp(i |\lambda_{\beta}(\mathbf{k})| t) + \\ &\quad + \theta(-\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(-i |\lambda_{\beta}(\mathbf{k})| t) d_{\beta}(\mathbf{k}) \}. \end{aligned}$$

Функции  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) определяются как собственные числа матрицы  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \{\tilde{v}_{\alpha\beta}(\mathbf{k})\}$ , а вектор-столбцы



$u_{\beta}(\mathbf{k}) = (u_{1\beta}(\mathbf{k}), u_{2\beta}(\mathbf{k}), \dots, u_{n\beta}(\mathbf{k}))$  представляют собой полную ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) u_{\beta}(\mathbf{k}) = \lambda_{\beta}(\mathbf{k}) u_{\beta}(\mathbf{k}).$$

Формальный гамильтониан  $H$  трансляционно-инвариантен, поэтому естественно ожидать, что в пространстве  $\mathcal{H}$  можно построить оператор импульса  $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ , удовлетворяющий условию

$$\exp(-i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{a})\psi_{\alpha}(\mathbf{x}, t)\exp(i\hat{\mathbf{P}}\mathbf{a}) = \psi_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{a}, t)$$

(как всегда,  $\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3$  должны быть самосопряженными операторами, коммутирующими между собой и с  $\hat{H}$ ). Такой оператор  $\hat{\mathbf{P}}$  действительно существует; он определяется формулой

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha} \int \mathbf{k} \varepsilon(\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})) d_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}) d_{\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

где  $\varepsilon(\lambda) = \theta(\lambda) - \theta(-\lambda)$ .

Остановимся на случае, когда функции  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})$  таковы, что  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})$  и  $\lambda_{\alpha}(-\mathbf{k})$  имеют один и тот же знак. Здесь удобно ввести вместо  $d_{\alpha}(\mathbf{k}, t)$  операторы

$$a_{\alpha}(\mathbf{k}) = \theta(\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})) c_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) + \theta(-\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})) c_{\alpha}^{+}(-\mathbf{k}, 0).$$

Они также удовлетворяют САР. Операторы энергии и импульса выражаются через них в виде

$$H = \sum_{\alpha} \int |\lambda_{\alpha}(\mathbf{k})| a_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) d(\mathbf{k});$$

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \int \mathbf{k} a_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}) a_{\alpha}(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

а операторы  $\tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}, t)$  — формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}(\mathbf{k}, t) = & \sum_{\beta} u_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \{ \theta(\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(-i|\lambda_{\beta}(\mathbf{k})|t) a_{\beta}(\mathbf{k}) + \\ & + \theta(-\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(i|\lambda_{\beta}(-\mathbf{k})|t) a_{\beta}^{+}(-\mathbf{k}) \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}, t) = & \sum_{\beta} \bar{u}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) \{ \theta(\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(i|\lambda_{\beta}(\mathbf{k})|t) a_{\beta}^{+}(\mathbf{k}) + \\ & + \theta(-\lambda_{\beta}(\mathbf{k})) \exp(-i|\lambda_{\beta}(-\mathbf{k})|t) a_{\beta}(-\mathbf{k}) \}. \end{aligned}$$

В качестве примера разберем операторную реализацию гамильтониана Дирака (21.12), описывающего свободное движе-

ние электронов и позитронов [к гамильтониану (21.12) мы пришли в предыдущем параграфе, применяя процедуру вторичного квантования к уравнению Дирака]. Для построения этой операторной реализации воспользуемся тем, что полную ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $\tilde{v}(\mathbf{k}) = \sum_{j=1}^3 \alpha^j k_j + \beta m$  можно составить из четырех векторов:  $u_1(\mathbf{k}), u_2(\mathbf{k}), u_3(\mathbf{k}), u_4(\mathbf{k})$ , первые два из которых отвечают собственному значению  $\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ , а два последних — собственному значению  $-\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ .

Операторную реализацию гамильтониана Дирака можно построить в пространстве фоковского представления CAR:

$$[a_\alpha(\mathbf{k}), a_\beta(\mathbf{k}') ]_+ = [a_\alpha^+(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{k}') ]_+ = 0;$$

$$[a_\alpha(\mathbf{k}), a_\beta^+(\mathbf{k}') ]_+ = \delta_\beta^\alpha \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

где  $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in E^3$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ . Операторы энергии  $\hat{H}$  и импульса  $\hat{\mathbf{P}}$  следует определить формулами

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^4 \int \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} a_\alpha^+(\mathbf{k}) a_\alpha(\mathbf{k}) d\mathbf{k}; \quad \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^4 \int \mathbf{k} a_\alpha^+(\mathbf{k}) a_\alpha(\mathbf{k}) d\mathbf{k},$$

а функции  $\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t), \tilde{\psi}^+(\mathbf{k}, t)$  задать соотношениями

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\alpha=1, 2} u_\alpha(\mathbf{k}) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} t) a_\alpha(\mathbf{k}) +$$

$$+ \sum_{\alpha=3, 4} u_\alpha(\mathbf{k}) \exp(i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} t) a_\alpha^+(-\mathbf{k});$$

$$\tilde{\psi}^+(\mathbf{k}, t) = \sum_{\alpha=1, 2} u_\alpha^+(\mathbf{k}) \exp(i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} t) a_\alpha^+(\mathbf{k}) +$$

$$+ \sum_{\alpha=3, 4} u_\alpha^+(\mathbf{k}) \exp(-i \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} t) a_\alpha(-\mathbf{k}).$$

Основное состояние гамильтониана  $\hat{H}$  совпадает с фоковским вакуумом  $\theta$ .

Операторы  $a_1^+(\mathbf{k}), a_2^+(\mathbf{k}), a_1(\mathbf{k}), a_2(\mathbf{k})$  имеют физический смысл операторов рождения и уничтожения электрона с импульсом  $\mathbf{k}$ , операторы  $a_3^+(\mathbf{k}), a_4^+(\mathbf{k}), a_3(\mathbf{k}), a_4(\mathbf{k})$  — смысл операторов рождения и уничтожения позитрона с импульсом  $\mathbf{k}$  (существование при каждом  $\mathbf{k}$  двух операторов рождения связано с тем, что электроны и позитроны являются частицами спина 1/2).

## § 23. Взаимодействие фермионов спина 1/2 со скалярными бозонами

Рассмотрим в качестве примера классическую механическую систему со следующими уравнениями движения:

$$\left. \begin{aligned} i \sum_{\nu=0}^3 \gamma^{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}} - m\psi - e\psi\varphi = 0; \\ \square \varphi + \mu^2\varphi + e\psi^+ \gamma^0 \psi + 4g\varphi^3 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Здесь  $\varphi(x)$  — действительная функция,  $\psi(x)$  — столбец из четырех комплексных функций,  $\gamma^{\nu}$  — матрицы, фигурирующие в уравнении Дирака ( $\nu = 0, 1, 2, 3$ ),  $\psi^+(x)$  — строка функций, комплексно сопряженных функциям столбца  $\psi(x)$ . Считаем, что  $(\gamma^0)^+ = \gamma^0$ ,  $(\gamma^j)^+ = -\gamma^j$  при  $j = 1, 2, 3$ . Это условие эквивалентно наложенному в § 21 требованию эрмитовости матриц  $\alpha^j = \gamma^0 \gamma^j$ ,  $\beta = \gamma^0$ ; оно выполняется, если выбрать  $\gamma^{\nu}$  в форме (21.7).

Полагая, что  $\psi(x)$  ведет себя при преобразованиях Лоренца как спинор, а  $\varphi(x)$  является скаляром, легко убедиться в лоренц-инвариантности уравнений (23.1). Точнее говоря, эти уравнения не меняют своего вида при замене  $\psi(x)$  на  $\psi'(x) = D_g \psi(g^{-1}x)$  и  $\varphi(x)$  на  $\varphi'(x) = \varphi(g^{-1}x)$  (здесь  $g$  — преобразование Лоренца, матрицы  $D_g$  построены при доказательстве лоренц-инвариантности уравнения Дирака).

Будем квантовать описанную систему, пользуясь каноническими антикоммутиационными соотношениями для  $\psi(x)$  и каноническими коммутационными соотношениями для  $\varphi(x)$ . Другими словами, попытаемся построить квантовую систему, операторная реализация которой состоит из гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  и операторных обобщенных функций  $\varphi(x)$ ,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_3(x)$ ,  $\psi_4(x)$ , удовлетворяющих условиям:

1) оператор  $\hat{H}$  имеет основное состояние  $\Phi$  с энергией, равной нулю. Это состояние является циклическим вектором семейства операторных функций  $\psi_{\alpha}(x)$ ,  $\varphi(x)$ ;

2) справедливы соотношения (2.6) — (2.8), (22.2) и равенства

$$\begin{aligned} [\psi(x, t), \varphi(x', t)] &= [\psi^+(x, t), \varphi(x', t)] = \\ &= [\psi(x, t), \pi(x', t)] = [\psi^+(x, t), \pi(x', t)] = 0, \end{aligned}$$

где  $\pi(x, t)$  определяется формулой (2.9);

3) операторные обобщенные функции  $\psi(x)$ ,  $\varphi(x)$  удовлетворяют уравнениям (23.1).

Отметим, что наша квантовомеханическая система описывается формальным гамильтонианом  $H = H_0 + V$ , где

$$H_0 = H_f + H_b;$$

$$H_f = \sum_{j=1}^3 \int \psi^+(x) \alpha^j \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \psi(x) dx + \int \psi^+(x) \beta m \psi(x) dx;$$

$$H_b = \frac{1}{2} \int \pi^2(x) dx + \frac{1}{2} \int (\nabla \varphi(x))^2 dx + \frac{1}{2} m^2 \int \varphi^2(x) dx;$$

$$V = e \int \psi^+(x) \gamma^0 \psi(x) \varphi(x) dx + g \int \varphi^4(x) dx,$$

$\pi(x)$ ,  $\varphi(x)$  — символы, удовлетворяющие ССР,  
 $\psi(x)$ ,  $\psi^+(x)$  — символы, удовлетворяющие САР.

Строго говоря, условие 3 не имеет точного смысла, поскольку не объяснено, как понимаются произведения операторных обобщенных функций  $\psi(x)\varphi(x)$  и  $\varphi^3(x)$ . При попытке определить эти произведения мы сталкиваемся с сингулярностями, которые проявляются позже в расходимостях диаграмм ряда теории возмущений. Чтобы провести более строгое рассуждение, следует рассмотреть уравнения (23.1) как предел несингулярных уравнений, т. е. ввести предварительно обрезание по импульсам. Рассмотрим сейчас уравнения (23.1) чисто формально. Построим с их помощью ряды теории возмущений и сделаем обрезание по импульсам в этих рядах.

Отметим, что из (23.1) с помощью эрмитова сопряжения получается уравнение для операторной обобщенной функции  $\psi^+(x) = (\psi_1^+(x), \psi_2^+(x), \psi_3^+(x), \psi_4^+(x))$ :

$$-i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^0} \gamma^0 + \sum_{j=1}^3 i \frac{\partial \psi^+}{\partial x^j} \gamma^j - m \psi^+ - e \varphi \psi^+ = 0. \quad (23.2)$$

Удобно вместо  $\psi^+(x)$  рассматривать операторную обобщенную функцию  $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x) \gamma^0$ , так как тогда уравнения (23.1), (23.2) записываются в более простом виде:

$$\left. \begin{aligned} i \sum_{\nu=0}^3 \gamma^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} - m \psi - e \psi \varphi &= 0; \\ i \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^\nu} \gamma^\nu + m \bar{\psi} + e \bar{\psi} \varphi &= 0; \\ \square \varphi + \mu^2 \varphi + e \bar{\psi} \psi + 4g\varphi^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.3)$$

Определим функции Грина соотношением

$$G_{k,l}(x_1, \alpha_1, \dots, x_k, \alpha_k | y_1, \beta_1, \dots, y_k, \beta_k | z_1, \dots, z_l) = \\ = \langle T(\psi_{\alpha_1}(x_1) \dots \psi_{\alpha_k}(x_k) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \bar{\psi}_{\beta_k}(y_k) \varphi(z_1) \dots \\ \dots \varphi(z_l)) \Phi, \Phi \rangle; \quad (23.4)$$

$T$  — произведение операторов  $\psi_{\alpha_1}(x_1), \dots, \psi_{\alpha_k}(x_k), \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1), \dots, \bar{\psi}_{\beta_k}(y_k), \varphi(z_1), \dots, \varphi(z_l)$  в правой части (23.4) понимается как произведение этих операторов, расставленных в порядке убывания времен [если для расстановки операторов  $\psi_{\alpha}, \bar{\psi}_{\beta}$  в таком порядке требуется нечетная перестановка, то произведение нужно умножить на  $(-1)$ ]. Будем опускать дискретные индексы в обозначении функций Грина и писать

$$G_{k,l}(x_1, \dots, x_k | y_1, \dots, y_k | z_1, \dots, z_l) = \\ = \langle T(\psi(x_1) \dots \psi(x_k) \bar{\psi}(y_1) \dots \bar{\psi}(y_k) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_l)) \Phi, \Phi \rangle.$$

Функции Грина  $G_{k,l}^0$ , соответствующие свободному гамильтониану  $H_0 = H_f + H_b$ , легко вычислить с помощью операторных реализаций гамильтонианов  $H_f$  и  $H_b$ , построенных соответственно в § 2 и § 22. В частности,

$$G_{0,2}^{(0)}(x, y) = D_F(x - y); \\ G_{1,0}^{(0)}(x, \alpha, y, \beta) = S_{\alpha\beta}^F(x - y),$$

$S_{\alpha\beta}^F(x)$  — матричные элементы матрицы

$$S^F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(i kx) \tilde{S}^F(k) dk,$$

где

$$\tilde{S}^F(k) = i \frac{\sum_{\mu=1}^4 \gamma^{\mu} k_{\mu} - m}{k^2 - m^2 + i0}.$$

Пользуясь уравнениями (23.3), можно без труда вывести систему уравнений для функций Грина  $G_{k,l}$  и построить диаграммы для их вычисления, которые состоят из фермионных и бозонных линий и двух типов звезд — звезд с тремя вершинами и звезд с четырьмя вершинами. Фермионные линии считаются направленными, а бозонные — ненаправленными. Вершины, принадлежащие фермионным (бозонным) линиям, называются фермионными (бозонными).

Все вершины звезд второго типа должны быть бозонными линиями, одна из вершин звезды первого типа также должна быть бозонной, остальные две вершины должны служить соответственно началом и концом фермионной линии. (Как всегда, рассматриваются только диаграммы, у которых каждая из компонент содержит по крайней мере одну внешнюю вершину.) Кроме описанных гриновских диаграмм рассмотрим

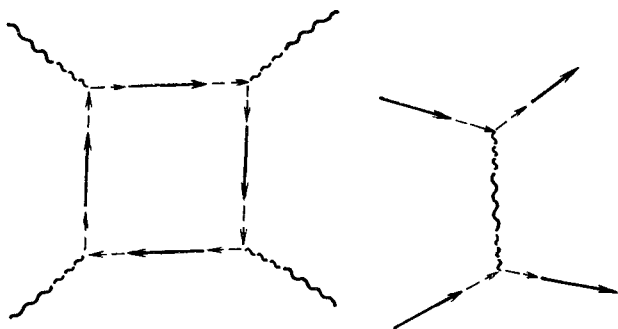


Рис. 20.

также диаграммы, получающиеся из гриновских удалением нескольких фермионных или бозонных линий. Их вершины называют фермионными или бозонными, в зависимости от того, какой линии они принадлежат в исходной гриновской диаграмме. На рис. 20 изображены примеры гриновских диаграмм (фермионные линии — сплошные, а бозонные — волнистые).

Всякой вершине диаграммы сопоставим точку четырехмерного пространства, а если она принадлежит фермионной линии, то еще и дискретный индекс, принимающий значения  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ . Бозонной линии сопоставим функцию  $D_F(x - y)$ , фермионной — функцию  $S_{\alpha, \beta}^F(x - y)$  (здесь  $x, y$  — точки, сопоставленные началу и концу линии,  $\alpha, \beta$  — дискретные индексы, сопоставленные началу и концу фермионной линии). Звезде первого типа отвечает функция  $e\delta(x_1 - x_3)\delta(x_1 - x_3)$ , а звезде второго типа — функция  $4!g\delta(x_1 - x_4)\delta(x_2 - x_4) \times \delta(x_3 - x_4)$ . Функция, сопоставленная диаграмме, получается из произведения функций, отвечающих ребрам и звездам, с помощью интегрирования по переменным, соответствующим внутренним вершинам, и суммирования по дискретным индексам, соответствующим этим вершинам. В нее включается также множитель  $1/d$ , где  $d$  — порядок группы симметрии диаграммы. Так же, как в § 4, доказывается, что функция Грина

$G_{k, l}$  равна сумме гриновских диаграмм с  $l$  бозонными и  $2k$  фермионными внешними вершинами ( $k$  внешних вершин служат началами и  $k$  — концами фермионных линий).

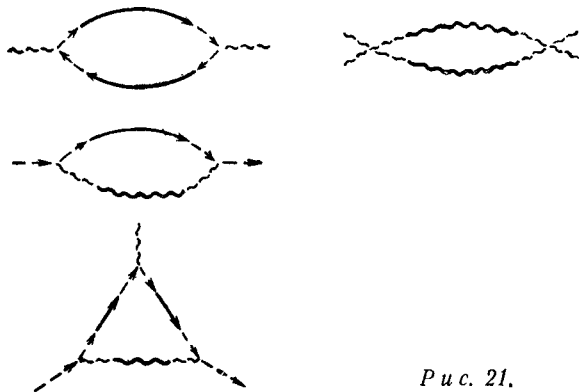
Из изложенной диаграммной техники можно получить диаграммную технику в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении. Не останавливаясь на ее описании, заметим только, что ребрам в ней отвечают функции  $\tilde{D}_F(k_1) \delta(k_1 \pm k_2)$  и  $\tilde{S}_{\alpha\beta}^F(k_1) \delta(k_1 \pm k_2)$ .

На квантовомеханическую систему, удовлетворяющую (23.1), переносятся определения вершинной диаграммы и вершинной функции. (Под вершинной функцией  $\Gamma_{k, l}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_l)$  понимается сумма вершинных диаграмм, имеющих  $2k$  фермионных и  $l$  бозонных вершин.) Без труда определяются также бозонный и фермионный массовые операторы  $M_b$  и  $M_f$ .

Среди описанных выше диаграмм есть математически бессмысленные выражения [в частности, в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении мы сталкиваемся с расходящимися интегралами]. Прежде всего расходятся диаграммы, в которых имеются ребра, соединяющие две вершины одной звезды. От этих наиболее простых расходимостей можно избавиться, записав взаимодействие в нормальной форме, т. е. заменив  $V$  на

$$e \int N(\psi^+(x) \gamma^0 \psi(x)) dx + g \int N(\varphi^4(x)) dx.$$

Так же, как и в § 19, удастся убедиться, что среди остальных диаграмм расходятся те и только те, которые содержат в качестве поддиаграммы вершинную диаграмму с неотри-



Р и с. 21.

пательным индексом, состоящую более чем из одной звезды. Индекс  $\omega(\alpha)$  диаграммы  $\alpha$  здесь следует определить формулой

$$\omega(\alpha) = 2r_b + 3r_f - 4s + 4,$$

где  $r_b$  и  $r_f$  — число бозонных и фермионных ребер соответственно,  $s$  — число звезд. Обозначим число звезд первого типа  $s_f$ , второго типа  $s_b$ , число фермионных внешних вершин  $v_f$ , число бозонных внешних вершин  $v_b$ . С помощью соотношений

$$4s_b + s_f = 2r_b + v_b; \quad 2s_f = 2r_f + v_f$$

индекс вершинной диаграммы записывается в виде

$$\omega(\alpha) = 4 - v_b - \frac{3}{2}v_f, \quad (23.5)$$

тогда он определяется только числом и типом внешних вершин.

Из (23.5) видно, что существует конечное число типов вершинных диаграмм с неотрицательным индексом, т. е. конечное число типов примитивно расходящихся диаграмм (простейшие диаграммы каждого из этих типов изображены на рис. 21). Другими словами, примитивно расходящимися являются диаграммы фермионного и бозонного массовых операторов  $M_f$ ,  $M_b$  и диаграммы вершинных функций  $\Gamma_{1,1}$ ,  $\Gamma_{0,4}$  и  $\Gamma_{0,1}$ .

Чтобы построить по изучаемому нами взаимодействию лоренц-инвариантную матрицу рассеяния (точнее, семейство лоренц-инвариантных матриц рассеяния, зависящее от четырех параметров), воспользуемся методами гл. 6. Именно, введем обрезание по импульсам и будем снимать его, считая фиксированными массу одетого фермиона  $m_d$ , массу одетого бозона  $\mu_d$  и два перенормированных заряда  $e_d$  и  $g_d$ , описывающих соответственно взаимодействие фермионов с бозонами и взаимодействие бозонов друг с другом. Тогда матрица рассеяния  $S$  имеет конечный лоренц-инвариантный предел.

Обрезание по импульсам можно проводить разными способами, например так же, как и в гл. 6, т. е. производя обрезание в гамильтониане. Перенормированные заряды  $e_d$  и  $g_d$  определяются соотношениями:

$$e_d = \gamma_{1,1}(p^{(0)}, q^{(0)}); \quad g_d = \gamma_{0,4}(k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)}),$$

где  $\gamma_{1,1}$ ,  $\gamma_{0,4}$  получаются из нормированных вершинных функций  $\tilde{\Gamma}'_{1,1}$ ,  $\tilde{\Gamma}'_{0,4}$  выделением  $\delta$ -функций:

$$\tilde{\Gamma}'_{1,1}(p, q | k) = \gamma_{1,1}(p, q) \delta(p + q + k);$$

$$\tilde{\Gamma}'_{0,4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \gamma_{0,4}(k_1, k_2, k_3) \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4),$$

точки  $p^{(0)}$ ,  $q^{(0)}$ ,  $k_1^{(0)}$ ,  $k_2^{(0)}$ ,  $k_3^{(0)}$  фиксируются произвольным образом. Нормированные вершинные функции  $\Gamma'_{m,n}$  также имеют конечный лоренц-инвариантный предел; единственное исключение — функция  $\Gamma'_{0,1}$ .



**§ А.1. Операторы в гильбертовом пространстве**

Под оператором всегда понимается линейный оператор, определенный на всюду плотном подмножестве гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  (множество  $D$  называется всюду плотным, если любой вектор  $x \in \mathcal{H}$  можно представить как предел последовательности векторов  $x_n \in D$ ).

Часто приходится рассматривать семейство  $\mathcal{M}_D$  операторов, определенных на одном и том же множестве  $D$  и переводящих это множество в себя. Операторы  $A, B \in \mathcal{M}_D$  называются сопряженными, если  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$  для любых  $x, y \in D$ .

Оператор  $A$  назовем сильным пределом последовательности операторов  $A_n \in \mathcal{M}_D$  (обозначается  $A = s \lim A_n$ ), если для любого вектора  $x \in D$

$$Ax = \lim A_n x.$$

Оператор  $A$  называется слабым пределом последовательности операторов  $A_n \in \mathcal{M}_D$  (обозначается  $A = w \lim A_n$ ), если для любых векторов  $x, y \in D$

$$\langle Ax, y \rangle = \lim \langle A_n x, y \rangle.$$

Под производной оператора по параметру мы понимаем сильную производную, т. е.  $dA/dt$  определяем как  $s \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$ .

Оператор  $A$  называется эрмитовым (симметричным), если для любых векторов  $x, y$  из его области определения

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Математики (в отличие от физиков) различают понятия эрмитова и самосопряженного оператора. Следуя принятой в математике терминологии, мы называем эрмитов оператор  $A$  са-

мосопряженным, если из того, что векторы  $y$  и  $z$  для любого вектора  $x$  из области определения оператора  $A$  удовлетворяют условию  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$ , вытекает, что  $y$  входит в область определения оператора  $A$ , и  $z = Ay$ . Отметим, что физическим величинам в квантовой механике должны соответствовать именно самосопряженные операторы.

Вектор  $x$  называется циклическим вектором семейства операторов  $\mathcal{A}$ , если линейные комбинации векторов вида  $A_1 \dots A_n x$ , где  $A_i \in \mathcal{A}$ , всюду плотны.

## § А.2. Числовые, векторные и операторные обобщенные функции

Под числовой обобщенной функцией понимается линейный функционал на пространстве функций  $R$  (пространстве основных функций). Таким образом, обобщенная функция определяет закон, сопоставляющий каждой функции  $f \in R$  число  $\varphi(f)$ , которое удовлетворяет равенству

$$\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2) \quad (\text{А.1})$$

(здесь  $f_1, f_2 \in R$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  — комплексные числа).

Число  $\varphi(f)$  записывается также в виде интеграла

$$\varphi(f) = \int f(x) \varphi(x) dx,$$

имеющего чисто символический смысл [как говорят физики, обобщенная функция  $\varphi(x)$  приобретает смысл только под знаком интеграла с «хорошей» (основной) функцией]. Ради определенности считаем, что пространством основных функций  $R$  является пространство  $\mathcal{S}(E^n)$  бесконечно дифференцируемых функций от  $n$  переменных, все производные которых убывают быстрее любой степени.

На функционал  $\varphi(f)$  накладывается дополнительно условие непрерывности в топологии пространства  $\mathcal{S}$ , т. е. предполагается, что  $\varphi(f_h) \rightarrow 0$ , если  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}} f_h$  рав-

номерно стремится к нулю на любом ограниченном множестве при любых  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ .

Векторная обобщенная функция  $\varphi(x)$  определяет закон, сопоставляющий каждой функции  $f$  из пространства основных функций  $R$  вектор  $\varphi(f)$  из гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ , линей-

но зависящий от  $f$ ; иными словами, требуется выполнение равенства (A.1). Как и в числовом случае, пишем

$$\varphi(f) = \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Если выполнено соотношение  $\langle \varphi(x), \varphi(x') \rangle = \delta(x, x')$ , т. е.  $\langle \varphi(f), \varphi(g) \rangle = \langle f, g \rangle$ , то говорят, что обобщенная векторная функция  $\varphi(x)$  нормирована на  $\delta$ -функцию.

Операторная обобщенная функция  $A(x)$  определяет закон, ставящий в соответствие каждой функции  $f \in R$  оператор  $A(f)$ , линейно зависящий от  $f$  [предполагается, что все операторы  $A(f)$  имеют одну и ту же область определения  $D$  и переводят ее в себя]. Оператор  $A(f)$  символически записывается в виде

$$A(f) = \int f(x) A(x) dx.$$

Операторная обобщенная функция  $A^+(x)$  называется сопряженной к функции  $A(x)$ , когда для любой основной функции  $f$  оператор  $A^+(f)$  сопряжен к оператору  $A(\bar{f})$ , определен на  $D$  и переводит  $D$  в себя.

Если пространством основных функций является пространство  $\mathcal{S}(E^n)$ , обобщенная операторная функция  $A(x)$  имеет сопряженную функцию и для любых векторов  $\xi, \eta \in D$  функционал  $\langle A(f) \xi, \eta \rangle$  непрерывен в топологии пространства  $\mathcal{S}$ , то можно придать смысл оператора с областью определения  $D$  выражению

$$\int g(x_1, \dots, x_m) A(x_1) \dots A(x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

где  $g \in \mathcal{S}(E^{mn})$  (операторный аналог теоремы о ядре).

Операторная обобщенная функция  $A(x)$  называется сильным (слабым) пределом операторных обобщенных функций  $A_n(x)$ , когда для любой основной функции  $f$  операторы  $A_n(f)$  сильно (слабо) сходятся к оператору  $A(f)$ .

Говорят, что векторная обобщенная функция  $\varphi(x)$  — собственная для оператора  $A$ , если

$$A\varphi(x) = \lambda(x) \varphi(x),$$

или, точнее, если  $A\varphi(f) = \varphi(\lambda f)$ .

Справедлива следующая важная теорема: для всякого самосопряженного оператора  $A$  существует такая обобщенная векторная собственная функция  $\varphi(x)$ , нормированная на  $\delta$ -функцию, что множество векторов вида  $\varphi(f) = \int f(x) \varphi(x) dx$  всюду плотно. Эта теорема — одна из форм известного утверждения:

у всякого самосопряженного оператора есть полная система обобщенных собственных векторов.

До сих пор не уточнялась природа множества, которое пробегает аргумент  $x$  обобщенной функции. Обычно оно является евклидовым пространством. Однако существуют и другие возможности; важно только, чтобы для функций на этом множестве было определено понятие интеграла, обладающее обычными свойствами (иными словами, чтобы это множество представляло собой пространство с мерой).

Вектор  $\Phi$  называется циклическим вектором семейства обобщенных операторных функций  $A_1(x), \dots, A_n(x)$ , если это циклический вектор семейства операторов вида  $A_i(f)$ , т. е. линейные комбинации векторов  $A_{i_1}(f_1) \dots A_{i_n}(f_n)$   $\Phi$  образуют всюду плотное множество.

### § А.3. Фоковское пространство

Под фоковским пространством  $F(X)$  понимается гильбертово пространство, составленное из так называемых фоковских столбцов:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(\xi_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

где  $\varphi_n$  — симметричная функция переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , пробегающих пространство  $X$  (как правило, пространство  $X$  — евклидово пространство  $E^n$ , но вообще  $X$  может быть произвольным пространством с мерой). Скалярное произведение двух фоковских столбцов  $\varphi$  и  $\varphi'$  определяется формулой

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \overline{\varphi'_n(\xi_1, \dots, \xi_n)} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Если состояние одного бозона описывается функцией  $f(\xi)$ , аргумент которой пробегает множество  $X$ , то симметричная функция  $\varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$  описывает систему из  $n$  тождественных бозонов. Поэтому можно сказать, что фоковский столбец описывает состояние системы из неопределенного числа тождественных бозонов.

Определим в фоковском пространстве операторную обобщенную функцию  $a(\xi)$  следующим образом:

$$a(\xi) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(\xi_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\xi) \\ \sqrt{2} \varphi_2(\xi_1, \xi) \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \varphi_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Точнее, чтобы задать операторную обобщенную функцию  $a(\xi)$ , следует задать операторы  $a(f) = \int f(\xi) a(\xi) d\xi$  с помощью соотношения

$$a(f) \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(\xi_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int f(\xi) \varphi_1(\xi) d\xi \\ \sqrt{2} \int f(\xi) \varphi_2(\xi_1, \xi) d\xi \\ \vdots \\ \sqrt{n+1} \int f(\xi) \varphi_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n, \xi) d\xi \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Операторы  $a(f)$  определены на множестве  $D$ , составленном из фоковских столбцов с конечным числом отличных от тождественного нуля функций, и переводят это множество в себя. Операторы  $a(f)$  носят названия операторов уничтожения, а сопряженные к ним операторы  $a^+(f) = \int \overline{f(\xi)} a^+(\xi) d\xi$  — операторов рождения [ $a^+(f)$  также определены на множестве  $D$  и переводят его в себя]. Это название объясняется тем, что  $a(f)$  переводят  $n$ -частичное состояние в  $(n-1)$ -частичное  $a^+(f)$  — в  $(n+1)$ -частичное [состояние называется  $n$ -частичным, если оно описывается фоковским столбцом, в котором отлична от нуля лишь функция  $\varphi_n(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ].

Ради краткости часто говорят не об операторной обобщенной функции  $a(\xi)$  и сопряженной к ней операторной обобщен-

ной функции  $a^+(\xi)$ , а об операторах уничтожения  $a(\xi)$  и рождения  $a^+(\xi)$ . Легко убедиться в справедливости соотношений:

$$\begin{aligned} [a(\xi), a(\xi')] &= [a^+(\xi), a^+(\xi')] = 0; \\ [a(\xi), a^+(\xi')] &= \delta(\xi, \xi'). \end{aligned}$$

Они называются каноническими перестановочными соотношениями (CCR). Если в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  заданы операторные обобщенные функции  $a(\xi)$ ,  $a^+(\xi)$ , удовлетворяющие CCR, то говорят, что в  $\mathcal{H}$  задано представление CCR.

Обозначим  $\theta$  фоковский столбец

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Он называется *фоковским вакуумом*. Нетрудно видеть, что

$$a(\xi) \theta = 0.$$

Представление CCR называется фоковским, если в пространстве  $\mathcal{H}$  этого представления существует циклический вектор  $\Phi_0$  семейства операторных обобщенных функций  $a^+(\xi)$ ,  $a(\xi)$ , удовлетворяющий условию  $a(\xi) \Phi_0 = 0$ . Можно доказать, что всякое фоковское представление унитарно эквивалентно построенному выше представлению CCR в пространстве Фока, т. е. существует унитарный оператор  $\alpha$ , отображающий фоковское пространство на пространство  $\mathcal{H}$  и удовлетворяющий условиям  $\alpha a(\xi) = a(\xi) \alpha$ ,  $\alpha a^+(\xi) = a^+(\xi) \alpha$ ,  $\alpha \theta = \Phi_0$ . Оператор  $\alpha$  определяется этими условиями однозначно (подробнее см., например, [9]).

К числу простейших операторов в фоковском пространстве относятся операторы

$$H = \int \omega(\xi) a^+(\xi) a(\xi) d\xi. \quad (\text{A.2})$$

Векторная обобщенная функция  $a^+(\xi_1) \dots a^+(\xi_n) \theta$  является собственной функцией оператора вида (A.2):

$$\begin{aligned} H a^+(\xi_1) \dots a^+(\xi_n) \theta &= (\omega(\xi_1) + \dots + \omega(\xi_n)) \times \\ &\times a^+(\xi_1) \dots a^+(\xi_n) \theta. \end{aligned}$$

## § А.4. Оператор эволюции

Для зависящего от времени гамильтониана  $H(t)$  оператор эволюции  $U(t, t_0)$  определяется как решение уравнения

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = H(t) U(t, t_0),$$

удовлетворяющее начальному условию  $U(t_0, t_0) = 1$ .

В случае, когда  $H(t) \equiv H$ ,

$$U(t, t_0) = \exp[-iH(t - t_0)].$$

Если  $H(t) = H_0 + V(t)$ , то определим оператор  $S(t, t_0)$  (оператор эволюции в представлении взаимодействия) формулой

$$S(t, t_0) = \exp(iH_0 t) U(t, t_0) \exp(-iH_0 t_0).$$

Он удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial S(t, t_0)}{\partial t} = \tilde{V}(t) S(t, t_0) \quad (\text{A.3})$$

с начальным условием  $S(t_0, t_0) = 1$ . Здесь

$$\tilde{V}(t) = \exp(iH_0 t) V(t) \exp(-iH_0 t).$$

Уравнение (A.3) вместе с начальным условием эквивалентно интегральному уравнению

$$S(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \tilde{V}(\tau) S(\tau, t_0) d\tau.$$

Решая его методом итераций, получаем представление оператора  $S(t, t_0)$  в форме

$$\begin{aligned} S(t, t_0) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^m \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{m-1}} dt_m \tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_m) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^m \frac{1}{m!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t dt_1 \dots dt_m T(\tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_m)), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где  $T(\tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_m))$  — произведение операторов  $\tilde{V}(t_1), \dots, \tilde{V}(t_m)$ , расположенных в порядке убывания времени ( $T$ -произведение).

Адиабатический оператор эволюции  $U_\alpha(t, t_0)$ , соответствующий паре операторов  $H, H_0$ , определяется как оператор

эволюции, построенный по зависящему от времени гамильтониану  $H_\alpha(t) = H_0 + \exp(-|\alpha|t)V$ , где  $V = H - H_0$ .

Адиабатической  $S$ -матрицей называется оператор

$$S_\alpha = s \lim_{t \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow -\infty} S_\alpha(t, t_0), \quad (\text{A.5})$$

где

$$S_\alpha(t, t_0) = \exp(iH_0 t) U_\alpha(t, t_0) \exp(-iH_0 t_0).$$

Из соотношения (A.4) вытекает, что оператор (A.5) может быть представлен в виде

$$S_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^m \frac{1}{m!} \int \dots \int \exp(-\alpha|t_1| - \dots - \alpha|t_m|) \times \\ \times T(\tilde{V}(t_1) \dots \tilde{V}(t_m)) dt_1 \dots dt_m.$$

### § А.5. Механика систем с бесконечным числом степеней свободы

Функционал  $F(f)$ , заданный на гильбертовом пространстве  $R$ , называется дифференцируемым, если для любого вектора  $f \in R$  существует такой непрерывный линейный функционал  $l_f(h)$ , что

$$F(f+h) = F(f) + l_f(h) + \varepsilon(f, h),$$

где  $\varepsilon(f, h)$  стремится к нулю быстрее, чем  $h$ , т. е.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\varepsilon(f, h)\|}{\|h\|} = 0$ . Функционал  $l_f(h)$  называется дифференциалом функционала  $F(f)$  в точке  $f$ .

Предположим, что гильбертово пространство  $R$  реализовано как пространство функций; для определенности будем считать  $R = L^2(E^3)$ . Тогда

$$l_f(h) = \int l_f(x) h(x) dx.$$

Функция  $l_f(x)$  называется вариационной производной функционала  $F(f)$  и обозначается  $\delta F(f)/\delta f(x)$ . Таким образом,

$$F(f+h) = F(f) + \int \frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} h(x) dx + \varepsilon(f, h).$$

(Определение дифференциала сохраняет смысл для функционалов, заданных на произвольном банаховом пространстве  $R$ ; определение вариационной производной пригодно, если про-



пространство  $R'$  линейных функционалов на  $R$  реализовано как пространство функций.)

Функционал  $F(f)$  на  $L^2(E^3)$  называется аналитическим, если он может быть представлен в форме:

$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int F_n(x_1, \dots, x_n) f(x_1) \dots f(x_n) d^n x.$$

Функции  $F_n(x_1, \dots, x_n)$  считаем симметричными. Они называются коэффициентными функциями функционала  $F(f)$ , а функционал  $F(f)$  — производящим функционалом функций  $F_n(x_1, \dots, x_n)$ .

Простое формальное вычисление показывает, что

$$\frac{\delta F(f)}{\delta f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int F_n(x, x_1, \dots, x_{n-1}) f(x_1) \dots f(x_{n-1}) d^{n-1} x;$$

при некоторых условиях его нетрудно строго обосновать.

Далее, очевидно,

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n F(f)}{\delta f(x_1) \dots \delta f(x_n)} \right|_{f=0}.$$

Рассмотрим теперь механическую систему, состояние которой в момент времени  $t$  описывается функцией  $\varphi(x, t)$ . Будем считать, что ее уравнения движения записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(x, t)} \right) = \frac{\delta L}{\delta \varphi(x, t)},$$

где  $L(\varphi(x), \dot{\varphi}(x))$  — функционал Лагранжа. Значения функций  $\varphi(x, t)$ ,  $\dot{\varphi}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, t)$  и  $\pi(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(x, t)}$  имеют смысл соответственно обобщенных координат, обобщенных скоростей и обобщенных импульсов. Если, пользуясь соотношениями  $\pi(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}(x)}$ , можно однозначно выразить обобщенные скорости  $\dot{\varphi}(x)$  через  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$  (функционал Лагранжа невырожден), то уравнения движения записываются в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi(x, t)}; \quad \frac{\partial \pi(x, t)}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi(x, t)}.$$

Здесь  $\mathcal{H}(\pi(x), \varphi(x))$  обозначен функционал Гамильтона, т. е. энергия

$$\int \pi(x) \dot{\varphi}(x) dx - L(\varphi(x), \dot{\varphi}(x)),$$

выраженная через  $\pi(x)$  и  $\varphi(x)$ .

Ряды теории возмущений в квантовой теории поля удобно описывать, сопоставляя каждому члену ряда некоторую совокупность графов (фeyнмановских диаграмм). Приведем основные определения и некоторые простейшие сведения из теории графов.

Под топологическим отображением понимается взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное отображение.

Топологическим отрезком называется множество, которое можно топологически отобразить на замкнутый отрезок прямой линии. Точки, переходящие при этом отображении в концы прямолинейного отрезка, называются концами или вершинами топологического отрезка.

Графом называется совокупность топологических отрезков (ребер), каждая пара которых либо совсем не имеет общих точек, либо имеет один общий конец.

Граф считается ориентированным, если на каждом из составляющих его отрезков выбрано определенное направление.

Объединение составляющих граф отрезков называется телом графа.

Под вершинами графа понимаются вершины (концы) составляющих его отрезков.

Два графа называются топологически эквивалентными, если существует топологическое отображение тела одного графа на тело другого графа, при котором вершины переходят в вершины. Это отображение носит название топологической эквивалентности. Если графы ориентированы, то на топологическую эквивалентность накладывается дополнительное требование: она должна сохранять направление входящих в графы отрезков. Примеры графов изображены на рис. 22. Графы *a*, *б* топологически эквивалентны, граф *в* топологически не эквивалентен графам *a* и *б*.

Если в множестве отрезков, составляющих граф, выделено некоторое подмножество, то это меньшее множество также образует граф, который назовем подграфом исходного графа. Подграф называется собственным, когда он не пуст и не совпадает со всем графом.

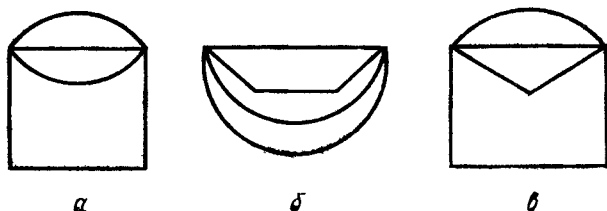


Рис. 22.

Граф называется несвязным, если его можно разбить на два собственных подграфа, т. е. разбить множество отрезков, составляющих граф, на два непустых подмножества так, чтобы никакие два отрезка из разных подмножеств не имели общих вершин. В противном случае граф называется связным. Всякий граф можно разбить на связные компоненты, т. е. разбить множество отрезков, составляющих граф, на несколько подмножеств, каждое из которых определяет связный подграф, и в то же время два отрезка из разных подмножеств не имеют общих вершин. Например, граф рис. 23 состоит из трех связных компонент.

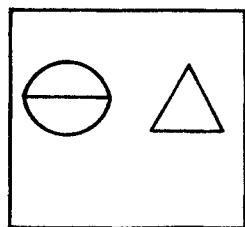


Рис. 23.

Вершина графа называется внешней, если она принадлежит только одному отрезку. В противном случае она называется внутренней. Отрезок называется внутренним, если обе его вершины — внутренние, и внешним, если хотя бы одна из его вершин — внешняя.

Нередко приходится рассматривать графы, состоящие из отрезков нескольких типов (чаще всего встречаются графы, состоящие из отрезков двух типов; отрезки одного типа изображаются на чертежах пунктиром, отрезки другого типа — сплошными линиями). Такие графы мы называем диаграммами. (Это употребление слова «диаграмма» нестандартно; в физиче-

ской литературе термин «диаграмма» употребляется как синоним термина «граф».)

Две диаграммы называются топологически эквивалентными, если существует топологическое отображение тела одной диаграммы на тело другой, при котором вершины переходят в вершины, а отрезки — в отрезки того же тела. (Отрезки некоторых типов могут быть ориентированными; тогда топологическая эквивалентность должна сохранять их ориентацию.)

Фиксируем ориентированный граф  $\alpha$ . Множество отрезков, составляющих граф, обозначим  $R$ , число этих отрезков —  $r$ . Множество вершин графа обозначим  $V$ , их число —  $v$ . Будем говорить, что в графе  $\alpha$  задана одномерная цепь, если каждому отрезку  $\rho \in R$  сопоставлено действительное число, и что задана нульмерная цепь, если каждой вершине  $\beta \in V$  сопоставлено действительное число. Иными словами, под одномерной и нульмерной цепями понимаются действительные функции соответственно на  $R$  и на  $V$ .

Естественным образом определяется сложение цепей и умножение их на число; множество одномерных цепей  $C_1$  представляет собой  $r$ -мерное линейное пространство, множество нульмерных цепей  $C_0$  представляет собой  $v$ -мерное линейное пространство относительно этих операций. Каждому отрезку  $\rho \in R$  сопоставим одномерную цепь, принимающую значение 1 на этом отрезке и значение 0 на остальных отрезках; будем ее отождествлять с отрезком  $\rho$  и обозначать тем же символом. Аналогично каждой вершине сопоставляется нульмерная цепь, которая отождествляется с этой вершиной. Очевидно, всякую одномерную цепь можно представлять как линейную комбинацию отрезков, а нульмерную цепь — как линейную комбинацию вершин.

Под границей  $\partial\rho$  отрезка  $\rho \in R$  понимается нульмерная цепь,  $\sigma_\rho - \beta_\rho$ , где  $\beta_\rho$  — начало отрезка  $\rho$ ,  $\sigma_\rho$  — его конец (напомним, что рассматривается ориентированный граф, поэтому все отрезки  $\rho \in R$  ориентированы). Под границей  $\partial\alpha$  одномерной цепи  $\alpha$

$$\alpha = \sum_{\rho \in R} k_\rho \rho \in C_1$$

понимается линейная комбинация границ составляющих ее отрезков:

$$\partial\alpha = \sum_{\rho \in R} k_\rho \partial\rho = \sum_{\rho \in R} k_\rho (\sigma_\rho - \beta_\rho).$$

Таким образом, граница  $\partial$  представляет собой линейный оператор, действующий из  $C_1$  в  $C_0$ .

Циклом назовем одномерную цепь, граница которой равна нулю; множество всех циклов обозначим через  $Z$ . Очевидно,  $Z$  — линейное подпространство пространства  $C_1$ . Размерность пространства  $Z$  (число линейно независимых циклов) обозначим  $b_1$ . Например, для графа на рис. 24 базис пространства  $Z$  состоит из циклов  $\rho_2$  —  $\rho_3$ ,  $\rho_2 - \rho_4$ .

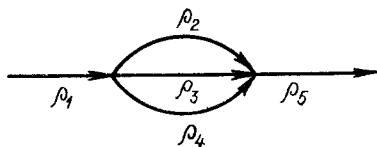


Рис. 24.

Покажем, что для связного графа

$$b_1 = r - v + 1.$$

Рассмотрим линейное пространство  $\partial C_1$  (множество значений граничного оператора  $\partial$ ). Всякая цепь

$$\sum_{v \in V} l_v v \in \partial C_1$$

удовлетворяет условию

$$\sum_{v \in V} l_v = 0, \quad (\text{Б.1})$$

поскольку этому условию удовлетворяет граница любого отрезка. Для связного графа справедливо и обратное утверждение: если для цепи

$$\sum_{v \in V} l_v v \in C_0$$

выполняется (Б.1), то она принадлежит пространству  $\partial C_1$ . Действительно, всякую цепь, удовлетворяющую (Б.1), можно представить как линейную комбинацию цепей вида  $\beta - \gamma$ , где  $\beta, \gamma \in V$  [это вытекает, например, из подсчета размерностей: линейные комбинации цепей вида  $\beta - \gamma$  образуют подпространство размерности  $v - 1$ , как и цепи, удовлетворяющие условию (Б.1)]. Если граф связан, то для двух любых вершин  $\beta, \gamma$  найдется такая последовательность вершин  $\beta_0 = \gamma, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n = \beta$ , что  $\beta_{i-1}, \beta_i$  принадлежат отрезку  $\rho_i \in R$  и, стало быть,  $\partial \rho_i = \sigma_i (\beta_i - \beta_{i-1})$ , где  $\sigma_i = \pm 1$ . Отсюда

$$\beta - \gamma = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta_{i-1}) = \partial \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i \rho_i \right) \in \partial C_1.$$

Таким образом, мы установили, что для связного графа пространство  $\partial C_1$  имеет размерность  $v - 1$ , т. е. оператор  $\partial$  отобра-

ражает  $r$ -мерное пространство на  $(v - 1)$ -мерное; пространство цепей, которые он переводит в нуль (пространство циклов), имеет размерность  $r - v + 1$ .

Если граф несвязен, то размерность  $b_1$  пространства циклов равна сумме размерностей пространств циклов для его связных компонент, поэтому

$$b_1 = r - v + b_0,$$

где  $b_0$  — число связных компонент.

Как уже упоминалось, ряды теории возмущений удобно изображать с помощью диаграмм. Каждой диаграмме сопоставляется функция, определяемая некоторым интегралом; в его подынтегральном выражении содержится несколько  $\delta$ -функций. Займемся вопросом о сокращении кратности интеграла с помощью  $\delta$ -функций. Прежде всего рассмотрим произвольный интеграл, под знаком которого есть  $\delta$ -функции от линейных комбинаций аргументов, а затем перейдем к интегралам, соответствующим диаграммам.

Если в подынтегральной функции содержится  $\delta$ -функция вида  $\delta(\mathbf{l}\mathbf{x}) = \delta(l_1 x_1 + \dots + l_n x_n)$ , то кратность интеграла можно уменьшить на единицу:

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{l}\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int f(x_1, \dots, x_n) \delta(l_1 x_1 + \dots + l_n x_n) dx_1 \dots dx_n = \\ &= \frac{1}{l_n} \int f\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\left(\frac{l_1}{l_n} x_1 + \dots + \frac{l_{n-1}}{l_n} x_{n-1}\right)\right) dx_1 \dots dx_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

Многократным применением соотношения (Б.2) интеграл

$$\begin{aligned} \int f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{l}^1 \mathbf{x}) \dots \delta(\mathbf{l}^k \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ = \int f(x_1, \dots, x_n) \delta(l_1^1 x_1 + \dots + l_n^1 x_n) \dots \times \\ \times \delta(l_1^k x_1 + \dots + l_n^k x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

сводим к  $(n - k)$ -кратному интегралу. (Аккуратное определение интегралов (Б.3) изложено, например, в книге [35]. Можно считать, что описанная процедура дает определение этого интеграла.)

При вычислении интеграла (Б.3) удобно пользоваться тем, что он с точностью до постоянного множителя представляет собой интеграл от функции  $f$  по линейному подпространству, определяемому уравнениями

$$\mathbf{l}^1 \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{l}^k \mathbf{x} = 0.$$

Отметим также следующее полезное соотношение:

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{l}^1 \mathbf{x}) \dots \delta(\mathbf{l}^k \mathbf{x}) = \\ & = \delta(\mathbf{l}^1 \mathbf{x}) \dots \delta(\mathbf{l}^{k-1} \mathbf{x}) \delta(\mathbf{l}^k \mathbf{x} + \lambda_1 \mathbf{l}^1 \mathbf{x} + \dots + \lambda_{k-1} \mathbf{l}^{k-1} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

Чтобы интеграл (Б.3) имел смысл, необходима линейная независимость векторов  $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_k$ , в противном случае при последовательном применении соотношения (Б.2) мы встретимся с бессмысленным выражением  $\delta(0)$  [это видно, например, из соотношения (Б.4)].

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\begin{aligned} & \int f(x_1, \dots, x_n) \delta(\mathbf{l}^1 \mathbf{x}) \dots \delta(\mathbf{l}^k \mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \delta(\mathbf{a}^1 \mathbf{x}' + \mathbf{b}^1 \mathbf{x}'') \dots \delta(\mathbf{a}^k \mathbf{x}' + \mathbf{b}^k \mathbf{x}'') d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

[здесь  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_h)$ ,  $\mathbf{x}'' = (x_{h+1}, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{a}^i$  —  $h$ -мерные векторы,  $\mathbf{b}^i$  —  $(n - h)$ -мерные векторы, интеграл берется только по переменным  $x_1, \dots, x_h$ ]. Он также имеет смысл лишь в случае, когда векторы  $\mathbf{l}^1, \dots, \mathbf{l}^k$  линейно независимы. С помощью последовательного применения соотношения (Б.4) он приводится к виду

$$\begin{aligned} & \int f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \delta(\mathbf{c}^1 \mathbf{x}' + \mathbf{d}^1 \mathbf{x}'') \dots \delta(\mathbf{c}^s \mathbf{x}' + \mathbf{d}^s \mathbf{x}'') d\mathbf{x}' \times \\ & \quad \times \delta(\mathbf{d}^{s+1} \mathbf{x}'') \dots \delta(\mathbf{d}^k \mathbf{x}''). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{c}^1, \dots, \mathbf{c}^s$  — максимальное линейно независимое подмножество векторов  $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k$ .

Таким образом, кратность рассматриваемого интеграла благодаря  $\delta$ -функциям снижается до  $h - s$ , где  $s$  — ранг системы векторов  $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k$ ; в функции от переменных  $x_{h+1}, \dots, x_n$ , получающейся после взятия интеграла, содержится произведение  $k - s$   $\delta$ -функций. Чтобы определить число  $s$ , достаточно найти размерность  $t$  линейного подпространства, выделяемого в  $n$ -мерном пространстве уравнениями

$$\mathbf{l}^1 \mathbf{x} = 0, \dots, \mathbf{l}^k \mathbf{x} = 0, \mathbf{x}'' = 0^*.$$

В самом деле, легко видеть, что  $t = h - s$ , т. е.  $t$  равняется кратности данного интеграла, уже упрощенного с помощью  $\delta$ -функций. Число  $\delta$ -функций, остающихся после взятия интеграла, равно  $k - (h - t) = k - h + t$ .

\* Очевидно, рассматриваемый интеграл можно представлять как интеграл от функции  $f(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$  по многообразию, получающемуся из описанного подпространства с помощью сдвига.

Пусть теперь задан ориентированный граф  $\alpha$ . Считаем отрезки, составляющие граф, перенумерованными, причем первые номера  $1, 2, \dots, h$  присвоим внутренним отрезкам, а последние номера  $h + 1, \dots, n$  — внешним. Предположим также, что у графа  $\alpha$  нет связных компонент, содержащих только одно ребро (т. е. каждое внешнее ребро имеет ровно одну внешнюю вершину).

Рассмотрим интеграл

$$\int f(k_1, \dots, k_n) \prod_{\sigma} \delta(1^{\sigma} k) dk_1 \dots dk_n. \quad (\text{Б.5})$$

где функция  $f$  зависит от  $n$  переменных, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с отрезками, составляющими граф. Интеграл берется по переменным, соответствующим внутренним отрезкам, а его  $\delta$ -функции находятся во взаимно однозначном соответствии с внутренними вершинами: каждой внутренней вершине  $\sigma$  сопоставляется  $\delta$ -функция  $\delta(1^{\sigma} k) = \delta(\sum k_{i_{\alpha}} - \sum k_{j_{\beta}})$ , где  $k_{i_{\alpha}}, k_{j_{\beta}}$  — переменные, соответствующие отрезкам, для которых вершина  $\sigma$  служит началом и концом соответственно.

Как было сказано выше, с помощью  $\delta$ -функций можно интеграл (Б.5) свести к  $t$ -кратному, где  $t$  — размерность подпространства, определяемого соотношениями:

$$1^{\sigma} k = 0; \quad k_{h+1} = \dots = k_n = 0$$

( $\sigma$  пробегает все внутренние вершины). Ясно, что это подпространство совпадает с подпространством  $Z$ , состоящим из циклов. Таким образом,  $t = b_1$ , или

$$t = r - v + b_0, \quad (\text{Б.6})$$

где  $b_0$  — число связных компонент графа. В частности, для связного графа

$$t = r - v + 1,$$

и после взятия интеграла остается одна  $\delta$ -функция линейной комбинации переменных  $k_{h+1}, \dots, k_n$ . В самом деле, по общей формуле число остающихся  $\delta$ -функций равно

$$\omega - u + t,$$

где  $\omega$  — число внутренних вершин,  $u$  — число внутренних отрезков. По предположению у каждого внешнего ребра есть ровно одна внешняя вершина, поэтому

$$\omega - u = v - r,$$



и, значит, число остающихся  $\delta$ -функций равно  $(v - r) + (r - v + 1) = 1$ . Легко показать, что остающаяся  $\delta$ -функция будет записываться в виде

$$\delta \left( \sum_{i=h+1}^n \varepsilon_i k_i \right),$$

где  $\varepsilon_i = 1$ , если соответствующее внешнее ребро имеет внешнюю вершину своим началом, и  $\varepsilon_i = -1$ , если внешнее ребро имеет внешнюю вершину своим концом.

Итак, интеграл (Б.5) для связного графа можно записать следующим образом:

$$\delta \left( \sum_{i=h+1}^n \varepsilon_i k_i \right) \int f(m^1 \mathbf{q} + n^1 \mathbf{k}', \dots, m^r \mathbf{q} + n^r \mathbf{k}') d\mathbf{q},$$

где переменные  $q_1, \dots, q_{b_1}$  находятся во взаимно однозначном соответствии с циклами,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{b_1})$ ,  $\mathbf{k}' = (k_{h+1}, \dots, k_n)$ .

Изучим теперь интеграл, отвечающий в  $(\mathbf{k}, \omega)$ -представлении диаграмме, построенной по трансляционно-инвариантному гамильтониану. Будем считать, что все внешние вершины принадлежат звездам (если в диаграмме есть внешние вершины, принадлежащие ребрам, то, удаляя эти ребра, мы получим диаграмму из рассматриваемого класса, причем из интеграла, соответствующего ей, можно получить интеграл, отвечающий исходной диаграмме, умножением на  $\tilde{D}_F(k_1) \dots \tilde{D}_F(k_w)$ , где переменные  $k_1, \dots, k_w$  соответствуют внешним вершинам).

Исследуемый интеграл запишем в виде

$$\int f(k_1, \dots, k_v) \prod_{\sigma} \delta(\lambda^{\sigma} \mathbf{k}) \prod_{\rho} \delta(\mathbf{v}^{\rho} \mathbf{k}) dk_{w+1} \dots dk_v. \quad (\text{Б.7})$$

Все вершины диаграммы перенумерованы. Номера  $1, \dots, w$  присвоены внешним, а номера  $w + 1, \dots, v$  — внутренним вершинам. Вершине с номером  $i$  сопоставлен четырехмерный вектор  $k_i$ ,  $4v$ -мерный вектор  $(k_1, \dots, k_v)$  обозначен  $\mathbf{k}$ . Каждому ребру  $\rho$  диаграммы соответствует  $\delta$ -функция  $\delta(\mathbf{v}^{\rho} \mathbf{k})$ , а каждой звезде —  $\delta$ -функция  $\delta(\lambda^{\sigma} \mathbf{k})$ , где  $\mathbf{v}^{\rho} \mathbf{k}$  — сумма четырехмерных векторов, соответствующих вершинам ребра  $\rho$ , а  $\lambda^{\sigma} \mathbf{k}$  — сумма четырехмерных векторов, отвечающих вершинам звезды  $\sigma$ .

Будем считать, что все ребра как-либо ориентированы; обозначим  $\alpha(\rho)$  и  $\beta(\rho)$  начало и конец ребра  $\rho$ . Тогда с по-

мощью  $\delta$ -функций  $\delta(v^\rho \mathbf{k}) = \delta(k_\alpha(\rho) + k_\beta(\rho))$  можно уменьшить кратность интеграла (Б.7), проинтегрировав по всем переменным  $k_\beta(\rho)$ , отвечающим концам ребер. Останется только интегрирование по  $k_\alpha(\rho)$ , находящимся во взаимно однозначном



Р и с. 25.



Р и с. 26.

соответствии с ребрами. Таким образом, интеграл (Б.7) преобразуется к виду

$$\int g(k_1, \dots, k_w, p_1, \dots, p_r) \prod_{\sigma} \delta(\tau^{\sigma} \mathbf{k} + \mu_1^{\sigma} \mathbf{p} - \mu_2^{\sigma} \mathbf{p}) dp_1 \dots dp_r, \quad (\text{Б}8)$$

где  $k_1, \dots, k_w$  — четырехмерные векторы, отвечающие внешним вершинам;  $p_1, \dots, p_r$  — четырехмерные векторы, однозначно соответствующие ребрам;  $\tau^{\sigma} \mathbf{k}$  — сумма векторов, отвечающих внешним вершинам звезды  $\sigma$ ;  $\mu_1^{\sigma} \mathbf{p}$  и  $\mu_2^{\sigma} \mathbf{p}$  — сумма векторов, отвечающих ребрам соответственно с началом и с концом в вершине звезды  $\sigma$ .

Построим по нашей диаграмме ориентированный граф, ребрами которого служат, во-первых, линии, входящие в состав звезд и начинающиеся во внешних вершинах, и, во-вторых, отрезки, образующиеся при объединении ребер диаграммы с примыкающими к ним пунктирными линиями. На рис. 25 изображен граф, полученный описанным способом из диаграммы рис. 26. Все ребра графа изображены сплошными линиями. Легко убедиться, что интеграл (Б.8) совпадает с интегралом, сопоставленным графу с помощью (Б.5), если только считать в (Б.5) переменные  $k_i$  четырехмерными векторами. Применяя соотношение (Б.6) и используя все  $\delta$ -функции в интеграле (Б.7), можно свести его к  $t$ -кратному, где  $t$  — учетверенное число линейно независимых циклов в диаграмме:

$$t = 4 (r - s + b_0); \quad (\text{Б}9)$$

здесь  $r$  — число ребер,  $s$  — число звезд в диаграмме,  $b_0$  — число связных компонент. Если диаграмма связна, то из (Б.9) вытекает, что после взятия интеграла (Б.7) остается одна четырехмерная  $\delta$ -функция [а именно, остается  $\delta(k_1 + \dots + k_w)$ , выражающая закон сохранения четырехмерного импульса].

Как уже отмечалось, доказательство перенормируемости взаимодействия  $g\varphi^4$  не проще доказательства общей теоремы Боголюбова — Парасюка о том, что так называемая вычитательная процедура приводит (в рамках теории возмущений) к конечной лоренц-инвариантной матрице рассеяния. При доказательстве теоремы Боголюбова — Парасюка, видимо, удобнее всего пользоваться  $\alpha$ -представлением диаграмм (см. [6, 27, 29]), но поскольку мы не собираемся проводить полное доказательство этой теоремы, а займемся лишь обоснованием некоторых утверждений гл. 6, то предпочтем не переходить к  $\alpha$ -представлению. При исследовании сходимости диаграммы воспользуемся указанным в работе [36] достаточным условием суммируемости (абсолютной интегрируемости) функции.

Пусть каждому подпространству  $R \subset E^n$  сопоставлено действительное число  $\alpha(R)$ . Будем говорить, что функция  $f$ , заданная на пространстве  $E^n$  и суммируемая в каждой ограниченной области, принадлежит классу  $A_n$  и имеет асимптотические коэффициенты  $\alpha(R)$ , если для любых линейно независимых векторов  $l^{(1)}, \dots, l^{(m)} \in E^n$  и всякой ограниченной области  $W$  выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & f(\eta_1 \dots \eta_m \cdot l^{(1)} + \eta_2 \dots \eta_m \cdot l^{(2)} + \dots + \eta_m \cdot l^{(m)} + \omega) = \\ & = O(\eta_1^{\alpha\{l^{(1)}\}} (\ln \eta_1)^{\beta_1} \eta_2^{\alpha\{l^{(1)}, l^{(2)}\}} (\ln \eta_2)^{\beta_2} \dots \eta_m^{\alpha\{l^{(1)}, \dots, l^{(m)}\}} (\ln \eta_m)^{\beta_m}), \end{aligned} \tag{B.1}$$

где  $\eta_1, \dots, \eta_m$  независимо стремятся к бесконечности,  $\omega \in W$ ,  $\beta_i$  зависит от векторов  $l^{(1)}, \dots, l^{(i)}$ . (Здесь  $\{l^{(1)}, \dots, l^{(i)}\}$  — наименьшее подпространство, содержащее вектора  $l^{(1)}, \dots, l^{(i)}$ ). Соотношение (B.1) означает, что можно подобрать числа  $b_1, \dots, b_m \geq 1$  и  $M > 0$ , зависящие от  $l^{(1)}, \dots, l^{(m)}$  и области  $W$ ,

для которых справедливо неравенство

$$|f(\eta_1 \dots \eta_m l^{(1)} + \dots + \eta_m l^{(m)} + \omega)| \leq M \eta_1^{\alpha \{l^{(1)}\}} \times \\ \times (\ln \eta_1)^{\beta_1} \dots \eta_m^{\alpha \{l^{(1)} \dots l^{(m)}\}} (\ln \eta_m)^{\beta_m} \quad (B.2)$$

при любых  $\eta_1 \geq b_1, \dots, \eta_m \geq b_m, \omega \in W$ .

Если  $m = 1$ , то соотношение (B.2) принимает вид

$$|f(\eta \cdot l)| \leq M \eta^{\alpha \{l\}} (\ln \eta)^{\beta}, \quad (B.3)$$

т. е. число  $\alpha \{l\}$  может быть истолковано как степень возрастания функции  $f(\eta l)$ . В общем случае оно интерпретируется как степень возрастания функции  $f(\eta l)$  для «типичного» вектора  $l \in R$  (в частности, для  $R = \{l^{(1)}, \dots, l^{(m)}\}$  и любого  $l \in R$  вида  $l^{(1)} \eta_1 \dots \eta_{m-1} + \dots + l^{(2)} \eta_2 \dots \eta_{m-1} + \dots + l^{(m)}$ , где  $\eta_i \geq b_i$ , при достаточно больших  $\eta$  выполняется неравенство  $|f(\eta l)| \leq M \eta^{\alpha(R)} (\ln \eta)^{\beta}$ ).

Рассмотрим интеграл

$$f_I(x) = \int_I d\xi f(x + \xi),$$

где  $I$  —  $k$ -мерное подпространство пространства  $E^n$ ,  $x \in E^n$ . Достаточно рассматривать функцию  $f_I(x)$  только для  $x$ , принадлежащих ортогональному дополнению  $I^\perp$  пространства  $I$ . Очевидно,  $f_I(x + a) = f_I(x)$ , если  $a \in I$ , поэтому, зная  $f_I(x)$  для  $x \in I^\perp$ , можно найти  $f_I(x)$  для всех  $x \in E^n$ .

Вейнберг доказал следующую теорему [36]. Пусть функция  $f$  на пространстве  $E^n$  принадлежит классу  $A_n$  и имеет асимптотические коэффициенты  $\alpha(R)$ . Предположим, что для всякого подпространства  $R \subset I$  выполнено неравенство

$$\alpha(R) + \dim R < 0,$$

где  $\dim R$  — размерность пространства  $R$ . Тогда:

а) интеграл  $\int_I d\xi f(x + \xi)$  существует (точнее, для почти всех  $x$  функция  $f(x + \xi)$  является суммируемой функцией от  $\xi \in I$ );

б) функция  $f_I(x) = \int_I f(x + \xi) d\xi$  принадлежит классу  $A_{n-k}$  и имеет асимптотические коэффициенты  $\alpha_I(S)$ , определяемые соотношением

$$\alpha_I(S) = \sup_{\Delta R = S} (\alpha(R) + \dim R - \dim S),$$

где  $\Lambda$  — ортогональная проекция пространства  $E^n$  на  $I^\perp$  (т. е.  $\Lambda$  задается условиями  $\Lambda x = 0$  для  $x \in I$ ,  $\Lambda x = x$  для  $x \in I^\perp$ ).

Доказательство теоремы проводится индукцией по  $k$ . Основной этап доказательства — проверка обоих утверждений при  $k = 1$  [первое из них сразу следует из неравенства (В.3), второе доказывается довольно длинными рассуждениями]. Эта проверка не только дает начало индукции, но и позволяет без труда провести шаг индукции\*.

Применим теперь условие суммируемости Вейнберга к установлению сходимости диаграмм. Рассмотрим произвольную вершинную диаграмму  $\sigma$  для взаимодействия вида  $\int P(\varphi(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$ . Считаем, что она задается интегралом от функции

$$f(p) = \prod_{i=1}^r \tilde{D}_F(p_i) = \prod_{i=1}^r \tilde{D}_F(\pi_i(p))$$

по линейному многообразию, содержащемуся в  $4r$ -мерном пространстве  $E^{4r}$ . Здесь  $p_1, \dots, p_r$  — точки четырехмерного пространства, соответствующие ребрам диаграммы,  $p = (p_1, \dots, p_r) \in E^{4r}$ ,  $\pi_i$  — отображение, сопоставляющее точке  $(p_1, \dots, p_r) \in E^{4r}$  точку  $p_i \in E^4$ ,  $\tilde{D}_F(k) = i/(k^2 - m^2 + i0)$ . Точнее говоря, интересующая нас диаграмма записывается в виде

$$\int_I f(p+q) dq,$$

где  $I$  — подпространство в  $4r$ -мерном пространстве, выделяемое уравнениями

$$\sum_{i \in V_\lambda} \pi_i(q) = 0. \quad (\text{В.4})$$

Эти уравнения находятся во взаимно однозначном соответствии со звездами диаграммы;  $V_\lambda$  обозначено множество номеров ребер, имеющих общие вершины со звездой  $\lambda$  (о приведении диаграммы к такому виду см. дополнение Б). Как отмечалось в § 19, чтобы выделить ультрафиолетовые расходимости,

\* Второе утверждение интересно и само по себе, поскольку оно позволяет исследовать поведение функций, определяемых диаграммами, при больших импульсах. Впрочем, в этом направлении позже были получены более тонкие результаты (см. [37—39]).

которыми мы занимаемся, удобно заменить функцию  $\tilde{D}_F(k) = \tilde{D}_F(\mathbf{k}, \omega)$  на функцию

$$\tilde{D}_F^\varepsilon(k) = \tilde{D}_F^\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{((1+i\varepsilon)\omega)^2 - k^2 - m^2},$$

поэтому будем исследовать интеграл вида  $\int f_\varepsilon(p+q) dq$ , где

$f_\varepsilon(p) = \prod_{i=1}^r \tilde{D}_F^\varepsilon(p_i)$ . Выберем прежде всего  $m$  линейно независимых векторов  $l^{(1)}, \dots, l^{(m)} \in I$  и оценим число  $f_\varepsilon(p)$ , где

$$p = \eta_1 \dots \eta_m l^{(1)} + \eta_2 \dots \eta_m l^{(2)} + \dots + \eta_m l^{(m)} + \omega,$$

$\eta_i$  независимо стремятся к бесконечности,  $\omega$  пробегает ограниченную область. Легко видеть, что

$$\tilde{D}_F^\varepsilon(\pi_i(p)) = \tilde{D}_F^\varepsilon(p_i) = O((\eta_\rho \eta_{\rho+1} \dots \eta_m)^{-2}).$$

Здесь число  $\rho = \rho(i)$  находится из условия

$$\pi_i(l^{(1)}) = \dots = \pi_i(l^{(\rho-1)}) = 0, \quad \pi_i(l^{(\rho)}) \neq 0.$$

Таким образом,

$$f_\varepsilon(p) = \prod_{i=1}^r \tilde{D}_F^\varepsilon(p_i) = O\left(\prod_{i=1}^r (\eta_{\rho(i)} \eta_{\rho(i)+1} \dots \eta_m)^{-2}\right).$$

Собирая вместе степени каждого  $\eta$ , получаем

$$f_\varepsilon(p) = O(\eta_1^{-2\gamma_1} \eta_2^{-2\gamma_2} \dots \eta_m^{-2\gamma_m}),$$

где  $\gamma_j$  — число индексов  $i$ , для которых  $j \geq \rho(i)$  [иначе  $\gamma_j$  можно определить как количество индексов  $i$ , для которых по крайней мере один из векторов  $\pi_i(l^{(1)}), \dots, \pi_i(l^{(j)})$  отличен от нуля].

Сопоставим каждому подпространству  $R \subset I$  множество  $\mathcal{G}(R)$ , состоящее из таких чисел  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , что по крайней мере для одного из векторов  $l \in R$  имеем  $\pi_i(l) \neq 0$ . Число элементов в множестве  $\mathcal{G}(R)$  обозначим  $\gamma(R)$ . Очевидно,  $\gamma_j = \gamma(\{l^{(1)}, \dots, l^{(j)}\})$ , поэтому из проведенных выше рассуждений вытекает справедливость соотношения (Д.15) для функции  $f_\varepsilon(p)$ , если положить  $\alpha(R) = -2\gamma(R)$ .

Итак, чтобы убедиться в сходимости диаграммы  $\sigma$ , достаточно проверить для любого подпространства выполнение неравенства  $\alpha(R) < -\dim R$ . Условимся каждому подпростран-

ству  $R \subset I$  сопоставлять поддиаграмму  $\nu(R)$  диаграммы  $\sigma$ , состоящую из ребер с номерами  $i \in \mathcal{G}(R)$  и звезд, имеющих хотя бы одну общую вершину с этими ребрами. Убедимся, что в диаграмме  $\nu(R)$  нет звезд, соединенных с остальной частью диаграммы только одним ребром (такие диаграммы мы назовем правильными).

В самом деле, пусть  $\lambda$  — какая-либо звезда диаграммы  $\sigma$ . Рассмотрим пересечение  $V_\lambda \cap \mathcal{G}(R)$  множества  $V_\lambda$  номеров ребер, имеющих общие вершины со звездой  $\lambda$ , с множеством  $\mathcal{G}(R)$ . Очевидно, для точки  $p \in R$

$$\sum_{i \in V_\lambda \cap \mathcal{G}(R)} \pi_i(p) = 0 \quad (\text{B.5})$$

это следует из уравнения (B.4) и соотношения  $\pi_i(p) = 0$  при  $i \notin \mathcal{G}(R)$ . Если множество  $V_\lambda \cap \mathcal{G}(R)$  состоит из единственного элемента  $i_0$ , то из (B.5) получаем  $\pi_{i_0}(p) = 0$  для любой точки  $p \in R$ , т. е.  $i_0 \notin \mathcal{G}(R)$ . Таким образом,  $V_\lambda \cap \mathcal{G}(R)$  не может состоять из единственного элемента, и, значит, диаграмма  $\nu(R)$  — правильная.

Размерность пространства  $R$  не превышает, очевидно, размерности подпространства  $\tilde{R}$  пространства  $I$ , выделяемого уравнениями  $\pi_i(p) = 0$ , где  $i \in \mathcal{G}(R)$ . С другой стороны, размерность  $\tilde{R}$  равна кратности интеграла, соответствующего диаграмме  $\nu(R)$  (считаем интеграл уже преобразованным с помощью содержащихся в подынтегральном выражении  $\delta$ -функций). Поскольку  $\alpha(R) = \alpha(\tilde{R})$ , имеем:

$$\alpha(R) + \dim R \leq \alpha(\tilde{R}) + \dim \tilde{R} = \omega(\nu(R)). \quad (\text{B.6})$$

Индекс диаграммы  $\nu$ , т. е. разность кратности интеграла для этой диаграммы и степени полинома в знаменателе подынтегрального выражения, обозначен  $\omega(\nu)$ . В силу (B.9) кратность интеграла равна  $4(r - s + b_0)$  и, следовательно, индекс равен

$$\omega(\nu) = 2r - 4s + 4b_0. \quad (\text{B.7})$$

Применяя соотношение (B.6) и теорему Вейнберга, убеждаемся, что для сходимости диаграммы при больших импульсах достаточно отрицательности индекса каждой ее правильной поддиаграммы.

Теперь легко получить сформулированное в § 19 утверждение: для сходимости диаграммы при больших импульсах необ-

ходимо и достаточно, чтобы для каждой ее вершинной поддиаграммы индекс был меньше нуля. Необходимость была доказана в § 19. Для проверки достаточности рассмотрим в правильной диаграмме  $\nu$  ребра, при разрезании которых диаграмма становится несвязной. При удалении таких ребер диаграмма  $\nu$  распадается на компоненты  $\rho_1, \dots, \rho_k$ , которые являются вершинными диаграммами; число  $k$  этих компонент, число  $b_0$  компонент исходной диаграммы и число  $l$  удаленных ребер связаны соотношением

$$k = b_0 + l.$$

Пользуясь данным соотношением и формулой (В.7), получаем

$$\omega(\nu) \leq \omega(\rho_1) + \dots + \omega(\rho_k),$$

поэтому из отрицательности индекса всех вершинных поддиаграмм вытекает отрицательность индекса всех правильных поддиаграмм и, по доказанному, сходимость диаграммы.

Аналогично из соотношения (В.6) и теоремы Вейнберга вытекает другое утверждение § 19: *при  $(\omega(\sigma) + 1)$ -кратном дифференцировании по внешним импульсам подынтегрального выражения примитивно расходящейся диаграммы  $\sigma$  получается сходящийся интеграл.* В самом деле, обозначив  $\alpha(R)$  асимптотические коэффициенты для подынтегрального выражения диаграммы  $\sigma$ , а  $\alpha_1(R)$  — асимптотические коэффициенты этого выражения, продифференцированного  $\omega(\sigma) + 1$  раз по внешним импульсам, видим, что для всего пространства  $I$ , по которому идет интегрирование,  $\alpha_1(I) = \alpha(I) - (\omega(\sigma) + 1)$ , а для любого подпространства  $R \subset I$   $\alpha_1(R) \leq \alpha(R)$ . В силу примитивной расходимости диаграммы  $\sigma$  для любого подпространства  $R \subset I$ , не совпадающего с  $I$ ,

$$\alpha_1(R) + \dim R \leq \alpha(R) + \dim R < 0.$$

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \alpha_1(I) + \dim I &= \alpha(I) = \\ &= (\omega(\sigma) + 1) + \dim I = -1 < 0, \end{aligned}$$

убеждаемся в справедливости нужного утверждения.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
2. Швeбер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. М., «Наука», 1968.
4. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 2. М., «Наука», 1971.
5. Новожилов Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц. М., «Наука», 1972.
6. Боголюбов Н. Н., Широков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
7. Березин Ф. А. Невинеровские континуальные интегралы. — «Теор. матем. физ.», 1971, т. 6, с. 194.
8. Neumann J., von. Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren. — «Math. Ann.», 1931, Bd 104, S. 570.
9. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., Физматгиз, 1963.
11. Йост Р. Общая теория квантованных полей. Пер. с англ. М., «Мир», 1967.
12. Glimm J., Jaffe A. Boson quantum field models. — In: Mathematics of contemporary physics. Ed. by R. Streater. N. Y., Academic Press, 1972.
13. Шифф А. Квантовая механика. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
14. Фрадкин Е. С. Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике. — В кн.: Тр. ФИАН СССР. Т. 29. М., «Наука», 1965.
15. Лихачев В. Н., Тюпкин Ю. С., Шварц А. С. Адиабатическая S-матрица и квазичастицы. — «Теор. матем. физ.», 1970, т. 2, с. 3; Адиабатическая теорема в квантовой теории поля. — «Теор. матем. физ.», 1972, т. 10, с. 63.
16. Fradkin E. S. Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics. Part 1. Divergence-free field theory with local non-linear interaction. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 49, p. 624.
17. Ефимов Г. В. О построении локальной квантовой теории поля без ультрафиолетовых расходимостей. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1963, т. 44, с. 2107.

18. Volkov M. K. Method of construction of the Green's functions in momentum space for unrenormalisable interactions. — «Ann. Phys.», 1968, v. 49, p. 202; Quantum field model with unrenormalisable interaction. — «Comm. Math. Phys.», 1968, v 7, p. 289.
19. Fradkin E. S. Application of functional methods in quantum field theory and quantum statistics. Part II. — «Nucl. Phys.», 1966, v. 76, p. 588.
20. Хрипович И. Б. Гравитация и конечные перенормировки в квантовой электродинамике. — «Ядерная физика», 1966, т. 3, с. 575.
21. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. — «Докл. АН СССР», 1961, т. 137, с. 1011.
22. Березин Ф. А. О модели Ли. — «Матем. сб.», 1963, т. 60, с. 495.
23. Glimm J., Jaffe A.  $\lambda\phi_{\frac{1}{2}}^4$  quantum field theory without cutoffs. Part I. — «Phys. Rev.», 1958, v. 176, p. 1945. The  $\lambda\phi_{\frac{1}{2}}^4$  quantum field theory without cutoffs. Part II. The field operators and the approximate vacuum. — «Ann. Math.», 1970, v. 91, p. 362; The  $\lambda\phi_{\frac{1}{2}}^4$  quantum field theory without cutoffs. Part III. The physical vacuum. — «Acta Math.», 1970, v. 125, p. 203.
24. Glimm J., Jaffe A., Spencer T. The particle structure of the weakly coupled  $P(\phi)_2$  model and other applications of high temperature expansions. Part 1, 2. — II: Constructive quantum field theory. Ser. Lecture Notes in Physics. N 25, Springer, 1973, p. 132 — 242.
25. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. К теории умножения причинных сингулярных функций. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, с. 25; О вычитательном формализме при умножении причинных сингулярных функций. Там же, с. 429; О вычитательном формализме при умножении причинных функций. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1956, т. 20, с. 585.
26. Степанов Б. М. Абстрактная теория  $R$ -операции. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1963, т. 27, с. 819.
27. Нерр К. Théorie de la renormalisation. Springer, 1969.
28. Zimmermann W. Convergence of Bogoliubov's method of renormalisation in momentum space. — «Comm. Math. Phys.», 1969, v. 15, p. 208.
29. Аникин С. А., Завьялов О. И., Поливанов М. К. Одно простое доказательство теоремы Боголюбова—Парасюка. — «Теор. матем. физ.», 1973, т. 17, с. 189.
30. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
31. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., Физматгиз, 1958.
32. Паули В. Общие принципы волновой механики. Пер. с англ. М. — Л., Гостехиздат, 1947.
33. Фаддеев Л. Д. Интеграл Фейнмана для сингулярных лагранжианов. — «Теор. матем. физ.», 1974, т. 1, с. 3.
34. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
35. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1959.
36. Weinberg S. High-energy behavior in quantum field theory. — «Phys. Rev.», 1960, v. 118, p. 838.

37. **Ефремов А. В., Завьялов О. И.** Асимптотика графов Фейнмана. — В кн.: 12 Международная конференция по физике высоких энергий. Дубна, 1964. Т. 1. М., Атомиздат, 1966, с. 360.
38. **Завьялов О. И.** Высокоэнергетическая асимптотика сходящихся диаграмм Фейнмана. — «Ж. эксперим. и теор. физ.», 1964, т. 47, с. 1099.
39. **Завьялов О. И., Степанов Б. М.** Асимптотика расходящихся диаграмм Фейнмана. — «Ядерная физика», 1965, т. 1, с. 922.

**Альберт Соломонович Шварц**  
**ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ.**  
**БОЗОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

Редакторы *Н. Е. Никитина, Ю. С. Аборин*  
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*  
Художник *А. И. Шавард*  
Технический редактор *И. Н. Подшебякин*  
Корректор *О. М. Герасимова*

---

Сдано в набор 12/VIII 1974 г.	Подписано к печати 9/1 1975 г.	
Т-02710.	Формат 84×108 <sup>1</sup> / <sub>32</sub> .	Бумага типографская № 2.
Усл. печ. л. 10,08.	Уч.-изд. л. 11,61.	Тираж 5400 экз.
Зак. изд. 73186	Зак. тип. 1089.	Цена 1 р. 32 к.

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5.

---

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете Совета Министров СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,  
Москва, И-41, Б. Переяславская ул., д. 46.