J. SCHWINGER

THE THEORY OF QUANTIZED FIELDS

THE PHYSICAL REVIEW

vol. 91, No. 3, p. 713—728, p. 728—740, August 1953
vol. 92, No. 5, p. 1283—1299, December 1953
vol. 93, No. 3, p. 615—628, February 1954
vol. 94, No. 5, p. 1362—1384, June 1954

Ю. ШВИНГЕР

ТЕОРИЯ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Перевод с английского

Н. П. КЛЕПИКОВА и Л. И. ЛАПИДУСА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1956

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ю. Швингер
ТЕОРИЯ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Редактор *Е. И. МАЙКОВА*

Технический редактор *Н. А. Иовлева* Переплет художника *Н. М. Лобанова*

Сдано в производство 29/II 1956 г. Подписано к печати 10/IX 1956 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$=3,9 бум. л. — 12,9 печ. л. Уч.-изд. л. 11,8. Изд. № 2/2962.
Цена 10 р. 25 к. Зак. 1174.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

АННОТАЦИЯ

Книга составлена из серии статей известного американского физика-теоретика Ю. Швингера, посвященных последовательному изложению теории квантованных полей с помощью единого динамического принципа. В ходе изложения автор широко использует теорию функций Грина (функций распространения). Теория квантованных полей лежит в основе современных физических представлений о свойствах элементарных частиц и их превращениях; методы, разработанные в этой теории, повидимому, могут быть использованы в ряде других областей теоретической физики.

Книга рассчитана в первую очередь как на физиков, занимающихся исследованиями в области квантовой теории поля, так и на физиков других специальностей и математиков, интересующихся современными методами и проблемами теоретической физики.

Редакция литературы по физике

Заведующий редакцией проф. А. А. СОКОЛОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является переводом серии статей Ю. Швингера, опубликованных в 1953—1954 гг. под общим названием „Теория квантованных полей". Автор этих статей, крупный американский физик-теоретик Юлиан Швингер, известен своими работами по различным вопросам ядерной физики, в частности по теории ядерных сил, по теории рассеяния, по излучению частиц в ускорителях. Наиболее известные работы Швингера относятся к квантовой теории поля, в особенности к квантовой электродинамике. Советский читатель уже имел возможность познакомиться с переводами работ Швингера [1—7, 55], в которых он впервые изложил основы квантовой электродинамики в строго ковариантном и калибровочно-ковариантном виде, ввел представление взаимодействия и вычислил ряд радиационных поправок.

Из серии „Теория квантованных полей" Швингер опубликовал шесть статей. Первая статья появилась в печати в 1951 г., и перевод ее был включен в сборник „Новейшее развитие квантовой электродинамики". Являясь, с одной стороны, продолжением предыдущих работ автора по квантовой электродинамике, эта серия, с другой стороны, имеет самостоятельное значение, поскольку она посвящена последовательному построению теории квантованных полей с помощью единого динамического принципа.

В работах этой серии автор обосновал динамический принцип, получил с его помощью уравнения движения, вывел перестановочные соотношения для операторов полей, показал, как из инвариантности теории относительно отражения времени следует связь между спином и статистикой, и исследовал ряд других следствий динамического принципа. При этом, помимо источников полей Бозе — Эйнштейна, в рассмотрение были введены антикоммутирующие источники полей

Ферми — Дирака. Введение источников полей позволило компактно представить бесконечные системы уравнений в виде уравнений в вариационных производных и сделать многие доказательства более прозрачными.

В ходе дальнейшего исследования автор подробно рассмотрел поле Бозе — Эйнштейна с внешними источниками, поле Ферми — Дирака с внешними спинорными источниками, а также поле Ферми — Дирака при наличии заданного внешнего электромагнитного поля как зависящего, так и не зависящего от времени.

Хотя серия статей, опубликованных Швингером, не завершена, однако исследования, составляющие содержание этой серии, представляют самостоятельный интерес для изучения ряда основных вопросов теории квантованных полей. Изложение Швингером как основ теории, так и конкретных задач отличается полнотой (в рамках программы, намеченной в работах [6, 7]) и не требует обращения к многочисленным первоисточникам, так как многие результаты, полученные ранее различными авторами с помощью разнообразных методов, выводятся здесь с единой точки зрения. Это позволяет объединить переводы статей Швингера в книгу.

Во второй статье этой серии, появившейся в печати через два года после опубликования первой статьи, Ю. Швингер, как он это сам отмечает, заново начинает изложение материала. Поэтому отсутствие первой статьи в настоящей книге объясняется не только тем, что перевод ее уже был издан, а главным образом тем, что эта статья стоит особняком и последующий материал может рассматриваться независимо от нее. Первая глава настоящей книги и является переводом статьи II, а последующие главы — соответственно переводами статей III—VI.

В приложении дан перевод статьи Швингера „Замечание о квантовом динамическом принципе“, в которой показано, что основной динамический принцип, сформулированный первоначально для систем с бесконечным числом степеней свободы, применим также к квантовомеханическим системам с конечным числом степеней свободы. Эта статья может способствовать выяснению характерных черт динамического принципа, сформулированного Швингером.

Для развития квантовой теории полей, в частности квантовой электродинамики, за последние годы характерным является введение и широкое использование функций Грина (функций распространения) и вершинных функций, т. е. функций, с помощью которых решения основных уравнений теории выражаются через внешние источники или через значения тех же решений на некоторых гиперповерхностях. Теория функций Грина была использована Швингером при рассмотрении вопросов поляризации вакуума и калибровочной инвариантности [5] и была им конспективно изложена в работах [6, 7], опубликованных в 1951 г. Именно эти последние работы дали толчок бурному развитию теории функций Грина, функциональных методов исследования вопросов теории квантованных полей, а также приложений этих методов к ряду конкретных проблем.

Исключительная краткость изложения в работах [6, 7] привела к тому, что появился ряд работ, в которых уравнения Швингера были заново получены разными способами [8—11], причем авторы старались избежать использования динамического принципа и антикоммутирующих источников ценою некоторого усложнения доказательств. В дальнейших исследованиях был введен производящий функционал и исследовались уравнения в вариационных производных, которыми он определяется [13—20, 65]. Следующим естественным шагом были попытки представления решений полученных уравнений в виде бесконечно-мерных (континуальных) интегралов [13, 21—32, 66, 67], причем выяснилась эквивалентность их с соответствующими выражениями в виде интегралов „по всем путям“ Фейнмана [33].

Уравнения для функций Грина дали возможность исследовать некоторые свойства взаимодействия квантованных полей без применения обычной теории возмущений. В частности, были получены [34—48] асимптотические выражения для функций распространения и вершинных функций. Исследование найденных при этом выражений привело авторов работ [49—53] к выводу о том, что из формальной квантовой электродинамики и мезонной теории со слабой связью следует равенство нулю констант взаимодействия.

Использование функций Грина позволило рассчитать ряд новых тонких эффектов и дать новые выводы для ранее полученных результатов [54—60]. Применение функциональных методов при исследованиях с функциями Грина делает многие доказательства более краткими и ясными, позволяет проводить ряд доказательств единым методом [61—63]. Применение функциональных методов, характерных для описания систем с бесконечным числом степеней свободы, позволяет переносить методы, разработанные в одних областях теоретической физики, на другие ее области (см., например, [64]).

Несомненно, применение функциональных методов в квантовой теории поля находится в начальной стадии своего развития, и хотя на этом пути до сих пор еще не получено новых физических результатов, тем не менее функциональная формулировка уравнений теории представляет значительный интерес, так как она, во-первых, дает единственную пока возможность выхода за рамки теории возмущений и, во-вторых, сочетает единообразие методов со строгой ковариантностью результатов.

В серии статей Швингера, переведенных в настоящей книге, функции Грина и функциональные методы последовательно используются для получения многих теоретических соотношений и конкретных выводов. Хотя Швингер далеко не исчерпал всей программы применения этих методов, намеченной им в работах [6, 7], однако в той части программы, которую он выполнил, помимо указанных выше конкретных результатов, он подробно изложил основные вопросы, возникающие при применении функций Грина и функциональных методов в квантовой теории поля. Это изложение со многих точек зрения является весьма поучительным.

Мы надеемся, что настоящая книга, представляя собой фундаментальное введение в круг вопросов, кратко затронутых нами выше, будет полезной как для лиц, ведущих исследования в области квантовой теории поля, так и для широкого круга физиков и математиков, интересующихся проблемами теоретической физики и, в частности, теорией динамических систем с бесконечным числом степеней свободы.

Н. П. Клепиков,
Л. И. Лапидус.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Phys. Rev., 74, 1439 (1948). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики" под ред. Д. Д. Иваненко, ИЛ, 1954, стр. 12.)

2. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 651 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 40.)
3. Schwinger J., Phys. Rev., **76**, 790 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 78.)
4. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 254.)
5. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 115.)
6. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики", № 3, ИЛ, 1955, стр. 28.)
7. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 455 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики", № 3, ИЛ, 1955, стр. 33.)
8. Katayama Y., Progr. Theor. Phys., **7**, 265 (1952).
9. Utiyama R., Sunakawa S., Imamura T., Progr. Theor. Phys., **8**, 77 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики", № 3, ИЛ, 1955, стр. 80.)
10. Anderson J. L., Phys. Rev., **94**, 703 (1954).
11. Сборник „Проблемы современной физики", Вводная статья В. Б. Берестецкого и А. Д. Галанина, № 3, ИЛ, 1955, стр. 5.
12. Поливанов М. К., ДАН СССР, **100**, 1061 (1955).
13. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., ДАН СССР, **97**, 209 (1954).
14. Фрадкин Е. С., ДАН СССР, **98**, 47 (1954).
15. Клепиков Н. П., ДАН СССР, **98**, 937 (1954).
16. Symanzik K., Zs. Naturforsch., **9a**, 809 (1954).
17. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, **29**, 121 (1955).
18. Umezawa H., Visconti A., Compt. Rend., **239**, 690 (1954).
19. Umezawa H., Visconti A., Compt. Rend., **239**, 749 (1954).
20. Hori S., Progr. Theor. Phys., **10**, 575 (1953).
21. Edwards S. F., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., **224**, 24 (1954). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики", № 3, ИЛ, 1955, стр. 112.)
22. Боголюбов Н. Н., ДАН СССР, **99**, 225 (1954).
23. Клепиков Н. П., ДАН СССР, **100**, 1057 (1955).
24. Фрадкин Е. С., ДАН СССР, **100**, 897 (1955).

25. Matthews P. T., Salam A., Nuovo Cimento, **12**, 563 (1954).
26. Edwards S. F., Proc. Roy. Soc., **223**, 411 (1955).
27. Халатников И. М., ЖЭТФ, **28**, 633 (1955).
28. Deser S., Phys. Rev., **99**, 325 (1955).
29. Anderson J. L., Phys. Rev., **99**, 674 (1955).
30. Гольфанд Ю. А., ЖЭТФ, **28**, 140 (1955).
31. Matthews P. T., Salam A., Nuovo Cimento, **2**, 120 (1955).
32. Edwards S. F., Proc. Roy. Soc., **232**, 370, 377 (1955).
33. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
34. Edwards S. F., Phys. Rev., **90**, 284 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики“, ИЛ, 1954, стр. 378.)
35. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 497 (1954).
36. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 773 (1954).
37. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 1177 (1954).
38. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **96**, 281 (1954).
39. Абрикосов А. А., Галанин А. Д., Халатников И. М., ДАН СССР, **97**, 793 (1954).
40. Галанин А. Д., Иоффе Б. Л., Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **29**, 51 (1955).
41. Gell-Mann M., Low F. E., Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).
42. Горьков Л. П., Халатников И. М., ДАН СССР, **103**, 799 (1955); **104**, 197 (1955).
43. Фрадкин Е. С., ЖЭТФ, **28**, 750 (1955).
44. Фрадкин Е. С., ЖЭТФ, **29**, 377 (1955).
45. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., ДАН СССР, **103**, 203 (1955).
46. Берестецкий В. Б., ЖЭТФ, **29**, 585 (1955).
47. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., ДАН СССР, **103**, 391 (1955).
48. Ширков Д. В., ДАН СССР, **105**, 972 (1955).
49. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я., ДАН СССР, **102**, 489 (1955).
50. Померанчук И. Я., ДАН СССР, **103**, 1005 (1955).
51. Померанчук И. Я., ДАН СССР, **105**, 461 (1955).
52. Померанчук И. Я., ДАН СССР, **104**, 51 (1955).
53. Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **29**, 869 (1955).

54. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., **85**, 972 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 284.)
55. Karplus R., Klein A., Schwinger J., Phys. Rev., **86**, 288 (1952). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 305.)
56. Newton R. G., Phys. Rev., **94**, 1773 (1954).
57. Fulton T., Martin P. C., Phys. Rev., **95**, 811 (1954).
58. Newton R. G., Phys. Rev., **96**, 523 (1955).
59. Newton R. G., Phys. Rev., **97**, 1162 (1955).
60. Umezawa H., Visconti A., Compt. Rend., **239**, 1466 (1954).
61. Namiki M., Chiba S., Hanawa S., Progr. Theor. Phys., **12**, 694 (1954).
62. Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., Nuovo Cimento, **1**, 205 (1955).
63. Klein A., Phys. Rev., **99**, 998 (1955).
64. Боголюбов Н. Н., Вестник МГУ, № 4—5, 115 (1955).
65. Новожилов Ю. В., ДАН СССР, **104**, 47 (1955).
66. Полиевктов-Николадзе Н. М., ДАН СССР, **105**, 458, 703 (1955).
67. Бонч-Бруевич В. Л., ДАН СССР, **105**, 689 (1955).

ГЛАВА I[1]

Здесь представлены аргументы, приводящие к формулировке принципа действия для поля общего вида. В связи с полным разложением всех численных матриц на симметричную и антисимметричную части общее поле также разлагается на две части, которые отождествляются с полями Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Ограничение значений спинов этих двух видов полей следует из требования инвариантности относительно отражения времени. Согласованность теории проверяется при помощи критерия, включающего различные производящие операторы бесконечно малых преобразований. После обсуждения заряженных полей вводится электромагнитное поле так, чтобы удовлетворить постулату общей калибровочной инвариантности. В силу последней устанавливается, что электромагнитное поле и заряженные поля не являются кинематически независимыми. После обсуждения перестановочных соотношений для напряженностей полей независимые динамические переменные электромагнитного поля находятся при специальном выборе калибровки.

Вся представленная автором серия статей посвящена одной теме — построению теории квантованных полей при помощи единого основного динамического принципа. Вначале мы дадим пересмотренный обзор исследований, содержащихся в первой статье [1].

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Функции преобразования, связывающие различные представления, обладают следующими двумя основными свойствами:

$$(\alpha' \mid \gamma') = \int (\alpha' \mid \beta')\, d\beta' (\beta' \mid \gamma'),$$

$$(\alpha' \mid \beta')^* = (\beta' \mid \alpha'),$$

[1] J. Schwinger, The Theory of Quantized Fields. II, Phys, Rev., 91, 713—728 (1953).

где $\int d\beta'$ означает как интегрирование, так и суммирование по спектру собственных значений. Если $\delta(\alpha'|\beta')$ является каким-либо бесконечно малым изменением функции преобразования, то мы можем написать

$$\delta(\alpha'|\beta') = i(\alpha'|\delta W_{\alpha\beta}|\beta'); \tag{1.1}$$

это — определение бесконечно малого оператора $\delta W_{\alpha\beta}$. При любом бесконечно малом изменении должен сохраняться мультипликативный закон композиции для функции преобразования, поэтому подразумевается, что для бесконечно малых операторов выполняется аддитивный закон композиции:

$$\delta W_{\alpha\gamma} = \delta W_{\alpha\beta} + \delta W_{\beta\gamma}. \tag{1.2}$$

Если представления α и β тождественны, то мы заключаем, что

$$\delta W_{\alpha\alpha} = 0;$$

это равенство выражает требование сохранения ортогональности собственных векторов данного представления. Отождествляя представления α и γ, находим

$$\delta W_{\beta\alpha} = -\delta W_{\alpha\beta}.$$

Из второго свойства функции преобразования вытекает, что

$$-i(\alpha'|\delta W_{\alpha\beta}|\beta')^* = -i(\beta'|\delta W_{\alpha\beta}^{\dagger}|\alpha') = i(\beta'|\delta W_{\beta\alpha}|\alpha'),$$

или

$$\delta W_{\alpha\beta}^{\dagger} = \delta W_{\alpha\beta},$$

т. е. бесконечно малые операторы $\delta W_{\alpha\beta}$ эрмитовы.

Оператор $\delta W_{\alpha\beta}$ обладает еще одним свойством аддитивности, относящимся к композиции двух динамически независимых систем. Так, если системы I и II динамически независимы, то

$$(\alpha'_{\mathrm{I}}\alpha'_{\mathrm{II}}|\beta'_{\mathrm{I}}\beta'_{\mathrm{II}}) = (\alpha'_{\mathrm{I}}|\beta'_{\mathrm{I}})(\alpha'_{\mathrm{II}}|\beta'_{\mathrm{II}}),$$

и если $\delta W_{\alpha\beta}^{\mathrm{I}}$ и $\delta W_{\alpha\beta}^{\mathrm{II}}$ являются операторами, характеризующими бесконечно малые изменения отдельных функций преобразования, то оператор для полной системы равен

$$\delta W_{\alpha\beta} = \delta W_{\alpha\beta}^{\mathrm{I}} + \delta W_{\alpha\beta}^{\mathrm{II}}.$$

Бесконечно малые изменения собственных векторов, сохраняющие свойства ортонормированности, имеют вид

$$\delta\Psi(\alpha') = -iG_\alpha\Psi(\alpha'),$$
$$\delta\Psi(\alpha')^\dagger = i\Psi(\alpha')^\dagger G_\alpha,$$

где производящий оператор G_α — бесконечно малый эрмитов оператор, обладающий свойством аддитивности для композиции динамически независимых систем. Если оба собственных вектора функции преобразования варьируются независимо, то результирующее изменение функции преобразования имеет общий вид (1.1), причем

$$\delta W_{\alpha\beta} = G_\alpha - G_\beta.$$

Вектор

$$\Psi(\alpha') + \delta\Psi(\alpha') = (1 - iG_\alpha)\Psi(\alpha')$$

можно охарактеризовать как собственный вектор совокупности операторов

$$\bar{\alpha} = (1 - iG_\alpha)\,\alpha\,(1 + iG_\alpha) = \alpha - \delta\alpha$$

с собственными значениями α'; здесь

$$\delta\alpha = -i[\alpha, G_\alpha].$$

Это бесконечно малое унитарное преобразование собственного вектора $\Psi(\alpha')$ вызывает такое преобразование любого оператора F, что

$$(\alpha' | F | \alpha'') = (\bar{\alpha}' | \bar{F} | \bar{\alpha}'').$$

Запишем это в виде

$$(\bar{\alpha}' | F | \bar{\alpha}'') - (\alpha' | F | \alpha'') = (\bar{\alpha}' | (F - \bar{F}) | \bar{\alpha}''),$$

или, в силу бесконечной малости преобразования, в виде

$$\delta(\alpha' | F | \alpha'') = (\alpha' | \delta F | \alpha''),$$

где левая часть относится к изменению собственных векторов при фиксированном F, тогда как правая часть выражает эквивалентную вариацию оператора F, даваемую выражением

$$\delta F = F - \bar{F} = -i[F, G_\alpha].$$

Если вариация состоит в изменении некоторого параметра τ, от которого зависят динамические переменные и который может явно содержаться в F, то имеем

$$\overline{F} = F - (\delta F)_\tau = F + \delta_\tau F - \partial_\tau F,$$

где $\delta_\tau F$ — полное изменение F, из которого вычитается $\partial_\tau F$ — изменение F, связанное с явным наличием τ, так как последнее изменение не может быть произведено преобразованием операторов. Таким образом, мы получаем „уравнение движения“ по параметру τ:

$$\delta_\tau F = \partial_\tau F + i\,[F, \; G_\tau]. \tag{1.3}$$

Для динамических систем, удовлетворяющих постулату локального действия, полное описание дается совокупностями физических величин ζ, связанными с пространственно-подобными поверхностями σ. Бесконечно малое изменение общей функции преобразования $(\zeta_1'\sigma_1 \mid \zeta_2''\sigma_2)$ имеет вид

$$\delta\,(\zeta_1'\sigma_1 \mid \zeta_2''\sigma_2) = i\,(\zeta_1'\sigma_1 \mid \delta W_{12} \mid \zeta_2''\sigma_2). \tag{1.4}$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся как к выбору полных совокупностей коммутирующих операторов ζ, так и к пространственно-подобной поверхности σ. Мы можем, в частности, рассмотреть преобразования между одинаковыми совокупностями операторов на различных поверхностях или между различными совокупностями коммутирующих операторов на одной поверхности, как, например,

$$\delta\,(\zeta'\sigma \mid \overline{\zeta}'\sigma) = i(\zeta'\sigma \mid \delta W \mid \overline{\zeta}'\sigma). \tag{1.5}$$

Один тип изменения общей функции преобразования состоит в введении независимо на поверхностях σ_1 и σ_2 бесконечно малых унитарных преобразований операторов, включающих смещения этих поверхностей. Преобразования будут произведены операторами G_1 и G_2, построенными из динамических переменных на поверхностях σ_1 и σ_2 соответственно, причем

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2. \tag{1.6}$$

Если функция преобразования связывает на одной и той же поверхности две различные совокупности операторов, подвергаемых бесконечно малым преобразованиям, вызванным производящими операторами G и $\overline{G}$ соответственно, то в силу соотношения (1.5) имеем

$$\delta W = G - \overline{G}. \qquad (1.7)$$

Так как физические явления в различных точках пространственно-подобной поверхности динамически независимы, то производящий оператор G должен иметь аддитивную форму

$$G = \int_{\sigma} d\sigma G_{(0)}(x) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} G_{\mu}(x),$$

где $d\sigma$ — численная мера элемента пространственно-подобной площади; чтобы придать поверхностному интегралу инвариантный вид, $G_{(0)}(x)$ следует рассматривать как времениподобную компоненту вектора в локальной системе координат, базирующейся на поверхности σ. Если $G_{\mu}(x)$ на поверхности σ_1 и на поверхности σ_2 можно интерпретировать как значения вектора, определенного во всех точках, то разность поверхностных интегралов в соотношении (1.6) можно преобразовать в объемный интеграл

$$\delta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \partial_{\mu} G_{\mu}(x), \qquad \left(\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\right).$$

Другой тип изменения функции преобразования получается, если учесть, что преобразование, соединяющее ζ_1, σ_1 и ζ_2, σ_2, можно построить посредством бесконечной последовательности преобразований, связывающих операторы на бесконечно близких поверхностях. В соответствии с общим свойством аддитивности (1.2)

$$\delta W_{12} = \sum_{\sigma_2}^{\sigma_1} \delta W_{\sigma + d\sigma,\, \sigma},$$

где $\delta W_{\sigma+d\sigma,\sigma}$ характеризует изменение функции преобразования, связывающей бесконечно мало отличающиеся полные совокупности операторов на бесконечно близких поверхностях σ и $\sigma + d\sigma$. Если выбор промежуточных операторов непрерывно зависит от поверхности, то получим

$$\delta W_{\sigma,\sigma} = 0;$$

принимая опять во внимание динамическую независимость явлений в точках, разделенных пространственно-подобным интервалом, с вытекающим отсюда свойством аддитивности, мы находим, что $\delta W_{\sigma+d\sigma,\sigma}$ будет иметь общий вид

$$\delta W_{\sigma+d\sigma,\sigma} = \int_{\sigma}^{\sigma+d\sigma} (dx)\,\delta\mathcal{L}(x).$$

Поэтому

$$\delta W_{12} = \int_{\sigma}^{\sigma_1} (dx)\,\delta\mathcal{L}(x). \tag{1.8}$$

Комбинация этих двух типов изменений описывается выражением

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2 + \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,\delta\mathcal{L}(x),$$

которое содержит динамические переменные на поверхностях σ_1, σ_2 и внутри объема, ограниченного этими поверхностями. Кроме того, мы можем записать это выражение в виде объемного интеграла

$$\delta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,[\partial_\mu G_\mu(x) + \delta\mathcal{L}(x)],$$

который указывает, в свою очередь, на то, что любая часть $\delta\mathcal{L}(x)$, имеющая вид дивергенции, дает вклад лишь в унитарное преобразование на поверхностях σ_1 и σ_2.

Основной динамический принцип заключается в следующем постулате: существует класс изменений функции преобразования, для которых соответствующие операторы δW_{12} получаются надлежащей вариацией единственного оператора W_{12}:

$$\delta W_{12} = \delta(W_{12}).$$

Конечно, динамический принцип должен быть снабжен явным указанием этого класса.

Оператор W_{12}, оператор интеграла действия, очевидно, имеет вид

$$W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,\mathcal{L}(x).$$

Требование эрмитовости, налагаемое на δW_{12}, удовлетворяется, если оператор W_{12} эрмитов, а это означает, что $\mathscr{L}(x)$ — оператор функции Лагранжа, обладает тем же свойством. Чтобы соотношения между состояниями на поверхностях σ_1 и σ_2 характеризовались инвариантным образом, функция Лагранжа должна быть скаляром по отношению к преобразованиям ортохронной [1)] группы Лоренца, которая сохраняет временной порядок σ_1 и σ_2. Динамическая система характеризуется указанием лагранжевой функции, выраженной через совокупность основных динамических переменных в бесконечно малой окрестности точки x. В этой лагранжевой функции будут содержаться определенные численные параметры, которые могут быть функциями от x. Всякое изменение этих параметров изменяет структуру лагранжевой функции и меняет тем самым и динамическую систему. В соответствии с этим бесконечно малые изменения динамической системы описываются выражением

$$\delta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \delta\mathscr{L}(x),$$

где $\delta\mathscr{L} = \delta(\mathscr{L})$, а объектами вариации являются численные параметры. Вид этого выражения находится в согласии с выражением (1.8). Для фиксированной динамической системы оператор W_{12} может изменяться при смещении поверхностей σ_1 и σ_2 и варьировании динамических переменных, содержащихся в лагранжевой функции. Функция преобразования $(\zeta_1'\sigma_1 \mid \zeta_2''\sigma_2)$ описывает соотношение между двумя состояниями данной системы, так что изменение в функции преобразования может происходить лишь от изменения состояний на поверхностях σ_1 и σ_2. Поэтому для фиксированной динамической системы мы должны иметь

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2,$$

где $\delta W_{12} = \delta(W_{12})$, а объектами вариации являются σ_1 и σ_2 и динамические переменные, функцией которых является $\mathscr{L}$.

Последнее утверждение есть операторный принцип стационарного действия. Он утверждает, что оператор W_{12} должен быть стационарным по отношению к вариациям

---

1) Это название предложил Баба [2].

динамических переменных внутри области, определяемой поверхностями σ_1 и σ_2, так как G_1 и G_2 содержат лишь динамические переменные, связанные с границами области. Этот принцип содержит в себе уравнения движения для динамических переменных, т. е. уравнения поля, и дает выражения для производящих операторов G_1 и G_2. Класс вариаций, к которому относится наш постулат, можно теперь определить требованием: сведения относительно уравнений поля и бесконечно малых унитарных преобразований должны быть внутренне согласованными.

Внутри этого класса остается произвол, как можно заключить, заметив, что две лагранжевы функции, отличающиеся дивергенцией вектора, описывают одну и ту же динамическую систему. Таким образом,

$$\overline{\mathscr{L}}(x) = \mathscr{L}(x) - \partial_\mu f_\mu(x)$$

дает

$$\overline{W}_{12} = W_{12} - (W_1 - W_2), \tag{1.9}$$

где на каждой поверхности

$$W = \int_\sigma d\sigma_\mu f_\mu = \int_\sigma d\sigma f_{(0)}.$$

В соответствии с этим принцип стационарного действия для $\overline{W}_{12}$ удовлетворяется, если он справедлив для W_{12}, так как

$$\delta \overline{W}_{12} = \overline{G}_1 - \overline{G}_2.$$

Здесь

$$\delta W_1 = G_1 - \overline{G}_1, \quad \delta W_2 = G_2 - \overline{G}_2$$

определяют $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$, которые являются новыми производящими операторами бесконечно малых унитарных преобразований на поверхностях σ_1 и σ_2 соответственно. Последние уравнения имеют вид (1.7) и, таким образом, характеризуют функции преобразования, связывающие два различных представления на одной и той же поверхности. Действительно, при подходящем выборе обозначений мы обнаруживаем, что формула (1.9) выражает свойства аддитивности операторов действия, т. е.

$$W(\bar{\zeta}_1\sigma_1, \bar{\zeta}_2\sigma_2) = W(\bar{\zeta}_1\sigma_1, \zeta_1\sigma_1) + W(\zeta_1\sigma_1, \zeta_2\sigma_2) + W(\zeta_2\sigma_2, \bar{\zeta}_2\sigma_2),$$

где, например,

$$W_1 = -W(\bar{\zeta}_1\sigma_1, \zeta_1\sigma_1) = W(\zeta_1\sigma_1, \bar{\zeta}_1\sigma_1)$$

и

$$W_2 = W(\zeta_2\sigma_2, \bar{\zeta}_2\sigma_2).$$

Чтобы уравнения поля находились в соответствии с постулатом локального действия, они должны быть дифференциальными уравнениями конечного порядка. Такие уравнения всегда можно превратить в систему уравнений первого порядка путем надлежащего добавления переменных. Основные динамические переменные, удовлетворяющие уравнениям первого порядка и образующие компоненты оператора поля общего вида $\chi(x)$, мы обозначим через $\chi_r(x)$. Без потери общности положим, что $\chi(x)$ является эрмитовым оператором

$$\chi_r(x)^\dagger = \chi_r(x).$$

Если функция Лагранжа должна давать уравнения поля желаемого вида, то она должна быть линейной относительно первых производных операторов поля по пространственно-временным координатам. Кроме того, если эти уравнения поля должны появляться как явные уравнения движения для компонент поля, то часть лагранжевой функции, содержащая первые производные по координатам, должна быть билинейной по компонентам поля. После этих предварительных замечаний напишем следующее общее выражение для функции Лагранжа:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu\,\partial_\mu\chi - \partial_\mu\chi\,\mathfrak{A}_\mu\chi) - \mathscr{H}(\chi); \qquad (1.10)$$

в этом выражении использовано матричное обозначение

$$\chi\mathfrak{A}_\mu\,\partial_\mu\chi = \chi_r(\mathfrak{A}_\mu)_{rs}\,\partial_\mu\chi_s.$$

Члены с производными симметризованы по отношению к операции интегрирования по частям — процессу, который добавляет дивергенцию к лагранжевой функции и не влияет поэтому на структуру динамической системы. Чтобы функция $\mathscr{L}$ была эрмитовым оператором, общая функция $\mathscr{H}$ должна обладать этим свойством:

$$\mathscr{H}(\chi)^\dagger = \mathscr{H}(\chi).$$

а численные матрицы $\mathfrak{A}_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$; $x_4 = ix_0$, $\mathfrak{A}_4 = i\mathfrak{A}_0$) должны быть антиэрмитовыми

$$\mathfrak{A}_\mu^\dagger = \mathfrak{A}_\mu^{tr*} = -\mathfrak{A}_\mu; \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Несмотря на то, что для нас представляют интерес замкнутые динамические системы, математически плодотворно использовать методы, основанные на свойствах внешних источников. В соответствии с этим мы добавляем к выражению (1.10) член

$$\mathcal{L}_{\text{источ.}} = \frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\chi + \chi\mathfrak{B}\xi), \tag{1.11}$$

предназначенный для описания рождения поля $\chi(x)$ внешним источником $\xi(x)$, который должен рассматриваться как величина той же природы, что и $\chi(x)$. Оператор $\mathcal{L}_{\text{источ.}}$ будет эрмитовым, если $\mathfrak{B}$ является эрмитовой матрицей

$$\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{B}.$$

Чтобы введение понятия источника имело смысл, все компоненты χ должны появляться в выражении (1.11) связанными с компонентами источника. Это требует, чтобы $\mathfrak{B}$ была несингулярной численной матрицей.

Ортохронное преобразование Лоренца

$$'x_\mu = r_{\mu\nu}x_\nu + t_\mu,$$
$$r^{tr}r = 1, \qquad r_{44} > 0,$$

вызывает линейное преобразование компонент поля

$$'\chi = L\chi = \chi L^{tr},$$

где L должно быть действительной матрицей,

$$L^* = L,$$

чтобы сохранять эрмитовость $'\chi$. Требование скалярности $\mathcal{L}$ удовлетворяется, если $\mathcal{H}$ является скаляром,

$$\mathcal{H}(L\chi) = \mathcal{H}(\chi)$$

и если

$$L^{tr}\mathfrak{A}_\mu L = r_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\nu. \tag{1.12}$$

Будем предполагать, что источник обладает теми же трансформационными свойствами, что и поле. Условие того, чтобы член лагранжевой функции, содержащей источник, был скаляром, имеет вид

$$L^{tr}\mathfrak{B}L = \mathfrak{B}. \tag{1.13}$$

Заметим, что $\mathfrak{A}_\lambda^{tr}$ и $\mathfrak{B}^{tr}$ также удовлетворяют соответственно уравнениям (1.12) и (1.13) и что эти уравнения можно скомбинировать в соотношение

$$L^{-1}(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\mu)\,L = r_{\mu\nu}(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\nu)$$

в силу несингулярного характера матрицы $\mathfrak{B}$.

Для бесконечно малого преобразования Лоренца

$$'x_\mu = x_\mu - \varepsilon_{\mu\nu}x_\nu + \varepsilon_\mu, \qquad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$$

матрицу L можно записать в виде

$$L = 1 - i\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

где

$$S_{\mu\nu}^* = -S_{\mu\nu}; \qquad \mu,\ \nu = 0,\ \ldots,\ 3. \tag{1.15}$$

Вариантом условия (1.13), содержащим бесконечно малые преобразования, будет

$$-S_{\mu\nu}^{tr} = \mathfrak{B}S_{\mu\nu}\mathfrak{B}^{-1} = S_{\mu\nu}^{\dagger},$$

или

$$(\mathfrak{B}S_{\mu\nu}^{\cdot})^{\dagger} = (\mathfrak{B}S_{\mu\nu}),$$

где значки комплексного сопряжения относятся к компонентам, указанным в выражении (1.15). Аналогично,

$$\mathfrak{A}_\mu S_{\nu\lambda} - S_{\nu\lambda}^{\dagger}\mathfrak{A}_\mu = i\,(\delta_{\mu\lambda}\mathfrak{A}_\nu - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\lambda) \tag{1.16}$$

и

$$[\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\mu,\ S_{\nu\lambda}] = i\,(\delta_{\mu\lambda}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\nu - \delta_{\mu\nu}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\lambda).$$

Если рассматривать

$$'\chi = \left(1 - i\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)\chi$$

как поле в первоначальной системе координат, которое поэтому должно иметь ту же зависимость от системы координат, что и χ, то получим

$$L^{-1}S_{\mu\nu}L = r_{\mu\lambda}r_{\nu\varkappa}S_{\lambda\varkappa}.$$

Для бесконечно малых преобразований это соотношение принимает вид

$$i\,[S_{\mu\nu},\ S_{\lambda\varkappa}] = \delta_{\mu\varkappa}S_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\varkappa}S_{\mu\lambda} + \delta_{\nu\lambda}S_{\mu\varkappa} - \delta_{\mu\lambda}S_{\nu\varkappa}.$$

Производя вариацию интеграла действия, будем рассматривать два типа величин — координаты и переменные поля — на почти равных правах, хотя первые являются числами, а последние — операторами. Введем вариацию координат δx_μ, произвольную во всей внутренней области, но подчиненную условию:

$$\partial_\mu\,\delta x_\nu + \partial_\nu\,\delta x_\mu = 0 \tag{1.17}$$

на поверхностях σ_1 и σ_2, т. е. тому условию, что границы остаются плоскими поверхностями. Компоненты поля $\chi_r(x)$ зависят как от системы координат, так и от „собственного поля“. При вращении системы координат компоненты поля изменяются в соответствии с выражениями (1.14). В соответствии с этим запишем общую вариацию поля как сумму собственно полевой вариации и вариации, вызванной локальным вращением системы координат:

$$\delta(\chi) = \delta\chi - i\,\frac{1}{2}(\partial_\mu\,\delta x_\nu)\,S_{\mu\nu}\chi,$$

где в силу антисимметрии тензора $S_{\mu\nu}$ эффективна только вращательная часть смещения координат. Для поля источника, являющегося заданной функцией координат, имеем

$$\delta(\xi) = \delta x_\mu\,\partial_\mu\xi. \tag{1.18}$$

Мы также замечаем, что

$$\delta(dx) = (dx)\,\partial_\mu\,\delta x_\mu$$

и

$$\delta(\partial_\mu) = -(\partial_\mu\,\delta x_\nu)\,\partial_\nu,$$

откуда

$$\delta(\partial_\mu\chi) = \partial_\mu\,\delta(\chi) - (\partial_\mu\,\delta x_\nu)\,\partial_\nu\chi. \tag{1.19}$$

Лоренцева инвариантность оператора $\mathscr{L}$ дает существенное упрощение при вычислении вклада в вариацию $\delta(\mathscr{L})$ от координатной вариации χ. Так, если бы величина $\partial_\mu\,\delta x_\nu$ была антисимметричной и постоянной, ее коэффициенты в вариации лагранжевой функции исчезали бы тождественно для всех членов, кроме члена, содержащего источник, так как изменение в ξ, вызванное вращением, не содержится в выражении (1.18). В соответствии с этим в общей координатной вариации выражения (1.10) остаются лишь те члены, в которых $\partial_\mu \delta x_\nu$ дифференцируется или появляется в симметризованной комбинации $\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu$. Оба случая полностью содержатся в выражении (1.19), что приводит к вариации

$$\delta(\mathscr{L}) = \delta\mathscr{L} - \frac{1}{2}(\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu)\frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu \partial_\nu\chi - \partial_\nu\chi\mathfrak{A}_\mu\chi) -$$
$$- i\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\nu \delta x_\lambda)\frac{1}{2}\chi(\mathfrak{A}_\mu S_{\nu\lambda} + S^{\dagger}_{\nu\lambda}\mathfrak{A}_\mu)\chi -$$
$$- i\frac{1}{4}(\partial_\mu \delta x_\nu)(\xi\mathfrak{B}S_{\mu\nu}\chi - \chi S^{\dagger}_{\mu\nu}\mathfrak{B}\xi).$$

Ввиду симметрии второй производной

$$(\partial_\mu\partial_\nu \delta x_\lambda)\chi(\mathfrak{A}_\mu S_{\nu\lambda} + S^{\dagger}_{\nu\lambda}\mathfrak{A}_\mu)\chi =$$
$$= (\partial_\mu(\partial_\nu \delta x_\lambda + \partial_\lambda \delta x_\nu))\chi(\mathfrak{A}_\nu S_{\mu\lambda} + S^{\dagger}_{\mu\lambda}\mathfrak{A}_\nu)\chi \rightarrow$$
$$\rightarrow -(\partial_\nu \delta x_\lambda + \partial_\lambda \delta x_\nu)\partial_\mu[\chi(\mathfrak{A}_\nu S_{\mu\lambda} + S^{\dagger}_{\mu\lambda}\mathfrak{A}_\nu)\chi];$$

последний переход здесь выражает результат интегрирования по частям, при котором проинтегрированный член исчезает, так как симметризованный тензор равен нулю на границах [условие (1.17)]. Собирая коэффициенты при $\partial_\mu \delta x_\nu$ в тензор $T_{\mu\nu}$, имеем

$$\delta(W_{12}) = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx)[\delta\mathscr{L} + (\partial_\mu \delta x_\nu)T_{\mu\nu}] =$$
$$= \int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx)[\delta\mathscr{L} - \delta x_\nu \partial_\mu T_{\mu\nu} + \partial_\mu(T_{\mu\nu}\delta x_\nu)],$$

где

$$T_{\mu\nu} = \mathscr{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_{(\mu}\partial_{\nu)}\chi - \partial_{(\nu}\chi\mathfrak{A}_{\mu)}\chi) - i\frac{1}{4}(\xi\mathfrak{B}S_{\mu\nu}\chi - \chi S^{\dagger}_{\mu\nu}\mathfrak{B}\xi) +$$
$$+ i\frac{1}{2}\partial_\lambda[\chi(\mathfrak{A}_{(\mu}S_{\lambda\nu)} + S^{\dagger}_{\lambda(\nu}\mathfrak{A}_{\mu)})\chi] \qquad (1.20)$$

и использовано следующее обозначение для симметричной части тензора:

$$\mathfrak{A}_{(\mu}\partial_{\nu)} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_\mu\partial_\nu + \mathfrak{A}_\nu\partial_\mu).$$

Вариация $\delta\mathcal{L}$ будет выражаться следующим образом:

$$\delta\mathcal{L} = \delta\chi\mathfrak{A}_\mu\partial_\mu\chi - \partial_\mu\chi\mathfrak{A}_\mu\,\delta\chi - \delta\mathcal{H} + \frac{1}{2}(\delta\chi\mathfrak{B}\xi + \xi\mathfrak{B}\,\delta\chi) +$$
$$+ \delta x_\mu \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{B}\partial_\mu\xi + \partial_\mu\xi\mathfrak{B}\chi) + \partial_\mu\left[\frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu\,\delta\chi - \delta\chi\mathfrak{A}_\mu\chi)\right].$$

Следовательно, применяя принцип стационарного действия к вариациям координат и поля порознь, получаем

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{B}\partial_\mu\xi + \partial_\mu\xi\mathfrak{B}\chi)$$

и

$$\delta\mathcal{H} = \delta\chi\mathfrak{A}_\mu\partial_\mu\chi - \partial_\mu\chi\mathfrak{A}_\mu\,\delta\chi + \frac{1}{2}(\delta\chi\mathfrak{B}\xi + \xi\mathfrak{B}\,\delta\chi), \quad (1.21)$$

в то время как поверхностные члены на σ_1 и σ_2 дают бесконечно малый производящий оператор

$$G = \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu\,\delta\chi - \delta\chi\mathfrak{A}_\mu\chi) + T_{\mu\nu}\,\delta x_\nu\right].$$

Оператор $\mathcal{H}$ является произвольной инвариантной функцией поля χ. Если его вариация должна иметь вид (1.21), то величина $\delta\chi$, появляющаяся слева и справа, должна иметь элементарные операторные свойства, характеризующие класс вариаций, к которым относится принцип действия. Поэтому мы должны иметь возможность сместить $\delta\chi$ в выражении для $\delta\mathcal{H}$ полностью налево или полностью направо, т. е.

$$\delta\mathcal{H} = \delta\chi\frac{\partial_l\mathcal{H}}{\partial\chi} = \frac{\partial_r\mathcal{H}}{\partial\chi}\delta\chi.$$

Этим определяются левые и правые производные от $\mathcal{H}$ по χ. Ввиду полной симметрии между левой и правой частями в процессе умножения заключаем, что выражения с $\delta\chi$ слева и справа в действительности идентичны. Уравнения поля имеют поэтому две эквивалентные формы

$$2\mathfrak{A}_\mu\partial_\mu\chi = \frac{\partial_l\mathcal{H}}{\partial\chi} - \mathfrak{B}\xi,$$
$$-\partial_\mu\chi\,2\mathfrak{A}_\mu = \frac{\partial_r\mathcal{H}}{\partial\chi} - \xi\mathfrak{B},$$

и G можно соответственно записать в виде

$$G = \int_\sigma d\sigma_\mu[\chi\mathfrak{A}_\mu\,\delta\chi + T_{\mu\nu}\,\delta x_\nu] = \int_\sigma d\sigma_\mu[-\delta\chi\mathfrak{A}_\mu\chi + T_{\mu\nu}\,\delta x_\nu]. \quad (1.22)$$

Если ограничиться применением принципа стационарного действия к фиксированным динамическим системам, то внешние источники не должны изменяться. Если же теперь ввести бесконечно малую вариацию величины ξ и распространить аргументы предыдущего рассмотрения на $\delta\xi$, то получим два эквивалентных выражения для изменения, вызванного в операторе W_{12}:

$$\delta_\xi W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \delta\xi\, \mathfrak{B}\chi = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \chi\mathfrak{B}\, \delta\xi.$$

Соответствующую модификацию соотношения между состояниями на поверхностях σ_1 и σ_2 можно приписать индивидуальным состояниям только в том случае, если ввести некоторые ограничения, имеющие характер граничного условия. Таким образом, мы можем предположить, что состояние на поверхности σ_2 не затрагивается вариацией внешнего источника в области между поверхностями σ_1 и σ_2. В этом „запаздывающем" описании $\delta_\xi W_{12}$ вызывает бесконечно малое преобразование состояния на поверхности σ_1. Другому „опережающему" описанию соответствует оператор $-\delta_\xi W_{12}$, вызывающий изменение состояния на поверхности σ_2 при фиксированном состоянии на поверхности σ_1. Это наиболее простые из возможных граничных условий.

Полезность названий „запаздывающее" и „опережающее" легко видеть, если рассматривать матрицу

$$(\zeta_1'\sigma_1 \,|\, F(\sigma) \,|\, \zeta_2''\sigma_2) = \int (\zeta_1'\sigma_1 \,|\, \zeta'\sigma)\, d\zeta'\, (\zeta'\sigma \,|\, F(\sigma) \,|\, \zeta''\sigma)\, d\zeta''\, (\zeta''\sigma \,|\, \zeta_2''\sigma_2)$$

оператора, построенного из динамических переменных на некоторой поверхности σ, лежащей между поверхностями σ_1 и σ_2. Бесконечно малое изменение источника ξ вызывает следующее изменение матричного элемента:

$$\delta_\xi (\zeta_1'\sigma_1 \,|\, F(\sigma) \,|\, \zeta_2''\sigma_2) =$$
$$= (\zeta_1'\sigma_1 \,|\, (\partial_\xi F(\sigma) + i\delta_\xi W_{1\sigma} F(\sigma) + iF(\sigma)\,\delta_\xi W_{\sigma 2}) \,|\, \zeta_2''\sigma_2) =$$
$$= (\zeta_1'\sigma_1 \,|\, (\partial_\xi F(\sigma) + i(F(\sigma)\,\delta_\xi W_{12})_+) \,|\, \zeta_2''\sigma_2);$$

здесь мы предположили, что $F(\sigma)$ может явно зависеть от источника, и ввели обозначение для упорядоченных во времени произведений. Матричный элемент зависит от внешнего источника посредством оператора $F(\sigma)$ и собственных векторов на поверхностях σ_1 и σ_2. При этом получаются различные выражения для $\delta_\xi F(\sigma)$, зависящие от принятых граничных условий. Таким образом, если задано состояние на поверхности σ_2, то мы находим

$$\begin{aligned}\delta_\xi F(\sigma)]_{\text{ret}} &= \partial_\xi F(\sigma) + i(F(\sigma)\,\delta_\xi W_{12})_+ - i\delta W_{12} F(\sigma) = \\ &= \partial_\xi F(\sigma) + i\,[F(\sigma),\ \delta_\xi W_{\sigma 2}];\end{aligned} \tag{1.23}$$

здесь включены лишь изменения источника на поверхности σ или до нее. Для противоположного условия аналогично получаем

$$\begin{aligned}\delta_\xi F(\sigma)]_{\text{adv}} &= \partial_\xi F(\sigma) + i(F(\sigma)\,\delta_\xi W_{12})_+ - iF(\sigma)\,\delta W_{12} = \\ &= \partial_\xi F(\sigma) - i\,[F(\sigma),\ \delta_\xi W_{1\sigma}].\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\delta_\xi F(\sigma)]_{\text{ret}} - \delta_\xi F(\sigma)]_{\text{adv}} = i\,[F(\sigma),\ \delta_\xi W_{12}].$$

Оператор G в соотношении (1.22) состоит из двух частей:

$$G = G_\chi + G_x,$$

где

$$G_\chi = \int_\sigma d\sigma_\mu \chi \mathfrak{A}_\mu\, \delta\chi = -\int_\sigma d\sigma_\mu\, \delta\chi \mathfrak{A}_\mu \chi$$

и

$$G_x = \int d\sigma_\mu T_{\mu\nu}\, \delta x_\nu = \varepsilon_\nu P_\nu + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu\nu}.$$

Вид последнего выражения для G_x обусловлен тем, что мы ограничились плоскими пространственно-подобными поверхностями, в результате чего смещения свелись к бесконечно малым перемещениям и поворотам

$$\delta x_\nu = \varepsilon_\nu + \varepsilon_{\mu\nu} x_\mu.$$

С этими смещениями связаны операторы вектора энергии-импульса

$$P_\nu = \int d\sigma_\mu T_{\mu\nu}$$

и тензора момента количества движения

$$J_{\mu\nu} = \int d\sigma_\lambda M_{\lambda\mu\nu},$$

$$M_{\lambda\mu\nu} = x_\mu T_{\lambda\nu} - x_\nu T_{\lambda\mu}.$$

Оператор G_x, очевидно, производит бесконечно малое преобразование собственного вектора, вызванное параллельным смещением поверхности, к которой он относится. В обозначении

$$\delta_x \Psi(\zeta'\sigma) = \left(\varepsilon_\nu \delta_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu}\right) \Psi(\xi'\sigma)$$

имеем

$$i\delta_\nu \Psi(\zeta'\sigma) = P_\nu \Psi(\zeta'\sigma), \qquad -i\delta_\nu \Psi(\zeta'\sigma)^\dagger = \Psi(\zeta'\sigma)^\dagger P_\nu$$

и

$$i\delta_{\mu\nu} \Psi(\zeta'\sigma) = J_{\mu\nu} \Psi(\zeta'\sigma), \qquad -i\delta_{\mu\nu} \Psi(\zeta'\sigma)^\dagger = \Psi(\zeta'\sigma)^\dagger J_{\mu\nu}.$$

Если $F(\sigma)$ является произвольной функцией динамических переменных на поверхности σ и, возможно, нединамических параметров, зависящих от σ, то мы воспользуемся обозначениями

$$\delta_x F(\sigma) = \left(\varepsilon_\nu \delta_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu}\right) F(\sigma),$$

$$\partial_x F(\sigma) = \left(\varepsilon_\nu \partial_\nu + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu}\right) F(\sigma),$$

чтобы различить полное изменение вследствие смещения и изменение, вызванное явным наличием нединамических параметров. В соответствии с выражением (1.3) видим, что

$$\delta_\nu F(\sigma) = \partial_\nu F(\sigma) + i\,[F(\sigma),\ P_\nu],$$

$$\delta_{\mu\nu} F(\sigma) = \partial_{\mu\nu} F(\sigma) + i\,[F(\sigma),\ J_{\mu\nu}].$$

Надлежащую интерпретацию производящего оператора G_χ можно получить, если заметить, что его действие эквивалентно соответствующим образом выбранной бесконечно малой вариации внешних источников. Рассмотрим следующее бесконечно малое поверхностное распределение на отрицательной стороне поверхности σ:

$$\mathfrak{B}\,\delta\xi = \mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi\delta(x_{(0)}); \tag{1.24}$$

это распределение совместимо с операторными свойствами данных вариаций. Для простоты было принято, что уравнением поверхности σ является $x_{(0)} = 0$. При таком выборе

$$\delta_\xi W_{12} = \int d\sigma \chi \mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi = G_\gamma.$$

Изменение, вызванное в поле χ, можно получить из вариации уравнений движения

$$2\mathfrak{A}_\mu \partial_\mu \delta_\xi \chi - \delta_\xi \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \chi} = -\mathfrak{B}\,\delta\xi = -\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi\,\delta(x_{(0)}).$$

Очевидно, величина $\delta_\xi \chi$ имеет разрыв при переходе через поверхностное распределение $\delta\xi$; величина этого разрыва дается выражением

$$2\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta_\xi \chi] = -\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi.$$

В запаздывающем описании, например, величина $\delta_\xi \chi$ равна нулю до поверхности, несущей источник, так что разрыв, который имеет эта величина, есть изменение, вызванное в поле χ на поверхности σ (ее положительной стороне). Таким образом, поверхностное изменение внешнего источника дает тот же результат, что и преобразование, вызванное оператором G_χ, в котором $\mathfrak{A}_{(0)}\,\chi$ на поверхности σ заменяется на

$$\mathfrak{A}_{(0)}\bar{\chi} = \mathfrak{A}_{(0)}\chi + \mathfrak{A}_{(0)}\,\delta_\xi\chi = \mathfrak{A}_{(0)}\chi - \frac{1}{2}\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi. \qquad (1.25)$$

Матрица $\mathfrak{A}_{(0)}$ сохранена в этом равенстве, так как она, вообще говоря, является сингулярной матрицей. Число компонент χ, которые появляются независимо в выражении (1.25), равно рангу матрицы $\mathfrak{A}_{(0)}$ и равно числу независимых уравнений для компонент поля, которые являются уравнениями движения, так как они содержат времени-подобные производные. Выражение (1.25) с помощью производящего оператора G_χ можно представить в виде

$$[\mathfrak{A}_{(0)}\chi,\ G_\chi] = i\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi. \qquad (1.26)$$

Множитель $^1/_2$, который появляется в этом результате, происходит оттого, что все компоненты $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$ рассматриваются на равных правах; мы не делили их на две группы, одна из которых фиксирована, а другая варьируется[1]. Если

---

[1] Дальнейшее обсуждение этого вопроса будет дано в статье, направленной в Philosophical Magazine. (Упомянутая статья Швингера [4] опубликована, и перевод ее приведен в приложении к настоящему сборнику. — *Прим. перев.*)

F — произвольная функция от $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$ на поверхности σ, то можно записать

$$[F,\ G_\chi] = i\,(\delta F)_\chi = i\,\frac{1}{2}\,\delta F,$$

где объектами вариации являются компоненты $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$. Если уравнения поля, которые являются уравнениями связи, достаточны для выражения всех компонент χ через $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$, то мы можем превратить выражение (1.26) в выражение

$$[\chi,\ G_\chi] = i\,\frac{1}{2}\,\delta\chi.$$

Конечно, следует различать эти вариации, в которых независимы только $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$, и независимые вариации всех компонент χ, дающие уравнения связи из принципа действия.

Чтобы облегчить построение перестановочных соотношений для этих полей в явном виде мы введем гипотезу приводимости, которая связана с лоренц-инвариантным процессом разделения матриц $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}$ на симметричные и антисимметричные части. Потребуем, чтобы поле и источники распадались на две совокупности: первого рода $\chi^{(1)} = \varphi$, $\xi^{(1)} = \zeta$ и второго рода $\chi^{(2)} = \psi$, $\xi^{(2)} = \eta$. Это разбиение соответствует разложению матриц

$$\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}_\mu^{(1)} + \mathfrak{A}_\mu^{(2)}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{B}^{(2)},$$
$$\mathfrak{A}_\mu^{(1)\,\mathrm{tr}} = -\mathfrak{A}_\mu^{(1)}, \qquad \mathfrak{B}^{(1)\,\mathrm{tr}} = \mathfrak{B}^{(1)},$$
$$\mathfrak{A}_\mu^{(2)\,\mathrm{tr}} = \mathfrak{A}_\mu^{(2)}, \qquad \mathfrak{B}^{(2)\,\mathrm{tr}} = -\mathfrak{B}^{(2)}.$$

Матрицы первого рода — действительные ($\mu = 0, \ldots, 3$), а второго рода — мнимые. Мы не будем писать различающих индексов, когда нет основания спутать эти матрицы.

В соответствии с гипотезой приводимости уравнения поля в двух эквивалентных формах

$$2\mathfrak{A}_\mu\,\partial_\mu\chi = \frac{\partial_l\mathscr{H}}{\partial\chi} - \mathfrak{B}\xi,$$

$$-2\mathfrak{A}_\mu^{\mathrm{tr}}\,\partial_\mu\chi = \frac{\partial_r\mathscr{H}}{\partial\chi} - \mathfrak{B}^{\mathrm{tr}}\xi$$

разделяются на две группы

$$2\mathfrak{A}_\mu \partial_\mu \varphi = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \varphi} - \mathfrak{B}\zeta, \qquad \frac{\partial_l \mathscr{H}}{\partial \varphi} = \frac{\partial_r \mathscr{H}}{\partial \varphi},$$

и

$$2\mathfrak{A}_\mu \partial_\mu \psi = \frac{\partial_l \mathscr{H}}{\partial \psi} - \mathfrak{B}\eta, \qquad \frac{\partial_l \mathscr{H}}{\partial \psi} = -\frac{\partial_r \mathscr{H}}{\partial \psi}.$$

Кроме того, производящий оператор

$$G_\chi = \int d\sigma \chi \mathfrak{A}_{(0)}\, \delta\chi = \int d\sigma \left(-\mathfrak{A}_{(0)}^{\mathrm{tr}}\, \delta\chi\right)\chi$$

разделяется на сумму двух слагаемых, $G_\varphi + G_\psi$, где

$$G_\varphi = \int d\sigma \varphi \mathfrak{A}_{(0)}\, \delta\varphi = \int d\sigma \left(\mathfrak{A}_{(0)}\, \delta\varphi\right)\varphi$$

и

$$G_\psi = \int d\sigma \psi \mathfrak{A}_{(0)}\, \delta\psi = \int d\sigma \left(-\mathfrak{A}_{(0)}\, \delta\psi\right)\psi. \qquad (1.27)$$

С учетом этих результатов функция Лагранжа принимает вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\{\varphi \mathfrak{A}_\mu, \partial_\mu \varphi\} + \frac{1}{2}[\psi \mathfrak{A}_\mu, \partial_\mu \psi] - \mathscr{H}(\varphi, \psi) + \\ + \frac{1}{2}\{\zeta \mathfrak{B}, \varphi\} + \frac{1}{2}[\eta \mathfrak{B}, \psi].$$

Эквивалентность между правой и левой производными произвольной функции $\mathscr{H}$ по компонентам поля первого рода, а также двух выражений для G_φ показывают, что операторы $\delta\varphi$ коммутируют со всеми полями в той же точке. С уравнениями поля совместимо распространение этого утверждения на поля в произвольных точках

$$[\varphi(x), \delta\varphi(x')] = [\psi(x), \delta\varphi(x')] = 0,$$

причем это относится и к компонентам источника:

$$[\zeta(x), \delta\varphi(x')] = [\eta(x), \delta\varphi(x')] = 0.$$

Из выражения (1.27) следует, что соотношение между ψ и $\delta\psi$ является соотношением антикоммутативности. Разные знаки левой и правой производных $\mathscr{H}$ по ψ учитываются тогда равенством

$$[\varphi(x), \delta\psi(x')] = \{\psi(x), \delta\psi(x')\} = 0,$$

если только $\mathscr{H}$ является четной функцией переменных второго рода. Включив сюда и компоненты источника

$$[\zeta(x),\ \delta\psi(x')] = \{\eta(x),\ \delta\psi(x')\} = 0,$$

мы обеспечиваем совместность с уравнениями поля. Мы получили теперь явную характеристику класса вариаций, к которому относится наш основной постулат.

Заметим также, что вариация

$$\delta_\xi W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\chi\mathfrak{B}\,\delta\xi = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(\mathfrak{B}^{tr}\,\delta\xi)\,\chi$$

разлагается на две части: $\delta_\zeta W_{12} + \delta_\eta W_{12}$, где

$$\delta_\zeta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,\varphi\,\mathfrak{B}\,\delta\zeta = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(\mathfrak{B}\,\delta\zeta)\,\varphi$$

и

$$\delta_\eta W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\psi\mathfrak{B}\ \delta\eta = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(-\mathfrak{B}\,\delta\eta)\,\psi.$$

Можно заключить, что вариации источников имеют те же самые операторные свойства, что и вариации поля [это уже использовано в соотношении (1.24)].

Операторные свойства $\mathfrak{A}_{(0)}\chi$ на данной поверхности σ можно теперь вывести из выражения (1.26), таким образом

$$\begin{aligned}
&[\mathfrak{A}_{(0)}\ \varphi(x),\ \varphi(x')\,\mathfrak{A}_{(0)}] = i\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}_{(0)}\ \delta_\sigma(x-x'),\\
&[\mathfrak{A}_{(0)}\varphi(x),\ \psi(x')\,\mathfrak{A}_{(0)}] = 0,\\
&\{\mathfrak{A}_{(0)}\ \psi(x),\ \psi(x')\,\mathfrak{A}_{(0)}\} = i\,\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta_\sigma(x-x'),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

где $\delta_\sigma(x-x')$ является трехмерной δ-функцией, связанной с поверхностью σ. Численные значения этих коммутаторов и антикоммутаторов обеспечивают их совместность с операторными свойствами вариаций $\delta\mathfrak{A}_{(0)}\varphi$ и $\delta\mathfrak{A}_{(0)}\psi$. Динамические переменные первого и второго рода описывают, таким образом, соответственно поля Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака, которые объединены в общем поле χ.

Так как ранг антисимметричной матрицы $\mathfrak{A}_{(0)}^{(1)}$ с необходимостью четен, то имеется четное число независимых компонент первого рода, например, $2n^{(1)}$. Всегда можно построить матрицу $\mathfrak{A}_{(0)}^{(1)}$ таким образом, чтобы все элементы, кроме первых $2n^{(1)}$ строк и столбцов, были нулями. Обозначим эту несингулярную субматрицу размерности $2n^{(1)}$ через $\mathfrak{A}_{(0)}^{(1)}$, а связанные с ней независимые компоненты φ — через φ. Тогда первое перестановочное соотношение (1.28) принимает вид

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = i\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{(0)}^{-1}\delta_\sigma(x - x').$$

Матрица $\mathfrak{B}^{(2)}$, связанная с полями Ферми—Дирака, антисимметрична и несингулярна. Следовательно, полное число компонент поля второго рода четно. Если мы допустим, что матрица $\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)}$ может быть сингулярной, и расположим ее строки и столбцы так, чтобы несингулярная матрица $\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)}$ была связана с независимыми компонентами ψ, то получим

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = i\frac{1}{2}\mathfrak{A}_{(0)}^{-1}\delta_\sigma(x - x'),$$

а отсюда следует, что действительная симметричная матрица $i\,\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)-1}$ должна быть положительно определенной.

Покажем, что число независимых компонент поля второго рода, т. е. размерность $\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)}$, должно быть четным, скажем, равным $2n^{(2)}$. Допустим, что при помощи подходящего действительного преобразования матрица $\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)}$ приведена к диагональному виду. Если число компонент ψ нечетно, то произведение всех этих компонент в заданной точке коммутирует с ψ в этой же точке. Таким образом, поскольку рассматривается алгебра операторов в заданной точке, это произведение есть кратное единичного оператора (необходимая коммутативность с ψ в других точках на поверхности σ может быть всегда достигнута), что противоречит предположению о том, что все компоненты ψ независимы.

Рассмотрим теперь соответствие между инвариантностью при отражении времени и связью между спином и статистикой. Преобразование отражения времени

$$'x_4 = -x_4, \qquad 'x_k = x_k$$

вызывает такое преобразование поля

$$'\chi = L_4\chi,$$

при котором

$$L_4^{tr}\mathfrak{A}_4L_4 = -\mathfrak{A}_4, \quad L_4^{tr}\mathfrak{A}_kL_4 = \mathfrak{A}_k \tag{1.29}$$

и

$$L_4^{tr}\mathfrak{B}L_4 = \mathfrak{B}, \quad \mathscr{H}(L_4\chi) = \mathscr{H}(\chi).$$

Однако сохранение вида функции Лагранжа является лишь кажущимся для полей второго рода. Так как $-i\mathfrak{A}_{(0)}^{(2)}$ является неотрицательной матрицей, то мнимый оператор $L_4^{(2)}$ позволяет удовлетворить только первому уравнению (1.29), что дает антиэрмитовы компоненты поля $'\chi^{(2)}$. Но инвариантность функции Лагранжа не является правильным критерием для инвариантности при отражении времени. Изменение направления времени обращает порядок поверхностей σ_1 и σ_2 и поэтому вносит знак минус в интеграл действия; знак минус может быть компенсирован лишь изменением знака при i в выражении (1.4). Мы представим это как переход от алгебры операторов χ к комплексно-сопряженной алгебре операторов χ^*. Так как линейное преобразование, которое должно сохранять вид функции $\mathscr{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi; \psi, \partial_\mu\psi)$, эффективно заменяет $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi; i\psi, i\partial_\mu\psi)$, то критерий инвариантности принимает вид

$$\mathscr{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi; \quad i\psi, i\partial_\mu\psi)^* = \mathscr{L}(\varphi^*, \partial_\mu\varphi^*; \psi^*, \partial_\mu\psi^*).$$

Член с производными в функции $\mathscr{L}$, несомненно, инвариантен, так как матрицы $\mathfrak{A}_\mu^{(1)}$ и $\mathfrak{A}_\mu^{(2)}$ соответственно действительны и мнимы. Мы выразим это, если скажем, что теория кинематически инвариантна при отражении оси времени. Чтобы она была динамически инвариантной, $\mathscr{H}$ должно быть следующим:

$$\mathscr{H}(\varphi, i\psi)^* = \mathscr{H}(\varphi^*, \psi^*).$$

Так как $\mathscr{H}$ — четная функция компонент ψ, последние должны быть соединены в пары с помощью мнимых матриц, характерных для переменных второго рода. Член с источником инвариантен, если источник и поле преобразуются одинаковым образом.

Связь между спином и статистикой возникает, если заметить, что мнимая матрица L_4 характерна для полей с полуцелым спином. Мы можем доказать это, замечая, что все трансформационные свойства L_4 удовлетворяются при

$$L_4 = \exp\left(-\frac{1}{2}\pi i S_{14}\right) L_1 \exp\left(\frac{1}{2}\pi i S_{14}\right) = \exp(-\pi i S_{14}) L_1,$$

где L_1 — матрица, описывающая отражение первой пространственной оси. Последнее выражение следует из соотношения

$$L_1^{-1} S_{14} L_1 = -S_{14}.$$

Существенный пункт в отношении действительности L_4 состоит в том, что $S_{14} = i S_{10}$ является действительной матрицей, откуда

$$L_4^* = \exp(\pi i S_{14}) L_1 = \exp(2\pi i S_{14}) L_4.$$

Далее, матрица S_{14} должна обладать теми же самыми собственными значениями, что и, например, матрица S_{12}, откуда следует, что матрица L_4 действительна для поля с целым спином и мнима для поля с полуцелым спином. Требование инвариантности при отражении оси времени ограничивает поля первого рода (Бозе—Эйнштейна) и второго рода (Ферми — Дирака) соответственно целыми и полуцелыми спинами. Эта связь также удовлетворительна в том отношении, что она отождествляет двузначные поля с полуцелым спином с полями второго рода, по отношению к которым $\mathcal{L}$ является четной функцией.

Мы ввели несколько видов производящих операторов бесконечно малых преобразований. Критерий согласованности получается при вычислении разными способами коммутатора таких двух производящих операторов:

$$[G_a, G_b] = i(\delta G_a)_b = -i(\delta G_b)_a$$

или

$$(\delta G_a)_b + (\delta G_b)_a = 0.$$

В качестве первого примера рассмотрим два производящих оператора

$$G_x = \varepsilon_\nu P_\nu(\sigma_1) + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu\nu}(\sigma_1)$$

и

$$G_\xi = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \chi\, \mathfrak{B}\, \delta\xi$$

в запаздывающем описании. Предварительно заметим, что

$$P_\nu(\sigma_1) - P_\nu(\sigma_2) = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \partial_\mu T_{\mu\nu} = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{B}\,\partial_\nu\xi + \partial_\nu\xi\mathfrak{B}\chi)$$

и что

$$J_{\mu\nu}(\sigma_1) - J_{\mu\nu}(\sigma_2) = \int\limits_{\sigma}^{\sigma_1} (dx)\, \partial_\lambda M_{\lambda\mu\nu} = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, [x_\mu \partial_\lambda T_{\lambda\nu} - x_\nu \partial_\lambda T_{\lambda\mu} + T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}].$$

Так как

$$T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = -i\,\frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}S_{\mu\nu}\chi - \chi S^{\dagger}_{\mu\nu}\mathfrak{B}\xi),$$

мы имеем

$$J_{\mu\nu}(\sigma_1) - J_{\mu\nu}(\sigma_2) = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \frac{1}{2}[\chi\mathfrak{B}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\xi + (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\xi\mathfrak{B}\chi].$$

В отсутствие внешнего источника тензор $T_{\mu\nu}$ симметричен и дивергенция его равна нулю, вследствие чего P_ν и $J_{\mu\nu}$ сохраняются. Для простоты мы ограничимся при доказательстве случаем, когда нет источника и бесконечно малое изменение $\delta\xi$ распределено в области между поверхностями σ_1 и σ_2. Тогда

$$\delta_\xi P_\nu(\sigma_1) = -\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \partial_\nu\chi\mathfrak{B}\,\delta\xi$$

и

$$\delta_\xi J_{\mu\nu}(\sigma_1) = -\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\chi\mathfrak{B}\,\delta\xi.$$

Условие совместности

$$-(\delta G_\xi)_x = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,(\delta\chi)_x \mathfrak{B}\,\delta\xi = \delta_\xi G_x$$

требует, чтобы

$$-(\delta\chi)_x = \varepsilon_\nu\partial_\nu\chi + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\chi; \quad (1.30)$$

это действительно справедливо в силу эквивалентности между вариацией $(\delta\chi(x))_x$, вызванной смещением δx_μ, и разностью $'\chi(x)-\chi(x)$, возникающей при преобразовании координат $'x_\mu = x_\mu + \delta x_\mu$.

Иные формы операторов P_ν и $J_{\mu\nu}$ удобны для проверки согласованности G_x и G_χ. Соотношения, выведенные из выражения (1.16),

$$\chi\mathfrak{A}_\nu\partial_\mu\chi - \chi\mathfrak{A}_\mu\partial_\nu\chi = i\chi(\mathfrak{A}_\lambda S_{\mu\nu} - S^\dagger_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\lambda)\partial_\lambda\chi,$$

$$\partial_\mu\chi\mathfrak{A}_\nu\chi - \partial_\nu\chi\mathfrak{A}_\mu\chi = i\partial_\lambda\chi(\mathfrak{A}_\lambda S_{\mu\nu} - S^\dagger_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\lambda)\chi$$

позволяют записать $T_{\mu\nu}$ в виде

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu\partial_\nu\chi - \partial_\nu\chi\mathfrak{A}_\mu\chi) + \partial_\lambda s_{\lambda\mu\nu} + \rho_{\mu\nu},$$

где

$$s_{\lambda\mu\nu} = -s_{\mu\lambda\nu} = i\frac{1}{4}\chi(2\mathfrak{A}_{(\mu}S_{\lambda\nu)} + 2S^\dagger_{\lambda(\nu}\mathfrak{A}_{\mu)} - \mathfrak{A}_\lambda S_{\mu\nu} - S^\dagger_{\mu\nu}\mathfrak{A}_\lambda)\chi$$

и

$$\rho_{\mu\nu} = -i\frac{1}{4}\left[S_{\mu\nu}\chi\frac{\partial_l\mathcal{H}}{\partial\chi} + \frac{\partial_r\mathcal{H}}{\partial\chi}S_{\mu\nu}\chi\right].$$

В силу антисимметрии $s_{\lambda\mu\nu}$ по первым двум индексам дивергенция от $\partial_\lambda s_{\lambda\mu\nu}$ исчезает тождественно и не дает вклада в вектор энергии-импульса P_ν,

$$P_\nu = \int d\sigma_\mu\left[\mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_\mu\partial_\nu\chi - \partial_\nu\chi\mathfrak{A}_\mu\chi) + \rho_{\mu\nu}\right],$$

но входит в выражение

$$J_{\mu\nu} = \int d\sigma_\lambda\left[-\frac{1}{2}\chi\mathfrak{A}_\lambda(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\chi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\chi\mathfrak{A}_\lambda\chi + x_\mu\rho_{\lambda\nu} - x_\nu\rho_{\lambda\mu}\right] +$$
$$+ \int(d\sigma_\nu x_\mu - d\sigma_\mu x_\nu)\mathcal{L}.$$

Компонентами P_ν в локальной системе координат являются:

$$\begin{aligned} P_{(0)} &= \int d\sigma\left[\mathcal{H} - \chi\mathfrak{A}_{(k)}\partial_{(k)}\chi - \frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\chi + \chi\mathfrak{B}\xi)\right], \\ P_{(k)} &= \int d\sigma\,[-\chi\mathfrak{A}_{(0)}\partial_{(k)}\chi + \rho_{(0)(k)}], \end{aligned} \tag{1.31}$$

тогда как для компонент $J_{\mu\nu}$ имеем

$$J_{(0)(k)} = x_{(0)}P_{(k)} - \int d\sigma x_{(k)}\Big[\mathscr{H} - \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_{(l)}\partial_{(l)}\chi - \partial_{(l)}\chi\mathfrak{A}_{(l)}\chi) - \frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\chi + \chi\mathfrak{B}\xi)\Big] - \frac{1}{2}i\int d\sigma\chi(\mathfrak{A}_{(0)}S_{(0)(k)} + S^{\dagger}_{(0)(k)}\mathfrak{A}_{(0)})\chi,$$

$$J_{(k)(l)} = \int d\sigma\,[-\chi\mathfrak{A}_{(0)}(x_{(k)}\partial_{(l)} - x_{(l)}\partial_{(k)} + iS_{(k)(l)})\chi + x_{(k)}p_{(0)(l)} - x_{(l)}p_{(0)(k)}]. \tag{1.32}$$

Величина $p_{\mu\nu}$ связана с соотношением, выражающим скалярный характер величины $\mathscr{H}$ при бесконечно малых преобразованиях:

$$\mathscr{H}\left(\chi - i\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S_{\mu\nu}\chi\right) - \mathscr{H}(\chi) = 0.$$

В действительности можно доказать, что

$$p_{\mu\nu} = 0,$$

если $\mathscr{H}$ не содержит компонент различных независимых полей в степенях, более высоких, чем вторая. Мы покажем это также без последнего ограничения, однако для простоты будем считать, что не имеется уравнений связи. Перестановочные соотношения

$$[\chi, P_\nu] = -i\partial_\nu\chi,$$

$$[\chi, J_{\mu\nu}] = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu + iS_{\mu\nu})\chi,$$

эквивалентные соотношению (1.30), предполагают, что

$$[\chi, N_{\mu\nu}] = S_{\mu\nu}\chi,$$

где

$$N_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu.$$

Это позволяет выразить требование скалярности $\mathscr{H}$ в виде

$$[\mathscr{H}, N_{\mu\nu}] = 0.$$

Компоненты

$$N_{(0)(k)} = \int d\sigma'(x_{(k)} - x'_{(k)})\Big[\mathscr{H}(x') - \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{A}_{(l)}\partial'_{(l)}\chi - \partial'_{(l)}\chi\mathfrak{A}_{(l)}\chi) - \frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\chi + \chi\mathfrak{B}\xi)\Big] - \frac{1}{2}i\int d\sigma\chi(\mathfrak{A}_{(0)}S_{(0)(k)} + S^{\dagger}_{(0)(k)}\mathfrak{A}_{(0)})\chi$$

не содержат неизвестной величины $\rho_{(0)(k)}$. Согласно нашему упрощающему предположению об отсутствии уравнений связи, коммутаторы (антикоммутаторы) всех компонент поля в точках x и x' содержат трехмерные функции $\delta_\sigma(x - x')$ и поэтому исчезают при умножении на $x_{(k)} - x'_{(k)}$. Кроме того,

$$[\mathcal{H}(x),\ \chi(x')]\,\mathfrak{A}_{(0)} = \frac{1}{2}\,i\,\frac{\partial_r \mathcal{H}}{\partial \chi}\,\delta_\sigma(x - x')$$

и

$$\mathfrak{A}_{(0)}\,[\chi(x'),\ \mathcal{H}(x)] = \frac{1}{2}\,i\,\frac{\partial_l \mathcal{H}}{\partial \chi}\,\delta_\sigma(x - x'),$$

откуда получаем

$$[\mathcal{H},\ N_{(0)(k)}] = 2i\rho_{(0)(k)} = 0.$$

Зная это, легко распространить доказательство на все компоненты $\rho_{\mu\nu}$.

Для согласованности производящих операторов G_x и G_χ требуется, чтобы

$$\frac{1}{2}\,\delta_\chi\left(\varepsilon_\nu P_\nu + \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right) = -\int d\sigma\,(\delta\chi)_x \mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi,$$

или

$$\delta_\chi P_\nu = \int d\sigma \partial_\nu \chi 2\mathfrak{A}_{(0)}\delta\chi,$$

$$\delta_\chi J_{\mu\nu} = \int d\sigma\,(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + iS_{\mu\nu})\,\chi 2\mathfrak{A}_{(0)}\,\delta\chi,$$

что легко теперь показать с помощью выражений (1.31) и (1.32) при $\rho_{(0)(k)} = 0$.

ЗАРЯЖЕННЫЕ ПОЛЯ

Из наших предыдущих рассмотрений исключалось электромагнитное (и гравитационное) поле. Введем понятие заряда, требуя, чтобы функция Лагранжа была инвариантной при преобразовании с постоянной фазой (специальном калибровочном преобразовании), выражением для которого при бесконечно малом преобразовании будет

$$'\chi = (1 - i\,\delta\lambda\,\mathcal{E})\,\chi.$$

Здесь $\delta\lambda$ — постоянная, а $\mathfrak{E}$ — мнимая матрица, которую можно рассматривать как матрицу поворота, относящуюся к пространству, отличному от четырехмерного мира. Из требования инвариантности следует, что

$$\mathfrak{E}^{+} = \mathfrak{B}\mathfrak{E}\mathfrak{B}^{-1},$$

или

$$(\mathfrak{B}\mathfrak{E})^{+} = \mathfrak{B}\mathfrak{E},$$

и

$$[\mathfrak{E},\ \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_{\mu}] = [\mathfrak{E},\ S_{\mu\nu}] = 0$$

и что

$$\mathscr{H}(\chi - i\,\delta\lambda\mathfrak{E}\chi) - \mathscr{H}(\chi) = 0.$$

Запишем теперь общую вариацию в виде

$$\delta(\chi) = \delta\chi - i\,\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\,\delta x_{\nu})\,S_{\mu\nu}\chi - i\,\delta\lambda\mathfrak{E}\chi,$$

где величина $\delta\lambda$, характеризующая локальное фазовое преобразование, является произвольной функцией от x, совместимой с постоянными значениями на поверхностях σ_1 и σ_2. Производимый при этом дополнительный вклад в $\delta(\mathscr{L})$ равен

$$j_{\mu}\partial_{\mu}\delta\lambda - i\,\frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\chi - \chi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\xi)\,\delta\lambda,$$

где

$$j_{\mu} = -i\chi\mathfrak{A}_{\mu}\mathfrak{E}\chi$$

является вектором заряда—тока. Принцип стационарного действия требует, чтобы

$$\partial_{\mu}j_{\mu} = -i\,\frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\chi - \chi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\xi), \tag{1.33}$$

и дает в качестве оператора, производящего преобразование фазы,

$$G_{\lambda} = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu}\,j_{\mu}\,\delta\lambda = Q\,\delta\lambda,$$

где Q — оператор заряда.

Интегральное соотношение

$$Q(\sigma_1) - Q(\sigma_2) = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx)\,i\,\frac{1}{2}(\chi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\xi - \xi\mathfrak{B}\mathfrak{E}\chi),$$

получающееся из выражения (1.33), становится законом сохранения заряда при отсутствии внешних источников. Если в область, ограниченную поверхностями σ_1 и σ_2, вводится бесконечно малый источник, то в запаздывающем описании имеем

$$\delta_\xi Q(\sigma_1) = -i \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \delta\bar{\chi}\mathfrak{B}\xi\chi = i\,[Q(\sigma_1),\ G_\xi],$$

откуда

$$[\chi,\ Q] = \mathcal{E}\chi.$$

Это перестановочное соотношение следует также непосредственно из смысла оператора G_χ, указывая на согласованность последнего с G_ξ.

Предположим, что матрица $\mathfrak{B}$ является элементом алгебры, образованной величинами $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\mu$ и $S_{\mu\nu}$. Отсюда следует, что матрица $\mathfrak{B}$ коммутирует с матрицей $\mathcal{E}$ и поэтому последняя явно эрмитова:

$$\mathcal{E}^\dagger = \mathcal{E}.$$

Такая антисимметричная мнимая матрица имеет действительные собственные значения, которые симметрично расположены относительно нуля; неисчезающие собственные значения встречаются парами с противоположными знаками. Так как матрица $\mathcal{E}$ коммутирует со всеми элементами вышеупомянутой алгебры, то характер заряда данного поля зависит от приводимости этой алгебры. Так, если алгебра для определенного вида поля неприводима, то единственной матрицей, коммутирующей со всеми элементами алгебры, является симметричная единичная матрица. Тогда $\mathcal{E} = 0$, и поле электрически нейтрально. Если, однако, алгебра матриц приводима к двум подобным алгебрам, как в случае

$$\mathfrak{A}_\mu = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_\mu & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}_\mu \end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

то матрица $\mathcal{E}$ существует и (в том же представлении) имеет вид

$$\mathcal{E} = e\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.35}$$

Таким образом описывается заряженное поле, состоящее из частиц с зарядами $\pm e$, являющимися собственными значениями оператора $\mathcal{E}$. Если участвуют три подобные алгебры, то поле содержит частицы с зарядами 0, $\pm e$.

Чтобы представить матрицу $\mathfrak{E}$ в виде диагональной матрицы, мы должны предварительно выбрать эрмитовы компоненты поля. Так, в случае заряженного поля Ферми—Дирака, когда компоненты поля распадаются на $\psi_{(1)}$, $\psi_{(2)}$ в соответствии со структурой матриц (1.34) и (1.35), взаимно эрмитово-сопряженные операторы

$$\psi_{(+)} = \psi_{(1)} - i\psi_{(2)}, \quad \psi_{(-)} = \psi_{(1)} + i\psi_{(2)}$$

отвечают собственным значениям $+e$ и $-e$ соответственно. При введении этих компонент поля член с производными в функции Лагранжа, вектор электрического тока и перестановочные соотношения принимают соответственно вид

$$\frac{1}{4}[\psi_{(-)}\mathfrak{A}_\mu, \partial_\mu\psi_{(+)}] + \frac{1}{4}[\psi_{(+)}\mathfrak{A}_\mu, \partial_\mu\psi_{(-)}], \tag{1.36}$$

$$-ie\frac{1}{2}(\psi_{(-)}\mathfrak{A}_\mu\psi_{(+)} - \psi_{(+)}\mathfrak{A}_\mu\psi_{(-)}) \tag{1.37}$$

и

$$\begin{aligned} \{\mathfrak{A}_{(0)}\psi_{(+)}(x), \psi_{(+)}(x')\mathfrak{A}_{(0)}\} &= \\ = \{\mathfrak{A}_{(0)}\psi_{(-)}(x), \psi_{(-)}(x')\mathfrak{A}_{(0)}\} &= 0, \\ \{\mathfrak{A}_{(0)}\psi_{(+)}(x), \psi_{(-)}(x')\mathfrak{A}_{(0)}\} = \{\mathfrak{A}_{(0)}\psi_{(-)}(x), \psi_{(+)}(x')\mathfrak{A}_{(0)}\} &= \\ = i\mathfrak{A}_{(0)}\delta_\sigma(x-x'). \end{aligned} \tag{1.38}$$

Имеется очевидная симметрия по отношению к замене $\psi_{(+)} \longleftrightarrow \psi_{(-)}$, $e \longleftrightarrow -e$.

Так как $\psi_{(+)}$ и $\psi_{(-)}$ являются эрмитово-сопряженными операторами, то мы можем произвольным образом выбрать одно из них в качестве первичного не-эрмитового поля.

Напишем

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}_\mu = i\gamma_\mu$$

и

$$\psi_{(+)} = \psi, \quad \psi_{(-)}\mathfrak{B} = \psi^\dagger\mathfrak{B} = \overline{\psi}.$$

Это придает следующий вид выражениям (1.36)—(1.38):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}[\overline{\psi}\gamma_\mu, i\partial_\mu\psi] - \frac{1}{4}[i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma_\mu, \psi], \\ &e\frac{1}{2}[\overline{\psi}\gamma_\mu, \psi]. \end{aligned} \tag{1.39}$$

и

$$\begin{aligned} \{\gamma_{(0)}\psi(x), \gamma_{(0)}\psi(x')\} = \{\overline{\psi}(x)\gamma_{(0)}, \overline{\psi}(x')\gamma_{(0)}\} &= 0, \\ \{\gamma_{(0)}\psi(x), \overline{\psi}(x')\gamma_{(0)}\} &= \gamma_{(0)}\delta_\sigma(x-x'). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Чтобы выразить теперь несколько скрытую симметрию между положительными и отрицательными зарядами, назовем $\psi_{(-)}$ зарядово-сопряженным полем

$$\psi^c = (-\mathfrak{B}^{-1})\overline{\psi} \tag{1.41}$$

и установим эту симметрию как инвариантность при подстановке $\psi \longleftrightarrow \psi^c$, $e \longleftrightarrow -e$.

Матрицы γ_μ $(\mu = 0, \ldots, 3)$ удовлетворяют равенствам

$$\gamma_\mu^\dagger = \mathfrak{B}\gamma_\mu\mathfrak{B}^{-1}$$

и

$$\gamma_\mu^{tr} = -\mathfrak{B}\gamma_\mu\mathfrak{B}^{-1}, \tag{1.42}$$

так как они являются чисто мнимыми матрицами. Вспомним также, что $\mathfrak{B}$ является антисимметричной мнимой матрицей. Если бы мы перешли от этого специального представления к другому представлению, подвергая все матрицы произвольному унитарному преобразованию, то нашли бы, что в выражениях (1.41) и (1.42) произошли лишь формальные изменения, причем матрица $\mathfrak{B}$ оказалась бы измененной с помощью не унитарного, а ортогонального преобразования. Следовательно, в общем представлении эти уравнения имеют вид

$$\psi^c = C\overline{\psi},$$
$$\gamma_\mu^{tr} = -C^{-1}\gamma_\mu C,$$

где C попрежнему обладает симметрией матрицы $\mathfrak{B}$,

$$C^{tr} = -C,$$

соответствующей примеру поля с полуцелым спином.

Перестановочные соотношения (1.40) имеют канонический вид, соответствующий разделению независимых компонент поля на такие две группы, каждая из которых имеет исчезающие антикоммутаторы (коммутаторы для полей с целым спином) с представителями той же группы. Оператор, производящий изменения в ψ и $\overline{\psi}$ и определяемый выражением (1.27), в случае поля с полуцелым спином будет равен

$$G(\psi, \overline{\psi}) = \frac{1}{2} i \int d\sigma \, (\overline{\psi}\gamma_{(0)}\delta\psi - \delta\overline{\psi}\gamma_{(0)}\psi),$$

что можно получить непосредственно из члена в функции Лагранжа, содержащего производные [см. выражение (1.39)]. В соответствии с тем, что функцию Лагранжа можно изменить путем добавления дивергенции, возможны различные выражения для операторов, производящих изменения в компонентах поля. Так, мы имеем следующие два простых возможных выражения для члена, содержащего производные, и для связанного с ним производящего оператора:

$$\frac{1}{2}[\overline{\psi}\gamma_\mu,\ i\partial_\mu\psi],$$

$$G(\psi)=i\int d\sigma\overline{\psi}\gamma_{(0)}\delta\psi$$

и

$$-\frac{1}{2}[i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma_\mu,\ \psi],$$

$$G(\overline{\psi})=-i\int d\sigma\,\delta\overline{\psi}\gamma_{(0)}\psi.$$

Очевидно, что $G(\psi)$, например, является производящим оператором для изменения компонент $\gamma_{(0)}\psi$ без изменения $\overline{\psi}\gamma_{(0)}$. Связанные с этим перестановочные соотношения

$$[\gamma_{(0)}\psi,\ G(\psi)]=i\gamma_{(0)}\delta\psi,$$

$$[\overline{\psi}\gamma_{(0)},\ G(\psi)]=0$$

удовлетворяются в силу выражения (1.40), и, наоборот, в сочетании с аналогичными утверждениями относительно $G(\overline{\psi})$ обусловливают эти операторные свойства компонент поля. Связь с производящим оператором при симметричном рассмотрении всех компонент поля дается соотношением

$$G(\psi,\ \overline{\psi})=\frac{1}{2}G(\psi)+\frac{1}{2}G(\overline{\psi}),$$

откуда и возникает множитель $^1/_2$ в общем уравнении (1.26).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Постулат общей калибровочной инвариантности позволяет ввести электромагнитное поле. Если все поля и источники подвергаются общему калибровочному преобразованию

$$'\chi=\exp(-i\lambda(x)\mathfrak{E})\chi=\chi\exp(i\lambda(x)\mathfrak{E}),$$

то рассматриваемая функция Лагранжа изменяется следующим образом:

$$'\mathcal{L} = \mathcal{L} + j_\mu \partial_\mu \lambda.$$

Добавление лагранжевой функции электромагнитного поля

$$\mathcal{L}_{\text{эмп.}} = \frac{1}{2}\{J_\mu, A_\mu\} - \frac{1}{4}\{F_{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + J_\mu A_\mu \tag{1.43}$$

дает компенсирующую величину при помощи сопутствующего калибровочного преобразования

$$'A_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda.$$

Если

$$\partial_\mu J_\mu = 0,$$

то слагаемое, содержащее внешний ток J_μ, будет эффективно калибровочно инвариантным, так как добавка к нему имеет вид дивергенции. В том же смысле допустимо употребление такой формы лагранжевой функции, в которой второй член [см. выражение (1.43)] заменяется на

$$\frac{1}{2}\{\partial_\mu F_{\mu\nu}, A_\nu\}. \tag{1.44}$$

Запишем общую вариацию A_μ в виде

$$\delta(A_\mu) = \delta A_\mu - (\partial_\mu \delta x_\nu) A_\nu =$$
$$= \delta A_\mu - \frac{1}{2}(\partial_\mu \delta x_\nu - \partial_\nu \delta x_\mu) A_\nu - \frac{1}{2}(\partial_\mu \delta x_\nu + \partial_\nu \delta x_\mu) A_\nu,$$

который показывает, что вектор A_μ имеет те же трансформационные свойства, как и градиент скаляра, и что тем самым сохраняется возможность калибровочного преобразования при произвольных деформациях координат. Подобным образом

$$\delta(F_{\mu\nu}) = \delta F_{\mu\nu} - (\partial_\mu \delta x_\lambda) F_{\lambda\nu} - (\partial_\nu \delta x_\lambda) F_{\mu\lambda}.$$

Имея в виду вывод уравнений электромагнитного поля из принципа действия, следует заметить, что общая калибровочная инвариантность требует, чтобы источники заряженных полей неявно зависели от векторного потенциала A_μ. Выразим эту зависимость в виде

$$\delta_A \xi(x') = \int (dx) \frac{\delta \xi(x')}{\delta A_\mu(x)} \delta A_\mu(x).$$

Так как бесконечно малое калибровочное преобразование $\delta A_\mu = -\partial_\mu \delta\lambda$ должно вызвать изменение $\delta\xi = -i\delta\lambda\mathcal{E}\xi$, то мы находим, что

$$\partial_\mu \left(\frac{\delta\xi(x')}{\delta A_\mu(x)}\right) = -i\mathcal{E}\xi(x)\,\delta(x - x'). \tag{1.45}$$

Варьируя $F_{\mu\nu}$ и A_ν в полной лагранжевой функции, получаем следующие уравнения поля:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1.46}$$

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = j_\mu + k_\mu + J_\mu, \tag{1.47}$$

где

$$k_\mu(x) = \frac{1}{2}\int (dx')\left[\frac{\delta\xi(x')}{\delta A_\mu(x)}\mathfrak{B}\chi(x') + \chi(x')\mathfrak{B}\frac{\delta\xi(x')}{\delta A_\mu(x)}\right]$$

представляет ту часть полного вектора тока, которая связана с источниками заряженного поля. Из уравнения (1.45) получаем, что

$$\partial_\mu k_\mu = i\frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\mathcal{E}\chi - \chi\mathfrak{B}\mathcal{E}\xi).$$

Но дивергенция полного вектора тока равна нулю в силу уравнений электромагнитного поля. Поэтому

$$\partial_\mu j_\mu = -i\frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\mathcal{E}\chi - \chi\mathfrak{B}\mathcal{E}\xi),$$

что находится в согласии с выражением (1.33).

После устранения тех членов в вариации $\delta(\mathcal{L}_{\text{эмп.}})$, которые приводят к уравнениям поля, остается

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{L}_{\text{эмп.}}) = \frac{1}{2}\{\delta j_\mu, A_\mu\} - \partial_\mu(F_{\mu\nu}\delta A_\nu) + A_\mu\partial_\nu J_\mu\,\delta x_\nu - \\ - \frac{1}{2}(\partial_\mu\,\delta x_\nu + \partial_\nu\,\delta x_\mu)\left(\frac{1}{2}\{j_\mu, A_\nu\} - \frac{1}{2}\{F_{\mu\lambda}, F_{\nu\lambda}\}\right) - \\ - (\partial_\mu\,\delta x_\nu)\,J_\mu A_\nu,\end{aligned} \tag{1.48}$$

где

$$\frac{1}{2}\{\delta j_\mu, A_\mu\} = -i\,\delta\chi\,\mathfrak{A}_\mu\mathcal{E}\{\chi, A_\mu\} = -i\{A_\mu, \chi\}\,\mathfrak{A}_\mu\mathcal{E}\,\delta\chi.$$

Этот член изменяет уравнения поля заряженных полей, приводя их к виду

$$2\mathfrak{A}_\mu\left(\partial_\mu\chi - i\mathcal{E}\frac{1}{2}\{A_\mu, \chi\}\right) = \frac{\partial_l\mathcal{H}}{\partial\chi} - \mathfrak{B}\xi,$$

$$-\left(\partial_\mu\chi + i\frac{1}{2}\{\chi, A_\mu\}\mathcal{E}\right)2\mathfrak{A}_\mu = \frac{\partial_r\mathcal{H}}{\partial\chi} - \xi\mathfrak{B}.$$

Мы учли, что не все компоненты A_μ коммутируют с χ. Тензор $T_{\mu\nu}$ теперь принимает вид

$$T_{\mu\nu} = \ldots + \frac{1}{2}\{F_{\mu\lambda}, F_{\nu\lambda}\} - \frac{1}{2}\{j_{(\mu}, A_{\nu)}\} - J_\mu A_\nu, \quad (1.49)$$

где многоточие заменяет выражение (1.20), но с $\mathcal{L}$ — полной лагранжевой функцией. Из принципа действия получается дифференциальное уравнение

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\chi\mathfrak{B}\partial_\nu\xi + \partial_\nu\xi\mathfrak{B}\chi) + A_\mu\partial_\nu J_\mu. \quad (1.50)$$

Член с дивергенцией в уравнении (1.48) дает бесконечно малый производящий оператор

$$G_A = -\int d\sigma_\mu F_{\mu\nu}\delta A_\nu = -\int d\sigma F_{(0)(k)}\delta A_{(k)}, \quad (1.51)$$

тогда как функция Лагранжа, в которую включен член с производной (1.44), дала бы

$$G_F = \int d\sigma_\mu \delta F_{\mu\nu} A_\nu = \int d\sigma \delta F_{(0)(k)} A_{(k)}. \quad (1.52)$$

Изменение интеграла действия, вызванное изменением внешнего тока J_μ, дается выражением

$$\delta_J W_{12} = \int_{\sigma_2} (dx)\,\delta J_\mu A_\mu.$$

Если вариация тока δJ_μ имеет вид

$$\delta J_\mu = \partial_\nu \delta M_{\mu\nu}, \qquad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \quad (1.53)$$

($\delta M_{\mu\nu}$ исчезает на поверхностях σ_1 и σ_2), из которого следует, что дивергенция тока равна нулю, то мы находим

$$\delta_J W_{12} = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\frac{1}{2}\delta M_{\mu\nu}F_{\mu\nu};$$

это делает излишним введение внешнего источника, связанного непосредственно с тензором напряженности поля $F_{\mu\nu}$.

Особая природа электромагнитного поля[1] очевидна из формы оператора (1.52), производящего изменения в локальных компонентах электрического поля. Так как одно из уравнений поля является уравнением связи

$$\partial_{(k)} F_{(0)(k)} = j_{(0)} + k_{(0)} + J_{(0)}, \tag{1.54}$$

три вариации $\delta F_{(0)(k)}$ не могут быть выбраны произвольно, электромагнитное поле и заряженные поля не являются кинематически независимыми. Очевидно, это является выражением калибровочной инвариантности, которая связывает два типа полей. Из выражения (1.51) мы видим, что $A_{(0)}$ не является динамической переменной, подвергающейся независимым вариациям. Однако не существует уравнения поля, которое выражало бы $A_{(0)}$ через независимые динамические переменные в силу произвола, связанного с наличием калибровочных преобразований. Кроме того, вариация вектора $A_{(k)}$, имеющая вид градиента, т. е. калибровочное преобразование, дает производящий оператор, который вследствие уравнения (1.54) не содержит более динамических переменных электромагнитного поля. Таким образом, в любом виде, (1.51) или (1.52), имеются лишь две кинематически независимые вариации величин электромагнитного поля.

Применим теперь эти производящие операторы для вывода перестановочных свойств калибровочно-инвариантных компонент напряженности поля. В соответствии с действием вариации $\delta A_{(k)}$ на локальные компоненты $F_{\mu\nu}$ имеем

$$[F_{(0)(k)}, G_A] = 0,$$
$$[F_{(k)(l)}, G_A] = i(\partial_{(k)} \delta A_{(l)} - \partial_{(l)} \delta A_{(k)}),$$

откуда

$$[F_{(0)(k)}(x), F_{(0)(l)}(x')] = 0 \tag{1.55}$$

и

$$[F_{(k)(l)}(x), F_{(0)(m)}(x')] = i(\delta_{(k)(m)} \partial_{(l)} - \delta_{(l)(m)} \partial_{(k)}) \delta_\sigma(x - x'). \tag{1.56}$$

---

[1] Работ, касающихся вопросов, связанных с электромагнитным полем, весьма много. Из статей, опубликованных ранее, наиболее близкой по духу к нашему изложению является статья [3].

При использовании оператора G_F мы должны ограничить вариации электрического поля условием

$$\partial_{(k)} \delta F_{(0)(k)} = 0,$$

которое тождественно удовлетворяется, если

$$\delta F_{(0)(k)} = \partial_{(l)} \delta Z_{(k)(l)}, \quad Z_{(k)(l)} = -Z_{(l)(k)}.$$

Это дает выражение

$$G_F = \int d\sigma \, \frac{1}{2} F_{(k)(l)} \delta Z_{(k)(l)}.$$

Из выражений для изменений, вызванных вариацией $\delta F_{(0)(k)}$,

$$[F_{(k)(l)}, \; G_F] = 0,$$
$$[F_{(0)(k)}, \; G_F] = i \, \delta F_{(0)(k)}$$

вытекают тогда перестановочные свойства

$$[F_{(k)(l)}(x), \; F_{(m)(n)}(x')] = 0,$$

$$[F_{(0)(k)}(x), F_{(l)(m)}(x')] = i\,(\delta_{(k)(l)} \partial_{(m)} - \delta_{(k)(m)} \partial_{(l)}) \delta_\sigma (x - x'). \tag{1.57}$$

Последнее равенство эквивалентно выражению (1.56).

Иной вывод используется при бесконечно малом изменении внешнего источника

$$\delta M_{\mu\nu} = \delta m_{\mu\nu} \delta (x_{(0)}),$$

распределенного на поверхности σ (на отрицательной стороне), $x_{(0)} = 0$. При этом соответствующим оператором является

$$G_m = \int d\sigma \left[\frac{1}{2} \delta m_{(k)(l)} F_{(k)(l)} - \delta m_{(0)(k)} F_{(0)(k)}\right].$$

Изменение, произведенное в компонентах поля, следует из уравнений поля (1.47) и из свойств тензора поля (1.46), выражаемых уравнением

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.58}$$

Таким образом,

$$\partial_{(0)} (\delta F_{(0)(l)} - \delta M_{(0)(l)}) = -\partial_{(k)} \delta F_{(k)(l)} + \partial_{(k)} \delta M_{(k)(l)},$$
$$\partial_{(0)} \delta F_{(k)(l)} = \partial_{(l)} \delta F_{(0)(k)} - \partial_{(k)} \delta F_{(0)(l)},$$

что дает следующие разрывы $\delta F_{\mu\nu}$ при переходе через поверхность:

$$\delta F_{(0)(l)]} = \partial_{(k)}\, \delta m_{(k)(l)},$$
$$\delta F_{(k)(l)]} = \partial_{(l)}\, \delta m_{(0)(k)} - \partial_{(k)}\, \delta m_{(0)(l)}.$$

В запаздывающем описании эти разрывы являются действительными изменениями в компонентах поля на поверхности σ. Согласно общей формуле (1.23), получаем

$$\partial_{(k)}\, \delta m_{(k)(l)} = i\,[F_{(0)(l)},\ G_m],$$
$$\partial_{(l)}\, \delta m_{(0)(k)} - \partial_{(k)}\, \delta m_{(0)(l)} = i\,[F_{(k)(l)},\ G_m].$$

Ввиду произвольности значений $\delta m_{\mu\nu}$ на поверхности σ из этих уравнений вытекают перестановочные соотношения для напряженностей полей, которые совпадают с соотношениями (1.55)—(1.57).

Мы дадим родственную процедуру, которая также показывает возможность вычисления перестановок величин поля в точках, разделенных времени-подобным интервалом. Два уравнения поля (1.47) и (1.58) можно объединить в уравнение

$$-\partial_\lambda^2 F_{\mu\nu} = \partial_\mu (j_\nu + J_\nu) - \partial_\nu (j_\mu + J_\mu)$$

(мы включаем k_ν в j_ν). Изменение внешнего тока, определяемое выражением (1.53), дает

$$-\partial_\lambda^2 \delta_M F_{\mu\nu} - \partial_\mu \delta_M j_\nu + \partial_\nu \delta_M j_\mu = \partial_\mu \partial_\lambda\, \delta M_{\nu\lambda} - \partial_\nu \partial_\lambda\, \delta M_{\mu\lambda}, \quad (1.59)$$

где в запаздывающем описании

$$\delta_M F_{\mu\nu}(x) = i\left[F_{\mu\nu}(x),\ \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx')\,\frac{1}{2}\,\delta M_{\lambda\varkappa}(x')\, F_{\lambda\varkappa}(x')\right] =$$
$$= \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx')\,\frac{1}{2}\,\delta M_{\lambda\varkappa}(x')\,\eta_+(x-x')\, i\,[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')],$$

а η_+ — разрывная функция

$$\eta_+(x-x') = 1, \quad x_0 > x_0',$$
$$\eta_+(x-x') = 0, \quad x_0 < x_0'.$$

Для $\delta_M j_\nu(x)$ мы имеем аналогичное выражение. Сравнивая коэффициенты при $\delta M_{\lambda\varkappa}(x')$ в выражении (1.59) (два наших рассмотрения, использующие внешние источники, отличаются, таким образом, поверхностным и объемным распределением $\delta M_{\mu\nu}$ соответственно), находим

$$
\begin{aligned}
-\partial_\lambda^2\eta_+(x-x')\,i\,[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')] - \partial_\mu\eta_+(x-x')\,i\,\times \\
\times [j_\nu(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')] + \partial_\nu\eta_+(x-x')\,i\,[j_\mu(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')] = \\
= (\delta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\varkappa - \delta_{\nu\varkappa}\partial_\mu\partial_\lambda - \delta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\varkappa + \delta_{\mu\varkappa}\partial_\nu\partial_\lambda)\,\delta(x-x'). \quad (1.60)
\end{aligned}
$$

Значение величины

$$i\,[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')]$$

для равных времен получается из коэффициента при производной δ-функции от временной координаты и дает результат, который следовало ожидать.

В приближении, в котором пренебрегают динамической связью между токами и полями в точках с времени-подобным соотношением, дифференциальное уравнение (1.60) имеет решение

$$
\begin{aligned}
\eta_+(x-x')\,i\,[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')] = \\
= (\delta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\varkappa - \delta_{\nu\varkappa}\partial_\mu\partial_\lambda - \delta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\varkappa + \delta_{\mu\varkappa}\partial_\nu\partial_\lambda)\,D_{\text{ret}}(x-x'),
\end{aligned}
$$

где $D_{\text{ret}}(x-x')$—обычное запаздывающее решение уравнения

$$-\partial_\lambda^2 D_{\text{ret}} = \delta(x-x'). \quad (1.61)$$

Если бы мы использовали опережающее описание, то η_+ заменилось бы на $-\eta_-$, где

$$
\begin{aligned}
\eta_-(x-x') &= 0, \quad x_0 > x_0', \\
\eta_-(x-x') &= 1, \quad x_0 < x_0',
\end{aligned}
$$

и появилось бы опережающее решение уравнения (1.61). Вычитая один результат из другого, находим

$$
\begin{aligned}
i\,[F_{\mu\nu}(x),\ F_{\lambda\varkappa}(x')] = (\delta_{\nu\lambda}\partial_\mu\partial_\varkappa - \delta_{\nu\varkappa}\partial_\mu\partial_\lambda - \\
- \delta_{\mu\lambda}\partial_\nu\partial_\varkappa + \delta_{\mu\varkappa}\partial_\nu\partial_\lambda)\,D(x-x'),
\end{aligned}
$$

где $D(x-x')$ — решение однородного уравнения (1.61), даваемое равенством

$$D = D_{\text{ret}} - D_{\text{adv}}.$$

Кинематическое соотношение между электромагнитным полем и заряженными полями на данной поверхности σ наиболее ясно обнаруживается при специальном выборе калибровки, так называемой калибровки излучения:

$$\partial_{(k)} A_{(k)} = 0. \tag{1.62}$$

При этом выборе калибровки уравнение связи для электрического поля имеет вид

$$\partial_{(k)} F_{(0)(k)} = -\partial^2_{(k)} A_{(0)} = j_{(0)} + J_{(0)},$$

так что скалярный потенциал полностью определяется плотностью заряда

$$A_{(0)}(x) = \int_\sigma d\sigma' \, \mathscr{D}_\sigma(x-x') \left(j_{(0)}(x') + J_{(0)}(x')\right),$$

где

$$\mathscr{D}_\sigma(x-x') = \frac{1}{4\pi}\left[(x_{(k)} - x'_{(k)})^2\right]^{-1/2}.$$

Очевидно, потенциал $A_{(0)}$ не коммутирует с компонентами заряженных полей. Таким образом, при этой калибровке зависимость электрического поля от заряженных полей становится явной благодаря разбиению электрического поля на поперечную и продольную части:

$$F_{(0)(k)} = -\partial_{(0)} A_{(k)} - \partial_{(k)} A_{(0)} = F^{(T)}_{(0)(k)} + F^{(L)}_{(0)(k)}.$$

Заключение, что поперечные поля являются независимыми динамическими переменными электромагнитного поля при этой калибровке, подтверждается при исследовании производящих операторов G_A и G_F. Действительно,

$$G_A = -\int d\sigma \, F_{(0)(k)} \, \delta A_{(k)} = -\int d\sigma \, F^{(T)}_{(0)(k)} \, \delta A_{(k)}$$

и

$$G_F = \int d\sigma \, \delta F_{(0)(k)} A_{(k)} = \int d\sigma \, \delta F^{(T)}_{(0)(k)} A_{(k)}$$

в силу поперечности вектора $A_{(k)}$ согласно уравнению (1.62). Теперь можно вывести перестановочные свойства этих динамических переменных из выражений

$$[A_{(k)}, G_A] = i\,\delta A_{(k)}, \qquad [F^{(T)}_{(0)(k)}, G_A] = 0,$$

$$[F^{(T)}_{(0)(k)}, G_F] = i\,\delta F^{(T)}_{(0)(k)}, \qquad [A_{(k)}, G_F] = 0,$$

принимая во внимание ограничения

$$\partial_{(k)}\delta A_{(k)} = \partial_{(k)}\delta F^{(T)}_{(0)(k)} = 0,$$

имеющие место в силу поперечности этих величин. Метод лагранжевых множителей позволяет нам найти

$$i\,[A_{(k)}(x),\ F^{(T)}_{(0)(l)}(x')] = \delta_{(k)\,(l)}\delta_\sigma(x - x') + \partial'_{(l)}\lambda_{(k)}.$$

Если дивергенция поперечного электрического поля равна нулю, то

$$\partial'^2_{(l)}\lambda_{(k)} = \partial_{(k)}\delta_\sigma(x - x'),$$

откуда

$$\lambda_{(k)} = -\partial_{(k)}\mathscr{D}_\sigma(x - x').$$

Получающаяся перестановка

$$i\,[A_{(k)}(x),\ F^{(T)}_{(0)(l)}(x')] = \delta_{(k)\,(l)}\delta_\sigma(x - x') - \partial_{(k)}\partial'_{(l)}\mathscr{D}_\sigma(x - x') =$$
$$= (\delta_{(k)\,(l)}\delta_\sigma(x - x'))^{(T)}$$

также совместима с поперечностью вектора $A_{(k)}$. Остающимися перестановочными соотношениями являются

$$[A_{(k)}(x),\ A_{(l)}(x')] = [F^{(T)}_{(0)(k)}(x),\ F^{(T)}_{(0)(l)}(x')] = 0.$$

Используем метод внешнего поля для вывода перестановочных соотношений между тензором электромагнитного поля и производящими операторами смещения P_ν и $J_{\mu\nu}$. Согласно выражению (1.49) и уравнению (1.50),

$$P_\nu(\sigma_1) - P_\nu(\sigma_2) = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,[\ldots + A_\lambda\partial_\nu J_\lambda],$$

$$J_{\mu\nu}(\sigma_1) - J_{\mu\nu}(\sigma_2) =$$
$$= \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,[\ldots + A_\lambda(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\,J_\lambda + A_\mu J_\nu - A_\nu J_\mu];$$

здесь мы указали лишь члены, содержащие внешний ток. Рассмотрим бесконечно малое изменение в последнем, имеющее вид (1.53). В запаздывающем описании результирующими изменениями в величинах P_ν и $J_{\mu\nu}$ на поверхности σ_1 будут

$$\delta_M P_\nu(\sigma_1) = -\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\frac{1}{2}\delta M_{\lambda\varkappa}\partial_\nu F_{\lambda\varkappa},$$

$$\delta_M J_{\mu\nu}(\sigma_1) = -\int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\Big[\frac{1}{2}\delta M_{\lambda\varkappa}(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)F_{\lambda\varkappa} + \\ + \delta M_{\lambda\nu}F_{\mu\nu} - \delta M_{\lambda\mu}F_{\nu\lambda}\Big].$$

Выражая это через производящий оператор

$$G_M = \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\frac{1}{2}\delta M_{\lambda\varkappa}F_{\lambda\varkappa},$$

получаем следующие перестановки:

$$i[F_{\lambda\varkappa}, P_\nu] = \partial_\nu F_{\lambda\varkappa},$$

$$i[F_{\lambda\varkappa}, J_{\mu\nu}] = (x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)F_{\lambda\varkappa} + \delta_{\nu\varkappa}F_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\varkappa}F_{\nu\lambda} + \delta_{\mu\lambda}F_{\nu\varkappa} - \delta_{\nu\lambda}F_{\mu\varkappa}.$$

В заключение мы заметим, что обобщением выражения (1.31), включающим электромагнитное поле в калибровке излучения, является

$$P_{(0)} = \int d\sigma\Big[\frac{1}{2}(F^{(T)}_{(0)(k)})^2 + \frac{1}{4}(F_{(k)(l)})^2 + \mathscr{H} - \\ - \chi\mathfrak{A}_{(k)}(\partial_{(k)} - i\mathscr{E}A_{(k)})\chi - J_{(k)}A_{(k)} + \\ + \frac{1}{2}(J_{(0)} + J_{(0)})A_{(0)} - \frac{1}{2}(\xi\mathfrak{B}\chi + \chi\mathfrak{B}\xi)\Big]$$

и

$$P_{(k)} = \int d\sigma\Big[\frac{1}{2}\{F^{(T)}_{(0)(l)}, F_{(k)(l)}\} - \chi\mathfrak{A}_{(0)}\partial_{(k)}\chi\Big].$$

При получении выражения для $P_{(0)}$ следует учесть некоммутативность $A_{(0)}$ с χ, но это не дает дополнительных членов. Вариация каждого из независимых полей дает

$$\delta P_\mu = \int d\sigma\Big[\delta F^{(T)}_{(0)(k)}\partial_\mu A_{(k)} - \delta A_{(k)}\partial_\mu F^{(T)}_{(0)(k)} - \delta\chi 2\mathfrak{A}_{(0)}\partial_\mu\chi\Big],$$

что подтверждает согласованность производящих операторов смещения с различными производящими операторами вариаций поля.

ЛИТЕРАТУРА[1]

1. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 254.)
2. Bhabha H. J., Rev. Mod. Phys., **21**, 451 (1949).
3. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd. 24, 1943. (Имеется перевод Паули В., Общие принципы волновой механики, М. — Л., 1948.)
4*. Schwinger J., Phil. Mag., **44**, 1171 (1953).

[1] Здесь и в дальнейшем литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиками.

ГЛАВА II[1)]

Здесь исследуется электромагнитное поле, возмущенное заданным током. Все величины, представляющие физический интерес в различных случаях, — собственные значения, собственные функции и вероятности переходов — вычисляются из общей функции преобразования, которая дана в не-эрмитовом представлении. Рассматриваются следующие проблемы: определение собственных значений и собственных функций оператора энергии-импульса для изолированного электромагнитного поля и собственных значений и собственных функций оператора энергии для поля, возмущенного током, не зависящим от времени; вычисление вероятностей переходов и средних значений чисел фотонов для зависящего от времени тока, который отличен от нуля только в конечном промежутке времени, а также для зависящего от времени тока, принимающего неисчезающие и не зависящие от времени значения вначале и в конце. Результаты применяются при обсуждении инфракрасной катастрофы и адиабатической теоремы. Показано, как последнюю можно использовать для единой формулировки всех проблем, требующих вычисления вероятностей переходов или смещений собственных значений.

ВВЕДЕНИЕ

Подойдем к общей проблеме взаимодействующих полей, исследуя более простой случай, т. е. случай, когда имеется одно поле, которое возмущается извне. В этой статье мы исследуем систему Бозе — Эйнштейна на примере поля Максвелла с заданным электрическим током. Последующая статья будет посвящена полю Дирака.

Решение всех динамических вопросов достигается построением функции преобразования, связывающей два описания системы, соответствующие различным пространственно-

---

1) J. Schwinger, The Theory of Quantized Fields, III, Phys. Rev., 91, 728—740 (1953).

подобным поверхностям. Так, для замкнутой системы общую функцию преобразования можно выразить в виде

$$(\zeta_1'\sigma_1 | \zeta_2''\sigma_2) = \sum_{\gamma', \gamma''} (\zeta_1' | \gamma')(\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2)(\gamma'' | \zeta_2''),$$

где γ — полные совокупности совместимых интегралов движения, посредством которых можно выразить вектор энергии-импульса P_μ. В представлении γ результат бесконечно малого смещения σ_1 дается выражением

$$\delta_\varepsilon(\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2) = i(\gamma'\sigma_1 | P_\mu \delta\varepsilon_\mu | \gamma''\sigma_2) = iP'_\mu \delta\varepsilon_\mu (\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2),$$

где $P'_\mu = P_\mu(\gamma')$. В соответствии с этим, если поверхность σ_1 параллельна поверхности σ_2 и получается из последней смещением на X_μ, то мы имеем

$$(\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2) = \delta(\gamma', \gamma'') \exp(iP'_\mu X_\mu)$$

и

$$(\zeta_1'\sigma_1 | \zeta_2''\sigma_2) = \sum_{\gamma'} (\zeta_1' | \gamma') \exp(iP'_\mu X_\mu)(\gamma' | \zeta_2''). \qquad (2.1)$$

Это показывает, что, зная функцию преобразования, которая связывает два подходящим образом выбранных представления на параллельных поверхностях, можно получить все собственные значения и собственные функции оператора P_μ.

Функция преобразования полезна также и в случае, когда та же система возмущается извне внутри пространственно-временной области, ограниченной поверхностями σ_1 и σ_2. Функция преобразования $(\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2)$, которая получается, если известна функция $(\zeta_1'\sigma_1 | \zeta_2''\sigma_2)$, дает тогда вероятность перехода из начального состояния γ'' в конечное состояние γ', т. е.

$$p(\gamma', \gamma'') = |(\gamma'\sigma_1 | \gamma''\sigma_2)|^2. \qquad (2.2)$$

Особенно удобные представления получаются при определении вакуумного состояния для полной системы. Вакуум есть состояние минимальной энергии. Если это естественное начало отсчета энергии принять за нуль, то вакуум можно описать как состояние, проявляющее одинаковые свойства по отношению ко всем наблюдателям, т. е. $P_\mu \Psi_0 = J_{\mu\nu}\Psi_0 = 0$, и не зависящее от поверхности σ. Если теперь компонента χ общего поля разлагается по компонентам χ_{p_0} с различными частотами, то мы имеем $[\chi_{p_0}, P_0] = p_0\chi_{p_0}$ или $P_0\chi_{p_0} = \chi_{p_0}(P_0 - p_0)$. Если это соотношение, содержащее положительную частоту $p_0 > 0$, применяется к вектору состояния вакуума, то получаем

$$P_0(\chi_{p_0}\Psi_0) = -p_0(\chi_{p_0}\Psi_0).$$

Следовательно,

$$\chi_{p_0}\Psi_0 = 0, \quad p_0 > 0, \tag{2.3}$$

так как состояние с энергией, меньшей, чем у вакуума, должно отсутствовать. Аналогичное рассмотрение дает

$$\Psi_0^\dagger\chi_{p_0} = 0, \quad p_0 < 0,$$

т. е. равенство, сопряженное с равенством (2.3). Вектор Ψ_0, таким образом, характеризуется как правый собственный вектор положительно-частотных частей компонент поля $\chi^{(+)}$ с нулевыми собственными значениями, а $\Psi_0^\dagger$ выступает в качестве левого собственного вектора отрицательно-частотных частей компонент поля $\chi^{(-)}$ с нулевыми собственными значениями. Следует заметить, что разбиение на положительно-частотные и отрицательно-частотные части инвариантно относительно ортохронных преобразований Лоренца. Полные совокупности собственных векторов этого типа будут, очевидно, иметь особое значение для построения собственных состояний оператора энергии.

МАКСВЕЛЛОВО ПОЛЕ

Электромагнитное поле на заданной поверхности σ простейшим образом описывается различными полными совокупностями коммутирующих операторов, т. е. поперечным потенциалом $A_k(x)$ и поперечным электрическим полем $F_{0k}(x)$[1]. Следуя предположению, сделанному в предыдущем разделе, мы вместо этого будем использовать не-эрмитовы операторы $F_{0k}^{(+)}(x)$ и $F_{0k}^{\prime(-)}(x)$, которые в отсутствие внешнего

[1] В очевидных случаях, когда это не может привести к недоразумению, мы не будем употреблять более полного обозначения $F^{T}_{(0)(k)}(x)$. Такой способ обозначения подчеркивает, что имеются в виду поперечные компоненты поля относительно локальной системы координат, базирующейся на поверхности σ.

тока являются положительно-частотными и отрицательно-частотными частями оператора поля $F_{0k}(x)$. Уравнения поперечного поля при нулевом токе имеют вид

$$-\partial_0 A_k = F_{0k}, \qquad \partial_0 F_{0k} = -\partial_l^2 A_k = \omega^2 A_k,$$

где ω — координатный оператор, определяемый матрицей

$$(\mathbf{x} \,|\, \omega \,|\, \mathbf{x}') = \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \,|\, \mathbf{k} \,|\, \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')),$$

которая симметрична и положительно определенна. Если записать

$$F_{0k} = F_{0k}^{(+)} + F_{0k}^{(-)}, \qquad A_k = A_k^{(+)} + A_k^{(-)},$$

где

$$F_{0k}^{(+)} = + i\omega A_k^{(+)} = \frac{1}{2}(F_{0k} + i\omega A_k),$$

$$F_{0k}^{(-)} = - i\omega A_k^{(-)} = \frac{1}{2}(F_{0k} - i\omega A_k),$$

то уравнения движения приобретают вид

$$\partial_0 F_{0k}^{(+)} = - i\omega F_{0k}^{(+)}, \qquad \partial_0 F_{0k}^{(-)} = + i\omega F_{0k}^{(-)},$$

что в силу положительной определенности ω подтверждает интерпретацию операторов $F_{0k}^{(+)}$, $F_{0k}^{(-)}$.

Каноническую форму бесконечно малых производящих операторов

$$G_A = \int d\sigma (-F_{0k})\, \delta A_k, \qquad G_F = \int d\sigma\, A_k\, \delta F_{0k}$$

можно распространить на производящие операторы бесконечно малых изменений в не-эрмитовых операторах $F_{0k}^{(+)}$ и $F_{0k}^{(-)}$ в смысле уравнения преобразования $G - \overline{G} = \delta(W)$. Таким образом,

$$G_F = \int d\sigma (A_k^{(+)} + A_k^{(-)})(\delta F_{0k}^{(+)} + \delta F_{0k}^{(-)}) = \int d\sigma\, 2A_k^{(-)}\, \delta F_{0k}^{(+)} +$$
$$+ \delta \left[\int d\sigma \left(\frac{1}{2} A_k^{(+)} F_{0k}^{(+)} + \frac{1}{2} A_k^{(-)} F_{0k}^{(-)} + A_k^{(+)} F_{0k}^{(-)} \right) \right]$$

и

$$G_F = \int d\sigma\, 2A_k^{(+)}\, \delta F_{0k}^{(-)} +$$
$$+ \delta \left[\int d\sigma \left(\frac{1}{2} A_k^{(+)} F_{0k}^{(+)} + \frac{1}{2} A_k^{(-)} F_{0k}^{(-)} + A_k^{(-)} F_{0k}^{(+)} \right) \right],$$

что дает

$$G_{F(+)} = \int d\sigma\, 2A_k^{(-)} \delta F_{0k}^{(+)} = 2i \int d\sigma\, F_{0k}^{(-)} \omega^{-1} \delta F_{0k}^{(+)}$$

и

$$G_{F(-)} = \int d\sigma\, 2A_k^{(+)} \delta F_{0k}^{(-)} = -2i \int d\sigma\, F_{0k}^{(+)} \omega^{-1} \delta F_{0k}^{(-)}.$$

Перестановочные соотношения на поверхности σ, порождаемые этими производящими операторами, имеют вид

$$[F_{0k}^{(+)}(x),\ F_{0l}^{(+)}(x')] = [F_{0k}^{(-)}(x),\ F_{0l}^{(-)}(x')] = 0$$

и

$$[F_{0k}^{(+)}(x),\ 2A_{0l}^{(-)}(x')] = [F_{0k}^{(-)}(x),\ 2A_{0l}^{(+)}(x')] = \\ = i\,(\delta_{kl}\delta_\sigma(x - x'))^{(T)}.$$

Последнее соотношение можно также записать в виде

$$[F_{0k}^{(+)}(x),\ F_{0l}^{(-)}(x')] = \frac{1}{2}\,(\delta_{kl}(\mathrm{x}\,|\,\omega\,|\,\mathrm{x}'))^{(T)}. \tag{2.4}$$

Эти операторные свойства можно прямо проверить с помощью свойств операторов F_{0k} и A_k.

Следует отметить, что существует некоторая свобода в выборе производящего оператора для данной совокупности независимых переменных. Например,

$$'G_{F(+)} = \int d\sigma\, 2A_k \delta F_{0k}^{(+)}$$

также является производящим оператором бесконечно малых изменений в операторе поля $F_{0k}^{(+)}$, так как

$$G_{F(+)} - {}'G_{F(+)} = -\int d\sigma\, 2A_k^{(+)} \delta F_{0k}^{(+)} = \\ = 2i \int d\sigma\, F_{0k}^{(+)} \omega^{-1} \delta F_{0k}^{(+)} = \delta\left[i \int d\sigma\, F_{0k}^{(+)} \omega^{-1} F_{0k}^{(+)}\right].$$

Аналогично этому

$$'G_{F(-)} = \int d\sigma\, 2A_k\, \delta F_{0k}^{(-)}$$

является другим производящим оператором, вызывающим изменения в операторе поля $F_{0k}^{(-)}$,

$$G_{F(-)} - {}'G_{F(-)} = \delta\left[-i \int d\sigma\, F_{0k}^{(-)} \omega^{-1} F_{0k}^{(-)}\right].$$

Понятие о собственных векторах можно с некоторыми ограничениями распространить на не-эрмитовы операторы. Мы введем правый собственный вектор полной системы коммутирующих операторов $F_{0k}^{(+)}(x)$ на поверхности σ, т. е.

$$F_{0k}^{(+)}(x)\Psi(F^{(+)'}\sigma) = F_{0k}^{(+)'}(x)\Psi(F^{(+)'}\sigma),$$

и левый собственный вектор полной системы коммутирующих операторов $F_{0k}^{(-)}(x)$ на поверхности σ:

$$\Phi(F^{(-)'}\sigma)F_{0k}^{(-)}(x) = \Phi(F^{(-)'}\sigma)F_{0k}^{(-)'}(x).$$

В силу соотношения $F_{0k}^{(-)}(x) = F_{0k}^{(+)}(x)^{\dagger}$ эти собственные векторы и собственные значения связаны равенствами

$$\Phi(F^{(-)'}\sigma) = \Psi(F^{(+)'}\sigma)^{\dagger}, \quad F_{0k}^{(-)'}(x) = F_{0k}^{(+)'}(x)^{*}. \tag{2.5}$$

Однако правый собственный вектор оператора $F_{0k}^{(-)}$ и левый собственный вектор оператора $F_{0k}^{(+)}$ не существуют. Это можно заметить из перестановки (2.4), представленной в виде

$$['F_{0k}^{(-)}(x)^{\dagger},\ 'F_{0l}^{(-)}(x')] = \frac{1}{2}(\delta_{kl}(\mathrm{x}\,|\,\omega\,|\,\mathrm{x}'))^{(T)},$$

где

$$'F_{0k}^{(-)}(x) = F_{0k}^{(-)}(x) - F_{0k}^{(-)'}(x).$$

В применении к гипотетическому собственному вектору $\Psi(F^{(-)'}\sigma)$ это соотношение дает

$$-'F_{0l}^{(-)}(x')\,'F_{0k}^{(-)}(x)^{\dagger}\,\Psi(F^{(-)'}\sigma) = \frac{1}{2}(\delta_{kl}(\mathrm{x}\,|\,\omega\,|\,\mathrm{x}'))^{(T)}\Psi(F^{(-)'}\sigma).$$

Противоречие между отрицательно-определенной природой оператора слева и положительно-определенным характером численного множителя справа устанавливает отсутствие вектора [1] $\Psi(F^{(-)'}\sigma)$ и, аналогично, вектора $\Phi(F^{(+)'}\sigma)$.

Рассмотрим значение изменения, вызываемого в собственных векторах $\Psi(F^{(+)'}\sigma)$ и $\Phi(F^{(-)'}\sigma)$ соответствующими про-

[1] Из обсуждения, приведенного в первом разделе, видно, что это связано с отсутствием состояния с *максимальной* энергией.

изводящими операторами $G_{F(+)}$ и $G_{F(-)}$ согласно взаимно эрмитово-сопряженным уравнениям

$$\delta\Psi(F^{(+)'}\sigma) = -iG_{F(+)}\Psi(F^{(+)'}\sigma),$$

$$\delta\Phi(F^{(-)'}\sigma) = i\Phi(F^{(-)'}\sigma)\,G_{F(-)}.$$

Теперь $\Psi(F^{(+)'}\sigma)+\delta\Psi(F^{(+)'}\sigma)$ является собственным вектором совокупности операторов $F_{0k}^{(+)}-\delta F_{0k}^{(+)}$ с собственными значениями $F_{0k}^{(+)'}$. Так как $\delta F_{0k}^{(+)}$—произвольные бесконечно малые числа, то этот вектор является также собственным вектором операторов $F_{0k}^{(+)}$ с собственными значениями $F_{0k}^{(+)'}+\delta F_{0k}^{(+)}$. В силу этого изменение собственного вектора $\Psi(F^{(+)'}\sigma)$ связано с изменением собственных значений на величину $\delta F_{0k}^{'(+)}$. Аналогичное утверждение имеет место относительно $\delta\Phi(F^{(-)'}\sigma)$.

Соотношение между собственными векторами $\Psi(F^{(+)'}\sigma)$ и $'\Psi(F^{(+)'}\sigma)$, на которые аналогичным образом действуют соответствующие производящие операторы $G_{F(+)}$ и $'G_{F(+)}$, можно вывести из выражения

$$\delta'\Psi(F^{(+)'}\sigma) = -i\,'G_{F(+)}\,'\Psi(F^{(+)'}\sigma) =$$
$$= -iG_{F(+)}\,'\Psi(F^{(+)'}\sigma) - \delta\left(\int d\sigma F_{0k}^{(+)'}\,\omega^{-1}F_{0k}^{(+)'}\right)'\Psi(F^{(+)'}\sigma),$$

а именно:

$$'\Psi(F^{(+)'}\sigma) = \exp\left(-\int d\sigma F_{0k}^{(+)'}\,\omega^{-1}F_{0k}^{(+)'}\right)\Psi(F^{(+)'}\sigma) =$$
$$= \exp\left(-i\int d\sigma A_k^{(+)'}F_{0k}^{'(+)'}\right)\Psi(F^{(+)'}\sigma). \qquad (2.6)$$

Сопряженное уравнение имеет вид

$$'\Phi(F^{(-)'}\sigma) = \exp\left(-\int d\sigma F_{0k}^{(-)'}\,\omega^{-1}F_{0k}^{(-)'}\right)\Phi(F^{(-)'}\sigma) =$$
$$= \exp\left(i\int d\sigma A_k^{(-)'}F_{0k}^{(-)'}\right)\Phi(F^{(-)'}\sigma). \qquad (2.7)$$

Исследуем теперь максвеллово поле, находящееся под действием заданного распределения тока $J_\mu(x)$. Удобно вначале описывать соотношения между состояниями на двух произвольных плоских поверхностях σ_1 и σ_2 при помощи функции преобразования

$$'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = ('\Phi(F^{(-)'}\sigma_1)'\Psi(F^{(+)'}\sigma_2)). \qquad (2.8)$$

Зависимость этой функции преобразования от собственных значений $F^{(-)'}_{(0)(k)}$ и $F^{(+)'}_{(0)(k)}$ дается соотношениями

$$\delta_F\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = i\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, ['G_{F^{(-)}}(\sigma_1) -$$

$$-\,'G_{F^{(+)}}(\sigma_2)] \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = 2i\,'\Big(F^{(-)'}\sigma_1 \,\Big|\, \Big[\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu\, \delta F^{(-)'}_{\mu\nu} A_\nu -$$

$$-\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu\, \delta F^{(+)'}_{\mu\nu} A_\nu\Big] \,\Big|\, F^{(+)'}\sigma_2\Big), \qquad (2.9)$$

тогда как бесконечно малое изменение внешнего тока вызывает изменение

$$\delta_J\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = i\,'\Big(F^{(-)'}\sigma_1 \,\Big|\, \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,\delta J_\mu A_\mu \,\Big|\, F^{(+)'}\sigma_2\Big). \qquad (2.10)$$

На вариации тока накладывается ограничение $\partial_\mu \delta J_\mu = 0$. Поэтому, если переписать (2.10) при помощи обозначения

$$\left(\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right)'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = i\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, A_\mu(x) \,|\, F^{(+)'}\sigma_2), \qquad (2.11)$$

то к вектору $A_\mu(x)$ можно добавить произвольный градиент. Так как это совпадает со свободой калибровочного преобразования, то мы не указываем этой возможности явно.

Функция преобразования (2.8) имеет то преимущество, что она позволяет объединить соотношения (2.9) и (2.11) в уравнение

$$\delta_F\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2) = \Big[2\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu\, \delta F^{(-)'}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta J_\nu} -$$

$$-2\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu\, \delta F^{(+)'}_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta J_\nu}\Big]\,'(F^{(-)'}\sigma_1 \,|\, F^{(+)'}\sigma_2),$$

которое имеет формальное решение

$$'(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = \exp\left[2\int\limits_{\sigma_1} d\sigma_\mu F^{(-)'}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta J_\nu} - 2\int\limits_{\sigma_2} d\sigma_\mu F^{(+)'}_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta J_\nu}\right]'(0\sigma_1 \mid 0\sigma_2). \quad (2.12)$$

Таким образом, проблема сводится к построению функции преобразования, относящейся к нулевым собственным значениям.

Запишем [1]

$$(0\sigma_1 \mid 0\sigma_2) = \exp(i\mathscr{W}_0)$$

и

$$\frac{(0\sigma_1 \mid A_\mu(x) \mid 0\sigma_2)}{(0\sigma_1 \mid 0\sigma_2)} = \langle A_\mu(x)\rangle.$$

В этих обозначениях зависимость функции преобразования с нулевыми собственными значениями от внешнего тока описывается соотношением

$$\frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\mathscr{W}_0 = \langle A_\mu(x)\rangle,$$

или

$$\delta\mathscr{W}_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(dx)\,\delta J_\mu(x)\,\langle A_\mu(x)\rangle, \quad (2.13)$$

где мы распространили интегрирование на все пространство-время, предполагая, что ток исчезает вне рассматриваемой области, т. е. вне объема, ограниченного поверхностями σ_1 и σ_2. Согласно уравнению для оператора поля

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = -\partial_\nu^2 A_\mu + \partial_\mu\partial_\nu A_\nu = J_\mu,$$

численная величина $\langle A_\mu(x)\rangle$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\partial_\nu^2\langle A_\mu(x)\rangle + \partial_\mu\partial_\nu\langle A_\nu(x)\rangle = J_\mu. \quad (2.14)$$

Заметим теперь, что произвол калибровки $\langle A_\mu\rangle$ совершенно не влияет на выражение (2.13), так как J_μ исчезает

[1] Штрих опущен, так как для нулевых собственных значений нет различия между собственными векторами $\Psi(F^{(+)'}\sigma)$ и $'\Psi(F^{(+)'}\sigma)$.

на границе расширенной области. Поэтому, имея целью построение $\mathcal{W}_0$, мы можем заменить дифференциальное уравнение (2.14) уравнением

$$-\partial_\nu^2 \langle A_\mu \rangle = J_\mu. \tag{2.15}$$

Нас интересует решение этого уравнения, совместимое с граничными условиями:

$$\langle F^{(-)}_{(0)(k)} \rangle = 0 \text{ на поверхности } \sigma_1,$$
$$\langle F^{(+)}_{(0)(k)} \rangle = 0 \text{ на поверхности } \sigma_2,$$

которые следуют из природы состояний с нулевыми собственными значениями на поверхностях σ_1 и σ_2. Так как вектор тока равен нулю во внешней области, то мы можем считать, что эти граничные условия эквивалентны требованию: поле должно содержать только положительные частоты в области, составляющей будущее по отношению к σ_1, и только отрицательные частоты в области до σ_2. Это исключает возможное решение однородного уравнения, полученного из уравнения (2.15), откуда

$$\langle A_\mu(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx')\, D_+(x-x')\, J_\mu(x'), \tag{2.16}$$

где $D_+(x-x')$ — функция Грина, определенная уравнением

$$-\partial_\nu^2 D_+(x-x') = \delta(x-x')$$

и требованием: она должна содержать лишь положительные частоты при $x_0 > x_0'$ и лишь отрицательные частоты при $x_0 < x_0'$. Она является поэтому временны́м аналогом условия расходящихся волн или условия излучения, обычного в пространственном описании гармонического источника [1].

Выражение (2.16) с учетом соотношения

$$\frac{\delta}{\delta J_\nu(x')} \langle A_\mu(x) \rangle = \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(x')} \mathcal{W}_0 = \delta_{\mu\nu} D_+(x-x')$$

---

[1] Функции Грина этого типа обсуждали Штюкельберг [1] и Фейнман [2].

указывает на то, что $D_+(x-x')$ является симметричной функцией x и x'. В силу этого интеграл (2.13) равен

$$\mathscr{W}_0 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(dx)(dx')\,J_\mu(x)\,D_+(x-x')\,J_\mu(x') \quad (2.17)$$

с точностью до аддитивной постоянной, которая равна значению $\mathscr{W}_0$ для изолированного электромагнитного поля ($J_\mu = 0$). Преимуществом представления, которое мы использовали, является то, что постоянная интегрирования равна нулю. Действительно, состояния полной системы с нулевыми собственными значениями, которые осуществляются, когда электромагнитное поле не имеет внешних источников, являются как раз не зависящими от σ состояниями вакуума, откуда при $J_\mu = 0$

$$(0\sigma_1 \mid 0\sigma_2) = 1, \quad \mathscr{W}_0 = 0.$$

Дифференциальный оператор, появляющийся в решении (2.12), вводит в $\mathscr{W}_0$ подстановку

$$J_\mu(x) \to J_\mu(x) + 2\left[\delta_\mu(x, \sigma_1)\,F^{(-)'}_{\mu\nu}(x) - \delta_\mu(x, \sigma_2)\,F^{(+)'}_{\mu\nu}(x)\right].$$

Здесь $\delta_\mu(x, \sigma)$ представляет собой одномерную δ-функцию, определяемую равенством

$$\int (dx)\,\delta_\mu(x, \sigma)\,f_\mu(x) = \int_\sigma d\sigma_\mu f_\mu(x).$$

Поэтому

$$'(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = \exp(i'\mathscr{W}),$$

где

$$\begin{aligned}
'\mathscr{W} = \mathscr{W}_0 &+ 2\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu F^{(-)'}_{\mu\nu}(x)\,\langle A_\nu(x)\rangle - 2\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu F^{(+)'}_{\mu\nu}(x)\,\langle A_\nu(x)\rangle + \\
&+ 2\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \int_{\sigma_1} d\sigma'_\nu F^{(-)'}_{\mu\lambda}(x)\,D_+(x-x')\,F^{(-)'}_{\nu\lambda}(x') + \\
&+ 2\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \int_{\sigma_2} d\sigma'_\nu F^{(+)'}_{\mu\lambda}(x)\,D_+(x-x')\,F^{(+)'}_{\nu\lambda}(x') - \\
&- 4\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \int_{\sigma_2} d\sigma'_\nu F^{(-)'}_{\mu\lambda}(x)\,D_+(x-x')\,F^{(+)'}_{\nu\lambda}(x').
\end{aligned} \quad (2.18)$$

Функция Грина $D_+(x-x')$ имеет следующее символическое выражение:

$$D_+(x-x') = \frac{1}{2} i\omega^{-1} \exp(-i\omega\,|x_0 - x_0'|)\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad (2.19)$$

из которого при $x_0 = x_0'$ получаем

$$D_+(x-x') = \frac{1}{2} i\,(\mathbf{x}\,|\,\omega^{-1}\,|\,\mathbf{x}'),$$

что позволяет отождествлять двойные поверхностные интегралы, входящие в выражение (2.18) и относящиеся к одной поверхности, с множителями, появляющимися в соотношении (2.6) и (2.7). Наш результат поэтому более просто можно выразить в виде

$$(F^{(-)'}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2) = \exp(i\mathcal{W}), \quad (2.20)$$

где

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 + 2\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu F_{\mu\nu}^{(-)'}(x)\,\langle A_\nu(x)\rangle - 2\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu F_{\mu\nu}^{(+)'}(x)\,\langle A_\nu(x)\rangle -$$
$$- 4\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \int_{\sigma_2} d\sigma_\nu' F_{\mu\lambda}^{(-)'}(x)\,D_+(x-x')\,F_{\nu\lambda}^{(+)'}(x').$$

В частности, при $J_\mu = 0$

$$(F^{(-)'}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= \exp\left[-4i\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \int_{\sigma_2} d\sigma_\nu' F_{\mu\lambda}^{(-)'}(x)\,D_+(x-x')\,F_{\nu\lambda}^{(+)'}(x')\right]. \quad (2.21)$$

ПРИМЕНЕНИЯ

Для дальнейших исследований нужны будут явные выражения для функции Грина $D_+(x-x')$. Представление трехмерной δ-функции, входящей в выражение (2.19) в виде интеграла Фурье, дает

$$D_+(x-x') = \frac{1}{2} i \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_0} \begin{cases} e^{ik(x-x')}, & x_0 > x_0' \\ e^{-ik(x-x')}, & x_0 < x_0', \end{cases} \quad (2.22)$$

где $k_0 = |\mathbf{k}|$ — *положительная* частота. Инвариантность этого выражения более очевидна при записи с помощью четырехмерного интеграла

$$D_+(x - x') = i \int \frac{(dk)}{(2\pi)^3} \delta(k^2) e^{ik(x-x')},$$

где интегрирование ограничено положительными частотами при $x_0 > x'_0$ и отрицательными — при $x_0 < x'_0$. При другом четырехмерном написании никаких условий на область интегрирования не накладывается

$$D_+(x - x') = \int \frac{(dk)}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - i\varepsilon} e^{ik(x-x')}, \quad \varepsilon \to +0.$$

Выразим тензорную функцию Грина $\delta_{\mu\nu} D_+(x - x')$ при помощи четырех ортонормированных векторов, связанных с каждой плоской волной

$$\delta_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{4} e_\mu(\lambda k) e_\nu(\lambda k).$$

Выберем первые два вектора так, чтобы удовлетворить условиям при $\lambda = 1, 2$

$$n_\mu e_\mu(\lambda k) = k_\mu e_\mu(\lambda k) = 0,$$

где n_μ является произвольным времени-подобным единичным вектором:

$$n_\mu^2 = -1.$$

Остальные два вектора имеют следующие явные выражения:

$$e_\mu(3k) = n_\mu + \frac{k_\mu}{(n_\nu k_\nu)}, \quad n_\mu e_\mu(3k) = 0$$

и

$$e_\mu(4k) = i n_\mu.$$

Поэтому, используя трехмерное выражение (2.22), имеем

$$\delta_{\mu\nu} D_+(x - x') = \frac{1}{2} i \sum_{\lambda=1}^{4} \int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_0} e_\mu(\lambda k) e^{\pm ikx} e_\nu(\lambda k) e^{\mp ikx'}. \tag{2.23}$$

Для применений, относящихся к параллельным поверхностям, имеется другое полезное выражение для $\mathscr{W}_0$, которое соответствует построению $\langle A_\mu \rangle$ при калибровке излучения, одинаковой для обеих поверхностей:

$$\langle A_0(x)\rangle_{\text{калиб. изл.}} = \int (dx')\,\mathscr{D}(x-x')\,J_0(x'),$$

$$\langle A_k(x)\rangle_{\text{калиб. изл.}} = \int (dx')\,D_+(x-x')\,J_k^{(T)}(x'),$$

где

$$\mathscr{D}(x-x') = \delta(x_0-x_0')\,\mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \text{ и } \mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}.$$

Таким образом,

$$\mathscr{W}_0 = \frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,[J_k^{(T)}(x)\,D_+(x-x')\,J_k^{(T)}(x') - \\ - J_0(x)\,\mathscr{D}(x-x')\,J_0(x')]. \quad (2.24)$$

Для непосредственного доказательства эквивалентности выражений (2.24) и (2.17) используется формула для продольного тока

$$J_k^{(L)}(x) = \partial_k \int (dx')\,\mathscr{D}(x-x')\,\partial_0' J_0(x')$$

и тождество

$$D_+(x-x') = \mathscr{D}(x-x') + \\ + \partial_0\partial_0' \int (dx'')\,D_+(x-x'')\,\mathscr{D}(x''-x'). \quad (2.25)$$

Последнее можно выразить эквивалентным образом в символическом виде

$$\frac{1}{2}\,i\omega^{-1}e^{-i\omega\,|x_0-x_0'|}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \omega^{-2}\delta(x_0-x_0')\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \\ + \partial_0\partial_0'\left[\frac{1}{2}\,i\omega^{-3}e^{-i\omega\,|x_0-x_0'|}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right]. \quad (2.26)$$

Нулевой ток. Мы используем специальное выражение для функции преобразования (2.21), для того чтобы показать, как построить собственные значения и собственные функции оператора P_μ для полной системы. Предполагается, что поверхность σ_1 получается из поверхности σ_2 путем параллельного переноса на X, который переводит точку x_2 на поверхности σ_2 в точку x_1. Так как поверхности параллельны и собственные значения относятся к поперечным полям, то равенство (2.21) можно записать в виде

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= \exp\left[-4i \int\limits_{\sigma_1} d\sigma \int\limits_{\sigma_2} d\sigma' F^{(-)'}_{0m}(x)\,(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)} F^{(+)'}_{0n}(x')\right].$$

Если времени-подобный вектор n_μ отождествить с общей нормалью к обеим поверхностям, то мы увидим, что три вектора $e_\mu(\lambda k)$ ($\lambda = 1, 2, 3$) являются чисто пространственными векторами, тогда как четвертый вектор обладает лишь временно́й компонентой. Более того, первые два вектора ортогональны к вектору $\mathbf{k}$, которому параллелен третий вектор. Поэтому при $x_0 > x_0'$

$$(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)} =$$
$$= \frac{1}{2} i \sum_{\lambda=1,\,2} \sum_{k} \left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_0}\right)^{1/2} e_m(\lambda k)\, e^{ikx} \left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{1}{k_0}\right)^{1/2} e_n(\lambda k)\, e^{-ikx'},$$

где мы также заменили интегрирование по $\mathbf{k}$ суммированием по ячейкам объема $(d\mathbf{k})$.

Определяя величины

$$a^{(-)}_{\lambda k}(\sigma_1) = -i\left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{2}{k_0}\right)^{1/2} \int\limits_{\sigma_1} d\sigma F'^{(-)}_{0m}(x)\, e_m(\lambda k)\, e^{ik(x-x_1)} \qquad (2.27)$$

и

$$a^{(+)}_{\lambda k}(\sigma_2) = i\left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{2}{k_0}\right)^{1/2} \int\limits_{\sigma_2} d\sigma e^{-ik(x-x_2)} e_m(\lambda k)\, F^{(+)}_{0m}(x), \qquad (2.28)$$

являющиеся соответственно построенными линейными комбинациями $F^{(-)}_{0m}$ на поверхности σ_1 и $F^{(+)}_{0m}$ на поверхности σ_2, получаем

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = \exp\left[\sum_{\lambda k} e^{ikX} a^{(-)'}_{\lambda k}\, a^{(+)'}_{\lambda k}\right] =$$
$$= \prod_{\lambda k} \exp\left[e^{ikX} a^{(-)'}_{\lambda k} a^{(+)'}_{\lambda k}\right] = \prod_{\lambda k} \sum_{n_{\lambda k}=0}^{\infty} e^{inkX} \frac{(a^{(-)'})^n}{(n!)^{1/2}} \frac{(a^{(+)'})^n}{(n!)^{1/2}},$$

или

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) =$$

$$= \sum_n \left(\prod_{\lambda k} \frac{(a^{(-)'})^n}{(n!)^{1/2}}\right) \exp\left[i\left(\sum_{\lambda k} nk_\mu\right) X_\mu\right] \left(\prod_{\lambda k} \frac{(a^{(+)'})^n}{(n!)^{1/2}}\right).$$

Сравнение с выражением (2.1) показывает, что

$$P'_\mu = P_\mu(n) = \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} k_\mu, \quad n_{\lambda k} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.29}$$

где, в частности,

$$P'_0 = \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} k_0 \geqslant 0,$$

и что

$$(F^{(-)'} \mid n) = \prod_{\lambda k} \frac{(a^{(-)'})^n}{(n!)^{1/2}}, \quad (n \mid F^{(+)'}) = \prod_{\lambda k} \frac{(a^{(+)'})^n}{(n!)^{1/2}}.$$

Числа заполнения $n_{\lambda k}$ дают полную совокупность интегралов движения.

Заметим, что если собственные значения в соответствующих точках связаны соотношением $F^{(-)'}_{0m} = F^{(+)'*}_{0m}$, то мы имеем $a^{(-)'}_{\lambda k} = a^{(+)'*}_{\lambda k}$, и поэтому $(F^{(-)'} \mid n) = (n \mid F^{(+)'})^*$, как этого требует выражение (2.5). Зная эти простые собственные функции, можно построить собственные функции любого другого интересующего нас представления. Можно также выразить наши результаты безотносительно к представлению. Замечая, что собственная функция вакуумного состояния равна $(F^{(+)'}\sigma \mid 0) = 1$, можно написать

$$(F^{(+)'}\sigma \mid n\sigma) = \left(\prod_{\lambda k} \frac{(a^{(+)'}_{\lambda k})^n}{(n!)^{1/2}}\right)(F^{(+)'}\sigma \mid 0) =$$

$$= \left(F^{(+)'}\sigma \,\middle|\, \prod_{\lambda k} \frac{(a^{(+)}_{\lambda k}(\sigma))^n}{(n!)^{1/2}} \,\middle|\, 0\right).$$

Поэтому

$$\Psi(n\sigma) = \left(\prod_{\lambda k} \frac{(a^{(+)}(\sigma))^n}{(n!)^{1/2}}\right)\Psi_0$$

и

$$\Psi(n\sigma)^\dagger = \Psi_0^\dagger \prod_{\lambda k} \frac{(a^{(-)}(\sigma))^n}{(n!)^{1/2}}$$

являются собственными векторами состояния с числами заполнения фотонов, равными $n_{\lambda k}$.

Ток, не зависящий от времени. В этом случае $J_\mu(x) = J_\mu(\mathbf{x})$, оператор энергии P_0 является попрежнему интегралом движения и его собственные значения и собственные функции получаются из функции преобразования, характеризующей смещение во времени

$$T = t_1 - t_2,$$

где t_1 и t_2 являются временными координатами, которыми отмечаются σ_1 и σ_2.

Используя выражение (2.24) для $\mathscr{W}_0$, получаем

$$\mathscr{W}_0 = -E(0)\,T + \frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,J_k(\mathbf{x}) \times$$
$$\times J_k(\mathbf{x}')\int_{t_2}^{t_1} dx_0\,dx_0'\,[D_+(x-x') - \mathscr{D}(x-x')],$$

где

$$E(0) = -\frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,J_\mu(\mathbf{x})\,\mathscr{D}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,J_\mu(\mathbf{x}').$$

В соответствии с символическим выражением (2.26)

$$\int_{t_2}^{t_1} dx_0\,dx_0'\,[D_+(x-x') - \mathscr{D}(x-x')] =$$
$$= \int_{t_2}^{t_1} dx_0\,dx_0'\partial_0\partial_0'\left[\frac{1}{2}\,i\omega^{-3}e^{-i\omega\,|x_0-x_0'|}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right] =$$
$$= i\omega^{-3}(1 - e^{-i\omega T})\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

так что

$$\mathscr{W}_0 = -E(0)\,T + \frac{1}{2}\,i\int (d\mathbf{x})\,J_k\omega^{-3}(1 - e^{-i\omega T})\,J_k.$$

Кроме того, при $x_0 = t_1$

$$\langle A_k(x)\rangle = \int_{t_2}^{t_1} dx_0'\,\frac{1}{2}\,i\omega^{-1}\,e^{-i\omega\,(t_1-x_0')}\,J_k(\mathbf{x}) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\omega^{-2}(1 - e^{-i\omega T})\,J_k(\mathbf{x})$$

и при $x_0 = t_2$

$$\langle A_k(x) \rangle = \int_{t_2}^{t_1} dx_0' \frac{1}{2} i\omega^{-1} e^{-i\omega(x_0'-t_2)} J_k(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{2} \omega^{-2} (1 - e^{-i\omega T}) J_k(\mathbf{x}).$$

Таким образом, функция преобразования (2.20) получается в виде

$$\frac{(F^{(-)'} \sigma_1 | F^{(+)'} \sigma_2)}{(F^{(-)'} | F^{(+)'})} = \exp\left[-iE(0)T - 2\int (d\mathbf{x}) \times \right.$$

$$\left. \times (F_{0k}^{(-)'} + \frac{1}{2} i\omega^{-1} J_k) \frac{1 - e^{-i\omega T}}{\omega} \left(F_{0k}^{(+)'} - \frac{1}{2} i\omega^{-1} J_k\right)\right]. \quad (2.30)$$

Здесь мы разделили на функцию преобразования

$$(F^{(-)'} | F^{(+)'}) = \exp\left[-4i\int_\sigma d\sigma\, d\sigma' F_{0k}^{(-)'}(x) D_+(x - x') F_{0k}^{(+)'}(x')\right] =$$

$$= \exp\left[2\int (d\mathbf{x}) F_{0k}^{(-)'} \omega^{-1} F_{0k}^{(+)'}\right],$$

относящуюся к одной и той же поверхности.

Очевидно, желательно использовать новое описание, характеризуемое собственными значениями $\overline{F}_{0k}^{(+)'}$ и $\overline{F}_{0k}^{(-)'}$, где

$$\overline{F}_{0k}^{(+)} = F_{0k}^{(+)} - \frac{1}{2} i\omega^{-1} J_k, \quad \overline{F}_{0k}^{(-)} = F_{0k}^{(-)} + \frac{1}{2} i\omega^{-1} J_k$$

и

$$\overline{A}_k^{(+)} = A_k^{(+)} - \frac{1}{2}\omega^{-2} J_k, \quad \overline{A}_k^{(-)} = A_k^{(-)} - \frac{1}{2}\omega^{-2} J_k. \quad (2.31)$$

Соотношение между собственными векторами $\Psi(\overline{F}^{(+)'} \sigma)$ и $\Psi(F^{(+)'} \sigma)$ можно вывести при помощи производящего оператора

$$G(F^{(+)}) = \int d\sigma 2\overline{A}_k^{(-)} \delta \overline{F}_{0k}^{(+)} = \int d\sigma (2A_k^{(-)} - \omega^{-2} J_k) \delta F_{0k}^{(+)} =$$

$$= G(F^{(+)}) - \delta\left[\int d\sigma J_k \omega^{-2} \frac{1}{2} (F_{0k}^{(+)} + \overline{F}_{0k}^{(+)})\right],$$

где сохранена симметрия между $F_{0k}^{(+)}$ и $\overline{F}_{0k}^{(+)}$, связанная с подстановкой $J_k \to -J_k$. Таким образом,

$$\Psi(\overline{F}^{(+)'}\sigma) = \exp\left[i\int d\sigma J_k \omega^{-2}\frac{1}{2}(F_{0k}^{(+)'} + \overline{F}_{0k}^{(+)'})\right]\Psi(F^{(+)'}\sigma) =$$
$$= \exp\left[i\int d\sigma J_k \omega^{-2} F_{0k}^{(+)'} + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k \omega^{-3} J_k\right]\Psi(F^{(+)'}\sigma)$$

и

$$\Phi(\overline{F}^{(-)'}\sigma) = \exp\left[-i\int d\sigma J_k \omega^{-2} F_{0k}^{(-)'} + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k \omega^{-3} J_k\right]\Phi(F^{(-)'}\sigma).$$

Исследуя далее, заметим, что

$$(\overline{F}^{(-)'} \mid \overline{F}^{(+)'}) = \exp\left[2\int d\sigma \overline{F}_{0k}^{(-)'}\omega^{-1}\overline{F}_{0k}^{(+)'}\right] =$$
$$= \exp\left[-i\int d\sigma J_k \omega^{-2} F_{0k}^{(-)'} + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k \omega^{-3} J_k\right](F^{(-)'} \mid F^{(+)'}) \times$$
$$\times \exp\left[i\int d\sigma J_k \omega^{-2} F_{0k}^{(+)'} + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k \omega^{-3} J_k\right],$$

откуда следуют те же самые трансформационные свойства собственных векторов. Так как эти преобразующие множители не зависят явно от поверхности, то отношение функций преобразования [см. выражение (2.30)] сохраняет свою структуру при введении нового представления. Следовательно,

$$(\overline{F}^{(-)'}\sigma_1 \mid \overline{F}^{(+)'}\sigma_2) = \exp(i\overline{W}), \tag{2.32}$$

где

$$\overline{W} = -E(0)T - 2i\int (d\mathbf{x})\overline{F}_{0k}^{(-)'}\omega^{-1}e^{-i\omega T}\overline{F}_{0k}^{(+)'} =$$
$$= -E(0)T - 4\int_{\sigma_1} d\sigma \int_{\sigma_2} d\sigma' \overline{F}_{0k}^{(-)'}(x) D_+(x - x')\overline{F}_{0k}^{(+)'}(x').$$

За исключением множителя $\exp(-iE(0)T)$, эта функция преобразования по форме совпадает с функцией (2.21). Разложением (2.32) при этом будет

$$(\overline{F}^{(-)'}\sigma_1 \mid \overline{F}^{(+)'}\sigma_2) = \sum_n (\overline{F}^{(-)'} \mid n)\, e^{-iP_0'T}(n \mid \overline{F}^{(+)'}),$$

где

$$P_0' = E(0) + \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} k_0, \quad n_{\lambda k} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

и

$$(n \mid \overline{F}^{(+)'}) = \prod_{\lambda k}\frac{(\overline{a}^{(+)'})^n}{(n!)^{1/2}}, \quad (\overline{F}^{(-)'} \mid n) = \prod_{\lambda k}\frac{(\overline{a}^{(-)'})^n}{(n!)^{1/2}}.$$

Мы видим, что $E(0)$ следует интерпретировать как энергию фотонного вакуума, т. е. состояния с минимальной энергией ($n_{\lambda k}=0$). По отношению к этому смещенному началу отсчета собственные значения энергии оказываются теми же, как в отсутствие тока. Можно сказать, что поле $\overline{F}_{0k}$ описывает чистое излучение, не связанное с внешним током. Действительно, соотношения (2.31), записанные в виде

$$\overline{A}_k^{(+)}(x)=A_k^{(+)}(x)-\frac{1}{2}\int(dx')\mathscr{D}(x-x')J_k(x'),$$
$$\overline{A}_k^{(-)}(x)=A_k^{(-)}(x)-\frac{1}{2}\int(dx')\mathscr{D}(x-x')J_k(x'),$$

представляют процесс удаления из $A_k(x)$ не зависящего от времени потенциала, вызванного статическим током; это относится как к $A_k^{(+)}$, так и к $A_k^{(-)}$. Ввиду отсутствия связи между статическим полем и полем излучения собственные значения импульса, так же как и собственные значения энергии, можно приписать квантам излучения, как это отражено в выражении (2.29).

Токи, зависящие от времени. Обсудим теперь ряд проблем, в которых физические сведения, содержащиеся в общей функции преобразования (2.20), относятся к вероятностям переходов, а не к собственным значениям. Предположим сначала, что ток равен нулю на поверхности σ_2, изменяется произвольным образом в области между параллельными поверхностями σ_1 и σ_2 и опять обращается в нуль на поверхности σ_1. Таким образом, физические состояния на поверхностях σ_1 и σ_2 являются состояниями изолированного электромагнитного поля, и мы хотим вычислить вероятности переходов, вызванных возмущающим током.

При этом

$$2\int_{\sigma_1} d\sigma F_{0m}^{(-)\prime}(x)\langle A_m(x)\rangle=2\int_{\sigma_1} d\sigma F_{0m}^{(-)\prime}(x)\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx')\times$$
$$\times(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)}J_n(x')=-\sum_{\lambda k}a_{\lambda k}^{(-)\prime}e^{ikx_1}J_{\lambda k}$$

и

$$2\int_{\sigma_2} d\sigma F_{0m}^{(+)\prime}(x)\langle A_m(x)\rangle=2\int_{\sigma_2} d\sigma F_{0m}^{(+)\prime}(x)\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx')\times$$
$$\times(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)}J_n(x')=\sum_{\lambda k}a_{\lambda k}^{(+)\prime}e^{-ikx_2}J_{\lambda k}^{*},$$

где

$$J_{\lambda k}=\left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(dx)\,e_m(\lambda k)\,e^{-ikx}J_m(x). \qquad (2.33)$$

Величина $\mathscr{W}$, определяющая функцию преобразования $(F^{(-)'}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2)$, таким образом, получается в виде

$$\mathscr{W}=\mathscr{W}_0-\sum_{\lambda k}[a_{\lambda k}^{(-)'}e^{ikx_1}J_{\lambda k}+a_{\lambda k}^{(+)'}e^{-ikx_2}J_{\lambda k}^{*}+$$
$$+ia_{\lambda k}^{(-)'}e^{ikx_1}a_{\lambda k}^{(+)'}e^{-ikx_2}].$$

Функция преобразования в соответствии с соотношением

$$(F^{(-)}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2)=\sum_{n,\,n'}(F^{(-)'}\,|\,n)(n\sigma_1\,|\,n'\sigma_2)(n'\,|\,F^{(+)'})$$

будет служить тогда в качестве производящей функции для $(n\sigma_1\,|\,n'\sigma_2)$, откуда вероятности переходов находятся по формуле (2.2).

Несколько более удобно иметь дело с элементами матрицы

$$(n\,|\,S\,|\,n')=e^{-iP(n)x_1}(n\sigma_1\,|\,n'\sigma_2)\,e^{iP(n')x_2},$$
$$p(n,\ n')=|(n\,|\,S\,|\,n')|^2,$$

так как они не зависят от поверхностей σ_1 и σ_2, если только ток равен нулю на этих поверхностях. Следующая подстановка

$$a_{\lambda k}^{(-)'}e^{ikx_1}\to a_{\lambda k}^{(-)'},\qquad a_{\lambda k}^{(+)'}e^{-ikx_2}\to a_{\lambda k}^{(+)'},$$

представляющая преобразование к общей поверхности отсчета, дает производящую функцию

$$\exp(i\mathscr{W}_0)\prod_{\lambda k}\exp[a^{(-)'}a^{(+)'}-ia^{(-)'}J-ia^{(+)'}J^{*}]=$$
$$=\sum_{n,\,n'}(F^{(-)'}\,|\,n)(n\,|\,S\,|\,n')(n'\,|\,F^{(+)'}). \qquad (2.34)$$

Выделяя коэффициенты при определенном $(F^{(-)'}\,|\,n)$, получаем частичную производящую функцию

$$\exp(i\mathscr{W}_0)\prod_{\lambda k}\left[\frac{(a^{(+)'}-iJ)^n}{(n!)^{1/2}}\exp(-ia^{(+)'}J^{*})\right]=$$
$$=\sum_{n'}(n\,|\,S\,|\,n')(n'\,|\,F^{(+)'}) \qquad (2.35)$$

и аналогичным образом

$$\exp(i\mathcal{W}_0)\prod_{\lambda k}\left[\frac{(a^{(-)\prime}-iJ^*)^{n'}}{(n'!)^{1/2}}\exp(-ia^{(-)\prime}J)\right]=$$
$$=\sum_n (F^{(-)\prime}\,|\,n)(n\,|\,S\,|\,n'). \qquad (2.36)$$

Прежде чем перейти к непосредственному доказательству свойства унитарности оператора S, вычислим мнимую часть от $\mathcal{W}_0$. Согласно выражению (2.24),

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{W}_0=\int(dx)(dx')\,J_m(x)\,\mathrm{Im}\,(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)}\,J_n(x'),$$

где в соответствии с формулой (2.23)

$$\mathrm{Im}\,(\delta_{mn}D_+(x-x'))^{(T)}=$$
$$=\mathrm{Re}\sum_{\lambda=1,2}\int\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,e_m(\lambda k)\,e^{ikx}e_n(\lambda k)\,e^{-ikx'}.$$

Это выражение справедливо без ограничения относительно x_0-x_0'. Поэтому, с одной стороны,

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{W}_0=\sum_{\lambda k}|J_{\lambda k}|^2.$$

С другой стороны, инвариантное выражение (2.17) дает

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{W}_0=\int(dx)(dx')\,J_\mu(x)\,\mathrm{Im}\,D_+(x-x')\,J_\mu(x'),$$

где

$$\mathrm{Im}\,D_+(x-x')=\mathrm{Re}\int\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\,e^{ikx}e^{-ikx'},$$

что можно записать в виде

$$2\,\mathrm{Im}\,\mathcal{W}_0=\sum_k I_k.$$

Здесь

$$I_k=\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\left|\int(dx)\,e^{-ikx}J_\mu(x)\right|^2=\sum_{\lambda=1,2}|J_{\lambda k}|^2,$$

при этом следует понимать, что комплексное сопряжение не относится к $J_4=iJ_0$. Поскольку эти два вычисления необходимым образом эквивалентны, то это указывает на полное сокращение интегралов, связанных с $\lambda = 3$ и 4.

Умножим выражение (2.35) на комплексно-сопряженное соотношение

$$\exp(-i\mathscr{W}_0^*) \prod_{\lambda k} \left[\frac{(a^{(-)'} + iJ^*)^n}{(n!)^{1/2}} \exp(ia^{(-)'}J) \right] = \\ = \sum_{n'} (F^{(-)'} \mid n')(n' \mid S^+ \mid n), \qquad (2.37)$$

и произведем суммирование по n:

$$(F^{(-)'} \mid S^+S \mid F^{(+)'}) = \prod_{\lambda k} \exp[-|J|^2 + (a^{(-)} + iJ^*)(a^{(+)} - iJ) + \\ + ia^{(-)}J - ia^{(+)}J^*] = \prod_{\lambda k} \exp(a^{(-)'}a^{(+)'}) = (F^{(-)'} \mid F^{(+)'}),$$

откуда $S^+S = 1$. Отметим здесь свойство симметрии S. В силу инвариантности производящей функции (2.34) при подстановке

$$a_{\lambda k}^{(+)'} \to a_{\lambda k}^{(-)'} \frac{J_{\lambda k}}{J_{\lambda k}^*},$$

$$a_{\lambda k}^{(-)'} \to a_{\lambda k}^{(+)'} \frac{J_{\lambda k}^*}{J_{\lambda k}}$$

имеем

$$(n \mid S \mid n') = (n' \mid S \mid n) \prod_{\lambda k} \left(\frac{J}{J^*} \right)^{n-n'},$$

откуда следует равенство

$$p(n, n') = p(n', n).$$

Рассмотрим элементарное приложение производящей функции; для этого положим в выражении (2.36) $n'_{\lambda k} = 0$, что даст

$$(n \mid S \mid 0) = \exp(i\mathscr{W}_0) \prod_{\lambda k} \frac{(-iJ)^n}{(n!)^{1/2}}$$

и

$$p(n, 0) = \prod_{\lambda k} \left[\frac{(|J|^2)^n}{n!} \exp(-|J|^2) \right] \qquad (2.38)$$

для случая, когда вначале нет квантов. Если нас не интересует поляризация излученных квантов, то мы можем воспользоваться биномиальной теоремой и формулу (2.38) заменить формулой

$$p(n,\ 0)=\prod_k\left[\frac{(I_k)^n}{n!}\exp(-I_k)\right].$$

Общий элемент матрицы S получается в виде

$$(n\,|\,S\,|\,n')=\exp(i\mathscr{W}_0)\prod_{\lambda k}\left[\frac{i^{n+n'}}{(n!n'!)^{1/2}}J^nJ^{*n'}f_{n,n'}(|J|^2)\right],$$

где функция $f_{n,n'}(x)$, симметричная по n и n', дается выражением

$$f_{n,n'}(x)=x^{-n'}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^n(-x)^{n'}e^{-x}=$$
$$=x^{-n}e^x\left(\frac{d}{dx}\right)^{n'}(-x)^ne^{-x}=(-1)^{n_>}n_<!x^{-n_<}L_{n_<}^{(n_>-n_<)}(x).$$

В этом соотношении, выраженном через полиномы Лагерра[1], $n_>$ и $n_<$ представляют собой большее и меньшее из целых чисел n и n'. Общая вероятность перехода получается, таким образом, в виде

$$p(n,n')=\prod_{\lambda k}\left[\frac{n_<!}{n_>!}(|J|^2)^{n_>-n_<}\left(L_{n_<}^{(n_>-n_<)}(|J|^2)\right)^2\exp(-|J|^2)\right].\tag{2.39}$$

В частности, вероятность того, что не будет изменения в числе квантов, равна

$$p(n,\ n)=\prod_{\lambda k}[(L_n^{(0)}(|J|^2))^2\exp(-|J|^2)].$$

Если квантовые числа n и n' будут велики по сравнению с единицей и $\Delta n=n-n'\ll n,\ n'$ для данного состояния поля излучения, то множитель в вероятности перехода, относящейся к этому состоянию, можно заменить асимптотическим разложением функции Бесселя:

$$[J_{\Delta n}(2n^{1/2}|J|)]^2.$$

Можно придумать другую производящую функцию для вероятностей переходов, которая будет иметь то преиму-

---

[1] Мы следуем определению, данному в справочнике [3], стр. 84.

щество, что даст средние значения степеней конечных чисел заполнения. Сначала произведем в выражении (2.35) подстановку $a_{\lambda k}^{(+)'} \to a_{\lambda k}^{(+)'} e^{-i\gamma_{\lambda k}}$, где $\gamma_{\lambda k}$ — произвольные постоянные. Затем результат

$$\exp(iW_0) \prod_{\lambda k} \left[\frac{(a^{(+)'} - ie^{i\gamma}J)^n}{(n!)^{1/2}} \exp(-ia^{(+)'}e^{-i\gamma}J^*) \right] =$$
$$= \sum_{n'} \left[\prod_{\lambda k} \exp(i\gamma(n-n')) \right] (n|S|n')(n'|F^{(+)'})$$

умножим на выражение (2.37) и произведем суммирование по n. Это даст соотношение

$$\sum (F^{(-)'}|n')(n'|S^{\dagger}|n) \left[\prod_{\lambda k} \exp(i\gamma(n-n'')) \right] \times$$
$$\times (n|S|n'')(n''|F^{(+)'}) = \prod_{\lambda k} \exp[a^{(-)'}a^{(+)'} - ia^{(-)'}(e^{i\gamma}-1)J -$$
$$- ia^{(+)'}(e^{-i\gamma}-1)J^* + (e^{i\gamma}-1)|J|^2],$$

которое имеет ту же структуру, что и (2.34). Рассматривая диагональные матричные элементы $n'_{\lambda k} = n''_{\lambda k}$, находим

$$\sum_n \left[\prod_{\lambda k} \exp(i\gamma(n-n')) \right] p(n, n') = \left\langle \prod_{\lambda k} \exp(i\gamma(n-n')) \right\rangle_{n'} =$$
$$= \prod_{\lambda k} [L_{n'}^{(0)}((e^{i\gamma}-1)(e^{-i\gamma}-1)|J|^2) \exp((e^{i\gamma}-1)|J|^2)]. \quad (2.40)$$

Правая часть, таким образом, представляет собой производящую функцию для вероятностей переходов, если ее разложить по положительным и отрицательным степеням функции $e^{i\gamma_{\lambda k}}$. Разложение по степеням $\gamma_{\lambda k}$ служит производящим оператором средних значений всех степеней величин $n_{\lambda k} - n'_{\lambda k}$.

Пользуясь другим представлением этого результата, а именно:

$$\left\langle \prod_{\lambda k} (1 + x_{\lambda k})^{n-n'} \right\rangle_{n'} = \prod_{\lambda k} \left[L_{n'}^{(0)}\left(-\frac{x^2}{1+x}|J|^2\right) \exp(x|J|^2) \right],$$

можно получить средние значения произведений с числом сомножителей, последовательно уменьшающимся на единицу.

Таким образом, в специальном примере, где за начальное состояние принято состояние вакуума и где

$$\left\langle \prod_{\lambda k} (1+x)^n \right\rangle_0 = \prod_{\lambda k} \exp(x\,|J|^2),$$

для некоторого частного состояния найдем

$$\left\langle \frac{n!}{(n-k)!} \right\rangle_0 = (|J|^2)^k,$$

что характерно для распределения Пуассона. Первыми двумя средними значениями, выведенными из общей производящей функции, будут

$$\langle (n_{\lambda k} - n'_{\lambda k}) \rangle_{n'} = |J_{\lambda k}|^2 \tag{2.41}$$

и

$$\langle (n_{\lambda k} - n'_{\lambda k})^2 \rangle_{n'} = \langle (n_{\lambda k} - n'_{\lambda k}) \rangle^2_{n'} + (2n'_{\lambda k} + 1)\,|J_{\lambda k}|^2.$$

Едва ли нужно подчеркивать статистическую независимость различных состояний.

Если нас не интересует поляризация излученных квантов, то достаточно отождествить параметры, соответствующие разным поляризациям, $\gamma_{\lambda k} = \gamma_k$. Чтобы получить сведения, относящиеся также к неполяризованным падающим квантам, мы должны произвести усреднение с равными весами по числам фотонов, поляризованных различным образом, причем эти числа должны быть совместимы с заданным числом фотонов в определенном состоянии распространения $n'_{1k} + n'_{2k} = n'_k$. Это можно сделать при помощи теоремы сложения полиномов Лагерра. Результирующая производящая функция без учета поляризации имеет вид

$$\sum_n \left[\prod_k \exp(i\gamma(n-n'))\right] p(n, n') = \left\langle \prod_k \exp(i\gamma(n-n')) \right\rangle_{n'} =$$
$$= \prod_k \left[(n'+1)^{-1} L^{(1)}_{n'}\left((e^{i\gamma}-1)(e^{-i\gamma}-1)I\right) \exp\left((e^{i\gamma}-1)I\right) \right].$$

Некоторые из средних значений равны

$$\langle (n_k - n'_k) \rangle_{n'} = I_k$$

и

$$\langle (n_k - n'_k)^2 \rangle_{n'} = \langle (n_k - n'_k) \rangle^2_{n'} + (n'_k + 1)\, I_k.$$

Во втором примере, связанном с вычислением вероятностей переходов, предположим, что ток не зависит от времени в окрестности поверхности σ_2, изменяется произвольным образом в области между параллельными поверхностями σ_1 и σ_2 и опять становится не зависящим от времени около поверхности σ_1. Эти предельные формы $J_\mu(\mathbf{x}, 1)$ и $J_\mu(\mathbf{x}, 2)$ не обязательно одинаковы.

На каждой поверхности мы используем описание, соответствующее току на этой поверхности

$$(\overline{F}^{(-)'}\sigma_1 \mid \overline{F}^{(+)'}\sigma_2) = \exp\left[-i\int d\sigma J_k(1)\,\omega^{-2}\overline{F}_{0k}^{(-)'} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k(1)\,\omega^{-3}J_k(1)\right](F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2)\times$$
$$\times \exp\left[i\int d\sigma J_k(2)\,\omega^{-2}\overline{F}_{0k}^{(+)'} + \frac{1}{4}\int d\sigma J_k(2)\,\omega^{-3}J_k(2)\right], \qquad (2.42)$$

где

$$\overline{F}_{0k}^{(-)} = F_{0k}^{(-)} + \frac{1}{2}i\omega^{-1}J_k(1), \qquad \overline{F}_{0k}^{(+)} = F_{0k}^{(+)} - \frac{1}{2}i\omega^{-1}J_k(2).$$

Если бы ток был постоянным, то эта функция преобразования имела бы вид (2.32). В соответствии с этим мы должны иметь возможность выразить все дополнительные члены через производные по времени от тока. Способ, при помощи которого это осуществляется, можно проиллюстрировать, вычисляя выражение

$$\int_{\sigma_1} d\sigma F_{0k}^{(-)'}(x)\langle A_k(x)\rangle = -\int_{\sigma_1} d\sigma F_{0k}^{(-)'}(x)\int_{t_2}^{t_1} dx_0'\int (d\mathbf{x}')\,\partial_0'\times$$
$$\times D_+(x-x')\,i\omega^{-1}J_k(x') = \int_{\sigma_1} d\sigma F_{0k}^{(-)'}\frac{1}{2}\omega^{-2}J_k(1) +$$
$$+\int_{\sigma_1} d\sigma\int_{\sigma_2} d\sigma' F_{0k}^{(-)'}(x)\,D_+(x-x')\,i\omega^{-1}J_k(\mathbf{x}', 2) +$$
$$+\int_{\sigma_1} d\sigma F_{0k}^{(-)'}(x)\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx')\,D_+(x-x')\,i\omega^{-1}\partial_0' J_k(x').$$

Члены, содержащие $J_k(1)$ и $J_k(2)$, сокращаются, если представить соотношение (2.42) как функцию переменных $\overline{F}_{0k}^{(-)'}$

и $\overline{F}_{0k}^{(+)'}$. Выполняя аналогичное преобразование для $\mathscr{W}_0$ при помощи формулы (2.25), получаем

$$(\overline{F}^{(-)'}\sigma_1 | \overline{F}^{(+)'}\sigma_2) = \exp\Big[i\overline{\mathscr{W}_0} - 4i \int\limits_{\sigma_1} d\sigma \int\limits_{\sigma_2} d\sigma' \overline{F}_{0k}^{(-)'}(x) \times$$
$$\times D_+(x - x')\overline{F}_{0k}^{(+)'}(x') + 2i \int\limits_{\sigma_1} d\sigma \overline{F}_{0k}^{(-)'}(x) \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') \times$$
$$\times D_+(x - x')\, i\omega^{-1}\partial_0' J_k(x') + 2i \int\limits_{\sigma_2} d\sigma \overline{F}_{0k}^{(+)'}(x) \times$$
$$\times \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') D_+(x - x')\, i\omega^{-1}\partial_0' J_k(x')\Big],$$

где

$$\overline{\mathscr{W}_0} = \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(dx')\,[J_k^{(T)}(x) J_k^{(T)}(x') - J_0(x) J_0(x')]\,\mathscr{D}(x - x') +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)(dx')\,\partial_0 J_k^{(T)}(x)\,\omega^{-1} D_+(x - x')\,\omega^{-1}\partial_0' J_k^{(T)}(x').$$

Введение переменных $\overline{a}_{\lambda k}^{(-)'}$ и $\overline{a}_{\lambda k}^{(+)'}$ [см. определения (2.27) и (2.28)] приводит функцию преобразования к виду

$$(\overline{F}^{(-)'}\sigma_1 | \overline{F}^{(+)'}\sigma_2) = \exp(i\overline{\mathscr{W}_0}) \prod_{\lambda k} \exp[\overline{a}^{(-)'} e^{ikx_1} \overline{a}^{(+)'} e^{-ikx_2} -$$
$$- i\overline{a}^{(-)'} e^{ikx_1} \overline{J} - i\overline{a}^{(+)'} e^{-ikx_2} \overline{J}^*], \tag{2.43}$$

где

$$\overline{J}_{\lambda k} = \left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\frac{1}{2k_0}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (dx)\, e_m(\lambda k)\, e^{-ikx} \frac{i}{k_0}\, \partial_0 J_m(x), \tag{2.44}$$

причем интегрирование производится по всему пространству-времени при предположении, что в расширенной области ток имеет не зависящее от времени значение, соответствующее ближайшей поверхности, ограничивающей рассматриваемую область. Чтобы представить этот результат в виде производящей функции для не зависящей от поверхности унитарной матрицы

$$(n | S | n') = e^{-iP(n, 1)x_1} (n\sigma_1 | n'\sigma_2)\, e^{iP(n', 2)x_2},$$
$$P_0(n) = E(0) + \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} k_0,$$

необходимо дальнейшее преобразование $\overline{W}_0$. Действительно, первый член выражения этой величины равен

$$-\int_{t_2}^{t_1} dx_0 E(0,\ x_0) =$$

$$= -[t_1 E(0,\ 1) - t_2 E(0,\ 2)] + \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 x_0 \partial_0 E(0,\ x_0).$$

Подставляя

$$\overline{a}^{(-)'} e^{ikx_1} \to \overline{a}^{(-)'}, \qquad \overline{a}^{(+)'} e^{ikx_2} \to \overline{a}^{(+)'},$$

получаем теперь искомую производящую функцию

$$\exp(iw_0) \prod_{\lambda k} [\overline{a}^{(-)'} \overline{a}^{(+)'} - i\overline{a}^{(-)'} \overline{J} - i\overline{a}^{(+)'} \overline{J}^*] =$$

$$= \sum_{n,\ n'} (\overline{F}^{(-)'} \mid n)(n \mid S \mid n')(n' \mid \overline{F}^{(+)'}), \quad (2.45)$$

где функция

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 x_0 \partial_0 E(0,\ x_0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)(dx') \times$$

$$\times \partial_0 J_k^{(T)}(x)\, \omega^{-1} D_+(x - x')\, \omega^{-1} \partial_0' J_k^{(T)}(x') \quad (2.46)$$

такова, что

$$2\, \mathrm{Im}\, w_0 = \sum_{\lambda k} |\overline{J}_{\lambda k}|^2.$$

Производящая функция (2.45) совпадает по структуре с производящей функцией (2.34). Поэтому вероятности переходов и средние значения даются выражениями (2.39) и (2.40) при замене $J_{\lambda k}$ на $\overline{J}_{\lambda k}$. Если ток равен нулю на границах области, то интегрирование по частям сводит $\overline{J}_{\lambda k}$ к $J_{\lambda k}$. Заметим также, что если ток не зависит от времени, то из формулы (2.45) следует $(n \mid S \mid n') = \delta(n,\ n')$. Это указывает на стационарный характер состояний, характеризуемых числами фотонов.

Инфракрасная катастрофа. Согласно формуле (2.41), среднее число фотонов, излученных в определенном состоянии, дается выражением

$$|\overline{J}_{\lambda k}|^2 = \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\, e_m(\lambda k)\, e^{-ikx} \partial_0 J_m(x) \right|^2.$$

Рассмотрим теперь настолько низкие частоты, чтобы длины волн были велики по сравнению с линейными размерами пространственно-временной области, в которой изменяются токи. Среднее число фотонов каждой из поляризаций, которые появляются в области таких низких частот, равно тогда

$$\int \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\, \partial_0 J_\mu(x) \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{dk_0}{k_0} \left| \int (d\mathbf{x}) (J_\mu(\mathbf{x}, 1) - J_\mu(\mathbf{x}, 2)) \right|^2.$$

Это число становится бесконечным, когда нижний предел частоты стремится к нулю. Любое временнóе изменение тока производит таким образом логарифмически бесконечное число фотонов нулевой частоты — факт, хорошо известный как „инфракрасная катастрофа". Следовательно, мы находим, что вероятность излучения конечного числа фотонов равна нулю. Чтобы уклониться от утверждений подобного типа, вспомним, что во всяком экспериментальном устройстве имеется минимальная регистрируемая частота $k_{0,\min}$, и, следовательно, мы не имеем сведений о числе фотонов, излученных в состояниях, частоты которых меньше $k_{0,\min}$. Если просуммировать общую вероятность переходов (2.39) по всем конечным числам заполнения, относящимся к этим ненаблюдаемым состояниям, то останется то же выражение, построенное лишь из наблюдаемых состояний. Последнее даст неисчезающие вероятности излучения конечного числа фотонов, причем зависимость каждой вероятности перехода от $k_{0,\min}$ выражается множителем

$$\exp\left(-\sum_{\lambda k} |\bar{J}_{\lambda k}|^2\right) =$$

$$= \exp\left[-\int_{k_{0,\min}}^{\infty} \frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\, e^{-ikx} \partial_0 J_\mu(x) \right|^2 \right].$$

Эта величина представляет собой вероятность того, что не будет излучен (наблюдаемый) фотон, если ни одного фотона не было вначале.

Адиабатическая теорема. Это важное утверждение относится к тому случаю, когда ток изменяется от своего начального значения к конечному со скоростью, определяемой полным истекшим временем $T = t_1 - t_2$. Нас в особенности интересует предел, при котором T становится очень большим по сравнению с периодами всех наблюдаемых состояний, т. е. $k_{0,\min} T \to \infty$. Указанное описание изменения тока со временем количественно выражается соотношением

$$\int (d\mathbf{x})\, e_m(\lambda \mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} J_m(x) = j_{\lambda k}(\zeta), \qquad \zeta = \frac{x_0 - t_2}{T}.$$

Следовательно, величина интеграла, появляющегося в формуле (2.44), в основном определяется выражением

$$\int_0^1 d\zeta e^{ik_0 T\zeta} j'(\zeta).$$

Далее, по лемме Римана — Лебега[1]

$$\operatorname*{Lim}_{k_0 T \to \infty} \left| \int_0^1 d\zeta e^{ik_0 T\zeta} j'(\zeta) \right| = 0, \qquad (2.47)$$

если только

$$\int_0^1 d\zeta\, |j'(\zeta)| < \infty.$$

Этого достаточно, чтобы показать, что

$$\operatorname*{Lim}_{T \to \infty} |\overline{J}_{\lambda k}|^2 = 0.$$

Если $j'_{\lambda k}(\zeta)$ имеет ограниченное полное изменение, то интеграл в выражении (2.47) стремится к нулю как $(k_0 T)^{-1}$, что позволяет нам удовлетворить равенству

$$\operatorname*{Lim}_{T \to \infty} \sum_{\lambda k} |\overline{J}_{\lambda k}|^2 = 0$$

без существенного ограничения пространственного распределения тока (оно не должно быть столь сингулярным как градиент δ-функции). При этих условиях получаем нулевую вероятность для любого изменения чисел фотонов, несмотря на изменения тока.

[1] См. книгу [4], стр. 172.

Эту теорему можно использовать, чтобы получить единое выражение для результатов всех задач, в которых рассматриваются вероятности переходов. Так, при интегрировании по расширенной области в формуле (2.44) предполагается, что ток постоянен во внешней области. Если бы мы заменили эти постоянные токи токами, убывающими адиабатически до нуля на бесконечности, то нулевой вклад от внешней области не был бы затронут. Но мы заменили бы при этом первоначальную задачу такой, в которой ток исчезает на границах расширенной области. Поэтому мы можем интегрировать по частям в формуле (2.44) и получить снова выражение (2.33), относящееся к случаю нулевых токов на границах. Наиболее общая задача, требующая вычисления вероятностей переходов между стационарными состояниями, включает начальные и конечные токи, которые не зависят от времени в различных системах отсчета. Этот случай, если его модифицировать при помощи адиабатического приема, также попадает в класс задач, охватываемых соотношением (2.34).

Адиабатический прием также применим к задачам на собственные значения. Например, мы можем использовать функцию преобразования (2.34), относящуюся к случаю нулевых токов на граничных поверхностях, чтобы построить собственные значения энергии для случая тока, не зависящего от времени. Предположим, что ток, который равен нулю на поверхности $\sigma_{-\infty}$, возрастает адиабатически и сохраняет постоянное значение между поверхностями σ_2 и σ_1, а затем убывает адиабатически до нуля на поверхности σ_∞. Обозначения $\sigma_{\pm\infty}$ соответствуют тому обстоятельству, что адиабатическая теорема включает предел бесконечного временного разделения между σ_∞ и σ_1, а также между σ_2 и $\sigma_{-\infty}$. Тогда

$$(n\sigma_\infty \mid n'\sigma_{-\infty}) = \delta(n, n') \exp[i\mathscr{W}_0 + iP(n)(x_\infty - x_{-\infty})],$$

где [обращая интегрирование по частям в первом члене выражения (2.46)]

$$\mathscr{W}_0 = -\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 E(0, x_0)$$

и

$$\exp(i\mathcal{W}_0) = \exp\left(-i\int_{t_1}^{\infty} dx_0 E(0, x_0)\right) \times$$

$$\times \exp(-iE(0)(t_1 - t_2)) \exp\left(-i\int_{-\infty}^{t_2} dx_0 E(0, x_0)\right).$$

Вспоминая свойство композиции функций преобразования, непосредственно находим

$$(n\sigma_1 \mid n'\sigma_2) = \delta(n, n') \exp[-iE(0)(t_1 - t_2) + iP(n)(x_1 - x_2)].$$

Это показывает, что в присутствии не зависящего от времени тока собственные значения поля излучения смещаются на $E(0)$.

Методы, рассмотренные в этой статье и проиллюстрированные для электромагнитного поля, применимы также к другим системам Бозе — Эйнштейна, например к симметричному псевдоскалярному мезонному полю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stückelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, **19**, 242 (1946).
2. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 138.)
3. Magnus W., Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin, 1943.
4. Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, New York, 1927. (Имеется перевод: Уиттекер Е. и Ватсон Г., Курс современного анализа, М. — Л., 1937.)

ГЛАВА III[1)]

Основной темой статьи является распространение понятий о собственных значениях и собственных векторах на полные совокупности антикоммутирующих операторов. При помощи этого приема мы строим функцию преобразования для поля Дирака, возмущенного внешним источником. Эта функция преобразования обобщается для того, чтобы описать фазовые преобразования, и при применении к изолированному полю Дирака дает собственные значения и собственные функции операторов заряда и энергии-импульса. Функция преобразования, описывающая систему при наличии источника, используется затем как производящая функция для построения матриц всех упорядоченных произведений операторов поля для изолированного поля Дирака. В представлении чисел заполнения матрицы исследуются при помощи классификации, эффективно использующей обратное во времени описание для отрицательно-частотных состояний.

В последнем разделе строится матрица всех упорядоченных произведений векторов потенциала для изолированного электромагнитного поля.

ВВЕДЕНИЕ

В этой и последующей статье исследуется одно поле, возмущенное извне. Рассмотрим поле Дирака, возмущенное другим заданным полем Дирака, которое можно рассматривать как внешний источник, или заданным полем Бозе — Эйнштейна, например заданным электромагнитным полем. Функция Лагранжа этой системы имеет вид

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}[\bar{\psi}, \gamma_\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu)\psi + m\psi] -$$

$$-\frac{1}{4}[(i\partial_\mu - eA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu + m\bar{\psi}, \psi] + \frac{1}{2}[\bar{\psi}, \eta] + \frac{1}{2}[\bar{\eta}, \psi]. \qquad (3.1)$$

---

1) J. Schwinger, The Theory of Quantized Fields, IV, Phys. Rev., 92, 1283—1299 (1953).

При этом получаются следующие уравнения поля:

$$\begin{aligned} &\gamma_\mu(-i\partial_\mu - eA_\mu)\psi + m\psi = \eta, \\ &(i\partial_\mu - eA_\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu + m\bar{\psi} = \bar{\eta}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

а производящие операторы бесконечно малых изменений в величинах ψ и $\bar{\psi}$ на поверхности σ принимают вид

$$G(\psi) = i\int d\sigma_\mu \bar{\psi}\gamma_\mu \delta\psi = i\int d\sigma \bar{\psi}\gamma_{(0)} \delta\psi \tag{3.3}$$

и

$$G(\bar{\psi}) = -i\int d\sigma_\mu \delta\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = -i\int d\sigma\, \delta\bar{\psi}\gamma_{(0)}\psi. \tag{3.4}$$

В предыдущей статье [1] было показано, что вакуумное состояние замкнутой системы можно охарактеризовать вектором Ψ_0 и рассматривать последний как правый собственный вектор с нулевыми собственными значениями положительно-частотных частей компонент поля, а вектор $\Psi_0^\dagger$ — как левый собственный вектор с нулевыми собственными значениями отрицательно-частотных частей компонент поля. Заключение о том, что совокупность собственных векторов этих двух типов особенно полезна, привело нас при исследовании системы Бозе — Эйнштейна к введению собственных векторов и собственных значений для полной совокупности коммутирующих не-эрмитовых операторов. Сейчас мы покажем, что целесообразно распространить понятие о собственных векторах и собственных значениях на полные совокупности *антикоммутирующих* не-эрмитовых операторов.

ФУНКЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В этой статье обсуждение будет ограничено случаем нулевого электромагнитного поля, описываемого при простейшей калибровке $A_\mu = 0$. Относительно координатной системы, базирующейся на данной поверхности, уравнения поля в отсутствие источников можно записать как уравнения движения:

$$\begin{aligned} &i\partial_0\psi = -i\gamma_0\gamma_k\partial_k\psi + m\gamma_0\psi = H\psi, \\ &-i\partial_0\bar{\psi} = i\partial_k\bar{\psi}\gamma_k\gamma_0 + m\bar{\psi}\gamma_0 = \bar{\psi}\gamma_0 H\gamma_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Определим два эрмитовых координатных оператора:

$$P^{(+)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{H}{E}\right),\quad P^{(-)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{H}{E}\right), \tag{3.6}$$

где E — положительно-определенная величина

$$E=(H^2)^{1/2}. \tag{3.7}$$

Эти операторы обладают проецирующими свойствами

$$P^{(+)}+P^{(-)}=1,\quad P^{(+)}P^{(-)}=P^{(-)}P^{(+)}=0 \tag{3.8}$$

и

$$P^{(+)}H=+EP^{(+)},\quad P^{(-)}H=-EP^{(-)}. \tag{3.9}$$

Вследствие этого представление ψ и $\overline{\psi}$ в виде

$$\psi=\psi^{(+)}+\psi^{(-)},\quad \overline{\psi}=\overline{\psi}^{(+)}+\overline{\psi}^{(-)}, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} &\psi^{(+)}=P^{(+)}\psi, && \psi^{(-)}=P^{(-)}\psi;\\ &\overline{\psi}^{(+)}=\overline{\psi}\gamma_0P^{(-)}\gamma_0, && \overline{\psi}^{(-)}=\overline{\psi}\gamma_0P^{(+)}\gamma_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

является разложением на положительно-частотные и отрицательно-частотные части и соответствует виду уравнений движения

$$\begin{aligned} &i\partial_0\psi^{(+)}=+E\psi^{(+)}, && i\partial_0\psi^{(-)}=-E\psi^{(-)};\\ &i\partial_0\overline{\psi}^{(+)}=+E\overline{\psi}^{(+)}, && i\partial_0\overline{\psi}^{(-)}=-E\overline{\psi}^{(-)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Следует также заметить, что

$$\overline{\psi}^{(+)}=\overline{\psi^{(-)}},\quad \overline{\psi}^{(-)}=\overline{\psi^{(+)}}. \tag{3.13}$$

В силу свойств ортогональности, выражающихся равенствами

$$\int d\sigma\,\overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\psi^{(+)}=\int d\sigma\,\overline{\psi}\gamma_0P^{(-)}P^{(+)}\psi=0 \tag{3.14}$$

и

$$\int d\sigma\,\overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\psi^{(-)}=\int d\sigma\,\overline{\psi}\gamma_0P^{(+)}P^{(-)}\psi=0, \tag{3.15}$$

производящий оператор $G(\psi)$ принимает вид

$$G(\psi)=i\int d\sigma\,\overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\,\delta\psi^{(+)}+i\int d\sigma\,\overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\,\delta\psi^{(-)}. \tag{3.16}$$

Добавив подходящие вариации к этому производящему оператору, выведем производящие операторы бесконечно малых изменений в положительно-частотных или в отрицательно-частотных частях ψ и $\overline{\psi}$:

$$G_+ = i\int d\sigma\, \overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\, \delta\psi^{(+)} - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\psi^{(-)}, \tag{3.17}$$

$$G_- = i\int d\sigma\, \overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\, \delta\psi^{(-)} - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\psi^{(+)}. \tag{3.18}$$

Свойства ортогональности [см. равенства (3.14) и (3.15)] позволяют нам также записать, с одной стороны, эти производящие операторы в виде

$$G_+ = i\int d\sigma\, \overline{\psi}\gamma_0\, \delta\psi^{(+)} - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\psi \tag{3.19}$$

и

$$G_- = i\int d\sigma\, \overline{\psi}\gamma_0\, \delta\psi^{(-)} - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\psi \tag{3.20}$$

или, с другой стороны, в виде

$$G_+ = i\int d\sigma\, \overline{\psi}^{(-)}\gamma_0\, \delta\psi - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}\gamma_0\psi^{(-)} \tag{3.21}$$

и

$$G_- = i\int d\sigma\, \overline{\psi}^{(+)}\gamma_0\, \delta\psi - i\int d\sigma\, \delta\overline{\psi}\gamma_0\psi^{(+)}. \tag{3.22}$$

Последние формы облегчают вывод перестановочных свойств компонент поля $\psi^{(+)}$, $\psi^{(-)}$, $\overline{\psi}^{(+)}$, $\overline{\psi}^{(-)}$ на поверхности σ. Эти свойства сказываются в исчезновении всех антикоммутаторов, кроме

$$\{\psi^{(+)}(x),\ \overline{\psi}^{(-)}(x')\} = P^{(+)}\gamma_0\delta_\sigma(x - x') \tag{3.23}$$

и

$$\{\psi^{(-)}(x),\ \overline{\psi}^{(+)}(x')\} = P^{(-)}\gamma_0\delta_\sigma(x - x'). \tag{3.24}$$

В частности, все положительно-частотные компоненты антикоммутативны, так же как и все отрицательно-частотные компоненты.

Полные совокупности антикоммутирующих операторов на поверхности σ представляются, таким образом, при помощи операторов $\chi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(x)$, $\overline{\psi}^{(+)}(x)$ и $\chi^{(-)}(x) = \psi^{(-)}(x)$, $\overline{\psi}^{(-)}(x)$. Существование соответственно правых и левых собственных векторов с нулевыми собственными значениями следует из эквивалентности состояний, описываемых этими векторами, с вакуумным состоянием. Расширим теперь систему чисел, введя величины $\chi^{(+)'}(x)=\psi^{(+)'}(x)$, $\overline{\psi}^{(+)'}(x)$ и $\chi^{(-)'}(x)=\psi^{(-)'}(x)$, $\overline{\psi}^{(-)'}(x)$, которые антикоммутируют между собой и со всеми операторами дираковского поля. Тогда операторы

$$'\chi^{(+)}=\chi^{(+)}-\chi^{(+)'}, \quad '\chi^{(-)}=\chi^{(-)}-\chi^{(-)'}$$

будут иметь те же самые перестановочные свойства, что и операторы $\chi^{(+)}$, $\chi^{(-)}$, поэтому существует правый собственный вектор полной совокупности $'\chi^{(+)}$ с нулевыми собственными значениями

$$(\chi^{(+)}(x)-\chi^{(+)'}(x))\,\Psi(x^{(+)'}\sigma)=0$$

и левый собственный вектор полной совокупности $'\chi^{(-)}$ с нулевыми собственными значениями

$$\Phi(\chi^{(-)'}\sigma)(\chi^{(-)}(x)-\chi^{(-)'}(x))=0.$$

Мы, таким образом, получаем правый собственный вектор полной совокупности $\chi^{(+)}$ с „собственным значением" $\chi^{(+)'}$ и левый собственный вектор совокупности $\chi^{(-)}$ с „собственным значением" $\chi^{(-)'}$. В силу соотношения (3.13) собственные векторы и собственные значения связаны равенствами

$$\Phi(\chi^{(-)'}\sigma)=\Psi(\chi^{(+)'}\sigma)^{\dagger}, \tag{3.25}$$

$$\overline{\psi}^{(+)'}=\overline{\psi^{(-)'}}, \quad \overline{\psi}^{(-)'}=\overline{\psi^{(+)'}}. \tag{3.26}$$

При интерпретации уравнений бесконечно малых преобразований

$$\delta\Psi(\chi^{(+)'}\sigma)=-iG_{+}\Psi(\chi^{(+)'}\sigma) \tag{3.27}$$

и

$$\delta\Phi(\chi^{(-)'}\sigma)=i\Phi(\chi^{(-)'}\sigma)\,G_{-} \tag{3.28}$$

используются тождественные операторные свойства вариаций поля и собственных значений. Таким образом, $\Psi(\chi^{(+)'}\sigma)+\delta\Psi(\chi^{(+)'}\sigma)$ является собственным вектором оператора $\chi^{(+)}-\delta\chi^{(+)}$ с собственными значениями $\chi^{(+)'}$. Но это также собственный вектор оператора $\chi^{(+)}$ с собственными значениями $\chi^{(+)'}+\delta\chi^{(+)}$. Поэтому изменение, даваемое выражением (3.27), связано с изменением собственных значений на величину $\delta\chi^{(+)}$. Аналогичное утверждение справедливо относительно уравнения (3.28).

Рассмотрим теперь дираковское поле, находящееся под действием внешних источников η, $\bar{\eta}$, при помощи функции преобразования

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2) = (\Phi(\chi^{(-)'}\sigma_1)\Psi(\chi^{(+)'}\sigma_2)).$$

Зависимость этой функции преобразования от собственных значений дается выражением

$$\delta_{\chi'}(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2) = i(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid (G_-(\sigma_1) - G_+(\sigma_2)) \mid \chi^{(+)'}\sigma_2), \tag{3.29}$$

где

$$G_-(\sigma_1) - G_+(\sigma_2) = -i\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \delta\bar{\psi}^{(-)'}\gamma_\mu\psi + i\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\delta\psi^{(-)'} +$$

$$+ i\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu\delta\bar{\psi}^{(+)'}\gamma_\mu\psi - i\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\delta\psi^{(+)'} =$$

$$= -i\oint d\sigma_\mu\delta\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi + i\oint d\sigma_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\delta\psi'. \tag{3.30}$$

В последнем выражении подразумевается, что отрицательно-частотные собственные значения используются на поверхности σ_1 и положительно-частотные собственные значения — на поверхности σ_2.

Бесконечно малое изменение внешнего источника вызывает вариацию

$$\delta(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2) = i\left(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,\middle|\, \int_{\sigma_2}^{\sigma_1}(dx)(\delta\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\delta\eta \,\middle|\, \chi^{(+)'}\sigma_2\right). \tag{3.31}$$

В соответствии с этим бесконечно малое изменение собственных значений можно заменить вариацией источника, распределенного на поверхности

$$\begin{aligned} \delta\bar{\eta}(x) &= -i\delta\bar{\psi}^{(-)'}(x)\gamma_\mu\delta_\mu(x,\sigma_1) + i\delta\bar{\psi}^{(+)'}(x)\gamma_\mu\delta_\mu(x,\sigma_2), \\ \delta\eta(x) &= i\delta_\mu(x,\sigma_1)\gamma_\mu\delta\psi^{(-)'}(x) - i\delta_\mu(x,\sigma_2)\gamma_\mu\delta\psi^{(+)'}(x), \end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\delta_\mu(x, \sigma)$ определяется равенством

$$\int(dx)\delta_\mu(x, \sigma)f_\mu(x) = \int_\sigma d\sigma_\mu f_\mu(x).$$

Мы заключаем, что общая функция преобразования получается из функции, относящейся к нулевым собственным значениям, если в последней произвести следующую подстановку:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(x) &\to \bar{\eta}(x) - i\bar{\psi}^{(-)'}(x)\gamma_\mu\delta_\mu(x, \sigma_1) + i\bar{\psi}^{(+)'}(x)\gamma_\mu\delta_\mu(x, \sigma_2),\\ \eta(x) &\to \eta(x) + i\delta_\mu(x, \sigma_1)\gamma_\mu\psi^{(-)'}(x) - i\delta_\mu(x, \sigma_2)\gamma_\mu\psi^{(+)'}(x).\end{aligned} \tag{3.33}$$

В обозначениях

$$(0\,\sigma_1\,|\,0\,\sigma_2) = \exp(i\mathscr{W}_0) \tag{3.34}$$

и

$$\frac{(0\,\sigma_1\,|\,F\,|\,0\,\sigma_2)}{(0\sigma_1\,|\,0\,\sigma_2)} = \langle F \rangle \tag{3.35}$$

зависимость функции преобразования с нулевыми собственными значениями от источников выражается равенствами

$$\frac{\delta_l \mathscr{W}_0}{\delta\bar{\eta}(x)} = \langle \psi(x) \rangle, \quad \frac{\delta_r \mathscr{W}_0}{\delta\eta(x)} = \langle \bar{\psi}(x) \rangle \tag{3.36}$$

или

$$\delta\mathscr{W}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\,[\delta\bar{\eta}\,\langle\psi\rangle + \langle\bar{\psi}\rangle\,\delta\eta], \tag{3.37}$$

где предполагается, что источники исчезают вне объема, ограниченного поверхностями σ_1 и σ_2. В соответствии с уравнениями поля (3.2) мы имеем уравнения

$$-i\gamma_\mu\partial_\mu\langle\psi(x)\rangle + m\,\langle\psi(x)\rangle = \eta(x) \tag{3.38}$$

и

$$i\partial_\mu\langle\bar{\psi}(x)\rangle\gamma_\mu + m\,\langle\bar{\psi}(x)\rangle = \bar{\eta}(x), \tag{3.39}$$

которые должны быть решены с граничными условиями

$$\langle\psi^{(-)}\rangle = \langle\bar{\psi}^{(-)}\rangle = 0 \text{ на поверхности } \sigma_1 \tag{3.40}$$

и

$$\langle\psi^{(+)}\rangle = \langle\bar{\psi}^{(+)}\rangle = 0 \text{ на поверхности } \sigma_2, \tag{3.41}$$

следующими из природы состояний с нулевыми собственными значениями на поверхностях σ_1 и σ_2. Можно выразить эти условия как граничные условия во всей расширенной области, потребовав, чтобы поля содержали только положительные частоты в области, представляющей будущее от σ_1, и только отрицательные частоты в области до σ_2.

Решениями, удовлетворяющими этим условиям, являются

$$\langle\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx')\, G_+(x, x')\, \eta(x') \tag{3.42}$$

и

$$\langle\bar\psi(x')\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\, \bar\eta(x)\, G_+(x, x'), \tag{3.43}$$

где $G_+(x, x')$ — функция Грина, определяемая дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} -i\gamma_\mu\partial_\mu G_+(x, x') + mG_+(x, x') &= \\ = i\partial'_\mu G_+(x, x')\,\gamma_\mu &+ mG_+(x, x'), \\ -i\gamma_\mu\partial_\mu G_+(x, x') + mG_+(x, x') &= \delta(x - x') \end{aligned} \tag{3.44}$$

и граничным условием: G_+, как функция от x, должна содержать только положительные частоты при $x_0 > x'_0$ и только отрицательные частоты при $x_0 < x'_0$. Так как G_+ зависит только от $x - x'$, то это утверждение справедливо при замене x на x'. То, что в выражения (3.42) и (3.43) входит одна и та же функция Грина, следует из условия интегрируемости

$$\frac{\delta_r}{\delta\eta(x')}\langle\psi(x)\rangle = \frac{\delta_l}{\delta\bar\eta(x)}\langle\bar\psi(x')\rangle = G_+(x, x'),$$

получающегося из равенств (3.36). Запишем поэтому $\mathscr{W}_0$ в виде

$$\mathscr{W}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)(dx')\, \bar\eta(x)\, G_+(x, x')\, \eta(x'), \tag{3.45}$$

причем константа интегрирования равна нулю, так как в отсутствие источников состояния с нулевыми собственными значениями имеют смысл вакуумного состояния, не зависящего от σ, т. е.

$$(0\,\sigma_1 \mid 0\,\sigma_2) = 1 \text{ и } \mathscr{W}_0 = 0 \text{ при } \eta = \bar\eta = 0.$$

Производя подстановку (3.33), получаем общую функцию преобразования в виде

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2) = \exp(i\mathscr{W}), \tag{3.46}$$

где

$$\begin{aligned}\mathscr{W} = \int (dx)(dx')\,\overline{\eta}(x)\,G_+(x, x')\,\eta(x') - \\ - i\oint d\sigma_\mu \int (dx')\,\overline{\psi}'(x)\,\gamma_\mu G_+(x, x')\,\eta(x') + \\ + i\int (dx) \oint d\sigma'_\nu \overline{\eta}(x)\,G_+(x, x')\,\gamma_\nu \psi'(x') + \\ + \oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \overline{\psi}'(x)\,\gamma_\mu G_+(x, x')\,\gamma_\nu \psi'(x').\end{aligned} \tag{3.47}$$

В частности, при $\eta = \overline{\eta} = 0$

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2) = \exp\left[i \oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \overline{\psi}'(x)\,\gamma_\mu G_+(x, x')\,\gamma_\nu \psi'(x')\right]. \tag{3.48}$$

Функцию Грина $G_+(x, x')$ можно выразить в трехмерной символической форме

$$\begin{aligned} G_+(x, x') &= iP^{(+)} \exp[-iE(x_0 - x'_0)]\,\gamma_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ &\qquad x_0 > x'_0, \\ G_+(x, x') &= -iP^{(-)} \exp[-iE(x'_0 - x_0)]\,\gamma_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \\ &\qquad x_0 < x'_0; \end{aligned} \tag{3.49}$$

комбинируя оба случая, мы имеем

$$G_+(x, x') = (i\partial_0 + H)\,\frac{i}{2}E^{-1} \exp(-iE\,|x_0 - x'_0|)\,\gamma_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \tag{3.50}$$

Функция от E в последнем уравнении имеет интегральное представление

$$\frac{i}{2}E^{-1}\exp(-iE\,|x_0 - x'_0|) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \frac{e^{-ip_0(x_0 - x'_0)}}{E^2 - p_0^2 - i\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0. \tag{3.51}$$

Интегральное представление Фурье трехмерной δ-функции, входящей в выражение (3.50), в сочетании с формулой (3.51) ведет к четырехмерному интегралу

$$G_+(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dp) \frac{m - \gamma p}{p^2 + m^2 - i\varepsilon} e^{ip(x-x')} =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dp) \frac{1}{\gamma p + m - i\varepsilon} e^{ip(x-x')}, \quad \varepsilon \to +0, \tag{3.52}$$

который показывает, что при построении функции Грина обращением дифференциального оператора в уравнениях (3.44) к массе m надо добавить бесконечно малую мнимую отрицательную константу.

Трехмерные интегралы Фурье, получаемые из выражения (3.49), наиболее удобно можно представить в виде

$$G_+(x, x') = \frac{i}{2} \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{1}{p_0} \begin{cases} (m - \gamma p) e^{ip(x-x')}, & x_0 > x_0', \\ (m + \gamma p) e^{-ip(x-x')}, & x_0 < x_0', \end{cases} \tag{3.53}$$

где p_0 — *положительная* частота

$$p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}.$$

Четырехрядная квадратная матрица $-\gamma p$ имеет два разных собственных значения $\pm m$:

$$(-\gamma p)^2 = -p^2 = m^2,$$

каждое из которых является дважды вырожденным. Обозначим собственные векторы через $u_{\lambda p}$, где $\lambda = 1, 2$ относится к собственному значению $+m$, а $\lambda = -1, -2$ — к собственному значению $-m$. Таким образом,

$$-\gamma p u_{\lambda p} = \varepsilon(\lambda) m u_{\lambda p} \tag{3.54}$$

и

$$-\bar{u}_{\lambda p} \gamma p = \bar{u}_{\lambda p} \varepsilon(\lambda) m,$$

где

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Ввиду неопределенного характера величин

$$(\bar{u}_{\lambda p} u_{\lambda p}) = (u^*_{\lambda p} \gamma_0 u_{\lambda p})$$

свойства ортонормированности и полноты этих собственных векторов представляются в виде

$$(\bar{u}_{\lambda p} u_{\lambda' p}) = \delta_{\lambda\lambda'} \varepsilon(\lambda) \quad \text{и} \quad \sum_{\lambda} \varepsilon(\lambda)\, u_{\lambda p} \bar{u}_{\lambda p} = 1.$$

Положительно-определенные величины

$$(\bar{u}_{\lambda p} \gamma_0 u_{\lambda p}) = (u^*_{\lambda p} u_{\lambda p})$$

даются тогда выражением

$$(\bar{u}_{\lambda p} \gamma_0 u_{\lambda' p}) = \delta_{\lambda\lambda'} \frac{p_0}{m}.$$

Последний результат выводится из соотношения

$$-(\bar{u}_{\lambda p} \{\gamma_0, \gamma p\}\, u_{\lambda' p}) = 2p_0 (\bar{u}_{\lambda p} u_{\lambda' p}) =$$
$$= m\,(\varepsilon(\lambda) + \varepsilon(\lambda'))\,(\bar{u}_{\lambda p} \gamma_0 u_{\lambda' p}),$$

показывающего, что $(\bar{u}_{\lambda p} u_{\lambda p})$ в действительности отрицательно при $\lambda < 0$.

Если уравнение для собственных значений (3.54), представленное в виде

$$\frac{1}{2m}(m - \gamma p)\, u_{\lambda p} = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon(\lambda))\, u_{\lambda p},$$

умножить на $\varepsilon(\lambda)\, \bar{u}_{\lambda p}$ и просуммировать по всем λ при помощи соотношения полноты, то получится

$$\frac{1}{2m}(m - \gamma p) = \sum_{+} u_{\lambda p} \bar{u}_{\lambda p},$$

где знак „$+$“ указывает на собственные вектора с $\lambda > 0$. Аналогичным образом

$$\frac{1}{2m}(m + \gamma p) = -\sum_{-} u_{\lambda p} \bar{u}_{\lambda p}.$$

Используем эти представления проецирующего оператора в выражении (3.53) и заменим интеграл суммированием по ячейкам с объемом (dp). Это даст

$$
\begin{aligned}
G_{+}(x, x') &= i \sum_{+, p} \psi_{\lambda p}(x) \bar{\psi}_{\lambda p}(x'), \qquad x_0 > x_0', \\
G_{+}(x, x') &= -i \sum_{-, p} \psi_{\lambda p}(x) \bar{\psi}_{\lambda p}(x'), \qquad x_0 < x_0',
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

где

$$\psi_{\lambda p}(x) = \left(\frac{(d\mathrm{p})\, m}{(2\pi)^3 p_0}\right)^{1/2} u_{\lambda p} e^{i\varepsilon(\lambda) px}.$$

Полнота этих функций на данной поверхности обеспечивается разрывом функции Грина при $x_0 = x_0'$, как это получается из уравнения (3.44):

$$\sum_{\lambda p} \psi_{\lambda p}(x) \bar{\psi}_{\lambda p}(x') = \gamma_0 \delta_\sigma (x - x'). \tag{3.56}$$

Соответствующее утверждение *орто*-нормируемости имеет вид

$$\int d\sigma \bar{\psi}_{\lambda p} \gamma_0 \psi_{\lambda' p'} = \delta_{\lambda p, \lambda' p'}. \tag{3.57}$$

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Начнем наши приложения формулы (3.46) с изолированного поля Дирака, описываемого выражением (3.48). Собственные значения и собственные функции вектора энергии-импульса P_μ получаются из функции преобразования, соединяющей представления, связанные с параллельными поверхностями. Результат бесконечно малых параллельных смещений поверхностей σ_1 и σ_2 дается равенствами

$$
\begin{aligned}
\delta_x \Phi(\chi^{(-)\prime} \sigma_1) &= i \Phi(\chi^{(-)\prime} \sigma_1) P_\mu \delta x_{1\mu}, \\
\delta_x \Psi(\chi^{(+)\prime} \sigma_2) &= -i P_\mu \delta x_{2\mu} \Psi(\chi^{(+)\prime} \sigma_2).
\end{aligned}
$$

В соответствии с этим, если x_1 и x_2 являются конечными смещениями, которые преобразуют стандартную поверхность в поверхности σ_1 и σ_2, мы имеем

$$
\begin{aligned}
\Phi(\chi^{(-)\prime} \sigma_1) &= \Phi(\chi^{(-)\prime}) \exp(i P_\mu x_{1\mu}), \\
\Psi(\chi^{(+)\prime} \sigma_2) &= \exp(-i P_\mu x_{2\mu}) \Psi(\chi^{(+)\prime})
\end{aligned}
$$

и

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2) = (\chi^{(-)'} \mid \exp(iP_\mu X_\mu) \mid \chi^{(+)'}) =$$
$$= \sum_{\gamma'} (\chi^{(-)'} \mid \gamma') \exp(iP'_\mu X_\mu) (\gamma' \mid \chi^{(+)'}),$$

где

$$X = x_1 - x_2,$$

а γ — полная совокупность интегралов движения.

Прежде чем так использовать функцию преобразования (3.48), мы должны обобщить ее таким образом, чтобы она служила производящей функцией и для собственных значений и собственных функций оператора заряда Q. Бесконечно малое преобразование фазы на поверхности σ

$$\begin{aligned} \delta\psi(x) &= -ie\delta\alpha\psi(x), \\ \delta\bar{\psi}(x) &= ie\delta\alpha\bar{\psi}(x) \end{aligned} \tag{3.58}$$

вызывает преобразования собственного вектора посредством оператора

$$G_\alpha = Q\delta\alpha.$$

В соответствии со свойствами ортогональности (3.14) и (3.15) оператор заряда можно записать в виде

$$Q = e\frac{1}{2}\int d\sigma\,([\bar{\psi}^{(-)}, \gamma_0\psi^{(+)}] + [\bar{\psi}^{(+)}, \gamma_0\psi^{(-)}]) =$$
$$= e\int d\sigma\,(\bar{\psi}^{(-)}\gamma_0\psi^{(+)} - \psi^{(-)}(\bar{\psi}^{(+)}\gamma_0)). \tag{3.59}$$

При получении последней формы с помощью перестановочных соотношений (3.23) и (3.24) мы приписали нулевое значение величине

$$\mathrm{Tr}\,(P^{(+)} - P^{(-)}) = \mathrm{Tr}\left(\frac{H}{E}\right), \tag{3.60}$$

где след относится к пространственным координатам и спинорным индексам. Это вычисление основывается на инвариантности теории относительно обращения времени, которая указывает на то, что может быть установлено одно-однозначное соответствие между положительно-частотными и отрицательно-частотными состояниями. Поэтому при суммировании по собственным значениям оператора H/E, которые равны ± 1, получается полное обращение в нуль.

Уравнениями бесконечно малых преобразований собственных векторов являются

$$\delta_\alpha \Phi(\chi^{(-)'}\sigma\alpha) = i\Phi(\chi^{(-)'}\sigma\alpha)\, e\delta\alpha \int d\sigma\, (\bar{\psi}^{(-)'}\gamma_0\psi^{(+)} + \bar{\psi}^{(+)}\gamma_0\psi^{(-)'})$$

и

$$\delta_\alpha \Psi(\chi^{(+)'}\sigma\alpha) = -ie\delta\alpha \int d\sigma\, (\bar{\psi}^{(-)}\gamma_0\psi^{(+)'} + \bar{\psi}^{(+)'}\gamma_0\psi^{(-)})\, \Psi(\chi^{(+)'}\sigma\alpha).$$

Сравнение с уравнениями (3.17) и (3.18) показывает, что преобразования собственных векторов являются такими, как если бы они вызывались изменениями в собственных значениях

$$\delta\psi^{(+)'} = -ie\delta\alpha\psi^{(+)'}, \quad \delta\psi^{(-)'} = -ie\delta\alpha\psi^{(-)'},$$

$$\delta\bar{\psi}^{(+)'} = ie\delta\alpha\bar{\psi}^{(+)'}, \quad \delta\bar{\psi}^{(-)'} = ie\delta\alpha\bar{\psi}^{(-)'},$$

как это можно было предвидеть, исходя из соотношений (3.58). Конечные фазовые преобразования

$$\Phi(\chi^{(-)'}\sigma\alpha) = \Phi(\chi^{(-)'}\sigma)\exp(iQ\alpha),$$

$$\Psi(\chi^{(+)'}\sigma\alpha) = \exp(-iQ\alpha)\,\Psi(\chi^{(+)'}\sigma)$$

описываются, таким образом, равенствами

$$\Phi(\psi^{(-)'}\bar{\psi}^{(-)'}\sigma\alpha) = \Phi(e^{-ie\alpha}\psi^{(-)'},\ e^{ie\alpha}\bar{\psi}^{(-)'},\ \sigma) \tag{3.61}$$

и

$$\Psi(\psi^{(+)'}\bar{\psi}^{(+)'}\sigma\alpha) = \Psi(e^{-ie\alpha}\psi^{(+)'},\ e^{ie\alpha}\bar{\psi}^{(+)'},\ \sigma). \tag{3.62}$$

Если на поверхностях σ_1 и σ_2 совершаются различные фазовые преобразования, то мы имеем

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\alpha_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2\alpha_2) = (\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \exp(iQ\alpha) \mid \chi^{(+)'}\sigma_2), \tag{3.63}$$

где

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Следовательно,

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\alpha_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2\alpha_2) = (\chi^{(-)'} \mid \exp(iP_\mu X_\mu + iQ\alpha) \mid \chi^{(+)'}) =$$

$$= \sum_{\gamma'} (\chi^{(-)'} \mid \gamma')\exp(iP'_\mu X_\mu + iQ'\alpha)(\gamma' \mid \chi^{(+)'}) \tag{3.64}$$

является производящей функцией одновременных собственных функций и собственных значений коммутирующих операторов P_μ и Q, и эта функция преобразования получается из выражения (3.48) путем подстановок, указанных в равенствах (3.61) и (3.62).

Необходимо отметить, что выражение (3.48) не содержит членов, в которых оба интеграла относятся к одной и той же поверхности. Рассмотрим, например,

$$\int_{\sigma_1} d\sigma \int_{\sigma_1} d\sigma' \bar{\psi}^{(-)'}(x)\,\gamma_0 G_+(x, x')\,\gamma_0 \psi^{(-)'}(x') =$$
$$= \int_{\sigma_1} d\sigma \int_{\sigma_1} d\sigma' \bar{\psi}' \gamma_0 P^{(+)} G_+ \gamma_0 P^{(-)} \psi'. \quad (3.65)$$

При этом $G_+\gamma_0$ становится равным $iP^{(+)}$ или $-iP^{(-)}$ при $x_0 - x_0' \to \pm 0$. Оба предела дают нулевые значения для выражения (3.65) ($P^{(+)}P^{(-)} = 0$). Следовательно,

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\alpha_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2\alpha_2) = \exp\Big[-i\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \int_{\sigma_2} d\sigma_\nu' \bar{\psi}^{(-)'}(x)\,\gamma_\mu e^{i\varepsilon\alpha} \times$$
$$\times G_+(x, x')\,\gamma_\nu \psi^{(+)'}(x') - i\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \int_{\sigma_1} d\sigma_\nu' \bar{\psi}^{(+)'}(x)\,\gamma_\mu \times$$
$$\times G_+(x, x')\,e^{-i\varepsilon\alpha}\gamma_\nu \psi^{(-)'}(x')\Big], \quad (3.66)$$

и можно было не различать положительно- и отрицательно-частотные части собственных значений операторов поля, так как эти части автоматически отбираются структурой функций Грина.

При подстановке выражений (3.55) для функции Грина введем следующие линейные комбинации собственных значений:

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\lambda p}^{(-)'} &= \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \bar{\psi}^{(-)'}(x)\,\gamma_\mu \psi_{\lambda p}(x)\,e^{-ipx_1}, \\ \chi_{\lambda p}^{(+)'} &= \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \bar{\psi}_{\lambda p}(x)\,e^{ipx_2}\gamma_\mu \psi^{(+)'}(x), \end{aligned}\right\} \text{при } \lambda > 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_{\lambda p}^{(-)'} &= \int_{\sigma_1} d\sigma_\mu \bar{\psi}_{\lambda p}(x)\,e^{-ipx_1}\gamma_\mu \psi^{(-)'}(x), \\ \chi_{\lambda p}^{(+)'} &= \int_{\sigma_2} d\sigma_\mu \bar{\psi}^{(+)'}(x)\,\gamma_\mu \psi_{\lambda p}(x)\,e^{ipx_2}, \end{aligned}\right\} \text{при } \lambda < 0,$$

которые не являются явными функциями поверхности. Используя эти определения, представим функцию преобразования (3.64) в виде[1])

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\alpha_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2\alpha_2) = \exp\left[\sum_{\lambda p}\chi_{\lambda p}^{(-)'}\exp(ipX+ie\varepsilon(\lambda)\alpha)\chi_{\lambda p}^{(+)'}\right] =$$

$$= \prod_{\lambda p}\exp[\chi_{\lambda p}^{(-)'}\exp(ipX+ie\varepsilon(\lambda)\alpha)\chi_{\lambda p}^{(+)'}] =$$

$$= \prod_{\lambda p}\sum_{n_{\lambda p}}\frac{1}{n!}(\chi_{\lambda p}^{(-)'}\chi_{\lambda p}^{(+)'})^n\exp[in(pX+e\varepsilon(\lambda)\alpha)]. \quad (3.67)$$

Ввиду антикоммутативной природы собственных значений квадрат любого $\chi_{\lambda p}^{(+)'}$, $\chi_{\lambda p}^{(-)'}$ равен нулю, в силу чего разложение экспоненты обрывается после первых двух членов, для которых $n_{\lambda p}=0,\ 1$. Мы увидим, что различие между системами Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака заключено прежде всего в природе собственных значений, а не в формулах, содержащих эти собственные значения.

Из сравнения с производящей функцией (3.64) мы видим, что

$$P'_\mu = P_\mu(n) = \sum_{\lambda p} n_{\lambda p}p_\mu, \qquad n_{\lambda p} = 0,\ 1,$$

где

$$P'_0 = \sum_{\lambda p} n_{\lambda p}p_0 \geqslant 0,$$

и что

$$Q' = \sum_{\lambda p} n_{\lambda p}e\varepsilon(\lambda).$$

Числа заполнения $n_{\lambda p}$, таким образом, образуют полную совокупность интегралов движения. Соответствующие собственные функции равны

$$(n \,|\, \chi^{(+)'}) = \prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(+)'})^{n_{\lambda p}} = (\chi_1^{(+)'})^{n_1}(\chi_2^{(+)'})^{n_2}\ldots$$

и

$$(\chi^{(-)'} \,|\, n) = {\prod_{\lambda p}}'(\chi_{\lambda p}^{(-)'})^{n_{\lambda p}} = \ldots(\chi_2^{(-)'})^{n_2}(\chi_1^{(-)'})^{n_1},$$

---

[1]) Основное положение при всех манипуляциях с собственными значениями заключается в том, что произведение двух собственных значений как целое ведет себя подобно обычному числу.

где мы ввели произвольный стандартный порядок состояний поля, который при чтении слева направо обозначается символом $\prod$, а в обратном порядке символом $'\prod$. Так, если заняты только состояния 1 и 2, то функция (3.67) принимает вид

$$\chi_1^{(-)'}\chi_1^{(+)'}\chi_2^{(-)'}\chi_2^{(+)'} = (\chi_2^{(-)'}\chi_1^{(-)'})(\chi_1^{(+)'}\chi_2^{(+)'}) =$$
$$= {}'\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(-)'})^{n_{\lambda p}}\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(+)'})^{n_{\lambda p}}.$$

Подставляя в соотношение (3.26) собственные значения $\chi^{(+)'}(x)$, $\chi^{(-)'}(x)$ в соответствующих точках, мы имеем

$$\chi_{\lambda p}^{(-)'} = \chi_{\lambda p}^{(+)'\dagger}$$

и тем самым

$$(\chi^{(-)'}\,|\,n) = (n\,|\,\chi^{(+)'})^{\dagger},$$

как это требуется согласно соотношению (3.25) между собственными векторами.

Собственной функцией вакуумного состояния, относящейся к произвольной поверхности, является

$$(\chi^{(-)'}\,\sigma\,|\,0) = 1$$

и поэтому

$$(\chi^{(-)'}\,\sigma\,|\,n\sigma) = (\chi^{(-)'}\,\sigma\,|\,0)\,{}'\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(-)'})^{n_{\lambda p}} = (\chi^{(-)'}\sigma\,|\,{}'\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(-)})^{n_{\lambda p}}|\,0);$$

здесь мы ввели на поверхности σ операторы, имеющие собственные значения $\chi_{\lambda p}^{(-)'}$. В соответствии с этим, собственными векторами состояния с числами заполнения частиц $n_{\lambda p}$ будут

$$\Psi(n\sigma) = \left[{}'\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(-)})^{n_{\lambda p}}\right]\Psi_0$$

и

$$\Psi(n\sigma)^{\dagger} = \Psi_0^{\dagger}\left[\prod_{\lambda p}(\chi_{\lambda p}^{(+)})^{n_{\lambda p}}\right].$$

МАТРИЦЫ ОПЕРАТОРОВ ПОЛЯ

Используем теперь функцию преобразования (3.46), чтобы в случае изолированного поля Дирака получить матричные элементы всех произведений операторов поля $\psi(x)$

и $\bar{\psi}(x)$. С этой целью заметим, что функция преобразования, описывающая систему при наличии источников, является матрицей определенного упорядоченного во времени оператора для изолированной системы. Действительно,

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= \left(\chi^{(-)'}\sigma_1 \middle| \left(\exp\left[i\int (dx)\,(\bar{\eta}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\eta(x))\right]\right)_+ \middle| \chi^{(+)'}\sigma_2\right)\Big]_0, \tag{3.68}$$

где $\Big]_0$ означает, что операторы и состояния соответствуют случаю $\eta = \bar{\eta} = 0$. Чтобы доказать это, заменим η и $\bar{\eta}$ соответственно на $\lambda\eta$ и $\lambda\bar{\eta}$, где λ—численный параметр. Эффект бесконечно малого изменения последнего выражается в виде

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2) = \left(\chi^{(-)'}\sigma_1 \middle| \int (dx)\,l(x) \middle| \chi^{(+)'}\sigma_2\right),$$

где мы временно положили

$$l(x) = i\,(\bar{\eta}(x)\,\psi(x) + \bar{\psi}(x)\,\eta(x)).$$

Дифференцируя еще раз, получаем[1]

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= \left(\chi^{(-)'}\sigma_1 \middle| \int (dx_1)\,(dx_2)\,(l(x_1)\,l(x_2))_+ \middle| \chi^{(+)'}\sigma_2\right)$$

или, в общем случае,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n (\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= \left(\chi^{(-)'}\sigma_1 \middle| \int (dx_1)\ldots(dx_n)\,(l(x_1)\ldots l(x_n))_+ \middle| \chi^{(+)'}\sigma_2\right).$$

Если мы теперь построим функцию преобразования, описывающую систему при наличии источников ($\lambda = 1$), с помощью функций преобразования при нулевых источниках ($\lambda = 0$) в виде ряда Тейлора, то получим бесконечный ряд, который компактно представлен выражением (3.68).

---

[1] Соотношение (2.133) в работе [2].

Функцию преобразования (3.46) можно представить в виде

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2) = (\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2)]_0 \times$$
$$\times \exp\left[i \int (dx)(dx')\bar{\eta}(x) G_+(x, x')\eta(x') + \right.$$
$$\left. + i\int (dx)(\bar{\eta}(x)\psi'(x) + \bar{\psi}'(x)\eta(x))\right], \quad (3.69)$$

где мы использовали символы $\psi'(x)$, $\bar{\psi}'(x)$ во внутренних точках области, ограниченной поверхностями σ_1 и σ_2, в смысле

$$\psi'(x) = i\oint d\sigma'_\mu G_+(x, x')\gamma_\mu\psi'(x') =$$
$$= i\int_{\sigma_1} d\sigma'_\mu G_+(x, x')\gamma_\mu\psi^{(-)'}(x') - i\int_{\sigma_2} d\sigma'_\mu G_+(x, x')\gamma_\mu\psi^{(+)'}(x')$$

и

$$\bar{\psi}'(x) = -i\oint d\sigma'_\mu\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu G_+(x', x) =$$
$$= -i\int_{\sigma_1} d\sigma'_\mu\bar{\psi}^{(-)'}(x')\gamma_\mu G_+(x', x) + i\int_{\sigma_2} d\sigma'_\mu\bar{\psi}^{(+)'}(x')\gamma_\mu G_+(x', x).$$

Мы видим, что

$$\psi'(x) = \sum_{+,\,p}\psi_{\lambda p}(x)e^{-ipx_2}\chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{-,\,p}\psi_{\lambda p}(x)e^{ipx_1}\chi^{(-)'}_{\lambda p}$$

является решением уравнения Дирака с заданной положительно-частотной частью $\psi^{(+)'}(x)$ на поверхности σ_2 и заданной отрицательно-частотной частью $\psi^{(-)'}(x)$ на поверхности σ_1. Аналогично,

$$\bar{\psi}'(x) = \sum_{-,\,p}\bar{\psi}_{\lambda p}(x)e^{-ipx_2}\chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{+,\,p}\bar{\psi}_{\lambda p}(x)e^{ipx_1}\chi^{(-)'}_{\lambda p}$$

является решением сопряженного уравнения Дирака, которое имеет положительно- и отрицательно-частотные части $\bar{\psi}^{(+)'}(x)$ и $\bar{\psi}^{(-)'}(x)$ на поверхностях σ_2 и σ_1 соответственно. Заметим, однако, что $\bar{\psi}'(x)$ не является оператором, сопряженным с $\psi'(x)$. Действительно,

$$\psi'(x)^{\dagger}\gamma_0 = -i\oint d\sigma'_\mu\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu G_-(x', x),$$

где

$$G_-(x, x') = \gamma_0 G_+(x', x)^{\dagger}\gamma_0 \quad (3.70)$$

удовлетворяет тем же дифференциальным уравнениям, что и $G_+(x, x')$, но подчиняется временны́м граничным условиям с падающими, а не с расходящимися волнами

$$\begin{aligned} G_-(x, x') &= i \sum_{-, p} \psi_{\lambda p}(x) \bar{\psi}_{\lambda p}(x'), \quad x_0 > x'_0, \\ G_-(x, x') &= -i \sum_{+, p} \psi_{\lambda p}(x) \bar{\psi}_{\lambda p}(x'), \quad x_0 < x'_0. \end{aligned} \tag{3.71}$$

При помощи обозначений

$$\left.\frac{(\chi^{(-)'}\,\sigma_1 \,|\, F \,|\, \chi^{(+)'}\,\sigma_2)}{(\chi^{(-)'}\,\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\,\sigma_2)}\right]_0 = \langle F \rangle \tag{3.72}$$

[не следует смешивать с обозначениями (3.35)] можно выразить функции (3.68) и (3.69) в виде

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\exp\left[i \int (dx)(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]\right)_+ \right\rangle = \\ &\quad = \exp\left[i \int (dx)(dx')\bar{\eta}G_+\eta + i \int (dx)(\bar{\eta}\psi' + \bar{\psi}'\eta)\right] \end{aligned} \tag{3.73}$$

или, более просто,

$$\begin{aligned} &\left\langle \left(\exp\left[i \int (dx)(\bar{\eta}\,'\psi + '\bar{\psi}\eta)\right]\right)_+ \right\rangle = \\ &\quad = \exp\left[i \int (dx)(dx')\,\bar{\eta}(x)\,G_+(x, x')\,\eta(x')\right], \end{aligned} \tag{3.74}$$

где мы ввели операторы

$$\begin{aligned} '\psi(x) &= \psi(x) - \psi'(x), \\ '\bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}'(x). \end{aligned}$$

Разложив обе части по степеням η и $\bar{\eta}$, получим матричные элементы упорядоченных произведений операторов ψ и $\bar{\psi}$.

Из-за отсутствия членов, линейных по η и $\bar{\eta}$, в правой части соотношения (3.74) мы видим, что

$$\langle '\psi(x) \rangle = \langle '\bar{\psi}(x) \rangle = 0$$

или что

$$\langle \psi(x) \rangle = \psi'(x), \tag{3.75}$$

$$\langle \bar{\psi}(x) \rangle = \bar{\psi}'(x). \tag{3.76}$$

Член в левой части соотношения (3.74), билинейный по η и $\bar{\eta}$, равен

$$-\left\langle \int (dx)(dx')(\bar{\eta}(x)\,'\psi(x)\,'\bar{\psi}(x')\,\eta(x'))_+ \right\rangle =$$
$$= -\int (dx)(dx')\,\bar{\eta}(x)\,\langle ('\psi(x)'\bar{\psi}(x'))_+ \rangle\, \varepsilon(x, x')\,\eta(x'),$$

где

$$\varepsilon(x, x') = \begin{cases} +1, & x_0 > x_0', \\ -1, & x_0 < x_0'. \end{cases}$$

Поэтому

$$\langle ('\psi(x)\,'\bar{\psi}(x'))_+ \rangle\, \varepsilon(x, x') = -iG_+(x, x'),$$

или

$$\langle (\psi(x)\bar{\psi}(x'))_+ \rangle\, \varepsilon(x, x') = \psi'(x)\bar{\psi}'(x') - iG_+(x, x'). \quad (3.77)$$

Полное разложение левой части соотношения (3.74) имеет вид

$$\sum_{k,\,l} \frac{i^{k+l}}{k!\,l!} \int (dx_1)\ldots(dx_k)(dx_1')\ldots(dx_l')\,\bar{\eta}(x_k)\ldots\bar{\eta}(x_1)\times$$
$$\times \langle ('\psi(x_1)\ldots'\psi(x_k)'\bar{\psi}(x_l')\ldots'\bar{\psi}(x_1'))_+ \rangle \times$$
$$\times\, \varepsilon_{k,\,l}\,\eta(x_1')\ldots\eta(x_l'), \quad (3.78)$$

где $\varepsilon_{k,\,l}$ — знакопеременный символ

$$\varepsilon_{k,\,l} = \left(\prod_{i<j} \varepsilon(x_i, x_j)\right)\left(\prod_{i,\,j} \varepsilon(x_i, x_j')\right)\left(\prod_{i>j} \varepsilon(x_i', x_j')\right). \quad (3.79)$$

Разложение (3.78) следует сравнить с выражением

$$\sum_k \frac{i^k}{k!} \int (dx_1)\ldots(dx_k)(dx_1')\ldots(dx_k')\,\bar{\eta}(x_k)\ldots\bar{\eta}(x_1)\times$$
$$\times\, G_+(x_1, x_1')\ldots G_+(x_k, x_k')\,\eta(x_1')\ldots\eta(x_k') =$$
$$= \sum_k \frac{i^k}{(k!)^2} \int (dx_1)\ldots(dx_k')\,\bar{\eta}(x_k)\ldots\bar{\eta}(x_1)\times$$
$$\times\, [\det{}_{(k)} G_+(x_i, x_j')]\,\eta(x_1')\ldots\eta(x_k'),$$

где был введен k-мерный определитель, построенный из элементов $G_+(x_i, x_j')$ с помощью $k!$ перестановок переменных $x'_1 \ldots x'_k$. Вследствие антикоммутативности величин η возникают знаки, необходимые для образования знакопеременных слагаемых, из которых состоит определитель. Таким образом,

$$\langle ({}'\psi(x_1) \ldots {}'\psi(x_k){}'\overline{\psi}(x'_l) \ldots {}'\overline{\psi}(x'_1))_+ \rangle_{\varepsilon_{k,l}} =$$
$$= \delta_{k,l}(-i)^k \det{}_{(k)} G_+(x_i,\ x'_j), \quad (3.80)$$

где обе стороны полностью антисимметричны по переменным x_i и по переменным x'_j.

Непосредственные алгебраические преобразования дали бы матричные элементы последовательных произведений операторов ψ и $\overline{\psi}$, как это иллюстрируется формулами (3.75) и (3.77). Однако мы можем получить из соотношения (3.73) явную формулу. Рассмотрим сначала произведения операторов с $k = l$ и заметим, что такие члены выделяются из соотношения (3.73), если сделать подстановку $\overline{\eta} \to t\overline{\eta}$, $\eta \to t^{-1}\eta$ и вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t}\left\langle \left(\exp\left[i\int (dx)(t\overline{\eta}\psi + t^{-1}\overline{\psi}\eta)\right]\right)_+\right\rangle =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t}\exp\left[i\int (dx)(dx')\overline{\eta}G_+\eta + i\int (dx)(t\overline{\eta}\psi' + t^{-1}\overline{\psi}'\eta)\right]. \quad (3.81)$$

Дальнейшая подстановка $it\int (dx)\overline{\eta}\psi' \to t$, произведенная в правой части, дает

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t} e \times$$
$$\times \exp\left[i\int (dx)(dx')\overline{\eta}(x)(G_+(x, x') + it^{-1}\psi'(x)\overline{\psi}'(x'))\eta(x')\right].$$

Зная результат разложения правой части равенства (3.74) [см. соотношение (3.80)], находим теперь, что

$$\langle (\psi(x_1) \ldots \psi(x_k)\overline{\psi}(x'_k) \ldots \overline{\psi}(x'_1))_+ \rangle_{\varepsilon_{k,k}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t} e^t \det{}_{(k)}[-iG_+(x_i,\ x'_j) + t^{-1}\psi(x_i)\overline{\psi}(x'_j)] =$$
$$= \psi'(x_1)\ldots\psi'(x_k)\overline{\psi}'(x'_k)\ldots\overline{\psi}'(x'_1) + \ldots +$$
$$+ (-i)^k \det{}_{(k)} G_+(x_i,\ x'_j),$$

где различные члены получаются при разложении определителя, если учесть теорему

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{n+1}}\, e^t = \frac{1}{n!}.$$

В результате интегрирования по t компенсируются численные множители, появляющиеся при разложении определителя. Примером является

$$\langle (\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\bar\psi(x_2')\,\bar\psi(x_1'))_+ \rangle\, \varepsilon_{2,\,2} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t}\, e^t \times$$

$$\begin{vmatrix} -iG_+(x_1, x_1') + t^{-1}\psi'(x_1)\,\bar\psi'(x_1'), & -iG_+(x_1, x_2') + t^{-1}\psi'(x_1)\,\bar\psi'(x_2') \\ -iG_+(x_2, x_1') + t^{-1}\psi'(x_2)\,\bar\psi'(x_1'), & -iG_+(x_2, x_2') + t^{-1}\psi'(x_2)\,\bar\psi'(x_2') \end{vmatrix}$$

$$= \psi'(x_1)\,\psi'(x_2)\,\bar\psi'(x_2')\,\bar\psi'(x_1') - i\psi'(x_1)\,\bar\psi'(x_1')\,G_+(x_2, x_2') -$$

$$- i\psi'(x_2)\,\bar\psi'(x_2')\,G_+(x_1, x_1') + i\psi'(x_1)\,\bar\psi'(x_2')\,G_+(x_2, x_1') +$$

$$+ i\psi'(x_2)\,\bar\psi'(x_1')\,G_+(x_1, x_2') - G_+(x_1, x_1')\,G_+(x_2, x_2') +$$

$$+ G_+(x_1, x_2')\,G_+(x_2, x_1').$$

Произведения операторов с $k - l > 0$ выделяются при помощи интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{k-l+1}}\left\langle \left(\exp\left[i\int (dx)\,(t\bar\eta\psi + t^{-1}\bar\psi\eta)\right]\right)_+ \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t}\, e^t \left(it^{-1}\int (dx)\,\bar\eta\psi'\right)^{k-l} \times$$

$$\times \exp\left[i\int (dx)\,(dx')\,\bar\eta\,(G_+ + it^{-1}\psi'\bar\psi')\,\eta\right].$$

Разлагая правую часть, можно видеть, что

$$\langle(\psi(x_1)\,\ldots\,\psi(x_k)\,\bar\psi(x_l')\,\ldots\,\bar\psi(x_1'))_+\rangle\, \varepsilon_{k,\,l} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t}\, e^t\, \det{}_{(k)}\,[t^{-1}\,\psi'(x_i)^{(k-l)},$$

$$-iG_+(x_i, x_j') + t^{-1}\psi'(x_i)\,\bar\psi'(x_j')];$$

здесь определитель построен из величин $t^{-1}\psi'(x_i)$, $i = 1 \ldots k$, занимающих первые $k - l$ столбцов, и прямоугольной матрицы

$$-iG_+(x_i, x_j') + t^{-1}\psi'(x_i)\overline{\psi}'(x_j'), \quad i = 1 \ldots k, \quad j = 1 \ldots l,$$

дополняющей k-мерный квадрат. Считается, что детерминант определен знакопеременными перестановками индексов *строк*, примененными к произведениям диагональных элементов, записанных последовательно слева направо. Это иллюстрируется выражением

$$\langle(\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\overline{\psi}(x_1'))_+\rangle\, \varepsilon_{3,1} =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t}e^t \begin{vmatrix} t^{-1}\psi'(x_1), & t^{-1}\psi'(x_1), & -iG_+(x_1, x_1') + t^{-1}\psi'(x_1)\overline{\psi}'(x_1') \\ t^{-1}\psi'(x_2), & t^{-1}\psi'(x_2), & -iG_+(x_2, x_1') + t^{-1}\psi'(x_2)\overline{\psi}'(x_1') \\ t^{-1}\psi'(x_3), & t^{-1}\psi'(x_3), & -iG_+(x_3, x_1') + t^{-1}\psi'(x_3)\overline{\psi}'(x_1') \end{vmatrix} =$$

$$= \psi'(x_1)\psi'(x_2)\psi'(x_3)\overline{\psi}'(x_1') - i\psi'(x_1)\psi'(x_2)G_+(x_3, x_1') -$$
$$- i\psi'(x_2)\psi'(x_3)G_+(x_1, x_1') - i\psi'(x_3)\psi'(x_1)G_+(x_2, x_1').$$

Аналогичное рассмотрение для $l - k > 0$ дает

$$\langle(\psi(x_1)\ldots\psi(x_k)\overline{\psi}(x_l')\ldots\overline{\psi}(x_1'))_+\rangle\,\varepsilon_{k,l} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dt}{t}e^t \times$$
$$\times \det{}_{(l)}[-iG_+(x_i, x_j') + t^{-1}\psi'(x_i)\overline{\psi}'(x_j'), \quad t^{-1}\overline{\psi}'(x_j')^{(l-k)}],$$

где определитель содержит величины $t^{-1}\overline{\psi}'(x_j')$, $j = 1 \ldots l$, в первых $l - k$ строках и l-мерный квадрат заполняется квадратной матрицей

$$-iG_+(x_i, x_j') + t^{-1}\psi'(x_i)\overline{\psi}'(x_j'), \quad i = 1 \ldots k, \quad j = 1 \ldots l.$$

Здесь детерминант определен знакопеременными перестановками индексов *столбцов*, примененными к произведению диагональных элементов, записанных последовательно справа налево. Так, например, для $k = 0$ имеем

$$\langle(\overline{\psi}(x_l')\ldots\overline{\psi}(x_1'))_+\rangle\,\varepsilon_{0l} = \langle\overline{\psi}(x_l')\ldots\overline{\psi}(x_1')\rangle = \overline{\psi}'(x_l')\ldots\overline{\psi}'(x_1').$$

Представление в пространстве чисел заполнения. Из этих результатов можно получить матрицы в представлении чисел заполнения. Простейшим примером являются диагональные матричные элементы, относящиеся к вакуумному состоянию — средние по вакууму. Действительно, полагая в соотношении (3.80) все собственные значения равными нулю, получаем

$$(0\,|\,(\psi(x_1)\,\ldots\,\psi(x_k)\,\bar{\psi}(x'_l)\,\ldots\,\bar{\psi}(x'_1))_+\,|\,0)\,\varepsilon_{k,l} = \\ = \delta_{k,l}\,(-i)^k\,\mathrm{det}_{(k)}\,G_+(x_i,\ x'_j) \qquad (3.82)$$

и, в частности,

$$(0\,|\,(\psi(x)\,\bar{\psi}(x'))_+\,|\,0)\,\varepsilon(x,\ x') = -iG_+(x,\ x'). \qquad (3.83)$$

Чтобы получить матрицы операторов $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ в представлении чисел заполнения, заметим, что, например, равенство (3.75) можно записать в виде

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\,|\,\psi(x)\,|\,\chi^{(+)'}\sigma_2) = \psi'(x)\,(\chi^{(-)'}\sigma_1\,|\,\chi^{(+)'}\sigma_2),$$

или

$$\sum_{n,\ n'}(\chi^{(-)'}\,|\,n)\,(n\sigma_1\,|\,\psi(x)\,|\,n'\sigma_2)\,(n'\,|\,\chi^{(+)'}) = \\ = \left[\sum_{+,\ p}\psi_{\lambda p}(x)\,e^{-ipx_2}\chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{-,\ p}\psi_{\lambda p}(x)\,e^{ipx_1}\chi^{(-)'}_{\lambda p}\right]\times \\ \times\sum_{n}(\chi^{(-)'}\,|\,n)\exp\,[iP(n)\,(x_1 - x_2)]\,(n\,|\,\chi^{(+)'}). \qquad (3.84)$$

Выражение (3.84) служит производящей функцией для матричных элементов $(n\sigma_1\,|\,\psi(x)\,|\,n'\sigma_2)$. Удобнее образовать выражение

$$(n\,|\,\psi(x)\,|\,n') = \exp\,(-iP(n)\,x_1)\,(n\sigma_1\,|\,\psi(x)\,|\,n'\sigma_2)\exp\,(iP(n')\,x_2),$$

которое не зависит от поверхностей σ_1 и σ_2 и относится к стандартной поверхности. Если включить e^{-ipx_2} в собственное значение $\chi^{(+)'}_{\lambda p}$ и e^{ipx_1} в собственное значение $\chi^{(-)'}_{\lambda p}$, то соотношение (3.84) приобретет вид

$$\sum_{n,\ n'}(\chi^{(-)'}\,|\,n)\,(n\,|\,\psi(x)\,|\,n')\,(n'\,|\,\chi^{(+)'}) = \\ = \left[\sum_{+,\ p}\psi_{\lambda p}(x)\,\chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{-,\ p}\psi_{\lambda p}\chi^{(-)'}_{\lambda p}\right]\sum_{n}(\chi^{(-)'}\,|\,n)\,(n\,|\,\chi^{(+)'}).$$

Далее,

$$\chi_{\lambda p}^{(-)'}(\chi_{\lambda p}^{(-)'}\mid n)=\chi_{\lambda p}^{(-)'}{}'\prod(\chi^{(-)'})^{n}=0,\quad n_{\lambda p}=1,$$

$$\chi_{\lambda p}^{(-)'}(\chi_{\lambda p}^{(-)'}\mid n)=\chi_{\lambda p}^{(-)'}{}'\prod(\chi^{(-)'})^{n}=(-1)^{n>\lambda p}(\chi^{(-)'}\mid n+1_{\lambda p}),$$
$$n_{\lambda p}=0,$$

где $n_{>\lambda p}$ — число занятых состояний, которые следуют за λp в стандарном порядке. Аналогично,

$$(n\mid\chi^{(+)'})\chi_{\lambda p}^{(+)'}=\prod(\chi^{(+)'})^{n}\chi_{\lambda p}^{(+)'}=0,\quad n_{\lambda p}=1,$$

$$(n\mid\chi^{(+)'})\chi_{\lambda p}^{(+)'}=\prod(x^{(+)'})^{n}\chi_{\lambda p}^{(+)'}=(-1)^{n>\lambda p}\;(n+1_{\lambda p}\mid\chi^{(+)'}),$$
$$n_{\lambda p}=0.$$

Мы видим, что неисчезающие матричные элементы оператора $\psi(x)$ имеют вид

$$(n\mid\psi(x)\mid n+1_{\lambda p})=(-1)^{n>\lambda p}\psi_{\lambda p}(x),\quad \lambda>0, \tag{3.85}$$

$$(n+1_{\lambda p}\mid\psi(x)\mid n)=(-1)^{n>\lambda p}\psi_{\lambda p}(x),\quad \lambda<0, \tag{3.86}$$

где $n_{\lambda p}=0$ в обоих равенствах. Это показывает, что оператор $\psi(x)$ является оператором уничтожения единичного заряда. Подобным образом

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1\mid\overline{\psi}(x)\mid\chi^{(+)'}\sigma_2)=\overline{\psi}'(x)(\chi^{(-)'}\sigma_1\mid\chi^{(+)'}\sigma_2)$$

дает

$$\sum_{n,\,n'}(\chi^{(-)'}\mid n)(n\mid\overline{\psi}(x)\mid n')(n'\mid\chi^{(+)'})=$$
$$=\Big[\sum_{-,\,p}\overline{\psi}_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)'}+\sum_{+,\,p}\overline{\psi}_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(-)'}\Big]\sum_{n}(\chi^{(-)'}\mid n)(n\mid\chi^{(+)'}),$$

откуда получаем неисчезающие матричные элементы

$$(n+1_{\lambda p}\mid\overline{\psi}(x)\mid n)=(-1)^{n>\lambda p}\overline{\psi}_{\lambda p}(x),\quad \lambda>0,$$

$$(n\mid\overline{\psi}(x)\mid n+1_{\lambda p})=(-1)^{n>\lambda p}\overline{\psi}_{\lambda p}(x),\quad \lambda<0,$$

где $n_{\lambda p}=0$; это показывает, что оператор $\overline{\psi}(x)$ является оператором рождения единичного заряда.

Матрицы операторов ψ и $\overline{\psi}$ дают возможность классифицировать матричные элементы, объединяющие заданное изменение чисел заполнения для положительно-частотных состояний с изменением в обратном смысле для отрицательно-частотных состояний. Это осуществляется транспозицией матриц относительно чисел заполнения состояний с $\lambda < 0$, тем самым эффективно вводится обращенное во времени описание отрицательно-частотных состояний.

Производящей функцией для матриц всех упорядоченных произведений является функция (3.73), записанная в виде

$$\sum_{n,\, n'} (\chi^{(-)'} \mid n)\left(n \left| \left(\exp\left[i \int (dx)(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]\right)_{+} \right| n'\right)(n' | \chi^{(+)'}) =$$
$$= (\chi^{(-)'} \mid \chi^{(+)'}) \exp\left[i \int (dx)(dx')\, \bar{\eta} G_{+} \eta + i \int (dx)(\bar{\eta}\psi' + \bar{\psi}'\eta)\right], \tag{3.87}$$

где все состояния относятся к стандартной поверхности. Подразумевается, что источники $\bar{\eta}$ и η располагаются слева и справа соответственно, как это предполагалось в выражении (3.78). Укажем теперь положительно- и отрицательно-частотные состояния порознь, располагая сначала отрицательно-частотные состояния в стандартном порядке:

$$(\chi^{(-)'} \mid n) = (\chi_{+}^{(-)'} \mid n_{+})(\chi_{-}^{(-)'} \mid n_{-}),$$
$$(n' \mid \chi^{(+)'}) = (n'_{-} \mid \chi_{-}^{(+)'})(n'_{+} \mid \chi_{+}^{(+)'}),$$

и определим смешанные собственные функции

$$[\bar{\psi}' \mid N] = (\chi_{+}^{(-)'} \mid n_{+})(n'_{-} \mid \chi_{-}^{(+)'})(-1)^{\frac{1}{2} n'_{-}(n'_{-}-1)},$$
$$[N' \mid \psi'] = (-1)^{\frac{1}{2} n_{-}(n_{-}-1)} (\chi_{-}^{(-)'} \mid n_{-})(n'_{+} \mid \chi_{+}^{(+)'}). \tag{3.88}$$

Здесь целые числа n_{-} и n'_{-} — соответствующие числа занятых отрицательно-частотных состояний, в то время как N и N' — совокупности чисел заполнения $\{n_{+}, n'_{-}\}$ и $\{n'_{+}, n_{-}\}$ соответственно. Запишем также $N_{-} = n'_{-}$, $N'_{-} = n_{-}$. Обозначение $[\bar{\psi}' \mid N]$ отражает то обстоятельство, что $\chi_{+}^{(-)'}$ и $\chi_{-}^{(+)'}$ совместно включаются в величины

$$\bar{\psi}'_{\lambda p} = \int d\sigma_{\mu} \bar{\psi}'(x) \gamma_{\mu} \psi_{\lambda p}(x) \tag{3.89}$$

для положительных и отрицательных λ. Таким образом,

$$[\bar{\psi}' \mid N] = {\prod_{\lambda p}}' (\bar{\psi}'_{\lambda p})^{N_{\lambda p}}, \tag{3.90}$$

причем сомножители в этом произведении располагаются в стандартном порядке справа налево из-за множителя $(-1)^{\frac{1}{2}n'_{-}(n'_{-}-1)}$, который эффективно изменяет порядок умножения в функции $(n'_{-}|\chi_{-}^{(+)'})$ для n'_{-} антикоммутирующих собственных значений. Подобным образом $\chi_{+}^{(+)'}$ и $\chi_{-}^{(-)'}$ включаются в выражения

$$\psi'_{\lambda p}=\int d\sigma_{\mu}\overline{\psi}_{\lambda p}(x)\,\gamma_{\mu}\psi(x)' \tag{3.91}$$

и

$$[N'|\psi']=\prod_{\lambda p}(\psi'_{\lambda p})^{N'_{\lambda p}}. \tag{3.92}$$

Чтобы выполнить перестановку, рассмотрим

$$\sum_{n,\,n'}(\chi_{+}^{(-)'}|n_{+})(\chi_{-}^{(-)'}|n_{-})(n_{+}n_{-}|F|n'_{+}n'_{-})(n'_{-}|\chi_{-}^{(+)'})(n'_{+}|\chi_{+}^{(+)'}), \tag{3.93}$$

где F — какое-либо произведение операторов ψ, $\overline{\psi}$, и переставим местами две отрицательно-частотные собственные функции. В результате появляется множитель $(-1)^{n_{-}n'_{-}}$, так что выражение (3.93) приобретает вид

$$\sum_{N,\,N'}(\pm)\,[\overline{\psi}'|N]\,[N|F|N']\,[N'|\psi'], \tag{3.94}$$

где мы использовали обозначения

$$[N|F|N']=(n|F|n')$$

и

$$(\pm)=(-1)^{N_{-}}(-1)^{\frac{1}{2}(N_{-}-N'_{-})(N_{-}+1-N'_{-})}=$$
$$=(-1)^{N'_{-}}(-1)^{\frac{1}{2}(N_{-}-N'_{-})(N'_{-}+1-N_{-})}. \tag{3.95}$$

Если F — единичный оператор, то мы имеем

$$(\chi^{(-)'}|\chi^{(+)'})=\sum_{N}[\overline{\psi}'|N](-1)^{N_{-}}[N|\psi']=\exp\Big[\sum_{\lambda p}\overline{\psi}'_{\lambda p}\,\varepsilon(\lambda)\,\psi'_{\lambda p}\Big]. \tag{3.96}$$

Чтобы завершить преобразование производящей функции (3.87), заметим, что

$$\psi'(x) = \sum_{\lambda p} \psi_{\lambda p}(x)\, \psi'_{\lambda p} \tag{3.97}$$

и

$$\bar{\psi}'(x) = \sum_{\lambda p} \bar{\psi}_{\lambda p}(x)\, \bar{\psi}'_{\lambda p}. \tag{3.98}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{N, N'} (\pm) [\bar{\psi}' | N] \left[N \middle| \left(\exp\left[i \int (dx)(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right]\right)_+ \middle| N'\right] [N' | \psi'] = \\ = \exp\left[i \int (dx)(dx')\bar{\eta}\, G_+ \eta\right] \exp\left[\sum_{\lambda p} \bar{\psi}'_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi'_{\lambda p} + \right. \\ \left. + i\bar{\eta}_{\lambda p}\psi'_{\lambda p} + i\bar{\psi}'_{\lambda p}\eta_{\lambda p}\right],\end{aligned} \tag{3.99}$$

где мы использовали обозначения

$$\bar{\eta}_{\lambda p} = \int (dx)\bar{\eta}(x)\psi_{\lambda p}(x), \quad \eta_{\lambda p} = \int (dx)\bar{\psi}_{\lambda p}(x)\eta(x).$$

Следует еще раз подчеркнуть, что источники η и $\bar{\eta}$ записаны слева и справа соответственно, а не так, как это указано в левой части соотношения (3.99), потому что знаковый множитель, даваемый выражением (3.95), справедлив лишь в том случае, когда матричный элемент в выражении (3.93) является числом, а не величиной, обладающей антикоммутирующими свойствами.

Так как при разложении экспоненты, относящейся к данному состоянию, остается лишь пять неисчезающих членов, второй экспоненциальный множитель в соотношении (3.99) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\prod_{\lambda p} \exp [\bar{\psi}'_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi'_{\lambda p} + i\bar{\eta}_{\lambda p}\psi'_{\lambda p} + i\bar{\psi}'_{\lambda p}\eta_{\lambda p}] = \\ = \prod_{\lambda p} \sum_{N, N'} (\bar{\psi}'_{\lambda p})^N [\delta_{N, N'}\varepsilon^N (1 + N\varepsilon\bar{\eta}\eta) + \\ + i\bar{\eta}N'(1 - N) + i\eta N(1 - N')] (\psi'_{\lambda p})^{N'}.\end{aligned} \tag{3.100}$$

Мы сначала выделим диагональные матричные элементы, которые дают следующие члены из выражения (3.100):

$$\prod_{\lambda p} \sum_{N_{\lambda p}} (\overline{\psi}'_{\lambda p})^{N_{\lambda p}} [\varepsilon(\lambda)]^{N_{\lambda p}} [1 + N_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\overline{\eta}_{\lambda p}\eta_{\lambda p}] (\psi'_{\lambda p})^{N_{\lambda p}} =$$

$$= \sum_{N} \exp\left[\sum_{\lambda p} N_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\overline{\eta}_{\lambda p}\eta_{\lambda p}\right] [\overline{\psi}' | N] (-1)^{N_-} [N | \psi']. \qquad (3.101)$$

Полученная таким образом экспонента в комбинации с первым множителем в правой части соотношения (3.99) образует

$$\exp\left[i \int (dx)(dx')\overline{\eta}(x)(G_+(x, x') - \right.$$
$$\left. - i\sum_{\lambda p} N_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi_{\lambda p}(x)\overline{\psi}_{\lambda p}(x'))\eta(x')\right].$$

При перемещении величины η вправо от произведения собственных функций в выражении (3.101) не возникает перемен знаков. Из сравнения с равенствами (3.74) и (3.80) мы видим, что $(N_{\lambda p} = n_{\lambda p})$

$$(n | (\psi(x_1) \ldots \psi(x_k)\overline{\psi}(x'_l) \ldots \overline{\psi}(x'_1))_+ | n)\varepsilon_{k,l} =$$

$$= \delta_{k,l} \det{}_{(k)} \left[-iG_+(x_i, x'_j) - \sum_{\lambda p} n_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi_{\lambda p}(x_i)\overline{\psi}_{\lambda p}(x'_j)\right], \qquad (3.102)$$

простейшим примером чего является

$$(n | (\psi(x)\overline{\psi}(x'))_+ | n)\varepsilon(x, x') = -iG_+(x, x') -$$
$$- \sum_{\lambda p} n_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi_{\lambda p}(x)\overline{\psi}_{\lambda p}(x'). \qquad (3.103)$$

Состояния, которые встречаются в общем матричном элементе, можно разбить на три класса: класс a, для которого $N_{\lambda p} = 0$, $N'_{\lambda p} = 1$; класс b, включающий состояния с $N_{\lambda p} = N'_{\lambda p}$; класс c, в котором $N_{\lambda p} = 1$, $N'_{\lambda p} = 0$. Типичный член в разложении произведения (3.100) можно тогда записать в виде

$$\prod_a [(i\overline{\eta}\psi')] \prod_b [(\overline{\psi}')^N \varepsilon^N (1 + N\varepsilon\overline{\eta}\eta)(\psi')^N] \prod_c (i\overline{\psi}'\eta). \qquad (3.104)$$

Произведение состояний класса b можно преобразовать таким же образом, как при исследовании диагональных матричных элементов, что даст

$$\exp\left[\sum_b N_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\overline{\eta}_{\lambda p}\eta_{\lambda p}\right](-1)^{N_-b}\prod_b (\overline{\psi}'_{\lambda p})^N \prod_b (\psi'_{\lambda p})^N.$$

Если мы приведем собственные значения $\psi'_{\lambda p}$ состояний класса a и собственные значения $\bar{\psi}'_{\lambda p}$ класса c к стандартному порядку, то произведение (3.100) приобретет вид

$$'\prod_a (i\bar{\eta}(-1)^{N_>}) \exp\left[\sum_b N\varepsilon\bar{\eta}\eta\right](-1)^{N-b}(-1)^{N_a N_c}\times$$
$$\times [\bar{\psi}' | N][N' | \psi'] \prod_c (i\eta(-1)^{N_>}),$$

где $N_>$, т. е. $N_{>\lambda p}$, представляет собой число занятых состояний класса b, которые следуют за λp в стандартном порядке, в то время как N_a и N_c являются полными числами состояний классов a и c.

Правая сторона соотношения (3.99) выражается, таким образом, в виде

$$\sum_{N, N'} {}'\prod_a (i\bar{\eta}(-1)^{N_>}) \exp[\ ](-1)^{N-b+N_a N_c}\times$$
$$\times [\bar{\psi}' | N][N' | \psi'] \prod_c (i\eta(-1)^{N_>}),$$

где

$$\exp[\ ] = \exp\Big[i\int (dx)(dx')\bar{\eta}(x)\Big(G_+(x, x') -$$
$$- i\sum_b N_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\psi_{\lambda p}(x)\bar{\psi}_{\lambda p}(x')\Big)\eta(x')\Big].$$

Мы должны удовлетворить условию, чтобы все $\bar{\eta}$ стояли слева, а все η — справа. В результате перемещения величины η в указанной выше экспоненте вправо от произведения собственных функций появляется множитель $(-1)^{N-N'}$, где N и N' — полное число занятых состояний в соответствующих собственных функциях. В соответствии с этим

$$(\pm)\Big[N\Big|\Big(\exp\Big[i\int (dx)(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\Big]\Big)_+\Big| N'\Big] =$$
$$= (-1)^{N-b+N_a N_c}\, {}'\prod_a (i\bar{\eta}(-1)^{N_>}) \exp\Big[i(-1)^{N-N'}\int (dx)(dx')\bar{\eta}\Big(G_+ -$$
$$- i\sum_b N\varepsilon\psi\bar{\psi}\Big)\eta\Big] \prod_c (i\eta(-1)^{N_>}),$$

Разлагая, мы получаем следующий результат для общего неисчезающего матричного элемента:

$$[N \,|\, (\psi(x_1) \ldots \psi(x_k) \overline{\psi}(x_l') \ldots \overline{\psi}(x_1'))_+ \,|\, N'] \,\varepsilon_{k,l} =$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(N_{-a} - N_{-c})^2 - \frac{1}{2}(N_{-a} + N_{-c})} \det{}_{(k+l-r)} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 0, & (-1)^{N>} \overline{\psi}_c(x_j') \\ (-1)^{N>} \psi_a(x_i), & -iG_+(x_i, x_j') - \sum_b N_{\lambda p} \varepsilon(\lambda) \psi_{\lambda p}(x_i) \overline{\psi}_{\lambda p}(x_j') \end{bmatrix}, \tag{3.105}$$

где

$$k - N_a = l - N_c = r \tag{3.106}$$

должно быть неотрицательным целым числом. Точно так же

$$N_a = N' - N_b, \quad N_c = N - N_b.$$

В этом определителе 0 стоит вместо нулевой матрицы с N_c строками и N_a столбцами, а $(-1)^{N>} \psi_a(x_i)$ представляет матрицу с k строками и N_a столбцами, в которой собственные функции различных состояний класса a стандартно распределены по последовательным столбцам. Матрица $(-1)^{N>} \overline{\psi}_c(x_j')$ является матрицей с N_c строками и l столбцами с различными сопряженными собственными функциями состояний класса c, расположенными в стандартном порядке и занимающими последовательные строки. Наконец, мы имеем матрицу

$$-iG_+(x_i, x_j') - \sum_b N_{\lambda p} \varepsilon(\lambda) \psi_{\lambda p}(x_i) \overline{\psi}_{\lambda p}(x_j')$$

с k строками и l столбцами. Таким образом, порядок этого определителя равен

$$k + N_c = l + N_a = k + l - r.$$

Поскольку это число можно записать как $N_a + N_c + r$, мы видим, что целое число r является также максимальным числом множителей, содержащих функцию Грина и появляющихся в разложении определителя.

В простейшем примере, когда $k=1$, $l=0$, мы имеем $N_a=1$, $N_c=r=0$, и неисчезающий матричный элемент равен

$$[N|\psi(x)|N+1_{\lambda p}]=(-1)^{N>\lambda p}\psi_{\lambda p}(x),$$

что объединяет выражения (3.85) и (3.86), как это следовало ожидать. Аналогично,

$$[N+1_{\lambda p}|\bar{\psi}(x)|N]=(-1)^{N>\lambda p}\bar{\psi}_{\lambda p}(x).$$

При этой классификации $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ выступают как операторы поглощения и рождения отдельных „частиц" соответственно. Правила отбора (3.106) для общего матричного элемента можно изложить следующим образом. Оператор содержит k операторов поглощения и l операторов рождения. Если r из этих операторов комбинируются в пары, давая нулевой эффект, то остающиеся $k-r$ операторов поглощения и $l-r$ операторов рождения освобождают $N_a=k-r$ занятых состояний и заполняют $N_c=l-r$ незанятых состояний. Конечно, $N=N'+l-k$.

Диагональные матричные элементы (3.102) представляют крайний случай, в котором

$$r=k=l, \quad N_a=N_c=0.$$

Противоположным пределом является

$$r=0, \quad N_a=k, \quad N_c=l,$$

когда матричный элемент (3.105) приобретает вид

$$\pm \det_{(k)}[(-1)^{N>}\psi_a(x_i)]\det_{(l)}[(-1)^{N'>}\bar{\psi}_c(x_j')]$$

и

$$\pm=(-1)^{\frac{1}{2}N_{-a}(N_{-a}-1)}(-1)^{\frac{1}{2}N_{-c}(N_{-c}-1)}(-1)^{N_aN_c-N_{-a}N_{-c}}.$$

МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОЛЯ МАКСВЕЛЛА

Этот раздел является дополнением к предыдущей статье, в которой функция преобразования, описывающая поле Максвелла с внешним током, используется для построения матриц всех произведений вектора потенциала для изолированного электромагнитного поля. Функцию преобразования (2.20) можно записать в виде

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) =$$
$$= (F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2)]_0 \exp\left[i\mathscr{W}_0 + i\int (dx) J_\nu(x) A'_\nu(x)\right], \quad (3.107)$$

где $]_0$ означает нулевой внешний ток и

$$A'_\nu(x') = 2\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu F^{(-)'}_{\mu\nu}(x) D_+(x-x') -$$
$$- 2\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu F^{(+)'}_{\mu\nu}(x) D_+(x-x') =$$
$$= 2\oint d\sigma_\mu F'_{\mu\nu}(x) D_+(x-x'). \quad (3.108)$$

Вспомним также, что

$$\mathscr{W}_0 = \frac{1}{2}\int (dx)(dx') J_\mu(x) D_+(x-x') J_\mu(x') =$$
$$= \frac{1}{2}\int (dx)(dx') [J_k(x)(\delta_{kl} D_+(x-x'))^{(T)} J_l(x') -$$
$$- J_0(x)\mathscr{D}(x-x') J_0(x')],$$

где последняя форма соответствует калибровке излучения.

Зависимость функции преобразования от внешнего тока выражается равенством

$$\delta_J(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = i\left(F^{(-)'}\sigma_1 \,\middle|\, \int (dx)\,\delta J_\mu(x) A_\mu(x) \,\middle|\, F^{(+)'}\sigma_2\right). \quad (3.109)$$

При калибровке излучения $A_0(x)$ является численной величиной

$$A_0(x) = \int (dx')\mathscr{D}(x-x') J_0(x').$$

Поэтому

$$\delta_{J_0}(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = -i\int (dx)(dx')\,\delta J_0(x)\mathscr{D}(x-x') \times$$
$$\times J_0(x')(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2)$$

и

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = (F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2)]_{J_0=0} \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{i}{2}\int (dx)(dx') J_0(x)\mathscr{D}(x-x') J_0(x')\right],$$

что дает простую зависимость функции преобразования от J_0 при калибровке излучения. Последний множитель очевиден из вида $\exp(i\mathscr{W}_0)$ при калибровке излучения. В соответствии с этим ограничимся поперечными токами, для которых $J_0 = 0$.

Вводя масштабный множитель λ, $J_k \to \lambda J_k$, находим из равенства (3.109), что

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = i\left(F^{(-)'}\sigma_1 \middle| \int (dx)\, J_k(x)\, A_k(x) \middle| F^{(+)'}\sigma_2\right).$$

Повторное дифференцирование дает

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^n (F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = \\ = i^n \left(F^{(-)'}\sigma_1 \middle| \int (dx_1) \ldots (dx_n)\, J_{k_1}(x_1) \ldots \right. \\ \left. \ldots J_{k_n}(x_n)\,(A_{k_1}(x_1) \ldots A_{k_n}(x_n))_+ \middle| F^{(+)'}\sigma_2\right),$$

и функция преобразования, соответствующая наличию внешнего тока ($\lambda = 1$), получается из функции для изолированного электромагнитного поля ($\lambda = 0$) при помощи равенства

$$(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2) = \\ = \left[\left(F^{(-)'}\sigma_1 \middle| \left(\exp\left[i\int (dx)\, J_k(x)\, A_k(x)\right]\right)_+ \middle| F^{(+)'}\sigma_2\right)\right]_0.$$

Если использовать обозначение

$$\left[\frac{(F^{(-)'}\sigma_1 \mid \ldots \mid F^{(+)'}\sigma_2)}{(F^{(-)'}\sigma_1 \mid F^{(+)'}\sigma_2)}\right]_0 = \langle\ \ \rangle,$$

то функцию преобразования (3.107) можно выразить в виде

$$\left\langle\left(\exp\left[i\int (dx)\, J_k(x)\, A_k(x)\right]\right)_+\right\rangle = \\ = \exp\left[\frac{i}{2}\int (dx)(dx')\, J_k(x)\,(\delta_{kl}D_+(x-x'))^{(T)} J_l(x') + \right. \\ \left. + i\int (dx)\, J_k(x)\, A'_k(x)\right]. \quad (3.110)$$

Удобно опустить векторные индексы. В соответствии с этим мы перепишем соотношение (3.110) в виде

$$\left\langle \left(\exp\left[i \int (dx)\, J(x)\, A(x) \right] \right)_+ \right\rangle =$$
$$= \exp\left[\frac{i}{2} \int (dx)(dx')\, J(x)\, D_+(x - x')\, J(x') + \right.$$
$$\left. + i \int (dx)\, J(x)\, A'(x) \right]. \qquad (3.111)$$

Другим выражением является

$$\left\langle \left(\exp\left[i \int (dx)\, J(x)\, {}'A(x) \right] \right)_+ \right\rangle =$$
$$= \exp\left[\frac{i}{2} \int (dx)(dx')\, J(x)\, D_+(x - x')\, J(x') \right], \qquad (3.112)$$

где

$${}'A(x) = A(x) - A'(x).$$

При разложении обеих частей равенств (3.111) или (3.112) получаются матричные элементы упорядоченных произведений операторов A.

Правая часть равенства (3.112) является четной функцией от J. Поэтому

$$\langle ({}'A(x_1) \, \ldots \, {}'A(x_{2n-1}))_+ \rangle = 0.$$

В частности,

$$\langle {}'A(x) \rangle = 0,$$

или

$$\langle A(x) \rangle = A'(x). \qquad (3.113)$$

Общий четный член разложения левой части равенства (3.112) имеет вид

$$\frac{i^{2n}}{(2n)!} \int (dx_1) \ldots (dx_{2n})\, J(x_1) \, \ldots \, J(x_{2n})\, \langle ({}'A(x_1) \, \ldots \, {}'A(x_{2n}))_+ \rangle.$$

Его следует сравнить с выражением

$$\frac{i^n}{2^n n!} \int (dx_1) \, \ldots \, (dx_{2n})\, J(x_1) \, \ldots \, J(x_{2n})\, D_+(x_1 - x_2) \, \ldots$$
$$\ldots \, D_+(x_{2n-1} - x_{2n}) = \frac{i^n}{(2n)!} \int (dx_1) \, \ldots \, (dx_{2n})\, J(x_1) \ldots$$
$$\ldots \, J(x_{2n})\, \mathrm{sym}_{(n)}\, D_+(x_i - x_j),$$

где введена величина, которую мы будем называть n-м симметрантом из функций D_+. Она определяется равенством

$$\mathrm{sym}_{(n)}\, D_+(x_i - x_j) = \sum_{\text{перест.}} D_+(x_{i_1} - x_{i_2}) \ldots D_+(x_{i_{2n-1}} - x_{i_{2n}}),$$

причем суммирование распространено по всем различным перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_{2n}$, соответствующим различным перестановкам целых чисел $1, \ldots, 2n$. Так как D_+ является четной функцией своего аргумента и порядок n множителей безразличен, то число перестановок равно

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3) \ldots$$

Матрица произведения четного числа $'A$ выражается в виде

$$\langle ('A(x_1) \ldots 'A(x_{2n}))_+ \rangle = (-i)^n\, \mathrm{sym}_{(n)}\, D_+(x_i - x_j). \tag{3.114}$$

Первыми двумя такими произведениями являются

$$\langle ('A(x)\, 'A(x'))_+ \rangle = -iD_+(x - x'),$$

или

$$\langle (A(x)\, A(x'))_+ \rangle = A'(x)\, A'(x') - iD_+(x - x') \tag{3.115}$$

и

$$\langle ('A(x_1)\, 'A(x_2)\, 'A(x_3)\, 'A(x_4))_+ \rangle =$$
$$= -[D_+(x_1 - x_2)\, D_+(x_3 - x_4) + D_+(x_1 - x_3)\, D_+(x_2 - x_4) +$$
$$+ D_+(x_2 - x_3)\, D_+(x_1 - x_4)].$$

Чтобы получить соответствующие результаты для произведений операторов A, как в простых примерах (3.113) и (3.115), рассмотрим сначала четные члены в равенстве (3.111). Четную функцию $\cos x$ можно получить из экспоненциальной функции от x^2 при помощи соответствующей операции:

$$\cos x = C_t \left[\exp\left(-\frac{1}{2} t x^2\right)\right],$$

где соотношение

$$C_t(t^n) = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

эффективно определяет оператор C_t, хотя можно дать и явное интегральное представление, подобное использованному в соотношении (3.81). Отсюда четная часть выражения (3.111) принимает вид

$$\left\langle\left(\cos\left[\int (dx)\,J(x)\,A(x)\right]\right)_+\right\rangle = \\ = C_t \exp\left[-\frac{1}{2}\int (dx)(dx')\,J(x)\times \\ \times(-iD_+(x-x') + tA'(x)\,A'(x'))\,J(x')\right],$$

что в силу соотношений (3.112) и (3.114) дает

$$\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_{2n}))_+\rangle = \\ = C_t\,\mathrm{sym}_{(n)}\,[-iD_+(x_i-x_j) + tA'(x_i)\,A'(x_j)] = \\ = A'(x_1)\ldots A'(x_{2n}) + \ldots + (-i)^n\,\mathrm{sym}_{(n)}\,D_+(x_i-x_j). \qquad (3.116)$$

Первый член разложенного выражения указывает, что под влиянием операции C_t каждая различная перестановка в разложении симметранта (3.116) учитывается один раз.

Для построения матриц, описывающих произведения нечетного числа операторов A, заметим, что

$$\frac{\delta}{\delta A'(x)}\left\langle\left(\exp\left[i\int (dx)\,JA\right]\right)_+\right\rangle = iJ(x)\left\langle\left(\exp\left[i\int (dx)\,JA\right]\right)_+\right\rangle.$$

Разлагая обе части, получаем равенство

$$\frac{\delta}{\delta A'(x)}\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_m))_+\rangle = \\ = \delta(x-x_1)\,\langle (A(x_2)\,\ldots\,A(x_m))_+\rangle + \ldots \\ \ldots + \delta(x-x_m)\,\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_{m-1}))_+\rangle,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial A'(x_m)}\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_m))_+\rangle = \langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_{m-1}))_+\rangle.$$

Следовательно, матрицы произведений нечетных чисел операторов можно получить дифференцированием матриц произведений четных чисел операторов:

$$\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_{2n-1}))_+\rangle = \frac{\partial}{\partial A'(x_{2n})}\langle (A(x_1)\,\ldots\,A(x_{2n}))_+\rangle = \\ = \frac{\partial}{\partial A'(x_{2n})}\,C_t\,\mathrm{sym}_{(n)}\,[-iD_+(x_i-x_j) + tA'(x_i)\,A'(x_j)],$$

или

$$\langle (A(x_1)\ \ldots\ A(x_{2n-1}))_+\rangle =$$
$$= C_t\, \mathrm{sym}_{(n)}\, [-iD_+(x_i - x_j) + tA'(x_i)\, A'(x_j), \quad tA'(x_k)],$$

здесь подразумевается симметрант, который получается из выражения (3.116) заменой элементов, содержащих переменные x_k, x_{2n}, на $tA'(x_k)$.

Представление в пространстве чисел заполнения. Если положить все собственные значения равными нулю, то получаются диагональные матричные элементы, относящиеся к вакуумному состоянию:

$$\begin{aligned} &(0\,|\,(A(x_1)\ \ldots\ A(x_{2n-1}))_+\,|\,0) = 0, \\ &(0\,|\,(A(x_1)\ \ldots\ A(x_{2n}))_+\,|\,0) = (-i)^n\, \mathrm{sym}_{(n)}\, D_+(x_i - x_j) \end{aligned} \tag{3.117}$$

и, в частности,

$$(0\,|\,(A(x)\,A(x'))_+\,|\,0) = -iD_+(x - x'). \tag{3.118}$$

Введем функции состояний

$$\begin{aligned} A_{\lambda k}(x)_\mu &= \left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\right)^{1/2} e_\mu(\lambda k)\, e^{ikx}, \\ \overline{A}_{\lambda k}(x)_\mu &= \left(\frac{(d\mathbf{k})}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2k_0}\right)^{1/2} e_\mu(\lambda k)\, e^{-ikx}; \end{aligned} \tag{3.119}$$

тензорную функцию Грина (2.23) можно выразить через них в виде

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} D_+(x - x') &= i\sum_{\lambda k} A_{\lambda k}(x)_\mu\, \overline{A}_{\lambda k}(x')_\nu, \quad x_0 > x_0', \\ \delta_{\mu\nu} D_+(x - x') &= i\sum_{\lambda k} \overline{A}_{\lambda k}(x)_\mu\, A_{\lambda k}(x')_\nu, \quad x_0 < x_0'. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Поэтому

$$A'_\nu(x') = 2\oint d\sigma_\alpha F'_{\alpha\mu}(x)\, \delta_{\mu\nu} D_+(x - x')$$

приобретает вид (если опустить векторные индексы)

$$A'(x) = \sum_{\lambda k} \left(A_{\lambda k}(x)\, e^{-ikx_2} A^{(+)'}_{\lambda k} + \overline{A}_{\lambda k}(x)\, e^{ikx_1} A^{(-)'}_{\lambda k}\right),$$

где

$$A^{(-)'}_{\lambda k} = 2i\int_{\sigma_1} d\sigma_\mu\, F^{(-)'}_{\mu\nu}(x)\, A_{\lambda k}(x)_\nu\, e^{-ikx_1}$$

и

$$A^{(+)'}_{\lambda k} = -2i\int_{\sigma_2} d\sigma_\mu\, F^{(+)'}_{\mu\nu}(x)\, \overline{A}_{\lambda k}(x)_\nu\, e^{ikx_2}.$$

Последние величины отличаются лишь знаком от $a_{\lambda k}^{(+)'}$, $a_{\lambda k}^{(-)'}$ [см. выражения (2.27) и (2.28)]. Так как знаки минус являются несколько неудобными для рассматриваемых здесь целей, мы заметим, что противоположный выбор знаков в выражениях (2.27) и (2.28) приводит к относительно тривиальным изменениям в результатах гл. II. Так, в уравнении (2.34) и его следствиях знаки членов, содержащих $J_{\lambda k}$ и $J_{\lambda k}^{*}$, должны быть изменены. Запишем теперь собственные функции изолированного электромагнитного поля в виде

$$(F^{(-)'}\,|\,n)=\prod_{\lambda k}(n!)^{-1/2}(A_{\lambda k}^{(-)'})^{n},$$

$$(n\,|\,F^{(+)'})=\prod_{\lambda k}(n!)^{-1/2}(A_{\lambda k}^{(+)'})^{n},$$

тогда как функцией преобразования является

$$(F^{(-)'}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2)=\exp\left[\sum_{\lambda k}A_{\lambda k}^{(-)'}e^{ikx_1}e^{-ikx_2}A_{\lambda k}^{(+)'}\right]=$$

$$=\sum_{n}(F^{(-)'}\,|\,n)\exp\left[iP(n)(x_1-x_2)\right](n\,|\,F^{(+)'}).$$

Матрица оператора A в представлении чисел заполнения, получаемая из соотношения (3.113), запишется в виде

$$(F^{(-)'}\sigma_1|A(x)|F^{(+)'}\sigma_2)=\sum_{n,n'}(F^{(-)'}|n)(n\sigma_1|A(x)|n'\sigma_2)(n'|F^{(+)'})=$$

$$=A'(x)(F^{(-)'}\sigma_1\,|\,F^{(+)'}\sigma_2).$$

Подстановки $e^{-ikx_2}A_{\lambda k}^{(+)'}\to A_{\lambda k}^{(+)'}$, $e^{ikx_1}A_{\lambda k}^{(-)'}\to A_{\lambda k}^{(-)'}$ превращают это выражение в производящую функцию

$$(n\,|\,A(x)|n')=\exp(-iP(n)\,x_1)\,(n\sigma_1\,|\,A(x)\,|\,n'\sigma_2)\exp(iP(n')\,x_2)$$

для матрицы, отнесенной к стандартной поверхности, а именно:

$$\sum_{n,n'}(F^{(-)'}\,|\,n)(n\,|\,A(x)\,|\,n')(n'\,|\,F^{(+)'})=$$

$$=\sum_{\lambda k}(A_{\lambda k}(x)\,A_{\lambda k}^{(+)'}+\bar{A}_{\lambda k}(x)\,A_{\lambda k}^{(-)'})\sum_{n}(F^{(-)'}\,|\,n)\,(n\,|\,F^{(+)'}).$$

Далее,

$$A_{\lambda k}^{(-)'}(F^{(-)'}\,|\,n-1_{\lambda k})=(F^{(-)'}\,|\,n)\,n_{\lambda k}^{1/2}$$

и

$$(n-1_{\lambda k}\,|\,F^{(+)'})\,A_{\lambda k}^{(+)'}=n_{\lambda k}^{1/2}(n\,|\,F^{(+)'}),$$

так что неисчезающими матричными элементами оператора $A(x)$ будут

$$(n-1_{\lambda k}\,|\,A(x)\,|\,n)=n_{\lambda k}^{1/2}A_{\lambda k}(x)$$

и

$$(n\,|\,A(x)\,|\,n-1_{\lambda k})=n_{\lambda k}^{1/2}\bar{A}_{\lambda k}(x).$$

Производящей функцией для матриц всех упорядоченных произведений, отнесенной к стандартной поверхности, является функция

$$\begin{aligned}\sum_{n,n'}(F^{(-)'}\,|\,n)\left(n\,\middle|\left(\exp\left[i\int(dx)\,J(x)\,A(x)\right]\right)_+\middle|\,n'\right)(n'\,|\,F^{(+)'})=\\=(F^{(-)'}\,|\,F^{(+)'})\exp\left[\frac{i}{2}\int(dx)(dx')\,J(x)\,D_+(x-x')\,J(x')+\right.\\\left.+i\int(dx)\,J(x)\,A'(x)\right]=\\=\exp\left[\frac{i}{2}\int(dx)(dx')\,JD_+J\right]\prod_{\lambda k}\exp\left[A_{\lambda k}^{(-)'}A_{\lambda k}^{(+)'}+iA_{\lambda k}^{(-)'}\times\right.\\\left.\times\int(dx)\,J(x)\,\bar{A}_{\lambda k}(x)+iA_{\lambda k}^{(+)'}\int(dx)\,J(x)\,A_{\lambda k}(x)\right].\qquad(3.121)\end{aligned}$$

Разложение по собственным функциям сильно упрощается при использовании того обстоятельства, что $(d\mathbf{k})$ является бесконечно малой величиной. При этом второй экспоненциальный множитель в выражении (3.121) приобретает вид

$$\begin{aligned}\prod_{\lambda k}\sum_{n,n'}\frac{(A^{(-)'})^n}{(n!)^{1/2}}\left[\delta_{n,n'}\left(1-n\int(dx)\,JA\int(dx)\,J\bar{A}\right)+\right.\\\left.+\delta_{n,n'+1}n^{1/2}i\int(dx)\,J\bar{A}+\delta_{n',n+1}n'^{1/2}i\int(dx)\,JA\right]\frac{(A^{(+)'})^{n}}{(n'!)^{1/2}}.\qquad(3.122)\end{aligned}$$

Изменение числа частиц в данном состоянии, например, на два привело бы к матричному элементу, пропорциональному $(d\mathbf{k})$, и поэтому к вероятности перехода, пропорциональной $(d\mathbf{k})^2$.

Рассмотрим сначала диагональные матричные элементы, которые содержатся в следующих членах выражения (3.122):

$$\prod_{\lambda k} \sum_{n} \frac{(A^{(-)'})^{n}}{(n!)^{1/2}} \left[1 - n \int (dx)\, JA \int (dx)\, J\bar{A}\right] \frac{(A^{(+)'})^{n}}{(n!)^{1/2}} \doteq$$

$$= \sum_{n} (F^{(-)'} \,|\, n) \exp\left[-\int (dx)(dx')\, J(x) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{\lambda k} n_{\lambda k} A_{\lambda k}(x)\, \bar{A}_{\lambda k}(x')\right) J(x')\right] (n \,|\, F^{(+)'}).$$

Таким образом,

$$\left(n \left| \left(\exp\left[i \int (dx)\, J(x)\, A(x)\right]\right)_{+} \right| n\right) =$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2} \int (dx)(dx')\, J(x) \left(-iD_{+}(x - x') + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\lambda k} 2 n_{\lambda k} A_{\lambda k}(x)\, \bar{A}_{\lambda k}(x')\right) J(x')\right];$$

это показывает, что

$$(n \,|\, (A(x_1) \ldots A(x_{2l-1}))_{+} \,|\, n) = 0$$

и что

$$(n \,|\, (A(x_1) \ldots A(x_{2l}))_{+} \,|\, n) =$$

$$= \operatorname{sym}_{(l)} \left[-iD_{+}(x_i - x_j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} (A_{\lambda k}(x_i)\, \bar{A}_{\lambda k}(x_j) + \bar{A}_{\lambda k}(x_i)\, A_{\lambda k}(x_j))\right]. \qquad (3.123)$$

Элементарным примером последнего результата является

$$(n \,|\, (A(x)\, A(x'))_{+} \,|\, n) =$$

$$= -iD_{+}(x - x') + \sum_{\lambda k} n_{\lambda k} (A_{\lambda k}(x)\, \bar{A}_{\lambda k}(x') + \bar{A}_{\lambda k}(x)\, A_{\lambda k}(x')). \qquad (3.124)$$

Введем классификацию состояний в общем матричном элементе: класс a — состояния, для которых $n_{\lambda k} = n'_{\lambda k} - 1$; класс b — состояния, для которых $n_{\lambda k} = n'_{\lambda k}$; класс c — состояния, для которых $n_{\lambda k} = n'_{\lambda k} + 1$. Типичный член разложения произведения (3.122) можно тогда записать в виде

$$(F^{(-)'}|n)\prod_a\left[n'^{\frac{1}{2}}i\int(dx)\,JA\right]\prod_b\left[1-n\int(dx)\,JA\int(dx)J\bar{A}\right]\times$$
$$\times\prod_c\left[n^{\frac{1}{2}}i\int(dx)J\bar{A}\right](n'|F^{(+)'}).$$

В соответствии с этим

$$\left(n\middle|\left(\exp\left[i\int(dx)\,J(x)\,A(x)\right]\right)_+\middle|n'\right)=$$
$$=\exp\left[\frac{i}{2}\int(dx)(dx')\,J(x)\,D_+^{(n)}(x,x')\,J(x')\right]\times$$
$$\times\prod_a\left[n'^{\frac{1}{2}}i\int(dx)\,JA_{\lambda k}\right]\prod_c\left[n^{\frac{1}{2}}i\int(dx)\,J\bar{A}_{\lambda k}\right],\qquad(3.125)$$

где мы ввели символ

$$D_+^{(n)}(x,x')=$$
$$=D_+(x-x')+i\sum_b n_{\lambda k}\left[A_{\lambda k}(x)\,\bar{A}_{\lambda k}(x')+\bar{A}_{\lambda k}(x)\,A_{\lambda k}(x')\right].$$

Будем использовать $A_\alpha(x)$ для общего обозначения функций $A_{\lambda k}(x)$ состояний класса a и функций $\bar{A}_{\lambda k}(x)$ состояний класса c (полное объединение было бы получено путем транспозиции матриц по отношению к числам заполнения состояний класса c, что привело бы к обращенному во времени описанию процессов излучения). При использовании этого обозначения равенство (3.125) приобретает вид

$$\left(n\middle|\left(\exp\left[i\int(dx)\,J(x)\,A(x)\right]\right)_+\middle|n'\right)=$$
$$=\prod_a\left(n'^{\frac{1}{2}}\right)\prod_c\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\prod_\alpha\left[i\int(dx)\,J(x)\,A_\alpha(x)\right]\times$$
$$\times\exp\left[\frac{i}{2}\int(dx)(dx')\,JD_+^{(n)}J\right].$$

Разложение этой производящей функции ведет к следующей формуле для общего неисчезающего матричного элемента:

$$(n\,|\,(A(x_1)\ldots A(x_m))_+\,|\,n')=$$
$$=\prod_a\left(n'^{\frac{1}{2}}\right)\prod_c\left(n^{\frac{1}{2}}\right)(-i)^r\,\mathrm{sym}_{(N,r)}\left[A_\alpha(x_i);\ D_+^{(n)}(x_j,x_k)\right],\qquad(3.126)$$

где N — число состояний $\alpha = a + c$, а r — такое неотрицательное целое число, что

$$m = N + 2r.$$

Мы ввели обобщение симметранта, образованное из N различных функций одной переменной $A_\alpha(x_i)$, и симметричной функции двух переменных $D_+^{(n)}(x_j, x_k)$, взятой r раз:

$$\mathrm{sym}_{(N, r)}[A_\alpha(x_i);\ D_+^{(n)}(x_j, x_k)] =$$

$$= \sum_{\text{перест.}} A_{\alpha_1}(x_{i_1})\ldots A_{\alpha_N}(x_{i_N}) D_+^{(n)}(x_{i_{N+1}}, x_{i_{N+2}})\ldots D_+^{(n)}(x_{i_{m-1}}, x_{i_m}).$$

Здесь суммирование распространяется на $(N+2r)!/2^r r!$ различных перестановок индексов $i_1 \ldots i_m$, которые являются некоторым преобразованием целых чисел $1 \ldots m$.

Диагональные матричные элементы соответствуют случаю, когда $N = 0$, $m = 2r$. Противоположным крайним случаем будет $r = 0$, $N = m$; симметрант при этом сведется к выражению

$$\mathrm{sym}_{(m, 0)}[A_\alpha\ (x_i)] = \sum_{\text{перест.}} A_{\alpha_1}(x_{i_1})\ldots A_{\alpha_m}(x_{i_m}).$$

Эта сумма $m!$ перестановок получается из соответствующего определителя, если опустить множитель, меняющий знак.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Phys. Rev., **91**, 728 (1953) (см. гл. II).
2. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 115.)

ГЛАВА IV[1]

В этой статье изучается поле Дирака, возмущенное зависящим от времени внешним электромагнитным полем, обращающимся в нуль на граничных поверхностях. Функция преобразования в этом случае отличается от функции преобразования для случая свободного поля, кроме видоизменения функции Грина, только появлением зависящего от поля численного множителя, выражаемого бесконечным определителем. Показано, что для класса полей, характеризуемых конечными значениями пространственно-временных интегралов от плотности энергии, определитель, получающийся в результате видоизменения этого детерминанта, является целой функцией параметра, характеризующего напряженность поля, и может быть поэтому выражен в виде степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости. Функция Грина получается отсюда как отношение двух таких степенных рядов. Функция преобразования используется в качестве производящей функции для элементов матрицы рассеяния S, характеризуемых числами заполнения. В частности, выводятся формулы для вероятностей рождения n пар в системе, первоначально находившейся в вакуумном состоянии. Дана классификация матричных элементов общего вида матрицы S, при которой используется описание отрицательно-частотных состояний с помощью обращения времени, и связанной с ней матрицы Σ, которая может рассматриваться как матрица, дающая описание развития системы в собственном времени. Показано, что последняя матрица является неопределенно-унитарной в отличие от матрицы S, унитарность которой показана непосредственно. Два приложения посвящены свойствам определителей.

ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

В предыдущей статье [1] было рассмотрено поле Дирака, связанное с другим заданным полем Дирака. Теперь мы на примере электромагнитного поля рассмотрим влияние связи поля Дирака с заданным полем Бозе — Эйнштейна.

---

[1] J. Schwinger, Theory of Quantized Fields. V, Phys. Rev., **93**, 615—628 (1954).

Функция Лагранжа и уравнения поля этой системы даны в предыдущей статье [см. формулу (3.1) и уравнения (3.2)].

Простейшее развитие найденных выше результатов получается при предположении, что внешнее электромагнитное поле исчезает в окрестности граничных поверхностей σ_1 и σ_2, принимая произвольные значения внутри этой области. Сохраним калибровку $A_\mu = 0$ для описания нулевого поля. Разбиение поля Дирака на положительно- и отрицательно-частотные компоненты на поверхностях σ_1 и σ_2 можно провести как и в предыдущей статье, и поведение системы между этими поверхностями будет описываться функцией преобразования $(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2)$. Подстановка источников (3.33) дает возможность получить функцию $(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2)$ из функции преобразования

$$(0\sigma_1 \,|\, 0\sigma_2) = \exp(i\mathscr{W}_0), \tag{4.1}$$

относящейся к нулевым собственным значениям. Зависимость $\mathscr{W}_0$ от источников выражается формулой (3.37):

$$\delta\mathscr{W}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)[\delta\bar{\eta}\langle\psi\rangle + \langle\bar{\psi}\rangle\,\delta\eta], \tag{4.2}$$

где теперь

$$\begin{aligned} \gamma_\mu[-i\partial_\mu - eA_\mu(x)]\,\langle\psi(x)\rangle + m\,\langle\psi(x)\rangle &= \eta(x), \\ [i\partial_\mu - eA_\mu(x)]\,\langle\bar{\psi}(x)\rangle\,\gamma_\mu + m\,\langle\bar{\psi}(x)\rangle &= \bar{\eta}(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

являются уравнениями, которые должны быть решены с учетом граничных условий (3.40) и (3.41). Поэтому соответствующая функция Грина [уравнения (3.42) и (3.43)] удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \gamma_\mu[-i\partial_\mu - eA_\mu(x)]\,G_+(x, x') + mG_+(x, x') &= \\ = [i\partial'_\mu - eA_\mu(x')]\,G_+(x, x')\,\gamma_\mu + mG_+(x, x') &= \\ &= \delta(x-x') \end{aligned} \tag{4.4}$$

и следующему граничному условию: G_+, как функция от x, должна содержать лишь положительные частоты для $x_0 > x'_0$, A и только отрицательные частоты для $x_0 < x'_0$, A. Записью $x_0 > A$ и $x_0 < A$ мы указали, что область неисчезающего поля ограничивается соответственно более ранними и более поздними временами, чем x_0. То же утверждение справедливо, если поменять x и x' местами.

Совместность этих двух форм граничных условий для произвольного A_μ можно связать с зарядовой симметрией теории. Если второе дифференциальное уравнение для $G_+(x, x')$ транспонировать по отношению к спинорным индексам и поменять местами x и x', то мы получим дифференциальное уравнение для зарядово-сопряженной функции Грина:

$$\gamma_\mu[-i\partial_\mu + eA_\mu(x)]_c G_+(x, x') + \\ + m_c G_+(x, x') = \delta(x - x'), \qquad (4.5)$$

где

$$_cG_+(x, x') = CG_+^{tr}(x', x)C^{-1} \qquad (4.6)$$

и

$$\gamma_\mu^{tr} = -C^{-1}\gamma_\mu C. \qquad (4.7)$$

Зарядово-сопряженная функция Грина получается, таким образом, из функции G_+ подстановкой $A_\mu \to -A_\mu$. Соотношение

$$G_+(x, x') = C\,_cG_+^{tr}(x', x)C^{-1}, \qquad (4.8)$$

обратное соотношению (4.6), показывает теперь, что $G_+(x, x')$, как функция от x', удовлетворяет тому же граничному условию, что и $G_+(x', x)$.

Интегрирование дифференциального выражения (4.2) дает

$$W^0_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)(dx')\bar{\eta}(x)\,G_+(x, x')\,\eta(x') + w, \qquad (4.9)$$

где w — константа интегрирования, характеризующая функцию преобразования с нулевыми собственными значениями в отсутствие источников. Мы не можем больше утверждать, что эта константа равна нулю вследствие присутствия внешнего электромагнитного поля. Получающаяся функция преобразования отличается по форме от функции (3.46) только добавлением w к W^0. В частности,

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2)]_0 = \exp\Big[iw + i\oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \bar{\psi}'(x) \times \\ \times \gamma_\mu G_+(x, x')\gamma_\nu\psi'(x')\Big], \qquad (4.10)$$

где $]_0$ означает, что источники отсутствуют.

Зависимость w от электромагнитного поля выражается равенством

$$\delta_A w = \left\langle \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\,\delta_A \mathscr{L}(x) \right\rangle \Big]_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\,\delta A_\mu(x) \left\langle j_\mu(x) \right\rangle \Big]_0, \quad (4.11)$$

где

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}\,[\overline{\psi}(x),\ \gamma_\mu \psi(x)] =$$
$$= -e\,\mathrm{tr}\,\gamma_\mu (\psi(x)\overline{\psi}(x'))_+\,\varepsilon(x,\ x')\big]_{x' \to x} \quad (4.12)$$

и использованы обозначения (3.35). В последнем выражении для вектора тока предполагается, что берется среднее двух предельных выражений, получаемых при $x_0 - x_0' \to \pm 0$. Символ tr выражает диагональное суммирование по спинорным индексам. При этом

$$\delta_\eta \langle \psi(x) \rangle\,]_0 = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx')\,G_+(x,\ x')\,\delta\eta(x') =$$
$$= i \left\langle \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') (\psi(x)\overline{\psi}(x')\,\delta\eta(x'))_+ \right\rangle \Big]_0 \quad (4.13)$$

и, следовательно,

$$i \langle (\psi(x)\overline{\psi}(x'))_+ \rangle\,\varepsilon(x,\ x')\,]_0 = G_+(x,\ x'), \quad (4.14)$$

что сводится к выражению (3.83) в отсутствие электромагнитного поля. Таким образом,

$$\langle j_\mu(x) \rangle\,]_0 = ie\,\mathrm{tr}\,\gamma_\mu G_+(x,\ x), \quad (4.15)$$

где $G_+(x,\ x)$ определяется тем же средним двух пределов, что и в выражении (4.12). Чтобы построить w, необходимо проинтегрировать дифференциальное выражение

$$\delta w = \int_{-\infty}^{+\infty} (dx)\,\mathrm{tr}\,ie\gamma_\mu\,\delta A_\mu(x)\,G_+(x,\ x) \quad (4.16)$$

с начальным условием $w = 0$ при $A_\mu = 0$.

Следует отметить, что w является четной функцией внешнего поля и поэтому четной функцией от e. Этот вывод зарядовой симметрии следует из соотношения

$$\operatorname{tr} \gamma_\mu G_+ (x, x) = \operatorname{tr} \gamma_\mu^{\mathrm{tr}} G_+^{\mathrm{tr}} (x, x) = -\operatorname{tr} \gamma_\mu\, {}_c G_+ (x, x), \quad (4.17)$$

показывающего, что

$$\langle j_\mu (x) \rangle]_0 = \frac{ie}{2} \operatorname{tr} \gamma_\mu (G_+ (x, x) - {}_c G_+ (x, x)) \quad (4.18)$$

является нечетной функцией внешнего поля. Отсюда w является четной функцией. Заметим также, что w является калибровочно-инвариантной и лоренц-инвариантной величиной.

Бесконечные определители. Чтобы получить явные формальные выражения для w, введем обозначение, в котором спинорные индексы и пространственно-временные координаты рассматриваются в качестве матричных индексов. Дифференциальные уравнения для функции Грина можно тогда переписать в виде

$$[\gamma (p - eA) + m] G_+ = G_+ [\gamma (p - eA) + m] = 1, \quad (4.19)$$

и дифференциальное выражение для w примет вид

$$\delta w = \operatorname{Tr} (ie\gamma\, \delta A\, G_+) = \operatorname{Tr} (G_+ ie\gamma\, \delta A), \quad (4.20)$$

где Tr означает полное диагональное суммирование по непрерывным координатам и дискретным спинорным индексам.

Введем функцию Грина для случая нулевого поля. Она подчиняется уравнениям

$$(\gamma p + m) G_+^0 = G_+^0 (\gamma p + m) = 1. \quad (4.21)$$

Если мы умножим два уравнения (4.19) на G_+^0 слева и справа соответственно, то получим интегральные уравнения

$$(1 - G_+^0 e\gamma A) G_+ = G_+ (1 - e\gamma A G_+^0) = G_+^0, \quad (4.22)$$

которые имеют символическое решение

$$G_+ = (1 - G_+^0 e\gamma A)^{-1} G_+^0 = G_+^0 (1 - e\gamma A G_+^0)^{-1}. \quad (4.23)$$

Поэтому

$$i\,\delta w = \operatorname{Tr}\left[(1 - e\gamma A G_+^0)^{-1}\,\delta(-e\gamma A G_+^0)\right] =$$
$$= \operatorname{Tr}\left[(1 - G_+^0 e\gamma A)^{-1}\,\delta(-G_+^0 e\gamma A)\right]. \qquad (4.24)$$

Таким образом, приходим к дифференциальному выражению

$$\operatorname{Tr} X^{-1}\,\delta X = \delta(\ln\det X), \qquad (4.25)$$

которое вместе с начальным условием $\det 1 = 1$ полностью определяет детерминант[1] матрицы или оператора. Следовательно,

$$e^{iw} = \det(1 - e\gamma A G_+^0) = \det(1 - G_+^0 e\gamma A). \qquad (4.26)$$

Равенство этих двух форм выражает свойство определителя

$$\det(1 - G_+^0 e\gamma A) = \det\left[G_+^0 (1 - e\gamma A G_+^0)(G_+^0)^{-1}\right] =$$
$$= \det(1 - e\gamma A G_+^0). \qquad (4.27)$$

Мы показали, что w является четной функцией от e. Поэтому должны иметь

$$e^{iw} = \det(1 + e\gamma A G_+^0), \qquad (4.28)$$

что можно также непосредственно получить из свойства определителей относительно транспозиции. Из правила перемножения определителей следует формула

$$e^{2iw} = \det(1 - e^2\gamma A G_+^0 \gamma A G_+^0) \qquad (4.29)$$

с явной четной зависимостью от e. Эту формулу можно было бы получить, если построить w при помощи выражения (4.18). Соотношение между значениями e^{iw} для двух различных полей можно также получить перемножением определителей. Заметим сначала, что соотношение (4.26) можно записать в виде

$$e^{iw} = \det\left[(G_+)^{-1} G_+^0\right]. \qquad (4.30)$$

Поэтому

$$\frac{\exp(iw^{(1)})}{\exp(iw^{(2)})} = \det\left[(G_+^{(1)})^{-1} G_+^0\right] \det\left[(G_+^0)^{-1} G_+^{(2)}\right] =$$
$$= \det\left[(G_+^{(1)})^{-1} G_+^{(2)}\right] = \det\left[1 - e\gamma(A^{(1)} - A^{(2)})\,G_+^{(2)}\right]. \qquad (4.31)$$

---

[1] Эквивалентность этого определения с обычным показана в приложении А.

Матрицы, которые входят в эти определители, имеют вид $1+\lambda K$. Бесконечно малое изменение параметра λ, согласно выражению (4.25), дает

$$\delta \ln \det(1+\lambda K) = \mathrm{Tr}\,(1+\lambda K)^{-1}\,\delta\lambda K. \tag{4.32}$$

Если мы определим логарифм от матрицы $1+\lambda K$ равенством

$$\ln(1+\lambda K) = \int_0^{\lambda} (1+\lambda' K)^{-1}\, d\lambda' K, \tag{4.33}$$

то найдем, что

$$\det(1+\lambda K) = \exp[\mathrm{Tr}\ln(1+\lambda K)]. \tag{4.34}$$

При известных условиях матрицу $\ln(1+\lambda K)$ можно разложить по степеням λ, причем

$$\mathrm{Tr}\ln(1+\lambda K) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{\lambda^n}{n} K_n, \tag{4.35}$$

где

$$K_n = \mathrm{Tr}\, K^n. \tag{4.36}$$

Если мы разложим затем экспоненту в выражении (4.34), то найдем

$$\det(1+\lambda K) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n d_n \tag{4.37}$$

с

$$d_n = \sum_k \frac{(K_1)^{k_1}}{k_1!}\,\frac{\left(-\frac{1}{2}K_2\right)^{k_2}}{k_2!}\,\frac{\left(\frac{1}{3}K_3\right)^{k_3}}{k_3!}\ \ldots, \tag{4.38}$$

причем суммирование распространяется на все такие неотрицательные целые числа $k_1, k_2, \ldots$, что

$$n = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots \tag{4.39}$$

Непосредственное разложение[1] определителя выражается при помощи коэффициентов

$$d_n = \frac{1}{n!}\int (dx_1)\ \ldots\ (dx_n)\, \det_{(n)} K(x_i,\ x_j), \tag{4.40}$$

---

[1] См., например, в книге [2] раздел 11.2. Вывод с помощью операторных методов будет дан в приложении Б.

где подразумевается суммирование по спинорным индексам. Тождественность выражений (4.38) и (4.40) можно установить, заметив, что каждый из $n!$ членов в разложении $\det_{(n)} K(x_i, x_j)$ состоит из одного или более циклов переменных. Так, для $n=6$ одним из членов будет

$$-[K(x_1, x_1)][K(x_2, x_3)K(x_3, x_2)]\times \times [K(x_4, x_5)K(x_5, x_6)K(x_6, x_4)].$$

Проведя интегрирования, получим произведение трех следов

$$-K_1K_2K_3.$$

В общем случае найдем k_1 одиночных циклов, k_2 двойных циклов и т. д., причем эти целые числа связаны с n соотношением (4.39). Число членов, которые имеют величину $K_1^{k_1}K_2^{k_2}\ldots$, равно

$$\frac{n!}{k_1!\,2^{k_2}k_2!\,3^{k_3}k_3!\ldots}, \tag{4.41}$$

где степени чисел 2, 3, ... выражают циклическую симметрию следов. Двойной цикл содержит нечетную перестановку, и в общем случае знаковый множитель равен

$$(-1)^{k_2+k_4+\cdots}. \tag{4.42}$$

Выражением, получающимся для формулы (4.40), будет как раз (4.38).

Величина

$$\det{}'(1+\lambda K)=e^{-\operatorname{Tr}\lambda K}\det(1+\lambda K), \tag{4.43}$$

очевидно, получается из $\det(1+\lambda K)$, если положить $K_1=0$. Следовательно, в разложении в степенной ряд

$$\det{}'(1+\lambda K)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n d_n' \tag{4.44}$$

коэффициенты

$$d_n'=\frac{1}{n!}\int(dx_1)\ldots(dx_n)\det{}'_{(n)}K(x_i, x_j) \tag{4.45}$$

содержат определители, получающиеся из определителей для коэффициентов d_n, если опустить в них все одинарные циклы. Это эквивалентно вычеркиванию диагональных элементов n-мерной матрицы. Аналогично, величину

$$\det''(1+\lambda K) = \exp\left[-\operatorname{Tr}\lambda K + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\lambda^2 K^2\right]\det(1+\lambda K) \quad (4.46)$$

можно разложить в степенной ряд при помощи определителей, в которых опущены все одинарные и двойные циклы. Однако этот процесс нельзя представить простым выбрасыванием элементов матрицы.

Модифицированный определитель $\det'(1+\lambda K)$ удовлетворяет фундаментальному неравенству

$$|\det'(1+\lambda K)|^2 \leqslant \exp[\operatorname{Tr}\lambda K(\lambda K)^{\dagger}]. \quad (4.47)$$

Чтобы доказать его, заметим вначале, что

$$\begin{aligned}|\det'(1+\lambda K)|^2 &= \exp[-\operatorname{Tr}\lambda K]\det(1+\lambda K)\times\\ &\times\exp[-\operatorname{Tr}(\lambda K)^{\dagger}]\det(1+\lambda K)^{\dagger} =\\ &= \exp[\operatorname{Tr}\lambda K(\lambda K)^{\dagger}]\det'[(1+\lambda K)(1+\lambda K)^{\dagger}]. \quad (4.48)\end{aligned}$$

Если $H = 1 + A$ представляет неотрицательную эрмитову матрицу, то мы имеем

$$\det' H = \exp[\operatorname{Tr}(\ln(1+A) - A)] \leqslant 1, \quad (4.49)$$

так как для каждого собственного значения $1 + A' \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\ln(1+A') - A' \leqslant 0. \quad (4.50)$$

Следовательно,

$$\det'[(1+\lambda K)(1+\lambda K)^{\dagger}] \leqslant 1; \quad (4.51)$$

этим доказывается неравенство (4.47)[1].

Исходя из этого неравенства заключаем, что $\det'(1+\lambda K)$ не имеет сингулярностей на всей конечной части плоскости λ, если только

$$\operatorname{Tr} KK^{\dagger} < \infty. \quad (4.52)$$

Модифицированный определитель является тогда целой функцией от λ, и можно утверждать, что ряд Тейлора (4.44)

[1] Можно также доказать неравенство (4.47) при помощи неравенства Адамара, см. книгу [3], стр. 31.

сходится для всех λ. То же утверждение применимо и к $\det''(1+\lambda K)$, поскольку

$$|\operatorname{Tr} K^2| \leqslant \operatorname{Tr} KK^{\dagger}. \tag{4.53}$$

Зависимость определителя $\det'(1+\lambda K)$ от элементов матрицы K описывается соотношением

$$\begin{aligned}\delta_K \det'(1\lambda+K) &= \det'(1+\lambda K)\operatorname{Tr}[((1+\lambda K)^{-1}-1)\lambda\delta K] = \\ &= -\det'(1+\lambda K)\operatorname{Tr}[(1+\lambda K)^{-1}\lambda K\lambda\delta K],\end{aligned} \tag{4.54}$$

которое указывает, что величины

$$\begin{aligned}\det'(1+\lambda K)(x|(1+\lambda K)^{-1}\lambda K|x') &= \\ &= -\left(\frac{\delta}{\delta\lambda K(x', x)}\right)\det'(1+\lambda K)\end{aligned} \tag{4.55}$$

являются целыми функциями от λ. Далее,

$$\frac{\delta}{\delta K(x', x)} d_2' = -K(x, x') \tag{4.56}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta K(x', x)} d_n' &= \frac{1}{n!}\int (dx_1)\ldots(dx_n)\sum_{i\neq j}\delta(x'-x_i)\times \\ &\times \delta(x-x_j)\frac{\partial}{\partial K(x_i, x_j)}\det'_{(n)} K(x_i, x_j) = \frac{1}{(n-2)!}\int (dx_3)\ldots \\ &\ldots(dx_n)\left[\frac{\partial}{\partial K(x_2, x_1)}\det'_{(n)} K(x_i, x_j)\right]_{x_1=x,\ x_2=x'},\end{aligned} \tag{4.57}$$

так что

$$\begin{aligned}\det'(1+\lambda K)(x|(1+\lambda K)^{-1}\lambda K|x') &= \lambda K(x, x') + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n+1}\frac{1}{n!}\int (dx_1)\ldots(dx_n)\det'_{(n+1)}\begin{bmatrix} K(x, x'), & K(x, x_j) \\ K(x_i, x'), & K(x_i, x_j)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.58}$$

является степенным рядом с бесконечным радиусом сходимости при условии выполнения требования, наложенного на K. Мы использовали обозначение в виде определителя, соответствующее разбиению $(n+1)$-мерного минора относительно элементов первой строки и первого столбца. Отбрасывание одинарных циклов здесь равносильно выкидыванию всех диагональных элементов, кроме первого, $K(x, x')$.

Аналогичным образом имеем

$$\delta_K \det''(1+\lambda K) = \det''(1+\lambda K)\operatorname{Tr}[((1+\lambda K)^{-1} - 1 + \lambda K)\lambda\delta K] =$$
$$= \det''(1+\lambda K)\operatorname{Tr}[(1+\lambda K)^{-1}\lambda^2 K^2 \lambda\delta K], \quad (4.59)$$

так что

$$\det''(1+\lambda K)(x|(1+\lambda K)^{-1}\lambda^2 K^2|x') = \frac{\delta}{\delta\lambda K(x', x)}\det''(1+\lambda K) \quad (4.60)$$

является целой функцией от λ, которая представляется в виде сходящегося степенного ряда

$$\det''(1+\lambda K)(x|(1+\lambda K)^{-1}\lambda^2 K^2|x') = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int(dx_1)\ldots$$
$$\ldots(dx_n)\det''_{(n+1)}\begin{bmatrix} 0 & K(x, x_j) \\ K(x_i, x'), & K(x_i, x_j)\end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Отсутствие функции $K(x, x')$ в определителе в соотношении (4.61) связано с дифференцированием члена с двойным циклом $\frac{1}{2}\operatorname{Tr} K^2$.

Чтобы использовать эти результаты, положим сначала

$$\lambda K = -e^2\gamma A G_+^0 \gamma A G_+^0. \quad (4.62)$$

Позже мы покажем, что условие (4.52), налагаемое на K, справедливо для определенного класса электромагнитных полей. При этом

$$\det'(1 - e^2\gamma A G_+^0 \gamma A G_+^0) = \exp[e^2 \operatorname{Tr}\gamma A G_+^0 \gamma A G_+^0]\, e^{2iw} \quad (4.63)$$

является целой функцией от e или от параметра, характеризующего напряженность поля. Но, согласно соотношениям (4.26) и (4.46), мы также имеем

$$\det''(1 - e\gamma A G_+^0) = \exp\left[\frac{1}{2}e^2 \operatorname{Tr}\gamma A G_+^0 \gamma A G_+^0\right] e^{iw}, \quad (4.64)$$

где использован тот факт, что

$$\operatorname{Tr}\gamma A G_+^0 = -\operatorname{Tr}\gamma A_c G_+^0 = 0, \quad (4.65)$$

так как $G^0_+ = {}_cG^0_+$. Следовательно, мы имеем соотношение

$$\det{}'(1 - e^2\gamma AG^0_+\gamma AG^0_+) = [\det{}''(1 - e\gamma AG^0_+)]^2, \quad (4.66)$$

которое показывает, что разложение $\det''(1 - e\gamma AG^0_+)$ в степенной ряд не может иметь конечного радиуса сходимости, так как это противоречило бы свойству левой части соотношения (4.66), являющейся целой функцией. Следовательно, выражение (4.64) является целой функцией от e, которая представляется сходящимся степенным рядом

$$\exp(-ie^2w_1)\, e^{iw} = \det{}''(1 - e\gamma AG^0_+) =$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{2n}}{(2n)!} \int (dx_1)\ldots(dx_{2n}) \times$$

$$\times \operatorname{tr}\left\{ \prod_{i=1}^{2n} (\gamma_i A(x_i)) \det{}''_{(2n)} G^0_+(x_i, x_j) \right\}. \quad (4.67)$$

Мы использовали известное свойство этой функции — ее четность — и написали

$$w_1 = \frac{i}{2} \operatorname{Tr} \gamma AG^0_+\gamma AG^0_+ \quad (4.68)$$

в качестве коэффициента при e^2 в разложении w. Между прочим, так как iw является логарифмом целой функции, то ряд Тейлора этой величины будет в общем случае иметь конечный радиус сходимости, равный величине наименьшего корня, который имеет целая функция (4.67).

Зная, что определитель $\det''(1 - e\gamma AG^0_+)$ является целой функцией, обратимся к выражению (4.61), которое дает сведения об элементах матрицы

$$(1 - e\gamma AG^0_+)^{-1} - 1 - e\gamma AG^0_+ =$$

$$= e\gamma A\,[G^0_+(1 - e\gamma AG^0_+)^{-1} - G^0_+] = e\gamma A\,(G_+ - G^0_+). \quad (4.69)$$

Сокращая обе части соотношения (4.69) на $e\gamma A(x)$, находим представление целой функции в виде степенного ряда

$$\det{}''(1-e\gamma AG_+^0)\,[G_+(x,\ x')-G_+^0(x,\ x')] =$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!}\int(dx_1)\ldots(dx_n)\times$$
$$\times\operatorname{tr}\left\{\prod_{i=1}^{n}(\gamma_i A(x_i))\det{}''_{(n+1)}\begin{bmatrix}0, & G_+^0(x,\ x_j)\\ G_+^0(x_i,\ x'), & G_+^0(x_i,\ x_j)\end{bmatrix}\right\}. \qquad (4.70)$$

Функция Грина $G_+(x,\ x')$ получается, таким образом, как отношение двух целых функций[1]), каждая из которых явно выражается в виде бесконечного ряда. Можно также представить выражение (4.70) при помощи матрицы I, определяемой равенством

$$G_+=G_+^0+G_+^0 I G_+^0, \qquad (4.71)$$

или

$$G_+(x,\ x')=G_+^0(x,\ x')+$$
$$+\int(dx'')(dx''')\,G_+^0(x,\ x'')\,I(x'',\ x''')\,G_+^0(x''',\ x'). \qquad (4.72)$$

Таким образом,

$$\det{}''(1-e\gamma AG_+^0)\,I(x,x')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!}\int(dx_1)\ldots(dx_n)\times$$
$$\times\operatorname{tr}\left\{\prod_{i=1}^{n}(\gamma_i A(x_i))\det{}''_{n+1)}\begin{bmatrix}0, & \delta(x-x_j)\\ \delta(x_i-x'), & G_+^0(x_i,\ x_j)\end{bmatrix}\right\}, \qquad (4.73)$$

где $\delta(x-x_j)$ и $\delta(x_i-x')$ также включают δ-символы для опущенных здесь спинорных индексов.

При обсуждении условия (4.52), в котором λK дается выражением (4.62), следует отметить, что значение $\det{}'(1+\lambda K)$ не изменяется при замене K на $f^{-1}Kf$, причем f является по существу произвольной функцией от x, относительно

---

[1]) Этот результат можно отождествить с решением интегральных уравнений (4.22) методами Фредгольма, Гильберта и Пуанкаре. В данном случае мы развили необходимую часть этой теории непосредственно из дифференциального выражения (4.25). Теория Фредгольма применялась к теории рассеяния разными авторами [4, 5].

которой мы требуем только, чтобы пространственно-временная локализация вектора $A_\mu(x)$ была совместима с локализацией функции $f(x)^{-1}A_\mu(x)$. Так, можно сказать, что $f(x)=(A(x))^{1/2}$, где $A(x)$ определяет величину вектора потенциала для внешнего поля. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\lambda K(\lambda K)^\dagger = e^4\int(dx)(dx')(dx_1)(dx_2)\times\\ \times\operatorname{tr}[f(x)^{-1}\gamma A(x)G^0_+(x,\ x_1)\gamma A(x_1)G^0_+(x_1,\ x')f(x')^2\times\\ \times\gamma_0 G^0_-(x',\ x_2)\gamma A(x_2)G^0_-(x_2,\ x)\gamma A(x)f(x)^{-1}\gamma_0],\end{aligned}\tag{4.74}$$

и все интегрирования относятся к внутренней части области, занятой полем. Условия конечности этого интеграла, таким образом, зависят от возможного характера сингулярности поля в окрестности некоторой точки (или точек). Предположим, что

$$A(x)\sim[(x-x_0)^2]^{-\frac{1}{2}(1-\beta)}=|x-x_0|^{-(1-\beta)}\tag{4.75}$$

в окрестности точки x_0. Сходимость интеграла зависит от поведения функции $G^0_\pm(x,\ x')$ при $x\sim x'$. Так как функция Грина удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка с четырехмерной δ-функцией в качестве неоднородности, то при $x\sim x'$ мы имеем

$$G^0_\pm(x,\ x')\sim|x-x'|^{-3}.\tag{4.76}$$

Шестнадцатикратный интеграл в выражении (4.74) будет сходиться около точки x_0, несмотря на сингулярности четырех потенциалов A и четырех функций G^0, если только $16>4(1-\beta)+12$, или

$$\beta>0.\tag{4.77}$$

Величина $F(x)$, мера напряженности поля, при $x\sim x_0$ выражается в виде

$$F(x)\sim|x-x_0|^{-(2-\beta)}.\tag{4.78}$$

В силу неравенства (4.77) эта величина не может быть сингулярнее $|x-x_0|^{-2}$, откуда следует интегрируемость $F(x)^2$. Следовательно, наше рассмотрение применимо к таким электромагнитным полям, для которых пространственно-временной интеграл от плотности энергии конечен[1]).

Наконец, следует отметить, что

$$w_1 = \frac{i}{2}\int (dx)(dx')\,\mathrm{tr}\,[\gamma A(x)\,G^0_+(x,\ x')\,\gamma A(x')\,\times$$
$$\times\, G^0_+(x',\ x)] = \infty \qquad (4.79)$$

независимо от поля. Это происходит вследствие совпадения сингулярностей функций $G^0_+(x,\ x')$ и $G^0_+(x',\ x)$ при $x = x'$. Так как w_1 должно быть калибровочно-инвариантным, векторы потенциала всегда встречаются продифференцированными, и сингулярность каждой функции Грина эффективно снижается до $|x - x'|^{-2}$. Следовательно, интеграл (4.79) логарифмически расходится при $x - x' = 0$. Явное выражение, полученное ранее в работе [6][2]), можно без труда преобразовать к виду

$$w_1 = -\int (dx)(dx')\,\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}(x)\,w_1(x - x')\,F_{\mu\nu}(x'), \qquad (4.80)$$

где

$$w_1(x - x') = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{2m}^{\infty} \varkappa\, d\varkappa \left[\left(1 - \left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{1/2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{3/2}\right] \mathfrak{G}_+(x - x',\ \varkappa), \qquad (4.81)$$

а

$$\mathfrak{G}_+(x - x',\ \varkappa) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int (dk)\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 + \varkappa^2 - i\varepsilon}, \qquad \varepsilon \to +0 \qquad (4.82)$$

является функцией Грина для расходящихся волн; она связана с дифференциальным уравнением

$$(-\partial_\mu^2 + \varkappa^2)\,\mathfrak{G}_+(x - x',\ \varkappa) = \delta(x - x'). \qquad (4.83)$$

Величина $\varkappa$, которая появляется в последнем уравнении в качестве параметра массы, изменяется от $2m$ до бесконечности, давая тем самым логарифмическую расходимость, которую мы уже установили.

---

1) Этот критерий был также установлен в работе [5].

2) В выражениях (6.26) и (6.29) работы [6] вместо напечатанных $4\pi^2$ следует читать $(4\pi)^2$.

Расходящаяся часть отделяется, если написать

$$\mathfrak{G}_+(x-x',\ \varkappa)=\varkappa^{-2}\delta(x-x')+\varkappa^{-2}\partial_\mu^2\mathfrak{G}_+(x-x',\ \varkappa), \tag{4.84}$$

что даст

$$w_1(x-x')=C\delta(x-x')+\partial_\mu^2\omega(x-x'), \tag{4.85}$$

где

$$C=\frac{1}{6\pi^2}\left(\ln\frac{\varkappa}{m}-\frac{5}{6}\right)\Bigg]_{\varkappa\to\infty} \tag{4.86}$$

и

$$\omega(x-x')=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{2m}^{\infty}\frac{d\varkappa}{\varkappa}\left[\left(1-\left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{1/2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{3/2}\right]\mathfrak{G}_+(x-x',\ \varkappa). \tag{4.87}$$

Таким образом,

$$w_1=-C\int(dx)\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(x)+$$

$$+\frac{1}{2}\int(dx)(dx')\partial_\nu F_{\mu\nu}(x)\,\omega(x-x')\,\partial'_\lambda F_{\mu\lambda}(x'), \tag{4.88}$$

и второй член конечен для того класса полей, к которому относятся наши результаты. Это очевидно, если заметить, что

$$\mathfrak{G}_+(x-x',\ \varkappa)\sim|x-x'|^{-2}f(\varkappa|x-x'|)$$

при $x\sim x'$. Если производные от полей имеют сингулярность вида $|x-x_0|^{-(3-\beta)}$ при $\beta>0$, то интеграл

$$\int(dx)(dx')\partial_\nu F_{\mu\nu}(x)\,\mathfrak{G}_+(x-x',\ \varkappa)\,\partial_\lambda F_{\mu\lambda}(x')$$

сходится и ведет себя как $\varkappa^{-2\beta}$ при $\varkappa\to\infty$. Окончательное интегрирование поэтому является сходящимся.

Хотя w расходится, однако величина

$$|e^{iw}|^2=e^{-2\,\mathrm{Im}\,w} \tag{4.89}$$

конечна, так как расходящийся параметр C действителен. Выведем полезное выражение для этой величины при помощи определителя. Матрица I, введенная в соотношение (4.71), определяется также равенствами

$$e\gamma A G_{+} = I G_{+}^{0}, \quad G_{+} e\gamma A = G_{+}^{0} I, \tag{4.90}$$

или

$$I = e\gamma A \left(1 - G_{+}^{0} e\gamma A\right)^{-1} = \left(1 - e\gamma A G_{+}^{0}\right)^{-1} e\gamma A. \tag{4.91}$$

Сопряженная матрица

$$\bar{I} = \gamma_0 I^{\dagger} \gamma_0 \tag{4.92}$$

определяется теми же уравнениями, но с заменой G_{+}^{0}, G_{+} соответственно на G_{-}^{0}, G_{-}. Если решить уравнение (4.91) и аналогичные сопряженные уравнения относительно $e\gamma A$, то мы найдем

$$\begin{aligned} e\gamma A &= \left(1 + I G_{+}^{0}\right)^{-1} I = I \left(1 + G_{+}^{0} I\right)^{-1} = \\ &= \bar{I} \left(1 + G_{-}^{0} \bar{I}\right)^{-1} = \left(1 + \bar{I} G_{-}^{0}\right)^{-1} \bar{I}, \end{aligned} \tag{4.93}$$

что даст важные уравнения

$$\begin{aligned} I - \bar{I} &= I \left(G_{+}^{0} - G_{-}^{0}\right) \bar{I}, \\ I - \bar{I} &= \bar{I} \left(G_{+}^{0} - G_{-}^{0}\right) I. \end{aligned} \tag{4.94}$$

Запаздывающая и опережающая функции Грина в отсутствие поля даются выражениями

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ret}}^{0}(x, x') &= G_{+}^{0}(x, x') + iS^{(-)}(x, x') = \\ &= G_{-}^{0}(x, x') + iS^{(+)}(x, x') = \\ &= \begin{cases} i\left[S^{(+)}(x, x') + S^{(-)}(x, x')\right], & x_0 > x_0', \\ 0, & x_0 \leqslant x_0', \end{cases} \end{aligned} \tag{4.95}$$

и

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{adv}}^{0}(x, x') &= G_{+}^{0}(x, x') - iS^{(+)}(x, x') = \\ &= G_{-}^{0}(x, x') - iS^{(-)}(x, x') = \\ &= \begin{cases} 0, & x_0 \geqslant x_0', \\ -i\left[S^{(+)}(x, x') + S^{(-)}(x, x')\right], & x_0 < x_0', \end{cases} \end{aligned} \tag{4.96}$$

где мы записали

$$S^{(+)}(x, x') = \sum_{+, p} \psi_{\lambda p}(x) \overline{\psi}_{\lambda p}(x'),$$
$$S^{(-)}(x, x') = \sum_{-, p} \psi_{\lambda p}(x) \overline{\psi}_{\lambda p}(x'). \qquad (4.97)$$

Теперь

$$1 - G^0_{\text{ret}} e\gamma A = (1 - iS^{(-)} I)(1 - G^0_+ e\gamma A) =$$
$$= (1 + iS^{(+)} \overline{I})(1 - G^0_- e\gamma A) \qquad (4.98)$$

и

$$1 - G^0_{\text{adv}} e\gamma A = (1 + iS^{(+)} I)(1 - G^0_+ e\gamma A) =$$
$$= (1 + iS^{(-)} \overline{I})(1 - G^0_- e\gamma A), \qquad (4.99)$$

откуда получаем

$$\det(1 - G^0_{\text{ret}} e\gamma A) = \det(1 - iS^{(-)} I) \det(1 - G^0_+ e\gamma A) =$$
$$= \det(1 - iS^{(+)} \overline{I}) \det(1 - G^0_- e\gamma A) \qquad (4.100)$$

и

$$\det(1 - G^0_{\text{adv}} e\gamma A) = \det(1 + iS^{(+)} I) \det(1 - G^0_+ e\gamma A) =$$
$$= \det(1 + iS^{(-)} \overline{I}) \det(1 - G^0_- e\gamma A). \qquad (4.101)$$

Но

$$\det(1 - G^0_{\text{ret}} e\gamma A) = \det(1 - G^0_{\text{adv}} e\gamma A) = 1, \qquad (4.102)$$

так как все циклы исчезают, когда матрица $K(x, x')$ пропорциональна $G^0_{\text{ret}}(x, x')$ или $G^0_{\text{adv}}(x, x')$. В частности, одинарные циклы не появляются в силу определений этих функций Грина при $(x_0 = x'_0)$[1]. Следовательно,

$$e^{iw} = \det(1 - G^0_+ e\gamma A) = [\det(1 - iS^{(-)} I)]^{-1} =$$
$$= [\det(1 + iS^{(+)} I)]^{-1} \qquad (4.103$$

[1] Произвол в определениях при $x_0 = x'_0$ не оказывает влияния на конечный результат. Пусть, например, $G^0_{\text{ret}}(x, x')$ более об-

и

$$e^{-iw^*} = \det(1 - G_-^0 e\gamma A) = [\det(1 + iS^{(-)}\bar{I})]^{-1} =$$
$$= [\det(1 - iS^{(+)}\bar{I})]^{-1}. \quad (4.104)$$

Перемножая соответствующие выражения в формулах (4.103) и (4.104), приходим к определителям матриц

$$(1 - iS^{(-)}I)(1 + iS^{(-)}\bar{I}) = 1 - iS^{(-)}(I - \bar{I}) + S^{(-)}IS^{(-)}\bar{I} =$$
$$= 1 + S^{(-)}IS^{(+)}\bar{I} \quad (4.105)$$

и

$$(1 + iS^{(+)}I)(1 - iS^{(+)}\bar{I}) = 1 + S^{(+)}IS^{(-)}\bar{I}, \quad (4.106)$$

где мы использовали равенство (4.94), записанное в виде

$$I - \bar{I} = iI(S^{(+)} - S^{(-)})\bar{I} = i\bar{I}(S^{(+)} - S^{(-)})I, \quad (4.107)$$

в силу соотношения

$$G_+^0 - G_-^0 = i(S^{(+)} - S^{(-)}). \quad (4.108)$$

Тогда

$$|e^{iw}|^2 = [\det(1 + S^{(-)}IS^{(+)}\bar{I})]^{-1} =$$
$$= [\det(1 + S^{(+)}IS^{(-)}\bar{I})]^{-1}. \quad (4.109)$$

Сюда вошли только элементы матриц I и $\bar{I}$, связывающие положительно-частотные и отрицательно-частотные состоя-

---

щим образом определяется при $x_0 - x_0' = 0$ как произведение численного множителя μ $(0 \leqslant \mu \leqslant 1)$ на значение при $x_0 - x_0' = +0$, равное

$$i\sum_{\lambda p} \psi_{\lambda p}(x)\bar{\psi}_{\lambda p}(x')\,[=i\gamma_0\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')].$$

Тогда

$$\det(1 - G_{\text{ret}}^0 e\gamma A) = \exp\left[-\int (dx)\,\mathrm{tr}\, G_{\text{ret}}^0(x, x)\, e\gamma A(x)\right] =$$
$$= \exp\left[-i\mu\sum_{\lambda p}\int (dx)\,\bar{\psi}_{\lambda p}(x)\, e\gamma A(x)\,\psi_{\lambda p}(x)\right],$$

что по абсолютной величине равно единице. Это как раз то свойство, которое используется при выводе соотношения (4.109).

ния. Указывая явно эти субматрицы, мы имеем

$$|e^{iw}|^2 = [\det(1+I_{-+}\overline{I}_{+-})]^{-1} = [\det(1+I_{+-}\overline{I}_{-+})]^{-1} \tag{4.110}$$

и

$$\overline{I}_{+-} = I^*_{-+}, \quad \overline{I}_{-+} = I^*_{+-}. \tag{4.111}$$

Поэтому $I_{-+}\overline{I}_{+-}$ и $I_{+-}\overline{I}_{-+}$ являются неотрицательными эрмитовыми матрицами, обладающими неотрицательными действительными собственными значениями, причем

$$|e^{iw}|^2 \leqslant 1. \tag{4.112}$$

Матрица рассеяния. Поведение поля Дирака, находящегося под действием внешнего электромагнитного поля, описывается функцией преобразования (4.10), которую мы используем теперь в качестве производящей функции для функции преобразования $(n\sigma_1 | n'\sigma_2)$ в представлении чисел заполнения, так как

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 | \chi^{(+)'}\sigma_2) = \sum_{n,\, n'} (\chi^{(-)'} | n)(n\sigma_1 | n'\sigma_2)(n' | \chi^{(+)'}) . \tag{4.113}$$

Выразим эту функцию преобразования при помощи матрицы унитарного оператора S, т. е.

$$(n\sigma_1 | n'\sigma_2) = \exp(iP(n)x_1)(n | S | n')\exp(-iP(n')x_2), \tag{4.114}$$

отнесенной к стандартной поверхности. Можно рассматривать матрицу S как матрицу, описывающую эквивалентное возмущение, локализованное на стандартной поверхности.

Вводя матрицу I, согласно соотношению (4.72), получаем

$$\begin{aligned}\oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \overline{\psi}'(x)\gamma_\mu G_+(x, x')\gamma_\nu\psi'(x') =\\ = \oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \overline{\psi}'(x)\gamma_\mu G^0_+(x, x')\gamma_\nu\psi'(x') +\\ + \int (dx)(dx')\overline{\psi}'(x) I(x, x')\psi'(x'),\end{aligned} \tag{4.115}$$

где для внутренних точек мы, как и в предыдущей статье, записали

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= i\oint d\sigma'_\mu G^0_+(x, x')\gamma_\mu\psi'(x'),\\ \overline{\psi}'(x) &= -i\oint d\sigma'_\mu \overline{\psi}'(x')\gamma_\mu G^0_+(x', x);\end{aligned} \tag{4.116}$$

следует отметить, что функции Грина в формулах (4.116) относятся к случаю отсутствия внешнего поля. Таким образом,

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2) = (\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2)]_0 \, e^{iw} \times$$
$$\times \exp\left[i \int (dx)(dx')\overline{\psi}'(x) I(x, x') \psi'(x')\right]; \quad (4.117)$$

в этом разделе символ $]_0$ означает отсутствие внешнего электромагнитного поля. Следует напомнить, что

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2)]_0 = \exp\left[\sum_{\lambda p} \chi^{(-)'}_{\lambda p} e^{ipx_1} e^{-ipx_2} \chi^{(+)'}_{\lambda p}\right] \quad (4.118)$$

и что

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \sum_{+} \psi_{\lambda p}(x)\, e^{-ipx_2} \chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{-} \psi_{\lambda p}(x)\, e^{ipx_1} \chi^{(-)'}_{\lambda p}, \\ \overline{\psi}'(x) &= \sum_{-} \overline{\psi}_{\lambda p}(x)\, e^{-ipx_2} \chi^{(+)'}_{\lambda p} + \sum_{+} \overline{\psi}_{\lambda p}(x)\, e^{ipx_1} \chi^{(-)'}_{\lambda p}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Включая фазовые множители e^{ipx_1}, e^{-ipx_2} в собственные значения, приходим к производящей функции для матрицы рассеяния $(n \mid S \mid n')$:

$$\sum (\chi^{(-)'} \mid n)(n \mid S \mid n')(n' \mid \chi^{(+)'}) =$$
$$= e^{iw} \exp\Big[\sum_{++} \chi^{(-)'}_{\lambda p} (\delta_{\lambda p, \lambda' p'} + iI(\lambda p, \lambda' p'))\chi^{(+)'}_{\lambda' p'} +$$
$$+ \sum_{--} \chi^{(-)'}_{\lambda p} (\delta_{\lambda p, \lambda' p'} - iI(\lambda' p', \lambda p))\chi^{(+)'}_{\lambda' p'} +$$
$$+ \sum_{+-} \chi^{(-)'}_{\lambda p}\, iI(\lambda p, \lambda' p')\chi^{(-)'}_{\lambda' p'} +$$
$$+ \sum_{-+} \chi^{(+)'}_{\lambda p}\, iI(\lambda p, \lambda' p')\chi^{(+)'}_{\lambda' p'}\Big], \quad (4.120)$$

где

$$I(\lambda p, \lambda' p') = \int (dx)(dx') \overline{\psi}_{\lambda p}(x) I(x, x') \psi_{\lambda' p'}(x'). \quad (4.121)$$

Упрощенная производящая функция, описывающая переходы системы, о которой известно, что она первоначально находилась в вакуумном состоянии, получается приравниванием нулю собственных значений $\chi^{(+)'}$:

$$\sum_n (\chi^{(-)'} \mid n)(n \mid S \mid 0) =$$
$$= e^{iw} \exp\left[i \sum_{+-} \chi^{(-)'}_{\lambda p} I(\lambda p, \lambda' p') \chi^{(-)'}_{\lambda' p'}\right], \quad (4.122)$$

Поэтому

$$(0\,|\,S\,|\,0) = e^{iw} \tag{4.123}$$

и

$$(n_+n_-\,|\,S\,|\,0) = \delta_{n_+,\,n_-}\, e^{iw} i^{n^2} \det{}_{(n)} I(+,\ -); \tag{4.124}$$

здесь $n = n_+ = n_-$ — число порождаемых пар противоположно-заряженных частиц и n-мерный определитель строится из элементов $I(\lambda p,\ \lambda' p')$, где индекс строк λp пробегает в стандартном порядке все положительно-частотные состояния, занятые в конечном состоянии системы, а индекс столбцов аналогичным образом пробегает все отрицательно-частотные состояния. Множитель i^{n^2}, равный единице при четном n и равный i при нечетном n, происходит от комбинации i^n с $(-1)^{1/2\,[n\,(n-1)]}$, причем последний множитель возникает от приведения собственных значений к стандартному порядку. Определитель можно также записать в виде

$$\det{}_{(n)} I(+,\ -) = \frac{1}{(n!)^2}\int (dx_1)\,\ldots\,(dx_n)(dx_1')\ldots(dx_n') \times$$
$$\times(\det{}_{(n)}\overline{\psi}_+(x_i))\,(\det{}_{(n)} I(x_i,\ x_j'))(\det{}_{(n)}\psi_-(x_j')). \tag{4.125}$$

Вероятность того, что система останется в вакуумном состоянии, дается, таким образом, выражением

$$p(0,\ 0) = |(0\,|\,S\,|\,0)|^2 = |e^{iw}|^2, \tag{4.126}$$

тогда как вероятность рождения n пар частиц в определенных состояниях равна

$$p(n_+n_-,\ 0) = |e^{iw}|^2\,|\det{}_{(n)} I(+,\ -)|^2. \tag{4.127}$$

Поэтому полная вероятность образования n пар равна

$$p_{n,\,0} = \sum_{n_+ = n_- = n} p(n_+n_-,\ 0) =$$
$$= |e^{iw}|^2\,\frac{1}{(n!)^2}\sum_{+-}(\det{}_{(n)} I(+,\ -))(\det{}_{(n)}\bar{I}(-,\ +)), \tag{4.128}$$

где последнее суммирование распространено независимо по n положительно-частотным состояниям и по n отрицательно-частотным состояниям. Таким образом, множитель $1/(n!)^2$ устраняет повторный счет конечных состояний системы. Подставим (4.125) вместе с аналогичным выражением для

$\det_{(n)} \bar{I}$ $(-, +)$ в (4.128) и воспользуемся соотношениями между определителями типа

$$\frac{1}{n!} \sum (\det_{(n)} \psi_-(x_i)) (\det_{(n)} \bar{\psi}_-(x_j)) = \det_{(n)} S^{(-)}(x_i, x'_j) \quad (4.129)$$

и

$$\frac{1}{n!} \int (dx'_1) \ldots (dx'_n) (\det_{(n)} I(x_i, x_j)) (\det_{(n)} S^{(-)}(x'_j, x''_k)) = \\ = \det_{(n)} (x_i \mid IS^{(-)} \mid x''_k). \quad (4.130)$$

Это даст

$$p_{n,0} = |e^{iw}|^2 \frac{1}{n!} \int (dx_1) \ldots (dx_n) \det_{(n)} (x_i \mid S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I} \mid x_j). \quad (4.131)$$

Вероятность того, что система находится в каком-либо конечном состоянии, равна, таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{n,0} = |e^{iw}|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int (dx_1) \ldots (dx_n) \det_{(n)} (x_i | S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I} | x_j) = \\ = |e^{iw}|^2 \det (1 + S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I}) = 1 \quad (4.132)$$

в силу выражения (4.109) для величины, являющейся вероятностью перехода вакуум — вакуум.

Общий элемент матрицы S удобно представить при помощи классификации, введенной в предыдущей статье и использующей описание отрицательно-частотных состояний посредством обращения времени. Возьмем производящую функцию (4.113) для матрицы S и запишем

$$(\chi^{(-)'} \mid S \mid \chi^{(+)'}) = e^{iw} [\bar{\psi}' \mid \Sigma \mid \psi'], \quad (4.133)$$

так что

$$[\bar{\psi}' \mid \Sigma \mid \psi'] = \exp \left[i \oint d\sigma_\mu \oint d\sigma'_\nu \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu G_+(x, x') \gamma_\nu \psi'(x') \right], \quad (4.134)$$

причем подразумевается, что в правой части выражения (4.134) собственные значения относятся к стандартной поверхности. Выражение (4.134) служит производящей функцией для матрицы $\sum$ в представлении чисел заполнения в соответствии с соотношением

$$[\bar{\psi}' | \sum | \psi'] = \sum_{N, N'} [\bar{\psi}' | N] [N | \sum | N'] [N' | \psi']. \quad (4.135)$$

В силу соотношения

$$(\chi^{(-)'} | n) (n' | \chi^{(+)'}) =$$
$$= (-1)^{N_-} (-1)^{1/2 [(N_- - N'_-) (N_- + 1 - N'_-)]} [\bar{\psi}' | N] [N' | \psi'] \quad (4.136)$$

мы имеем следующую связь между матрицами S и $\sum$:

$$(n | S | n') = e^{iw} (-1)^{N_-} (-1)^{1/2 [(N_- - N'_-) (N_- + 1 - N'_-)]} [N | \sum | N']. \quad (4.137)$$

Числа заполнения $N = n_+$, n'_- связаны с состояниями, в которых волны распространяются из области, ограниченной поверхностями σ_1 и σ_2 (положительные частоты на поверхности σ_1, отрицательные — на поверхности σ_2), тогда как числа заполнения $N' = n'_+$, n_- относятся к состояниям, в которых волны распространяются внутрь области (положительные частоты на поверхности σ_2, отрицательные — на поверхности σ_1). Следовательно, $\sum$ связывает „начальное" состояние системы, описываемое падающими волнами, с „конечным" состоянием системы, характеризуемым расходящимися волнами. Направление развития совпадает с направлением времени для положительно-частотных состояний, но является обратным для отрицательно-частотных состояний. Мы говорим, что $\sum$ описывает развитие системы в собственном времени, не обосновывая этого термина здесь. Следует заметить, что число „частиц" сохраняется ($N = N'$), что очевидно из структуры производящей функции. Таким образом, $n_+ + n'_- = n'_+ + n_-$ или $n_+ - n_- = n'_+ - n'_-$; сохранение частиц в собственном времени эквивалентно сохранению заряда в обычном времени [7].

В отсутствие внешнего поля мы имеем $S = 1$, $\sum = \varepsilon$ и, согласно выражению (3.96),

$$[\bar{\psi}' | \varepsilon | \psi'] = \exp [\sum \bar{\psi}'_{\lambda p} \varepsilon (\lambda) \psi'_{\lambda p}] = \sum [\bar{\psi}' | N] (-1)^{N_-} [N | \psi'], \quad (4.138)$$

так что

$$[N|\varepsilon|N'] = \delta_{N,N'}(-1)^{N_-}. \qquad (4.139)$$

Это также следует из равенства (4.137). Если использовать соотношения (4.115) и (4.138), то производящая функция (4.134) примет вид

$$[\bar{\psi}'|\Sigma|\psi'] = \exp[\sum \bar{\psi}'_{\lambda p}\sigma(\lambda p, \lambda' p')\psi'_{\lambda' p'}], \qquad (4.140)$$

причем

$$\sigma(\lambda p, \lambda' p') = \varepsilon(\lambda)\delta_{\lambda p,\lambda' p'} + iI(\lambda p, \lambda' p'). \qquad (4.141)$$

Общий элемент матрицы Σ в представлении чисел заполнения получается, таким образом, в виде

$$[N|\Sigma|N'] = \delta_{N,N'}\det_{(N)}\sigma(\lambda p, \lambda' p'), \qquad (4.142)$$

где λp и $\lambda' p'$ пробегают в стандартном порядке по всем заполненным состояниям „конечного" и „начального" состояний системы соответственно.

Используем теперь связь между I и $\bar{I}$, согласно уравнению (4.107), для доказательства того, что Σ удовлетворяет соотношениям

$$\Sigma^{+}\varepsilon\Sigma = \Sigma\varepsilon\Sigma^{+} = \varepsilon \qquad (4.143)$$

Это неопределенно-унитарное свойство будет сначала установлено для матрицы $\sigma(\lambda p, \lambda' p')$, которая является субматрицей матрицы Σ для состояний системы с одной „частицей". Комбинируя соотношение (4.141) с равенством

$$\sigma^{+}(\lambda p, \lambda' p') = \varepsilon(\lambda)\delta_{\lambda p,\lambda' p'} - i\bar{I}(\lambda p, \lambda' p'), \qquad (4.144)$$

строим выражение

$$\sum_{\lambda'' p''}\sigma^{+}(\lambda p, \lambda'' p'')\varepsilon(\lambda'')\sigma(\lambda'' p'', \lambda' p') =$$
$$= \varepsilon(\lambda)\delta_{\lambda p,\lambda' p'} + i[I(\lambda p, \lambda' p') - \bar{I}(\lambda p, \lambda' p')] +$$
$$+ \sum_{\lambda'' p''}\bar{I}(\lambda p, \lambda'' p'')\varepsilon(\lambda'')I(\lambda'' p'', \lambda' p'). \qquad (4.145)$$

Но из формулы (4.107) следует, что

$$I(\lambda p, \lambda' p') - \bar{I}(\lambda p, \lambda' p') = i \sum_{\lambda'' p''} \bar{I}(\lambda p, \lambda'' p'') \varepsilon(\lambda'') I(\lambda'' p'', \lambda' p'). \tag{4.146}$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda'' p''} \sigma^{\dagger}(\lambda p, \lambda'' p'') \varepsilon(\lambda'') \sigma(\lambda'' p'', \lambda' p') = \varepsilon(\lambda) \delta_{\lambda p, \lambda' p'}, \tag{4.147}$$

или, в матричном обозначении,

$$\sigma^{\dagger} \varepsilon \sigma = \varepsilon. \tag{4.148}$$

Так как основное соотношение между I и $\bar{I}$ не меняется при подстановке $I \longleftrightarrow -\bar{I}$, то мы также имеем

$$\sigma \varepsilon \sigma^{\dagger} = \varepsilon. \tag{4.149}$$

Общее утверждение можно вывести из равенства (4.142). При помощи формулы

$$[N | \Sigma^{\dagger} | N'] = \delta_{N, N'} \det{}_{(N)} \sigma^{\dagger}(\lambda p, \lambda' p') \tag{4.150}$$

получаем

$$\sum_{N''} [N | \Sigma^{\dagger} \varepsilon | N''] [N'' | \Sigma | N'] =$$

$$= \delta_{N, N'} \frac{1}{N!} \sum_{\lambda'' p''} \det{}_{(N)} (\sigma^{\dagger}(\lambda p, \lambda'' p'') \varepsilon(\lambda'')) \det{}_{(N)} (\sigma(\lambda'' p'', \lambda' p')) =$$

$$= \delta_{N, N'} \det{}_{(N)} \left(\sum_{\lambda'' p''} \sigma^{\dagger}(\lambda p, \lambda'' p'') \varepsilon(\lambda'') \sigma(\lambda'' p'', \lambda' p') \right) =$$

$$= \delta_{N, N'} (-1)^{N^-} = [N | \varepsilon | N'], \tag{4.151}$$

что доказывает первую часть соотношения (4.143). Доказательство второй части аналогичным образом основывается на формуле (4.149). При ином близком выводе мы комбинируем частичные производящие функции

$$\sum_{N'} [N | \Sigma | N'] [N' | \psi'] = \prod_{\lambda p} \left(\sum_{\lambda' p'} \sigma(\lambda p, \lambda' p') \psi'_{\lambda' p'} \right)^N \tag{4.152}$$

и

$$\sum_{N'} [\bar{\psi}' | N'] [N' | \Sigma^{\dagger} \varepsilon | N] = {}' \prod_{\lambda p} \left(\sum_{\lambda' p'} \bar{\psi}'_{\lambda' p'} \sigma^{\dagger}(\lambda' p', \lambda p) \varepsilon(\lambda) \right)^N \tag{4.153}$$

в функцию

$$[\overline{\psi}'\,|\,\sum{}^{+}\varepsilon\sum\,|\,\psi'] =$$

$$= \exp\,[\sum \overline{\psi}'_{\lambda p}\sigma^{+}(\lambda p,\ \lambda'' p'')\,\varepsilon(\lambda'')\,\sigma(\lambda'' p'',\ \lambda' p')\,\psi'_{\lambda' p'}] =$$

$$= \exp\,[\sum \overline{\psi}'_{\lambda p}\varepsilon(\lambda)\,\psi'_{\lambda p}] = [\overline{\psi}'\,|\,\varepsilon\,|\,\psi']. \tag{4.154}$$

Из неопределенно-унитарного свойства матрицы $\sum$, в частности, следует, что

$$\sum_{N}(-1)^{N_{-}-N'_{-}}\,|\,[N\,|\sum|\,N']\,|^2 = 1. \tag{4.155}$$

Это указывает на то, что $|\,[N\,|\sum|\,N']\,|^2$ не обязательно меньше единицы. Однако такой результат можно ожидать, так как эти величины являются не абсолютными, а относительными вероятностями:

$$\left|\left[N\,\middle|\sum\middle|\,N'\right]\right|^2 = \frac{p(n,\,n')}{p(0,\,0)}. \tag{4.156}$$

Рассмотрим, например,

$$\frac{p(1_{\lambda p},\,1_{\lambda p})}{p(0,\,0)} = |\,\sigma(\lambda p,\ \lambda p)\,|^2, \tag{4.157}$$

т. е. вероятность того, что не произойдет изменений состояния одной частицы, отнесенную к вероятности сохранения вакуумного состояния.

Вид соотношения (4.155) для одной частицы

$$\sum_{\lambda' p'}\varepsilon(\lambda)\,\varepsilon(\lambda')\,|\,\sigma(\lambda' p',\ \lambda p)\,|^2 = 1 \tag{4.158}$$

показывает, что

$$|\,\sigma(\lambda p,\ \lambda p)\,|^2 = 1 - \sum_{\lambda' p' \neq \lambda p}\varepsilon(\lambda)\,\varepsilon(\lambda')\,|\,\sigma(\lambda' p',\ \lambda p)\,|^2. \tag{4.159}$$

Поэтому, например, для $\lambda > 0$ мы имеем

$$\frac{p(1_{\lambda p},\,1_{\lambda p})}{p(0,\,0)} = 1 - \sum_{+}|\,I(\lambda' p',\ \lambda p)\,|^2 + \sum_{-}|\,I(\lambda' p',\ \lambda p)\,|^2, \tag{4.160}$$

где суммирование по положительно-частотным состояниям не включает λp. Суммы, имеющие противоположные знаки, определяют в выражении (4.160) те изменения в отношении вероятностей по сравнению с единицей, которые вызываются переходами частиц в другие положительно-частотные состояния, а также изменениями, связанными с учетом принципа исключения, уменьшающего вероятность образования пар, при котором одна частица попала бы в занятое состояние λp.

Дадим теперь явное доказательство того, что S является унитарным оператором. Доказательство более громоздко, чем элементарное установление свойства неопределенной унитарности матрицы Σ. Это связано с несохранением числа частиц в отличие от сохранения числа „частиц". Наша процедура начинается с записи соотношения (4.117) в виде

$$(\Phi(\chi^{(-)'}) S\Psi(\chi^{(+)'})) = (\Phi(\chi^{(-)'})\Psi(\chi^{(+)'})) \times \\ \times e^{iw} \exp\left[i\int (dx)(dx')\bar{\psi}'(x) I(x, x')\psi'(x')\right], \quad (4.161)$$

где, как обычно понимается, собственные значения относятся к стандартной поверхности. Вводя операторы, обладающие собственными значениями $\chi_{\lambda p}^{(-)'}$, мы можем построить вектор $S\Psi(\chi^{(+)'})$, а также сопряженный вектор $\Phi(\chi^{(-)'})S^{\dagger}$. Затем мы должны показать, что произведение $(\chi^{(-)'}|S^{\dagger}S|\chi^{(+)'})$ равно $(\chi^{(-)'}|\chi^{(+)'})$. Вычисление этого произведения осуществляется путем действия операторов на их собственные векторы, что дает функцию от собственных значений, умноженную на $(\chi^{(-)'}|\chi^{(+)'})$. Эту функцию от собственных значений также можно получить, если подставить $\chi_{\lambda p}^{(\pm)} \to \chi_{\lambda p}^{(\pm)} + \chi_{\lambda p}^{(\pm)'}$ и вычислить матричный элемент с нулевыми собственными значениями. Таким образом, доказательство соотношения $S^{\dagger}S = 1$ сводится к установлению того, что

$$|e^{iw}|^2 (0|F|0) = 1, \quad (4.162)$$

где

$$F = \exp\left\{-i\int(dx)(dx')\left[\bar{\psi}'(x) + \sum_{-} \bar{\psi}_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)}\right]\bar{I}(x, x')\left[\psi'(x') + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{+} \psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(+)}\right]\right\} \exp\left\{i\int(dx)(dx')\left[\bar{\psi}'(x) + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{+} \bar{\psi}_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(-)}\right] I(x, x')\left[\psi'(x') + \sum_{-} \psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(-)}\right]\right\}. \quad (4.163)$$

Следует отметить перестановочные свойства операторов $\chi_{\lambda p}^{(+)}$, $\chi_{\lambda p}^{(-)}$. Так как

$$(\chi^{(-)'} \,|\, \chi^{(+)'}) = \exp\Big(\sum_{\lambda p} \chi_{\lambda p}^{(-)'} \chi_{\lambda p}^{(+)'}\Big), \tag{4.164}$$

то мы имеем

$$\delta(\chi^{(-)'} \,|\, \chi^{(+)'}) = (\chi^{(-)'} \,|\, \chi^{(+)'}) \sum_{\lambda p} (\delta\chi_{\lambda p}^{(-)'} \chi_{\lambda p}^{(+)'} + \chi_{\lambda p}^{(-)'} \delta\chi_{\lambda p}^{(+)'}) =$$
$$= \Big(\chi^{(-)'} \,\Big|\, \sum_{\lambda p} (\delta\chi_{\lambda p}^{(-)} \chi_{\lambda p}^{(+)} + \chi_{\lambda p}^{(-)} \delta\chi_{\lambda p}^{(+)}) \,\Big|\, \chi^{(+)'}\Big), \tag{4.165}$$

и поэтому

$$G_{\chi^{(+)}} = i \sum_{\lambda p} \chi_{\lambda p}^{(-)} \delta\chi_{\lambda p}^{(+)}, \qquad G_{\chi^{(-)}} = i \sum_{\lambda p} \chi_{\lambda p}^{(+)} \delta\chi_{\lambda p}^{(-)}. \tag{4.166}$$

Вытекающие отсюда перестановочные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \{\chi_{\lambda p}^{(+)}, \chi_{\lambda' p'}^{(+)}\} &= \{\chi_{\lambda p}^{(-)}, \chi_{\lambda' p'}^{(-)}\} = 0, \\ \{\chi_{\lambda p}^{(+)}, \chi_{\lambda' p'}^{(-)}\} &= \delta_{\lambda p, \lambda' p'}. \end{aligned} \tag{4.167}$$

Естественно, те же самые результаты получаются из свойств операторов ψ и $\bar{\psi}$.

Нашей первой задачей будет показать, что левая часть соотношения (4.162) не зависит от собственных значений. Мы имеем

$$\frac{\delta_l F}{\delta\bar{\psi}'(x)} = -i \int (dx') \bar{I}(x, x') \Big(\psi'(x') + \sum_{+} \psi_{\lambda p}(x') \chi_{\lambda p}^{(+)}\Big) F +$$
$$+ Fi \int (dx') I(x, x') \Big(\psi'(x') + \sum_{-} \psi_{\lambda p}(x') \chi_{\lambda p}^{(-)}\Big). \tag{4.168}$$

Кроме того, при $\lambda > 0$

$$[\chi_{\lambda p}^{(+)}, F] = \frac{\partial_l F}{\partial \chi_{\lambda p}^{(-)}} = Fi \int (dx)(dx') \bar{\psi}_{\lambda p}(x) I(x, x') \Big(\psi'(x') +$$
$$+ \sum_{-} \psi_{\lambda' p'}(x') \chi_{\lambda' p'}^{(-)}\Big) \tag{4.169}$$

и при $\lambda < 0$

$$[F, \chi_{\lambda p}^{(-)}] = \frac{\partial_r F}{\partial \chi_{\lambda p}^{(+)}} = i \int (dx)(dx') \bar{\psi}_{\lambda p}(x) \bar{I}(x, x') \Big(\psi'(x') +$$
$$+ \sum_{+} \psi_{\lambda' p'}(x') \chi_{\lambda' p'}^{(+)}\Big) F. \tag{4.170}$$

Последние результаты можно выразить в виде

$$\left[\psi'(x)+\sum_{+}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)},\ F\right]=$$
$$=F\int(dx')(x\,|\,iS^{(+)}I\,|\,x')\Big(\psi'(x')+\sum_{-}\psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(-)}\Big) \qquad (4.171)$$

и

$$\left[F,\ \psi'(x)+\sum_{-}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(-)}\right]=$$
$$=\int(dx')(x\,|\,iS^{(-)}\bar{I}\,|\,x')\Big(\psi'(x')+\sum_{+}\psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(+)}\Big)F, \qquad (4.172)$$

где $S^{(+)}(x, x')$, $S^{(-)}(x, x')$ определяются по формулам (4.97). При введении обозначения

$$\begin{aligned}&\Big(0\,\Big|\Big(\psi'(x)+\sum_{+}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)}\Big)F\,\Big|\,0\Big)=(0\,|\,F\,|\,0)f_{+}(x),\\&\Big(0\,\Big|\,F\Big(\psi'(x)+\sum_{-}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(-)}\Big)\Big|\,0\Big)=(0\,|\,F\,|\,0)f_{-}(x)\end{aligned} \qquad (4.173)$$

из формулы (4.168) следует, что

$$\frac{\delta_l}{\delta\bar{\psi}'(x)}(0\,|\,F\,|\,0)=$$
$$=-(0|F|0)\,i\int(dx')\,[\bar{I}(x, x')f_{+}(x')-I(x, x')f_{-}(x')], \qquad (4.174)$$

тогда как из соотношений (4.171) и (4.172) вытекает, что

$$\begin{aligned}&f_{+}(x)-\int(dx')(x\,|\,iS^{(+)}I\,|\,x')f_{-}(x')=\psi'(x),\\&f_{-}(x)-\int(dx')(x\,|\,iS^{(-)}\bar{I}\,|\,x')f_{+}(x')=\psi'(x).\end{aligned} \qquad (4.175)$$

Вычитая одно уравнение (4.175) из другого, мы (опуская индексы) получаем

$$(1+iS^{(-)}\bar{I})f_{+}=(1+iS^{(+)}I)f_{-}. \qquad (4.176)$$

Но, согласно формуле (4.107),

$$I(1+iS^{(-)}\bar{I})=(1+iIS^{(+)})\bar{I}, \qquad (4.177)$$

тогда как

$$I(1+iS^{(+)}I)=(1+iIS^{(+)})I. \qquad (4.178)$$

Следовательно, если мы умножим уравнение (4.176) на $\bar{I}$ и сократим на получающийся при этом общий множитель $1+i\bar{I}S^{(+)}$, то получим соотношение

$$\bar{I}f_+ = If_-, \tag{4.179}$$

показывающее, что

$$\frac{\delta_l}{\delta\bar{\psi}'(x)}(0|F|0) = 0. \tag{4.180}$$

Очевидно, что $(0|F|0)$ также не зависит от собственных значений $\psi'(x)$. Остается показать, что

$$|e^{iw}|^2\left(0\left|\exp\left[-i\sum_{-+}\chi_{\lambda p}^{(+)}\bar{I}(\lambda p, \lambda' p')\chi_{\lambda' p'}^{(+)}\right]\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left[i\sum_{+-}\chi_{\lambda p}^{(-)}I(\lambda p, \lambda' p')\chi_{\lambda' p'}^{(-)}\right]\right|0\right) = 1. \tag{4.181}$$

Но это как раз означает соотношение

$$(0|S^{\dagger}S|0) = \sum_n |(n|S|0)|^2 = 1, \tag{4.182}$$

доказательство [1] которого было уже дано при выводе формулы (4.132). Если в приведенном доказательстве сделать замену $I \longleftrightarrow -\bar{I}$, то вместо соотношения $S^{\dagger}S = 1$ мы найдем, что $SS^{\dagger} = 1$.

Обсуждение полей, не зависящих от времени, откладывается до последующей статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Мы хотим показать здесь, что дифференциальное выражение (4.25) правильно определяет $\det X$. Прежде всего нужно доказать интегрируемость этого выражения. Рассматривая две независимые вариации, заключаем, что

$$\delta_2 \operatorname{Tr}(X^{-1}\delta_1 X) - \delta_1 \operatorname{Tr}(X^{-1}\delta_2 X) = -\operatorname{Tr}(X^{-1}\delta_2 X X^{-1}\delta_1 X) +$$
$$+\operatorname{Tr}(X^{-1}\delta_1 X X^{-1}\delta_2 X) = 0 \tag{A.1}$$

в силу основного свойства следа $\operatorname{Tr} XY = \operatorname{Tr} YX$. Для применимости этого свойства к бесконечным матрицам требуется

[1] Дальнейшее обсуждение см. в приложении Б.

соответствующая сходимость следов. Обозначая матричные элементы дискретными индексами, можно представить формулу (4.25) в виде

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \det X = (X^{-1})_{ji} \det X. \tag{A.2}$$

Второе дифференцирование по произвольному элементу матрицы дает

$$\frac{\partial}{\partial X_{ij}} \frac{\partial}{\partial X_{kl}} \det X = [(X^{-1})_{ji}(X^{-1})_{lk} - \\ -(X^{-1})_{jk}(X^{-1})_{li}] \det X. \tag{A.3}$$

Правая часть изменяет знак при перестановке индексов строк i, k и при перестановке индексов столбцов j, l. Следовательно, вторая производная исчезает при равных индексах строк или равных индексах столбцов. В частности,

$$\frac{\partial^2}{\partial X_{ij}^2} \det X = 0. \tag{A.4}$$

Мы также заключаем, что

$$\sum_j X_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}} \det X = \sum_j X_{ij}(X^{-1})_{ji} \det X = \det X \tag{A.5}$$

и что

$$\sum_i X_{ij} \frac{\partial}{\partial X_{ij}} \det X = \det X. \tag{A.6}$$

Поэтому $\det X$ является линейной однородной функцией элементов каждой строки и каждого столбца, антисимметричной относительно строк и столбцов матрицы. Это доказывает тождественность определения $\det X$ из формулы (4.25) при начальном условии $\det 1 = 1$ с обычным определением.

Свойство умножения определителей прямо следует из определения (4.25). Действительно, из равенства

$$\operatorname{Tr}(XY)^{-1}\delta(XY) = \operatorname{Tr} X^{-1}\delta X + \operatorname{Tr} Y^{-1}\delta Y \tag{A.7}$$

вытекает, что

$$\delta(\ln \det XY) = \delta(\ln \det X) + \delta(\ln \det Y), \tag{A.8}$$

откуда

$$\det XY = \det X \det Y. \tag{A.9}$$

Постоянная интегрирования находится из начального условия. Заметим также, что свойство следа

$$\mathrm{Tr}\, X = \mathrm{Tr}\, X^{\mathrm{tr}} \tag{A.10}$$

немедленно приводит к равенству

$$\det X = \det X^{\mathrm{tr}}. \tag{A.11}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В этом разделе мы обсудим связь между определителями и упорядоченными операторами. Пусть $\chi_r^{(+)}$, $\chi_r^{(-)}$ — совокупность операторов, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}\{\chi_r^{(+)}, \chi_s^{(+)}\} = \{\chi_r^{(-)}, \chi_s^{(-)}\} = 0,\\ \{\chi_r^{(+)}, \chi_s^{(-)}\} = \delta_{rs}.\end{gathered} \tag{Б.1}$$

Рассмотрим упорядоченную экспоненту

$$V = \exp\left[\sum_{rs} \chi_r^{(+)}, \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]; \tag{Б.2}$$

здесь мы использовали обозначение

$$\exp[A; B] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n B^n. \tag{Б.3}$$

Выведем перестановочные соотношения

$$[\chi_r^{(+)}, V] = -\frac{\partial_r}{\partial\chi_r^{(-)}} V = -\sum_p \chi_p^{(+)}\lambda K_{pr} V \tag{Б.4}$$

и

$$[V, \chi_s^{(-)}] = -\frac{\partial_l}{\partial\chi_s^{(+)}} V = -V\sum_t \lambda K_{st}\chi_t^{(-)}, \tag{Б.5}$$

откуда

$$\begin{gathered}\sum_p \chi_p^{(+)}(1+\lambda K)_{pr} V = V\chi_r^{(+)},\\ V\sum_t (1+\lambda K)_{st}\chi_t^{(-)} = \chi_s^{(-)} V\end{gathered} \tag{Б.6}$$

и

$$\begin{gathered}\chi_r^{(+)} V = V\sum_p \chi_p^{(+)}\left[\frac{1}{1+\lambda K}\right]_{pr},\\ V\chi_s^{(-)} = \sum_t \left[\frac{1}{1+\lambda K}\right]_{st}\chi_t^{(-)} V.\end{gathered} \tag{Б.7}$$

Дифференцируя V по λ, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=\sum K_{rs}\chi_r^{(+)}V\chi_s^{(-)}=\sum V\chi_r^{(+)}\left[\frac{K}{1+\lambda K}\right]_{rs}\chi_s^{(-)}=$$
$$=V\sum\left[\frac{K}{1+\lambda K}\right]_{rr}-\sum V\chi_s^{(-)}\chi_r^{(+)}\left[\frac{K}{1+\lambda K}\right]_{rs}=$$
$$=V\,\mathrm{Tr}\left[\frac{K}{1+\lambda K}\right]-\sum\chi_s^{(-)}V\chi_r^{(+)}\left[\frac{K}{(1+\lambda K)^2}\right]_{rs}; \qquad (Б.8)$$

интегрируя последнее выражение, находим тождество

$$\exp\left[\sum\chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]=$$
$$=\det(1+\lambda K)\exp\left[-\sum\chi_s^{(-)};\ \chi_r^{(+)}\left(\frac{\lambda K}{1+\lambda K}\right)_{rs}\right]. \qquad (Б.9)$$

Матричный элемент $(\chi^{(-)\prime}\,||\,\chi^{(+)\prime})$ этого операторного соотношения показывает, что

$$(\chi^{(-)\prime}\,|\exp\left[\sum\chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]|\,\chi^{(+)\prime})=$$
$$=\det(1+\lambda K)\exp\left\{\sum\chi_s^{(-)\prime}\chi_r^{(+)\prime}\left[\frac{1}{(1+\lambda K)}\right]_{rs}\right\} \qquad (Б.10)$$

и, в частности, что

$$\det(1+\lambda K)=(0\,|\exp\left[\sum_{rs}\chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]|\,0), \qquad (Б.11)$$

т. е. $\det(1+\lambda K)$ выражается в виде матричного элемента некоторого оператора. Для доказательства этого результата требуются лишь первые две перегруппировки в соотношении (Б.8). Теперь

$$\exp\left[\sum\chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_{r,\,s}\chi_{r_1}^{(+)}\ldots\chi_{r_n}^{(+)}\prod_{i=1}^{n}K_{r_is_i}\chi_{s_n}^{(-)}\ldots\chi_{s_1}^{(-)} \qquad (Б.12)$$

и

$$\begin{aligned}\chi_{s_n}^{(-)}\ldots\chi_{s_1}^{(-)}\Psi(0)&=\varepsilon_{s_1\ldots s_n}\Psi(n'),\\ \Psi(0)^{\dagger}\chi_{r_1}^{(+)}\ldots\chi_{r_n}^{(+)}&=\varepsilon_{r_1\ldots r_n}\Psi(n)^{\dagger},\end{aligned} \qquad (Б.13)$$

где собственным векторам в представлении чисел заполнения предшествуют знакопеременные символы, которые равны единице, если операторы находятся в некотором стандартном порядке. Поэтому

$$\det(1+\lambda K)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\sum_r \det{}_{(n)} K_{r_i r_j}, \qquad (\text{Б}.14)$$

так как $s_1 \ldots s_n$ должны быть некоторой перестановкой чисел $r_1 \ldots r_n$, а множитель $\varepsilon_{r_1 \ldots r_n}\varepsilon_{s_1 \ldots s_n}$ равен $+1$ или -1 в зависимости от того, является ли перестановка четной или нечетной. Аналогичный результат для матрицы с непрерывными индексами получается при подстановке

$$K_{r_i r_j} \to (dx_i)^{1/2} K(x_i, x_j)(dx_j)^{1/2}, \qquad (\text{Б}.15)$$

а именно:

$$\det(1+\lambda K)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int (dx_1)\ldots(dx_n)\det{}_{(n)}K(x_i, x_j). \qquad (\text{Б}.16)$$

Представляет интерес рассмотреть сходные свойства упорядоченных экспонент, построенных из операторов, подчиняющихся перестановочным соотношениям Бозе — Эйнштейна:

$$[\chi_r^{(+)}, \chi_s^{(+)}]=[\chi_r^{(-)}, \chi_s^{(-)}]=0, \quad [\chi_r^{(+)}, \chi_s^{(-)}]=\delta_{rs}. \qquad (\text{Б}.17)$$

Тогда знак минус в выражениях (Б.4) и (Б.5) должен быть опущен, так что знаки при K в выражениях (Б.6) и (Б.7) будут противоположны. Это сказывается в том, что соотношение (Б.8) заменяется на следующее:

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=V\,\mathrm{Tr}\left[\frac{K}{1-\lambda K}\right]+\sum \chi_s^{(-)}V\chi_r^{(+)}\left[\frac{K}{(1-\lambda K)^2}\right]_{rs}, \qquad (\text{Б}.18)$$

что дает для случая поля Бозе — Эйнштейна тождество

$$\exp\left[\sum \chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]=$$
$$=\left[\frac{1}{\det(1-\lambda K)}\right]\exp\left\{\sum \chi_s^{(-)}, \chi_r^{(+)}\left[\frac{\lambda K}{1-\lambda K}\right]_{rs}\right\}. \qquad (\text{Б}.19)$$

Таким образом, аналогом соотношения (Б.11) для систем Бозе — Эйнштейна будет соотношение

$$\frac{1}{\det(1-\lambda K)}=\left(0\left|\exp\left[\sum \chi_r^{(+)};\ \lambda K_{rs}\chi_s^{(-)}\right]\right|0\right). \qquad (\text{Б}.20)$$

В разложении (Б.12) порядок левых и правых множителей теперь несущественен и могут появляться повторяющиеся индексы. Таким образом, соотношения (Б.13) заменяются на следующие:

$$\begin{aligned} \chi_{s_n}^{(-)} \ldots \chi_{s_1}^{(-)} \Psi(0) &= \left(\prod n_k'!\right)^{1/2} \Psi(n'), \\ \Psi(0)^{\dagger} \chi_{r_1}^{(+)} \ldots \chi_{r_n}^{(+)} &= \left(\prod n_k!\right)^{1/2} \Psi(n)^{\dagger}. \end{aligned} \tag{Б.21}$$

Индексы $s_1 \ldots s_n$ должны быть некоторой перестановкой чисел $r_1 \ldots r_n$, и каждый член имеет множитель $\prod n_k!$. Поэтому разложение (Б.20) представляется в виде

$$\frac{1}{\det(1-\lambda K)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{r} \mathrm{perm}_{(n)} K_{r_i r_j}, \tag{Б.22}$$

где так называемый перманент определяется равенством

$$\mathrm{perm}_{(n)} K_{r_i r_j} = \sum_{s=r} \prod_{i=1}^{n} K_{r_i s_i}, \tag{Б.23}$$

а суммирование по индексам s_i распространено на все $n!$ перестановок чисел r_i. Перманент отличается от соответствующего определителя отсутствием знакопеременного множителя, который в последнем обеспечивал отсутствие одинаковых строк или столбцов. В пределе непрерывных индексов [подстановка (Б.15)] повторяющиеся индексы не сказываются, и мы получаем

$$\frac{1}{\det(1-\lambda K)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int (dx_1)\ldots(dx_n)\, \mathrm{perm}_{(n)} K(x_i, x_j). \tag{Б.24}$$

Этот перманент совпадает со специальным случаем симметранта, определенного в предыдущей статье. Соотношение между разложениями (Б.14) и (Б.22) можно понять при помощи выражений

$$\det(1+\lambda K) = \exp\left[\mathrm{Tr} \ln (1+\lambda K)\right] \tag{Б.25}$$

и

$$\frac{1}{\det(1-\lambda K)} = \exp\left[-\mathrm{Tr} \ln (1-\lambda K)\right], \tag{Б.26}$$

так как знаковые множители в выражении (4.38) происходят от последовательных изменений знаков в разложении (4.35), отсутствующих в выражении

$$-\operatorname{Tr}\ln(1-\lambda K)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n}K_n. \tag{Б.27}$$

Наконец, мы используем операторную технику, чтобы показать, что

$$(0|F_0|0)=\det(1+S^{(+)}IS^{(-)}\bar{I}), \tag{Б.28}$$

где F_0 представляет собой выражение (4.163) с нулевыми собственными значениями; этим доказывается соотношение (4.181). Зависимость F_0 от величины $\bar{I}(x, x')$ дается выражением

$$\left(\frac{\delta}{\delta\bar{I}(x,x')}\right)F_0=-i\sum_{-}\bar{\psi}_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)}\sum_{+}\psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(+)}F_0. \tag{Б.29}$$

Теперь, согласно выражениям (4.171) и (4.172),

$$\left[\sum_{+}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)},\ F_0\right]=$$

$$=F_0\int(dx')(x|iS^{(+)}I|x')\sum_{-}\psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(-)} \tag{Б. 30}$$

и

$$\left[F_0,\ \sum_{-}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(-)}\right]=$$

$$=\int(dx')(x|iS^{(-)}\bar{I}|x')\sum_{+}\psi_{\lambda' p'}(x')\chi_{\lambda' p'}^{(+)}F_0, \tag{Б. 31}$$

что можно скомбинировать в виде

$$\int(dx')(x|1+S^{(+)}IS^{(-)}\bar{I}|x')\sum_{+}\psi_{\lambda p}(x')\chi_{\lambda p}^{(+)}F_0=$$

$$=F_0\sum_{+}\psi_{\lambda p}(x)\chi_{\lambda p}^{(+)}+\int(dx')(x|iS^{(+)}I|x')\sum_{-}\psi_{\lambda p}(x')\chi_{\lambda p}^{(-)}F_0. \tag{Б. 32}$$

Мы находим, что

$$\left(0 \left| \sum_{-} \bar{\psi}_{\lambda p}(x) \chi_{\lambda p}^{(+)} \sum_{+} \psi_{\lambda' p'}(x') \chi_{\lambda' p'}^{(+)} F_0 \right| 0\right) =$$

$$= (x' \,|\, (1 + S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I})^{-1} i S^{(+)} I S^{(-)} \,|\, x) (0 \,|\, F_0 \,|\, 0) \quad \text{(Б. 33)}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{\delta}{\delta \bar{I}(x, x')}\right)(0 \,|\, F_0 \,|\, 0) =$$

$$= (x' \,|\, (1 + S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I})^{-1} S^{(+)} I S^{(-)} \,|\, x) (0 \,|\, F_0 \,|\, 0). \quad \text{(Б. 34)}$$

Таким образом, мы приходим к дифференциальному выражению

$$\delta \ln (0 \,|\, F_0 \,|\, 0) = \mathrm{Tr}\,[(1 + S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I})^{-1} \delta (S^{(+)} I S^{(-)} \bar{I})], \quad \text{(Б. 35)}$$

которое доказывает формулу (Б. 28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Phys. Rev., **92**, 1283 (1953) (см. гл. III).
2. Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, Cambridge, 1927. (Имеется перевод: Уиттекер Е. и Ватсон Г., Курс современного анализа, М. — Л., 1937.)
3. Courant R., Hilbert D., Methoden der Mathematischen Physik, Berlin, 1931. (Имеется перевод: Курант и Гильберт, Методы математической физики, ч. I, М. — Л., 1949; ч. II, 1951.)
4. Jost R., Pais A., Phys. Rev., **82**, 840 (1951).
5. Salam A., Matthews P. T., Phys. Rev., **90**, 690 (1953). (Имеется перевод в сборнике „Проблемы современной физики", № 3, ИЛ, 1955, стр. 122.)
6. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 254.)
7. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 138.)

ГЛАВА V[1]

Воздействие на поле Дирака внешнего электромагнитного поля, не зависящего от времени, исследуется в этой статье путем построения функции преобразования в представлении, приспособленном к внешнему полю. Помимо изменений в функции Грина, структура функции преобразования отличается от структуры ее в случае отсутствия внешнего поля множителем, который описывает энергию измененного состояния вакуума. Выводится формула для энергии вакуума, которая выражается через собственные значения энергии состояний дискретного спектра и фазовые смещения, связанные с состояниями непрерывного спектра в форме, свойственной локализованному полю. Вводятся методы, использующие определители, и устанавливается класс полей, для которого некоторый модифицированный определитель, зависящий от частоты, является целой функцией параметра, характеризующего напряженность поля. Свойства определителя изучаются в двух областях частот ($|p_0|<m$ и $|p_0|>m$) с точки зрения нахождения нулей действительного определителя в первой области (эти нули являются частотами дискретных состояний) и фаз комплексного определителя во второй области. Во втором случае устанавливается связь с унитарной матрицей, определенной для состояний с данной частотой; фаза определителя выражается через собственные фазы этой матрицы. После обсуждения асимптотического поведения определителя как функции от p_0 строится модифицированный определитель, выражаемый через энергии дискретных состояний и собственные фазы. Это дает для соответствующего класса полей более точный вид формулы для энергии вакуума; показано, что в эту формулу входит один расходящийся параметр.

Для описания рассеяния используется функция Грина; она выражается для достаточно больших интервалов времени через функции дискретных состояний и линейные комбинации функций состояния свободных частиц, выраженные через унитарную матрицу, которая является обобщением такой же матрицы для состояний с одной частотой. Выводятся вероятности переходов; они входят в виде сумм в выражение для производящей функции, которая служит для вычисления средних значений чисел заполнения конечного состояния системы, на чем основываются определения дифференциального и полного сечений рассеяния. Дается обсуждение различных операций

[1] J. Schwinger, The Theory of Quantized Fields. VI, Phys. Rev., **94**, 1362—1384 (1954).

симметрии и вытекающих из них свойств поперечных сечений. Далее, для исследования зависимости вероятности сохранения состояния системы от чисел заполнения применяется формула для вероятностей отдельных переходов, использующая определитель. Побочным результатом этого анализа является качественный верхний предел полных поперечных сечений, связанный с характером углового распределения. Отдельный раздел посвящен свойствам собственных фаз, включая доказательство эквивалентности между смещениями фаз и собственными фазами, и обсуждению иных способов их вычисления при помощи величин, выраженных сходящимися степенными рядами по потенциалам. Наконец, асимптотическое поведение определителя используется при получении приближения для собственных фаз, справедливого при больших энергиях в случае изотропного скалярного потенциала. Получающийся при этом вид сечения рассеяния для больших энергий и малых углов обсуждается для крайних квантового и классического пределов. Дается другой вывод формулы рассеяния для больших энергий при помощи приближенного построения функции Грина.

Влияние внешнего электромагнитного поля, не зависящего от времении, на поле Дирака можно рассмотреть либо приспособив представление к внешнему полю, либо предположив, что данное поле является частью поля, занимающего больший объем, зависящего от времени и исчезающего вне соответствующих границ. При последнем подходе применяются результаты предыдущей статьи [1], и вопрос сводится к проблеме выделения свойств системы для определенного интервала времени из известного поведения в большем интервале. Отложим обсуждение этой проблемы и воспользуемся первым методом рассмотрения полей, не зависящих от времени.

НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Естественно использовать калибровку, при которой вектор потенциала $A_\mu(x)$ не зависит от времени. Так как поля, представляющие физический интерес, пространственно локализованы, то мы наложим условие исчезновения потенциала в пространстве, свободном от поля. Уравнения поля в отсутствие источников можно записать как уравнения движения [2][1], где оператор H, действующий на функцию ψ, равен

$$H = eA_0(x) + \gamma_0\gamma_k[-i\partial_k - eA_k(x)] + m\gamma_0. \tag{5.1}$$

[1] См. уравнения (3.5) гл. III. — *Прим. перев.*

Введем основное ограничение класса полей, не зависящих от времени, а именно потребуем, чтобы спектр собственных значений H распадался на две разные совокупности (положительных и отрицательных частот) с конечным интервалом, отделяющим каждую совокупность от нулевой частоты. Это исключает, например, однородное электрическое поле[1], где спектр H образует континуум, простирающийся от $-\infty$ до $+\infty$.

Процедура, примененная выше (гл. III) в случае отсутствия электромагнитного поля, может быть непосредственно приспособлена к этому классу статических полей. Можно определить проецирующие операторы (3.6), которые разделяют ψ и $\bar{\psi}$ на части с положительными и отрицательными частотами [см. (3.11)]. Можно построить производящие операторы бесконечно малых изменений в положительно- или отрицательно-частотных частях ψ и $\bar{\psi}$ [см. соотношения (3.17)—(3.22)] и вывести с их помощью перестановочные соотношения, относящиеся к данному моменту времени [см. (3.23) и (3.24)]. Полные совокупности антикоммутирующих операторов для фиксированного момента времени образуются положительно- или отрицательно-частотными частями операторов полей; можно ввести их правые или левые собственные векторы. Функцию преобразования, описывающую сдвиг во времени, можно построить при помощи функции, относящейся к нулевому собственному значению [см. подстановку (3.33)]. Зависимость $\mathscr{W}_0$ от источников выражается, как и в соотношении (4.2), посредством функции Грина, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (4.4). Однако эта функция зависит только от $x_0 - x_0'$ и содержит положительные или отрицательные частоты для $x > x_0'$ или $x_0 < x_0'$ соответственно. Принципиальное отличие от случая отсутствия поля состоит в появлении функции w, которая характеризует функцию преобразования с нулевыми собственными значениями в отсутствие источников.

Относительно зависимости w от электромагнитного поля следует заметить, что определение собственных значений явно содержит потенциал $A_\mu(x)$. Поэтому изменение функции

[1] То есть поля с напряженностью E, которые существенно однородны на расстояниях, бóльших m/eE, причем последнее не на много порядков превышает величину $1/m$.

преобразования $(0\sigma_1 | 0\sigma_2)]_0$, вызванное вариацией δA_μ, происходит от вариаций потенциала внутри области и на границах:

$$\delta_A (0\sigma_1 | 0\sigma_2)]_0 = \delta_A e^{iw} = i(0\sigma_1 | [G_A(\sigma_1) - G_A(\sigma_2) + \\ + \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \delta A_\mu(x)\, j_\mu(x)] | 0\sigma_2)]_0. \qquad (5.2)$$

Бесконечно малые производящие операторы $G_A(\sigma_1)$ и $G_A(\sigma_2)$ различаются только тем, что первый зависит от динамических переменных, относящихся к поверхности σ_1 (время t_1), а второй — к поверхности σ_2 (время t_2). Но состояние с нулевыми собственными значениями является состоянием минимальной энергии системы, и, как указывает выражение „стационарное состояние", средние значения динамических переменных в собственном состоянии энергии не зависят от времени, к которому относятся динамические переменные. Отсюда

$$(0\sigma_1 | (G_A(\sigma_1) - G_A(\sigma_2)) | 0\sigma_2)]_0 = 0, \qquad (5.3)$$

и тот же расчет, как и в предыдущей статье, дает

$$\delta w = \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx)\, \mathrm{tr}\, ie\gamma_\mu\, \delta A_\mu(x)\, G_+(x, x). \qquad (5.4)$$

Предположим, что независимость потенциала $A_\mu(\mathbf{x})$ от времени сохраняется при любой бесконечно малой вариации $\delta A_\mu(\mathbf{x})$. Так как функция Грина содержит только $x_0 - x_0'$, то $G_+(x, x)$ не зависит от x_0 и подинтегральное выражение в формуле (5.4) не зависит от времени. Интеграл по времени дает, таким образом, множитель

$$T = t_1 - t_2. \qquad (5.5)$$

Записывая

$$w = -TE(0), \qquad (5.6)$$

получаем дифференциальное выражение

$$\delta E(0) = -\int (d\mathbf{x})\, \mathrm{tr}\, ie\, \gamma_\mu\, \delta A_\mu(\mathbf{x})\, G_+(x, x), \qquad (5.7)$$

которое должно быть проинтегрировано при начальном условии:

$$E(0) = 0 \qquad (5.8)$$

при $A_\mu = 0$.

Получающаяся функция преобразования, описывающая сдвиг во времени, отличается по форме от приведенной выше (см. гл. III) только дополнительным множителем $\exp[-iE(0)T]$. Если обобщить функцию преобразования системы без источников, включив фазовые преобразования, то она будет определяться выражением (3.66):

$$
\begin{aligned}
&(\chi^{(-)'}\sigma_1\alpha_1 \mid \chi^{(+)'}\sigma_2\alpha_2)]_0 = \\
&= \exp\Big[-iE(0)T - i\int\limits_{\sigma_1} d\sigma \int\limits_{\sigma_2} d\sigma' \, \overline{\psi}^{(-)'}(x)\gamma_0 e^{ie\alpha} \times \\
&\times G_+(x, x')\gamma_0\psi^{(+)'}(x') - i\int\limits_{\sigma_2} d\sigma \int\limits_{\sigma_1} d\sigma' \, \overline{\psi}^{(+)'}(x)\gamma_0 \times \\
&\times G_+(x, x') e^{-ie\alpha}\gamma_0\psi^{(-)'}(x')\Big].
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

Членов, у которых оба интеграла относятся к одной и той же поверхности, не имеется [см. выражение (3.65)], так как символическая трехмерная форма функции Грина (3.49) по-прежнему применима в этом случае статического поля.

Введем полную совокупность дискретных собственных функций оператора H:

$$
\begin{gathered}
H\psi_\varkappa(\mathbf{x}) = \varepsilon_\varkappa E_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{x}), \quad \overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x})\gamma_0 H = \varepsilon_\varkappa E_\varkappa \overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x})\gamma_0, \\
\sum_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{x})\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}') = \gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),
\end{gathered} \tag{5.10}
$$

где $E_\varkappa > 0$ и $\varepsilon_\varkappa = \pm 1$ характеризуют положительные и отрицательные собственные значения. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
P^{(+)}\gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \sum_{+} \psi_\varkappa(\mathbf{x})\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}'), \\
P^{(-)}\gamma_0\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') &= \sum_{-} \psi_\varkappa(\mathbf{x})\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}'),
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

и по аналогии с выражением (3.55) имеем

$$
\begin{aligned}
G_+(x, x') &= i\sum_{+} \psi_\varkappa(x)\overline{\psi}_\varkappa(x'), & x_0 > x_0', \\
G_+(x, x') &= -i\sum_{-} \psi_\varkappa(x)\overline{\psi}_\varkappa(x'), & x_0 < x_0',
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

где

$$
\psi_\varkappa(x) = \psi_\varkappa(\mathbf{x})e^{-i\varepsilon_\varkappa E_\varkappa x_0}. \tag{5.13}
$$

В обозначениях

$$\left.\begin{aligned} \chi_x^{(-)'} &= \int_{\sigma_1} d\sigma\, \overline{\psi}^{(-)'}(x)\, \gamma_0 \psi_x(\mathbf{x}) \\ \chi_x^{(+)'} &= \int_{\sigma_2} d\sigma\, \overline{\psi}_x(\mathbf{x})\, \gamma_0 \psi^{(+)'}(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \varepsilon_x = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \chi_x^{(-)'} &= \int_{\sigma_1} d\sigma\, \overline{\psi}_x(\mathbf{x})\, \gamma_0 \psi^{(-)'}(x) \\ \chi_x^{(+)'} &= \int_{\sigma_2} d\sigma\, \overline{\psi}^{(+)'}(x)\, \gamma_0 \psi_x(\mathbf{x}) \end{aligned}\right\} \quad \text{при } \varepsilon_x = -1, \tag{5.14}$$

функция преобразования (5.9) получается в виде

$$\exp\left[-iE(0)\,T + \sum_x \chi_x^{(-)'} \exp(-iE_x T + ie\varepsilon_x \alpha)\, \chi_x^{(+)'}\right] = \\ = \sum_n (\chi^{(-)'} \mid n) \exp(-iP_0' T + iQ'\alpha)(n \mid \chi^{(+)'}), \tag{5.15}$$

где

$$P_0' = E(0) + \sum_x n_x E_x, \quad n_x = 0, 1, \quad Q' = \sum_x n_x e\varepsilon_x, \tag{5.16}$$

и

$$\begin{aligned} (n \mid \chi^{(+)'}) &= \prod_x (\chi_x^{(+)'})^{n_x}, \\ (\chi^{(-)'} \mid n) &= {}'\prod_x (\chi_x^{(-)'})^{n_x}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Очевидно, что $E(0)$ представляет энергию измененного вакуумного состояния, т. е. минимальную энергию состояния системы, для которого $n_x = 0$.

Энергия вакуума. Чтобы получить формулу для $E(0)$, заметим, что вариация $\delta A_\mu(\mathbf{x})$ вызывает изменение функции Грина, которое описывается уравнением

$$\{\gamma_\mu[-i\partial_\mu - eA_\mu(\mathbf{x})] + m\}\, \delta G_+(x, x') = \\ = e\gamma_\mu\, \delta A_\mu(\mathbf{x})\, G_+(x, x'). \tag{5.18}$$

Левую часть этого уравнения можно записать в виде

$$(-i\gamma_0 \partial_0 + \gamma_0 H)\, \delta G_+(x, x')$$

и, следовательно,

$$\delta E(0) = -\int (dx)\,\mathrm{tr}\,(\gamma_0\partial_0 + i\gamma_0 H)\,\delta G_+(x, x')]_{x'\to x}. \quad (5.19)$$

При этом H является дифференциальным оператором, относящимся только к пространственным координатам, так что в правой части формулы (5.19) в функции Грина при переходе к равным временам можно взять усредненный предел, т. е.

$$-\int (dx)\,\mathrm{tr}\,i\gamma_0 H\delta G_+(x, x')\,]_{x'\to x} = \frac{1}{2}\int (d\mathbf{x})\,\mathrm{tr}\,\gamma_0 H \times$$
$$\times\, \delta\left(\sum_\varkappa \varepsilon_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\right)\Big]_{\mathbf{x}'\to\mathbf{x}}. \quad (5.20)$$

Ввиду формальной эрмитовости оператора H, которая обеспечивается при использовании дискретных собственных функций, оператор $\gamma_0 H$ всегда можно применить к неизменной собственной функции в выражении (5.20), вследствие чего последнее равенство принимает вид

$$\frac{1}{2}\sum_\varkappa E_\varkappa \delta\left(\int (d\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa\gamma_0\psi_\varkappa\right) = 0. \quad (5.21)$$

Можно теперь проинтегрировать формулу (5.19) и получить

$$E(0) = -\int (d\mathbf{x})\,\mathrm{tr}\,\gamma_0\partial_0\left(G_+(x, x') - G_+^0(x, x')\right)]_{x'\to x}. \quad (5.22)$$

Так как

$$\begin{aligned}\int (d\mathbf{x})\,\mathrm{tr}\,\gamma_0 G_+(x, x')\,]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} &= i\sum_+ e^{-iE_\varkappa(x_0-x_0')},\ x_0 > x_0',\\ \int (d\mathbf{x})\,\mathrm{tr}\,\gamma_0 G_+(x, x')\,]_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}} &= -i\sum_- e^{iE_\varkappa(x_0-x_0')},\ x_0 < x_0',\end{aligned} \quad (5.23)$$

то усредненный предел дается формулой

$$E(0) = -\frac{1}{2}\sum_\varkappa (E_\varkappa - E_\varkappa^0). \quad (5.24)$$

При видоизменении этой процедуры, приводящем непосредственно к формуле (5.24), используется свойство собственных значений, а именно:

$$\delta E_\varkappa = -\varepsilon_\varkappa \int (d\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa e\gamma_\mu\delta A_\mu\psi_\varkappa; \quad (5.25)$$

это выражение эквивалентно соотношениям (5.20) и (5.21).

Для статических полей, которые эффективно локализованы в конечнем объеме, спектр $E_{\varkappa}$ будет состоять из континуума, простирающегося от m до бесконечности, и; возможно, дискретных значений (меньших m), которые соответствуют связанным состояниям поля Дирака. Полностью дискретный спектр, которым мы пользовались, может быть достигнут при помощи обычного искусственного приема, т. е. рассматривая большой, но конечный объем в трехмерном пространстве, определяемый радиусом R. Собственная функция характеризуется собственным значением энергии E и совокупностью других величин γ. Собственная функция типа γ с $E > m$ будет иметь асимптотический вид, содержащий тригонометрические функции от $p|\mathbf{x}| + \varphi$, где $p = (E^2 - m^2)^{1/2}$ и φ — постоянная фаза. Если мы при $|\mathbf{x}| = R$ наложим некоторые простые граничные условия (например, $B\psi = 0$, где B является матрицей второго ранга), то уравнение для собственных значений примет вид

$$pR + \varphi = n\pi + \beta, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5.26}$$

где β зависит от выбора граничного условия. Таким образом, число собственных функций типа γ в интервале dE равно

$$dn = \frac{1}{\pi}\frac{dp}{dE}R\,dE = \frac{dE}{\Delta E}, \tag{5.27}$$

где ΔE — интервал между соседними собственными значениями.

Уравнение для собственных значений в случае нулевого внешнего поля аналогичным образом записывается в виде

$$p^0R + \varphi^0 = n\pi + \beta, \tag{5.28}$$

так что статическое поле вызывает в заданном состоянии смещение энергии

$$E - E^0 = \frac{dE}{dp}R^{-1}(p - p^0)\,R = -\Delta E\,\frac{\delta}{\pi}, \tag{5.29}$$

где $\delta_{\gamma E}$ — фазовый сдвиг, равный $\varphi - \varphi^0$. Поэтому, если $\delta = \nu\pi$, $\nu = 1,\ 2,\ \ldots$, действие статического поля проявляется в смещении n-го состояния на уровень, который был $(n - \nu)$-м невозмущенным состоянием. Иначе говоря, ν состояний (типа γ) опускаются ниже энергетического уровня E. Будем считать связанным такое состояние, которое сместилось ниже минимальной невозмущенной энергии $E=m$ и стало обособленным, как настоящее состояние дискретного спектра. Если имеется ν_γ связанных состояний типа γ, т. е. много состояний смещено ниже уровня $E=m$, то мы должны иметь

$$\delta_{\gamma m} = \nu_\gamma \pi. \tag{5.30}$$

Как следствие этого замечания о происхождении связанных состояний из невозмущенных состояний, энергия которых E бесконечно мало отличается от m, мы видим, что вклад связанных состояний в формулу (5.24) равен $-\frac{1}{2}\sum(E'_\varkappa - m)$; здесь мы написали $E'_\varkappa$ для дискретных собственных значений, для которых $E'_\varkappa < m$. Для состояний с энергией $E > m$ мы комбинируем выражения (5.27) и (5.29). При этом для данного типа γ

$$dn\,(E - E^0) = -dE\frac{\delta}{\pi}, \tag{5.31}$$

и $E(0)$ выражается через дискретные собственные значения энергии и фазовые смещения для состояний непрерывного спектра в виде

$$E(0) = \frac{1}{2}\sum_\varkappa (m - E'_\varkappa) + \frac{1}{2\pi}\int_m^\infty dE \sum_\gamma \delta_{\gamma E}. \tag{5.32}$$

Методы, использующие определители. Получим теперь более точные результаты, применяя трехмерный вариант метода вычислений, развитого в предыдущей статье для полей, локализованных в пространстве и во времени. Введем преобразование Фурье для функции Грина

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0\, e^{ip_0(x_0 - x'_0)} G_+(x, x') \tag{5.33}$$

или, используя представление функции Грина через собственные функции, напишем

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = i\int_0^\infty dt \sum_+ \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\,e^{-i(E_\varkappa - p_0)t} -$$
$$- i\int_0^\infty dt \sum_- \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\,e^{-i(E_\varkappa + p_0)t}, \tag{5.34}$$

где мы положили $t = |x_0 - x_0'|$. Здесь полезно дать уточнение G_+ при помощи бесконечно малой отрицательной мнимой добавки к m.

Влияние последней добавки на собственные значения энергии состояний непрерывного спектра выражается в том, что для производной $dE_\varkappa/dm$ будем иметь

$$\frac{dE_\varkappa}{dm} = \frac{m}{E_\varkappa} > 0.$$

Для связанных состояний используем следующую форму теоремы вириала:

$$m\frac{dE_\varkappa'}{dm} = E_\varkappa' + \varepsilon_\varkappa \int (d\mathbf{x})\, \bar{\psi}_\varkappa(\mathbf{x})\,(1 + \mathbf{x}\cdot\nabla)\,\gamma_\mu A_\mu(\mathbf{x})\,\psi_\varkappa(\mathbf{x}); \tag{5.35}$$

она получается дифференцированием по m после введения величины $1/m$ в качестве единицы длины. Так, для кулонова поля соотношения $m\dfrac{dE_\varkappa'}{dm} = E_\varkappa'$ и $\dfrac{dE_\varkappa'}{dm} = 0$ могут иметь место только тогда, когда $E_\varkappa' = 0$, что исключено. Между прочим последнее обстоятельство осуществляется для наинизшего энергетического состояния при $Z = 137$. Только для полей более сингулярных, чем кулоново поле, неравенство $\dfrac{dE_\varkappa'}{dm} > 0$ не будет следствием неравенства $E_\varkappa' > 0$. Исключая из рассмотрения такие поля, можно утверждать, что

$$\frac{dE_\varkappa}{dm} > 0$$

и каждое собственное значение энергии приобретает бесконечно малую отрицательную мнимую часть при замене m на $m - i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это означает, что все интегралы по времени в соотношении (5.34) сходятся для действительных p_0 и что

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \sum_\varkappa \frac{\psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')}{\varepsilon_\varkappa E_\varkappa - p_0}. \tag{5.36}$$

Мы видим, что функция Грина $G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$, рассматриваемая как функция от p_0, имеет полюса при $p_0 = E_\varkappa$, $\varepsilon_\varkappa = 1$ и $p_0 = -E_\varkappa$, $\varepsilon_\varkappa = -1$, которые бесконечно мало смещены вниз и вверх от действительной оси соответственно. Для пространственно локализованных полей, которые мы рассматриваем, функция Грина может иметь изолированные полюса, соответствующие дискретным связанным состояниям, в то время как состояния непрерывного спектра дают две линии полюсов, начинающиеся при $\pm m$ и простирающиеся до бесконечности. Это означает, что точки $\pm m$ являются точками ветвления для функции $G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ как функции от p_0. Эта функция Грина удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{\gamma_\mu [p_\mu - eA_\mu(\mathbf{x})] + m\} G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (5.37)$$

где $p_k = -i\partial_k$, и мы ищем такое решение, которое для действительных p_0 является регулярной функцией комплексного переменного m в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} m < 0$. Конечно, нас интересует только предел для действительного переменного m, достигаемого из нижней полуплоскости. Преобразование, обратное (5.33), имеет вид

$$G_+(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 e^{-ip_0(x_0 - x_0')} G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0). \quad (5.38)$$

То обстоятельство, что функция, записанная таким образом, удовлетворяет условию расходящихся волн, характерному для $G_+(x, x')$, следует из расположения сингулярностей функции, определяемой выражением (5.36), которое воспроизводит разложение (5.12).

Функция Грина, определяемая условиями сходящихся волн,

$$\begin{aligned} G_-(x, x') &= i \sum_- \psi_\varkappa(x) \overline{\psi}_\varkappa(x'), \qquad x_0 > x_0', \\ G_-(x, x') &= -i \sum_+ \psi_\varkappa(x) \overline{\psi}_\varkappa(x'), \qquad x_0 < x_0' \end{aligned} \quad (5.39)$$

может быть представлена с помощью преобразования Фурье

$$\begin{aligned} G_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = i \int_0^\infty dt \sum_- \psi_\varkappa(\mathbf{x}) \overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}') e^{i(E_\varkappa + p_0)t} - \\ - i \int_0^\infty dt \sum_+ \psi_\varkappa(\mathbf{x}) \overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}') e^{i(E_\varkappa - p_0)t}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

которое существует, если массе m приписывается положительная мнимая часть; тогда

$$G_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \sum_\varkappa \frac{\psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar\psi_\varkappa(\mathbf{x}')}{\varepsilon_\varkappa E_\varkappa - p_0}. \tag{5.41}$$

Функция Грина $G_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{\gamma_\mu[p_\mu - eA_\mu(\mathbf{x})] + m\}\,G_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \tag{5.42}$$

и представляет собой решение, которое является регулярной функцией от m в верхней полуплоскости, $\operatorname{Im} m > 0$. Из выражений (5.36) и (5.41) ясно, что функция G_- является аналитическим продолжением функции G_+ на верхнюю полуплоскость комплексного m.

Разрыв на действительной оси m дается выражением

$$G_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) =$$
$$= \sum_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar\psi_\varkappa(\mathbf{x}')\,\{[\varepsilon_\varkappa E_\varkappa(m+i\varepsilon) - p_0]^{-1} - [\varepsilon_\varkappa E_\varkappa(m-i\varepsilon) - p_0]^{-1}\} =$$
$$= -2\pi i \sum_\varkappa \delta(\varepsilon_\varkappa E_\varkappa - p_0)\,\varepsilon_\varkappa \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\bar\psi_\varkappa(\mathbf{x}'). \tag{5.43}$$

Поэтому если $|p_0| < m$, то мы имеем $G_- = G_+$ почти всюду, причем исключениями являются разрывы типа δ-функции при $p_0 = \varepsilon_\varkappa E'_\varkappa$, которые соответствуют связанным состояниям. Непрерывный спектр дает конечный разрыв при $|p_0| > m$. Эти утверждения выражают характер сингулярностей функции Грина, представляющих собой изолированные полюса и точки ветвления. Простым примером является функция $G^0_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$, описывающая случай отсутствия поля. Так,

$$G^0_\pm(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = (\gamma p + m \mp i\varepsilon)^{-1}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') =$$
$$= (m - \gamma p)\,[\mathbf{p}^2 - (p_0^2 - m^2 \pm i\varepsilon)]^{-1}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') =$$
$$= (m + \gamma_0 p_0 + i\boldsymbol{\gamma}\nabla)\left\{\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\,\times\right.$$
$$\left.\times \exp[\pm i(p_0^2 - m^2)^{1/2}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|]\right\}, \tag{5.44}$$

где

$$\pm i(p_0^2 - m^2)^{1/2} = -(m^2 - p_0^2)^{1/2}, \quad |p_0| < m. \tag{5.45}$$

Мы видим, что $G_-^0 = G_+^0$ при $|p_0| < m$ (это соответствует отсутствию связанных состояний), тогда как при $|p_0| > m$ разность $G_-^0 - G_+^0$ конечна, что указывает на наличие непрерывного спектра, простирающегося от m до бесконечности.

Вернемся к дифференциальному выражению для $E(0)$ и запишем

$$\delta E(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \int (dx)\,\mathrm{tr}\, ie\gamma_\mu\,\delta A_\mu(\mathbf{x})\, G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x},\ p_0) =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\,\mathrm{Tr}\, e\gamma\,\delta A G_+(p_0); \tag{5.46}$$

в последнем выражении используется матричное обозначение для спинорных индексов и пространственных координат. При этих обозначениях дифференциальное уравнение (5.37) принимает вид

$$[\gamma(p - eA) + m]\, G_+(p_0) = 1, \tag{5.47}$$

в то время как уравнением для случая свободного поля будет

$$[\gamma p + m]\, G_+^0(p_0) = 1. \tag{5.48}$$

По аналогии с четырехмерным случаем можно построить интегральные уравнения (4.22) и использовать их формальное решение (4.23) для вычисления величины

$$\mathrm{Tr}\, e\gamma\,\delta A G_+(p_0) = \mathrm{Tr}\, e\gamma\,\delta A G_+^0(p_0)\,[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]^{-1} =$$

$$= -\delta \ln\det[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]. \tag{5.49}$$

Таким образом,

$$E(0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln\det[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)], \tag{5.50}$$

или

$$E(0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\,\mathrm{Tr}\ln[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]. \tag{5.51}$$

Необходимо заметить, что

$$D_+(p_0) = \det[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)] \tag{5.52}$$

не является четной функцией от e в противоположность своему четырехмерному аналогу. В действительности имеем

$$D_+(p_0) = \det[1 + e\gamma A G_+^0(-p_0)]. \tag{5.53}$$

Это является следствием структуры зарядово-сопряженной функции Грина

$$_cG_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = C G_+^{\mathrm{tr}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, -p_0) C^{-1}, \tag{5.54}$$

где появление аргумента $-p_0$ эквивалентно при преобразовании Фурье перестановке x_0 и x_0' в выражении (4.6). Так как

$$_cG_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0), \tag{5.55}$$

то транспозиция матрицы в соотношении (5.52) дает формулу (5.53). Конечно,

$$E(0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln D_+(p_0) = \frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln[D_+(p_0) D_+(-p_0)] \tag{5.56}$$

является четной функцией от e.

Чтобы установить характер функциональной зависимости $D_+(p_0)$ от e или от параметра, измеряющего напряженность внешнего поля, запишем

$$D_+(p_0) = \exp\left\{-\mathrm{Tr}[e\gamma A G_+^0(p_0)] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[e\gamma A G_+^0(p_0)]^2\right\} D_+''(p_0), \tag{5.57}$$

где

$$D_+''(p_0) = \det{}''[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]; \tag{5.58}$$

также имеем

$$\begin{aligned}[D_+(p_0)]^2 &= \det[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)] \det[1 + e\gamma A G_+^0(-p_0)] = \\ &= \det\{1 - e\gamma A[G_+^0(p_0) - G_+^0(-p_0)] - e\gamma A G_+^0(p_0) e\gamma A G_+^0(-p_0)\} = \\ &= \exp\{-2\,\mathrm{Tr}[e\gamma A G_+^0(p_0)] - \mathrm{Tr}[e\gamma A G_+^0(p_0) e\gamma A G_+^0(-p_0)]\} \times \\ &\times \det{}'(1 + \lambda K).\end{aligned} \tag{5.59}$$

Здесь использовано соотношение зарядовой симметрии

$$\mathrm{Tr}\, e\gamma A G_+^0(p_0) = -\mathrm{Tr}\, e\gamma A G_+^0(-p_0) \tag{5.60}$$

и введено обозначение

$$\lambda K = -e\gamma A\,[G_+^0(p_0) - G_+^0(-p_0)] - \\ - e\gamma A G_+^0(p_0)\, e\gamma A G_+^0(-p_0). \qquad (5.61)$$

Таким образом,

$$[D_+''(p_0)]^2 = \exp\left\{\frac{1}{2}\operatorname{Tr}[e\gamma A(G_+^0(p_0) - G_+^0(-p_0))]^2\right\} \times \\ \times \det{}'(1+\lambda K) \qquad (5.62)$$

и доказательство того, что правая часть является целой функцией от e, устанавливает то же свойство для $D_+''(p_0)$.

Выше было показано, что определитель $\det{}'(1+\lambda K)$ является целой функцией от λ, если след $\operatorname{Tr}\lambda K(\lambda K)^\dagger$ конечен. Чтобы применить этот критерий, воспользуемся соотношениями

$$G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-2}, \\ G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -p_0) \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \qquad (5.63)$$

при $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, выводимыми из выражения (5.44). Рассмотрим вопрос о сходимости в окрестности точки $\mathbf{x}_0$, где

$$A(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-(1-\beta)}. \qquad (5.64)$$

Второй член в выражении (5.61) является трехмерным аналогом выражения (4.74), и обсуждение последнего интеграла показывает, что условием сходимости при этом будет $12 > 4(1-\beta) + 8$, или $\beta > 0$. Легко проверить, что дополнительные члены, происходящие от первого члена выражения (5.61), являются более быстро сходящимися в силу уменьшенной сингулярности выражения $G_+^0(p_0) - G_+^0(-p_0)$. То же утверждение относится к аргументу показательной функции в выражении (5.62).

Дадим также более точную характеристику ограничения, наложенного на пространственно локализованные поля, рассматривая потенциалы, которые имеют асимптотическое поведение

$$A(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^{-(2+\beta')} \qquad (5.65)$$

при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Соответствующим свойством функций Грина при $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| \to \infty$, будет

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0), \quad [G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', -p_0)] \sim |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1} \times \\ \times \exp[i(p_0^2 - m^2)^{1/2} |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|], \tag{5.66}$$

где $|\exp[i(p_0^2-m^2)^{1/2}|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|]| \leqslant 1$. Рассматривая, например, второй член в выражении (5.61), мы должны проверить сходимость на бесконечности интеграла

$$\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')(d\mathbf{x}_1)(d\mathbf{x}_2) A(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}') A(\mathbf{x}_1) A(\mathbf{x}_2) \times \\ \times [|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1||\mathbf{x}_1-\mathbf{x}'||\mathbf{x}'-\mathbf{x}_2||\mathbf{x}_2-\mathbf{x}|]^{-1},$$

условием сходимости его будет неравенство $12 < 4 \times (2+\beta') + 4$, или $\beta' > 0$. Все другие встречающиеся при этом члены приводят к тому же условию. Мы заключаем, что для потенциалов[1]), которые менее сингулярны, чем $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{-1}$, и которые убывают на бесконечности быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-2}$, функция $D''_+(p_0)$ является целой функцией параметра, характеризующего напряженность поля, и представляется сходящимся степенным рядом

$$D''_+(p_0) = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-e)^n}{n!} \int (d\mathbf{x}_1) \ldots (d\mathbf{x}_n) \times \\ \times \operatorname{tr} \left\{ \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i A(\mathbf{x}_i)] \operatorname{det}''_{(n)} G^0_+(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, p_0) \right\}. \tag{5.67}$$

---

[1]) В нерелятивистском пределе сингулярность функции Грина уменьшается до $|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^{-1}$ при $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, и соответствующий класс скалярных потенциалов включает такие, которые менее сингулярны, чем $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{-2}$, и которые убывают на бесконечности быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-2}$. Для потенциалов, которые сингулярны только в начале координат, эти критерии комбинируются в условие $\int_0^\infty d|\mathbf{x}|\,|\mathbf{x}| \times |eA_0(\mathbf{x})| < \infty$, которое совпадает с условием (46) работы [3].

Теперь можно воспользоваться соотношением (4.61), которое дает элементы матрицы

$$[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]^{-1} - 1 - e\gamma A G_+^0(p_0) = \\ = e\gamma A [G_+(p_0) - G_+^0(p_0)] \quad (5.68)$$

по аналогии с соотношением (4.69). Нам нужно только переписать выражение (4.70) в форме

$$D''_+(p_0)[G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n}{n!} \int (d\mathbf{x}_1) \ldots (d\mathbf{x}_n) \operatorname{tr} \left\{ \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i A(\mathbf{x}_i)] \times \right. \\ \left. \times \det{}''_{(n+1)} \begin{bmatrix} 0, & G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j, p_0) \\ G_+^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}', p_0), & G_+^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, p_0) \end{bmatrix} \right\}; \quad (5.69)$$

это позволит выразить $G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ в виде отношения двух целых функций. Можно также представить этот результат при помощи матрицы $I(p_0)$, определяемой равенством

$$G_+(p_0) = G_+^0(p_0) + G_+^0(p_0) I(p_0) G_+^0(p_0). \quad (5.70)$$

Таким образом,

$$D''_+(p_0) I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e)^n}{n!} \int (d\mathbf{x}_1) \ldots (d\mathbf{x}_n) \times \\ \times \operatorname{tr} \left\{ \prod_{i=1}^{n} [\gamma_i A(\mathbf{x}_i)] \det{}''_{(n+1)} \begin{bmatrix} 0, & \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \\ \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'), & G_+^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, p_0) \end{bmatrix} \right\}. \quad (5.71)$$

Свойства функции $D''_+(p_0)$ различны в двух областях $|p_0| < m$ и $|p_0| > m$. Заметим сначала, что функции $D_+(p_0)$ и $D''_+(p_0)$ являются действительными, если $|p_0| < m$. Это очевидно, если заметить, что функция

$$D_-(p_0) = D_+(p_0)^* \quad (5.72)$$

получается из функции $D_+(p_0)$ при замене G_+^0 на G_-^0, а эти функции Грина равны, если $|p_0| < m$. Другим утверждением, относящимся ко второй области, является то, что функция $D''_+(p_0)$ имеет, по крайней мере, один нуль[1] как функция величины параметра, характеризующего напряженность поля. Это мы докажем для электростатических полей, у которых потенциал A_0 имеет постоянный знак. Начнем с соотношения

$$D_+(p_0)\,D_+(-p_0) = \exp\{\operatorname{Tr}\ln[1-(e\gamma A G^0_+(p_0))^2]\} = \\ = \exp\{-\operatorname{Tr}[e\gamma A G^0_+(p_0)]^2\}\,D''_+(p_0)\,D''_+(-p_0). \qquad (5.73)$$

Для достаточно слабых полей можно разложить логарифм и получить

$$D''_+(p_0)\,D''_+(-p_0) = \exp\left\{-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{Tr}[e\gamma A G^0_+(p_0)]^{2n}\right\}, \qquad (5.74)$$

где отдельные следы все конечны. Мы рассматриваем электростатические поля, для которых потенциал $A_0(\mathbf{x})$ обладает определенным знаком. Так как выражение (5.74) является четной функцией от eA_0, то без ограничения общности можно считать знак произведения eA_0 положительным; изменение знака перед A_0 переставляет местами функции $D''_+(p_0)$ и $D''_+(-p_0)$. Заметим теперь, что

$$\operatorname{Tr}[e\gamma A G^0_+(p_0)]^{2n} = \operatorname{Tr}K^n, \qquad (5.75)$$

где матрица

$$K = [(eA_0)^{1/2}\gamma_0 G^0_+(p_0)(eA_0)^{1/2}]^2 \qquad (5.76)$$

является эрмитовой и положительно-определенной. Поэтому след $\operatorname{Tr}K^n$ действителен и положителен. Эти следы удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Tr}K^{n+m} \leqslant \operatorname{Tr}K^n \cdot \operatorname{Tr}K^m, \qquad (5.77)$$

$$(\operatorname{Tr}K^n)^2 \leqslant \operatorname{Tr}K^{n-l} \cdot \operatorname{Tr}K^{n+l}, \qquad (5.78)$$

из которых выводим, что

$$\operatorname{Tr}K^n \leqslant (\operatorname{Tr}K^2)^{\frac{1}{2}n}, \quad n = 2, 3, \ldots \qquad (5.79)$$

Таким образом, ряд (5.74) сходится, если

$$\operatorname{Tr}K^2 = \operatorname{Tr}[eA_0\gamma_0 G^0_+(p_0)]^4 < 1. \qquad (5.80)$$

---

[1] Это является аналогом теоремы Шмидта (см. [4]).

Но из неравенства (5.78) также вытекает, что

$$\frac{\operatorname{Tr} K^{n+1}}{\operatorname{Tr} K^{n}} \geqslant \frac{\operatorname{Tr} K^{n}}{\operatorname{Tr} K^{n-1}} \ldots \geqslant \frac{\operatorname{Tr} K^{3}}{\operatorname{Tr} K^{2}}, \tag{5.81}$$

и поэтому сумма положительных членов в разложении (5.74) наверняка расходится, если

$$\frac{\operatorname{Tr} K^{3}}{\operatorname{Tr} K^{2}} \geqslant 1; \tag{5.82}$$

это указывает на обращение в нуль выражения $D''_{+}(p_0) \times \times D''_{+}(-p_0)$ для некоторой напряженности поля, равной или меньшей той, которая определяется выражением

$$\operatorname{Tr}\,[eA_0\gamma_0 G^0_{+}(p_0)]^6 = \operatorname{Tr}\,[eA_0\gamma_0 G^0_{+}(p_0)]^4. \tag{5.83}$$

Чтобы установить, который из множителей исчезает при данном знаке произведения $eA_0(\mathbf{x})$, рассмотрим достаточно слабое поле и исследуем зависимость выражения

$$\frac{D''_{+}(p_0)}{D''_{+}(-p_0)} = \exp\left\{-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\operatorname{Tr}\,[e\gamma A G^0_{+}(p_0)]^{2m+1}\right\} \tag{5.84}$$

от p_0. С этой целью заметим, что уравнение

$$(\gamma p + m)\frac{\partial}{\partial p_0} G^0_{+}(p_0) = \gamma_0 G^0_{+}(p_0) \tag{5.85}$$

имеет единственное решение:

$$\frac{\partial}{\partial p_0} G^0_{+}(p_0) = G^0_{+}(p_0)\,\gamma_0 G^0_{+}(p_0). \tag{5.86}$$

Предположим, что произведение $eA_0(\mathbf{x})$ положительно. Тогда выражение

$$\frac{\partial}{\partial p_0}\ln\left[\frac{D''_{+}(p_0)}{D''_{+}(-p_0)}\right] = 2\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{Tr}\,[(eA_0)^{1/2}(\gamma_0 G^0_{+} eA_0)^m \times$$
$$\times\, \gamma_0 G^0_{+}\gamma_0 G^0_{+}(eA_0\gamma_0 G^0_{+})^m (eA_0)^{1/2}] \tag{5.87}$$

действительно и положительно, так как каждый член имеет вид $\operatorname{Tr} KK^{\dagger}$. Следовательно, логарифм возрастает монотонно при возрастании p_0 от нуля и

$$\frac{D''_{+}(p_0)}{D''_{+}(-p_0)} > 1 \tag{5.88}$$

при $p_0 > 0$, т. е. при $eA_0 > 0$ именно функция $D''_{+}(-p_0)$ исчезает при $p_0 > 0$ для соответствующей напряженности поля. Аналогично функция $D''_+(p_0)$ при $p_0 > 0$ является тем множителем, который исчезает при $eA_0 < 0$. Итак, для любого $p_0 \neq 0$ в интервале $|p_0| < m$ имеются определенная напряженность поля и ее знак, для которых $D''_+(p_0) = 0$.

Качественно зависимость этой величины поля от p_0 можно также вывести из выражения (5.87). Пусть $\lambda(p_0)$ будет значением параметра, соответствующим напряженности поля, для которой $D''_+(p_0) = 0$. Выражение (5.87) справедливо для $\lambda < \lambda(p_0)$. Рассматриваемый определитель $D''_+(p_0)$, как функция от λ, очевидно, содержит множитель $\lambda(p_0) - \lambda$, который в производной (5.87) дает член

$$[\lambda(p_0) - \lambda]^{-1}\left[\frac{d\lambda(p_0)}{dp_0}\right].$$

Он преобладает, когда λ приближается к $\lambda(p_0)$ снизу, и должен поэтому быть положительным. Мы заключаем, что

$$\frac{d\lambda(p_0)}{dp_0} > 0 \qquad (5.89)$$

при $eA_0 > 0$. Таким образом, при возрастании p_0 от $-m$ критическая напряженность поля должна возрастать. Если произведение eA_0 отрицательно, то логарифмическая производная (5.87) отрицательна и $d\lambda(p_0)/dp_0 < 0$; при уменьшении p_0 от m величина поля должна возрастать для сохранения равенства $D''_+(p_0) = 0$.

Мы получили эти результаты без ссылки на то обстоятельство, что корни $D''_+(p_0)$ являются частотами связанных состояний. Уравнение

$$G_+(p_0) - G^0_+(p_0) = G^0_+(p_0)e\gamma AG_+(p_0) = \\ = G_+(p_0)e\gamma AG^0_+(p_0) \qquad (5.90)$$

показывает, что в нуле функции $D''_+(p_0)$, который для простоты не предполагается кратным, функция $D''_+(p_0) \times \times G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ удовлетворяет однородным интегральным уравнениям

$$\psi(\mathbf{x}) = \int (d\mathbf{x}')\, G^0_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)e\gamma A(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') \qquad (5.91)$$

и

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}) = \int (d\mathbf{x}')\, \bar{\psi}(\mathbf{x}')e\gamma A(\mathbf{x}')G^0_+(\mathbf{x}', \mathbf{x}, p_0), \qquad (5.92)$$

которые определяют ее зависимость от переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ соответственно. Следовательно, в окрестности корня $\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa$ имеем

$$G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0) \sim \frac{\psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')}{\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa - p_0}. \tag{5.93}$$

Используемую при этом нормировку собственной функции $\psi_\varkappa(\mathbf{x})$ можно вывести из равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p_0}\ln D_+(p_0) &= \\ &= -\operatorname{Tr}\{[1 - e\gamma A G^0_+(p_0)]^{-1} e\gamma A G^0_+(p_0)\gamma_0 G^0_+(p_0)\} = \\ &= -\operatorname{Tr}\{[G_+(p_0) - G^0_+(p_0)]\gamma_0\},\end{aligned} \tag{5.94}$$

а именно:

$$\int (d\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x})\,\gamma_0\psi_\varkappa(\mathbf{x}) = 1. \tag{5.95}$$

Для действительных значений p_0, превышающих m по абсолютной величине, $D_+(p_0)$ является комплексным числом. Его фаза определяется выражением

$$\frac{D_-(p_0)}{D_+(p_0)} = \det\{1 + I(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\}, \tag{5.96}$$

как это следует из соотношения

$$\begin{aligned}[1 - e\gamma A G^0_+(p_0)]^{-1}[1 - e\gamma A G^0_-(p_0)] &= \\ &= 1 + I(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)].\end{aligned} \tag{5.97}$$

Меняя местами G^0_+ и G^0_-, получаем

$$\frac{D_+(p_0)}{D_-(p_0)} = \det\{1 - \overline{I}(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\}. \tag{5.98}$$

Для непосредственной проверки того, что произведение этих двух определителей равно единице, следует использовать преобразование Фурье [см. соотношение (4.94)], а именно:

$$\begin{aligned}I(p_0) - \overline{I}(p_0) &= I(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\overline{I}(p_0) = \\ &= \overline{I}(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]I(p_0).\end{aligned} \tag{5.99}$$

Равенством, аналогичным соотношению (5.96) и характеризующим фазу определителя $D''_+(p_0)$, будет

$$\frac{D''_-(p_0)}{D''_+(p_0)} = \exp\{-\operatorname{Tr} I^{(1)}(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\} \times$$
$$\times \det\{1 + I(p_0)[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\}, \qquad (5.100)$$

где введено сокращенное обозначение:

$$I^{(1)}(p_0) = e\gamma A + e\gamma A \frac{1}{2}[G^0_+(p_0) + G^0_-(p_0)]\, e\gamma A. \qquad (5.101)$$

Учитывая выражения (5.43) и (3.55), видим, что

$$G^0_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G^0_-(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) =$$
$$= 2\pi i \sum_{\lambda\mathbf{p}} \delta(\varepsilon(\lambda) E_{\mathbf{p}} - p_0)\, \varepsilon(\lambda)\, \psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})\, \bar{\psi}_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x}'), \qquad (5.102)$$

где

$$E_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2} \qquad (5.103)$$

(ранее мы употребляли символ p_0 для этой величины), а $\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ являются собственными функциями

$$\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \left[\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} \frac{m}{E_{\mathbf{p}}}\right]^{1/2} u_{\lambda\mathbf{p}}\, e^{i\varepsilon(\lambda)\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \qquad (5.104)$$

Суммирование в выражении (5.102) ограничено состояниями с частотой p_0, т. е. состояниями с $E_{\mathbf{p}} = |p_0|$ и $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(p_0)$. Удобно характеризовать состояния не при помощи величин $\lambda\mathbf{p}$, а при помощи величины $p_0 = \varepsilon(\lambda) E_{\mathbf{p}}$ и индекса a, который включает как $|\lambda|$, так и направление $\mathbf{p}$. Запишем

$$(d\mathbf{p}) = p^2\, dp\, d\omega = pE_{\mathbf{p}}\, dE_{\mathbf{p}}\, d\omega \qquad (5.105)$$

($d\omega$ — элемент телесного угла) и

$$\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = (dE_{\mathbf{p}})^{1/2}\, \varphi_{ap_0}(\mathbf{x}), \qquad (5.106)$$

так что

$$\varphi_{ap_0}(\mathbf{x}) = \left[\frac{mp\, d\omega}{(2\pi)^3}\right]^{1/2} u_{\lambda\mathbf{p}}\, e^{i\varepsilon(p_0)\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}. \qquad (5.107)$$

Мы можем тогда выполнить интегрирование по $E_{\mathbf{p}}$ в выражении (5.102), после чего получим

$$G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) - G_-^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \\ = 2\pi i\varepsilon(p_0) \sum_a \varphi_{ap_0}(\mathbf{x}) \overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}'). \quad (5.108)$$

Матрицы, определяемые равенствами

$$I_{ab}(p_0) = \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') \overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}) I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) \varphi_{bp_0}(\mathbf{x}'),$$
$$I_{ab}^{\dagger}(p_0) = \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') \overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}) \overline{I}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) \times \\ \times \varphi_{bp_0}(\mathbf{x}') = I_{ba}(p_0)^*, \quad (5.109)$$

обладают, согласно формулам (5.99) и (5.108), следующими свойствами:

$$I_{ac}(p_0) - I_{ac}^{\dagger}(p_0) = 2\pi i\varepsilon(p_0) \sum_b I_{ab}(p_0) I_{bc}^{\dagger}(p_0) = \\ = 2\pi i\varepsilon(p_0) \sum_b I_{ab}^{\dagger}(p_0) I_{bc}(p_0). \quad (5.110)$$

Мы приходим при этом к унитарной матрице $s(p_0)$ с элементами

$$s_{ab}(p_0) = \delta_{ab} + 2\pi i\varepsilon(p_0) I_{ab}(p_0). \quad (5.111)$$

Таким образом,

$$\sum_b s_{ab}^{\dagger}(p_0) s_{bc}(p_0) = \sum_b [\delta_{ab} - 2\pi i\varepsilon(p_0) I_{ab}^{\dagger}(p_0)] \times \\ \times [\delta_{bc} + 2\pi i\varepsilon(p_0) I_{bc}(p_0)] = \\ = \delta_{ac} + 2\pi i\varepsilon(p_0) [I_{ac}(p_0) - I_{ac}^{\dagger}(p_0) - \\ - 2\pi i\varepsilon(p_0) \sum_b I_{ab}^{\dagger}(p_0) I_{bc}(p_0)] = \delta_{ac} \quad (5.112)$$

и, аналогично, находим, что

$$s(p_0) s^{\dagger}(p_0) = 1;$$

в этом равенстве мы могли бы, собственно говоря, написать $1(p_0)$, чтобы подчеркнуть, что элементы $s(p_0)$ относятся исключительно к состояниям с частотой p_0.

Чтобы убедиться в том, что определитель (5.96) можно представить в виде $\det s(p_0)$, рассмотрим следы последовательных степеней выражения $I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)]$. Первые два следа, а именно:

$$\operatorname{Tr}\{I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)]\} = \sum_a 2\pi i \varepsilon(p_0) I_{aa}(p_0) \quad (5.113)$$

и

$$\operatorname{Tr}\{I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)] I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)]\} = \\ = \sum_{ab} [2\pi i \varepsilon(p_0)]^2 I_{ab}(p_0) I_{ba}(p_0), \quad (5.114)$$

приводят к результату общего характера: $I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)]$ эффективно заменяется на элементы матрицы $2\pi i \varepsilon(p_0) I_{ab}(p_0)$. Следовательно,

$$\det\{1 + I(p_0)[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)]\} = \\ = \det[\delta_{ab} + 2\pi i \varepsilon(p_0) I_{ab}(p_0)] = \det s(p_0). \quad (5.115)$$

Можно также заметить, что первоначальная матрица представляется в виде произведения единичных матриц, связанных с состояниями, частоты которых не равны p_0, и матрицы $s(p_0)$ для состояний с частотой p_0. Итак,

$$\frac{D_-(p_0)}{D_+(p_0)} = \det s(p_0) \quad (5.116)$$

и

$$\frac{D''_-(p_0)}{D''_+(p_0)} = \exp\left[-2\pi i \varepsilon(p_0) \sum_a I_{aa}^{(1)}(p_0)\right] \det s(p_0). \quad (5.117)$$

Так как унитарная матрица $s(p_0)$ обладает собственными значениями $s_A(p_0)$, имеющими вид $\exp[2i\delta_A(p_0)]$, где фазы $\delta_A(p_0)$ действительны, то эти результаты можно выразить в форме

$$\frac{D_-(p_0)}{D_+(p_0)} = \exp\left[2i \sum_A \delta_A(p_0)\right] \quad (5.118)$$

и

$$\frac{D''_-(p_0)}{D''_+(p_0)} = \exp\left\{2i\left[\sum_A \delta_A(p_0) - \pi\varepsilon(p_0) \sum_a I_{aa}^{(1)}(p_0)\right]\right\}. \quad (5.119)$$

Матричные элементы $s_{ab}(p_0)$ и $I_{ab}(p_0)$ можно выразить при помощи собственных фаз $\delta_A(p_0)$ и функции преобразования $(a \mid A)_{p_0}$. Таким образом,

$$s_{ab}(p_0) = \sum_A (a \mid A)_{p_0} e^{2i\delta_A(p_0)} (A \mid b)_{p_0} \qquad (5.120)$$

и

$$I_{ab}(p_0) = \frac{1}{\pi} \varepsilon(p_0) \sum_A (a \mid A)_{p_0} e^{i\delta_A(p_0)} \sin \delta_A(p_0) (A \mid b)_{p_0}. \qquad (5.121)$$

Соответствующие уравнения преобразования собственных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}) &= \sum_A (a \mid A)_{p_0} \overline{\varphi}_{Ap_0}(\mathbf{x}), \\ \varphi_{ap_0}(\mathbf{x}) &= \sum_A \varphi_{Ap_0}(\mathbf{x}) (A \mid a)_{p_0}. \end{aligned} \qquad (5.122)$$

Как следствие последнего уравнения мы имеем

$$\sum_a \overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}) \varphi_{ap_0}(\mathbf{x}') = \sum_A \overline{\varphi}_{Ap_0}(\mathbf{x}) \varphi_{Ap_0}(x') \qquad (5.123)$$

и

$$\sum_a I^{(1)}_{aa}(p_0) = \sum_A I^{(1)}_{AA}(p_0), \qquad (5.124)$$

что позволяет нам записать равенство (5.119) в виде

$$\frac{D''_-(p_0)}{D''_+(p_0)} = \exp\left[2i \sum_A{}' \delta_A(p_0)\right], \qquad (5.125)$$

или

$$\operatorname{Im} \ln D''_+(p_0) = -\sum_A {}'\delta_A(p_0), \qquad (5.126)$$

где

$${}'\delta_A(p_0) = \delta_A(p_0) - \pi\varepsilon(p_0) I^{(1)}_{AA}(p_0). \qquad (5.127)$$

Необходимо также изучить асимптотическое поведение $D''_+(p_0)$ как функции p_0. Сначала полезно рассмотреть класс потенциалов, которые не имеют сингулярности. Тогда можно найти настолько большие p_0, что на расстоянии $(p_0^2 - m^2)^{-1/2}$, которое является характерным расстоянием, встречающимся в функции $G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$, происходит пренебрежимо малое относительное изменение потенциала. Запишем

$$G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} G_+^0(\mathbf{p}, p_0); \quad (5.128)$$

$$G_+^0(\mathbf{p}, p_0) = (\gamma p + m)^{-1}$$

и вычислим типичный след

$$\operatorname{Tr}[e\gamma A G_+(p_0)]^n = \int (d\mathbf{x}_1)\ldots(d\mathbf{x}_n)\frac{(d\mathbf{p}_1)}{(2\pi)^3}\ldots\frac{(d\mathbf{p}_n)}{(2\pi)^3}\operatorname{tr}[e\gamma A(\mathbf{x}_1)\times$$
$$\times e^{i\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} G_+^0(\mathbf{p}_1, p_0)\, e\gamma A(\mathbf{x}_2)\, e^{i\mathbf{p}_2\cdot(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_3)}\times$$
$$\times G_+^0(\mathbf{p}_2, p_0)\ldots e\gamma A(\mathbf{x}_n)\, e^{i\mathbf{p}_n\cdot(\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_1)} G_+^0(\mathbf{p}_n, p_0)] \quad (5.129)$$

с асимптотически справедливым приближением $A(\mathbf{x}_2) = \ldots A(\mathbf{x}_n) = A(\mathbf{x}_1)$. Это дает

$$\operatorname{Tr}[e\gamma A G_+(p_0)]^n \sim \int \frac{(d\mathbf{x})(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\operatorname{tr}[e\gamma A(\mathbf{x}) G_+^0(\mathbf{p}, p_0)]^n \quad (5.130)$$

и, следовательно,

$$\det[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)] = \exp\{\operatorname{Tr}\ln[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]\} \sim$$
$$\sim \exp\left\{\int \frac{(d\mathbf{x})(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\operatorname{tr}\ln[1 - e\gamma A(\mathbf{x}) G_+^0(\mathbf{p}, p_0)]\right\}. \quad (5.131)$$

Видоизмененный определитель $\det''[1 - e\gamma A G_+^0(p_0)]$ аналогичным образом выражается через измененный логарифм

$$\ln''(1-z) = \ln(1-z) + z + \frac{1}{2}z^2.$$

Эти асимптотические результаты, очевидно, соответствуют классическому приближению, когда величина $(d\mathbf{x})(d\mathbf{p})/(2\pi)^3$ представляет собой число состояний в соответствующем объеме фазового пространства.

След, входящий в выражение (5.131), можно вычислить в виде

$$\operatorname{tr}\ln[1 - e\gamma A(\mathbf{x}) G_+^0(\mathbf{p}, p_0)] =$$
$$= \operatorname{tr}\ln\{[\gamma(p - eA) + m](\gamma p + m)^{-1}\} =$$
$$= 2\{\ln[(p - eA)^2 + m^2] - \ln(p^2 + m^2)\} \quad (5.132)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tr}\ln''[1-e\gamma A(\mathbf{x})G^0_+(\mathbf{p},\ p_0)]=$$

$$=2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[-eA(x)\frac{\partial}{\partial p}\right]^n\ln(p^2+m^2)=$$

$$=2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[-e\mathbf{A}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}-eA_0(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial p_0}\right]^n\ln(\mathbf{p}^2+m^2-p_0^2). \tag{5.133}$$

Выполняя сходящиеся интегрирования по $\mathbf{p}$, находим, что каждый член, содержащий $\partial/\partial\mathbf{p}$, приводит к исчезающему поверхностному интегралу, откуда получаем соотношения

$$\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}\operatorname{tr}\ln''[1-e\gamma A(\mathbf{x})G^0_+(\mathbf{p},\ p_0)]=$$

$$=-\frac{i}{3\pi}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}[-eA_0(\mathbf{x})]^n\left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^n(p_0^2-m^2)^{3/2} \tag{5.134}$$

и

$$\ln D''_+(p_0)\sim-\frac{i}{3\pi}\int(d\mathbf{x})\Big\{[(p_0-eA_0(\mathbf{x}))^2-m^2]^{3/2}-$$

$$-(p_0^2-m^2)^{3/2}+3eA_0(\mathbf{x})p_0(p_0^2-m^2)^{1/2}-$$

$$-\frac{3}{2}[eA_0(\mathbf{x})]^2[(p_0^2-m^2)^{1/2}+p_0^2(p_0^2-m^2)^{-1/2}]\Big\}. \tag{5.135}$$

Выражение (5.135) не зависит от $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, как это требуется калибровочной инвариантностью.

Мы видим, что $\ln D''_+(p_0)$ обладает конечным пределом при $|p_0|\to\infty$:

$$\ln D''_+(p_0)\to\frac{i}{3\pi}\varepsilon(p_0)\int(d\mathbf{x})[eA_0(\mathbf{x})]^3, \tag{5.136}$$

тогда как, согласно приближению (5.131), произведение $D''_+(p_0)D''_+(-p_0)$ стремится к единице по закону

$$\ln[D''_+(p_0)D''_-(p_0)]\to-\frac{i}{4\pi}\frac{m^4}{|p_0|^5}\int(d\mathbf{x})[eA_0(\mathbf{x})]^4. \tag{5.137}$$

Рассмотрим теперь потенциалы с сингулярностью

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^{-(1-\beta)},\quad \beta>0,$$

Асимптотический вид выражения (5.130) остается справедливым для вкладов от расстояний до сингулярности, бо́льших по порядку величины, чем

$$(p_0^2 - m^2)^{-1/2} \to |p_0|^{-1}.$$

Как можно проверить, вклад в формулу (5.129) от меньших расстояний имеет асимптотическую зависимость от p_0 в виде $|p_0|^{-n\beta}$ при $|p_0| \to \infty$. Поэтому конечное предельное значение (5.136) также справедливо для потенциалов, которые менее сингулярны, чем $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-1}$, но утверждение (5.137) заменяется на следующее:

$$\ln [D''_+(p_0) D''_+(-p_0)] \sim |p_0|^{-4\beta} \tag{5.138}$$

при $|p_0| \to \infty$.

Перейдем к доказательству того, что исследованных выше свойств функции $D''_+(p_0)$ достаточно, чтобы определить полностью эту величину. Заметим сначала, что источник комплексных значений, предполагаемых у функции $D''_+(p_0)$ для действительных p_0 в интервале $|p_0| > m$, можно перенести с массы m на энергию p_0. Таким образом, при $\varepsilon \to +0$ можно записать

$$\left.\begin{aligned} D''_+(p_0) &= D''(p_0 + i\varepsilon) \\ D''_-(p_0) &= D''(p_0 - i\varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{ при } p_0 > m,$$

$$\left.\begin{aligned} D''_+(p_0) &= D''(p_0 - i\varepsilon) \\ D''_-(p_0) &= D''(p_0 + i\varepsilon) \end{aligned}\right\} \text{ при } p_0 < -m, \tag{5.139}$$

где m — действительный параметр в функции $D''(p_0)$. Эти соотношения устанавливают эквивалентность, например, бесконечно малого смещения линии полюсов ниже величины p_0, находящейся на действительной оси, и сдвига энергии p_0 на бесконечно малую величину выше линии полюсов, расположенных на действительной оси. Функция $\ln D''(p_0)$ регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} p_0 > 0$ и приближается на бесконечности к постоянной $\frac{i}{3\pi} \int (d\mathbf{x}) [eA_0(\mathbf{x})]^3$, а мнимая часть ее на отрезке действительной оси $|p_0| > m$

(достигаемом из верхней полуплоскости) принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\ln D''(p_0+i\varepsilon) &= -\sum_A{}'\delta_A(p_0) \quad \text{при} \quad p_0>m, \\ \operatorname{Im}\ln D''(p_0-i\varepsilon) &= +\sum_A{}'\delta_A(p_0) \quad \text{при} \quad p_0<-m. \end{aligned} \tag{5.140}$$

Если p_0 находится на действительной оси, причем $|p_0|<m$, то функция $D''(p_0)=D''_\pm(p_0)$ действительна и имеет нули в точках $\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa$. Поэтому мнимая часть $\operatorname{Im}\ln D''(p_0)$ постоянна между корнями, но разрывным образом уменьшается на π, когда p_0, возрастая, проходит через корень (с обходом через верхнюю полуплоскость). Следует заметить, что $\operatorname{Im}\ln D''(p_0)=0$ в окрестности точки $p_0=0$. В случае отсутствия поля $D''(p_0)=1$ и $\operatorname{Im}\ln D''(p_0)=0$. При возрастании напряженности поля корни могут появиться на границах интервала $|p_0|<m$ и начать двигаться по направлению к началу отсчета. Однако мы исключили возможность того, что корень достигнет начала, в силу чего фаза функции $D''(p_0)$ в окрестности начала отсчета не должна изменяться по сравнению со своим значением при нулевом поле, что подтверждает сделанное выше замечание. Проследим теперь за значениями $\operatorname{Im}\ln D''(p_0)$ от $p_0=0$ до $p_0=m$. Начальное значение этой величины равно нулю. При прохождении первого корня она принимает значение $-\pi$, а после прохождения нулей, связанных с ν_+ положительно-частотными связанными состояниями, она принимает значение $-\nu_+\pi$. Следовательно,

$$\nu_+=\frac{1}{\pi}\sum_A{}'\delta_A(m)=\frac{1}{\pi}\sum_A\delta_A(m); \tag{5.141}$$

вторая часть этого утверждения основана на исчезновении нормирующей постоянной в функции φ_{ap_0} при $p_0=m$, $\mathbf{p}=0$. Число отрицательно-частотных связанных состояний аналогичным образом определяет значение $\operatorname{Im}\ln D''(p_0)$ при $p_0=-m$, а именно $\nu_-\pi$. Отсюда

$$\nu_-=\frac{1}{\pi}\sum_A{}'\delta_A(-m)=\frac{1}{\pi}\sum_A\delta_A(-m). \tag{5.142}$$

При введении обозначения $\delta_A(p_0) = \delta_{\gamma E}$, в котором величина $p_0|$, равная E, указывается в качестве индекса (независимо от знака p_0), можно заметить, что соотношения (5.141) и (5.142) являются следствиями соотношения (5.30), которое было получено при помощи более простых аргументов. Конечно, это согласие основано на предполагаемой эквивалентности двух определений фаз, которую мы еще должны установить.

Функция комплексного переменного $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, которая регулярна в верхней полуплоскости и принимает на бесконечности мнимое постоянное значение, выражается через свою мнимую часть на действительной оси равенством

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{v(x', 0)}{x' - z}, \quad \operatorname{Im} z > 0, \tag{5.143}$$

где под интегралом с бесконечными пределами понимают предел интеграла, взятого от $-X$ до X при $X \to \infty$. Это утверждение можно получить из интегральной теоремы Коши, примененной к точке z и сопряженной точке z^*. Воспользуемся им для построения функции $\ln D''(p_0)$. При этом мы встречаемся с интегралом

$$\frac{1}{\pi} \int_{-m}^{+m} dp_0' \frac{\operatorname{Im} \ln D''(p_0')}{p_0' - p_0};$$

произведем в нем интегрирование по частям. Так как

$$\frac{d}{dp_0} \operatorname{Im} \ln D''(p_0) = -\pi \sum_{\varkappa} \delta(p_0 - \varepsilon_\varkappa E_\varkappa') \tag{5.144}$$

и

$$\operatorname{Im} \ln D''(m) = -\nu_+ \pi, \quad \operatorname{Im} \ln D''(-m) = \nu_- \pi, \tag{5.145}$$

получаем

$$-\nu_+ \ln(m - p_0) - \nu_- \ln(-m - p_0) + \sum_{\varkappa} \ln(\varepsilon_\varkappa E_\varkappa' - p_0),$$

и, следовательно,

$$\ln D''(p_0) = \ln\left[\prod_{\varkappa}\left(\frac{\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa - p_0}{\varepsilon_\varkappa m - p_0}\right)\right] - \frac{1}{\pi}\int_m^\infty \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0}\sum_A {}'\delta_A(p'_0) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-m} \frac{dp'_0}{p'_0 - p_0}\sum_A {}'\delta_A(p'_0). \quad (5.146)$$

Вводя обозначения ${}'\delta_A(p_0) = {}'\delta_{\gamma E}$, $\varepsilon(p_0) = \varepsilon_\gamma$, находим, что

$$D''(p_0) = \prod_{\varkappa}\left(\frac{\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa - p_0}{\varepsilon_\varkappa m - p_0}\right)\exp\left[-\frac{1}{\pi}\int_m^\infty dE \sum_\gamma \frac{\varepsilon_\gamma {}'\delta_{\gamma E}}{\varepsilon_\gamma E - p_0}\right]. \quad (5.147)$$

Связь между числом связанных состояний и фазами при $E = m$ обеспечивает отсутствие какой-либо сингулярности при $p_0 = \pm m$. Функция $D''_+(p_0)$ для действительных p_0 дается той же формулой, где m снова имеет бесконечно малую отрицательную мнимую часть.

Теперь вернемся к обсуждению выражения

$$E(0) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln D_+(p_0) = e^2 E^{(1)} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln D''_+(p_0), \quad (5.148)$$

где мы использовали соотношение (5.60) и написали

$$E^{(1)} = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \operatorname{Tr}(\gamma A G^0_+(p_0)\, \gamma A G^0_+(p_0)) = -\frac{1}{2} i \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\, dx'_0 \operatorname{tr}[\gamma A(\mathbf{x})\, G^0_+(x, x')\, \gamma A(\mathbf{x}') \times G^0_+(x', x)]. \quad (5.149)$$

Исследуя функцию (4.68) и ее выражение (4.88) для поля, которое не зависит от времени на большом интервале, замечаем, что один интеграл по времени можно взять, это даст

$$E^{(1)} = C \int (d\mathbf{x}) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 (\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') \partial_\nu F_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \times \\ \times \omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial'_\lambda F_{\mu\lambda}(\mathbf{x}'), \quad (5.150)$$

где

$$\omega(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx'_0 \, \omega(x - x') = \frac{1}{4\pi^2} \int_{2m}^{\infty} \frac{d\varkappa}{\varkappa} \times \\ \times \left[\left(1 - \left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{1/2} - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2m}{\varkappa}\right)^2\right)^{3/2} \right] \frac{e^{-\varkappa |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (5.151)$$

Второй член в выражении (5.150) конечен, если сходится интеграл

$$\int^{\infty} d\varkappa \varkappa^{-1} \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') |x - x_0|^{-(3-\beta)} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \times \\ \times e^{-\varkappa |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0|^{-(3-\beta)} \sim \int^{\infty} d\varkappa \varkappa^{-2\beta},$$

для этого требуется, чтобы β было больше $^1/_2$. Следовательно, квадраты напряженностей полей должны быть менее сингулярными, чем $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{-3}$, и этот класс внешних полей можно охарактеризовать как класс, обладающий конечной полной энергией. Таким образом, коэффициент при C конечен.

Второй член в выражении (5.148) также конечен для этого класса полей, как это очевидно из соотношения (5.138). Интегрируя по частям вклад от дискретных состояний, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln D''_+(p_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \left[\sum_{\varkappa} \left(\frac{\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa}{\varepsilon_\varkappa E'_\varkappa - p_0} - \frac{\varepsilon_\varkappa m}{\varepsilon_\varkappa m - p_0} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_m^{\infty} dE \sum_{\gamma} \frac{\varepsilon_\gamma{}' \delta_{\gamma E}}{\varepsilon_\gamma E - p_0} \right]; \quad (5.152)$$

вычисление вычетов можно провести путем усреднения результатов замыкания контура интегрирования в верхней и нижней полуплоскостях. Это дает[1]) для энергии вакуума выражение

$$E(0)=e^2E^{(1)}+\frac{1}{2}\sum_{\varkappa}(m-E'_\varkappa)+\frac{1}{2\pi}\sum_{\gamma}\int\limits_{m}^{\infty}dE'\delta_{\gamma E}, \qquad (5.153)$$

из которого видно, что имеется одна расходящаяся величина C; это выражение заменяет формальное выражение (5.32) для соответствующего класса полей.

Описание при помощи рассеяния. Мы использовали функцию преобразования (5.9) для получения собственных значений и собственных функций при помощи такого представления функции Грина, при котором все состояния рассматриваются с одинаковой точки зрения. Но такое рассмотрение является несколько искусственным для локализованных потенциалов, для которых состояния непрерывного спектра существенным образом отличаются от связанных состояний и наиболее естественно описываются на языке физической картины рассеяния. Ниже мы используем эту точку зрения.

Функцию Грина для $x_0-x'_0=T>0$

$$G_+(x,\ x')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dp_0e^{-ip_0T}G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0) \qquad (5.154)$$

можно вычислить, если деформировать путь интегрирования таким образом, чтобы он обходил в отрицательном направлении дискретные полюса при $p_0=E'_\varkappa<m$ и линию разреза, простирающуюся из точки m в бесконечность. Как мы видим из соотношения (5.93), вклад каждого изолированного полюса равен $i\psi_\varkappa(\mathbf{x})\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')e^{-iE'_\varkappa T}$, так что

$$G_+(x,\ x')-i\sum_{+}\psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\,e^{-iE'_\varkappa T}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty}^{(m,\ -)}dp_0e^{-ip_0T}G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0), \qquad (5.155)$$

[1]) Замечание относительно порядка вычислений в последнем члене см. в примечании на стр. 229.

где путь интегрирования начинается на бесконечности, огибает точку m в отрицательном направлении и возвращается в бесконечность. Сделав подстановку

$$G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) + \int (d\mathbf{x}_1)(d\mathbf{x}_2) \times$$
$$\times G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, p_0) I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, p_0) G_+^0(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}', p_0), \tag{5.156}$$

заметим, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\infty}^{(m, -)} dp_0 e^{-ip_0 T} G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = G_+^0(x, x'), \tag{5.157}$$

как это можно непосредственно показать при помощи формулы

$$G_+^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \sum_{\lambda p} \frac{\psi_{\lambda \mathbf{p}}(\mathbf{x}) \overline{\psi}_{\lambda \mathbf{p}}(\mathbf{x}')}{\varepsilon(\lambda) E_{\mathbf{p}} - p_0}. \tag{5.158}$$

Рассматривая член выражения (5.155), происходящий от второго члена в правой части равенства (5.156), мы приходим к интегралу

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\infty}^{(m, -)} dp_0 e^{-ip_0 T} \frac{1}{\varepsilon(\lambda) E - p_0} I(p_0) \frac{1}{\varepsilon(\lambda') E' - p_0}. \tag{5.159}$$

Именно здесь мы вводим картину рассеяния, вычисляя этот интеграл лишь для больших T:

$$T \gg \frac{1}{\Delta E}, \tag{5.160}$$

где ΔE представляет собой наименьшее изменение энергии p_0, которое различимо в функции $I(p_0)$. Можно сказать, что T выбирается большим по сравнению с продолжительностью столкновения. Тогда зависимостью $I(p_0)$ от p_0 можно пренебречь, и интеграл (5.159) примет значение

$$-iI(E) \frac{[e^{-iET} - e^{-iE'T}]}{(E - E')}, \tag{5.161}$$

если только, конечно, $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(\lambda') = 1$. Мы не делали различия между $I(E)$ и $I(E')$, так как величина (5.161) относительно велика лишь при условии

$$E - E' \sim \frac{1}{T} \ll \Delta E.$$

Таким образом, получаем

$$G_+(x, x') = i\sum_+ \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\,e^{-iE'_\varkappa T} + \\ + i\sum_+ \psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'}\overline{\psi}_{\lambda'\mathbf{p}'}(\mathbf{x}')\,e^{-iET}, \quad (5.162)$$

а аналогичное утверждение для $x'_0 - x_0 = T$ имеет вид

$$G_+(x, x') = -i\sum_- \psi_\varkappa(\mathbf{x})\,\overline{\psi}_\varkappa(\mathbf{x}')\,e^{-iE'_\varkappa T} - \\ - i\sum_- \psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}\,\overline{\psi}_{\lambda'\mathbf{p}'}(\mathbf{x}')\,e^{-iET}. \quad (5.163)$$

Здесь

$$S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} = \delta_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} + 2\pi i\varepsilon(p_0)\,\delta_T(E - E') \times \\ \times \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,\overline{\psi}_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})\,I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)\,\psi_{\lambda'\mathbf{p}'}(\mathbf{x}') = \\ = \delta_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} + 2\pi i\varepsilon(p_0)\,\delta_T(E - E')(dE\,dE')^{1/2}\,I_{ab}(p_0) \quad (5.164)$$

и

$$\delta_T(E - E') = \frac{i}{2\pi}\,\frac{1 - e^{i(E-E')T}}{E - E'} = \frac{1}{2\pi}\int_0^T dt\,e^{i(E-E')t}. \quad (5.165)$$

Мы также имеем

$$S^\dagger_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} = S^*_{\lambda'\mathbf{p}',\,\lambda\mathbf{p}} = \\ = \delta_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} - 2\pi i\varepsilon(p_0)\,\delta_T(E - E')(dE\,dE')^{1/2}\,I^\dagger_{ab}(p_0), \quad (5.166)$$

в силу соотношения

$$\delta_T(E' - E)^* = \delta_T(E - E'). \quad (5.167)$$

Другие свойства функции $\delta_T(E-E')$ выражаются равенствами

$$\int dE'\delta_T(E-E')\,\delta_T(E'-E'')=\delta_T(E-E''),\qquad(5.168)$$

$$\delta_T(0)=\frac{T}{2\pi}$$

и

$$|\delta_T(E-E')|^2=\frac{T}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}dt\left(1-\frac{|t|}{T}\right)e^{i(E-E')t}\to$$

$$\to\frac{T}{2\pi}\delta(E-E');\qquad(5.169)$$

последний результат отвечает предельному случаю, соответствующему $T\to\infty$.

Можно проверить так же, как в соотношении (5.112), что $S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}$ образует унитарную матрицу. Эта матрица определяется по всей области состояний, но ее неисчезающие элементы относятся к области энергий $E-E'\sim1/T$. Понимая, что отбор состояний с равной энергией ограничен точностью $1/T$ ($\ll\Delta E$), можно записать

$$\delta_T(E-E')(dE\,dE')^{1/2}=\delta_{E,E'}.$$

Это указывает на связь с унитарной субматрицей $s_{ab}(p_0)$

$$S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}=\delta_{E,E'}s_{ab}(p_0).\qquad(5.170)$$

Из свойства унитарности вытекает особое следствие:

$$|S_{\lambda\mathbf{p},\lambda\mathbf{p}}|^2=1-\sum_{\lambda'\mathbf{p}'\neq\lambda\mathbf{p}}|S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}|^2=1-\sum_{\lambda'\mathbf{p}'\neq\lambda\mathbf{p}}|S_{\lambda'\mathbf{p}',\lambda\mathbf{p}}|^2,\qquad(5.171)$$

где

$$|S_{\lambda\mathbf{p},\lambda\mathbf{p}}|^2=1-2T\,dE\,\varepsilon(p_0)\operatorname{Im}I_{aa}(p_0)\qquad(5.172)$$

и при $\lambda\mathbf{p}\neq\lambda'\mathbf{p}'$

$$|S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}|^2=2\pi T\,dE\,dE'\,\delta(E-E')\,|I_{ab}(p_0)|^2.\qquad(5.173)$$

Мы узнаем здесь диагональный элемент матричного соотношения (5.110)

$$2\operatorname{Im}I_{aa}(p_0)=2\pi\varepsilon(p_0)\sum_b|I_{ab}(p_0)|^2=$$

$$=2\pi\varepsilon(p_0)\sum_b|I_{ba}(p_0)|^2.\qquad(5.174)$$

Теперь подставим представления (5.162) и (5.163) функции Грина в выражение (5.9) (опуская фазовое преобразование). Обозначение (5.14) для дискретных состояний сохраняется, и мы пишем $\chi_{\lambda\mathbf{p}}^{(\pm)'}$ для аналогичных величин, построенных из функций состояний свободных частиц $\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})$. Тогда

$$(\chi^{(-)'}\sigma_1 \,|\, \chi^{(+)'}\sigma_2) = e^{-iE(0)T}\exp\Big[\sum_{\varkappa} \chi_{\varkappa}^{(-)'} \chi_{\varkappa}^{(+)'} e^{-iE'_{\varkappa}T} + \\ + \sum_{+} \chi_{\lambda\mathbf{p}}^{(-)'} S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} \chi_{\lambda'\mathbf{p}'}^{(+)'} e^{-iET} + \sum_{-} \chi_{\lambda\mathbf{p}}^{(-)'} S^{\mathrm{tr}}_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} \chi_{\lambda'\mathbf{p}'}^{(+)'} e^{-iET}\Big], \quad (5.175)$$

где для отрицательно-частотных состояний появляются величины

$$S^{\mathrm{tr}}_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} = S_{\lambda'\mathbf{p}',\,\lambda\mathbf{p}}. \quad (5.176)$$

Это дает производящую функцию для функции преобразования $(n\sigma_1 \,|\, n'\sigma_2)$, в которой состояния системы характеризуются числами заполнения связанных состояний и состояний свободных частиц. Представим эту функцию преобразования посредством унитарной матрицы

$$(n\sigma_1 \,|\, n'\sigma_2) = \exp(-iE(n)t_1)(n \,|\, S \,|\, n')\exp(iE(n')t_2), \\ E(n) = E(0) + \sum_{\varkappa} n_{\varkappa} E'_{\varkappa} + \sum_{\lambda\mathbf{p}} n_{\lambda\mathbf{p}} E_{\mathbf{p}}. \quad (5.177)$$

Элементы этой матрицы

$$(n \,|\, S \,|\, n') = \delta_{n_{\varkappa},\, n'_{\varkappa}} (\det{}_{(n_+)} S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'})(\det{}_{(n_-)} S^{\mathrm{tr}}_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'}) \quad (5.178)$$

попрежнему зависят от T. В первом определителе $\lambda\mathbf{p}$ и $\lambda'\mathbf{p}'$ пробегают в стандартном порядке n_+ занятых положительно-частотных состояний конечного и начального состояний системы соответственно. Второй определитель относится аналогичным образом к отрицательно-частотным состояниям. Множитель $\delta_{n_{\varkappa},\, n'_{\varkappa}}$ описывает стационарный характер связанных состояний.

Вероятность перехода между состояниями, таким образом, дается выражением

$$|(n \,|\, S \,|\, n')|^2 = \delta_{n_{\varkappa},\, n'_{\varkappa}} p_+(n,\; n')\, p_-(n,\; n'), \quad (5.179)$$

где

$$p_+(n, n') = |\det{}_{(n_+)} S_{\lambda\mathbf{p},\, \lambda'\mathbf{p}'}|^2 \qquad (5.180)$$

и

$$p_-(n, n') = |\det{}_{(n_-)} S^{\mathrm{tr}}_{\lambda\mathbf{p},\, \lambda'\mathbf{p}'}|^2 \qquad (5.181)$$

являются независимыми вероятностями для двух типов частиц. Производящая функция для $p_+(n, n')$, например, дается выражением

$$\det(1 + xSyS^\dagger) = \det(1 + S^\dagger xSy) = \\ = \sum_{n, n'} \prod_+ (x_{\lambda\mathbf{p}})^n p_+(n, n') \prod_+ (y_{\lambda'\mathbf{p}'})^{n'}. \qquad (5.182)$$

При этом, разложив бесконечный определитель, получаем

$$\det(1 + xSyS^\dagger) = \sum_{n_+=0}^{\infty} \frac{1}{n_+!} \times \\ \times \sum_{\lambda\mathbf{p}_i} \det{}_{(n_+)} \left(\sum_{\lambda'\mathbf{p}'} x_{\lambda\mathbf{p}_i} S_{\lambda\mathbf{p}_i,\, \lambda'\mathbf{p}'} y_{\lambda'\mathbf{p}'} S^\dagger_{\lambda'\mathbf{p}',\, \lambda\mathbf{p}_j} \right) = \sum_{n_+=0}^{\infty} \frac{1}{n_+!} \sum_{\lambda\mathbf{p}_i} \frac{1}{n_+!} \times \\ \times \sum_{\lambda\mathbf{p}_k} \prod (x_{\lambda\mathbf{p}_i}) |\det{}_{(n_+)} S_{\lambda\mathbf{p}_i,\, \lambda\mathbf{p}_j}|^2 \prod (y_{\lambda\mathbf{p}_k}) = \\ = \sum_{n, n'} \prod_+ (x_{\lambda\mathbf{p}})^n |\det{}_{(n_+)} S_{\lambda\mathbf{p},\, \lambda'\mathbf{p}'}|^2 \prod_+ (y_{\lambda'\mathbf{p}'})^{n'}, \qquad (5.183)$$

где $\lambda\mathbf{p}_i$ и $\lambda\mathbf{p}_k$ независимо пробегают по всем (положительно-частотным) состояниям. Если мы в выражении (5.182) всюду положим $x_{\lambda\mathbf{p}} = 1$, то получим соотношение

$$\sum_{n, n'} p_+(n, n') \prod_+ (y_{\lambda'\mathbf{p}'})^{n'} = \det(1 + y) = \\ = \prod_+ (1 + y_{\lambda\mathbf{p}}) = \sum_{n'} \prod_+ (y_{\lambda\mathbf{p}})^{n'_{\lambda\mathbf{p}}}, \qquad (5.184)$$

которое показывает, что

$$\sum_n p_+(n, n') = 1. \qquad (5.185)$$

Аналогичным образом, полагая $y_{\lambda\mathbf{p}} = 1$, находим, что

$$\sum_{n'} p_+(n, n') = 1. \qquad (5.186)$$

Частичную производящую функцию для данных начальных чисел заполнения можно получить, если записать определитель (5.182) в виде

$$\det\left(1-\frac{y}{1+y}+S^{\dagger}xS\,\frac{y}{1+y}\right)\det(1+y) \tag{5.187}$$

и положить $y_{\lambda\mathbf{p}}=0$ для всех состояний, за исключением некоторых ($n'_{\lambda\mathbf{p}}=1$), где $y_{\lambda\mathbf{p}}\to\infty$. Это даст

$$\sum_{n}\prod_{+}(x_{\lambda\mathbf{p}})^{n}p_{+}(n,\ n')=\det(1-n'+S^{\dagger}xSn'). \tag{5.188}$$

Чтобы получить иную полезную форму, сделаем подстановку $x\to 1+x$ и заметим, что $(1+x)^n=1+nx$, так как $n(n-1)=0$. Отсюда получаем функцию

$$\sum_{n}\prod_{+}(1+n_{\lambda\mathbf{p}}x_{\lambda\mathbf{p}})\,p_{+}(n,\ n')=$$
$$=\det(1+S^{\dagger}xSn')=\det(1+xSn'S^{\dagger}), \tag{5.189}$$

которая служит производящей функцией для средних значений чисел заполнения или произведений чисел заполнения в конечном состоянии. Так как равенство (5.189) совпадает по форме с соотношением (5.182), мы видим, что

$$\sum_{n}\prod_{(k)}(n_{\lambda\mathbf{p}})\,p(n,\ n')=\Big\langle\prod_{(k)}(n_{\lambda\mathbf{p}})\Big\rangle_{n'}=$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{\lambda'\mathbf{p}'}|\det{}_{(k)}S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'}|^{2}\prod_{(k)}(n'_{\lambda'\mathbf{p}'}), \tag{5.190}$$

где $\lambda\mathbf{p}$ является k произвольными состояниями. В частности,

$$\sum_{n}n_{\lambda\mathbf{p}}p(n,\ n')=\langle n_{\lambda\mathbf{p}}\rangle_{n'}=\sum_{\lambda'\mathbf{p}'}|S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'}|^{2}n'_{\lambda'\mathbf{p}'}. \tag{5.191}$$

Последний результат также выражается равенством

$$\langle n_{\lambda\mathbf{p}}\rangle_{n'}-n'_{\lambda\mathbf{p}}=\sum_{\lambda'\mathbf{p}'}|S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'}|^{2}(n'_{\lambda'\mathbf{p}'}-n'_{\lambda\mathbf{p}})=$$
$$=T\sum_{\lambda'\mathbf{p}'}2\pi\delta(E-E')\,dE\,|I_{ab}(E)|^{2}\,dE'\,(n'_{\lambda'\mathbf{p}'}-n'_{\lambda\mathbf{p}}). \tag{5.192}$$

Теперь

$$dE\,|I_{ab}(p_0)|^{2}\,dE'=\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^{3}}\frac{m}{E}|(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(E)\,|\,\lambda'\mathbf{p}')|^{2}\frac{(d\mathbf{p}')}{(2\pi)^{3}}\frac{m}{E}, \tag{5.193}$$

где мы (при $p_0 = +E$) ввели определение

$$(\lambda \mathbf{p} \mid I(p_0) \mid \lambda' \mathbf{p}') = \int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}') \bar{u}_{\lambda \mathbf{p}} \times$$
$$\times \exp[-i\varepsilon(p_0)\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}] I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) u_{\lambda'\mathbf{p}'} \exp[i\varepsilon(p_0)\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}']. \quad (5.194)$$

Далее заметим, что, согласно соотношению (3.103), среднее значение вектора электрического тока в начальном состоянии системы дается выражением

$$\left\langle \frac{e}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma\psi(x)] \right\rangle =$$
$$= \sum_{\lambda \mathbf{p}} e\varepsilon(\lambda) \bar{\psi}_{\lambda \mathbf{p}}(\mathbf{x}) \gamma \psi_{\lambda \mathbf{p}}(\mathbf{x}) n'_{\lambda \mathbf{p}} = \sum_{\lambda \mathbf{p}} e\varepsilon(\lambda) \mathbf{J}'_{\lambda \mathbf{p}}, \quad (5.195)$$

где, следовательно,

$$\mathbf{J}'_{\lambda \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{E} \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} n'_{\lambda \mathbf{p}} \quad (5.196)$$

является вкладом состояния в средний поток *частиц*. Поэтому равенство (5.192) можно записать в виде

$$\langle n_{\lambda \mathbf{p}} \rangle_{n'} - n'_{\lambda \mathbf{p}} = T \sum_{\lambda' \mathbf{p}'} \delta(E - E') dE \times$$
$$\times d\sigma(\lambda \mathbf{p}, \lambda' \mathbf{p}') J'_{\lambda' \mathbf{p}'} - T\sigma(\lambda \mathbf{p}) J'_{\lambda \mathbf{p}}; \quad (5.197)$$

это дает среднее изменение числа частиц в данном состоянии за интервал времени T как разность числа частиц, попадающих при рассеянии в это состояние и выходящих из него. Здесь

$$\frac{d\sigma(\lambda \mathbf{p}, \lambda' \mathbf{p}')}{d\omega} = \left| \frac{m}{2\pi} (\lambda \mathbf{p} \mid I(E) \mid \lambda' \mathbf{p}') \right|^2 \quad (5.198)$$

является дифференциальным поперечным сечением для указанного процесса рассеяния, отнесенным к единице телесного угла, и

$$\sigma(\lambda \mathbf{p}) = \sum_{\lambda'} \int d\omega' \left| \frac{m}{2\pi} (\lambda \mathbf{p} \mid I(E) \mid \lambda' \mathbf{p}') \right|^2 =$$
$$= \sum_{\lambda'} \int d\omega' \left| \frac{m}{2\pi} (\lambda' \mathbf{p}' \mid I(E) \mid \lambda \mathbf{p}) \right|^2 = \frac{2m}{p} \operatorname{Im} (\lambda \mathbf{p} \mid I(E) \mid \lambda \mathbf{p}) \quad (5.199)$$

является полным поперечным сечением рассеяния. Эквивалентность различных выражений для $\sigma(\lambda \mathbf{p})$ следует из соотношения (5.174).

Поперечные сечения рассеяния для отрицательно-частотных состояний представляются в виде

$$\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p},\ \lambda'\mathbf{p}')}{d\omega}=\left|\frac{m}{2\pi}(\lambda'\mathbf{p}'\,|\,I(-E)\,|\,\lambda\mathbf{p})\right|^2=$$
$$=\left|\frac{m}{2\pi}(\lambda\mathbf{p}\,|\,\bar{I}(-E)\,|\,\lambda'\mathbf{p}')\right|^2 \qquad (5.200)$$

и

$$\sigma(\lambda\mathbf{p})=-\frac{2m}{p}\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(-E)\,|\,\lambda\mathbf{p})=$$
$$=\frac{2m}{p}\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{p}\,|\,\bar{I}(-E)\,|\,\lambda\mathbf{p}). \qquad (5.201)$$

Для случая, когда падающие частицы образуют пучок, который имеет полностью определенные импульс и поляризацию (спин), из соотношения (5.197) следует, что число частиц с определенной поляризацией, которое отклоняется внутрь телесного угла $d\omega$, дается выражением

$$\sum_{d\omega}\langle n_{\lambda\mathbf{p}}\rangle_{n'}=T\,d\sigma(\lambda\mathbf{p},\ \lambda'\mathbf{p}')\,J', \qquad (5.202)$$

где J' — полный ток частиц. Это находится в соответствии с обычным определением дифференциальных поперечных сечений. При помощи соотношений

$$\sum_{\lambda>0}u_{\lambda\mathbf{p}}\bar{u}_{\lambda\mathbf{p}}=\frac{(m-\gamma\cdot\mathbf{p}+\gamma_0E)}{2m},$$
$$-\sum_{\lambda<0}u_{\lambda\mathbf{p}}\bar{u}_{\lambda\mathbf{p}}=\frac{m+\gamma\cdot\mathbf{p}-\gamma_0E}{2m} \qquad (5.203)$$

можно построить поперечные сечения, относящиеся к неполяризованным частицам. Так,

$$\sigma_+(\mathbf{p})=\frac{1}{2}\sum_{+}\sigma(\lambda\mathbf{p})=\frac{1}{2p}\operatorname{Im}\int(d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\times$$
$$\times\operatorname{tr}\exp[-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')](m-\gamma\cdot\mathbf{p}+\gamma_0E)\,I(\mathbf{x},\mathbf{x}',E), \qquad (5.204)$$

и

$$\sigma_-(\mathbf{p})=\frac{1}{2}\sum_{-}\sigma(\lambda\mathbf{p})=\frac{1}{2p}\operatorname{Im}\int(d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\times$$
$$\times\operatorname{tr}\exp[i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')](m+\gamma\cdot\mathbf{p}-\gamma_0E)\,I(\mathbf{x},\mathbf{x}',-E). \qquad (5.205)$$

Последнее выражение можно также записать в виде

$$\sigma_-(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p}\,\mathrm{Im}\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,\mathrm{tr}\exp\left[-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right]\times$$
$$\times(m-\gamma\mathbf{p}+\gamma_0 E)\,{}_cI(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ E). \qquad (5.206)$$

Усредняя по всем начальным направлениям движения с данной энергией, можно получить соотношение

$$\sigma_\pm(E) = \frac{1}{4\pi}\int d\omega\,\sigma_\pm(\mathbf{p}) = \sigma(p_0) =$$
$$= \frac{\pi}{2p^2}\,\mathrm{Tr}\left\{\left[G_-^0(p_0) - G_+^0(p_0)\right]\left[I(p_0) - \bar I(p_0)\right]\right\} =$$
$$= \frac{\pi}{2p^2}\,\mathrm{Tr}\left\{\left[G_-^0(p_0) - G_+^0(p_0)\right]\bar I(p_0)\times\right.$$
$$\left.\times\left[G_+^0(p_0) - G_-^0(p_0)\right]I(p_0)\right\}, \qquad (5.207)$$

или, в эквивалентном виде,

$$\sigma(p_0) = \frac{2\pi}{p^2}\,\varepsilon(p_0)\,\mathrm{Im}\sum_a \pi I_{aa}(p_0) = \frac{2\pi}{p^2}\sum_{ab}\left|\pi I_{ab}(p_0)\right|^2. \qquad (5.208)$$

Подставив в первую часть (5.208) разложения (5.71) и (5.67), придем к явным выражениям для этих поперечных сечений в виде отношений сходящихся степенных рядов по потенциалу.

Следует отметить некоторые свойства инвариантности поперечных сечений рассеяния. Для электростатического поля сочетание зарядового сопряжения и отражения времени[1]) оставляет функцию Грина инвариантной:

$$\gamma_0\gamma_5 C G_+^{\mathrm{tr}}(\mathbf{x}',\ \mathbf{x},\ p_0)(\gamma_0\gamma_5 C)^{-1} = G_+(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0). \qquad (5.209)$$

Так как это свойство относится, конечно, и к G_+^0, то оно также справедливо и для $I(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0)$, в силу чего

$$(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}') = (\lambda'_{\text{обр.}} - \mathbf{p}'\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda_{\text{обр.}} - \mathbf{p}), \qquad (5.210)$$

где функции

$$u_{\lambda_{\text{обр.}}-\mathbf{p}} = \bar u_{\lambda\mathbf{p}}\gamma_0\gamma_5 C, \qquad \bar u_{\lambda_{\text{обр.}}-\mathbf{p}} = (\gamma_0\gamma_5 C)^{-1} u_{\lambda\mathbf{p}} \qquad (5.211)$$

связаны соотношением

$$\bar u_{\lambda_{\text{обр.}}-\mathbf{p}} = \overset{*}{u}_{\lambda_{\text{обр.}}-\mathbf{p}}\gamma_0 \qquad (5.212)$$

---

[1]) Это является аналогом нерелятивистского понимания отражения времени [5].

и описывают обращенное состояние ($\lambda_{\text{обр.}}, -\mathbf{p}$), которое имеет ту же частоту, что и начальное состояние (λ, $\mathbf{p}$). В силу инвариантности функции G_{+}^{0} имеем (λ, $\lambda_{\text{обр.}} > 0$ или < 0)

$$\sum_{\lambda} u_{\lambda\mathbf{p}}\bar{u}_{\lambda\mathbf{p}} = \sum_{\lambda_{\text{обр.}}} u_{\lambda_{\text{обр.}}\,\mathbf{p}}\bar{u}_{\lambda_{\text{обр.}}\,\mathbf{p}}, \tag{5.213}$$

откуда для дифференциальных поперечных сечений, относящихся к неполяризованным частицам, вытекает следующее свойство обратимости:

$$\sum_{\lambda,\lambda'} |(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)|\,\lambda'\mathbf{p}')|^2 = \sum_{\lambda,\lambda'} |(\lambda' - \mathbf{p}'\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda - \mathbf{p})|^2. \tag{5.214}$$

Для полных поперечных сечений находим

$$\sigma(\lambda\mathbf{p}) = \sigma(\lambda_{\text{обр.}} - \mathbf{p}) \tag{5.215}$$

и

$$\sigma_{+}(\mathbf{p}) = \sigma_{+}(-\mathbf{p}), \quad \sigma_{-}(\mathbf{p}) = \sigma_{-}(-\mathbf{p}). \tag{5.216}$$

Для потенциала, поведение которого при пространственном отражении описывается соотношением

$$A_0(\mathbf{x}) = A_0(-\mathbf{x}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{x}), \tag{5.217}$$

функция Грина обладает следующим свойством инвариантности:

$$\gamma_0 G_{+}(-\mathbf{x}, -\mathbf{x}', p_0)\gamma_0 = G_{+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0), \tag{5.218}$$

откуда следует

$$(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}') = (\lambda_{\text{отр.}} - \mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda_{\text{отр.}} - \mathbf{p}'). \tag{5.219}$$

Здесь функции

$$u_{\lambda_{\text{отр.}}, -\mathbf{p}} = \gamma_0 u_{\lambda\mathbf{p}}, \quad \bar{u}_{\lambda_{\text{отр.}}, -\mathbf{p}} = \bar{u}_{\lambda\mathbf{p}}\gamma_0 \tag{5.220}$$

описывают отраженное состояние ($\lambda_{\text{отр.}}$, $-\mathbf{p}$). Из соотношения (5.219) можно получить следующие утверждения относительно поперечных сечений:

$$\sum_{\lambda,\lambda'} |(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}')|^2 = \sum_{\lambda,\lambda'} |(\lambda - \mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda' - \mathbf{p}')|^2 \tag{5.221}$$

и

$$\sigma(\lambda\mathbf{p}) = \sigma(\lambda_{\text{отр.}} - \mathbf{p}). \tag{5.222}$$

Для электростатического поля сочетание обоих преобразований (пространственно-временное отражение и зарядовое сопряжение) дает

$$(\lambda \mathbf{p} \mid I(p_0) \mid \lambda' \mathbf{p}') = (\lambda'_{\text{доп.}} \mathbf{p}' \mid I(p_0) \mid \lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}), \tag{5.223}$$

где дополнительное (обращенно-отраженное) состояние описывается функциями

$$u_{\lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}} = \bar{u}_{\lambda \mathbf{p}} \gamma_5 C, \quad \bar{u}_{\lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}} = (\gamma_5 C)^{-1} u_{\lambda \mathbf{p}}. \tag{5.224}$$

Мы имеем основание для такого обозначения, ибо

$$(\bar{u}_{\lambda \mathbf{p}} u_{\lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}}) = (\bar{u}_{\lambda \mathbf{p}} \gamma_5 C \bar{u}_{\lambda \mathbf{p}}) = 0, \tag{5.225}$$

так как $\gamma_5 C$ — антисимметричная матрица. Поэтому $(\lambda_{\text{доп.}}, \mathbf{p})$ является состоянием с дополнительной поляризацией по отношению к $(\lambda, \mathbf{p})$. Действительно, $u_{\lambda \mathbf{p}}$ можно выбрать так, чтобы

$$u_{\pm 2 \mathbf{p}} = \bar{u}_{\pm 1 \mathbf{p}} \gamma_5 C, \quad u_{\pm 1 \mathbf{p}} = -\bar{u}_{\pm 2 \mathbf{p}} \gamma_5 C. \tag{5.226}$$

Из соотношения (5.223) находим, что для рассеяния неполяризованных частиц в электростатическом поле имеет место принцип детального равновесия

$$\sum_{\lambda, \lambda'} |(\lambda \mathbf{p} \mid I(p_0) \mid \lambda' \mathbf{p}')|^2 = \sum_{\lambda, \lambda'} |(\lambda' \mathbf{p}' \mid I(p_0) \mid \lambda \mathbf{p})|^2, \tag{5.227}$$

а также соотношение

$$\sigma(\lambda \mathbf{p}) = \sigma(\lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}), \tag{5.228}$$

выражающее для электростатического поля независимость полного поперечного сечения рассеяния от спина.

Если электростатическое поле таково, что

$$A_0(\mathbf{x}) = A_0(\mathfrak{R} \cdot \mathbf{x}), \tag{5.229}$$

причем ортогональная диада $\mathfrak{R}$ описывает произвольный поворот, то мы имеем свойство инвариантности

$$R^{-1} G_+(\mathfrak{R} \cdot \mathbf{x}, \mathfrak{R} \cdot \mathbf{x}', p_0) R = G_+(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) \tag{5.230}$$

при условии, что унитарная матрица R удовлетворяет соотношениям

$$R \gamma_0 R^{-1} = \gamma_0, \quad R \boldsymbol{\gamma} R^{-1} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathfrak{R}. \tag{5.231}$$

Тогда

$$(\lambda \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathbf{p}') = (\lambda \mathscr{R} \cdot \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathscr{R} \cdot \mathbf{p}'), \tag{5.232}$$

где функции

$$u_{\lambda \mathscr{R} \cdot \mathbf{p}} = R u_{\lambda \mathbf{p}}, \quad \bar{u}_{\lambda \mathscr{R} \cdot \mathbf{p}} = \bar{u}_{\lambda \mathbf{p}} R^{-1} \tag{5.233}$$

описывают состояние после поворота. Мы не написали $\lambda_{\text{пов.}}$, зная, что два состояния поляризации различаются собственными значениями оператора $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/p$, которые не меняются при поворотах. Поворот на угол π вокруг оси $\mathbf{p} + \mathbf{p}'$ дает $\mathscr{R} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ и $\mathscr{R} \cdot \mathbf{p}' = \mathbf{p}$, так что

$$(\lambda \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathbf{p}') = (\lambda \mathbf{p}' \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathbf{p}), \tag{5.234}$$

а это опять приводит к принципу детального равновесия (5.227). Результатом сочетания соотношений (5.234) с (5.223) является соотношение

$$(\lambda \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathbf{p}') = (\lambda'_{\text{доп.}} \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}'), \tag{5.235}$$

включающее утверждение:

$$(\lambda \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda \mathbf{p}') = (\lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda_{\text{доп.}} \mathbf{p}'). \tag{5.236}$$

Поворот на угол π вокруг оси $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ дает

$$(\lambda \mathbf{p} \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' \mathbf{p}') = (\lambda - \mathbf{p}' \,|\, I(p_0) \,|\, \lambda' - \mathbf{p}), \tag{5.237}$$

откуда можно вывести принцип обратимости (5.214). Из соотношений (5.232) находим, что дифференциальные поперечные сечения для неполяризованных частиц зависят только от угла рассеяния и что полное поперечное сечение не зависит от направления падающих частиц. Так как полное поперечное сечение также не зависит от спина, то оно совпадает с усредненным поперечным сечением $\sigma(p_0)$.

Формулу для вероятностей отдельных переходов, использующую определитель, можно получить из выражения (5.188), если положить $x_{\lambda \mathbf{p}} = 0$ для всех состояний, за исключением состояний с $n_+ = n'_+$, где $x_{\lambda \mathbf{p}} = 1$. Ввиду того, что число частиц фиксировано для конечного состояния с числами заполнения $n_{\lambda \mathbf{p}} = x_{\lambda \mathbf{p}}$, можно выделить вероятность перехода

$$p_+(n, n') = \det(1 - n' + S^+ n S n') = \det[1 - S^+(1 - n) S n']. \tag{5.238}$$

Применим эту формулу для определения вероятности того, что не происходит изменений состояния,

$$p_+(n,\ n) = \det[1 - nS^+(1-n)Sn]; \qquad (5.239)$$

последняя формула отличается тем, что в ней не появляются диагональные матричные элементы матрицы $S_{\lambda\mathbf{p},\ \lambda'\mathbf{p}'}$, так как $n(1-n)=0$. Отметим, что $p_+(n,\ n)=1$ в двух предельных случаях, когда ни одного состояния не занято или когда заняты все состояния. Действительно, эта вероятность не меняется при подстановке $S \longleftrightarrow S^+$, $n \longleftrightarrow 1-n$ (в более общем случае $n' \longleftrightarrow 1-n$). Мы будем иметь дело с часто встречающимся в физике случаем, когда имеется лишь конечное число занятых состояний или „почти все" состояния не заняты. Это обусловливает быструю сходимость разложения для логарифма определителя (5.239):

$$-\ln p_+(n,\ n) = \sum_{\lambda\mathbf{p}} n_{\lambda\mathbf{p}} \left[\sum_{\lambda'\mathbf{p}'} S^+_{\lambda\mathbf{p},\ \lambda'\mathbf{p}'}(1-n_{\lambda'\mathbf{p}'}) S_{\lambda'\mathbf{p}',\ \lambda\mathbf{p}}\right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mathbf{p},\ \lambda'\mathbf{p}'} n_{\lambda\mathbf{p}} n_{\lambda'\mathbf{p}'} \left| \sum_{\lambda''\mathbf{p}''} S^+_{\lambda\mathbf{p},\ \lambda''\mathbf{p}''}(1-n_{\lambda''\mathbf{p}''}) S_{\lambda''\mathbf{p}'',\ \lambda'\mathbf{p}'} \right|^2 + \ldots, \qquad (5.240)$$

который не превышает величины

$$\sum_{\lambda'\mathbf{p}' \neq \lambda\mathbf{p}} n_{\lambda\mathbf{p}} |S_{\lambda\mathbf{p},\lambda'\mathbf{p}'}|^2 = T \sum_{\lambda\mathbf{p}} \sigma(\lambda\mathbf{p}) J_{\lambda\mathbf{p}}. \qquad (5.241)$$

Рассмотрим выражение (5.240) для поляризованного пучка частиц, заключенного внутри телесного угла $\delta\omega$, который настолько мал, что можно пренебречь изменениями в дифференциальных поперечных сечениях, и для которого числа заполнения слабо меняются с энергией (по шкале, определяемой величиной $1/T$). Тогда первым членом в выражении (5.240) будет

$$T \sum_{\lambda\mathbf{p}} \sigma'(\lambda\mathbf{p}) J_{\lambda\mathbf{p}} = T \int dE\, \sigma'(\lambda\mathbf{p}) J_\lambda(E), \qquad (5.242)$$

где

$$dE J_\lambda(E) = \sum_{\delta\omega} J_{\lambda\mathbf{p}} = dE \sum_{\delta\omega} n_{\lambda\mathbf{p}} \left[\frac{p^2}{(2\pi)^3}\right] d\omega \qquad (5.243)$$

есть поток падающих частиц в интервале энергии dE, а $\sigma'(\lambda\mathbf{p})$ — полное поперечное сечение рассеяния, вычисленное без учета всех переходов в первоначально занятые состояния. Так как последние состояния имеют одинаковые поляризации и направления движения в этих состояниях различаются бесконечно мало, то мы найдем, что второй член в выражении (5.240) будет иметь вид

$$\pi T \int dE\,[\sigma'(\lambda \mathbf{p})\,\mathcal{J}_\lambda(E)]^2, \tag{5.244}$$

и, действительно, полное разложение представляется выражением

$$-\ln p_+(n,\ n) = -\frac{T}{2\pi}\int dE \ln[1 - 2\pi\sigma'(\lambda \mathbf{p})\,\mathcal{J}_\lambda(E)]. \tag{5.245}$$

Форму этого результата можно понять непосредственно исходя из выражения (5.239) при помощи представления $S_{\lambda\mathbf{p},\,\lambda'\mathbf{p}'} = \delta_{E,\,E'}s_{ab}$, которое позволяет выразить определитель в виде произведения определителей

$$p_+(n,\ n) = \prod_E \det\Big[\delta_{ab} - n_a \sum_c s^{+}_{ac}(1 - n_c)\,s_{cb}n_b\Big], \tag{5.246}$$

связанных с каждой энергией. Отметим, что, согласно соотношению

$$\sum_{E'} |\,\delta_T(E - E')(dE\,dE')^{1/2}|^2 = \frac{T}{2\pi}dE \int dE'\delta(E - E') = \frac{T}{2\pi}dE, \tag{5.247}$$

интервал между соседними значениями энергии равен $2\pi/T$. Так как все занятые состояния данной энергии имеют существенно одинаковые свойства, имеем

$$\sum_c s^{+}_{ac}(1 - n_c)\,s_{cb} = (d\omega_a d\omega_b)^{1/2}\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\sigma' \tag{5.248}$$

и

$$p_+(n,\ n) = \prod_E \det\left[\delta_{ab} - n_a d\omega_a^{1/2} n_b d\omega_b^{1/2}\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\sigma'\right]. \tag{5.249}$$

Все члены разложения отдельного определителя, за исключением первых двух, исчезают теперь, поэтому

$$p_+(n,\ n) = \prod_E\left[1 - \sum_a n_a d\omega_a\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\sigma'\right] = \prod_E[1 - 2\pi\sigma'(\lambda\mathbf{p})\,\mathcal{J}_\lambda(E)], \tag{5.250}$$

Беря логарифм и заменяя сумму интегралом при помощи соотношения (5.247), приходим к выражению (5.245).

Из соотношения (5.250) можно получить верхний предел полных поперечных сечений. Пусть $\Delta\omega$ будет телесным углом, который связан с различием направлений в состояниях a и b и для которого формула (5.248) справедлива без большой ошибки. Если все состояния в этом угловом интервале одинаково заняты, то каждый множитель в соотношении (5.250) приближенно дается выражением

$$1-n(1-n)\Delta\omega\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2\sigma. \qquad (5.251)$$

Так как $n(1-n)\leqslant {}^1/_4$, то мы заключаем, что

$$\sigma\lesssim\frac{4\pi}{p^2}\frac{4\pi}{\Delta\omega}. \qquad (5.252)$$

Тот же результат получается из формулы (5.199) следующим путем:

$$\sigma(\lambda\mathbf{p})=\frac{2m}{p}\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(E)\,|\,\lambda\mathbf{p})\gtrsim\Delta\omega\left[\frac{m}{2\pi}\operatorname{Im}(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(E)\,|\,\lambda\mathbf{p})\right]^2\lesssim$$
$$\lesssim\frac{\left(\frac{2m}{p}\right)^2}{\Delta\omega\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2}=\frac{4\pi}{p^2}\frac{4\pi}{\Delta\omega}. \qquad (5.253)$$

Мы видим, таким образом, что

$$2\pi\sigma'(\lambda\mathbf{p})J_\lambda(E)<4\sum_{\delta\omega}n_{\lambda\mathbf{p}}\frac{d\omega}{\Delta\omega}\ll 1, \qquad (5.254)$$

так как $\delta\omega<\Delta\omega$, и при обычных условиях только малая часть состояний в телесном углу $\delta\omega$ будет занята. Незначительное различие между $\sigma(\lambda\mathbf{p})$ и $\sigma'(\lambda\mathbf{p})$ имеет тот же порядок величины. Действительно, из соотношения

$$\sigma'(\lambda\mathbf{p})=\sigma(\lambda\mathbf{p})-\frac{(2\pi)^3}{p^2}\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p},\lambda\mathbf{p})}{d\omega}J_\lambda(E) \qquad (5.255)$$

и оценки

$$\sigma(\lambda\mathbf{p})\gtrsim\Delta\omega\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p},\lambda\mathbf{p})}{d\omega} \qquad (5.256)$$

находим, что

$$\frac{\sigma-\sigma'}{\sigma}\lesssim\frac{(2\pi)^3}{p^2\Delta\omega}J_\lambda(E)=\sum_{\delta\omega}n_{\lambda\mathbf{p}}\frac{d\omega}{\Delta\omega}\ll 1. \qquad (5.257)$$

Таким образом, мы обосновали выражение

$$p(n, n) = \exp\left[-T\int dE\,\sigma(\lambda\mathbf{p})\,J_\lambda(E)\right] \tag{5.258}$$

для пучков малой плотности, с которыми обычно имеют дело. Установив статистическую независимость состояний при последних условиях, можно написать более общую формулу [соотношение (5.241)]:

$$p(n, n) = \exp\left[-T\sum_{\lambda\mathbf{p}}\sigma(\lambda\mathbf{p})\,J_{\lambda\mathbf{p}}\right]. \tag{5.259}$$

Собственные фазы. Мы должны еще доказать эквивалентность смещений фаз, определяемых при помощи асимптотической формы собственных функций, с собственными фазами, определяемыми через собственные значения матрицы $s_{ab}(p_0)$. Для этой цели рассмотрим асимптотическую форму функции Грина и представим ее в виде разложения по собственным функциям. Для $x_0 - x_0' = T > 0$ имеем

$$\begin{aligned} G_+(x, x') \sim i\sum_{+}\int_m^{\infty} dE\varphi_{aE}(\mathbf{x})\overline{\varphi}_{aE}(\mathbf{x}')\,e^{-iET} &+ \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{(m,-)} dp_0 e^{-ip_0T}\sum\frac{\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})}{\varepsilon(\lambda)E - p_0} &\times \\ \times\left[\int\overline{\psi}_{\lambda\mathbf{p}} I(p_0)\,\psi_{\lambda'\mathbf{p}'}\right]\frac{\overline{\psi}_{\lambda'\mathbf{p}'}(\mathbf{x}')}{\varepsilon(\lambda')E' - p_0}&, \end{aligned} \tag{5.260}$$

так как вклады дискретных состояний экспоненциально уменьшаются при возрастании расстояния от локализованного поля. Заметив, что $\psi_{\lambda\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ и $\overline{\psi}_{\lambda'\mathbf{p}'}(\mathbf{x}')$ являются быстро изменяющимися функциями от E и E' по сравнению с интегралом $\int\overline{\psi}_{\lambda\mathbf{p}} I(p_0)\,\psi_{\lambda'\mathbf{p}'}$, мы можем воспользоваться предельными выражениями при $|\mathbf{x}|$, $|\mathbf{x}'| \to \infty$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_+(x, x') \sim i\sum_{+}\int_m^{\infty} dE\varphi_{aE}(\mathbf{x})\overline{\varphi}_{aE}(\mathbf{x}')\,e^{-iET} &+ \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{(m,-)} dp_0 e^{-ip_0T}\sum_{a\,b}\int_m^{\infty} dE\,dE'\,\frac{\varphi_{aE}(\mathbf{x})}{E - p_0}\,I_{ab}(p_0)\,\frac{\overline{\varphi}_{bE'}(\mathbf{x}')}{E' - p_0}&; \end{aligned} \tag{5.261}$$

здесь вклад отрицательно-частотных состояний исключен из рассмотрения и введена величина $I_{ab}(p_0)$, которая целиком относится к состояниям с частотой p_0, ибо интегралы

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_m^\infty dE' \frac{\varphi_{aE'}(\mathbf{x})}{E'-E-i\varepsilon} = \varphi_{aE}^{(+)}(\mathbf{x}),\\
&\frac{1}{\pi}\int_m^\infty E' \frac{\varphi_{aE'}(\mathbf{x})}{E'-E+i\varepsilon} = \varphi_{aE}^{(-)}(\mathbf{x});\\
&\frac{1}{\pi}\int_m^\infty dE' \frac{\overline{\varphi}_{aE'}(\mathbf{x})}{E'-E-i\varepsilon} = \overline{\varphi}_{aE}^{(+)}(\mathbf{x}),\\
&\frac{1}{\pi}\int_m^\infty dE' \frac{\overline{\varphi}_{aE'}(\mathbf{x})}{E'-E+i\varepsilon} = \overline{\varphi}_{aE}^{(-)}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{5.262}$$

при $|\mathbf{x}|\to\infty$ определяются значениями E' в непосредственной окрестности точки E. Так как путь интегрирования по p_0 обходит часть действительной оси от m до бесконечности, то мы получаем соотношение

$$\begin{aligned}
G_+(x,\ x') \sim i\int_m^\infty dE e^{-iET}\Big\{\sum_a \varepsilon(p_0)\,\varphi_{ap_0}(\mathbf{x})\,\overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x}') -\\
-\frac{\pi i}{2}\sum_{ab}[\varphi_{ap_0}^{(+)}(\mathbf{x})\,I_{ab}(p_0)\,\overline{\varphi}_{bp_0}^{(+)}(\mathbf{x}') - \varphi_{ap_0}^{(-)}(\mathbf{x})\,I_{ab}(p_0)\,\overline{\varphi}_{bp_0}^{(-)}(\mathbf{x}')]\Big\},
\end{aligned} \tag{5.263}$$

которое мы записали в виде, справедливом также для $x_0'-x_0=T$, когда $\varepsilon(p_0)=-1$.

Соотношение

$$\left[\frac{1}{E'-E-i\varepsilon}-\frac{1}{E'-E+i\varepsilon}\right] = 2\pi i\delta(E-E'),\quad \varepsilon\to+0 \tag{5.264}$$

показывает, что

$$\varphi_{ap_0}^{(+)}-\varphi_{ap_0}^{(-)} = 2i\varphi_{ap_0}. \tag{5.265}$$

Мы также имеем

$$\varphi_{ap_0}^{(+)}+\varphi_{ap_0}^{(-)} = 2\varphi_{ap_0}^{(1)}, \tag{5.266}$$

где определение

$$\varphi^{(1)}_{ap_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} P \int\limits_m^\infty dE' \frac{\varphi_{ap_0'}(\mathbf{x})}{E' - E} \tag{5.267}$$

содержит интеграл, взятый в смысле главного значения. Представление функции $\varphi_{ap_0}(\mathbf{x})$, даваемое формулой (5.265), является разложением на расходящиеся и сходящиеся волны. Интегральные операции (5.262), примененные к плоской волне $e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = \exp(ip|\mathbf{x}|\cos\theta)$, дают асимптотические соотношения

$$\begin{gathered}\frac{1}{2i}[\exp(ip|\mathbf{x}|\cos\theta)]^{(+)} \sim \frac{1}{2\pi i}\int dp' \frac{\exp[ip'|\mathbf{x}|\cos\theta]}{p' - p - i\varepsilon} = \\ = \begin{cases} \exp(ip|\mathbf{x}|\cos\theta), & \cos\theta > 0, \\ 0, & \cos\theta < 0,\end{cases}\end{gathered} \tag{5.268}$$

и

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2i}[\exp(ip|\mathbf{x}|\cos\theta)]^{(-)} \sim -\frac{1}{2\pi i}\int dp' \frac{\exp[ip'|\mathbf{x}|\cos\theta]}{p' - p + i\varepsilon} = \\ = \begin{cases} 0, & \cos\theta > 0, \\ \exp(ip|\mathbf{x}|\cos\theta), & \cos\theta < 0,\end{cases}\end{gathered} \tag{5.269}$$

которые показывают, что фазы волн $\varphi^{(+)}_{ap_0}$ и $\varphi^{(-)}_{ap_0}$ соответственно растут и уменьшаются при возрастании расстояния. С этим связано утверждение, что

$$\int dE e^{-iET} \varphi^{(-)}_{ap_0}(\mathbf{x}) \sim 0, \tag{5.270}$$

следующее из интегрального представления (5.262) или из отсутствия точки стационарной фазы в подинтегральном выражении в (5.270). Последний аргумент указывает также на справедливость утверждения

$$\int dE e^{-iET} \varphi^{(-)}_{ap_0}(\mathbf{x})\, \overline{\varphi}^{(-)}_{bp_0}(\mathbf{x}') \sim 0 \tag{5.271}$$

для больших $|\mathbf{x}|$ и $|\mathbf{x}'|$.

Теперь можно выразить соотношение (5.263) через собственные функции при помощи следующей перегруппировки:

$$\frac{1}{2i}\sum[\varphi^{(+)}_{ap_0}I_{ab}(p_0)\overline{\varphi}^{(+)}_{bp_0}-\varphi^{(-)}_{ap_0}I_{ab}(p_0)\overline{\varphi}^{(-)}_{bp_0}]=$$
$$=\sum[\varphi^{(+)}_{ap_0}I_{ab}(p_0)\overline{\varphi}_{bp_0}+\varphi_{ap_0}I^{\dagger}_{ab}(p_0)\overline{\varphi}^{(-)}_{bp_0}]+$$
$$+\pi\varepsilon(p_0)\sum\varphi^{(+)}_{ap_0}I_{ac}(p_0)I^{\dagger}_{cb}(p_0)\overline{\varphi}^{(-)}_{bp_0}-$$
$$-\pi\varepsilon(p_0)\sum\varphi^{(-)}_{ap_0}I_{ac}(p_0)I^{\dagger}_{cb}(p_0)\overline{\varphi}^{(-)}_{bp_0};\qquad(5.272)$$

здесь мы воспользовались соотношениями (5.110). Если мы выбросим последний член в выражении (5.272) на основании соотношения (5.271), то получим

$$G_{+}(x,\ x')\sim i\int_{m}^{\infty}dEe^{-iET}\sum_{a}\varepsilon(p_0)\psi_{ap_0}(\mathbf{x})\overline{\psi}_{ap_0}(\mathbf{x}'),\qquad(5.273)$$

причем

$$\psi_{ap_0}(\mathbf{x})\sim\varphi_{ap_0}(\mathbf{x})+\varepsilon(p_0)\sum_{b}\varphi^{(+)}_{bp_0}(\mathbf{x})\pi I_{ba}(p_0)=$$
$$=\frac{1}{2i}\left[-\varphi^{(-)}_{ap_0}(\mathbf{x})+\sum_{b}\varphi^{(+)}_{bp_0}(\mathbf{x})s_{ba}(p_0)\right]\qquad(5.274)$$

и

$$\overline{\psi}_{ap_0}(\mathbf{x})\sim\overline{\varphi}_{ap_0}(\mathbf{x})+\varepsilon(p_0)\sum_{b}\pi I^{\dagger}_{ab}(p_0)\varphi^{(-)}_{bp_0}(\mathbf{x})=\psi_{ap_0}(\mathbf{x})^{*}\gamma_0.\qquad(5.275)$$

Эти собственные функции имеют тот же вид, что и в стационарной теории рассеяния. В частности, матрица $s_{ab}(p_0)$ выступает как матрица рассеяния одной частицы, связывающая радиально расходящиеся волны со сходящимися волнами.

При введении собственных функций φ_{Ap_0} соотношения (5.273) и (5.274) заменяются на следующие:

$$G_{+}(x,\ x')\sim i\int_{m}^{\infty}dEe^{-iET}\sum_{A}\varepsilon(p_0)\psi_{Ap_0}(\mathbf{x})\overline{\psi}_{Ap_0}(\mathbf{x}')\qquad(5.276)$$

и

$$\psi_{Ap_0}(\mathbf{x})\sim\frac{1}{2i}[-\varphi^{(-)}_{Ap_0}(\mathbf{x})+\varphi^{(+)}_{Ap_0}(\mathbf{x})e^{2i\delta_A(p_0)}]=$$
$$=e^{i\delta_A(p_0)}\frac{1}{2i}[\varphi^{(+)}_{Ap_0}(\mathbf{x})e^{i\delta_A(p_0)}-\varphi^{(-)}_{Ap_0}(\mathbf{x})e^{-i\delta_A(p_0)}],\qquad(5.277)$$

где функции $\varphi^{(+)}_{Ap_0}$, $\varphi^{(-)}_{Ap_0}$ получаются из $\varphi^{(+)}_{ap_0}$, $\varphi^{(-)}_{ap_0}$ при помощи соотношения

$$\varphi^{(+)}_{Ap_0}(\mathbf{x}) = \sum_a \varphi^{(+)}_{ap_0}(\mathbf{x})(a \mid A)_{p_0}, \qquad \varphi^{(-)}_{Ap_0}(\mathbf{x}) = \sum_a \varphi^{(-)}_{ap_0}(\mathbf{x})(a \mid A)_{p_0}, \tag{5.278}$$

в котором подразумевается интегрирование по направлению распространения. Асимптотическое поведение этих интегралов определяется точками стационарной фазы при углах $\theta = 0$, π [соотношения (5.268), (5.269)]. Поэтому асимптотическое выражение для $\varphi^{(\pm)}_{Ap_0}(\mathbf{x})$ содержит радиальные функции вида $|\mathbf{x}|^{-1} \exp[\pm i(p|\mathbf{x}| + \varphi^0)]$. Получающиеся асимптотические выражения для $\psi_{Ap_0}(\mathbf{x})$ содержат тригонометрические функции от аргумента $p|\mathbf{x}| + \varphi^0 + \delta_A(p_0)$, чем и устанавливается эквивалентность двух определений фаз:

$$\delta_A(p_0) = \delta_{\gamma E}. \tag{5.279}$$

Можно отметить, что дифференциальное поперечное сечение, полное поперечное сечение и усредненное полное поперечное сечение выражаются следующим образом через собственные фазы:

$$\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p}, \lambda'\mathbf{p}')}{d\omega} = \frac{1}{p^2}\left| \sum_A (\lambda\mathbf{p} \mid A)\, e^{i\delta_A(p_0)} \sin\delta_A(p_0)(A \mid \lambda'\mathbf{p}') \right|^2, \tag{5.280}$$

$$\sigma(\lambda\mathbf{p}) = \frac{4\pi}{p^2} \sum_A \sin^2\delta_A(p_0)\,|(A \mid \lambda\mathbf{p})|^2$$

и

$$\sigma(p_0) = \frac{2\pi}{p^2} \sum_A \sin^2\delta_A(p_0), \tag{5.281}$$

где мы записали

$$(a \mid A)_{p_0} = \left(\frac{d\omega}{4\pi}\right)^{1/2} (\lambda\mathbf{p} \mid A), \tag{5.282}$$

так что

$$\sum_\lambda \int \frac{d\omega}{4\pi} (A \mid \lambda\mathbf{p})(\lambda\mathbf{p} \mid B) = \delta_{AB}. \tag{5.283}$$

Следует сделать замечание о построении фаз из элементов диагональной матрицы $I_{AB}(p_0)$:

$$\int (d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,\overline{\varphi}_{Ap_0}(\mathbf{x})\,I(\mathbf{x},\ \mathbf{x}',\ p_0)\,\varphi_{Bp_0}(\mathbf{x}') = \\ = \delta_{AB}\frac{1}{\pi}\varepsilon(p_0)\,e^{i\delta_A(p_0)}\sin\delta_A(p_0)\,; \quad (5.284)$$

здесь имеется неудобство, заключающееся в вычислении комплексной функции одного действительного параметра. Можно обойти эту трудность, возвращаясь к определению

$$I(p_0) = e\gamma A\,[1 - G^0_+(p_0)\,e\gamma A]^{-1} \quad (5.285)$$

и записывая

$$G^0_+(p_0) = \mathbf{G}^0(p_0) + \frac{1}{2}[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)], \quad (5.286)$$

при этом функция Грина

$$\mathbf{G}^0(p_0) = \frac{1}{2}[G^0_+(p_0) + G^0_-(p_0)] \quad (5.287)$$

является самосопряженной. Теперь имеем

$$1 - G^0_+(p_0)\,e\gamma A = \\ = \left\{1 - \frac{1}{2}\left[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)\right]\mathbf{I}(p_0)\right\}[1 - \mathbf{G}^0(p_0)e\gamma A], \quad (5.288)$$

где самосопряженная матрица

$$\mathbf{I}(p_0) = e\gamma A\,[1 - \mathbf{G}^0(p_0)\,e\gamma A]^{-1} \quad (5.289)$$

построена из функций Грина $\mathbf{G}^0$ таким же образом, каким $I(p_0)$ включает G^0_+. Поэтому

$$I(p_0) = \mathbf{I}(p_0)\left\{1 - \frac{1}{2}[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\,\mathbf{I}(p_0)\right\}^{-1} = \\ = \left\{1 - \mathbf{I}(p_0)\,\frac{1}{2}[G^0_+(p_0) - G^0_-(p_0)]\right\}^{-1}\mathbf{I}(p_0). \quad (5.290)$$

или, что то же самое,

$$I(p_0)-\mathrm{I}(p_0)=I(p_0)\frac{1}{2}[G_+^0(p_0)-G_-^0(p_0)]\,\mathrm{I}(p_0)=$$
$$=\mathrm{I}(p_0)\frac{1}{2}[G_+^0(p_0)-G_-^0(p_0)]\,I(p_0). \qquad (5.291)$$

Матрица $\mathrm{I}(p_0)$, относящаяся к состояниям с частотой p_0, эрмитова:

$$\mathrm{I}_{ab}(p_0)=\int(dx)(dx')\,\overline{\varphi}_{ap_0}(x)\,\mathrm{I}(x, x', p_0)\,\varphi_{bp_0}(x')=\mathrm{I}^*_{ba}(p_0) \qquad (5.292)$$

и, согласно соотношениям (5.108) и (5.291), связана с матрицей $I_{ab}(p_0)$ следующим образом:

$$I_{ac}(p_0)-\mathrm{I}_{ac}(p_0)=\pi i\varepsilon(p_0)\sum_b I_{ab}(p_0)\,\mathrm{I}_{bc}(p_0)=$$
$$=\pi i\varepsilon(p_0)\sum_b \mathrm{I}_{ab}(p_0)\,I_{bc}(p_0). \qquad (5.293)$$

Вводя общие собственные функции этих матриц, получаем соотношение для собственных значений

$$I_A(p_0)-\mathrm{I}_A(p_0)=\pi i\varepsilon(p_0)\,I_A(p_0)\,\mathrm{I}_A(p_0), \qquad (5.294)$$

или

$$I_A(p_0)=\mathrm{I}_A(p_0)\,[1-\pi i\varepsilon(p_0)\,\mathrm{I}_A(p_0)]^{-1}, \qquad (5.295)$$

откуда

$$s_A(p_0)=1+2\pi i\varepsilon(p_0)\,I_A(p_0)=\frac{1+\pi i\varepsilon(p_0)\,\mathrm{I}_A(p_0)}{1-\pi i\varepsilon(p_0)\,\mathrm{I}_A(p_0)}=e^{2i\delta_A(p_0)}. \qquad (5.296)$$

Таким образом, действительные числа $\mathrm{I}_A(p_0)$ связаны с собственными фазами соотношением

$$\mathrm{I}_A(p_0)=\frac{1}{\pi}\varepsilon(p_0)\,\mathrm{tg}\,\delta_A(p_0). \qquad (5.297)$$

Видоизменяя соответствующим образом соотношения (5.67) и (5.71), получаем следующее уравнение для построения собственных фаз:

$$\delta_{AB}\frac{1}{\pi}\varepsilon(p_0)\operatorname{tg}\delta_A(p_0) =$$
$$= \frac{1}{D''(p_0)}\sum_n(-e)^n\frac{1}{n!}\int(d\mathbf{x}_1)\ldots(d\mathbf{x}_n)\times$$
$$\times\operatorname{tr}\left\{\prod_{i=1}^{n}[\gamma_i A(\mathbf{x}_i)]\,\det{}''_{(n+1)}\begin{bmatrix}0, & \bar{\varphi}_{Ap_0}(\mathbf{x}_j)\\ \varphi_{Bp_0}(\mathbf{x}_i), & G^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, p_0)\end{bmatrix}\right\}, \quad (5.298)$$

где

$$D''(p_0) = 1 + \sum_n(-e)^n\frac{1}{n!}\int(d\mathbf{x}_1)\ldots(d\mathbf{x}_n)\times$$
$$\times\operatorname{tr}\left\{\prod_{i=1}^{n}[\gamma_i A(\mathbf{x}_i)]\,\det{}''_{(n)}G^0(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, p_0)\right\}. \quad (5.299)$$

Следует иметь в виду, что в общем случае собственные функции φ_{Ap_0} зависят от величины потенциала, так как они определяются условием: матрица (5.298) должна быть диагональной матрицей для данного потенциала. Когда этой зависимости нет, возможно дальнейшее упрощение благодаря полному определению собственных функций из свойств симметрии потенциала. Привычным примером такого определения является классификация функций по моменту количества движения для сферически симметричного скалярного потенциала. При этих условиях функция Грина $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ выражается аддитивно через функции $G^0_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$, содержащие только состояния свободных частиц типа A, а определитель $D''(p_0)$ соответственно разбивается на произведение определителей, каждый из которых полностью относится к определенному типу состояний. Поэтому в выражении (5.298) для элемента, диагонального по A, все вклады состояний, отличных от A, сократятся, и в выражениях (5.298) и (5.299) G^0 можно заменить на G^0_A.

Необходимость использования модифицированных определителей следует из сингулярности функции $G^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Как можно проверить на примере изотропного скалярного потенциала, эта сингулярность связана с расходимостью суммирования по A; каждая функция $G_A^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$ конечна всюду, кроме начала координат. Следовательно, нет необходимости использовать модифицированные определители в том варианте соотношений (5.298) и (5.299), который включает функцию $G_A^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)$. Оказывается, что критерием существования каждого немодифицированного определителя в приведенном выше примере является конечность величины $\int\limits_0^\infty d|\mathbf{x}||eA_0|$. Таким образом, индивидуальные фазы существуют для произвольной величины потенциала, который менее сингулярен, чем $|\mathbf{x}|^{-1}$, и который убывает на бесконечности быстрее, чем $|\mathbf{x}|^{-1}$. Последнее условие менее сильно, чем условие существования функции $D''(p_0)$.

Предел высокой энергии. В заключение дадим для изотропного скалярного потенциала $A_0(r)$ простые предельные формы дифференциального и полного поперечных сечений, справедливые при высоких энергиях. Если R — эффективный радиус действия потенциала — настолько велик, что выполняется условие

$$pR \gg 1, \tag{5.300}$$

то становятся важными большие значения орбитального момента количества движения l. Тогда точный вид связи между орбитальным и спиновым моментами становится несущественным, и в качестве квантовых чисел A, характеризующих различные типы состояний, можно выбрать $lm\lambda$. Определитель $D_+(lm\lambda p_0)$, относящийся к состояниям с данным моментом количества движения, можно построить для достаточно больших энергий по аналогии с классическим приближением для $D''_+(p_0)$. Замечая, что $p^2 \approx p_r^2 + (l^2/r^2)$, мы находим

$$\begin{aligned}\ln D_+(lm\lambda p_0) \sim \int \frac{dr\,dp_r}{2\pi} \Big\{ \ln\Big[p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} + m^2 - (p_0 - eA_0(r))^2\Big] - \\ - \ln\Big[p_r^2 + \frac{l^2}{r^2} + m^2 - p_0^2\Big] \Big\} = \\ = -i\int\limits_0^\infty dr \left\{ \Big[(p_0 - eA_0(r))^2 - \frac{l^2}{r^2} - m^2\Big]^{1/2} - \Big[p_0^2 - \frac{l^2}{r^2} - m^2\Big]^{1/2} \right\}.\end{aligned} \tag{5.301}$$

Для контроля проверим, что[1]

$$\ln D''_+(p_0) = \sum_{lm\lambda} \ln D''_+(lm\,\lambda p_0) \sim$$

$$\sim 2\int_0^\infty 2l\,dl\,(-i)\int_0^\infty dr \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n!}[-eA_0(r)]^n\left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^n\left[p_0^2-\frac{l^2}{r^2}-m^2\right]^{1/2} =$$

$$= -\frac{i}{3\pi}\int_0^\infty 4\pi r^2\,dr \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n!}[-eA_0(r)]^n\left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^n (p_0^2-m^2)^{3/2}, \quad (5.302)$$

а это находится в согласии с выражением (5.135). Поэтому

$$\delta_l(p_0) = -\operatorname{Im}\ln D_+(lm\,\lambda p_0) \sim$$

$$\sim \int_0^\infty dr\left\{\left([p_0-eA_0(r)]^2-\frac{l^2}{r^2}-m^2\right)^{1/2}-\left[p_0^2-\frac{l^2}{r^2}-m^2\right]^{1/2}\right\}; \quad (5.303)$$

здесь интегрирование по радиусу распространено только на область, где отдельные квадратные корни действительны. Для l, не равных нулю [или, точнее, при выполнении соотношения $p^2 \approx p_r^2 + (l+1/2)^2/r^2$], область во втором интеграле в выражении (5.303) ограничена значениями r, большими, чем l/p. Предполагается, что в первом интеграле для любой величины потенциала имеется также наименьшее ненулевое значение r, если только этот потенциал менее сингулярен, чем $1/r$.

---

[1] Следует отметить, что в этом приближении

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_0 \ln D''_+(lm\,\lambda p_0) = -i\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n!}\int_0^\infty dr\,(-eA_0(r))^n \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dp_0\left(\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^n\left[p_0^2-\frac{l^2}{r^2}-m^2\right]^{1/2} = 0$$

в соответствии с требованиями калибровочной инвариантности, тогда как выражение (5.135) дает конечный результат, зависящий от калибровки. Это подтверждает, что трудности с сохранением калибровочной инвариантности в выражении (5.153) для $E(0)$ можно обойти, если интегрирование по энергии проводить раньше суммирования по γ.

Пусть теперь энергия будет настолько велика, что

$$pv \gg \left| eA_0\left(r \sim \frac{1}{p}\right)\right|, \qquad (5.304)$$

где

$$v = \frac{p}{|p_0|} \qquad (5.305)$$

и $r \sim (1/p)$ — наименьшее расстояние, которое встречается в выражении (5.303). Тогда можно приближенно заменить выражение (5.303) выражением

$$\delta_l(p_0) = -p_0 \int\limits_{l/p}^{\infty} dr \frac{eA_0(r)}{(p^2 - l^2/r^2)^{1/2}} =$$

$$= -\varepsilon(p_0)\frac{1}{v}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{r\,dr}{(r^2-\rho^2)^{1/2}} eA_0(r) = \delta(\rho), \qquad (5.306)$$

в котором

$$\rho = \frac{l}{p}. \qquad (5.307)$$

Условию (5.304) можно удовлетворить при произвольной величине потенциала, который менее сингулярен, чем $1/r$. Итак, пусть $|eA_0(r)| \sim \lambda r^{-(1-\beta)}$. Тогда соотношение (5.304) принимает вид

$$p^{\beta} v \gg \lambda, \qquad (5.308)$$

и левую часть можно действительно сделать произвольно большой, если только $\beta > 0$. Если мы запишем $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$, то соотношение (5.306) примет вид

$$\delta(\rho) = -\varepsilon(p_0)\frac{1}{2v}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz eA_0[(\rho^2 + z^2)^{1/2}], \qquad (5.309)$$

соответствующий случаю частицы, движущейся по траектории, которую можно описать классически и которая аппроксимируется прямой линией. В пределе, когда энергия стремится к бесконечности, для произвольного фиксированного l собственные фазы принимают универсальное неисчезающее значение [1])

$$\delta_l(p_0) \to -\varepsilon(p_0) \int_0^\infty dr e A_0(r). \tag{5.310}$$

Требование, чтобы эта величина была конечной, совпадает с ранее установленным условием существования отдельных собственных фаз.

Функцией преобразования, удовлетворяющей условию нормировки (5.283), будет, очевидно, функция

$$(\lambda \mathbf{p} \mid lm\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} (4\pi)^{1/2} Y_{lm}(\mathbf{p}), \tag{5.311}$$

так что, согласно выражениям (5.280) и (5.281),

$$\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p}, \lambda'\mathbf{p}')}{d\omega} \sim \delta_{\lambda\lambda'} \frac{1}{p^2} \times$$
$$\times \left| \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\varepsilon(p_0)\delta_l(p_0)} \sin\delta_l(p_0) \right|^2 \tag{5.312}$$

и

$$\sigma(p_0) \sim \frac{4\pi}{p^2} \sum_l (2l+1) \sin^2\delta_l(p_0). \tag{5.313}$$

Заменяя суммирование интегралами по $l = p\rho$ и используя предельное выражение для $P_l(\cos\theta)$ при малых углах, равное $J_0(l\theta)$ (что можно получить, сравнивая соответствующие дифференциальные уравнения), находим [2])

$$\frac{d\sigma(\lambda\mathbf{p}, \lambda'\mathbf{p}')}{d\omega} \sim \delta_{\lambda\lambda'} 4p^2 \left| \int_0^\infty \rho\, d\rho J_0(p\theta\rho) e^{i\varepsilon(p_0)\delta(\rho)} \sin\delta(\rho) \right|^2 \tag{5.314}$$

и

$$\sigma(p_0) \sim 8\pi \int_0^\infty \rho\, d\rho \sin^2\delta(\rho). \tag{5.315}$$

Чтобы полное сечение существовало, фаза $\delta(\rho)$ должна приближаться к нулю при возрастании ρ быстрее, чем $1/\rho$; для этого требуется, чтобы потенциальная энергия $eA_0(r)$

---

[1]) Это было замечено в работе [6].

[2]) Аналогичные результаты были ранее получены в работах [7, 8].

исчезала быстрее, чем $1/r^2$, в согласии с ранее полученным условием для эффективной локализации поля. Необходимо заметить также, что сечение σ имеет ненулевой предел для бесконечной энергии.

Величина фазы $\delta(\rho)$ при $\rho < R$ приближенно дается выражением

$$\delta(\rho) \sim \left(\frac{|eA_0|}{pv}\right)(pR), \tag{5.316}$$

первый множитель которого мал, а второй велик. В зависимости от соотношения между этими величинами собственные фазы могут принимать произвольные значения. Если максимальное значение фазы $\delta(\rho)$ будет мало по сравнению с единицей, то угловое распределение, получаемое из выражения (5.314), будет в основном определяться колебательным характером функции Бесселя и поэтому относиться к угловому интервалу, измеряемому величиной

$$\theta_q \sim \frac{1}{pR} \ll 1. \tag{5.317}$$

Положение является иным (и представляет классический предел), когда $\delta(\rho)$ достигает значений, которые велики по сравнению с единицей. Обозначим теперь через R радиус действия потенциала, т. е. расстояние, на котором фаза $\delta(\rho)$ спадает от больших значений при $\rho < R$ к значениям, меньшим единицы, при $\rho > R$. Если мы пренебрежем вкладом расстояний, бóльших R, то мы можем при $\lambda = \lambda'$ записать выражения (5.314) и (5.315) в виде

$$\frac{d\sigma}{d\omega} \sim p^2 \left| \int_0^R \rho\, d\rho J_0(p\theta\rho)\, e^{2i\varepsilon(p_0)\delta(\rho)} - \int_0^R \rho\, d\rho J_0(p\theta\rho) \right|^2 \tag{5.318}$$

и

$$\sigma \sim 2\pi R^2, \tag{5.319}$$

где мы использовали среднее значение для $\sin^2\delta(\rho)$. Главный вклад в первый интеграл в выражении (5.318) получается в окрестности точки стационарной фазы (в предположении $p\theta\rho \gg 1$), которая определяется выражением

$$p\theta = 2\left|\frac{d}{d\rho}\delta(\rho)\right| = \frac{1}{v}\left| \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{\partial}{\partial\rho} eA_0 \right|. \tag{5.320}$$

Это — как раз приближенное выражение классической связи между параметром столкновения и углом отклонения, справедливое при больших энергиях. Чтобы удовлетворить условию $p\theta\rho \gg 1$, необходимо ограничить ρ такими значениями, для которых

$$\frac{1}{v}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} dz\rho \frac{\partial}{\partial\rho} eA_0\right| \sim \frac{\rho}{R}\delta(\rho) \gg 1. \tag{5.321}$$

Если фаза $\delta(\rho)$ достаточно велика, то исключается только малая часть области действия $0 < \rho < R$. Отметим также, что величина углов, получаемая из формулы (5.320), дается выражением

$$\theta_c \sim \frac{|eA_0|}{pv} \ll 1, \tag{5.322}$$

в то время как второй член выражения (5.318) эффективно ограничен углами порядка $\theta_q \sim 1/pR$. Однако

$$\frac{\theta_c}{\theta_q} \sim \frac{|eA_0|}{pv}(pR) \sim \delta(\rho), \tag{5.323}$$

что велико по сравнению с единицей для $\rho < R$. Проводя интегрирования в выражении (5.318) и пренебрегая интерференцией между двумя существенно не перекрывающимися угловыми распределениями, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \left(\frac{\rho\, d\rho}{\theta\, d\theta}\right)_c + R^2\left[\frac{J_1(pR\theta)}{\theta}\right]^2, \tag{5.324}$$

где первый член — классически вычисленное дифференциальное поперечное сечение, а второй — определяет обычное теневое рассеяние. Обе части в согласии с выражением (5.319) дают вклады в полное поперечное сечение, равные πR^2. Конечно, пренебрежение интерференцией между классическим и теневым рассеянием точно соответствует приближению

$$4\sin^2\delta = |e^{2i\delta} - 1|^2 \sim 1 + 1.$$

Можно дать другие выводы предельных форм поперечных сечений (5.314) и (5.315). В частности, можно избежать явного использования собственных фаз путем прямого построения функции Грина из дифференциального уравнения, определяющего ее в приближении, справедливом при большой энергии. Если мы напишем

$$G_{+}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0) = \int \frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} g_{+}(\mathbf{x}, p), \tag{5.325}$$

то дифференциальное уравнение для функции Грина примет вид

$$[\gamma p + m - i\gamma \cdot \nabla + \gamma_0 e A_0(\mathbf{x})]\, g_{+}(\mathbf{x}, p) = 1. \tag{5.326}$$

Умножив его на $m - \gamma p$, получим

$$[p^2 + m^2 - 2i\mathbf{p}\cdot\nabla + 2p_0 e A_0 + \\ + (-i\gamma\cdot\nabla + \gamma_0 e A_0)(\gamma p + m)]\, g^{+}(\mathbf{x}, p) = m - \gamma p. \tag{5.327}$$

Для нулевого потенциала функция $g_{+}(\mathbf{x}, p)$ не зависит от $\mathbf{x}$: при $A_0 = 0$

$$g_{+}(\mathbf{x}, p) = \frac{m - \gamma p}{p^2 + m^2}, \tag{5.328}$$

и имеет сингулярность при $p^2 + m^2 = 0$, так как выражение (5.328) представляет собой уравнение для собственных значений в случае свободных частиц. Множитель $\gamma p + m$ устраняет эту сингулярность, поэтому ясно, что приближение, справедливое при высокой энергии, получается заменой уравнения (5.327) на упрощенное уравнение

$$[p^2 + m^2 - 2i\mathbf{p}\cdot\nabla + 2p_0 e A_0(\mathbf{x})]\, g_{+}(\mathbf{x}, p) = m - \gamma p. \tag{5.329}$$

Если направить вектор $\mathbf{p}$ по оси z, то решением этого дифференциального уравнения будет функция

$$g_{+}(\mathbf{x}, p) = \frac{(m - \gamma p)\, i}{2\,|p_0|\, v} \int_{-\infty}^{z} dz' \times \\ \times \exp\left[-\frac{i}{2\,|p_0|\, v} \int_{z'}^{z} dz''\, (p^2 + m^2 + 2p_0 e A_0)\right], \tag{5.330}$$

где $-\infty$ выбрана в качестве нижнего предела интегрирования на основании требования, чтобы функция G_{+} была регулярной в нижней полуплоскости m, а это, в свою очередь, требует, чтобы разность $z - z'$ нигде не была отрицательной для произвольного z. Для $A_0 = 0$ можно провести интегрирование, и мы снова получим выражение (5.328).

При $p^2+m^2\to 0$ основной вклад в выражение (5.330) происходит от больших отрицательных значений z', и

$$g_+(\mathbf{x}, p)\to\frac{m-\gamma p}{p^2+m^2}\exp\left[-i\varepsilon(p_0)\frac{1}{v}\int\limits_{-\infty}^{z}dz'eA_0\right]. \quad (5.331)$$

Эта величина имеет постоянное предельное значение при $z>R$:

$$\begin{aligned} g_+(\mathbf{x}, p)(\gamma p+m)&\to 1 \quad \text{при} \quad z<-R,\\ g_+(\mathbf{x}, p)(\gamma p+m)&\to e^{2i\delta(\rho)} \quad \text{при} \quad z>R. \end{aligned} \quad (5.332)$$

Обозначение, аналогичное записи (5.325), а именно

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)=\int\frac{(d\mathbf{p})}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}i(\mathbf{x}, p), \quad (5.333)$$

позволяет представить $I(p_0)\,G^0_+(p_0)=e\gamma AG_+(p_0)$ в виде

$$\begin{aligned} i(\mathbf{x}, p)&=-\gamma_0 eA_0(\mathbf{x})\,g_+(\mathbf{x}, p)(\gamma p+m)=\\ &=\gamma_0\frac{1}{2p_0}(p^2+m^2-2i\mathbf{p}\cdot\nabla)[g_+(\mathbf{x}, p)(\gamma p+m)-1]\to\\ &\to -i\gamma_0\varepsilon(p_0)\,v\frac{\partial}{\partial z}[g_+(\mathbf{x}, p)(\gamma p+m)-1]; \end{aligned} \quad (5.334)$$

последнее выражение соответствует пределу $p^2+m^2\to 0$. Используя свойства (5.219) относительно отражения, можно заменить выражение (5.194) на следующее:

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}')&=\int(d\mathbf{x})(d\mathbf{x}')\,\overline{u}_{\lambda\mathbf{p}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}I(\mathbf{x}, \mathbf{x}', p_0)\,u_{\lambda'\mathbf{p}'}e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'}=\\ &=\int(d\mathbf{x})\,e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}\,\overline{u}_{\lambda\mathbf{p}}i(\mathbf{x}, p')\,u_{\lambda'\mathbf{p}'}\,. \end{aligned} \quad (5.335)$$

Замечая, что продольный множитель этого выражения $e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}$ изменяется сравнительно мало на расстоянии порядка R, для достаточно малых углов рассеяния можно представить выражение (5.335) в виде

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}')&=\\ &=-i\delta_{\lambda\lambda'}\frac{p_0v}{m}\int(d\rho)\exp[-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\rho](e^{2i\delta(\rho)}-1)=\\ &=\delta_{\lambda\lambda'}4\pi\varepsilon(p_0)\frac{p}{m}\int\limits_0^\infty\rho\,d\rho J_0(p\theta\rho)\,e^{i\delta(\rho)}\sin\delta(\rho). \end{aligned} \quad (5.336)$$

Здесь ρ — поперечная (к $\mathbf{p}'$) компонента вектора $\mathbf{x}$ и во второй форме выражения (5.336) учтена аксиальная симметрия функции $\delta(\rho)$. Следует заметить, что это приближение согласуется с общим свойством [см. равенство (5.110)]:

$$(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}') - (\lambda\mathbf{p}\,|\,\bar{I}(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}') =$$

$$= 2\pi i\varepsilon(p_0)\sum_{\lambda''}\int(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda''\mathbf{p}'')\frac{m}{E''}\frac{(d\mathbf{p}'')}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\,\delta(E''-E)(\lambda''\mathbf{p}''\,|\,\bar{I}(p_0)\,\lambda'\mathbf{p}')\approx i\frac{m}{p}\varepsilon(p_0)\times$$

$$\times\sum_{\lambda''}\int(\lambda\mathbf{p}\,|\,I(p_0)\,|\,\lambda''\mathbf{p}'')\frac{(d\mathbf{p}''_\rho)}{(2\pi)^2}(\lambda''\mathbf{p}''\,|\,\bar{I}(p_0)\,|\,\lambda'\mathbf{p}') \quad (5.337)$$

в его последнем варианте для рассеяния на малые углы. Легко проверить, используя первую форму выражения (5.336), что обе стороны выражения (5.337) дают

$$\delta_{\lambda\lambda'}4i\frac{p}{m}\varepsilon(p_0)\int(d\rho)\exp[-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\rho]\sin^2\delta(\rho). \quad (5.338)$$

Дифференциальные и полные поперечные сечения, вычисленные по формуле (5.336), согласно соотношениям (5.198)—(5.201), совпадают с вычисленными по формулам (5.314) и (5.315).

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Phys. Rev., 93, 615 (1954) (см. гл. IV).
2. Schwinger J., Phys. Rev., 92, 1283 (1953) (см. гл. III).
3. Jost R., Pais A., Phys. Rev., 82, 840 (1951).
4. Whittaker E. T., Watson G. N., Modern Analysis, Cambridge, 1927, p. 223. (Имеется перевод: Уиттекер Е. и Ватсон Г., Курс современного анализа, М. — Л., 1937.)
5. Wigner E., Gött. Nachr., 31, 546 (1932).
6. Parzen G., Phys. Rev., 80, 261 (1950).
7. Moliere G., Zs. Naturforsch., 2a, 133 (1947).
8. Glauber R. J., Phys. Rev., 91, 459 (1953).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЗАМЕЧАНИЕ О КВАНТОВОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ПРИНЦИПЕ[1]

Показано, что для систем, удовлетворяющих уравнениям движения первого порядка, перестановочные соотношения последовательно выводятся из квантового динамического принципа.

ВВЕДЕНИЕ

Автором [1] была предложена формулировка квантовой динамики, которая позволяет вывести все свойства квантовомеханической системы из одного динамического принципа. В статье Бертона и Тоушека [2] утверждалось, что данная схема не годится для систем, удовлетворяющих уравнениям движения первого порядка. Такое утверждение неправильно.

Чтобы выяснить источник этого недоразумения, коротко обсудим такие системы с конечным числом степеней свободы. Необходимо отметить, что использование уравнений движения первого порядка не является ограничением, а скорее — стандартизацией систем, подчиняющихся обычному принципу причинности: относительно некоторого состояния имеется максимальный набор сведений, если известны значения полной совокупности совместимых физических величин в определенный момент времени; это позволяет определять такие состояния в любой другой момент времени. Дифференциальные уравнения движения для систем такого типа должны быть уравнениями конечного порядка и поэтому при соответствующем добавлении переменных могут быть всегда представлены в виде уравнений первого порядка.

---

[1] J. Schwinger, A Note on the Quantum Dynamical Principle, Phil. Mag., 44, 1171 (1953). (См. также дискуссию [4, 5]. — *Прим. перев.*)

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП

Задачей квантовой динамики является построение функций преобразования, имеющих вид

$$(\zeta_1' t_1 \mid \zeta_2'' t_2) = (\Psi (\zeta_1' t_1)^{\dagger} \Psi (\zeta_2'' t_2)), \tag{П.1}$$

где ζ_1 и ζ_2 — полные совокупности коммутирующих эрмитовых операторов. Основной динамический принцип является дифференциальной характеристикой таких функций преобразования. Любое бесконечно малое изменение можно представить в виде

$$\delta (\zeta_1' t_1 \mid \zeta_2'' t_2) = \frac{i}{\hbar} (\zeta_1' t_1 \mid \delta W_{12} \mid \zeta_2'' t_2);$$

это выражение служит определением бесконечно малого оператора δW_{12}. Из свойств функций преобразования относительно композиции и свойства действительности этой функции вытекает, что

$$\delta W_{13} = \delta W_{12} + \delta W_{23},$$
$$\delta W_{12}^{\dagger} = \delta W_{12}.$$

Основной постулат динамического принципа состоит в том, что имеется класс изменений, для которых соответствующие операторы δW_{12} получаются надлежащими варьированиями одного единственного оператора — оператора действия W_{12}:

$$\delta W_{12} = \delta (W_{12}).$$

Согласно свойству аддитивности оператора действия, он должен иметь вид

$$W_{12} = \int_{t_2}^{t_1} dt L[t],$$

где $L[t]$ — эрмитова функция основных динамических переменных $x_a(t)$ в бесконечно малой окрестности момента времени t. Без потери общности можно считать, что переменные x_a эрмитовы.

Для данной динамической системы, т. е. для данной формы оператора Лагранжа L, можно изменять динамические переменные x_a и моменты времени t_1 и t_2. Это должно соответствовать произволу в описании данной динамической системы, а именно возможности введения бесконечно малых изменений в состояния, входящие в функции преобразования (П. 1), — бесконечно малых изменений полных совокупностей операторов или моментов времени, к которым они относятся. Эти вариации локализованы в моменты времени t_1 и t_2 и описываются бесконечно малыми унитарными преобразованиями собственных векторов:

$$\delta\Psi(\zeta_2''t_2) = -\frac{i}{\hbar} G_2\Psi(\zeta_2''t_2),$$

$$\delta\Psi(\zeta_1't_1)^{\dagger} = \frac{i}{\hbar}\Psi(\zeta_1't_1)^{\dagger} G_1,$$

где G_1 и G_2 — бесконечно малые эрмитовы операторные функции динамических переменных, относящихся к моментам времени t_1 и t_2 соответственно. Итак, для данной системы

$$\delta W_{12} = G_1 - G_2; \qquad (\text{П. } 2)$$

это — квантовая форма принципа Гамильтона. Утверждается, что оператор действия W_{12} стационарен по отношению к вариациям динамических переменных в интервале между t_1 и t_2, так как G_1 и G_2 содержат лишь переменные, относящиеся к моментам времени t_1 и t_2. Из этого принципа действия следуют уравнения движения для динамических переменных и выражения для G_1 и G_2, производящих операторов бесконечно малых унитарных преобразований.

Заметим, что две функции Лагранжа, отличающиеся производной по времени, описывают одну и ту же систему. Так,

$$\overline{L} = L - \frac{d}{dt} W, \quad W = W(x, t)$$

дает

$$\overline{W}_{12} = W_{12} - (W_1 - W_2).$$

Следовательно, принцип действия для $\overline{W}_{12}$ удовлетворяется, если он удовлетворяется для W_{12}. Таким образом, операторы действия W_{12} и $\overline{W}_{12}$ приводят к одинаковым уравнениям движения; однако

$$\delta\overline{W}_{12} = \overline{G}_1 - \overline{G}_2,$$

где вариации

$$\delta W_1 = G_1 - \overline{G}_1, \quad \delta W_2 = G_2 - \overline{G}_2$$

определяют новые производящие операторы бесконечно малых преобразований при t_1 и t_2. Последние уравнения являются специальным случаем соотношения (П. 2), когда все операторы относятся к одному и тому же времени.

Чтобы функция Лагранжа давала явные уравнения первого порядка, она должна иметь следующий вид:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{a,b}\left(x_a A_{ab}\frac{dx_b}{dt} - \frac{dx_a}{dt}A_{ab}x_b\right) - H(x_a, t) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(xA\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}Ax\right) - H(x, t),$$

где член с производной по времени симметризован по отношению к операции интегрирования по частям; эта симметризация связана с возможностью добавления к функции Лагранжа производной по времени. Если L — эрмитов оператор, то тем же свойством должен обладать оператор Гамильтона H, а численные матрицы A должны быть антиэрмитовыми.

Оператор действия равен

$$W_{12} = \int_{t_2}^{t_1}\left[\frac{1}{2}(xA\,dx - dx\,Ax) - H\,dt\right],$$

причем в этой форме объектами вариации являются пределы интегрирования. Можно ввести такую вспомогательную переменную τ, что вариации δt_1 и δt_2 будут представляться изменениями функциональной зависимости t от τ. Это позволяет нам варьировать x_a и t при фиксированных пределах τ_1 и τ_2. Нет необходимости выписывать явно вспомогательную переменную τ, так как она не подвергается вариации. Следовательно,

$$\delta W_{12} = \int [\delta xA\,dx - dxA\,\delta x - \delta H\,dt + dH\,\delta t] +$$
$$+ \int d\left[\frac{1}{2}(xA\,\delta x - \delta xAx) - H\,\delta t\right].$$

Принцип действия утверждает теперь, что

$$\delta xA\,dx - dxA\,\delta x = \delta H\,dt - dH\,\delta t,$$

или

$$\delta H = \frac{dH}{dt}\delta t + \delta xA\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}A\,\delta x, \qquad \text{(П. 3)}$$

откуда вытекает, что в моменты времени t_1 и t_2

$$G=\frac{1}{2}(xA\,\delta x-\delta x\,Ax)-H\,\delta t.$$

Оператор Гамильтона является произвольной функцией от переменных x_a. Если вариация оператора Гамильтона должна иметь вид (П. 3), причем вариации δx_a появляются только слева и справа, то они должны обладать элементарными операторными свойствами, характеризующими класс вариаций, к которому относится динамический принцип. Это позволило бы нам сместить δx_a в выражении для δH полностью налево или направо:

$$\delta H-\frac{\partial H}{\partial t}\delta t=\delta x\frac{\partial_l H}{\partial x}=\frac{\partial_r H}{\partial x}\delta x;$$

это определяет левую (l) и правую (r) производные от H. Ввиду полной симметрии между левой и правой частями в процессе умножения мы заключаем, что члены с δx слева и справа в выражении (П. 3) в действительности равны. Таким образом, получаем

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{(П. 4)}$$

и

$$2A\frac{dx}{dt}=\frac{\partial_l H}{\partial x},$$

$$-\frac{dx}{\partial t}2A=-2A^T\frac{dx}{dt}=\frac{\partial_r H}{\partial x};$$

последние уравнения должны быть эквивалентными формами уравнений движения. Аналогично,

$$G=-\delta x\,Ax-H\,\delta t$$

и

$$G=xA\,\delta x-H\,\delta t=(A^Tx)\,\delta x-H\,\delta t$$

должны быть эквивалентными формами бесконечно малого производящего оператора G.

Если матрица A полностью разбивается на две субматрицы с соответствующим разделением динамических переменных на две совокупности, то мы говорим о двух совокупностях переменных как о кинематически независимых, потому что как члены с производными в функции Лагранжа, так и бесконечно малый производящий оператор G, за исключением члена $-H\,\delta t$, аддитивно строятся из этих двух совокупностей. (Если гамильтониан разбивается таким же образом, то две совокупности переменных динамически независимы.) При этом матрицу A можно всегда записать как сумму антисимметричной действительной матрицы a и симметричной мнимой матрицы s. Матрица A и транспонированная от A матрица входят в эквивалентные формы уравнений движения и оператора G, так что можно предвидеть возможность построения последовательной теории лишь в том случае, если представление для A в виде

$$A = a + s$$

является полным разбиением. Тогда можно сказать, что имеются две кинематически независимые совокупности динамических переменных: переменные первого рода x_i, связанные с a, и переменные второго рода ξ_α, связанные с s. Теперь функция Лагранжа принимает вид

$$L = \frac{1}{2}\left\{x,\ a\frac{dx}{dt}\right\} + \frac{1}{2}\left[\xi,\ s\frac{d\xi}{dt}\right] - H(x,\ \xi,\ t).$$

Уравнения движения представляются в виде двух совокупностей:

$$2a\frac{dx}{dt} = \frac{\partial_l H}{\partial x} = \frac{\partial_r H}{\partial x} \qquad (\text{П. }5)$$

и

$$2s\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial_l H}{\partial \xi} = -\frac{\partial_r H}{\partial \xi}, \qquad (\text{П. }6)$$

тогда как бесконечно малый производящий оператор имеет вид

$$G = -\delta x(ax) - \delta\xi(s\xi) - H\,\delta t = -(ax)\,\delta x + (s\xi)\,\delta\xi - H\,\delta t.$$

Что касается переменных первого рода, то из равенства левой и правой производных от H мы видим, что вариации δx_i должны коммутировать со всеми операторами. Это согласуется с эквивалентными выражениями для G. Поэтому

$$[\delta x_i,\ x_j] = [\delta x_i,\ \xi_\alpha] = 0,$$

откуда следует, что вариации δx_i являются бесконечно малыми величинами, кратными единичному оператору. Сравнивая два выражения для G, заключаем, что вариации $\delta\xi_\alpha$ антикоммутируют с переменными второго рода:

$$\{\delta\xi_\alpha, \xi_\beta\} = 0.$$

Противоположные признаки левой и правой производных от H по переменным второго рода указывают на то, что H должно быть четной функцией от ξ_α, но произвольной функцией от x_i, если только

$$[\delta\xi_\alpha, x_i] = 0.$$

Этими операторными свойствами выражений δx_i и $\delta\xi_\alpha$ точно характеризуется класс вариаций, к которому относится основной динамический принцип.

Для простоты предположим, что уравнения движения можно явно решить относительно производных dx_i/dt и $d\xi_\alpha/dt$; для этого требуется, чтобы матрицы a и s не были сингулярными. Антисимметричная матрица a будет обладать этим свойством только в том случае, если число переменных первого рода будет четным $(2n_1)$. Позже мы представим доводы, указывающие, что число переменных второго рода также должно быть четным $(2n_2)$. Разделение $2n$ переменных каждого типа на две совокупности по n переменных приводит к каноническому виду формализма.

ПЕРЕМЕННЫЕ ПЕРВОГО РОДА

Воспользуемся тем обстоятельством, что при помощи действительных линейных преобразований переменных антисимметричную действительную матрицу $2a$ можно привести к диагональному виду, в котором n_1 диагональных элементов являются двухмерными матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если динамические переменные, связанные с k-й двухмерной матрицей, обозначить через q_k и p_k, то соответствующий член с производной по времени в функции Лагранжа примет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\left(\frac{1}{2}\left\{p_k, \frac{dq_k}{dt}\right\} - \frac{1}{2}\left\{\frac{dp_k}{dt}, q_k\right\}\right),$$

а уравнения движения выразятся в форме

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad -\frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_k}, \tag{П. 7}$$

в то время как член в функции G, происходящий от вариаций переменных первого рода, будет равен

$$G_{q,p}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n_1}(p_k\,\delta q_k-\delta p_k q_k). \tag{П. 8}$$

Менее симметричные, но более удобные выражения получаются при добавлении к функции Лагранжа подходящей производной по времени с соответствующим изменением производящего оператора G. Так, при

$$W=-\frac{1}{2}\sum_k \frac{1}{2}\{p_k,\ q_k\}$$

член с производными в выражении для L принимает вид

$$\sum_k \frac{1}{2}\left\{p_k,\ \frac{dq_k}{dt}\right\},$$

а к бесконечно малому производящему оператору добавляется

$$G_q=\sum_k p_k\,\delta q_k.$$

Если изменить знак W, то эти выражения становятся равными

$$-\sum_k \frac{1}{2}\left\{\frac{dp_k}{dt},\ q_k\right\}$$

и

$$G_p=-\sum_k \delta p_k q_k=-\sum_k q_k\,\delta p_k.$$

Преимуществом этих выражений является однозначная интерпретация бесконечно малых операторов G_q и G_p. Очевидно, оператор G_q описывает такое бесконечно малое унитарное преобразование, при котором операторы q_k изменяются на δq_k $(\bar{q}_k=q_k-\delta q_k)$, а операторы p_k не изменяются; аналогично интерпретируется G_p. В соответствии с этим для произвольной функции F канонических переменных q_k и p_k имеем

$$\frac{1}{i\hbar}[F,\ G_q] = \sum_k \frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k$$

и

$$\frac{1}{i\hbar}[F,\ G_p] = \sum_k \frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k,$$

или, если вспомнить, что δq_k и δp_k коммутируют со всеми операторами,

$$\frac{1}{i\hbar}[F,\ p_k] = \frac{\partial F}{\partial q_k},$$
$$\frac{1}{i\hbar}[q_k,\ F] = \frac{\partial F}{\partial p_k},$$

откуда получаем перестановочные соотношения для канонических переменных:

$$[q_k,\ q_l] = [p_k,\ p_l] = 0,$$
$$[q_k,\ p_l] = i\hbar\delta_{kl}.$$

Очевидная интерпретация оператора

$$G_t = -H\delta t$$

как производящего оператора бесконечно малого унитарного преобразования от переменных в момент времени t к переменным в момент времени $t+\delta t$ дает важное подтверждение совместности сведений об уравнениях движения и о производящих операторах бесконечно малых унитарных преобразований. Мы имеем

$$\frac{1}{i\hbar}[F,\ G_t] = -\left(\frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}\right)\delta t,$$

или

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[F,\ H].$$

Подставляя последовательно $F = H$, q_k, p_k и пользуясь свойствами бесконечно малых преобразований, выводим уравнение (П. 4) и канонические уравнения движения (П. 7).

Заметим теперь, что производящий оператор (П. 7) имеет вид

$$G_{q,p} = \frac{1}{2} G_q + \frac{1}{2} G_p;$$

очевидно, он описывает преобразование, в котором q_k и p_k изменяются на $\frac{1}{2}\delta q_k$ и $\frac{1}{2}\delta p_k$ соответственно. Так как это утверждение одинаково относится к обеим совокупностям канонических переменных, то та же интерпретация применима к производящему оператору

$$G_x = -\delta x\, ax,$$

в котором не используется специальный вид матрицы a; этот оператор, очевидно, описывает изменение x на величину $\frac{1}{2}\delta x$. Соответствующее утверждение относительно перестановочных соотношений записывается в виде

$$\frac{1}{i\hbar}[2ax,\ F] = \frac{\partial F}{\partial x},$$

что дает уравнения движения в форме (П. 5), а перестановочные свойства переменных первого рода представляются одним уравнением:

$$[x_k,\ x_l] = i\hbar\,\frac{1}{2}(a^{-1})_{kl}. \qquad (\text{П. } 9)$$

В работе [2] имеется недосмотр, заключающийся в том, что $2n_1$ переменных x рассматриваются как канонические координаты, а линейные комбинации тех же самых величин, — ax, — как канонические импульсы. Это сказывается на соотношении (П. 9) — в нем отсутствует множитель $^1/_2$.

ПЕРЕМЕННЫЕ ВТОРОГО РОДА

Полезно предвидеть, что действительная симметричная матрица $(1/i\hbar)s$ должна быть положительно-определенной. Следовательно, существует такое действительное линейное преобразование переменных, которое сводит эту матрицу к единичной матрице. Производящий оператор изменений в переменных второго рода имеет тогда вид

$$G_\xi = i\hbar \sum_\alpha \xi_\alpha\, \delta\xi_\alpha, \qquad (\text{П. } 10)$$

показывающий, что различные переменные второго рода ξ_α кинематически независимы. Это утверждение можно представить в операторном виде

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta \delta\xi_\beta] = 0, \qquad \alpha \neq \beta,$$

откуда вытекает, что

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = 0, \qquad \alpha \neq \beta$$

в силу антикоммутативности вариаций $\delta\xi_\beta$ с величинами ξ_α.

Если бы теперь число переменных второго рода было нечетным, то произведение всех этих операторов коммутировало бы с каждым ξ_α и было бы кратным единичному оператору, что противоречило бы независимости различных ξ_α. Другой вариант этого аргумента исходит из требования: совокупность операторов ξ_α должна быть алгебраически полной в том смысле, чтобы из них можно было построить оператор, обладающий свойствами $\delta\xi_\alpha$. Для четного числа переменных произведение всех ξ_α антикоммутирует с каждым ξ_α, но такого оператора нет для нечетного числа переменных. Отсюда заключаем, что число динамических переменных второго рода должно быть четным.

Чтобы ввести каноническую формулировку для переменных второго рода, заметим, что в силу свойств антикоммутативности вариаций $\delta\xi_\alpha$ пару членов в выражении (П. 10) можно скомбинировать следующим образом:

$$i\hbar(\xi_1 \delta\xi_1 + \xi_2 \delta\xi_2) =$$
$$= i\hbar \frac{1}{2} [(\xi_1 - i\xi_2) \delta(\xi_1 + i\xi_2) - \delta(\xi_1 - i\xi_2)(\xi_1 + i\xi_2)] =$$
$$= \frac{1}{2} [p\,\delta q - \delta p q].$$

Здесь p и q — не-эрмитовы операторы; они связаны соотношением

$$p = i\hbar q^{+},$$

если выбрать q в виде $\xi_1 + i\xi_2$. Группируя, таким образом, по парам все $2n_2$ членов в выражении (П. 10), мы получаем каноническую форму члена в выражении для G, связанного с переменными второго рода:

$$G_{q,p} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n_2} (p_\alpha \delta q_\alpha - \delta p_\alpha q_\alpha). \qquad \text{(П. 11)}$$

Член с производными в функции Лагранжа и уравнения движения, выраженные в канонических переменных, имеют вид

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{2}\left[p_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{dp_\alpha}{dt}, q_\alpha\right]\right)$$

и

$$\frac{dq_\alpha}{dt}=\frac{\partial_l H}{\partial p_\alpha}, \quad -\frac{dp_\alpha}{dt}=\frac{\partial_r H}{\partial q_\alpha}.$$

Добавляя к функции Лагранжа соответствующие производные по времени, получаем измененные формы слагаемого в функции Лагранжа, содержащего производные, и связанного с ним производящего оператора, а именно:

$$\sum_{\alpha}\frac{1}{2}\left[p_\alpha, \frac{dq_\alpha}{dt}\right],$$

$$G_q=\sum_{\alpha} p_\alpha\,\delta q_\alpha$$

и

$$-\sum_{\alpha}\frac{1}{2}\left[\frac{dp_\alpha}{dt}, q_\alpha\right],$$

$$G_p=-\sum_{\alpha}\delta p_\alpha q_\alpha=\sum_{\alpha} q_\alpha\,\delta p_\alpha.$$

Согласно очевидной интерпретации бесконечно малых производящих операторов G_q и G_p, имеем

$$\frac{1}{i\hbar}[F, G_q]=\sum_{\alpha}\frac{\partial_r F}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

и

$$\frac{1}{i\hbar}[F, G_p]=\sum_{\alpha}\delta p_\alpha\frac{\partial_l F}{\partial p_\alpha}.$$

Если F содержит нечетное число переменных второго рода, то из этих соотношений вытекает, что

$$\frac{1}{i\hbar}\{F, p_\alpha\}=\frac{\partial_r F}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial_l F}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{1}{i\hbar}\{q_\alpha, F\}=\frac{\partial_l F}{\partial p_\alpha}=\frac{\partial_r F}{\partial p_\alpha},$$

тогда как для операторов, построенных из четного числа переменных второго рода, следует

$$\frac{1}{i\hbar}[F,\ p_\alpha] = \frac{\partial_r F}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial_l F}{\partial q_\alpha},$$
$$\frac{1}{i\hbar}[q_\alpha,\ F] = \frac{\partial_l F}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial_r F}{\partial p_\alpha}.$$

Из первой системы получаем свойства коммутации канонических переменных второго рода:

$$\{q_\alpha,\ q_\beta\} = \{p_\alpha,\ p_\beta\} = 0,$$
$$\{q_\alpha,\ p_\beta\} = i\hbar\delta_{\alpha\beta}.$$

В качестве примера применения второй системы соотношений покажем, что переменные первого рода коммутируют с переменными второго рода, и проверим, что уравнения движения для переменных второго рода следуют из свойств бесконечно малых преобразований. Таким образом, установим согласованность теории для обоих типов динамических переменных.

Так как производящий оператор (П. 11) описывает преобразование, в котором q_α и p_α изменяются на $\frac{1}{2}\delta q_\alpha$ и $\frac{1}{2}\delta p_\alpha$ соответственно, то та же интерпретация применима к производящему оператору

$$G_\xi = -\delta\xi s\xi,$$

который не использует особой формы матрицы s; этот оператор описывает изменение переменной ξ на величину $\frac{1}{2}\delta\xi$. Отсюда для операторов F, которые являются соответственно четными или нечетными функциями переменных ξ, имеем

$$\frac{1}{i\hbar}[2s\xi,\ F] = \frac{\partial_l F}{\partial\xi} = -\frac{\partial_r F}{\partial\xi}$$

и

$$\frac{1}{i\hbar}\{2s\xi,\ F\} = \frac{\partial_l F}{\partial\xi} = \frac{\partial_r F}{\partial\xi}.$$

Первое соотношение, примененное к гамильтониану, дает уравнения движения в форме (П. 6), тогда как перестановочные свойства эрмитовых переменных второго рода ξ_α выводятся из второго уравнения:

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = i\hbar \frac{1}{2} (s^{-1})_{\alpha\beta}. \qquad (П. 12)$$

Кстати, структура левой части в этом выражении дает основания для утверждения, что матрица $(1/i\hbar)s$ должна быть положительно-определенной. При обсуждении систем такого типа в работе [2] $2n_2$ переменных ξ рассматривались как канонические координаты, а линейные комбинации этих переменных, $s\xi$, — как канонические импульсы, что дает антикоммутатор, отличающийся от антикоммутатора, определяемого выражением (П. 12), отсутствием множителя $^1/_2$.

Не будем продолжать здесь этой дискуссии, так как нашей целью было показать, что динамический принцип приводит к совместимым перестановочным свойствам для систем, удовлетворяющих уравнениям движения первого порядка. Читатель отсылается ко второй статье серии автора „Теория квантованных полей" [3] (см. гл. I), где рассматриваются поля, удовлетворяющие уравнениям первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 914 (1951). (Имеется перевод в сборнике „Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954, стр. 254.)
2. Burton W. K., Touschek B. F., Phil. Mag., **44**, 161 (1953).
3. Schwinger J., Phys. Rev., **91**, 713 (1953). (См. гл. I.)
4*. Burton W. K., Touschek B. F., Phil. Mag., **44**, 1180 (1953).
5*. Schwinger J., Phil. Mag., **44**, 1181 (1953).