MATHEMATICAL PROBLEMS OF RELATIVISTIC PHYSICS

BY

Irving E. Segal

Professor of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology

With an Appendix on

GROUP REPRESENTATIONS IN HILBERT SPACE

BY

George W. Mackey

Professor of Mathematics, Harvard University

1963

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
PROVIDENCE, RHODE ISLAND

И. СИГАЛ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ФИЗИКИ

Перевод с английского
В. С. БУСЛАЕВА

Под редакцией
Л. Д. ФАДДЕЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1968

УДК 517.5/.9

Книга американского математика Ирвинга Сигала написана на основе курса лекций по математическим проблемам релятивистской квантовой механики, который он читал в математической школе при Колорадском университете. Она отражает главным образом собственные идеи и исследования автора. Читатель найдет здесь мало результатов, относящихся к конкретным физическим задачам; цель автора — подробное обсуждение общих математических оснований теории квантованных полей. Книга адресована в первую очередь математикам, интересующимся математической структурой современной физики, и ее чтение требует определенного математического багажа. Для физика-теоретика эти лекции явятся ценным дополнением к существующей литературе.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2—2—3

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В современной квантовой релятивистской физике сложилась своеобразная ситуация. Понятие квантованного поля, исторически лежащее в основе этой теории, многими физиками считается теперь дискредитированным. В то же время никто не предложил концепцию; способную соперничать с ним по красоте. Естественно, что понятие квантованного поля продолжает иметь своих приверженцев, которые считают, что многие трудности релятивистской квантовой механики происходят скорее из-за несовершенства используемого аппарата, чем из-за неправильных исходных положений. В связи с этим особенно важны критический пересмотр и математическое уточнение сложившихся в квантовой теории поля понятий, с тем чтобы установить, что́ является привычной догмой, которую следует отбросить, и что́ способно к существованию.

Лекции профессора Сигала, перевод которых мы предоставляем читателю, как раз и посвящены этой теме. Автор, известный американский математик, специалист в области функционального анализа и теории представлений групп, давно занимается общими вопросами квантовой механики. Он основатель нового направления в релятивистской квантовой механике. В лекциях излагаются его собственные взгляды и результаты.

Книга Сигала не является монографией по современной квантовой теории поля. Читатель не найдет здесь изложения характерного для этой теории громоздкого аппарата и его приложений. Все внимание автора сосредоточено на выяснении математического смысла оснований теории. Наиболее подробно затронуты проблемы квантования систем с бесконечным числом степеней свободы и релятивистской инвариантности такого квантования.

Книга написана математиком, и для понимания ее надо обладать определенным математическим багажом и доброй волей воспринимать оригинальный образ мышления автора. Она будет, бесспорно, полезна математикам, желающим познакомиться с основными структурами современной теоретической физики. Для физика-теоретика, верящего в будущую квантовую теорию поля, она явится ценным дополнением к существующей литературе.

Книгу, целиком посвященную изложению собственных взглядов ее автора, бессмысленно снабжать комментариями. Мы позволили себе лишь исправить несколько опечаток и дополнить список литературы ссылками на монографии по математическим вопросам, использованным в лекциях, родственные по содержанию книги и статьи автора, опубликованные после 1963 г.

Л. Д. Фаддеев

ОТ АМЕРИКАНСКОГО РЕДАКЦИОННОГО КОМИТЕТА

Эта книга является вторым[1]) из четырех томов трудов летнего семинара по прикладной математике, который был организован Американским математическим обществом и проходил в Колорадском университете с 24 июля по 19 августа 1960 г. Организация этого семинара была поддержана Национальным научным фондом, Научно-исследовательским управлением Военно-морских сил, Комиссией по атомной энергии и Управлением научных исследований по боевой технике.

В течение многих лет все более возрастал барьер между математикой и современной физикой. Обособленность этих двух наук наносила ущерб и той, и другой: физические теории оказались в значительной степени изолированными от новейших достижений математики, а математикам в свою очередь недоставало контакта с одним из наиболее стимулирующих интеллектуальных движений нашего времени. Однако в последние годы и математики и физики проявили явную готовность к взаимному обмену мнениями. Настоящий семинар как раз и был организован для того, чтобы способствовать расширению столь необходимых и уже начавших развиваться контактов.

---

[1]) Два тома этих трудов уже переведены на русский язык: т. I. Уленбек Дж., Форд Дж., Лекции по статистической механике, «Мир», М., 1965; т. IV. Йост Р., Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967. — *Прим. перев.*

Цель семинара была прежде всего информационной. Основное внимание было уделено курсам по классической квантовой теории, теории квантованных полей и элементарных частиц и статистической физике. Чтобы общая картина получилась достаточно точной, эти курсы были дополнены специально запланированными лекциями. Публикация настоящих трудов была предпринята для того, чтобы информация, полученная участниками семинара, стала доступной значительно более широкому кругу научных работников. В то же время эти тома могут служить справочником для участников семинара.

В организационный комитет семинара входили: Курт Фридрихс (председатель), Марк Кац, Менахем Шиффер, Джордж Уленбек, Юджин Вигнер.

Семинар был открыт вступительной речью профессора Марка Каца (Корнельский университет, математический факультет) «Как математик смотрит на физику; что разобщает нас и что может объединить».

Расписание заседаний было составлено так, чтобы сохранить свободным послеполуденное время и дать участникам возможность проводить неофициальные семинары и дискуссии как между собой, так и с докладчиками по основной программе.

Редакционный комитет:
В. Баргман
Дж. Уленбек
М. Кац (председатель)

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Эта книга содержит почти без изменения конспект курса из восьми лекций, в котором я старался сочетать строго математическую точку зрения с физическими основаниями теории. Курс дополнен двумя лекциями, имеющими более математический характер. Главная цель курса состоит в том, чтобы ввести математически подготовленного читателя в круг современных математических проблем фундаментальной релятивистской физики. Хотя я стремился к строгости и к обрисовке перспективы в большей мере, чем к завершенности деталей, сама эта цель, по-видимому, лучше достигается подробным рассмотрением лишь небольшого числа вопросов без сколько-нибудь значительной трактовки многих других важнейших тем; включение их в наше обсуждение не изменило бы существенно ту область, которую мы попытались очертить. В частности, теория представлена главным образом в терминах квантованных полей Бозе — Эйнштейна, а поля Ферми — Дирака вводятся лишь кратко и в описательном плане.

Сравнительно неформальный лекционный стиль кажется лучше всего приспособленным для столь нелегкой задачи, как математически строгая, сжатая и вместе с тем доступная формулировка такого сложного предмета, как теория квантованных полей и частиц. Ввиду этого в настоящем тексте не было сделано никаких попыток изменить стиль изложения.

Хотя теперь уже отчетливо видна математическая красота и жизнеспособность многих разделов современной релятивистской физики, большинство вопросов, которые доминируют в этой научной области, остаются нерешенными. Мы убеждены, что теория квантованных полей находится по меньшей мере на грани приобретения прочного математического основания и будет рассматриваться в ближайшие годы параллельно с аналитической теорией функционалов на бесконечномерных нелинейных многообразиях, допускающих инвариантную относительно некоторой группы дифференциально-геометрическую структуру. Во всяком случае, мы надеемся дать некоторое представление о последних успехах, связанных с этими проблемами, и передать ощущение замечательной интуитивной научной структуры, которую еще предстоит полностью понять в математическом отношении.

Автор приносит особую благодарность Леонарду Гроссу и Дэвиду Шейлу за полезные научные комментарии, причем первому из названных лиц также за помощь на первом этапе работы над книгой.

Введение

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ

Чтобы сделать более ясными наши намерения и те цели, которые преследуются в этой книге, мы начнем с очень краткого обзора наиболее популярных в настоящее время подходов к квантованным полям и частицам. Хотя *конечные* цели большинства теоретиков довольно близки и состоят прежде всего в том, чтобы усовершенствовать наше понимание основных физических явлений, объекты, в терминах которых они непосредственно работают, весьма различны. Поэтому современная фундаментальная теоретическая физика имеет сравнительно фрагментарный характер.

Согласно традиционному взгляду, теоретическую физику рассматривают в конечном счете как игру, в которой из простых теоретических принципов стремятся вывести непонятные числа, получаемые в лабораторных экспериментах над частицами. Эта точка зрения была сформулирована Дираком. В конце двадцатых годов Дирак, Гейзенберг, Шредингер и многие другие добились величайшего успеха в такой игре, заложив основы современной квантовой теории. Но в последние тридцать лет эта игра оказалась настолько трудной, что люди почувствовали желание тем или иным способом изменить ее правила.

Наиболее замечательное применение фундаментальных теоретических принципов за последние тридцать лет представляет собою теория перенормировок, позволившая с огромной точностью вычислить радиационные поправки для электрона. Эта теория приняла законченную форму главным образом в работах Фейнмана, Швингера и Томонага. Она основывалась, однако, на некоторых отступлениях от правил, допуская применение ad hoc аргументов для преодоления серьезных трудностей на критической стадии вычислений, а именно для исключения так называемых расходимостей, к которым приводила математическая процедура. Это положение сохраняется и по сегодняшний день, несмотря на значительные прояснения и упрощения, внесенные Дайсоном, Уордом, Саламом, ван Ховом с сотрудниками и многими другими.

Эта ситуация породила «аксиоматические» школы, которые, основываясь на явной формулировке исходных положений, превзошли традиционный подход в логической ясности. Они сконцентрировали свои усилия на общем осмысливании теории квантованных полей и сделали эффективные попытки вычислить экспериментальные данные из общих принципов. Наиболее активные из этих «школ», и прежде всего школы Челлена — Вайтмана и Лемана — Симанзика — Циммермана (и в ту и в другую значительный вклад был внесен Хаагом и Йостом), очень математичны по своему духу, но тем не менее не всегда делают различие между математически строгими и эвристическими определениями и результатами. С общей точки зрения основная проблема здесь заключается в отсутствии нетривиальных примеров систем, удовлетворяющих аксиомам и включающих реальное испускание и поглощение частиц.

В некотором роде на противоположном конце теоретического спектра находятся школы, заиятые расчетом конкретных экспериментальных эффектов с помощью различных приближений и эвристической техники. Эти вычисления имеют разную степень физической мотивированности и, к несчастью, довольно неопределенную обоснованность. Но, во всяком случае, идеи Чу, Голдбергера и Лоу оказались очень полезными при систематизации обширного и быстро растущего экспериментального материала в ядерной физике. Продолжительное время широко использовались так называемые «дисперсионные соотношения», и некоторые из них получили экспериментальное подтверждение. Однако ясной формулировки и строгого вывода этих соотношений до сих пор нет, и представляется также довольно трудным получить их решающее экспериментальное подтверждение, так как проверка всякого конкретного числового равенства в этой теории требует измерений при всех, в том числе сколь угодно больших, энергиях.

Между тремя этими направлениями существуют определенные связи. Особенно активно они развиваются между аксиоматической и эмпирической школами на основе теории дисперсионных соотношений. Но в целом в предвидимом будущем мало перспектив для объединения этих направлений. В то же время у нас мало разумных оснований для пессимизма или оптимизма в отношении того, удастся ли удовлетворительно в физическом и математическом плане ответить на вопрос, что же такое теория квантованных полей.

Математик, который заинтересуется релятивистской физикой, сразу же увидит, что имеется возможность другого подхода, построенного на почве строгой математики и по возможности близкого к эмпирическим идеям. Лет десять назад такой подход мог бы показаться очень наивным, но теперь ясно, что строгий математический метод вовсе не обременителен и позволяет просто и определенно, хотя и более изощренно, иметь дело с некоторыми действительно важными теоретическими вопросами. Этот математик увидит также, что тесная связь между тем, что математически жизнеспособно и физически осмысленно, является довольно общей чертой рассматриваемой ситуации и не сводится к таким только случаям, как, скажем, трактованный Бором и Розенфельдом в их классической работе вопрос об измеримости электромагнитного поля.

Наша цель в этой книге состоит в изложении тех разделов теории полей и частиц, для которых это можно сделать теперь в строгой, компактной и общей форме. Решение старых задач породило новые проблемы, и некоторые из них будут здесь также описаны. Однако придется, по крайней мере временно, заплатить за некоторые успехи усложнением словаря, дающего переход от экспериментальной физики к математике. Мы не должны слишком быстро ожидать прямого физического контакта. Это объясняется исключительной сложностью, неизбежно присущей всякой исчерпывающей теории, которая рассчитывает оказаться применимой к взаимодействию элементарных частиц. Но стремление представить современные физические идеи и принципы в строгой и простой математической форме оправдано и интересно само по себе. Мы думаем, наконец, что имеется определенное развитие на этом пути, порождающее надежды на возможность эффективного исследования физически интересных релятивистских взаимодействий.

С чисто математической точки зрения основными математическими разделами, имеющими отношение к общей теории полей и частиц, являются следующие:

1. Теория операторов (особенно теория операторных алгебр).

2. Теория представлений групп (особенно групп Лоренца и других физических групп симметрии).

3. Теория функционалов.

4. Теория уравнений в частных производных.

Большинство этих разделов используется здесь, и было бы полезно знакомство с каждым из них примерно в объеме годового курса. Конечно, мы коснемся здесь лишь немногих специальных вопросов. Мы кратко скажем о теории операторов и еще меньше о теории представлений групп, которая будет обсуждаться подробнее в главах, написанных профессором Макки. Мы обсудим также анализ на функциональных пространствах, имея в виду его важность для нас и относительную новизну, и отметим его связи с тем направлением, которое было порождено работой Винера о броуновском движении. Теории уравнений в частных производных мы коснемся совсем кратко прежде всего потому, что те аспекты этой теории, которые представляют для нас интерес (глобальная спектральная теория нелинейных гиперболических уравнений), развиты еще недостаточно.

Глава I

КВАНТОВАЯ ФЕНОМЕНОЛОГИЯ

Мы начнем с понятия физической системы, придерживаясь возможно ближе концепций, имеющих непосредственное эмпирическое или интуитивное физическое значение. В качестве основного объекта, связанного с физической системой, можно взять или *наблюдаемую*, или *состояние*. Первая концепция кажется более простой с наивной точки зрения и приводит к содержательной теории, в терминах которой можно эффективно трактовать и состояния. Поэтому мы начнем с наблюдаемой как основного неопределяемого понятия.

Мы должны отметить мимоходом первоначальную формулировку квантовой феноменологии. Она утверждает, что 1) наблюдаемая представляет собой самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве; 2) состояние является вектором ψ этого пространства; (1) и (2) объединяются тем, что математическое ожидание наблюдаемой A в состоянии ψ равно $(A\psi, \psi)$. Эти «аксиомы» просты в техническом отношении, но интуитивно совершенно неясны и представляются возникшими ad hoc. Кроме того, недавно обнаружилось, что они технически эффективны только для систем с конечным числом степеней свободы. В действительности некоторые из ультрафиолетовых расходимостей теории квантованных полей возникли косвенно из неадекватности прежней феноменологии. Поэтому имеется достаточно причин, и принципиальных и технических, для того, чтобы предпочитать формулировку, которая приводится ниже.

Пока нашей целью будут основания теории, и с физической, и с математической точек зрения ясно, что основную роль играют ограниченные наблюдаемые, а неограниченные сводятся к ним. Например, в случае одномерной квантовомеханической частицы никаким конечным физическим прибором невозможно достаточно точно измерить импульс p, если его значения лежат за определенными пределами. Но мы можем взять больший и более точный прибор и тем самым для каждого конечного n измерить $F_n(p)$, где $F_n(x)=x$ при $|x|\leqslant n$ и $F_n(x)$ равно, скажем, $n \operatorname{sign} x$ при $|x|>n$. Таким образом, можно измерить бесконечную последовательность наблюдаемых $F_1(p)$, $F_2(p)$, ..., каждая из которых ограничена. Само p не измеримо непосредственно и может быть получено только как предел такой последовательности, которая включает нефизическое бесконечное число экспериментов. С другой стороны, в математическом отношении мы можем позволить себе заглянуть немного вперед с точки зрения первой аксиомы первоначальной квантовой феноменологии, согласно которой наблюдаемая является самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве. Общеизвестные трудности в выполнении простых алгебраических операций над некоммутирующими самосопряженными операторами и многочисленные возможности для трактовки неограниченных операторов в терминах ограниченных почти заставляют сводить все к ограниченным операторам.

Поэтому вначале мы будем рассматривать только ограниченные наблюдаемые. С интуитивной точки зрения ясно, что для ограниченной наблюдаемой A и вещественного числа α произведение αA является ограниченной наблюдаемой. Ее измерение сводится к измерению A и умножению результата на α. Подобным же образом A^2 является ограниченной наблюдаемой, для измерения которой нужно возвести результат измерения A в квадрат. Если B — другая наблюдаемая, то сумма $A+B$ и произведение AB могут быть определены таким же способом только тогда, когда A и B измеримы одновременно. Однако мы можем определить $A+B$ менее прямым путем как такую наблюдаемую, математическое ожидание которой во всяком состоянии является суммой ожиданий A и B.

Интуитивно кажется правдоподобным, что наблюдаемую можно восстановить по ее ожиданиям во всех состояниях; это можно рассматривать и как предположение о множестве всех состояний системы. С другой стороны, произведение AB нельзя определить таким путем, так как даже для одновременно измеримых A и B математическое ожидание произведения не обязательно равно пронзведению математических ожиданий (так же как и для случайных величин в теории вероятностей).

Таким образом, с физической точки зрения целесообразно постулировать, что ограниченные наблюдаемые физической системы образуют нечто вроде алгебры с операциями умножения на скаляры, возведения в квадрат и сложения наблюдаемых, но без операции умножения пары элементов. Однако ввиду того, что сложение определяется косвенным путем, полная обоснованность предположения о том, что две наблюдаемые можно складывать, будет иметь место только в такой теории, где во всяком состоянии математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий складываемых наблюдаемых и где наблюдаемая восстанавливается по своим математическим ожиданиям.

Кроме того, резонно предположить, что имеется единичная наблюдаемая I, ожидание которой во всяком состоянии равно единице, и что выполняются обычные правила приведения для одновременно измеримых наблюдаемых. Это последнее условие необходимо лишь в форме

$$A^r \circ A^s = A^{r+s}, \quad (\alpha A)^r = \alpha^r A^r,$$

где псевдопроизведение $A \circ B$ определено выражением

$$A \circ B = \frac{1}{4}\left[(A+B)^2 - (A-B)^2\right],$$

а A^r определяются рекуррентными соотношениями

$$A^0 = I, \quad A^r = A \circ A^{r-1}.$$

Так как $A \circ B$ совпадает с феноменологическим произведением, описанным выше, когда A и B одновременно измеримы, то последние требования имеют непосредственные интуитивные основания.

Таким образом, мы приходим к следующей математической аксиоме.

Феноменологический постулат, алгебраическая часть. *Физическая система представляет собой множество объектов, называемых (ограниченными) наблюдаемыми, для которых определены операции умножения на вещественное число, возведения в квадрат и сложения, удовлетворяющие обычным предположениям для линейного пространства и приведенным выше предположениям, включающим операцию возведения в квадрат.*

В качестве математического примера рассмотрим множество всех линейных ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Очевидно, что обычные алгебраические операции удовлетворяют предыдущему постулату. Может быть, полезно отметить, что обычное произведение операторов не определено в этой системе, так как произведение самосопряженных операторов будет самосопряженным только в том случае, когда сомножители коммутируют; в то же время псевдопроизведение $A \circ B = (AB+BA)/2$ в этом случае не имеет физического истолкования для некоммутирующих самосопряженных A и B.

В связи с феноменологическим постулатом нам необходим следующий основной результат.

Основной феноменологический принцип. *Всякая физическая система определяется во всех своих физически наблюдаемых аспектах алгеброй ограниченных наблюдаемых.*

Иначе говоря, две системы, ограниченные наблюдаемые которых могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие так, что при этом воспроизводятся суммы, квадраты и произведения с вещественными числами, физически идентичны (если отвлечься от наименования наблюдаемых).

Чтобы объяснить более точно, что такое «физически наблюдаемый аспект», введем ключевые понятия состояния, чистого состояния и спектрального (возможного точного) значения наблюдаемой. С эмпирической точки зрения состояние E имеет смысл только как правило, по которому каждой ограниченной наблюдаемой приписывается математическое ожидание в этом состоянии. Любые возможные метафизические различия между состоянием и функционалом на наблюдаемых с практической точки зрения несущественны. В соответствии с этим мы определим состояние как такой функционал. Следующие свойства состояния E имеют отчетливые интуитивные основания:

1. *Линейность*:

$$E(A+B)=E(A)+E(B),$$
$$E(\alpha A)=\alpha E(A)$$

для любых ограниченных наблюдаемых A, B и вещественной постоянной α.

2. *Положительность*: $E(A^2)\geqslant 0$.

3. *Нормированность*: $E(I)=1$.

Таким образом, при самых скромных физических предположениях состояние оказывается некоторым нормированным положительным линейным функционалом на наблюдаемых. Для основных феноменологических целей от состояния больше ничего не потребуется, и поэтому мы, следуя фон Нейману, *определим* состояние как такой функционал.

Если система находится с вероятностью α в состоянии E и с вероятностью α' в состоянии E', где $\alpha+\alpha'=1$ и $\alpha>0$, $\alpha'>0$, то действительное состояние системы есть E'', где

$$E''(A)=\alpha E(A)+\alpha' E'(A).$$

Состояние E'' называется *смесью* состояний E и E'. Следуя Вейлю, мы назовем состояние *чистым*, если его нельзя представить как смесь двух различных состояний. Очевидно, что именно чистые состояния играют основную роль в механике (не статистической).

Эксперимент с предельной теоретической точностью обнаруживает чистое состояние системы.

Чтобы прояснить эти понятия, рассмотрим кратко систему всех ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Если ψ — произвольный единичный вектор в $\mathscr{H}$, то нетрудно видеть, что функционал E, определяемый формулой

$$E(A)=(A\psi, \psi),$$

будет состоянием. Это состояние является чистым, что можно установить методом, который будет указан далее. Во многих традиционных трактовках квантовой механики состоянием называется вектор ψ, но это, конечно, отличается от принятого здесь определения состояния. В частности, ψ не имеет непосредственного физического смысла; умножение ψ на число, равное по модулю единице, не меняет состояния. Мы будем называть ψ *вектором состояния* или *волновой функцией* состояния E. Лишь в тривиальном случае конечномерного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ каждое чистое состояние имеет описанный выше вид. Для бесконечномерного пространства существуют и другие чистые состояния, которые могут возникнуть, например, из непрерывного спектра, обнаруживающего себя для операторов в бесконечномерном пространстве.

Пример смешанного состояния дается формулой

$$E(A)=\operatorname{tr}(AD),$$

в которой D — неотрицательный самосопряженный оператор с абсолютно сходящимся следом, равным единице. Оператор D в этом случае однозначно определяется состоянием и называется «оператором (матрицей) плотности фон Неймана». Такое состояние является чистым тогда и только тогда, когда ранг D равен единице; в этом случае состояние порождается волновой функцией только что описанным способом.

Чтобы подойти к понятию спектрального значения, определим дисперсию наблюдаемой A в состоянии E как величину $E(A^2)-E(A)^2$. Эта величина автоматически неотрицательна в силу положительности функционала E. В соответствии с этим говорят, что A

имеет точное значение в состоянии E в том случае, когда обращается в нуль дисперсия. Значения $E(A)$ во всех таких состояниях определяют спектр наблюдаемой A.

Из определений состояния, чистого состояния и спектрального значения ясно, что они полностью характеризуются алгеброй ограниченных наблюдаемых. Но все это имеет значение только в том случае, когда состояния и чистые состояния существуют в достаточном числе, когда существуют спектральные значения и когда они связаны с состояниями обычным вероятностным образом (т. е. математическое ожидание наблюдаемых является средним для спектральных значений относительно функции распределения, определяемой состоянием) и т. д. Чтобы доказать эти утверждения, предыдущий феноменологический постулат нужно дополнить постулатом, создающим возможность применения аналитических методов.

Чтобы получить физически осмысленный и математически эффективный постулат, рассмотрим свойства, которые можно приписать границам наблюдаемых, конечность которых до сих пор не использовалась. В интуитивном физическом понимании граница представляет собой наибольшую возможную абсолютную величину наблюдаемой. Эта интерпретация после небольших размышлений порождает физические основания для следующего постулата.

Феноменологический постулат, аналитическая часть. *Каждая наблюдаемая A имеет «границу», обозначаемую $\|A\|$, которая обладает следующими свойствами:*

i. $\|A\|>0$, *причем* $\|A\|=0$ *тогда и только тогда, когда* $A=0$.

ii. $\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$ *и* $\|A+B\|<\|A\|+\|B\|$.

iii. *Множество всех наблюдаемых полно относительно метрики, определяемой границей, так что если* $A_1, A_2, \ldots$ — *последовательность наблюдаемых и* $\|A_m-A_n\|\to 0$, *когда* $m, n\to\infty$, *то существует такая наблюдаемая* A, *что* $\|A-A_n\|\to 0$.

iv. $\|A^2\|=\|A\|^2$ *и* $\|A^2-B^2\|\leqslant\max[\|A^2\|, \|B^2\|]$.

v. A^2 *является непрерывной функцией от A, т. е. $A_n^2 \to A^2$, когда $A_n \to A$.*

Условия i и ii имеют прямое физическое толкование. Условие iii является в сущности делом удобства, так как неполную систему всегда можно сделать полной; наблюдаемую A можно определить, если это необходимо, тем, что ее математическое ожидание в определенном состоянии полагается равным пределу математических ожиданий для A_n. Чтобы вывести iv из соответствующих интуитивных представлений, необходимы некоторые простые рассуждения. Условие v попросту утверждает, что если две наблюдаемые близки (мала граница их разности), то это же верно и для их квадратов.

В качестве примера вновь рассмотрим систему всех ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, определив $\|A\|$ как обычную норму оператора A. Иными словами, $\|A\|$ является точной верхней границей норм $\|A\psi\|$ элементов $A\psi$ гильбертова пространства, где ψ пробегает множество всех единичных векторов. Для самосопряженных операторов это совпадает с точной верхней границей $|(A\psi, \psi)|$. Все предыдущие условия проверяются почти тривиально.

Комбинируя алгебраическую и аналитическую части феноменологического постулата, можно строго установить все физически правдоподобные и традиционно принимаемые принципы квантовой феноменологии. Доказательства основаны на известных результатах и методах абстрактного анализа, главным образом на теории представлений Стоуна — Гельфанда и таких результатах линейного анализа, как теоремы Хана — Банаха, Крейна — Мильмана и Рисса — Маркова.

Таким путем мы приходим, в частности, к следующим результатам:

1. *Существует достаточный запас чистых состояний; это значит, что две наблюдаемые, имеющие одинаковые математические ожидания во всех чистых со-*

стояниях, должны совпадать. В частности, это оправдывает возможность сложения двух наблюдаемых.

2. *Всякая наблюдаемая допускает замкнутое множество спектральных значений, и математическое ожидание наблюдаемой во всяком состоянии является средним для этих спектральных значений относительно функции распределения на них, канонически определяемой состоянием.* Точнее говоря, эта функция распределения может быть определена по своей характеристической функции $E(e^{itA})$, где E — состояние и A — наблюдаемая (здесь e^{itA} определяется очевидным образом, можно также заменить $E(e^{itA})$ величиной $E(\cos tA)+iE(\sin tA)$, где $\cos tA$ и $\sin tA$ определяются обычными степенными разложениями, сходимость которых легко проверяется). Нетрудно показать, что эта функция (от t) положительно определена и тем самым ее преобразование Фурье — Стильтьеса порождает функцию распределения.

3. *Наименьшая замкнутая (в смысле феноменологических постулатов) система наблюдаемых, содержащая данную наблюдаемую A, находится во взаимно однозначном алгебраическом соответствии с алгеброй всех непрерывных функций на ее спектре.* Это дает спектральное представление для наблюдаемых, совершенно аналогичное представлению самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве; фактически последнее может быть отчасти выведено из первого. Отсюда и из теоремы Рисса — Маркова о представлении положительных линейных функционалов на пространствах непрерывных функций можно независимо от характеристической функции установить существование функции распределения для спектральных значений наблюдаемой в данном состоянии.

Для системы всех ограниченных самосопряженных операторов и чистого состояния, порождаемого волновой функцией ψ, обычное определение функции распределения, которое приписывает оператору со спектральным разложением $\int \lambda dE_\lambda$ функцию распределения $\|E_\lambda \psi\|^2$, соответствует, как можно легко показать, нашему определению, зависящему только от алгебры операторов, а не от всей совокупности свойств, которыми их наделяет гильбертово пространство.

Дальнейший результат имеет методическое значение. В математической и физической практике удобно (и, по-видимому, это лежит в природе вещей) ограничивать рассматриваемую физическую систему. При этом не исключена возможность того, что замена суженной физической системы большей системой, например «универсальной», может разрушить существование состояний и (или) спектральных значений наблюдаемых. Поэтому кажется возможным, например, возникновение правил отбора, запрещающих определенные чистые состояния подсистемы из-за того, что их нельзя реализовать в большей системе, от которой подсистема не может быть тем самым изолнрована. Это сильно усложняло бы ситуацию, и поэтому полезно знать, что такая трудность не может встретиться. Можно математически строго доказать, что

4. *Всякое чистое состояние физической системы, которая является подсистемой большей системы, можно расширить до чистого состояния большей системы.* (Иначе говоря, существует чистое состояние большей системы, которое совпадает с заданным чистым состоянием подсистемы.) В частности, спектральные значения наблюдаемой не зависят от алгебры наблюдаемых, в которую она включается, это же верно и для функции распределения.

5. *Граница наблюдаемой $\overset{\circ}{A}$ может быть определена чисто алгебраически как такое наименьшее вещественное число α, что $\alpha I - A = B^2$ и $\alpha I + A = C^2$ для подходящих наблюдаемых B и C.* Иначе говоря, $\|A\|$ определяется как наименьшее α, для которого $\alpha I \pm A$ неотрицательно, что интуитивно представляется оправданным. (Мы могли бы дать формальную алгебраическую систему аксиом, введя границу таким способом, но это не создало бы никакого действительного преимущества.) Тем самым мы завершили дока-

зательство основного феноменологического принципа, сформулированного выше и утверждавшего, что все чисто феноменологические качества физической системы определяются алгеброй ограниченных наблюдаемых.

Теперь возникает вопрос, как охарактеризовать математические системы, удовлетворяющие феноменологическим постулатам. Может оказаться чрезвычайно трудным классифицировать все такие системы, и решение этой задачи не обязательно будет вознаграждено, так как единственным реальным прототипом является система, в которой псевдопроизведение $A \circ B$ билинейно относительно A и B, или даже более специальная система, которая состоит из всех самосопряженных элементов $C = C^*$ ассоциативной алгебры, на которой определена операция сопряжения $C \rightarrow C^*$, удовлетворяющая обычным требованиям ($C^{**} = C$, $(\alpha C)^* = \bar{\alpha} C^*$, C^*C положительно в определенном смысле при $C \neq 0$). Эти предположения не имеют никаких эмпирических источников, но они просты и естественны с чисто математической точки зрения. Эти предположения интересны также тем, что они приводят к возможности реализации наблюдаемых самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве, хотя при этом и нет полной однозначности. В том случае, когда предполагается лишь билинейность псевдопроизведения, ситуация проанализирована еще не до конца, но Шерманом показано, что исключительная простая йорданова алгебра Альберта удовлетворяет этим постулатам. В настоящее время нет оснований для физического использования этой системы, интерес к которой сильно ограничивается ее конечномерностью.

Все определенные теоретические системы наблюдаемых, которые до сих пор рассматривались в литературе, представимы в терминах операторов на вещественном или комплексном гильбертовом пространстве, и мы также можем ограничиться с этого момента такими системами, которых и так достаточно много. Чтобы быть более точными, мы определим конкретную C^*-алгебру $\mathcal{A}$ как алгебру ограниченных линейных операторов на вещественном или комплексном гильбертовом пространстве, которая инвариантна относительно операции сопряжения и замкнута в равномерной топологии (т. е. содержит все пределы равномерно сходящихся последовательностей операторов из $\mathcal{A}$, при этом A_n сходится к A равномерно, если $\|A_n - A\| \to 0$; определение нормы оператора дано выше). Две конкретные C^*-алгебры могут быть алгебраически изоморфны (могут находиться во взаимно однозначном соответствии, воспроизводящем сумму, произведение и операцию сопряжения) без какой-либо простой связи между гильбертовыми пространствами, на которых действуют соответствующие операторы. Естественным объектом становится тогда *абстрактная* C^*-алгебра, которую можно определить как класс эквивалентных относительно алгебраического изоморфизма C^*-алгебр. Множество всех самосопряженных элементов абстрактной C^*-алгебры образует физическую систему, граница в которой определяется указанным выше алгебраическим способом.

Полное описание физической системы включает в себя не только описание математического характера алгебры ограниченных наблюдаемых, но также и описание названий этих наблюдаемых, своего рода физико-математический словарь. Это отчетливо видно на примере элементарной квантовой механики, где независимо от числа степеней свободы системы множество ограниченных наблюдаемых состоит из всех ограниченных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Очевидно, что не существует схемы наименований, применимой к совершенно общей C^*-алгебре наблюдаемых. Однако все используемые в физике C^*-алгебры отчетливо или завуалированно содержат схему наименований, математическая структура которой имеет чрезвычайно важное значение для теории. В своей простейшей форме эта схема наименований состоит в приписывании некоторым наблюдаемым таких названий, как «канонические» или «переменные поля». Трактовка этих наименований вводит математическую структуру совершенно иного характера, чем та математическая структура, которая составляет предмет этой лекции. Мы будем рассматривать эти вопросы в следующей лекции, однако некоторые указания можно дать и сейчас; одновременно мы проиллюстрируем чистую феноменологию кратким рассмотрением перестановочных соотношений Гейзенберга для одномерного случая.

В своей первоначальной форме

$$pq - qp = \frac{\hbar}{i}$$

перестановочные соотношения открывают широкие возможности для не относящихся к делу математических патологий. В настоящее время ясно, что для строгого рассуждения целесообразнее записывать их в форме Вейля

$$e^{i\alpha p} e^{i\beta q} = e^{i\alpha\beta} e^{i\beta q} e^{i\alpha p}.$$

Здесь α и β — произвольные вещественные числа, а единицы выбраны так, что $\hbar = 1$. Канонической парой является упорядоченная пара (p, q) самосопряженных операторов в комплексном гильбертовом пространстве, удовлетворяющих выписанным соотношениям Вейля. Представление Шредингера

$$e^{i\alpha p}\colon\ f(x) \to f(x+\alpha), \qquad e^{i\alpha q}\colon\ f(x) \to e^{i\alpha x} f(x)$$

(f — произвольная квадратично интегрируемая функция на $(-\infty, \infty)$) в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = L_2(-\infty, \infty)$ показывает, что канонические пары существуют. При этом мы используем теорему Стоуна о том, что непрерывная однопараметрическая унитарная группа, каковой является, например, группа

$$U_\alpha\colon\ f(x) \to f(x+\alpha),$$

имеет самосопряженный инфинитезимальный (порождающий) оператор. Здесь подразумевается непрерывность в слабой топологии, которая эквивалентна тому, что $(U_\alpha f, g)$ является непрерывной функцией от α для любых f и g из $\mathscr{H}$.

Обратимся теперь к вопросу о том, какие ограниченные наблюдаемые должны быть ассоциированы с канонической парой. Обычно в случае шредингеровского представления в качестве наблюдаемых рассматривают все ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве; в общем же случае образуют «кольцо операторов» в смысле Меррея и фон Неймана, порожденное основными операторами, и рассматривают в качестве наблюдаемых самосопряженные элементы этого кольца. Это кольцо операторов состоит из всех ограниченных «функций» основных операторов, при этом функция от множества операторов определяется как оператор, который коммутирует со всеми U и U^*, где U — унитарный оператор, коммутирующий со всеми операторами заданного множества. Шредингеровское представление неприводимо, т. е. не существует нетривиального замкнутого линейного подпространства в $L_2(-\infty, \infty)$, инвариантного относительно всех $e^{i\alpha p}$ и $e^{i\beta q}$. Это следует из «эргодичности» действия группы всех сдвигов на оси, т. е. из отсутствия нетривиальных измеримых подмножеств, инвариантных относительно всех сдвигов с точностью до множества меры нуль. Из теоремы фон Неймана о коммутантах в теории колец операторов следует тогда, что нет других унитарных операторов, кроме тривиальных αI (α — постоянная, равная по модулю единице), которые могут коммутировать с операторами p и q в шредингеровском представлении. Отсюда следует в свою очередь, что каждый ограниченный оператор на пространстве представления является функцией от p и q.

С другой стороны, можно определить «кольцо операторов» как содержащее тождественный оператор I множество ограниченных операторов, которое замкнуто в *слабой топологии* и относительно обычных алгебраических операций сложения и умножения. Замкнутость в слабой топологии определяется приписыванием оператора как предельной точки к множеству операторов в том случае, когда любое конечное множество матричных элементов оператора может быть с точностью до произвольного ε приближено матричными элементами некоторого оператора из исходного множества. Коммутаторная теорема фон Неймана (один из вариантов которой утверждает, что любой оператор, коммутирующий со всеми унитарными операторами, которые сами коммутируют со всеми операторами данного кольца, содержится в этом кольце) показывает, что кольцо операторов, порожденное некоторым множеством ограниченных операторов, является наименьшим кольцом операторов, содержащим это множество. Тем самым кольцо операторов, порожденное канонической парой, можно определить также как множество всех пределов в слабой топологии кольца всех конечных линейных комбинаций

$$e^{i\alpha p}e^{i\beta q}.$$

Цель этого технического отступления является отчасти информационной, а отчасти состоит в том, чтобы показать, что операторы слабо замкнутого кольца, порожденного данным множеством, могут не иметь никакой явной эмпирической связи с этим множеством. Этот несколько нефизический характер слабо замкнутого кольца не представляет никакой опасности в случае систем с конечным числом степеней свободы, но вызывает трудности в случае бесконечных систем. Расхождение вызвано тем (или, лучше сказать, эквивалентно тому), что теорема Стоуна — фон Неймана о единственности шредингеровских операторов, верная в конечномерном случае, теперь нарушается. Подробнее мы обсудим это в следующей главе. Быть может, полезно тем не менее кратко указать здесь, как обходиться с этой ситуацией в плане, созвучном с физикой.

Если $f(\alpha, \beta)$ — интегрируемая функция вещественных переменных α и β, то

$$T = \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left[i(\alpha p + \beta q)\right] f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

будет корректно определенным ограниченным оператором. Здесь предполагается $\varphi(A) = \varphi(\bar{A})$, если φ — функция Бэра и A — оператор, замыкание $\bar{A}$ которого нормально; это позволяет избежать неоднозначностей, связанных с незамкнутостью $\alpha p+\beta q$. Ясно, что оператор T получается из p и q сравнительно явным образом и поэтому может быть связан с определенной функцией от p и q. Набор всех таких T вместе с их *равномерными* пределами (равномерная сходимость наблюдаемых имеет прямой физический смысл) образует алгебру наблюдаемых для одномерной квантово-механической системы, несколько меньшую, чем описанное выше слабо замкнутое кольцо.

Существует другое определение только что описанного набора наблюдаемых, которое подтверждает его уместность. Так как при измерении больших значений p и q мы встречаемся со все возрастающими трудностями, то с интуитивной физической точки зрения кажется более убедительным считать действительными наблюдаемыми не p и q или экспоненты от них, зависящие от всех значений p и q, а «срезанные» функции $f(p)$ или $f(q)$, где f есть непрерывная функция, постоянная вне конечного интервала. Для большей симметрии и гладкости мы можем иметь дело с произведениями $f(p)g(q)$, где f и g обе принадлежат описанному типу. Можно показать, что наименьшая C^*-алгебра, содержащая все такие операторы, в точности совпадает с определенной в предыдущем абзаце (в частности, та же алгебра получается, если p и q поменять местами). Присоединение к этой алгебре I не связано ни с какими затруднениями, при этом получается алгебра, самосопряженные элементы которой удовлетворяют феноменологическим постулатам.

Очевидно, что элементам этой алгебры (назовем ее алгеброй *гладких* наблюдаемых) можно сравнительно естественно приписать наименования в терминах p и q. В качестве чистой алгебры она состоит, если отвлечься от слагаемых, кратных I, из вполне непрерывных операторов на пространстве шредингеровского представления. Можно показать, что состояния этой алгебры регулярны в том смысле, что они допускают представление

$$E(A)=\operatorname{tr}(AD),$$

в котором D является самосопряженным оператором с абсолютно сходящимся следом (т. е. имеет чисто точечный спектр и ряд, составленный из собственных значений с учетом их кратности, абсолютно сходится). Это вновь убеждает нас в том, что мы имеем дело с состояниями, которые обычно описываются как действительно физически реализуемые. Разумеется, для произвольного ограниченного самосопряженного оператора A след $\operatorname{tr}(AD)$ будет существовать, и его можно назвать математическим ожиданием A в состоянии E, но это не следует ни из каких физических соображений и должно расцениваться как некоторая математическая удача. И хотя, в частности, обычная практика рассматривать в качестве наблюдаемых все ограниченные самосопряженные операторы тем самым оказывается частично оправданной, важно понимать, что не все состояния большей системы физически реализуемы. Действительное пространство состояний будет таким же, как и для меньшей системы, и состоит из состояний, имеющих указанную простую аналитическую форму.

Примечания к главе I

1. *Опытные, концептуальные и теоретические наблюдаемые.* Следует предостеречь против упрощенного или слишком догматического взгляда на концепцию наблюдаемой. Доступны ли в принципе определенные аналитические выражения, встречающиеся в теоретической физике, экспериментальному измерению — этот вопрос может оказаться весьма трудным и спорным. Тем не менее многие из этих выражений обычно квалифицируются как концептуальные наблюдаемые. Среди них, например, напряженность электромагнитного поля, усредненная по способу, описанному Бором и Розенфельдом. Хотя никаких прямых наблюдений не было выполнено или предложено, трудно представить себе полезную теорию квантованного поля, которая не включала бы каким-либо способом такие концептуальные наблюдаемые в свой формализм. В этих главах вводится лишь довольно скромное пред-

положение, что концептуальными наблюдаемыми является только определенный физически выделенный класс ограниченных функций от таких усреднений поля. Более точно этот класс мы укажем позднее.

Имеются и другие трудности, в особенности на пути, которым вводятся конкретные операторы как теоретические варианты определенных важных эмпирических наблюдаемых (S-матрица, энергия и другие инфинитезимальные операторы фундаментальной группы симметрии, коммутирующие с энергией). Такие операторы появляются на несколько иной основе, а не как определенные функции от усреднений поля. Это не меняет в существенном справедливости предыдущих постулатов, подчеркивая лишь то, что их следует дополнить кинематическими, динамическими и статистическими рассмотрениями. Последние появятся позднее в нашей трактовке квантованных полей. Для ясности мы должны предпослать этому рассмотрение таких аспектов, которые связаны с общей физической системой.

2. *Относительно первичности состояний или наблюдаемых.* Что более фундаментально: наблюдаемые или состояния — этот вопрос во многом подобен аналогичному вопросу о курице и яйце. Если оставить в стороне метафизику, ни одно из этих понятий не имеет решающего преимущества как фундаментальная концепция. Однако в настоящее время не существует аналитической трактовки, исходящей из состояний и развитой в такой же мере, как трактовка, основанная на понятии наблюдаемой. В частности, работы Биркгофа и фон Неймана [1] и Макки [2] не развиты настолько, чтобы обнаружить их пригодность как возможной основы для феноменологии теории квантованных полей.

3. *Операторные алгебры и состояния.* Важное техническое преимущество концепции наблюдаемых как отправной точки для феноменологии, по крайней мере в представленной здесь форме этой концепции, состоит в возможности непосредственно перенести основ-

ные задачи в теорию операторных алгебр, которая после интенсивного развития в течение четверти века достигла убедительных успехов.

Первые определенные работы в этом направлении были выполнены фон Нейманом, их кульминацией является статья [4]. Но с чисто математической точки зрения особенно стимулирующими были работы Стоуна в конце 30-х и начале 40-х годов. Вслед за этим последовал замечательный результат Гельфанда и Наймарка [1], дающий абстрактное алгебраическое описание C^*-алгебр. Эта статья очень активизировала исследование C^*-алгебр, которые оказались более полезными для феноменологии, чем слабо замкнутые кольца, изучение которых было начато фон Нейманом и Мерреем. Хотя различие между равномерно и слабо замкнутыми алгебрами операторов может показаться очень техническим, оно оказалось жизненно важным, что и неудивительно, если вспомнить, что равномерная сходимость наблюдаемых имеет прямую физическую интерпретацию, в то время как слабая сходимость имеет только аналитическое значение.

Одним из аспектов теории C^*-алгебр, который важен и в математическом отношении и в связи с квантовой механикой, является двойственность между состояниями и представлениями. Позднее нам представится возможность описать и использовать взаимное соответствие между состояниями и представлениями, развитое в подходящей форме Сигалом [1].

Литературные указания к главе I

В каком-то смысле наилучшее представление о возникновении идей, развитых в этой главе, дают первые статьи фон Неймана [1], хотя большинство этих ранних работ было затем суммировано в книге [3]. Работа Сигала [2], на которой главным образом основана эта глава, объединяет идеи фон Неймана [4] с идеями теории представлений Стоуна, Гельфанда и других. Работа Лауденслегера и Шермана развивает некоторые аспекты подхода Сигала. Здесь остается открытым вопрос о существовании «простой» бесконечномерной йордановой алгебры, удовлетворяющей описанным постулатам и не «специальной», т. е. не выводящейся в существенном из ассоциативной алгебры.

Для ассоциативных систем соответствующая теория была развита Сигалом [1]; она включает некоторый материал о понятии полного измерения, введенном Дираком, и о связи его с вейлевским понятием чистого состояния (см. Вейль [1]).

По C^*-алгебрам и W^*-алгебрам («алгебры» фон Неймана, или «кольца операторов») имеется обширная литература. Из вопросов, не затронутых выше, особенно стоит отметить теорию непрерывных прямых сумм гильбертовых пространств, которая важна с точки зрения обоснований, хотя практически вовсе не необходима.

Глава II

КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ

Квантовая механика систем с конечным числом степеней свободы часто вводится в терминах конечного множества $p_1, q_1; p_2, q_2; \ldots; p_n, q_n$ взаимно коммутирующих канонических пар. Изменение системы отсчета заменяет их новым множеством n таких пар. Желательно несколько переформулировать понятие канонической системы для того, чтобы иметь дело со всеми основными «каноническими переменными» в компактной и теоретически удобной форме. Эта переформулировка полезна как при переходе к системам с бесконечным числом степеней свободы, так и при уяснении общего понятия квантования.

Мы начнем с конечномерного вещественного линейного пространства $\mathscr{L}$, которое будет интерпретироваться физически как классическое конфигурационное пространство рассматриваемой системы. Таким образом, для системы n частиц в трехмерном евклидовом пространстве наше $\mathscr{L}$ будет $3n$-мерным. Пространство, двойственное к $\mathscr{L}$, т. е. пространство всех линейных функционалов на $\mathscr{L}$, будет обозначаться $\mathscr{L}^*$. *Квантовомеханическая каноническая система* на $\mathscr{L}$ может быть определена в чисто математическом плане как пара (U, V) унитарных представлений в гильбертовом пространстве аддитивных групп $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}^*$; эти представления должны быть слабо непрерывны и должны удовлетворять соотношениям Вейля

$$U(x)V(f) = e^{if(x)}V(f)U(x) \quad (x \in \mathscr{L},\ f \in \mathscr{L}^*).$$

Для всякой такой канонической системы по теореме Стоуна существуют такие самосопряженные операторы $P(x)$ и $Q(f)$, что

$$U(tx) = e^{itP(x)}, \quad V(tf) = e^{itQ(f)}.$$

Эти операторы называются каноническими переменными системы. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в $\mathscr{L}$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — двойственный базис в $\mathscr{L}^*$ (т. е. $f_j(x_k) = \delta_{jk}$), то

$$\{P(e_1),\ Q(f_1)\},\ \{P(e_2),\ Q(f_2)\},\ \ldots,\ \{P(e_n),\ Q(f_n)\}$$

образуют последовательность взаимно коммутирующих канонических пар.

Существование канонической системы на $\mathscr{L}$ следует из существования шредингеровского представления. Точнее, пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство всех комплекснозначных функций на $\mathscr{L}$, квадратично интегрируемых относительно меры Лебега (определенной с точностью до постоянного множителя). Положим для любой функции F из $\mathscr{H}$

$$U(x)\colon\ F(y) \to F(y+x),$$
$$V(f)\colon\ F(y) \to e^{if(y)} F(y).$$

Легко непосредственно проверить, что при этом выполняются соотношения Вейля.

Замечательным и очень удобным обстоятельством (за его воображаемое отсутствие пришлось бы расплачиваться значительными техническими осложнениями) является

Единственность в существенном канонических систем (Стоун — фон Нейман). *Всякая каноническая система на конечномерном линейном конфигурационном пространстве представляет собой с точностью до унитарной эквивалентности дискретную прямую сумму шредингеровских систем.*

Другими словами, произвольная каноническая система (U', V'), действующая на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}'$, допускает разложение

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \ldots,$$

в котором каждое из подпространств $\mathscr{H}_i$ инвариантно относительно всех операторов канонической системы; для каждого $\mathscr{H}_i$ существует унитарное отображение

W_i на пространство $\mathscr{H}$ шредингеровского представления, переводящее сужение пары (U', V') на $\mathscr{H}_i$ в шредингеровскую пару (U, V):

$$U(x) W_i = W_i U'(x),$$

$$V(f) W_i = W_i V'(f) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Заметим, что основное физическое значение этого по сути дела математического результата состоит в том, что любые две квантовые канонические системы на одном и том же конфигурационном пространстве $\mathscr{L}$ независимо от их приводимости физически идентичны. Из теоремы Стоуна — фон Неймана следует, что наблюдаемые, ассоциированные с двумя такими системами, алгебраически изоморфны. Это не зависит от того, рассматриваются полные кольца операторов, порожденные каноническими системами, или более физичные C^*-алгебры гладких операторов. В случае C^*-алгебр это связано главным образом с тем, что образование прямых сумм копий одного и того же оператора не меняет его нормы. Как показывает специальный анализ, в случае полного кольца операторов алгебраическая единственность сохраняется, несмотря на то что слабая топология, вообще говоря, меняется при образовании прямых сумм.

Последнее рассуждение дает способ наиболее ясного математического объяснения физической эквивалентности гейзенберговской и шредингеровской формулировок квантовой механики. В настоящей книге оно сыграет роль в упрощении трактовки квантования полей Бозе — Эйнштейна. Теорема единственности дает также возможность говорить о квантовомеханической канонической системе на заданном конфигурационном пространстве $\mathscr{L}$.

Хотя в предыдущей трактовке канонические переменные P и Q играют разную роль, ясно, что между ними есть определенная симметрия. Различие между P и Q имеет отчетливые физические основания для систем с конечным числом степеней свободы и даже для общих нерелятивистских систем, однако оно утрачивает всякое значение при квантовании релятивистских полей. Имея в виду эту задачу, полезно переформулировать квантование конечных систем так, чтобы устранить столь резкое различие между P и Q. Эта перестройка приведет и к некоторым математическим упрощениям.

Обозначим через $\mathcal{M}$ прямую сумму $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^*$ пространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$, так что $\mathcal{M}$ является линейным пространством, элементы которого имеют вид (u, f), где $u \in \mathcal{L}$ и $f \in \mathcal{L}^*$; линейные операции выполняются покомпонентно. $\mathcal{M}$ — это физическое *фазовое пространство*. Пусть $P(\cdot)$ и $Q(\cdot)$ — каноническая система на $\mathcal{L}$. Для произвольного вектора $z=(u, f)$ из $\mathcal{M}$ определим самосопряженный оператор $R(z)$ как инфинитезимальный оператор непрерывной однопараметрической унитарной группы $S(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, где $S(t) = \exp[itP(u)]\exp[itQ(f)]\exp[-\frac{i}{2}t^2f(u)]$. Применяя обе части этого равенства к вектору из областей определения $P(u)$ и $Q(f)$, дифференцируя по t и затем полагая $t=0$, устанавливаем, что $R(z) \subset P(u)+Q(f)$. По сути дела $R(z)$ должно быть определено как замыкание суммы $P(u)+Q(f)$, но это несколько неудобно с математической точки зрения. Из определения $R(z)$ без труда получаем

$$e^{iR(z)}e^{iR(z')} = e^{iB(z, z')/2}e^{iR(z+z')}$$

(z' произвольно), где

$$B(z, z') = f'(u) - f(u').$$

Обратно, выбирая подходящие z и z', получаем из этого соотношения уравнения Вейля. Таким образом, каноническую систему на $\mathcal{L}$ можно по-другому определить как отображение $z \to R(z)$ фазового пространства $\mathcal{M}$ на множество самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Требуется, чтобы $R(z)$ было слабо непрерывной операторной функцией от z и удовлетворяло приведенному выше обобщенному соотношению Вейля.

В инфинитезимальной форме обобщенное соотношение Вейля имеет вид

$$[R(z), R(z')] \subset -iB(z, z').$$

Полезно отметить также, что $R(z)$, насколько позволяет его неограниченность, линейно зависит от z:

$$R(z+z') \subset R(z)+R(z'),$$
$$R(az)=aR(z)$$

(a — произвольное вещественное число).

Иногда, особенно в теории поля, удобно вводить комплексные канонические переменные, которые зависят от вектора z как точки фазового пространства не только вещественно-линейным, но и комплексно-линейным образом.

Чтобы прийти к формулировке фазового пространства как комплексного линейного пространства, будем считать, как это часто делается, что в конфигурационном пространстве $\mathscr{L}$ определена не только структура вещественного линейного пространства, но и метрика, например будем считать $\mathscr{L}$ евклидовым пространством. Итак, мы предположим, что на $\mathscr{L}$ задана вещественная положительно определенная симметрическая билинейная форма (x, y).

В этом случае двойственное пространство $\mathscr{L}^*$ к $\mathscr{L}$ может быть канонически отображено на $\mathscr{L}$: если $f \in \mathscr{L}^*$, то найдется такой единственный элемент u из $\mathscr{L}$, что $f(x)=(x, u)$ (x — произвольный элемент из $\mathscr{L}$). Если мы условимся писать $f=u^*$ и $f^*=u$, то ясно, что $u^{**}=u$. Общий элемент z из $\mathscr{M}=\mathscr{L} \oplus \mathscr{L}^*$ имеет вид

$$z=u \oplus v^*,$$

где u и v — некоторые элементы из $\mathscr{L}$. Определим теперь на $\mathscr{M}$ операцию j:

$$jz=-v \oplus u^*.$$

Легко видеть, что j является вещественно-линейным преобразованием ($j(az)=aj(z)$ для вещественного a и $j(z+z')=jz+jz'$ для произвольных z и z' из $\mathscr{M}$) и что $j^2=-1$ (1 обозначает здесь тождественное преобразование). Таким образом, j во многом подобно умножению на комплексное число i, и довольно хорошо известно, что можно ввести на $\mathscr{M}$ комплексную структуру чисто алгебраическим образом, определяя умножение на произвольное комплексное число $a+ib$ равенством

$$(a+ib)z=az+bjz.$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{M}$ становится тогда линейным пространством над полем комплексных чисел.

Для любого z из $\mathscr{M}$ определим оператор

$$C_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}[R(z)-iR(iz)]$$

и будем обозначать через $C(z)$ его замыкание; можно показать, что оно существует. Можно показать, что в противоположность вещественно-линейному характеру $R(z)$ $C(z)$ будет комплексно-линейной функцией от z, т. е. для произвольного комплексного числа a выполняется соотношение $C(az)=aC(z)$. Кроме этого простого алгебраического свойства, $C(z)$ в отличие от $R(z)$ удовлетворяет несколько более удобным с инфинитезимальной точки зрения перестановочным соотношениям. Чтобы сформулировать их, отметим, что $\mathscr{M}$ имеет не только выделенную комплексную структуру, но также и выделенную структуру унитарного пространства. Если положить $S(z, z')=-B(iz, z')$, то легко проверяется, что $S(z, z')=(u', u)+(v, v')$, так что $S(z, z')$ оказывается положительно определенной вещественной симметрической формой на $\mathscr{M}$. Теперь непосредственно ясно, что формула

$$\langle z, z'\rangle=S(z, z')+iB(z, z')$$

задает на $\mathscr{M}$ положительно определенное скалярное произведение, которое вместе с комплексной структурой на $\mathscr{M}$ превращает его в унитарное пространство. Тогда перестановочные соотношения для $C(z)$ и его сопряженного в этом пространстве имеют вид

$$[C(z), C(z')]=0, \quad [C(z), C(z')^*]\subseteq-\langle z, z'\rangle.$$

Так называемые операторы рождения и уничтожения $C(z)$ и $C(z)^*$ (основания для этих названий обнаружатся позже в связи с интерпретацией теории поля в терминах частиц) оказываются очень полезными (и это естественно ввиду простоты перестановочных сотношений для них) в алгебраическом анализе канонических систем, полиномов от каионических переменных и т. д. С другой стороны, эти операторы неограничены и очень далеки от того, чтобы быть нормальными или диагонализируемыми, так что с ними очень трудно иметь дело при строгом исследовании. Поэтому, а также из-за того, что нас будут интересовать здесь не столько вычисления, сколько основания теории, мы обычно будем избегать использования $C(z)$.

Наиболее полезным унитарное пространство $\mathscr{M}$ окажется только позже в связи с бесконечномерными системами. Оно будет обеспечивать существование вакуумного состояния для соответствующих квантовых систем.

Следует отметить, что с точки зрения физики классическое фазовое пространство $\mathscr{M}$ не обязательно должно быть *линейным* многообразием, это лишь простейший и основной для математика случай. В интуитивном плане конфигурационное пространство $\mathscr{L}$ может быть произвольным гладким многообразием. При этом с логической точки зрения мы теперь, естественно, приходим к вопросу, как ввести «условия квантования» в случае нелинейного фазового пространства, однако удобно отложить его обсуждение до того, как мы подойдем к проблеме квантования нелинейных полей.

До сих пор в нашем обсуждении конфигурационное пространство $\mathscr{L}$ и фазовое пространство $\mathscr{M}$ были конечномерными. Появляются ли какие-нибудь трудности в случае бесконечномерных систем, и если да, то каковы они? Системы теории поля, которые будут нашим главным предметом, имеют бесконечно много степеней свободы.

Нетрудно дать формальное распространение основных концепций, относящихся к каноническим системам. Если $\mathscr{M}$ — бесконечномерное линейное пространство (скажем, фазовое пространство классического поля) с выделенной кососимметрической билинейной формой B, то понятие канонической системы можно определить в точности так же, как и выше. Математик немедленно поставит вопрос о ее существовании и единственности, и это приведет к нетривиальным математическим рассмотрениям.

С точки зрения физика эти новые трудности для бесконечномерных систем обнаруживаются в связи с динамикой. Уже при ее формулировке возникают знаменитые расходимости квантовой теории поля. Они появились еще в первой работе Дирака по квантованным полям и не исчезли до сих пор. Сравнительно недавний математический анализ показал, что эти расходимости тесно связаны с математическими проблемами, относящимися к существованию и единственности канонических систем.

Прежде чем входить в детали, относящиеся к бесконечномерному случаю, полезно кратко обсудить какой-нибудь конкретный пример, чтобы выяснить, что нас ожидает. Мы опишем здесь один такой пример, выбранный из-за его сравнительной элементарности. Однако вначале необходимо избавиться от некоторых общих феноменологических вопросов, относящихся к формулировке динамики.

В традиционной трактовке квантовой механики в теоретической физике в качестве одного из исходных пунктов принимается, что динамическое преобразование порождается унитарным (или в очень немногих специальных случаях антиунитарным) преобразованием. Такое преобразование U переводит наблюдаемую (представляемую оператором) X в наблюдаемую $U^{-1}XU$ или волновую функцию ψ в волновую функцию $U\psi$. В принципе ситуация представляется абсолютно ясной. В более общем случае при временнóй эволюции системы имеют дело с однопараметрическим семейством U_t таких преобразований, так что наблюдаемая $X(t)$ в некоторый момент времени t задается формулой

$$X(t) = U_t^{-1} X(0)\, U_t.$$

Если внешние силы, действующие на систему, не зависят от времени, семейство U_t будет однопараметрической группой: $U_t U_{t'} = U_{t+t'}$.

С точки зрения феноменологии, описанной в первой главе, эта формулировка выглядит возникшей ad hoc. С точки зрения физических основ главное свойство динамического преобразования состоит в том, что оно сохраняет физическую алгебру наблюдаемых. Более точно, это означает, что при

$$X \to X', \quad Y \to Y'$$

выполняются соотношения

$$X + Y \to X' + Y', \quad X^2 \to X'^2, \quad aX \to aX'$$

(a вещественно). В том частном случае, когда наблюдаемые представлены операторами и X' имеет вид $X' = UXU^{-1}$, а U — унитарный оператор, ясно, что эти условия выполняются, но совершенно не очевидно, по крайней мере на уровне строгой математики, что нет других возможностей.

Физики, большинство которых связаны с вычислительной стороной дела, предпочитают считать доказанным, что предыдущее определение динамического преобразования как *автоморфизма* алгебры наблюдаемых, если воспользоваться точным математическим термином, аналитически эквивалентно определению в терминах унитарных или антиунитарных операторов. Как нетрудно установить совершенно строго, это действительно так в случае алгебры всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Каждый автоморфизм этой системы порождается некоторым унитарным или аитиунитарным оператором, который определяется с точностью до умножения на скаляр. Тем самым вопрос сводится к тому, будет ли алгебра наблюдаемых состоять из всех самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

Нет явных физических причин, по которым это должно быть так даже в случае элементарной квантовой механики. Это обычно предполагают из соображений математического удобства, а также потому, что такое предположение не создает никаких затруднений. Но следует подчеркнуть, что оно не имеет эмпирических оснований и потому должно быть отброшено, как только окажется, что оно приводит к аналитическим осложнениям. В этой ситуации довольно очевидно, что предположение, в силу которого все ограниченные самосопряженные операторы являются наблюдаемыми, не содержит большой опасности в случае канонических систем с конечным числом степеней свободы. Из теоремы Стоуна — фон Неймана следует, что независимо от того, как каноническая система представлена операторами в гильбертовом пространстве, каждый самосопряженный ограниченный оператор будет иметь определенное математическое ожидание во всяком регулярном состоянии и тем самым будет иметь много общего с наблюдаемой. Единственное затруднение состоит в том, что не все состояния, определенные по фон Нейману, будут физически осмысленными. Однако если быть максимально точными и рассмотреть только гладкие наблюдаемые, описанные в первой главе, то ситуация в существенном не нарушится, а состояния этой алгебры уже будут физически допустимыми. Алгебра гладких наблюдаемых в случае шредингеровского представления является алгеброй всех вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве с присоединенным тождественным оператором. Каждый автоморфизм физической алгебры самосопряженных элементов этой алгебры порождается унитарным или антиунитарным преобразованием (как и прежде, в существенном однозначно).

Итак, в случае систем с конечным числом степеней свободы окончательно выяснено, что предположение о том, что наблюдаемые — это все самосопряженные операторы, а динамические преобразования — это однопараметрические семейства унитарных операторов и т. д., — не создает реальных затруднений и приводит к благоприятной технической ситуации. Тем самым для конечных систем физическая интуиция получает формальное оправдание. Но в случае бесконечных систем, которые оставались не исследованными математиками на протяжении многих лет, соответствующие родственные теоремы совершенно неверны. Это установлено теперь вполне строго с математической точки зрения. Особенно замечательным оказывается то, что всегда неявно предполагавшаяся возможность представить каждое динамическое преобразование унитарным или антиунитарным оператором не имеет места (когда наблюдаемые представляются операторами некоторым, по-видимому наиболее естественным, способом). Это вызывается не усложненными аналитическими обстоятельствами (типа недифференцируемости некоторых функций), которые можно было бы по физическим причинам отвести ввиду их патологического характера, а фундаментальными и совершенно простыми в аналитическом плане причинами. Представляется вероятным, что в теории поля к унитарным операторам можно свести лишь кинематические преобразования, а не те решающие преобразования, которые отвечают временно́му развитию системы, если только наблюдаемые представлены каким-нибудь явным образом (например, как операторы на «голых», или «свободных физических», полях — см. ниже).

Переходя к бесконечномерному примеру, введем, хотя это и нековариантно, последовательность канонических переменных p_1, q_1, p_2, q_2, ... Пусть R — вещественная ось и m — мера с элементом $\pi^{-1/2}e^{-x^2}dx$. Обозначим через S пространство с мерой, которое является бесконечным прямым произведением счетного множества экземпляров вероятностного пространства (R, m), и пусть $\mathscr{K}$ будет гильбертовым пространством всех комплекснозначных квадратично интегрируемых функций на этом пространстве. Точки в S имеют вид $(x_1, x_2, \ldots)$, где x_k — вещественные числа, а любой элемент f из $\mathscr{K}$ будет функцией $f(x_1, x_2, \ldots)$ от этой счетной последовательности вещественных переменных. Пусть теперь $U_k(s)$ (s — любое вещественное) обозначает следующее унитарное преобразование на $\mathscr{K}$:

$$U_k(s)\colon f(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \to$$
$$\to f(x_1, \ldots, x_k + s, \ldots)\, e^{-(2xs+s^2)/2}.$$

Определим еще одно унитарное преобразование на $\mathscr{K}$:

$$V_k(t)\colon f(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \to f(x_1, \ldots, x_k, \ldots)\, e^{itx_k}$$

(t — любое вещественное). Легко проверить непосредственно, что выполняются соотношения Вейля

$$U_k(s+t)=U_k(s)U_k(t),$$
$$V_k(s)V_k(t)=V_k(s+t),$$
$$U_k(s)V_{k'}(t)=e^{ist\delta_{kk'}}V_{k'}(t)U_k(s).$$

Таким образом, мы построили бесконечную каноническую систему, самосопряженные канонические переменные p_k и q_k которой определяются обычным образом как самосопряженные инфинитезимальные операторы введенных однопараметрических групп. При этом p_k порождает $U_k(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ и q_k порождает $V_k(s)$ $(-\infty<s<\infty)$. Эти p_k и q_k множителями $2^{\pm 1/2}$ отличаются от определенного стандартного набора канонических переменных, который будет описан позднее.

В квантовой теории часто бывает полезно перейти от одного множества канонических переменных к другому (в том же самом гильбертовом пространстве), удовлетворяющему прежним перестановочным соотношениям. Согласно старой физической теореме, две такие системы связаны унитарным преобразованием, так что этот переход не порождает никаких затруднений. В действительности же в этой теореме не участвовало никакого явного гильбертова пространства, на котором канонические переменные действовали бы как самосопряженные операторы. Это не дает возможности уловить точный смысл теоремы или дать контрпример. Необходимы более точные формулировки. Впрочем, выше мы построили явное гильбертово пространство и теперь можем сформулировать корректную математическую задачу: будут ли две канонические системы, скажем

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ \ldots \quad \text{и} \quad p_1',\ q_1',\ p_2',\ q_2',\ \ldots,$$

связаны унитарным преобразованием? Иначе говоря, существует ли на гильбертовом пространстве такой унитарный оператор U, что

$$Up_kU^{-1}=p_k',\ Uq_kU^{-1}=q_k' \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots)?$$

Самыми распространенными преобразованиями являются линейные однородные преобразования p и q. Рассмотрим предельно простой случай «масштабного» преобразования:

$$p'_k = cp_k, \quad q'_k = c^{-1}q_k \quad (c > 0).$$

С помощью элементарных математических выкладок легко показать, что только в тривиальном случае $c=1$ это преобразование порождается унитарным. Более того, ни одно из преобразований вида $p_k \to f(p_k)$, $q_k \to g(q_k)$ не будет связано с унитарным, кроме тривиального случая $f(x) = \pm x$ и $g(x) = \pm x$. Если преобразование зависит от k, скажем

$$p'_k = c_k p_k, \quad q'_k = c_k^{-1} q_k \quad (c_k > 0),$$

то для того, чтобы оно задавалось унитарным, необходимо и достаточно, чтобы сходилось бесконечное произведение

$$\prod_k \frac{2c_k}{1+c_k^2}.$$

Это условие требует, в частности, чтобы $c_k \to 1$, и тем самым исключает все реальные случаи, в которых это преобразование используется на практике (примеры такого использования см., например, в книге фон Неймана).

Чтобы приобрести некоторое представление о природе расходимостей в теории поля, исследуем подробнее введенное выше масштабное преобразование. Сделаем это в духе прежней традиционной практики. Существование унитарного преобразования кажется ясным потому, что его можно выписать явно:

$$U = \exp\left[ig\sum_{k=1}^{\infty}(p_k q_k + q_k p_k)\right],$$

здесь g — постоянная, зависящая от c. Чтобы проверить, что U обладает, хотя бы в символическом смысле, необходимыми свойствами, задачу сводят к одномерной, которая легко решается точно. Но для бесконечного числа измерений этот оператор попросту не существует: последовательность унитарных операторов $\exp\left(ig\sum_{k=1}^{n} p_kq_k+q_kp_k\right)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится, но не к унитарному оператору, а к нулю.

Символический оператор U дает нам пример «расходящегося» оператора. Из операторов теории поля прежде всего интересны те, которые описывают временну́ю эволюцию. В так называемом представлении «взаимодействия» они задаются в довольно явном виде. Операторы перехода от времени t к времени $t+dt$ напоминают оператор U. Основное различие состоит в том, что выражение в экспоненте является не квадратичной функцией от канонических операторов, а содержит обычно кубичные или линейные члены. Это показывает, что такие формальные унитарные операторы перестают существовать во всяком простом и эффективном математическом смысле, хотя и невозможно по природе вещей доказать это строго, поскольку их определение является эвристическим. Тем не менее эти «расходящиеся» операторы можно использовать для получения точных численных результатов, если произвести подходящую «перенормировку». Как с помощью такой перенормировки устранить явные бесконечности, это можно увидеть на примере нашего оператора U. Даже матричные элементы (Uf, g) оператора U между простейшими векторами состояния f и g представляются расходящимися — они тождественно обращаются в нуль, хотя эти матричные элементы должны в каком-то смысле комбинироваться в унитарную матрицу. Однако если умножить (Uf, g) на подходящую «бесконечную постоянную», то получается совершенно определенная числовая матрица. Точнее говоря, пусть $a = (e^{ig(pq+qp)}1, 1)$, где 1 обозначает функцию, тождественно равную единице на вещественной оси, а скалярное произведение и операторы p и q определены, как и выше, с той разницей, что теперь рассматривается один экземпляр вероятностного пространства. Не составляет труда точно вычислить постоянную a, но ее значение нам не потребуется. И наконец, нетрудно показать, что, хотя $(U_k f, g)$ стремится к 0, где $U_n = \exp\left[ig \sum_{k=1}^{n} (p_k q_k + q_k p_k)\right]$, существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} a^{-k} (U_k f, g).$$

Это имеет место на плотном множестве элементов f и g, скажем на элементах вида $\prod_k f_k(x_k)$, где все f_k, кроме конечного числа, равны единице, а остальные являются полиномами.

Таким образом, вводя символическую «бесконечную постоянную» $Z = a^{-\infty}$, получаем определенные и конечные матричные элементы $Z(Uf, g)$. Если мы интересуемся лишь сравнением матричных элементов U с матричными элементами другого расходящегося оператора, который может быть перенормирован умножением на «то же самое» Z, то ясно, что никаких трудностей не будет. Ясно также, что это зависит от особенно удачного стечения обстоятельств и очень далеко от фактического решения возникших принципиальных вопросов.

Примечания к главе II

1. *Квантование Ферми — Дирака.* Почему вводятся соотношения $[p_j, q_k] = i\delta_{jk}$? Сначала Дирак ввел эти правила просто по аналогии с теми, которые использовал Гейзенберг. То, что они оказались столь плодотворными, довольно неожиданно, так как, несмотря на внешнее подобие, они играют совершенно иную роль, чем соотношения Гейзенберга. Последние выглядят для математиков, имеющих дело с физикой и в достаточной степени испорченных, просто как способ описания геометрии одного нерелятивистского электрона. Эти соотношения утверждают, грубо говоря, что окружающее электрон пространство является трехмерным евклидовым пространством, на котором фундаментальную роль играет действие группы сдвигов, вводящее постоянную Планка. С другой

стороны, дираковские правила квантования для поля не утверждают ничего о геометрии отдельной частицы и не зависят ни от какого специального способа описания частицы, предполагая только то, что ее состояния можно представить векторами бесконечномерного линейного пространства. Они описывают скорее возможные объединения бесконечного числа одинаковых частиц независимо от их сорта и независимо, в частности, от того, будет окружающее пространство трехмерным или бесконечномерным или его вовсе не будет (линейное пространство, элементы которого представляют состояния, не обязательно должно быть образовано функциями на каком-либо многообразии). Кроме того, рассматриваемые правила неприменимы к хорошо известным материальным частицам — электронам, они были введены в связи с фотонами.

Появление правил квантования для электронов имеет довольно долгую историю, но алгебраист мог бы прийти к ним, просто обдумывая соотношения

$$[R(z),\ R(z')] = -iB(z,\ z'),$$

в которых $B(z, z')$ — скаляр. Необходимо, чтобы $B(z, z')$ было кососимметрично по z и z', и если $R(z)$ — симметричный оператор, то B должно иметь вещественные значения; для получения нетривиальной теории B должно быть невырождено. Обратно, если B обладает этими свойствами, то возможна последовательная и эффективная математическая теория. Более подробно это будет выяснено в дальнейшем.

Для алгебраиста естественно задаться вопросом: что изменится, если коммутатор $[R(z),\ R(z')]$ заменить антикоммутатором $[\cdot,\ \cdot]_+$ ($[A,\ B]_+$ определяется как $AB+BA$) и рассмотреть соотношения

$$[R(z),\ R(z')]_+ = S(z,\ z'),$$

в которых S имеет скалярные значения. Необходимо, чтобы $S(z, z')$ было симметрично по z и z', и если $R(z)$ является симметричным оператором, то S должно принимать вещественные значения. И снова для построения нетривиальной теории форма S должна быть невырожденной. При этом возникает теория, имеющая такую же структуру, что и теория, исходящая из коммутаторов, но, конечно, совершенно иная. По некоторым известным квазиэмпирическим причинам соответствующая алгебра оказывается пригодной для описания бесконечного числа электронов (если выбрать подходящие линейные пространства и симметрическую форму).

Между алгебрами, возникающими из антикоммутационных и коммутационных правил (их называют правилами квантования Ферми — Дирака и Бозе — Эйнштейна соответственно), имеется несколько явных существенных различий. Антикоммутационные правила проще в аналитическом аспекте, это прежде всего проявляется в том, что операторы $R(z)$ оказываются ограниченными. Однако в алгебраическом плане антикоммутационные алгебры сложнее. Так, в наиболее естественном представлении не существует комбинаций переменных $R(z)$, порождающих максимальную абелеву систему. Но так или иначе бо́льшая часть действительно фундаментальных черт теории квантованных полей может быть представлена либо в терминах полей Бозе — Эйнштейна, либо в терминах полей Ферми — Дирака. Всюду в этой книге, где будут рассматриваться поля только одного типа, мы будем иметь дело прежде всего с полями Бозе — Эйнштейна. Это объясняется соображениями простоты и краткости. Типичной ситуацией, в которой встречаются поля обоих типов, является трилинейное (линейно-билинейное) взаимодействие между полем Бозе — Эйнштейна и полем Ферми — Дирака. Этот наиболее важный тип взаимодействия, включающий, например, электродинамику, будет обсуждаться позже.

Имеются два ответа на вопрос о других мыслимых способах квантования — практический и теоретический. Практически все элементарные частицы хорошо представляются (в том, что касается их статистики и всех наблюдаемых свойств) одним из двух описанных способов. Однако это не слишком убедительно из-за того, что известно лишь ограниченное число таких частиц, и из-за трудностей детального изучения некоторых из них. Но имеются также и теоретические результаты, которые показывают, что не существует других столь же простых аналитически систем, допускающих систематическое развитие. Однако, нет определенного единства мнений о том, насколько эти результаты окончательны.

С математической точки зрения может представлять интерес вопрос о возможности существования свободных полей, удовлетворяющих трилинейным или более высокого порядка псевдокоммутационным соотношениям, а также другие аналогичные возможности теории поля. Таких схем, применимых к произвольному гильбертову пространству одночастичных состояний, не существует, но это может быть не так для лоренц-инвариантных пространств и особенно для пространств функций на обычном пространстве-времени со значениями в спинорном пространстве.

2. *Сингулярные унитарные преобразования полей и сингулярные преобразования на пространстве Винера.* Отсутствие унитарного преобразования, порождающего псевдоканоническое преобразование

$$q_k \to cq_k,\ p_k \to c^{-1}p_k \quad (c^2 \neq 1,\ k=1,\ 2,\ \ldots)$$

(канонические переменные берутся в описанном выше представлении), которое является простейшим примером нарушения старой физической теоремы о таких преобразованиях, тесно связано с одним аналитическим обстоятельством, обнаруженным за несколько лет до того, как была исследована эта ситуация в теории поля. Камерон и Мартин [2] показали, что простые преобразования на пространстве Винера $x(t) \to$ $\to cx(t)$ $(c>0,\ c\neq 1)$ обладают чрезвычайно патологическими свойствами с точки зрения теории меры. В эвристическом плане можно сказать, что если бы существовало унитарное преобразование, порождающее описанное псевдоканоническое (или даже лишь отображение $q_k \to cq_k$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$), то рассмотренное преобразование на пространстве Винера было бы абсолютно непрерывным.

Чтобы кратко описать эту связь, представим процесс броуновского движения $x(t)$, скажем, на

$0 \leqslant t \leqslant 1$ рядом Фурье

$$x'(t) \sim \sum_k q_k e^{2\pi ikt},$$

где q_k — независимые случайные величины, распределенные нормально с единичной дисперсией. Очевидно, что преобразования $x(t) \to cx(t)$ и $q_k \to cq_k$ эквивалентны. Если бы первое из них было абсолютно непрерывно, то преобразование

$$F[x(\cdot)] \to F(cx(\cdot))\left(\frac{dw_c}{dw}\right)^{1/2}$$

было бы унитарным (здесь w и w_c — мера Винера и мера, возникающая из нее при указанном преобразовании). Нетрудно проверить, что этот оператор преобразует операцию умножения на q_k в операцию умножения на cq_k ($k=1, 2, \ldots$). Таким образом, если бы масштабное преобразование было абсолютно непрерывным, существовало бы унитарное преобразование, переводящее q_k в cq_k. С другой стороны, можно показать, что если бы преобразование $q_k \to cq_k$ ($k=1, 2, \ldots$) порождалось унитарным оператором, то соответствующее преобразование в описанном выше бесконечном произведении пространств было бы абсолютно непрерывным и такими же свойствами обладало бы масштабное преобразование в пространстве Винера.

Вообще легко видеть, что абсолютная непрерывность преобразования в пространстве Винера означает существование унитарного оператора, порождающего соответствующее преобразование канонических переменных. Обратное утверждение верно для преобразований, включающих только переменные q_k. Оно менее очевидно. Естественно, что возможность преобразования q, вообще говоря, ничего не означает для возможности преобразования p. Канонические переменные p не появляются в теории броуновского движения, так что, хотя во многих случаях можно дать чрезвычайно простые условия для представимости заданного преобразования p и q, эти условия не имеют простой интерпретации в терминах пространства Винера.

Литературные указания к главе II

По-видимому, до настоящего времени общий критерий Сигала [7] содержит полностью опубликованные математические доказательства невозможности унитарного представления ряда канонических преобразований систем Вейля. Некоторый материал, подводящий к такому доказательству для определенных специальных преобразований в случае Ферми — Дирака, неявно содержится в конце статьи фон Неймана [5]. Хотя целями этой статьи являются приложения к квантованным полям, ни они, ни их представления не входят явно в изложение. Специальные примеры несколько более общего характера, частично эвристические в математическом отношении, были даны Фридрихсом [1], Хаагом [1] и Швебером и Вайтманом [1]. Строгие результаты по классификации систем Вейля были анонсированы Гордингом и Вайтманом [1], но полные доказательства до сих пор не опубликованы. Эти авторы используют представление «числами заполнения», которое имеет довольно туманную физическую интерпретацию и зависит от выбора базиса в одночастичном пространстве.

В 1950 г. автор впервые обнаружил существование неэквивалентных представлений перестановочных соотношений в ситуации, которая позволила дать одно из простейших строгих описаний этого явления в удобных конкретных терминах. Всякое унитарное преобразование, переводящее q_k в $c_k q_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, переводит также $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k<n} a_k q_k$ в $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k<n} a_k c_k q_k$. Из интерпретации канонических переменных в стандартном представлении в терминах последовательности одинаково распределенных нормальных случайных величин и известных простых результатов о суммах независимо распределенных случайных величин такой предел, как $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k<n} b_k q_k$, где b_k — вещественные числа,

будет существовать на плотном множестве тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_k b_k^2$. Очевидно, что это условие не является инвариантным относительно преобразования $b_k \to c_k b_k$. Развивая эти аргументы, можно показать, что многие реальные гамильтонианы взаимодействия теории квантованных полей могут быть континуумом неэквивалентных способов трансформированы с помощью указанного преобразования в операторы в гильбертовом пространстве с плотными областями определения. Такое отсутствие единственности имело явно негативный характер до тех пор, пока с помощью не зависящего от представления формализма не было показано, что эти операторы порождают одну и ту же динамику. Упомянутый формализм описан в гл. IV и V; по поводу единственности динамики см. гл. VII.

Эти результаты были сообщены в частных разговорах ряду лиц и в том числе ван Хову [1], который вскоре после этого сформулировал свой хорошо известный парадокс. Парадокс состоит в том, что собственные состояния «свободного» гамильтониана

$$H_0 = \sum_k (a_k p_k^2 + b_k q_k^2)$$

при подходящих постоянных a_k, b_k, c_k, d_k ($k = 1, 2, \ldots$) оказываются ортогональными к собственным состояниям «полного» гамильтониана

$$H = H_0 + H_I, \quad H_I = \sum_k (c_k p_k + d_k q_k),$$

что, конечно, противоречит обычному представлению, согласно которому собственные состояния образуют полную ортонормированную систему. Это порождает эвристически следующую ситуацию: H_0 и H_I не могут быть одновременно реализованы как операторы в гильбертовом пространстве. Парадокс усиливается представлением, по которому H_0 и H унитарно эквивалентны, так как они имеют одинаковые выражения соответственно в p, q и их линейных комбинациях, получающихся при образовании в H полных квадратов. Хотя эти линейные комбинации в действительности неэквивалентны первоначальному свободному представлению для p и q, оба множества канонических переменных действуют на одном и том же гильбертовом пространстве, и поэтому ортогональность собственных состояний продолжает выглядеть парадоксальной. В действительности же в терминах формализма, не зависящего от представления, ситуация оказывается довольно прозрачной (см. гл. V).

Глава III

КВАНТОВАНИЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Под «квантованием» мы подразумеваем переход от классической механической системы к соответствующей квантовомеханической системе. Положим, например, что классическое фазовое пространство является линейным пространством $\mathcal{M}$ конечной размерности с фундаментальной невырожденной кососимметрической формой $B(z, z')$ $(z, z' \in \mathcal{M})$. Тогда соответствующая квантовая система такова, что ее алгебра наблюдаемых порождается каноническими переменными, которые являются операторами в гильбертовом пространстве, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[R(z), R(z')] \subseteq -iB(z, z').$$

Пусть $\mathcal{M}$ вводится как множество всех векторов $(p_1, p_2, \ldots, p_n; q_1, q_2, \ldots, q_n)$ с $2n$ компонентами, а $B(z, z')$ имеет вид $\sum_k (p'_k q_k - p_k q'_k)$. К такому виду, согласующемуся с обычными обозначениями классической механики, всегда можно прийти с помощью подходящей замены переменных. Операторы $P_k = R(e_k)$ и $Q_k = R(f_k)$, где e_k и f_k образуют естественный базис в $\mathcal{M}$, удовлетворяют обычным перестановочным соотношениям Гейзенберга. Подобное определение применимо и к бесконечномерному $\mathcal{M}$, но в этом случае существование и единственность канонических переменных описанного типа a priori неясны. Мы намерены заняться этими вопросами, но, видимо, полезно предварительно указать физическую мотивировку для рассмотрения этого случая и объяснить происхождение формы $B(z, z')$. Мы начнем поэтому с обсуждения одного из простейших нетривиальных примеров соответствующей физической ситуации, с так называемого нейтрального скалярного поля, или поля Клейна — Гордона.

Состояние этого поля определяется решением φ уравнения

$$\Box\varphi = m^2\varphi,$$

где φ — вещественнозначная функция вещественных переменных x_0, x_1, x_2, x_3, а $\Box$ обозначает дифференциальный оператор $-\partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$. На самом деле это утверждение является лишь эвристическим, так как, с одной стороны, мы накладываем на функцию φ определенные граничные условия, чтобы она соответствовала реализуемому физическому состоянию, а с другой стороны, допускаем в качестве ее производных обобщенные функции. Хотя имеются важные преимущества в точном описании этого класса функций φ средствами анализа только на физическом пространстве (с общей точкой (x_0, x_1, x_2, x_3)), этот анализ много длиннее и более сложен, чем тот, что потребуется, если мы решим воспользоваться преимуществами, которые доставляет использование преобразования Фурье для рассмотрения уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Так как наша основная цель состоит не столько в том, чтобы показать, как обращаться с переменными коэффициентами в линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в вопросах квантования, сколько в построении простого примера интересного бесконечномерного фазового пространства, разумно воспользоваться этим приемом.

Поэтому мы заменяем рассмотрение φ рассмотрением некоторой функции $\tilde{\varphi}$, являющейся, грубо говоря, ее преобразованием Фурье. Функция $\tilde{\varphi}$ определена на гиперболоиде $k \cdot k = m^2$, где k — вектор (k_0, k_1, k_2, k_3) и $k \cdot k' = k_0k_0' - k_1k_1' - k_2k_2' - k_3k_3'$, так что

$$\varphi(x) = \int\limits_{k^2=m^2} e^{ix\cdot k}\,\tilde{\varphi}(k)\frac{d_3k}{|k_0|};$$

здесь d_3k обозначает $dk_1dk_2dk_3$. Указанный элемент меры $|k_0|^{-1}d_3k$ попросту совпадает с мерой, индуцированной обычной лебеговой мерой в четырехмерном пространстве. Вещественность φ требует, чтобы $\tilde{\varphi}$ была комплекснозначной и удовлетворяла соотношению

$$\tilde{\varphi}(-k)=\tilde{\varphi}(k)^*,$$

где $*$ означает комплексное сопряжение. Точный класс $\mathcal{M}$ функций $\tilde{\varphi}$, допускаемых теорией в качестве представителей действительных физических полей, совпадает тогда с множеством всех измеримых $\tilde{\varphi}$, квадратично интегрируемых на гиперболоиде относительно указанной меры. Тогда $\mathcal{M}$ оказывается, очевидно, вещественным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi})=\int\limits_{k^2=m^2}\tilde{\varphi}(k)\,\tilde{\psi}(k)^*\frac{d_3k}{|k_0|},$$

которое всегда вещественно.

Чтобы подойти к фундаментальной кососимметрической билинейной форме на $\mathcal{M}$, отметим весьма примечательный факт: в $\mathcal{M}$ имеется естественная структура комплексного гильбертова пространства. Если j обозначает преобразование $\tilde{\varphi}(k)\to i\varepsilon(k)\tilde{\varphi}(k)$, где $\varepsilon(k)=\pm 1$ в соответствии с тем, положительно или отрицательно k_0, то легко проверяется, что j является ортогональным преобразованием на $\mathcal{M}$, таким, что $j^2=-I$, где I — тождественное преобразование. Из этого чисто алгебраическим путем можно вывести, что $\mathcal{M}$ становится комплексным гильбертовым пространством, если скалярное произведение ввести формулой

$$\langle\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi}\rangle=(\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi})-i\,(j\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi}),$$

а умножение на комплексные числа определить равенством

$$(a+ib)\tilde{\varphi}=a\tilde{\varphi}+bj\tilde{\varphi}.$$

Конечно, $i\tilde{\varphi}(k)$ существует как функция, но она не входит в класс $\mathcal{M}$ и не должна смешиваться с $j\tilde{\varphi}(k)$.

Преобразование j действует на элементы из $\mathcal{M}$ в целом, а не на значения функций — представителей элементов из $\mathcal{M}$.

Эта комплексная структура тесно связана с разделеиием поля на положительно- и отрицательно-частотные части, которое обычно делается в литературе по теоретической физике. Если мы теперь положим

$$B(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = -(j\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}),$$

то B окажется, очевндно, кососимметрической формой на $\mathcal{M}$.

Классическое фазовое пространство $\mathcal{M}$ с фундаментальной кососимметрической формой B теперь готово для квантования. Возможность квантования зависит от существования и единственности канонической системы в бесконечномерном случае для данной классической линейной системы $(\mathcal{M}, B)$, требующих особого рассмотрения из-за важных отличий от конечномерного случая. Мы оставим этот совершенно общий вопрос до следующей главы и продолжим исследование специального фазового пространства, определяемого уравнением Клейна — Гордона.

В принципе уравнения поля необязательно должны обладать какими-то свойствами симметрии. Однако обычные законы сохранения энергии, импульса и других величин возможны только тогда, когда существуют подходящие свойства инвариантности. Для определения самих понятий энергии, импульса и т. д. надо уметь рассматривать симметричные случаи. И по этой, и по другим причинам важны свойства инвариантности нашей системы относнтельно группы Лоренца.

Преобразование Лоренца T: $x \rightarrow \Lambda x + a$ индуцирует очевидным образом преобразование функций φ, определенных на пространстве-времени:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(\Lambda x + a).$$

Непосредственно проверяется, что это преобразование, назовем его T', коммутирует с даламберианом $\Box$. Таким образом, оказывается, что $\mathcal{M}$ инвариантно относительно группы Лоренца. Чтобы быть совершенно точными, приведем явное выражение для действия группы на функции от импульса. Действие группы задается формулой

$$\tilde{\varphi}(k) \to e^{-i\Lambda^{-1}a\cdot k}\tilde{\varphi}(\Lambda k),$$

которая, как легко видеть, определяет ортогональное преобразование пространства $\mathcal{M}$ как вещественного гильбертова пространства.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на значение m^2, которое могло быть и отрицательным. Если мы теперь рассмотрим вещественные m, то можно показать, что введенное ортогональное преобразование коммутирует или антикоммутирует с определенным выше оператором j в зависимости от того, сохраняет или меняет преобразование Лоренца знак времени (см. ниже). В частности, собственные преобразования Лоренца представляются унитарными операторами на $\mathcal{M}$ как на комплексном гильбертовом пространстве. Если m невещественно, преобразования заведомо не будут унитарными. В связи с этим в литературе по теоретической физике говорят, что невозможно ковариантно разделить поле с мнимой массой на положительно- и отрицательно-частотную части.

Для более тщательного исследования введенного выше оператора в том случае, когда преобразования Лоренца меняют знак времени, полезно вспомнить, что существуют два характера χ_s и χ_t общей неоднородной группы Лоренца G, отображающих группу на ± 1 и различающихся тем, что они переводят в -1 соответственно пространственные отражения при сохранении знака времени и временные отражения при отсутствии пространственных. Ядро характера χ_t есть подгруппа G_0 группы G индекса 2, а именно так называемая ортохронная группа. Легко непосредственно проверить, что элементы из G_0 представляются унитарными преобразованиями. Чтобы увидеть, что оставшимся элементам группы G отвечают «антиунитарные» преобразования (т. е. такие взаимно однозначные отображения комплексного гильбертова пространства на себя, что $\langle\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\rangle \to \langle\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}\rangle$), достаточно заметить, что пространственно-временное отражение задается на $\mathcal{M}$ просто комплексным сопряжением, если $\mathcal{M}$ представлено, как и выше, функциями на пространстве импульсов. Хотя это получается совершенно естественно, иногда пытаются найти унитарное преобразование, которое могло бы соответствовать обращению времени. Можно показать, что такое унитарное преобразование построить невозможно, если пытаться сохранить у него те важные свойства, которыми обладают введенные нами преобразования.

Довольно ясно, что если $U(T)$ обозначает преобразование на $\mathcal{M}$, индуцированное преобразованием Лоренца T^{-1} (показатель -1 удобен по математическим соображениям), то

$$U(T)\,U(T')=U(TT')$$

для произвольных преобразований Лоренца T и T'. Отображение $T\to U(T)$ может быть названо полуунитарным представлением группы G на $\mathcal{M}$ (оно унитарно на ортохронной группе Лоренца). Фактически это наиболее известное неприводимое унитарное представление группы G. Стандартными методами легко показать, что оно непрерывно, т. е. что $(U(T)\tilde{\varphi},\ \tilde{\psi})$ — непрерывная функция от T при произвольных фиксированных $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$. Поэтому оно является одним из тех представлений, которые исследованы в главах, принадлежащих профессору Макки, и к этим главам мы отсылаем читателя за (нетривиальным) доказательством неприводимости. Как только последняя установлена, нетрудно продвинуться немного дальше и показать, что представление будет вещественно-неприводимым, иначе говоря, нет нетривиальных замкнутых инвариантных относительно ортохронной группы подпространств на $\mathcal{M}$ не только как на комплексном, но и как на вещественном гильбертовом пространстве. Из этого можно вывести, используя бесконечномерный аналог леммы Шура, что форма B, введенная выше, является с точностью до умножения на постоянную *единственной* непрерывной лоренц-инвариантной кососимметрической формой на $\mathcal{M}$. Так как всякое лоренц-инвариантное квантование $\mathcal{M}$ по общему плану, указанному в предыдущей главе, должно включать такую форму, последнее означает единственность правил коммутации для бозе-эйнштейновского квантования скалярного поля.

Существует другой способ описать пространство для введенного выше представления. Этот способ более известен и имеет то преимущество, что оператор j, задающий комплексную структуру, является просто умножением на комплексное число i. Если мы возьмем функцию $\tilde{\varphi}$ из $\mathcal{M}$ и ограничим ее на положительно-частотную часть (т. е. $k_0>0$) гиперболоида массы $k^2=m^2$, то мы получим функцию, обозначим ее $\tilde{\varphi}'$, удовлетворяющую условию нормируемости

$$\int\limits_{k_0>0;\ k^2=m^2} |\tilde{\varphi}'(k)|^2 \frac{d_3k}{|k_0|} < \infty.$$

Обратно, любая функция $\tilde{\varphi}$ из $\mathcal{M}$ получается естественным образом из единственной $\tilde{\varphi}'$. Множество $\tilde{\varphi}'$ образует комплексное гильбертово пространство $\mathcal{M}'$ обычного типа, в котором скалярное произведение определяется формулой

$$(\tilde{\varphi}', \tilde{\psi}') = \int \tilde{\varphi}'(k)\,\tilde{\psi}'(k)^* \frac{d_3k}{|k_0|}.$$

Функции $\tilde{\varphi}'$ обычно называют *волновыми функциями скалярной частицы*. Использование этих функций делает очевидным такой простой, но довольно фундаментальный факт, как положительность энергии поля. Энергия системы, определяемой уравнениями, инвариантными относительно временны́х сдвигов, обычно вводится в квантовой теории как самосопряженный инфинитезимальный оператор однопараметрической группы унитарных преобразований, порождаемых сдвигами аргументов волновых функций. Нетрудно проверить, что определенная таким образом энергия представляется следующим оператором на $\mathcal{M}'$: $\tilde{\varphi}'(k) \to k_0\tilde{\varphi}'(k)$. Очевидно, что этот оператор неотрицателен. Кроме того, он имеет непрерывный спектр, заполняющий интервал $[m, \infty)$.

Рассмотрим теперь взаимоотношение предыдущих строгих построений и эвристического подхода к квантованию. В своей наиболее элементарной форме последний включает в себя замену вещественнозначного решения φ уравнения Клейна — Гордона решением того же уравнения, значениями которого являются самосопряженные операторы φ. Некоторые из коммутаторов $[\varphi(x), \varphi(x')]$ должны быть отличны от нуля, иначе функция φ будет представлять ту же классическую механическую систему, что и система, описываемая функцией φ. Простейшее нетривиальное предположение об этих коммутаторах состоит в том, что они являются числами, так что

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = iD(x, x'),$$

где $D(x, x')$ вещественнозначна (из-за самосопряженности $\varphi(x)$) и не равна тождественно нулю. Чтобы эти соотношения были самосогласованы с точки зрения алгебры Ли, на формальном уровне необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Якоби и кососимметричности. Последнее дает соотношение

$$D(x, x') = -D(x', x),$$

в то время как первое выполняется автоматически, ввиду того что всякий оператор коммутирует с числом. Таким образом, формально квантование может исходить из любой функции $D(x, x')$. Но если дополнительно потребовать, чтобы перестановочные соотношения были лоренц-инвариантными, т. е. чтобы для любого ортохронного преобразования Лоренца T выполнялось соотношение

$$[\varphi(Tx), \varphi(Tx')] = [\varphi(x), \varphi(x')],$$

то $D(x, x')$ должна иметь вид

$$D(x, x') = \Delta(x - x'),$$

где Δ — функция от одного вектора, инвариантная относительно ортохронной однородной группы Лоренца. Вытекающая из лоренц-инвариантности единственность билинейной кососимметрической формы на $\mathcal{M}$ означает единственность в существенном нечетной функции Δ такого типа. Функция Δ, неявно использованная выше, является обобщенной функцией, которая с точностью до вещественного постоянного множителя задается формулой

$$\int\limits_{k^2=m^2} e^{ix\cdot k} i\varepsilon(k)\frac{d_3k}{|k_0|}.$$

Чтобы убедиться в этом, мы должны рассмотреть связь между чисто формальным квантованным полем $\varphi(x)$ и канонической системой самосопряженных операторов, заданной иа пространстве $\mathcal{M}$ с билинейной формой B. Заодно будет установлена связь между традиционным формализмом теоретической физики и предыдущей строгой формулировкой. Для φ неизвестно никакой экспериментальной физической или математической интерпретации. Еще Бор и Розенфельд в классической работе тридцать лет назад показали довольно убедительно отсутствие экспериментальной физической интерпретации, а в математических исследованиях последних тридцати лет постоянно указывалось, что $\varphi(x)$ не имеет эффективного смысла (как, скажем, dx в выражении dy/dx). Тем не менее этим понятием часто пользуются в теоретической физике, соглашаясь, впрочем, что лишь пространственно-временнóе усреднение $\int \varphi(x)f(x)d_4x$, в котором усредняющая функция f, скажем, бесконечно дифференцируема и равна нулю вне компактного множества, имеет экспериментальный и (или) математический смысл. При этом заявляют, что если помнить о необходимости усреднения, то никаких неприятностей использование $\varphi(x)$ принести не может. Однако для функции φ, очевидно, нет места в логической теории, и ее продолжающееся использованне в теоретических работах создает постоянный соблазн образовывать трилинейные произведения вроде $\varphi(x)\psi(x)\psi(x)^*$, в которых ψ — другое квантованное поле. Этим произведениям, несмотря на большую роль, которую они играют в традиционной формулировке взаимодействующих квантованных полей, нельзя придать экспериментальный или математический смысл никаким известным способом, включая и усреднение по малой области с гладкой весовой функцией. Поэтому мы будем использовать понятие $\varphi(x)$ только для того, чтобы показать связь между традиционным и строгим подходами.

Предположим теперь, что мы получили отображение R, переводящее элементы из $\mathcal{M}$ в самосопряженные операторы некоторого гильбертова пространства, причем R вещественно-линейно (т. е. $R(f+g) \subseteq R(f) + R(g)$ и $R(af) \subseteq aR(f)$, если a вещественно) и выполняются канонические перестановочные соотношения

$$[R(f), R(g)] = -iB(f, g).$$

Наши рассуждения носят сейчас эвристический характер, поэтому мы не оговариваем точной применимости выписанного соотношения. Так как R — линейная функция на $\mathcal{M}$ (как вещественном гильбертовом пространстве), то имеются основания писать

$$R(\tilde{f}) = \int_{k^2=m^2} \tilde{f}(k)\tilde{\varphi}(k)\frac{d_3k}{|k_0|},$$

где $\tilde{\varphi}$ — функция, значениями которой являются самосопряженные операторы. Конечно, это скорее способ изображения, чем математическое утверждение. Функция $\tilde{\varphi}$ есть традиционное квантованное поле, рассматриваемое как функция на импульсном пространстве. Чтобы получить поле на физическом пространстве, необходимо лишь выполнить преобразование Фурье

$$\varphi(x) = \int_{k^2=m^2} e^{ix\cdot k}\tilde{\varphi}(k)\frac{d_3k}{|k_0|}.$$

Более того, если g — произвольная функция на физическом пространстве, имеющая непрерывное преобразование Фурье и такая, что ее сужение на гиперболоид массы квадратично интегрируемо (для этого достаточно, например, чтобы g и все ее частные производные до третьего порядка были интегрируемы по пространству-времени), то символическое выражение $\int \varphi(x)g(x)\,d_4x$ допускает строгую математическую интерпретацию как $R(\tilde{h})$, где $\tilde{h}^*$ — тот элемент из $\mathscr{M}$, который совпадает на гиперболоиде массы с обратным преобразованием Фурье функции g. Справедливость последнего утверждения немедленно следует из символического использования формулы Парсеваля. Использование этой формулы легко приводит также к перестановочным соотношениям между $\varphi(x)$ и $\varphi(x')$.

Хотя наше рассмотрение ограничивалось случаем уравнения Клейна — Гордона, оно с небольшими изменениями применимо и ко всякой обычной релятивистской частице, в особенности к частице с «целым спином», такой, как фотон. В частности, квантование уравнений Максвелла может быть проведено совершенно аналогично. Мы обсудим поле фотонов и электронное волновое поле не столько из-за того, что при этом возникают новые значительные проблемы, сколько из-за важности этих полей. Правда, в случае электрона статистика заменяется ферми-дираковской, что, грубо говоря, сводится к замене знака, кососимметрической формы симметрической и т. д. Перестановочная функция Δ в случае общей системы, определяемой линейным гиперболическим дифференциальным уравнением в частных производных, заменяется обобщенной функцией, которая фактически является функцией Римана для этого уравнения. В случае переменных коэффициентов мы должны иметь дело с функцией $D(x, x')$ двух векторов. Для уравнения второго порядка она может быть определена несколько эвристическим образом с помощью следующей задачи Коши (задачи с начальными условиями): $D(x, x')$ для каждого фиксированного x' как функция от x удовлетворяет этому уравнению; $D(x, x')|_{x_0=x_0'}=0$ и

$$[\partial D(x, x')/\partial x_0]_{x_0=x_0'}=\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'), \quad \text{где} \quad \mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$$

Добавим также в связи с построением перестановочной функции, что ее можно хорошо известным способом использовать для решения задачи Коши с произвольными начальными условиями. В достаточно простых случаях можно строго показать, что эта функция существует как обобщенная, но вообще ее особенности слишком сильны, и точные глобальные формулировки, пригодные для общих гиперболических уравнений, еще не получены.

Обычную релятивистскую частицу или поле можно описать с помощью гиперболической системы уравнений с постоянными коэффициентами, служащей для выделения инвариантного относительно группы Лоренца подпространства в прямом произведении пространства всех скалярных функций на пространстве-времени и подпространства конечномерного представления группы Лоренца (или так называемого «спинорного пространства»). Элементарности частицы или поля соответствует неприводимость представления группы Лоренца, определяемого этой системой уравнений. Наиболее известными из таких уравнений являются уравнения Максвелла, Дирака и только что рассмотренное уравнение Клейна — Гордона. С точки зрения математики они являются простейшими, если отвлечься от определенных усложнений, возникающих из-за обращения в нуль массы фотона. Соответствующие конечномерные представления обладают инвариантиыми билинейными симметрическими формами, которые обязательно должны быть неопределенными, так как группа Лоренца не имеет нетривиального конечномерного ортогонального представления. Замечательным и важным свойством релятивистских уравнений является существование положительно определенной симметрической билинейной формы на пространстве решений, хотя a priori можно ожидать только неопределенной формы. Фактически сужение этой неопределенной формы на подпространство волновых функций с «вещественной массой» (можно ожидать, что все физические поля лежат в этом подпространстве) превращает ее в определенную.

Уравнения Максвелла представляют собой хотя и несколько нетипичный, но, конечно, наиболее важный частный случай, и рассмотрение общего нескалярного представления группы Лоренца не содержит никаких дополнительных сложностей. Уравнения Максвелла можно записать или в терминах потенциалов, или в терминах напряженностей поля, однако в связи с дальнейшим обсуждением квантовой электродинамики следует использовать потенциалы. Рассмотрим пространство всех функций $A_k(x)$ на пространстве-времени ($k=0, 1, 2, 3$; $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$); значения этих функций лежат в вещественном векторном пространстве представления группы Лоренца (это пространство изоморфно четырехмерному пространству-времени, если отвлечься от того, что подгруппа сдвигов группы Лоренца действует теперь тривиально). Это пространство далеко не является неприводимым относительно группы Лоренца, оно разлагается в прямой интеграл, или непрерывную прямую сумму, подпространств. Эти разложения в существенном определяются с помощью инвариантного квадратичного в инфинитезимальных операторах группы Лоренца выражения и родственных выражений, которые должны действовать как постоянные в неприводимом подпространстве. Отражением этих требований являются дифференциальные уравнения в частных производных, определяющие элементарные векторные частицы. Изложенный подход можно развить строго, но для краткости мы просто опишем уравнения Максвелла и лоренц-инвариантные формы на пространстве их решений. Это будет сделано в терминах функций на пространстве импульсов.

Рассмотрим класс $\mathscr{C}$ всех комплекснозначных измеримых функций $A_i(k)$, заданных на конусе C: $k^2=0$ ($k=(k_0, k_1, k_2, k_3)$, $k^2=k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2$), удовлетворяющих почти всюду на конусе условию самосопряженности

$$A_i(-k)=A_i(k)^*$$

и линейному соотношению

$$k\cdot A(k)=0$$

(здесь используется лоренц-инвариантное скалярное произведение). То, что функции рассматриваются на конусе, соответствует уравнениям $\square A_i=0$ ($i=0, 1, 2, 3$) в физическом пространстве; линейное соотношение переходит в дополнительное условие $\sum\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=0$. Из неравенства Коши — Шварца и из дополнительного условия без труда получаем

$$A(k)\cdot A(k)\geqslant 0.$$

Тем самым определено подмножество $\mathscr{L}$ всех элементов A из $\mathscr{C}$, для которых величина

$$\langle A,\ A\rangle=\int\limits_{C} A(k)\cdot A(k)\,dk$$

конечна. Здесь dk — единственный лоренц-инвариантный элемент объема на C, а именно $|k_0|^{-1}dk_1dk_2dk_3$. Обозначим через $\mathscr{N}$ множество таких элементов A из $\mathscr{L}$, что $\langle A,\ A\rangle=0$. Тогда $\mathscr{N}$ — подпространство в $\mathscr{L}$, и факторпространство $\mathscr{L}/\mathscr{N}$ будет вещественным гильбертовым пространством $\mathscr{H}$ — пространством «нормируемых фотонных полей», если скалярное произведение для любых его элементов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$ определить формулой

$$\langle\tilde{A},\ \tilde{A}'\rangle=\int\limits_{C} A(k)\cdot A'(k)\,dk.$$

Здесь A и A' — произвольные представители из $\mathscr{L}$ элементов $\tilde{A}$ и $\tilde{A}'$. В обычной теории неоднозначность в выборе элементов A и A' называется «калибровочной инвариантностью второго рода».

Как и в случае уравнения Клейна — Гордона, имеется единственная комплексная структура, которую можно ввести в пространстве:

$$j\colon\ \tilde{A}\to\tilde{A}',\ \text{где}\ A'_j(k)=i\varepsilon(k)A_j(k)\quad(j=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Легко проверяется, что оператор j корректно определен на $\mathscr{L}/\mathscr{N}$. Нетрудно убедиться в том, что $j^2=-I$, $\langle j\tilde{A},\ j\tilde{A}'\rangle=\langle\tilde{A},\tilde{A}'\rangle$ и j коммутирует с собственной группой Лоренца. Тем самым $\mathscr{H}$ является комплексным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\tilde{A},\ \tilde{A}')=\langle A,\ A'\rangle+i\langle jA,\ A'\rangle.$$

Все построения имели лоренц-инвариантный характер, так что действие группы Лоренца на $\mathscr{H}$ как комплексном гильбертовом пространстве порождает унитарное представление собственной неоднородной группы Лоренца. Элементарность фотона соответствует неприводимости в существенном этого представления. Более точно, $\mathcal{H}$ распадается на два неприводимых подпространства, соответствующих разным поляризациям; эти подпространства меняются местами при пространственных отражениях (т. е. при $x_0 \to x_0$ и $x_r \to -x_r$ для $r \neq 0$). Единственное математически трудное место здесь — это неприводимость; это свойство снова оказывается частным случаем неприводимости, доказанной в приложении профессором Макки для некоторого общего класса представлений полупрямых произведений групп. Суммируем:

Максвелловское представление. *Вещественные нормируемые решения уравнений Максвелла в вакууме (с дополнительным условием Лоренца) образуют комплексное гильбертово пространство, на котором ортохронная группа Лоренца действует непрерывным неприводимым унитарным образом. Временнóе отражение действует как сопряжение. Энергия является неотрицательным оператором с непрерывным спектром* $[0, \infty)$.

Последние два утверждения не были доказаны выше. Положительность энергии проще всего увидеть, используя представление, в котором j действует как обычное умножение на число i. Это представление фактически является традиционным положительно-частотным представлением для нормируемых фотонных волновых функций. Отображение $A_r(k) \to B_r(k) = (1/2)(A_r(k) + A_r(-k))$ переводит $\mathcal{H}$ (вещественные фотонные поля) во множество комплекснозначных функций на положительно-частотном конусе C_+, $k_0 > 0$ (комплексные положительно-частотные поля), при этом скалярное произведение (A, A') переходит в обычное выражение

$$(B, B') = \int_{C_+} B(k) \cdot B'(k)\, dk,$$

а j — в умножение на i. Таким образом, мы имеем обычное гильбертово пространство (точнее подпространство в нем) всех комплексно-векторнозначных функций на C_+ с соответствующей нормой. Предыдущее утверждение следует из того, что энергия представляется теперь умножением на k_0.

Временнóе отражение, т. е. преобразование $x_0 \to -x_0$ и $x_r \to x_r$, нельзя представить унитарным оператором, так как оно меняет знак энергии. Существование унитарного представления означало бы тогда унитарную эквивалентность операторов с положительным и отрицательным спектрами. То, что операция отражения действует как сопряжение на пространстве $\mathscr{H}$ вещественных нормируемых фотонных полей, устанавливается непосредственной проверкой.

Уравнение Дирака, или релятивистское волновое уравнение для частицы со спином 1/2, в качественном отношении наиболее заметно отличается от уравнений Максвелла и Клейна — Гордона тем, что оно дает не представление (однозначное) собственной группы Лоренца, а представление ее односвязной накрывающей группы, и соответствующая энергия не является неотрицательной. Эти отличия связаны с тем обстоятельством, что дираковским частицам соответствует квантование не Бозе — Эйнштейна, а Ферми — Дирака. Мы рассмотрим уравнение Дирака только в общих чертах отчасти ради краткости, а отчасти из-за того, что нас в первую очередь интересуют не алгебраические, а аналитические проблемы теории квантованных полей.

Соответствующее конечномерное представление, так называемое «спинорное» представление, довольно необычно и нелегко описывается в интуитивных терминах. Для того чтобы подойти к этому представлению, рассмотрим вещественное линейное пространство M конечной четной размерности с выделенной вещественной невырожденной симметрической формой (x, y). Ассоциированную клиффордову алгебру можно определить, в существенном однозначно, как алгебру над полем комплексных чисел, порожденную единицей и элементами $f(x)$ ($x \in M$, f — линейная функция на M), удовлетворяющими соотношениям

$$f(x)f(y)+f(y)f(x)=(x, y).$$

Сопряжение на этой алгебре является единственной антиинволюцией, не меняющей элементы $f(x)$. Известно, что клиффордова алгебра изоморфна алгебре всех линейных преобразований на линейном пространстве N размерности 2^m, где m равно половине размерности M. На N выделяется невырожденная эрмитова форма, сопряжение относительно которой соответствует сопряжению в клиффордовой алгебре. Спинор является элементом из N, а спинорное поле — функцией на пространстве-времени со значениями в N.

Если теперь O — какое-нибудь преобразование на M, сохраняющее основную симметрическую форму, т. е. «псевдоортогональное» преобразование, то отображение $f(x)\to f(Ox)$ очевидным образом порождает автоморфизм клиффордовой алгебры. Тем самым возникает представление псевдоортогональной группы на M автоморфизмами клиффордовой алгебры. С другой стороны, так как каждый автоморфизм полной матричной алгебры — внутренний, преобразованию O сопоставляется линейное преобразование T_O на спинорном пространстве, индуцирующее соответствующий автоморфизм матричной алгебры. Преобразование T_O определено с точностью до скалярного множителя, но так как его можно выбрать унитарным относительно формы на N, можно считать модуль этого скаляра равным 1. Возвращаясь к описанному выше представлению, получаем такой скаляр $c_{O,O'}$, что

$$T_O T_{O'} = c_{O,O'} T_{OO'}.$$

Более внимательное исследование показывает, что при подходящем выборе T_O скаляры $c_{O,O'}$ могут быть равными ± 1, но невозможно выбрать T_O так, чтобы получить точное представление с $c_{O,O'}=1$. Последнее обстоятельство объясняет термин «двузначное представление». По непрерывности $c_{O,O'}$ будет единицей, если преобразования O и O' достаточно близки к тождественному. Таким образом, получается локальное представление, которое затем распространяется на односвязную накрывающую группу псевдоортогональной группы. Можно показать, что она накрывается дважды, если размерность M больше двух.

В том специальном случае, когда M — пространство-время Минковского и основная форма — обычная релятивистская, псевдоортогональная группа является однородной группой Лоренца, и мы приходим к представлению накрывающей группы в четырехмерном спинорном пространстве, на котором имеется выделенная индефинитная невырожденная эрмитова форма. Уравнение Дирака описывает неприводимое инвариантное подпространство в прямом произведении этого пространства и пространства всех скалярных функций на пространстве-времени. Действие группы Лоренца здесь включает и операции отражения. Выберем единичные векторы e_r $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ в направлениях x_r и положим $\gamma_r=f(e_r)$, так что $\gamma_r\gamma_s+\gamma_s\gamma_r=2g_{rs}$, где $g_{rs}=0$ при $r\neq s$, $g_{00}=-1$ и $g_{rr}=1$ $(r>0)$. Обозначим через $\mathscr{C}$ множество всех таких измеримых функций $\psi(k)$ на «гиперболоиде массы» C_m: $k^2=m^2$ в спинорном пространстве, что $\nabla\psi+im\psi=0$, где $\nabla=\sum\gamma_r k_r$, и для которых конечен интеграл

$$\|\psi\|^2=\int\limits_{C_m}\langle\psi(k),\ \psi(k)\rangle\,dk.$$

Здесь $\langle.\ ,\ .\rangle$ обозначает лоренц-инвариантную эрмитову форму на пространстве спиноров и dk — лоренц-инвариантный элемент меры на C_m. Введенное скалярное произведение с необходимостью будет неотрицательным в силу уравнения Дирака. Ортохронная группа Лоренца действует на $\mathscr{C}$ унитарно, непрерывно и вместе с антиунитарным временны́м отражением неприводимо.

Легко видеть, что энергетический спектр расположен от m до ∞ и от $-\infty$ до $-m$. Проблема, связанная с отрицательными энергиями, устраняется за счет квантования Ферми — Дирака, вследствие которого поле будет иметь положительную энергию. С другой стороны, если дираковская частица квантуется по статистике Бозе — Эйнштейна, ее энергия отрицательна, что дает способ вывести правильную статистику для дираковской частицы из общих физических принципов. Этот результат принадлежит Паули.

Примечания к главе III

Представляет интерес вопрос, содержат ли дифференциальные уравнения в частных производных для релятивистских элементарных частиц что-нибудь, что уже не заключалось бы в их трансформационных свойствах. Бесспорно, что само представление (точнее класс унитарно эквивалентных представлений) определяет операторы энергии и импульса (как инфинитезимальные операторы представления). Бесспорно, что представление является единственным характерным свойством стандартной релятивистской частицы. Нет сомнений и в том, что не существует непосредственных перспектив для экспериментального истолкования численных значений волновых функций этих частиц как функций на пространстве-времени даже после подходящего усреднения по пространственно-временной области. Далее, так называемые квантовые числа и правила квантования для свободного поля таких частиц определяются связанным с ними унитарным представлением группы Лоренца. В целом теоретическое определение разновидностей релятивистских элементарных частиц как неприводимых унитарных представлений группы Лоренца представляется физически оправданным.

С другой стороны, обычные взаимодействия между такими частицами нелегко описать в терминах соответствующих унитарных представлений группы Лоренца. Фактически понятие «локального» взаимодействия, которое обычно считается единственным имеющим физический смысл, явно зависит от описания векторов в пространстве представления как функций на пространстве-времени. Однако в действительности взаимодействие не является свойством свободных частиц. Более того, в настоящее время не существует математически строгого способа сформулировать «локальное» релятивистское взаимодействие.

Во всяком случае, «свободная физическая частица» является скорее аналитическим понятием, чем реальным объектом, и нужно иметь для этого понятия четкое теоретическое определение. В то же время необходимо помнить, что такие объекты действительно полезны в связи с более сложными структурами и, по всей вероятности, возникают как «кванты» нелинейных полей. Характерной чертой квантов обычных полей является то, что можно определить полный набор квантовых чисел (т. е. инфинитезимальных операторов максимальной абелевой алгебры наблюдаемых на одночастичном пространстве $\mathscr{H}$) и все они имеют теоретико-групповое происхождение.

Литературные указания к главе III

Хотя связь основных релятивистских уравнений с неприводимыми унитарными представлениями группы Лоренца известна более двух десятилетий, детальное изложение этого материала в книгах с точки зрения представлений групп, по всей вероятности, отсутствует. Вслед за тем, как была оценена роль теории представлений групп в атомной физике, в особенности в связи с успехами уравнения Дирака, многие ученые, среди них Дирак и фон Нейман, по-видимому, осознали значение теории унитарных представлений группы Лоренца для релятивистской квантовой теории. Такие представления обязательно бесконечномерны в противоположность привычным конечномерным неунитарным представлениям. Большое число представлений, интересных с физической точки зрения, было получено в конце 20-х — начале 30-х годов, а систематическое исследование всех унитарных представлений осуществил Вигнер [1] в работе, выполненной на замечательно высоком уровне строгости сравнительно с большинством работ по теоретической физике. Теория Макки применима к так называемым полупрямым произведениям довольно общих классов групп. Она применима, в частности, к группе Лоренца, которая является полупрямым произведением однородной группы Лоренца и группы всех сдвигов пространства-времени. Соответствующие результаты включают в себя результаты Вигнера и в то же время создают для них математически безупречную основу.

Глава IV

ОБЩАЯ СТРУКТУРА ПОЛЕЙ БОЗЕ — ЭЙНШТЕЙНА

В предыдущей главе мы обсудили некоторые детали, относящиеся к структуре классического фазового пространства нейтральной скалярной релятивистской частицы и нескольких более сложных релятивистских частиц. Было слегка затронуто квантование нейтрального скалярного поля, но фундаментальные вопросы существования и единственности системы канонических операторов остались открытыми. Эти вопросы совершенно не зависят от специального характера поля и решаются одинаково для скалярных мезонов, фотонов и даже для полей, определенных на пространствах, отличных от обычного пространства-времени и не связанных с дифференциальными уравнениями в частных производных. Важно задать линейное пространство $\mathcal{M}$, которое может мыслиться как пространство классических полей определенного типа, и кососимметрическую форму B (а может быть, какую-нибудь другую подобную структуру) на $\mathcal{M}$. Целью настоящей главы и является проблема квантования с этой общей точки зрения. Такая общность полезна не только потому, что позволит охватить больше различных полей, она нужна для прояснения логической стороны и для придания всей трактовке более компактного вида.

Итак, пусть $\mathcal{M}$ — заданное вещественное линейное пространство, а B — невырожденная кососимметрическая форма на $\mathcal{M}$. Невырожденность означает, что единственным вектором z, для которого $B(z, z')=0$ при всех z' из $\mathcal{M}$ является $z=0$. Если читатель предпочитает иметь перед глазами конкретный пример, он может мыслить $\mathcal{M}$ как пространство всех вещественных нормируемых волновых функций скалярных мезонов с определенной массой, а B — как билинейную форму, заданную интегральным выражением, ядро которого — обычная перестановочная функция. *Каноническая система Бозе — Эйнштейна*, или для краткости и по математическим причинам *система Вейля*, на $(\mathcal{M}, B)$ определяется чисто математически как отображение $z \to U(z)$ пространства $\mathcal{M}$ во множество унитарных операторов на комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$. Предполагается, что отображение непрерывно в слабой операторной топологии, если z рассматривать только как элемент конечномерного подпространства в $\mathcal{M}$, и удовлетворяет «соотношениям Вейля»

$$U(z)\,U(z') = e^{(i/2)\,B(z,\,z')}\,U(z+z').$$

Для всякой такой системы $[U(tz);\ -\infty<t<\infty]$ является непрерывной однопараметрической унитарной группой и потому порождается самосопряженным оператором $R(z)$. Это и есть так называемые переменные по́ля; если читатель желает, он может представлять себе $R(z)$ усреднениями квантованного скалярного мезонного поля с некоторой весовой функцией (преобразование Фурье которой совпадает с z на гиперболоиде массы).

A priori естественно и в свете дальнейших результатов оказывается полезным рассмотреть существование, единственность и трансформационные свойства канонических систем Бозе — Эйнштейна. Конечномерный случай уже обсуждался, так что в этой главе будет иметься в виду прежде всего бесконечномерный случай.

Начнем с вопросов существования и рассмотрим ситуацию для конечномерного подпространства $\mathcal{N}$ пространства $\mathcal{M}$, считая, что сужение формы B на $\mathcal{N}$ невырождено. Мы знаем, что существует каноническая система $R_{\mathcal{N}}(z)$, определенная для всех z из $\mathcal{N}$ и удовлетворяющая соотношениям Вейля. Множество всех ограниченных функций от $R_{\mathcal{N}}(z)$ образует некоторую C^*-алгебру, которую мы обозначим $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$. Если $\mathcal{N}'$ — конечномерное подпространство, содержащее

$\mathcal{N}$, и форма B на $\mathcal{N}'$ невырождена, то сужение на $\mathcal{N}$ канонической системы $R_{\mathcal{N}'}(z)$, определенной для всех z из $\mathcal{N}'$, обладает теми же общими свойствами, что и $R_{\mathcal{N}}(z)$. Из теоремы единственности Стоуна — фон Неймана вытекает, что должен существовать алгебраический изоморфизм из $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ в $\mathcal{A}_{\mathcal{N}'}$, который в существенном переводит $R_{\mathcal{N}}(z)$ в $R_{\mathcal{N}'}(z)$. Слова «в существенном» добавляются потому, что операторы $R(z)$ неограничены и сами не входят в $\mathcal{A}$, так что изоморфизм переводит друг в друга $f(R_{\mathcal{N}}(z))$ и $f(R_{\mathcal{N}'}(z))$, где f, например, пробегает все ограниченные непрерывные функции.

Нетрудно показать, что каждый вектор z из $\mathcal{M}$ содержится в некотором подпространстве $\mathcal{N}$, на котором форма B невырождена, и что, более того, множество всех таких подпространств упорядочено в том смысле, что для любых двух таких подпространств $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$ найдется такое же третье $\mathcal{N}''$, которое содержит и $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$. Далее, упомянутый выше изоморфизм из $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ в $\mathcal{A}_{\mathcal{N}'}$ для случая $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ будет единственным вследствие того, что автоморфизм алгебры $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$, сохраняющий $R_{\mathcal{N}}(z)$, единствен. Это следует в свою очередь из существования неприводимого представления для $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$. В результате мы имеем нечто вроде возрастающей цепочки подалгебр. Точнее, при $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$ существует изоморфизм алгебры $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ в $\mathcal{A}_{\mathcal{N}'}$; назовем его $\theta_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}$. Если, кроме того, $\mathcal{N}' \subset \subset \mathcal{N}''$, то

$$\theta_{\mathcal{N}'\mathcal{N}''}\theta_{\mathcal{N}\mathcal{N}'} = \theta_{\mathcal{N}\mathcal{N}''};$$

можно сказать, что различные вложения $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ в $\mathcal{A}_{\mathcal{N}'}$ согласованы друг с другом.

Это позволяет образовать алгебраический «предел прямого спектра» $\mathcal{A}_0$ упорядоченной системы алгебр с изоморфизмами-вложениями $[\mathcal{A}_{\mathcal{N}}, \theta_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}]$. Имеется вложение каждого $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ в $\mathcal{A}_0$, эти различные вложения очевидным образом согласованы друг с другом при помощи $\theta_{\mathcal{N}\mathcal{N}'}$, и $\mathcal{A}_0$ является теоретико-множественной суммой образов $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ при вложениях. Из этой конструкции ясно, что $\mathcal{A}_0$ — алгебра с инволюцией, порождаемой операцией сопряжения. Каждый элемент A из $\mathcal{A}_0$ имеет норму, а именно границу его как элемента из какой-нибудь алгебры $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ (которая на самом деле не зависит от $\mathcal{N}$). Эта норма обладает характеристическими свойствами операторных норм: $\|AA^*\| = \|A\| \|A^*\|$ и др. Алгебра $\mathcal{A}_0$ не будет полной относительно этой нормы, но может быть пополнена—обозначим это пополнение через $\mathcal{A}$; упомянутые свойства нормы при этом сохраняются. Из абстрактного описания C^*-алгебр, принадлежащего Гельфанду и Наймарку (или из прямого исследования пределов конкретных C^*-алгебр), следует, что $\mathcal{A}$ будет C^*-алгеброй. Тем самым существует такое гильбертово пространство $\mathcal{K}$ (не обязательно единственное, и фактически далеко не единственное), что алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна (по отношению к алгебраическим операциям и норме) множеству ограниченных операторов на $\mathcal{K}$.

Таким образом, мы получаем отображение $z \to U(z)$ пространства $\mathcal{M}$ во множество унитарных операторов на пространстве $\mathcal{K}$, и при этом удовлетворяются соотношения Вейля. Однако построенное отображение a priori может не удовлетворять требованию непрерывности, входящему в определение системы Вейля. Хотя это обстоятельство выглядит мало существенным, однако непрерывность определенно не будет иметь места для любого пространства представления $\mathcal{K}$, если даже она и есть для некоторого $\mathcal{K}$. Во всяком случае, неясно, всегда ли существует такое $\mathcal{K}$, для которого выполняется условие непрерывности. Этот вопрос эквивалентен вопросу о существовании на $\mathcal{A}$ *регулярного* состояния, т. е. такого состояния, сужение которого на любую алгебру $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ регулярно в описанном выше смысле. Из общей теории вытекает лишь существование какого-либо состояния, но оно, возможно, совершенно лишено всяких свойств регулярности.

Все это более важно, чем кажется на первый взгляд. Очевидно, для того чтобы построить систему Вейля, необходимы дальнейшие предположения о $(\mathcal{M}, B)$. Предположение о том, что на $\mathcal{M}$ имеется положительно определенная вещественная симметрическая форма, относительно которой B непрерывно, с одной стороны, выполняется в конкретных примерах, а с другой стороны, является довольно слабым в теоретическом отношении. Пока мы интересуемся только вопросами существования, этот весьма общий случай сводится к специальному случаю, когда $\mathscr{M}$ допускает структуру унитарного (не обязательно полного комплексного гильбертова) пространства, причем B задается как мнимая часть скалярного произведения. Для краткости, а также ввиду чрезвычайной важности указанной специальной ситуации для приложений (во многих из них существует имеющая физическое значение выделенная структура комплексного гильбертова пространства) мы обсудим только этот случай.

Теорема существования. *Для всякого комплексного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ существует система Вейля $(\mathscr{H}, B)$, где $B(z, z') = \operatorname{Im}\langle z, z'\rangle$, а $\langle z, z'\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathscr{H}$.*

Конечно, сужение системы Вейля на подмножество снова будет системой Вейля, так что аналогичное утверждение для случая неполного унитарного пространства автоматически выводится из сформулированной теоремы. Всякое доказательство зависит от явной или неявной конструкции регулярного состояния для описанной выше алгебры и приводит даже к большему, чем сформулированная выше теорема. Фактически вместе с доказательством теоремы мы можем получить конкретное представление системы Вейля, так называемое представление свободного поля. Это представление будет подробно обсуждаться в следующей главе, и здесь достаточно только кратко указать, как его можно получить.

Для конечномерного подпространства $\mathscr{N}$ из $\mathscr{M}$ существует единственное чистое состояние алгебры $\mathscr{A}_{\mathscr{N}}$, регулярное в описанном выше смысле и инвариантное относительно всех унитарных преобразований $\mathscr{N}$ на себя (или скорее относительно всех автоморфизмов $\mathscr{A}_{\mathscr{N}}$, индуцированных этими унитарными преобразованиями). Единственность этого состояния

$E_{\mathcal{N}}$ приводит к тому, что различные $E_{\mathcal{N}}$ будут согласованы друг с другом; если $\mathcal{N}'$ — какое-нибудь другое комплексное линейное подпространство в $\mathcal{H}$ и если $\mathcal{N}''$ содержит и $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}'$, то сужение $E_{\mathcal{N}''}$ на $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ (или на $\mathcal{A}_{\mathcal{N}'}$) обязательно согласуется с $E_{\mathcal{N}}$ (или $E_{\mathcal{N}'}$) ввиду приведенной теоретико-групповой характеристики этих состояний. На этом пути получается единственный положительный линейный функционал E_0 на $\mathcal{A}_0$, который является расширением всех $E_{\mathcal{N}}$ и который легко расширяется до состояния E алгебры $\mathcal{A}$. Этот функционал будет регулярным в силу построения. Представление алгебры $\mathcal{A}$, ассоциированное с E в духе общего взаимно однозначного соответствия между состояниями и представлениями C^*-алгебр, будет давать систему Вейля. Отметим кстати, что без выделенной положительно определенной симметрической формы на $\mathcal{M}$ (в рассматриваемом случае она задается вещественной частью скалярного произведения) нет единственного способа выбрать состояния $E_{\mathcal{N}}$, т. е. образовать согласованное семейство таких состояний.

Обратимся теперь к вопросу единственности. Как отмечалось в гл. II, нельзя ожидать единственности в традиционной форме. Даже если устранить кратность требованием неприводимости, это еще не приведет к единственности. Можно показать, что данные в гл. II примеры неприводимы, но они унитарно неэквивалентны. Разрешение этой трудности столь просто концептуально, что в ретроспективном плане кажется, что оно должно было быть открыто в самом начале работы над этой проблемой, хотя бесспорно, что успешное развитие теории C^*-алгебр сделало эти вопросы гораздо более простыми, чем они были в то время. Интуитивная идея, на которой основано решение вопроса, состоит в том, что основными концептуально физически измеримыми величинами являются сами канонические переменные пóля и что, кроме того, должны быть измеримы гладкие ограниченные функции от *конечного* числа канонических переменных (но не обязательно функции от *бесконечного* множества таких переменных). Наблюдаемыми следует считать также пределы равномерно сходящихся последовательностей ограниченных наблюдаемых, так как их математические ожидания во всяком состоянии можно измерить с произвольной точностью с помощью наблюдаемых, образующих последовательность. Более точно, вначале в качестве первичных наблюдаемых берутся все ограниченные функции от конечного множества переменных поля, а затем (это в основном дело математического удобства) в качестве вторичных наблюдаемых допускаются пределы равномерно сходящихся последовательностей первичных наблюдаемых. Физически это естественная процедура, весьма наивная в математическом отношении. Тем не менее оказывается, что ее техническое применение, хотя и довольно сложное, позволяет преодолеть и объяснить отмеченные затруднения с единственностью.

Намеченная процедура близка к той, которая первоначально исследовалась в связи с вопросом существования. Отмечалось, что ее сравнительная математическая эффективность обусловлена достоинствами теории C^*-алгебр (т. е. равномерно замкнутых и самосопряженных алгебр). Хотя разница между определениями таких алгебр и колец операторов в смысле Меррея и фон Неймана относится только к топологии, они оказываются очень различными в своих качественных математических свойствах, что в настоящей ситуации сильно подчеркивает уместность первых по сравнению со вторыми. Решающее различие состоит, грубо говоря, в том, что слабая аппроксимация операторов в противоположность равномерной не имеет непосредственного физического смысла для соответствующих наблюдаемых. Слабая аппроксимация зависит от специального представления канонических переменных и разрушается при расширении рассматриваемой физической системы, в то время как равномерная аппроксимация не зависит от специального представления и не меняется при расширении физической системы.

Чтобы дать строгую формулировку, мы определим *наблюдаемые поля* для данной системы Вейля как ограниченные функции от любого конечного множества канонических переменных и как равномерные пределы этих функций. Множество всех таких операторов может быть названо алгеброй наблюдаемых поля для данной системы. Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема единственности. *Для любых двух систем Вейля R и R' на классическом линейном фазовом пространстве $(\mathcal{M}, B)$ существует единственный алгебраический изоморфизм между соответствующими алгебрами наблюдаемых поля, который для всех элементов z из $\mathcal{M}$ переводит в существенном $R(z)$ в $R'(z)$.*

Мы не будем входить в доказательство: оно хотя и не длинно, но довольно сложно. Этот результат означает, что имеется *единственная* абстрактная C^*-алгебра, скажем $\mathcal{A}$, ассоциированная с данной классической линейной системой $(\mathcal{M}, B)$ (при условии, что существует хотя бы одна система Вейля на $(\mathcal{M}, B)$). Эта алгебра может быть названа алгеброй наблюдаемых поля или, для краткости, алгеброй Вейля на $(\mathcal{M}, B)$. Математик, естественно, спросит, можно ли дать чисто алгебраическую характеристику алгебры Вейля, не зависящую от использования конкретного представления в гильбертовом пространстве. Ответ в настоящее время не ясен, ясно лишь, что на этом пути имеются большие трудности.

Для трактовки временнóго обращения и некоторых других операций обычно используют антиунитарные преобразования, поэтому полезно иметь следующий вариант теоремы единственности: если R и R' — те же системы Вейля, что и в теореме единственности, с той разницей, что R' ассоциировано с формой $-B$, то справедлив и результат теоремы с заменой обычного изоморфизма сопряженно линейным изоморфизмом колец.

Интересно отметить, что эта ситуация в принципе проще, чем в классической механике. Легко показать на примерах, что для вырожденной формы B ничего нельзя сказать о единственности. Чем больше вырождена форма, тем более классической является система; обращение формы в нуль соответствует полностью классической системе. Таким образом, только полностью квантовомеханическая система допускает такое простое математическое описание.

Итак, мы получили единственный и удовлетворительный с общей феноменологической точки зрения способ «квантования» классического линейного поля. Теперь остается исследовать кинематические, статистические и динамические аспекты этого способа квантования.

Обратимся вначале к кинематической ситуации. Формальным общим местом в теории квантованных полей является утверждение, что всякое унитарное преобразование на классическом (или «одночастичном») пространстве $\mathcal{M}$ (предположим здесь, что $\mathcal{M}$ — гильбертово пространство) индуцирует соответствующее преобразование на пространстве векторов состояния поля. В важных случаях, таких, как сдвиги в пространстве-времени, это свойство часто устанавливают, фактически выписывая довольно громоздкие символические выражения, к несчастью, лишенные математического смысла и каких-либо перспектив в этом отношении. Эти выражения получаются подстановкой в классические формулы для энергии-импульса и подобных величин вместо классического поля значений соответствующего квантованного поля. Оказывается, однако, что преобразования поля, индуцированные классическими движениями, допускают простую и строгую трактовку с помощью теоремы единственности.

Пусть T будет обратимым линейным преобразованием на $\mathcal{M}$, сохраняющим форму B (так называемым «симплектическим» преобразованием), и пусть f — произвольный линейный функционал на $\mathcal{M}$. Если R — какая-нибудь система Вейля на $(\mathcal{M}, B)$, то ясно, что

$$R'(z) = R(Tz) + f(z)I \quad (z \in \mathcal{M})$$

также будет системой Вейля (здесь I обозначает тождественный оператор). Используя краткий термин «движение» для того, что мы раньше называли «физическим автоморфизмом», мы приходим с помощью теоремы единственности к следующему утверждению.

Следствие о движениях алгебры Вейля. *Для произвольного симплектического преобразования T на классическом фазовом пространстве $\mathcal{M}$ с невырожденной кососимметрической формой B на $\mathcal{M}$ и для произвольного линейного функционала f существует единственное движение алгебры Вейля, которое при всех z из $\mathcal{M}$ переводит в существенном $R(z)$ в $R(Tz)+f(z)I$.*

В этой формулировке R — совершенно произвольная каноническая система. Если мы имеем дело с *абстрактной* алгеброй наблюдаемых поля, приведенный результат выполняется для каждой конкретной канонической системы на $(\mathcal{M}, B)$.

Этот результат означает, что, хотя, вообще говоря, и не существует оператора $\Gamma(T)$, соответствующего симплектическому преобразованию T и действующего на векторы состояния в специальном представлении, символическое выражение

$$\Gamma(T)X\Gamma(T)^{-1}$$

все-таки имеет строгое истолкование для всех наблюдаемых поля X. Таким образом, хотя для векторов состояния можно говорить только о символическом движении, существует корректно определенное движение наблюдаемых. Следует отметить, что движение *состояний* в противоположность движениям *векторов состояния* также корректно определено: состояния преобразуются в отношении к наблюдаемым контраградиентно.

Если оценивать предыдущее следствие единственности с точки зрения намерения восполнить кинематический пробел релятивистской теории поля и показать, что группа Лоренца действует как группа движений наблюдаемых поля, то оно окажется более чем адекватным. Оно применимо с одинаковым успехом и к преобразованиям, порождаемым группой Лоренца, и к физическим моделям, соответствующие группы симметрии которых совершенно отличны от обычной группы Лоренца геометрии пространства Минковского. Всякое такое преобразование S будет действовать как однородное симплектическое преобразование на $\mathcal{M}$, и если $\gamma(S)$ — автоморфизм, соответствующий S^{-1}, то $\gamma(SS')=\gamma(S)\gamma(S')$. Таким образом, фундаментальная классическая группа симметрии действует как группа движений наблюдаемых поля. Мы имеем, так сказать, строгое «автоморфное» представление группы Лоренца на корректно определенной алгебре наблюдаемых вместо формального унитарного представления на довольно смутном гильбертовом пространстве векторов состояния в случае стандартных релятивистских теорий. Чтобы избежать путаницы, полезно отметить здесь, хотя с логической точки зрения это уместно позднее, что для всех обычных линейных полей будут существовать представления, в которых кинематическое действие группы Лоренца унитарно, но нет таких представлений, в которых при этом можно сделать унитарным временно́е развитие для взаимодействующего поля частиц, свободное поведение которых описывается упомянутым линейным полем.

Хотя на первый взгляд кажется, что предмет статистики совершенно отличен от предмета кинематики, его можно частично свести к описанной выше формулировке кинематики, если взять в качестве симплектического преобразования не преобразование Лоренца (точнее его действие на $\mathcal{M}$), а преобразование типа «фазового». Однако «числа заполнения» и интерпретацию в терминах частиц можно определить только относительно специального состояния системы, которое называется состоянием «физического вакуума». Поэтому целесообразно отложить трактовку статистики до тех пор, пока (в следующей главе) не будет рассмотрена общая роль физического вакуума.

Динамика поля Бозе — Эйнштейна является, вообще говоря, не столь ясно очерченным вопросом, как трактовавшиеся выше. Имеется мало простых и общих утверждений о качественном характере динамики.

В нерелятивистском случае временна́я эволюция поля задается как однопараметрическое семейство движений алгебры наблюдаемых поля. Для важнейшего случая однородной во времени, или механически консервативной системы, это семейство будет группой. Такая группа совершенно отлична от групп движений, возникающих из кинематики. Способ задания этой группы в специальных случаях, интересных для теории поля, является отдельным вопросом и не зависит от общей теории алгебр Вейля. Здесь достаточно отметить, что некоторые простые, но типично расходящиеся такие движения можно строго определить как однопараметрические группы неоднородных симплектических движений алгебры Вейля.

В релятивистском случае группа Лоренца будет порождать движения наблюдаемых поля, это динамическое представление группы должно, конечно, отличаться от описанного выше кинематического представления. Кинематическое (автоморфное) представление, скажем $a \to \theta_0(a)$, где a — произвольный элемент группы Лоренца и $\theta_0(a)$ — соответствующее кинематическое движение алгебры наблюдаемых поля, сравнительно легко поддается исследованию и допускает описание в довольно явной и строгой аналитической форме. С другой стороны, динамическое представление, скажем $a \to \theta(a)$, определяется не структурой $(\mathcal{M}, B)$, а взаимодействием. В настоящее время не известны нетривиальные релятивистские динамические движения, которые можно явно сформулировать полностью удовлетворительным способом. Мы будем подробнее говорить об этом позднее, но даже и не входя в детали, можно легко сформулировать некоторое нетривиальное ограничение на динамическое представление.

Это так называемое условие «ковариантности». С обычной принятой в теоретической физике точки зрения его можно кратко сформулировать как условие инвариантности лагранжиана под действием группы Лоренца. Однако лагранжиан относится к сорту объектов, которых, по-видимому, следует избегать во всякой трактовке, если ее цель состоит либо в математической строгости, либо в ясности и эмпирической согласованности, либо в концептуальном физическом осмысливании. Поэтому полезно сформулировать ковариантность в терминах динамического представления, которое математически является более точным понятием и теснее связано с непосредственно измеримыми величинами. В этих терминах условие ковариантности выражается равенством

$$\theta(aba^{-1}) = \theta_0(a)\,\theta(b)\,\theta_0(a)^{-1}$$

для произвольных преобразований Лоренца a и b. Предельный случай, когда в качестве b берется сдвиг на произвольно большой промежуток времени, можно во многих случаях проверить относительно просто, что дает в итоге независимость вероятностей перехода от системы отсчета. Более точно, если существуют соответствующие пределы по времени, это условие эквивалентно независимости так называемых приходящих и уходящих волновых автоморфизмов ω_- и ω_+ от лоренцевой системы отсчета, из которой следует лоренц-инвариантность автоморфизма рассеяния σ. Здесь

$$\omega_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} \theta(-t')\,\theta_0(t'),$$

$$\sigma = \omega_+^{-1}\omega_-$$

(t' обозначает преобразование Лоренца, состоящее в сдвиге на время t). Условие ковариантности, однако, не зависит от существования таких пределов.

При данном динамическом представлении $a \to \theta(a)$ физический вакуум определяется как регулярное состояние, которое инвариантно относительно всех $\theta(a)$ и для которого индуцированный энергетический спектр неотрицателен. Трудно не только сформулировать подходящее динамическое представление, но также и установить существование и (или) единственность соответствующего физического вакуума. Перед дальнейшим обсуждением этих вопросов будут рассмотрены в равной мере важные, но более доступные исследованию вопросы об общей роли физического вакуума и о структуре свободного поля.

Примечания к главе IV

1. *Патологические канонические системы.* Легко привести примеры самосопряженных операторов P и Q, имеющих общую плотную область определения, на которой они действуют инвариантно, и коммутатор $PQ - QP$ которых на этой области совпадает с iI, но для которых тем не менее не выполняются соотношения Вейля. Пусть $\mathscr{H}$ будет гильбертовым пространством квадратично интегрируемых функций на $(0, 1)$, а общей плотной областью определения $\mathscr{D}$ операторов P и Q будет множество всех бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вблизи концов. Упомянутый пример дается следующими операторами: Q: $f(x) \to xf(x)$ — ограниченный оператор на $\mathscr{H}$ и P — самосопряженное расширение оператора, действующего на $\mathscr{D}$ по формуле $f(x) \to -if'(x)$.

С другой стороны, можно легко построить однопараметрические унитарные группы $U(s)$ и $V(t)$ на гильбертовом пространстве, удовлетворяющие соотношениям Вейля, но не удовлетворяющие условиям непрерывности, так что для них неверны соотношения Гейзенберга. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство периодических в среднем функций порядка 2 на вещественной оси. Патологический пример дается операторами $U(s)$ и $V(t)$, действующими в этом пространстве по формулам

$$U(s)\colon\ f(x) \to f(x+s);\quad V(t)\colon\ f(x) \to e^{itx} f(x).$$

2. *Слабая и равномерная топологии; ненаблюдаемые операторы.* Читатели, у которых не было случая познакомиться поближе со слабой и равномерной операторными топологиями, их связями с алгебрами и теоремой единственности Стоуна — фон Неймана, могут найти техническую ситуацию в этой главе несколько надуманной. И хотя заменить приведенные

математические аргументы нечем, может быть, будут полезны некоторые специальные поясняющие замечания.

Определение алгебры Вейля использует слабую топологию в описании $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ для конечномерного множества $\mathcal{M}$, чему на первый взгляд не должно быть места в конструкции, делающей особое ударение на равномерной топологии. Это оправдывается тем, что для конечномерного $\mathcal{M}$ нет существенной разницы между результатами, полученными с помощью двух топологий. Причины были объяснены в гл. I. Можно было бы пользоваться конструкцией, полностью основанной на равномерной топологии, при этом получается алгебра, в которой верны результаты, описанные выше для алгебры Вейля. Однако то, что алгебра Вейля включает все ограниченные функции от конечного множества переменных, делает ее более удобной. Возможно, стоит еще раз отметить, что «наблюдаемые поля», такие, как канонические переменные, являясь концептуально наблюдаемыми, не могут быть непосредственно экспериментально измерены. Их теоретический вариант более сложен и связан с автоморфизмами алгебры наблюдаемых поля, более точно — с унитарными операторами, задающими эти автоморфизмы в представлении, определяемом состоянием физического вакуума, что объясняется подробнее в следующей главе. Эти унитарные операторы, задающие реальное временное развитие, будут одними и теми же независимо от того, используется ли алгебра Вейля или другой математический аппарат, который можно целиком сформулировать без использования слабой топологии.

Можно задать наивный вопрос, действительно ли алгебра Вейля существенно меньше алгебры всех ограниченных операторов, скажем, в представлении «свободного поля» (которое будет в деталях рассмотрено в гл. VI). Можно показать, что это так, несколькими способами. В частности, можно показать, что в алгебру Вейля не входят нетривиальные ограниченные функции от «полного числа частиц» (см. ниже). Это можно несколько грубо и упрощенно интерпретироровать утверждением, что полное число «голых» частиц лишено физического смысла.

Литературные указания к главе IV

Более детальное изложение основного материала этой главы содержится в статье Сигала [9]. В статье Шейла [1] изучаются автоморфизмы, индуцированные различными классами симплектических преобразований, и их унитарные представления.

Глава V

ОБЛАЧЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПОЛЕ

В предыдущей главе были рассмотрены общие вопросы, связанные с полем Бозе — Эйнштейна. Каждому линейному пространству $\mathcal{M}$ с заданной на нем билинейной формой B, обладающей некоторыми специальными свойствами, была сопоставлена единственная алгебра $\mathcal{A}$ «наблюдаемых поля», состоящая из всех ограниченных функций от конечного числа переменных поля $R(z)$ и из их равномерных пределов. Величины $R(z)$ определялись соотношениями Вейля, т. е. перестановочными соотношениями для поля, записанными ковариантно и в терминах ограниченных операторов. Исходное линейное пространство $\mathcal{M}$ соответствовало классическим полям определенного типа. Практически эти поля определяются дифференциальными уравнениями в частных производных, и форма B находится из этих уравнений. В классической механике она является аналогом так называемого основного билинейного инварианта, в квантовой механике она определяет коммутатор. Было установлено, что группа линейных преобразований пространства $\mathcal{M}$, сохраняющих форму B, может быть каноническим образом представлена группой автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}$, эта группа определяет кинематику системы. Что же касается динамики, то в нетривиальных релятивистски инвариантных случаях она дается другой группой автоморфизмов $\mathcal{A}$, которая должна быть задана отдельно.

Теперь мы должны установить связи с практической физикой и дать определение вероятностей перехода, возможных значений энергии и прежде всего построить интерпретацию состояний поля в терминах частиц, которые считаются многими физиками-экспериментаторами более фундаментальным понятием, чем поле. Все эти задачи, которые кажутся чрезвычайно сложными, сводятся к понятию физического вакуума. Вакуум — это некоторое специальное состояние алгебры $\mathcal{A}$. Существуют различные теоретические точки зрения на это понятие. Согласно одной из них, вакуумом называют «регулярное» состояние с «положительной энергией», инвариантное относительно динамических трансляций пространства-времени. Согласно другому, традиционному определению, вакуумом называется состояние с наименьшей энергией. К сожалению, при буквальном понимании это определение является чистой риторикой, так как в интересных случаях формулы для энергии лишены смысла. Используются и другие определения. Мы считаем, однако, что понятие вакуума — фундаментальное первичное понятие, а энергия и другие величины должны трактоваться с его помощью. Этой точки зрения мы и будем здесь следовать.

Мы начнем с тех свойств вакуума, которые вытекают только из того факта, что вакуум является состоянием. После этого будет рассмотрена связь между вакуумом и временной эволюцией системы. Затем будут рассмотрены более общие преобразования и статистические аспекты физического вакуума. В заключение будут приведены некоторые примеры вакуумных состояний и связанные с этими примерами структуры, в частности так называемые «расходящиеся» поля, причем окажется, что с развитой здесь точки зрения их удается легко и непосредственно исследовать.

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Вейля на унитарном пространстве $\mathcal{H}$ и E — состояние физического вакуума для $\mathcal{A}$. Как отмечалось в гл. I, со всяким состоянием C^*-алгебры можно связать некоторое ее представление. Чтобы кратко показать, как возникает это представление, забудем на минуту о пространстве $\mathcal{H}$ и образуем новое унитарное пространство на самой алгебре $\mathcal{A}$, приняв за скалярное произведение

$$\langle A, B\rangle = E(B^*A).$$

Легко видеть, что все обычные аксиомы унитарного пространства выполнены, кроме, может быть, того, что $\langle A, A\rangle$ может обращаться в нуль не только при $A=0$. Проводя естественную факторизацию, мы получаем обычное унитарное пространство. Это пространство, скажем $\mathscr{K}_0$, не обязательно будет полным, но его можно пополнить; обозначим это пополнение через $\mathscr{K}$. Имеется очевидное «естественное» отображение алгебры $\mathscr{A}$ на $\mathscr{K}_0$, скажем $A \to \eta(A)$ ($\eta(A)$ — это множество всех элементов из $\mathscr{A}$, эквивалентных A). Мы получим теперь представление алгебры $\mathscr{A}$, сопоставляя элементу A оператор $\varphi_0(A)$ на $\mathscr{K}_0$ по формуле

$$\varphi_0(A):\ \eta(B) \to \eta(AB).$$

Легко проверяется, что оператор $\varphi_0(A)$ определен этой формулой на всем пространстве. Соответствие φ_0 обладает всеми обычными свойствами представления:

$$\varphi_0(A+B)=\varphi_0(A)+\varphi_0(B),$$

$$\varphi_0(\alpha A)=\alpha\varphi_0(A)\ (\alpha\text{ — комплексное число}),$$

$$\varphi_0(AB)=\varphi_0(A)\varphi_0(B),\quad \varphi_0(A^*)=(\varphi_0(A))^*.$$

Оператор $\varphi_0(A)$ допускает единственное ограниченное расширение до оператора на $\mathscr{K}$; обозначим это расширение $\varphi(A)$. Очевидно, что отображение $\varphi(A)$ будет представлением алгебры на гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$.

На пространстве $\mathscr{K}$ имеется вектор $v=\eta(I)$, для которого

$$E(A)=(\varphi(A)v,\ v),$$

так что в полученном представлении состояние E можно задать с помощью нормируемого вектора более или менее обычным квантовомеханическим образом. Вектор v — циклический для φ; это значит, что множество элементов $\varphi(A)v$ порождает $\mathscr{K}$. Описанные свойства являются характеристическими в следующем смысле. Пусть задано представление φ' алгебры $\mathscr{A}$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{K}'$ с циклическим вектором v', так что

$$E(A)=(\varphi'(A)v',\ v').$$

Тогда структура $(\mathscr{K}', \varphi', v')$ унитарно эквивалентна описанной выше. Отметим также, что представление φ неприводимо тогда и только тогда, когда состояние E чистое.

Теперь вернемся к тому специальному случаю, когда $\mathscr{A}$ есть алгебра Вейля на $\mathscr{H}$, порожденная унитарными операторами $W(z)$, удовлетворяющими соотношениям Вейля

$$W(z)\, W(z') = e^{(i/2)\,\mathrm{Im}\,(z,\, z')}\, W(z+z').$$

Унитарные операторы $W'(z)=\varphi(W(z))$ также будут удовлетворять соотношениям Вейля и определят систему Вейля на $\mathscr{H}$, если будет выполняться условие непрерывности. Это условие, согласно которому $W'(tz)$ $(-\infty<t<\infty)$ будет для всех z слабо непрерывной функцией от t при $t=0$, не выполняется автоматически. Можно привести примеры, показывающие, что даже в случае конечномерного гильбертова пространства свойство непрерывности может оказаться нарушенным.

Однако если E — физический вакуум, то естественно и удобно по техническим причинам считать, что условие непрерывности сохранится. Требуемая непрерывность означает прежде всего, что непрерывна величина $\exp[itR(z)]$ как функция от t при $t=0$ (здесь $R(z)$ — соответствующие самосопряженные переменные поля). Величина $\exp[itR(z)]$ зависит от «поля» $R(z)$ и параметра t предельно гладким образом, поэтому кажется естественным, что ее вакуумное ожидание должно как-то отражать такую зависимость. Среди всех достаточно просто формулируемых нетривиальных условий гладкости поставленное кажется самым слабым. Итак, естественно ожидать, что, когда E будет физическим вакуумом, отображение φ абстрактной системы W будет приводить к конкретной системе Вейля W'.

К этому условию непрерывности можно прийти иначе. Если $\mathscr{M}$ — конечномерное подпространство в $\mathscr{H}$, то $\mathscr{A}_{\mathscr{M}}$ будет системой с конечным числом степеней свободы. Рассматриваемое только на ней состояние E будет определенным состоянием $E_{\mathscr{M}}$ этой конечной системы. В гл. I отмечалось, что по многим причинам необходимо требовать, чтобы всякое состояние такой системы обладало некоторым элементарным свойством регулярности. Точнее говоря, $E_{\mathcal{M}}$ должно иметь вид

$$E_{\mathcal{M}}(A) = \operatorname{tr}(AD_{\mathcal{M}}),$$

где $D_{\mathcal{M}}$ — оператор с абсолютно сходящимся следом (в том представлении, где $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ — алгебра всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве). Если $E_{\mathcal{M}}$ имеет такой вид, то, выбирая в качестве $\mathcal{M}$ одномерное подпространство, натянутое на z, получаем, что для некоторого оператора $D_{\mathcal{M}}$ с абсолютно сходящимся следом $E(W(tz)) = \operatorname{tr}(W(tz)D_{\mathcal{M}})$. Отсюда вытекает непрерывность $E(W(tz))$ как функции от t.

Это приводит нас к следующему определению.

Определение. Состояние E алгебры Вейля $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathcal{H}$ называется *регулярным*, если его сужение $E_{\mathcal{M}}$ на подалгебру $A_{\mathcal{M}}$, отвечающую любому конечномерному подпространству $\mathcal{M}$, на котором не вырождена форма B, имеет вид

$$E_{\mathcal{M}}(A) = \operatorname{tr}(AD_{\mathcal{M}}),$$

где $D_{\mathcal{M}}$ — некоторый оператор с абсолютно сходящимся следом.

Это условие регулярности является довольно слабым в математическом отношении, и естественно ожидать, что состояние физического вакуума будет регулярным. В теоретическом плане разумность понятия регулярности получает подкрепление при более внимательном исследовании его свойств. Приведем здесь некоторые результаты.

Теорема. *Состояние E алгебры Вейля $\mathcal{A}$ на пространстве $(\mathcal{H}, B)$ регулярно тогда и только тогда, когда существуют конкретная система Вейля W на $(\mathcal{H}, B)$ и вектор v в пространстве представления $\mathcal{K}$, такие, что*

$$E(A) = (\varphi(A)v,\ v),$$

где $\varphi(A)$ — *оператор на* $\mathscr{H}$, *соответствующий элементу* A *абстрактной алгебры Вейля.*

Или иначе *состояние* E *регулярно тогда и только тогда, когда его производящий функционал* $\mu(z)=$ $=E(W(z))$ *непрерывен на каждом конечномерном подпространстве в* $\mathscr{H}$ *и, кроме того,* E *является «естественным» состоянием, производящий функционал которого и есть* $\mu(z)$.

Поясним формулировку теоремы. Назовем функционал μ на пространстве $\mathscr{H}$ квазиположительно определенным в том случае, если он обладает описанной в теореме непрерывностью и удовлетворяет при произвольных комплексных числах ξ_j и произвольных векторах z_j из $\mathscr{H}$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ неравенству

$$\sum_{j,k} \mu(z_j-z_k)\, e^{iB(z_j, z_k)}\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqslant 0.$$

Легко видеть, что производящий функционал регулярного состояния должен быть квазиположительно определенным. Обратно, каждый квазиположительно определенный функционал «естественным» образом определяет регулярное состояние E, для которого он является производящим.

Имеется взаимно однозначное соответствие между регулярными состояниями алгебры Вейля и системами Вейля, и существует множество причин, по которым нужно постулировать, что физический вакуум должен быть регулярным состояннем. Но регулярность является лишь очень слабым предположением о вакууме, и мы должны исследовать дальнейшие определяющие свойства вакуумного состояния. Забудем снова о пространстве $\mathscr{H}$ и будем иметь дело с алгеброй $\mathscr{A}$ как абстрактной C^*-алгеброй. Как математический и физический объект вакуум связан со специальным движением алгебры $\mathscr{A}$, которое в нерелятивистской форме задается как однопараметрическая группа автоморфизмов ζ_t. Обычное определение вакуума как «состояния с наименьшей энергией» ничего не дает, пока мы не умеем определять энергию состояния. В этой формулировке понятие «состояние» выступает не в том контексте, в котором оно используется в нашем изложении, оно скорее соответствует понятию «вектор состояния», зависящему от специального представления.

Чтобы дать простое и строгое определение вакуума, воспользуемся тем, что вакуум E, во всяком случае, должен быть стационарным состоянием, т. е. должен для всех t удовлетворять соотношению

$$E(\zeta_t(A)) = E(A).$$

Для всякого такого состояния структуру описанного выше представления можно дополнить однопараметрической унитарной группой U_t $(-\infty < t < \infty)$, определяемой формулой

$$\varphi(\zeta_t(A))\,v = U_t\varphi(A)\,v,$$

которая означает, в частности, что вектор v для всех t инвариантен относительно U_t. Из описанного выше ясно, как строится группа U_t. Она не обязательно будет непрерывной, но если мы хотим, чтобы существовал оператор энергии, она должна быть непрерывной, так как энергия является инфинитезимальным оператором этой группы, определяющей временну́ю эволюцию системы в том представлении, которое порождено вакуумом. Условие непрерывности эквивалентно предположению, которое мы теперь и сделаем, — что $E(\zeta_t(A)B)$ при любых A и B является непрерывной функцией от t.

Тогда по теореме Стоуна существует (облаченный) гамильтониан, или оператор энергии системы, т. е. такой самосопряженный оператор H, что $e^{itH} = U_t$ $(-\infty < t < \infty)$. Так как представитель вакуума v инвариантен относительно U_t, то H «уничтожает» v. Теперь можно воспользоваться обычной формулировкой и определить вакуум как низшее собственное состояние оператора (при условии, что H будет неотрицательным самосопряженным оператором).

Как с математической, так и с физической точки зрения ясно, что в общем случае нет ни существования, ни единственности вакуума. И то и другое является нетривиальным свойством движения ζ_t. Однако в релятивистской теории поля имеются основания считать, что вакуум и существует, и единствен. Приняв это, исследуем некоторые другие общие физические требования и предположения о вакууме.

Для релятивистской системы естественно вместо однопараметрической группы автоморфизмов ζ_t, представляющей временно́е развитие системы, рассматривать представление автоморфизмами $g \to \zeta_g$ всей группы Лоренца, в которую рассмотренная однопараметрическая группа входит как подгруппа временны́х трансляций. Естественно, что вакуум должен быть инвариантен относительно всей группы Лоренца, иначе говоря, для E должно выполняться соотношение

$$E(\zeta_g(A)) = E(A).$$

A priori можно ожидать, что для релятивистских систем вакуум можно охарактеризовать этим соотношением. Такое чисто алгебраическое определение имело бы некоторые преимущества перед рассмотренным выше, которое включало структуру представления, порождаемого данным состоянием. Хотя обычно никакие другие лоренц-инвариантные состояния, кроме вакуума, не встречаются, они, вообще говоря, существуют. Поэтому сама по себе лоренц-инвариантность недостаточна для того, чтобы охарактеризовать вакуум; должна быть добавлена положительность энергии, а если ее принять, то инвариантность относительно временно́й эволюции окажется столь же эффективной, как и лоренц-инвариантность.

Наконец, последнее предположение требует, чтобы введение физического вакуума порождало возможность интерпретации поля в терминах частиц. Эта интерпретация — критический пункт в установлении связи с практической физикой. Однако ее теоретическое развитие оказывается трудной задачей. Здесь мы покажем только, как вводятся понятия (операторов) чисел заполнения. Будем предполагать при этом, что структура $(\mathscr{H}, B)$ возникает из унитарного пространства $\mathscr{H}$.

Пусть $\mathscr{M}$ — какое-нибудь подпространство в $\mathscr{H}$, имеющее конечную размерность или коразмерность.

Если P — проектор на $\mathcal{M}$, то оператор V_t: $x \to e^{itP}x$ есть симплектическое преобразование, оно индуцирует автоморфизм ν_t алгебры Вейля на $\mathcal{H}$. Числа заполнения относительно вакуума E можно определить следующим эвристическим способом. Пусть N_t — однопараметрическая группа, действующая на пространстве представления, связанного с E, и заданная уравнением

$$N_t\varphi(A)v = \varphi(\nu_t(A))v,$$

которое должно выполняться для любых A из $\mathcal{A}$. Так как $N_{2\pi}=I$, то спектр диагонализируемого инфинитезимального оператора n этой однопараметрической группы состоит из целых чисел. Числа заполнения должны обладать следующим важным свойством. Полный момент или импульс поля (момент и импульс определяются обычным образом инфинитезимальными операторами фундаментальной группы симметрии) должны быть суммами произведений чисел заполнения и этих моментов (импульсов). Кроме того, числа заполнения должны трансформироваться по естественному закону при кинематических унитарных преобразованиях. И еще: числа заполнения должны быть неотрицательны (или должна существовать интерпретация в терминах античастиц), и, наконец, в обычном формализме числа заполнения являются самосопряженными операторами. Первая часть этих пожеланий, относящаяся к выражениям для моментов и импульсов, удовлетворяется, но вторая часть не всегда будет выполняться. Хотя не ясно, насколько эта вторая часть серьезна с точки зрения физики, интересно выяснить, какими свойствами должно обладать вакуумное состояние алгебры Вейля для того, чтобы были возможны все отмеченные здесь стороны интерпретации в терминах частиц.

Самосопряженность чисел заполнения эквивалентна инвариантности физического вакуума относительно автоморфизмов алгебры Вейля, индуцированных упоминавшимися выше фазовыми преобразованиями на основном (т. е. так называемом «одночастичном») унитарном пространстве. Это очень сильное условие, но его недостаточно, чтобы фиксировать обычный свободный вакуум однозначно: существует континуально много регулярных состояний, которые являются лоренц-инвариантными и для которых соответствующие числа заполнения самосопряжены (эти состояния будут инвариантными даже относительно всех автоморфизмов алгебры Вейля, индуцированных унитарными операторами на $\mathscr{H}$).

Что же касается требования неотрицательности, то оно оказывается много сильнее, чем может показаться на первый взгляд. Его достаточно, чтобы фиксировать обычный свободный вакуум. Аналогичные результаты справедливы и для более общих алгебр наблюдаемых на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ (в частности, не только для систем Бозе — Эйнштейна, но и для систем Ферми — Дирака). Чтобы установить это, предположим, что каждому унитарному оператору U на $\mathscr{H}$ (иначе говоря, каждому одночастичному движению) сопоставлен унитарный оператор $\Gamma(U)$ на гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$ (т. е. соответствующее движение «поля») таким образом, что Γ является непрерывным представлением унитарной группы на $\mathscr{H}$. Предположим также, что инфинитезимальный оператор $d\Gamma(T)$ однопараметрической унитарной группы $\Gamma(e^{itT})$ $(-\infty<t<\infty)$ неотрицателен при неотрицательном T. Когда T — проектор, это соответствует неотрицательности чисел заполнения: формально этот специальный случай эквивалентен общему, так как всякий неотрицательный самосопряженный оператор можно представить в виде линейной комбинации проекторов с неотрицательными коэффициентами. При этих предположениях $\mathscr{K}$ оказывается прямой суммой пространств тензоров на $\mathscr{H}$ с естественной топологией; в случае бесконечномерного $\mathscr{H}$ эту прямую сумму нужно надлежащим образом пополнить. Для алгебры Вейля прямая сумма содержит только симметрические тензоры.

Основное значение этих результатов состоит в том, что они подкрепляют целесообразность того подхода к понятию вакуума, который развивается в этой главе. Как правило, требования инвариантности недостаточны для того, чтобы фиксировать вакуум; не дополненные неотрицательностью энергии или чисел заполнения, они достаточны только для того, чтобы выделить свободный вакуум. При этом можно ожидать, что условие неотрицательности энергии будет применимо и к более общим случаям.

В предшествующем обсуждении свободный вакуум выступал как специальный случай общего понятия физического вакуума. Этот случай важен и в математическом, и в физическом отношении, поэтому понятие свободного вакуума полезно уточнить. Будет удобно, и это соответствует обычной физической практике, говорить, что выделение вакуума «облачает» алгебру $\mathcal{A}$. В соответствии с общепринятой физической точкой зрения простейшим будет полностью необлаченный вакуум. В зависимости от контекста его описывают как «голый», «свободный» или «вакуум Фока — Кука» (имена физика и математика, которые первыми дали отчетливое описание этого понятия). Идея состоит приблизительно в том, что наложение нетривиальной динамики сдвигает вакуум (он перестает быть инвариантным при временно́й эволюции) и «одевает» поле; новый (физический) вакуум по отношению к первоначальному (голому) представляет собою что-то вроде облака, которое окутывает, «облачает» голый вакуум. Свободный вакуум и различные связанные с ним математические структуры играют важную роль в теоретической физике, и для того, чтобы освоиться с более общими вариантами физического вакуума, полезно внимательно рассмотреть это понятие. Подробно соответствующие вопросы будут рассмотрены в следующей главе, где будут обсуждаться и некоторые тесно связанные с ними чисто математические моменты (относящиеся к анализу на функциональном пространстве). Эту главу мы закончим обсуждением связи свободного и физического вакуумов для одного примера поля с взаимодействием, что одновременно даст нам пример нетривиального облачения.

В действительности в теоретической физике различают понятия «голое» и «свободное физическое» поле. Так как взаимодействие в экспериментальной ситуации всегда сохраняется, то «голое» поле рассматривается физиками как чисто математический объект. Но с другой стороны, наблюдение свободных физических частиц является общим местом с точки зрения эксперимента, и физики считают свободное физическое поле тесно связанным с реальностью. Для математика свободное физическое поле и голое поле — понятия тождественные (если используются надлежащие физические параметры, например в исходном волновом уравнении — экспериментальная физическая масса). Свободное физическое поле с математической точки зрения так же тривиально, как и голое поле, хотя оно и истолковывается как «облаченное».

Обычно, чтобы избежать возможного смешения понятий, мы будем понимать термины *вакуум* или *поле* «без взаимодействия» в чисто математическом плане.

При наличии взаимодействия вакуум будет отличаться от вакуума без взаимодействия, и возможна такая точка зрения, согласно которой к этому, в сущности, сводятся все проблемы теории поля. Тем не менее вакуум в присутствии взаимодействия и вакуум без взаимодействия во многих отношениях тесно связаны.

Пусть $\mathscr{H}$ — унитарное пространство, $\mathscr{A}$ — алгебра Вейля на $\mathscr{H}$ и E — описанный выше универсальный вакуум. Пусть γ_0 — неоднородный симплектический автоморфизм алгебры $\mathscr{A}$. Если ζ_t — «свободное» движение алгебры $\mathscr{A}$ (однопараметрическая группа ее автоморфизмов, индуцированная непрерывной однопараметрической унитарной группой в представлении «свободного поля»), то $\zeta'_t = \gamma_0\zeta_t\gamma_0^{-1}$ будет новым движением, которое можно довольно непосредственно изучить. В частности, его вакуумное состояние есть E^{γ_0}, т. е. результат контраградиентного действия γ_0 на E. Вообще говоря, этот вакуум совершенно отличен от E. Может случиться так, что E^{γ_0} не представимо никаким вектором состояния в представлении свободного поля.

Любая попытка определить такой вектор состояния будет неизбежно порождать «расходящиеся» выражения, в частности выражения, в которые входят бесконечные постоянные. Тот факт, что манипуляции с такими выражениями могут привести к осмысленным конечным величинам, не должен никого удивлять, так как эти манипуляции, по сути дела, представляют собою некоторые более или менее приемлемые с алгебраической (но не с аналитической) точки зрения преобразования над состоянием E^{Ψ_0}.

Рассмотрим в качестве примера известную решаемую модель. Она была исследована ван Ховом и другими авторами, которые предполагали, что на ней удастся выяснить природу так называемых «ультрафиолетовых» расходимостей теории квантованных полей. Будем вначале рассуждать нестрого. Выпишем свободный гамильтониан и гамильтониан взаимодействия в терминах канонических переменных p_1, q_1, p_2, q_2, ...:

$$H_0=\frac{1}{2}\sum_k(c_k^2p_k^2+d_k^2q_k^2) \quad (c_k>0,\ d_k>0;\ k=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$H_1=\sum_k(a_kp_k+b_kq_k).$$

Несколько лет назад «свободный» вакуум определяли в теоретической физике как низшее собственное состояние оператора «свободной» энергии H_0, а «физический» вакуум — как низшее собственное состояние полного гамильтониана H_0+H_1 (под низшим собственным состоянием здесь подразумевается состояние с наименьшим собственным значением). Принципиальная трудность состояла в том, что, хотя H_0 нетрудно истолковать как корректно определенный самосопряженный оператор, оператору H_1 не удается приписать смысла. Это положение было обнаружено уже в первой работе по теории квантованных полей (Дирак [1]). С тех пор многие пытались придать смысл оператору H_1, но только «перенормировки», состоящие в отбрасывании некоторых бесконечных членов, позволили несколько продвинуться в этом отношении.

Ван Хов показал, что стандартные методы теории поля приводят к новому подтверждению того, что оператор H_1 не имеет математического смысла. Состояние физического вакуума оказывается ортогональным ко всем собственным элементам оператора H_0. Ван Хов предполагал, что коэффициенты a_k и b_k являются скалярами, однако в сравнительно более сложных физических ситуациях они могут быть операторами. Позднее было открыто множество аналогичных парадоксов; наиболее известным среди них является парадокс Хаага. У многих исследователей под влиянием этих парадоксов зародились даже сомнения в справедливости обычной формулировки квантовой механики в терминах гильбертова пространства.

Теперь нам необходимо перейти к более формальному описанию задачи. Главным шагом здесь будет преобразование полного гамильтониана с помощью образования полных квадратов:

$$\frac{1}{2}\left(c_k^2 p_k^2 + d_k^2 q_k^2\right) + \left(a_k p_k + b_k q_k\right) = \\ = \frac{1}{2} c_k d_k \left(p_k'^2 + q_k'^2\right) + \text{const},$$

где

$$p_k' = \left(\frac{c_k}{d_k}\right)^{1/2} p_k + \frac{a_k}{c_k}(c_k d_k)^{-1/2},$$

$$q_k' = \left(\frac{d_k}{c_k}\right)^{1/2} q_k + \frac{b_k}{d_k}(c_k d_k)^{-1/2}.$$

Величины p_k' и q_k' $(k=1, 2, \ldots)$ образуют новую систему канонических переменных, связанную с исходной при помощи неоднородного симплектического автоморфизма. Так как перепутывание индексов отсутствует, то это устанавливается рассмотрением одномерного случая, т. е. преобразования вида

$$p \to ap + r, \quad q \to a^{-1}q + s.$$

Соответствующие элементы фазового пространства можно взять в виде $z = (u, v)$, u и v — вещественные числа. $R(z)$ можно ввести как замыкание суммы $up + vq$, а за фундаментальную форму принять $B[(u, v), (u', v')] = uv' - u'v$. Неоднородный симплектический автоморфизм

$$R((u, v)) \to R((au, a^{-1}v)) + (ru + sv)$$

переводит p и q в указанную новую систему переменных.

Формальное преобразование задачи на этом заканчивается, и можно перейти к строгой формулировке понятий свободного и физического поля. Пусть $\mathcal{M}$ будет пространством упорядоченных последовательностей пар вещественных чисел (предполагается, что начиная с некоторого номера оба элемента пары обращаются в нуль)

$$z = (u_1,\ u_2,\ \ldots;\ v_1,\ v_2,\ \ldots)$$

($u_k = v_k = 0$ для достаточно больших k).

Положим

$$\langle z,\ z' \rangle = \sum (u_k u'_k + v_k v'_k) + i \sum (u_k v'_k - u'_k v_k).$$

Пусть $\mathcal{A}$ — соответствующая алгебра наблюдаемых поля и $\mathcal{A}_0$ — алгебра всех ограниченных функций от конечного числа переменных p и q. Мы определим вначале свободный вакуум E на подалгебре $\mathcal{A}_0$. Пусть X — произвольный элемент из $\mathcal{A}_0$, например функция от $p_1,\ \ldots,\ p_n$ и $q_1,\ \ldots,\ q_n$. Пусть $p'_1,\ \ldots,\ p'_n$ и $q'_1,\ \ldots,\ q'_n$ обозначают операторы

$$-i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \ldots,\ -i\frac{\partial}{\partial x_n};\ x_1,\ \ldots,\ x_n$$

на гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ всех квадратично интегрируемых функций на n-мерном евклидовом пространстве. Эти операторы предполагаются самосопряженными. Согласно приведенному ранее следствию теоремы Стоуна — фон Неймана, существует единственный алгебраический изоморфизм кольца всех ограниченных функций от $p_1,\ \ldots,\ p_n;\ q_1,\ \ldots,\ q_n$ и соответствующего кольца для $p'_1,\ \ldots,\ p'_n;\ q'_n,\ \ldots, q'_n$. Этот изоморфизм переводит X в корректно определенный оператор X' на $L_2(E_n)$. Положим

$$E_0(X) = (X'v,\ v),$$

где v — функция на E_n:

$$v(x) = \pi^{-n/4} \exp\left[-\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{c_k}\frac{x_k^2}{2}\right] \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{c_k}{d_k}\right)^{-1/4}.$$

Известно, что v есть низшая собственная функция оператора $c_1^2p^2+d_1^2q^2$ в случае одного измерения, p и q действуют на $L_2(-\infty, \infty)$ обычным образом. Отсюда следует, в частности, что E_0 инвариантно относительно однопараметрической подгруппы, порожденной оператором H_0. Ее действие на элементы из $\mathcal{A}_0$ задается формулой

$$X\to\exp\left[\frac{it}{2}\sum_1^n\left(c_k^2p_k^2+d_k^2q_k^2\right)\right]\times$$
$$\times X\exp\left[-\frac{it}{2}\sum_1^n\left(c_k^2p_k^2+d_k^2q_k^2\right)\right].$$

Легко проверить, что E_0 однозначно определено на $\mathcal{A}_0$ и является при этом линейным положительным и нормируемым функционалом. Легко проверить также, что $|E_0(X)|\leqslant\|X\|$, где $\|X\|$ обозначает границу оператора X. Отсюда следует, что E_0 допускает однозначное расширение до состояния E алгебры $\mathcal{A}$, инвариантного относительно движения, порождаемого оператором H_0.

Итак, мы строго определили голый вакуум. Для того чтобы перейти к физическому вакууму, введем неоднородный симплектический автоморфизм γ_0 алгебры $\mathcal{A}$, действующий по формуле

$$R(z)\to R(Tz)+f(z).$$

Здесь

$$T\colon\ z=(u_1,\ u_2,\ \ldots;\ v_1,\ v_2,\ \ldots)\to$$
$$\to\left(r_1u_1,\ r_2u_2,\ \ldots;\ r_1^{-1}v_1,\ r_2^{-1}v_2,\ \ldots\right),$$

$$f(z)=\sum\left(u_ks_k+v_kt_k\right),$$

$$r_k=\left(\frac{c_k}{d_k}\right)^{1/2},\quad s_k=\frac{a_k}{c_k}\left(c_kd_k\right)^{-1/2},\quad t_k=\frac{b_k}{d_k}\left(c_kd_k\right)^{-1/2}.$$

Теперь физический вакуум E' *определяется* равенством

$$E'(X)=E^{\gamma_0^{-1}}(X).$$

Голый вакуум переводится в это состояние операцией, индуцируемой на состояниях (контраградиентно) каноническим преобразованием (автоморфизмом алгебры наблюдаемых поля) γ_0. Физический вакуум возникает у нас математически как совершенно строгий объект, лишенный всяких расходимостей.

Но ведь с точки зрения обычного формализма теории квантованных полей эта модель является расходящейся. В чем же тут дело? Все объясняется тем, что в обычных вычислениях молчаливо предполагается, что физическому вакууму должен соответствовать некоторый вектор состояния в том же представлении, в котором этим свойством обладает свободный вакуум. Никаких других состояний, кроме тех, которые можно представить при помощи вектора состояния, обычно просто не рассматривают. Таким образом, голый вакуум берется в виде

$$E(X)=(X\psi_0,\ \psi_0),$$

и в аналогичном виде ищется физический вакуум

$$E'(X)=(X\psi_0',\ \psi_0').$$

Здесь ψ_0 и ψ_0' — единичные векторы в пространстве векторов состояния; обозначим это пространство через $\mathscr{H}$. В этих терминах парадокс ван Хова заключается в следующем: формальными преобразованиями можно показать, что ψ_0' должно быть ортогонально ко всем собственным векторам оператора H_0, на которые натянуто пространство $\mathscr{H}$.

На самом деле такого вектора ψ_0' в пространстве $\mathscr{H}$ просто нет. Это связано с невозможностью представить преобразование γ_0 каким-либо унитарным оператором в пространстве представления без взаимодействия. Если бы такой унитарный оператор Γ существовал, можно было бы положить $\psi_0'=\Gamma\psi_0$, и тогда мы получили бы

$$E'(X)=(X\Gamma\psi_0,\ \Gamma\psi_0)=E(\Gamma^{-1}X\Gamma).$$

Быть может, полезно отметить, что мы имели бы тогда соотношение

$$\Gamma^{-1}(H_0+H_1)\Gamma=H_0,$$

при этом $\psi_0'=\Gamma\psi_0$ (где ψ_0 — низший собственный вектор оператора H_0) является низшим собственным вектором оператора H_0+H_1. Однако можно строго показать, что такого оператора Γ не существует. Тем не менее символу $\Gamma^{-1}X\Gamma$ можно придать строгий математический смысл и состояние E' можно определить. Само по себе отсутствие оператора Γ еще не означает, что нет такого элемента ψ_0' в пространстве $\mathscr{K}$, для которого

$$E'(X)=(X\psi_0',\ \psi_0').$$

Впрочем, такого элемента, действительно, нет. В связи с этим уместно упомянуть об одном довольно общем результате Шейла. Грубо говоря, этот результат утверждает, что для однородного симплектического преобразования T на комплексном гильбертовом пространстве, не представимого в виде UV, где U — унитарный оператор, а V равен $I+W$ (W — оператор Гильберта — Шмидта), элемент, получаемый из голого вакуума преобразованием, индуцированным действием T, не будет нормируемым в представлении без взаимодействия.

По-видимому, следует объяснить, что состояние называется нормируемым, если его можно получить из некоторого вектора состояния ψ по формуле $E(X)=$ $=(X\psi,\psi)$. Конечно, это не только свойство состояния или алгебры наблюдаемых, это свойство зависит от конкретного представления наблюдаемых операторами в гильбертовом пространстве. Как отмечалось ранее, каждое состояние нормируемо в *некотором* представлении. Ненормируемые состояния известны также и в элементарной квантовой механике в связи с непрерывным спектром. Если T — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и λ — точка непрерывного спектра, то существует (в совершенно строгом смысле) состояние системы всех ограниченных операторов, в котором T имеет точное значение λ, но это состояние ненормируемо. Известно, что его можно эвристически представить некоторым ненормируемым собственным вектором, отвечающим собственному значению λ. Известно также, что такие ненормируемые состояния иногда удобны для интуитивного физического подхода, и с ними можно обходиться с помощью пакетов собственных векторов. В нашем случае ненормируемость не имеет такой связи с непрерывным спектром какого-либо оператора, и пакеты не могут быть полезны в этой ситуации (оператор энергии, собственным вектором которого в символическом смысле является ψ_0', имеет дискретный спектр). Однако состояние по фон Нейману (линейный функционал) оказывается очень эффективным понятием, и для бесконечного числа степеней свободы даже в большей мере, чем для конечного. Хотя рассмотренное нами состояние физического вакуума E' и не нормируемо в представлении без взаимодействия, оно «регулярно», т. е. сравнительно гладко с математической точки зрения. В частности, $E'(e^{iR(z)})$ будет непрерывной функцией от z на всяком конечномерном подпространстве классического фазового пространства. В противоположность этому состояния, возникающие из непрерывного спектра в случае конечного числа степеней свободы, не обладают свойствами регулярности, и $E'(e^{iR(z)})$ не будет в этом случае непрерывной функцией от z.

Вследствие уже отмечавшегося взаимно однозначного соответствия между состояниями и представлениями C^*-алгебры состояние физического вакуума E' определяет гильбертово пространство $\mathscr{H}'$, конкретное множество самосопряженных канонических переменных на классическом фазовом пространстве $\mathscr{M}$ и другие элементы структуры, в частности такой вектор состояния ψ_0', что

$$E'(X) = (X'\psi_0', \psi_0');$$

здесь X' обозначает конкретный оператор на $\mathscr{H}'$, соответствующий элементу X алгебры наблюдаемых поля. Конечно, этот вектор состояния нормируем, но он не входит в гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Пространства $\mathscr{H}$ и $\mathscr{H}'$ совершенно различны — не существует сохраняющего основные структуры изоморфизма этих пространств, что вытекает из ненормируемости E' в представлении без взаимодействия.

Математически бессмысленный символический оператор H_0+H_1 можно истолковать как самосопряженный оператор на $\mathscr{K}'$. Он возникает как инфинитезимальный оператор однопараметрической унитарной группы в $\mathscr{K}'$, которая индуцируется однопараметрической группой автоморфизмов наблюдаемых поля, получаемой из свободной динамики при преобразовании γ_0.

Это довольно длинное отступление должно было показать значение вакуума без взаимодействия и соответствующего представления даже при рассмотрении взаимодействующих полей. Мы хотели также показать, что некоторые взаимодействующие поля, расходящиеся с точки зрения традиционного подхода, можно исследовать совершенно безукоризненно в математическом отношении на пути, который представляется и более прямым физически. Теперь уместно перейти к математически строгой и инвариантной трактовке свободного вакуума.

Литературные указания к главе V

В связи с материалом этой главы см. работы Сигала [9, 12] и цитированную в них литературу. Модель, рассмотренная в этой главе, была предложена ван Ховом [1], а использованный нами метод применим также и к более сложной модели ван Хова, которая возникла как объединение его первоначальной модели и модели Ли. В этой более сложной модели можно вывести выражения для физического вакуума и для одночастичных состояний.

8 Зак. 1017

Глава VI

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СВОБОДНОГО ПОЛЯ

В теории свободного поля приходится иметь дело с некоммутирующими операторами различной природы. Известны три различных представления свободного поля, и в каждом из них какая-то группа операторов имеет наиболее простой вид. Это следующие представления: 1) перенормированное представление Шредингера, которое является бесконечномерной модификацией обычного шредингеровского представления (в этом представлении наиболее простой вид имеют операторы поля и легко могут быть описаны кинематические преобразования, но довольно сложно выглядят операторы чисел заполнения); 2) представление Фока — Кука (в этом представлении просто описываются числа заполнения и кинематические преобразования и сравнительно сложно — операторы поля); 3) представление голоморфными функционалами (в этом представлении легко исследуются кинематика и операторы рождения и уничтожения, но числа заполнения, операторы поля и физическая интерпретация волновых функций здесь трудны). Все эти представления унитарно эквивалентны, более того, эту унитарную эквивалентность можно установить каноническими способами. Из трех названных представлений в физической литературе достаточно полно описано только представление Фока — Кука. Представление, которое мы называем шредингеровским, может рассматриваться, впрочем, как ковариантная формулировка более или менее известного способа описания состояний свободного поля с помощью бесконечных произведений функций Эрмита. Каноническая эквивалентность этих двух представлений есть не что иное, как явная и ковариантная формулировка предложенного Дираком представления системы бозонов в терминах множества гармонических осцилляторов.

Перенесение шредингеровского представления на бесконечномерный случай требует рассмотрения ряда вопросов, относящихся к анализу на функциональных пространствах. Эти вопросы удается решить, следуя линии, намеченной Винером. Само пространство Винера, однако, не очень удобно в связи с теорией поля, в особенности в разделах, требующих ковариантной трактовки. Целесообразно развить необходимый аппарат непосредственно в терминах гильбертова пространства классических состояний.

Пусть $\mathscr{H}$ — вещественное гильбертово пространство. Для конечномерного $\mathscr{H}$ представление Шредингера приводит к конечному множеству операторов, удовлетворяющих каноническим перестановочным соотношениям. В бесконечномерном случае подобная трактовка оказывается невозможной из-за отсутствия на гильбертовом пространстве подходящего аналога лебеговой меры. Доказано, что на гильбертовом пространстве не существует объекта, похожего на обычную меру Лебега. Для тех, кто привержен к буквальному пониманию классической лебеговой схемы, такие работы, как, например, работа Фейнмана, представляются чем-то вроде научной поэзии, лишенной точного математического содержания.

Однако оказывается, что если твердо помнить о необходимости и полезности интегрирования и гармонического анализа в гильбертовом пространстве, то такой анализ, достаточно эффективный и простой, можно развить. Он во многом аналогичен анализу на конечномерных пространствах. Некоторую необычность понятия интегрирования можно, если угодно, устранить, сведя это интегрирование к более обычному интегрированию по пространству Винера или по каким-либо другим пространствам, связанным со случайными процессами. Но нетрудно дать и прямую формулировку теории интегрирования, которая оказывается полезной также и при исследовании общих представлений соотношений Вейля. Вообще с точки зрения приложений к теории поля идея вполне аддитивной меры на гильбертовом пространстве во многом напоминает идею эфира, который вводили в связи с уравнениями Максвелла. Отметим еще, что пространство Винера имеет простую связь с броуновским движением и тем самым с лапласианом; поэтому анализ на пространстве Винера может оказаться полезным при исследовании нерелятивистских систем с конечным числом степеней свободы, в гамильтониан которых входит оператор Лапласа.

Прежде чем переходить к интегрированию на линейном, возможно, бесконечномерном пространстве, дадим обобщение понятия вероятностного распределения.

Всякая линейная функция на линейном пространстве $\mathscr{L}$ измерима относительно вероятностного распределения на этом пространстве, и тем самым вероятностное распределение порождает линейное отображение F двойственного пространства $\mathscr{L}^*$ на множество случайных величин (т. е. измеримых функций) на пространстве с мерой. В случае бесконечномерного $\mathscr{L}$ необходимы некоторые элементарные дополнительные топологические ограничения. Обратно, всякое такое отображение порождает на $\mathscr{L}$, если $\mathscr{L}$ конечномерно, некоторое вероятностное распределение. Однако для бесконечномерного $\mathscr{L}$ существуют линейные отображения, не связанные ни с какими обычными вероятностными распределениями на $\mathscr{L}$. При этом такие отображения могут быть достаточно регулярны. В теории поля и в теории случайных процессов обычно имеют дело именно с такими распределениями.

Рассмотрим пример. Пусть $x(t)$ — процесс броуновского движения на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\mathscr{L} = L_2(0, 1)$. Тогда отображение

$$f(t) \to \int_0^1 f(t)\, dx(t)$$

является распределением в указанном выше обобщенном смысле, оно не сводится ни к какой вполне аддитивной мере на подмножествах в $\mathscr{L}$. Функция $f(t)$ рассматривается как элемент, порождающий функционал по формуле $\int\limits_0^1 g(t)f(t)dt$. Приведенное отображение есть не что иное, как стохастический интеграл, оно устанавливает связь между интегрированием по гильбертову пространству и по пространству Винера.

Если мы условимся определять распределение на линейном топологическом пространстве $\mathscr{L}$ как линейное отображение из $\mathscr{L}^*$ во множество случайных величин на каком-нибудь вероятностном пространстве (обычное распределение, задаваемое вполне аддитивной мерой, сравнительно менее важно в случае бесконечномерного пространства; было бы логично использовать для таких распределений специальный термин, однако мы не станем этого делать, так как у нас не будет случая им воспользоваться), то от этого понятия польза будет только тогда, когда мы сможем интегрировать достаточно много функций на $\mathscr{L}$. Обозначим через $\mathscr{R}$ множество ограниченных функций на $\mathscr{L}$, непрерывно зависящих от конечного числа линейных функционалов. Очевидно, что $\mathscr{R}$ является алгеброй, и ясно, как определить математическое ожидание произвольного элемента f из $\mathscr{R}$. Обозначим это математическое ожидание $E(f)$. Структура $(\mathscr{R}, E)$, образованная алгеброй с выделенным на ней линейным функционалом, обладает, как легко видеть, определенными свойствами, характеризующими слабо плотные подалгебры в алгебре всех ограниченных измеримых функций на пространстве с вполне аддитивной мерой и функционалом E как интегралом по этой мере. С точностью до нумерации точек и множеств это пространство единственно. Тем самым оказывается применимой теория Лебега. Впрочем, теорию Лебега можно легко исключить и всю схему построить на базе алгебры и положительного линейного функционала. Так или иначе, можно придать смысл пространству $L_2(\mathscr{L})$ как гильбертову пространству, хотя и не все его элементы можно представить функционалами на $\mathscr{L}$, — и в этом основное различие между введенным здесь интегрированием и интегрированием, построенным на основе вполне аддитивной меры.

Всякое $\mathscr{L}$ можно описать как предел обратного спектра факторпространств таким образом, что интеграл на $\mathscr{L}$ окажется пределом интегралов по вполне аддитивным мерам на этих пространствах. Другое описание состоит в том, что всякий такой интеграл можно получить из конечно аддитивной меры на $\mathscr{L}$, которая вполне аддитивна на подмножествах, инвариантных относительно сдвигов на векторы из любого фиксированного ядерного подпространства. В случае гильбертова пространства такой интеграл можно получить из меры, вполне аддитивной на каждом конечномерном подпространстве. По форме этот подход ближе к обычной теории меры, но здесь он ничем не будет для нас полезен.

Пусть теперь $\mathscr{H}$ — вещественное гильбертово пространство. Можно представить себе распределение n, обладающее следующими свойствами, связанными со структурой гильбертова пространства: 1) унитарная инвариантность, т. е. совпадение совместных распределений $n(x_1), \ldots, n(x_k)$ и $n(Ux_1), \ldots, n(Ux_k)$ для любого унитарного оператора U и векторов $x_1, \ldots, x_k$ из $\mathscr{H}$ (гильбертово пространство отождествляется с двойственным пространством, так что распределение на гильбертовом пространстве является линейным отображением самого пространства); 2) эквивалентность ортогональности и стохастической независимости — два взаимно ортогональных подмножества переводятся распределением n в независимые множества случайных величин. Оказывается, что такое распределение существует и единственно (для двумерного пространства $\mathscr{H}$ этот факт был открыт Кацем). Его можно назвать изотропным центрированиым нормальным распределением: для любого вектора x из $\mathscr{H}$ случайная величина $n(x)$ распределена по нормальному закону со средним значением 0 и дисперсией $c|x|^2$.

Для конечномерного пространства анализ, базирующийся на обычной евклидовой мере, эквивалентен анализу, построенному с помощью изотропного центрированного нормального распределения. Эти два распределения взаимно абсолютно непрерывны. Для бесконечного числа переменных прямая аналогия с евклидовым пространством отсутствует, однако для многих глобальных теорем евклидова анализа можно получить аналоги в терминах нормального распределения. Для некоторых целей нормальное распределение n оказывается более удобным даже в случае конечномерного пространства.

Рассмотрим в качестве иллюстрации теорию Планшереля. Физики часто формально пишут интеграл $\int\limits_{\mathscr{H}} e^{i(x,y)} f(x)\,dx$ по гильбертову пространству $\mathscr{H}$. Этот интеграл имеет чисто символическое значение, но можно проделать определенную «бесконечную перенормировку» и заменить преобразование Фурье математически строгим преобразованием Винера, которое в случае конечномерного пространства полностью эквивалентно преобразованию Фурье. В терминах преобразования Винера имеет место следующая теорема.

Преобразование алгебры $\mathscr{P}$ всех полиномов на $\mathscr{H}$, определяемое формулой

$$f(x) \to \int\limits_{\mathscr{H}} f(2^{1/2}x + iy)\,dn(y),$$

допускает единственное расширение до унитарного преобразования на $L_2(\mathscr{H}, n)$, обратное к которому на $\mathscr{P}$ имеет вид

$$F(x) \to \int\limits_{\mathscr{H}} F(2^{1/2}x - iy)\,dn(y).$$

В конечномерном случае, выделяя полные квадраты в экспонентах, нетрудно вывести отсюда теорему Планшереля. Преобразование Винера обладает тем замечательным свойством, что оно переводит полиномы в полиномы. Возможно, следует указать, что полиномом на гильбертовом пространстве называют обычный полином от конечного числа координат векторов этого пространства. Аналогичное преобразование для пространства Винера было обнаружено в более ранних работах Камерона и Мартина. Связь с преобразованием Фурье легче всего установить, воспользовавшись соотношением между пространством Винера и вещественным гильбертовым пространством.

Об анализе на гильбертовом пространстве можно было бы сказать еще многое, но мы остановимся на этом и перейдем к описанию вида канонических переменных в шредингеровском представлении.

Пусть для произвольного x *из* $\mathscr{H}$ $Q(x)$ *и* $P(x)$ *— самосопряженные инфинитезимальные операторы однопараметрических унитарных групп* $A(tx)$ $(-\infty<t<\infty)$ *и* $B(tx)$ $(-\infty<t<\infty)$, *и пусть эти группы действуют на* $L_2(\mathscr{H})$ *следующим образом:*

$$A(u)\colon\ f(x)\to\exp\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(x,\ u)\right]f(x),$$

$$B(u)\colon\ f(x)\to$$
$$\to\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(x,\ u)-\frac{1}{\sqrt{2}}(u,\ u)\right]f\left(\sqrt{2}\,u+x\right).$$

Тогда $Q(x)$ *и* $P(x)$ *удовлетворяют каноническим перестановочным соотношениям в форме Вейля:*

$$\exp[-iP(x)]\exp[iQ(y)]\exp[iP(x)]\exp[-iQ(y)]=$$
$$=\exp[-i(x,\ y)]I.$$

Распределение на $\mathscr{H}$ является здесь каноническим нормальным распределением с коэффициентом дисперсии, равным 1 (другие значения дисперсии приводят к существенно иным каноническим переменным). В конечномерном случае описанное представление превращается в стандартное шредингеровское после преобразования подобия с тривиальным унитарным оператором, состоящим в умножении на $\exp\left[-\frac{1}{4}(u,u)\right]$. Строго говоря, введенные выше $A(u)$ и $B(u)$ вначале должны быть определены на конечном числе линейных функционалов, а затем по непрерывности распространены на все $L_2(\mathscr{H})$. Параллелизм с теорией для конечномерного случая может быть проиллюстрирован тем фактом, что P и Q переводятся преобразованием Винера в Q и $-P$. Аналогичное преобразование над обычными шредингеровскими P и Q в конечномерном случае проделывает преобразование Фурье.

Переходя к обсуждению связи между шредингеровским представлением и представлением Фока — Кука, отметим прежде всего, что из-за свойства ортогональной инвариантности канонического нормального распределения каждому ортогональному преобразованию V на пространстве $\mathscr{H}$ соответствует унитарное преобразование $\Gamma(V)$ на пространстве $L_2(\mathscr{H})$, определяемое формулой $f(x) \to f(V^{-1}x)$. Строгое определение оператора $\Gamma(V)$ требует, конечно, аналогичной предыдущему процедуры расширения. Это соответствие, не меняя пространства представления, можно распространить на унитарные операторы «комплексификации» пространства $\mathscr{H}$, т. е. на унитарные операторы комплексного гильбертова пространства $\mathscr{H}' = \mathscr{H} + i\mathscr{H}$. Простейший из этих унитарных операторов — оператор умножения на i — будет переходить при этом в преобразование Винера. Разложение расширенного представления на неприводимые компоненты с физической точки зрения есть не что иное, как разложение пространства векторов состояния в прямую сумму n-частичных подпространств. Эта же процедура с вероятностной точки зрения рассматривалась в хорошо известной работе Винера по однородному шуму. Упомянутое разложение содержит подпространства $\mathscr{H}'_k$ пространства $L_2(\mathscr{H})$ (k — целое неотрицательное число); под действием $\Gamma(U)$ элементы этого подпространства преобразуются как ковариантные симметрические тензоры ранга k над $\mathscr{H}'$. Как хорошо известно из результатов для конечномерного случая, представление $\Gamma(U)$ в этих подпространствах неприводимо. Инфинитезимальный оператор однопараметрической унитарной группы $\Gamma(e^{it})$ $(-\infty < t < \infty)$ известен в физике как «оператор полного числа частиц». Всякий ограниченный оператор, коммутирующий со всеми $\Gamma(U)$, является функцией от этого оператора N числа частиц. Подпространства $\mathscr{H}'_k$ являются собственными подпространствами оператора N, на которых он сводится к оператору умножения на k.

Изложенные построения позволяют явно описать эквивалентность шредингеровского, или «волнового», представления и представления Фока — Кука, или представления в терминах «частиц». Этому соответствует двойственность волна-частица в теории квантованных полей. Дадим точное определение второго из названных представлений. Введем на комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ *ковариантный* тензор ранга k как полилинейный функционал φ на k-кратной прямой сумме k экземпляров пространства $\mathscr{H}^*$:

$$(x_1^*, \ldots, x_k^*) \to \varphi(x_1^*, \ldots, x_k^*).$$

Симметрический тензор определим условием

$$\varphi(x_{(1)}^*, \ldots, x_{(k)}^*) = \varphi(x_1^*, \ldots, x_k^*),$$

в котором $(1), \ldots, (k)$ — произвольная перестановка индексов $1, \ldots, k$. Назовем тензор *квадратично интегрируемым* (или *нормируемым*), если выполняется условие ограниченности

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} |\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})|^2 < \infty;$$

здесь $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}$ — полная ортонормированная система в $\mathscr{H}$. Можно показать, что при выполнении этого условия для какой-нибудь одной ортонормированной системы оно выполняется и для всякой другой такой системы, и если ввести скалярное произведение формулой

$$(\varphi, \varphi') = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \varphi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \bar{\varphi}'(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}),$$

то оно ие зависит от выбора базиса. Отсюда следует, что ковариантные нормируемые k-тензоры образуют гильбертово пространство с введенным выше скалярным произведением, а в этом гильбертовом пространстве симметрические тензоры образуют замкнутое подпространство $\mathscr{H}_k$ — пространство симметрических ковариантных тензоров на $\mathscr{H}$.

При $k=1$ пространство $\mathscr{H}_1$ канонически отождествляется с $\mathscr{H}$. Для $k=0$ удобно ввести тензор просто как постоянную (комплексное число) и рассматривать все 0-тензоры как симметрические и нормируемые, а соответствующее пространство $\mathscr{H}_0$ считать одномерным гильбертовым пространством со скалярным произведением $(a, b)=a\bar{b}$. Тогда с пространством $\mathscr{H}$ каноническим образом ассоциируется гильбертово пространство $\mathscr{K}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k$ — прямая сумма всех симметрических тензоров. Для каждого унитарного оператора U на $\mathscr{H}$ можно ввести соответствующий унитарный оператор $\Gamma(U)$ на $\mathscr{K}$, а именно, $\Gamma(U)$ переводит вектор φ из $\mathscr{H}_k$ в вектор φ', задаваемый равенством

$$\varphi'(x_1^*, \ldots, x_k^*)=\varphi((Ux_1)^*, \ldots, (Ux_k)^*).$$

Здесь x^* для любого вектора x из $\mathscr{H}$ обозначает линейный функционал $y\to(y, x)$. Нетрудно проверить, что для любых двух унитарных операторов U и U' на $\mathscr{H}$ выполняется соотношение $\Gamma(UU')=\Gamma(U)\Gamma(U')$. Отображение $U\to\Gamma(U)$ непрерывно, так что $\Gamma(U)$ определяет непрерывное унитарное представление полной унитарной группы пространства $\mathscr{H}$. С точки зрения теории групп это представление обладает замечательными свойствами. Пусть, в частности, R_i — представления некоторой группы G на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_i$ $(i=1, 2)$, тогда $\mathscr{K}(\mathscr{H}_1+\mathscr{H}_2)$ канонически изоморфно $\mathscr{K}(\mathscr{H}_1)\times\mathscr{K}(\mathscr{H}_2)$, так что $\Gamma(R_1(g)+R_2(g))\cong\Gamma(R_1(g))\times\Gamma(R_2(g))$. Это значит, грубо говоря, что Γ ведет себя как показательная функция от представлений. Возможно, не лишено интереса найти все универсальные представления, обладающие тем же самым функциональным свойством.

Пусть x — любой вектор на $\mathscr{H}$ и x^* — соответствующий элемент из $\mathscr{H}^*$. Введем операцию $\varphi\to\varphi'$, переводящую k-тензор φ в $(k+1)$-тензор φ' по формуле

$$(k+1)!\,\varphi'(u_1^*, \ldots, u_{k+1}^*) = $$
$$= (k+1)^{1/2} \sum_{\pi} (x,\ u_{\pi(i)})\,\varphi(u_{\pi(1)}^*, \ldots, \hat{u}_{\pi(i)}^*, \ldots, u_{\pi(k)}^*).$$

(Здесь π обозначает группу всех перестановок $1, 2, \ldots, k+1$, а знак $\hat{}$ над $u_{\pi(i)}^*$ означает, что соответствующая переменная должна быть опущена.) Эта операция допускает единственное линейное расширение на алгебраическую прямую сумму $\mathscr{D}$ всех $\mathscr{H}_k$. Рассматриваемое как оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{K}$, это расширение допускает замыкание $C(x)$, которое называют «оператором рождения x-частицы». Сопряженный оператор $C(x)^*$, область определения которого также содержит $\mathscr{D}$, называется «оператором уничтожения x-частицы». Эти названия объясняются тем, что действие оператора $C(x)$ увеличивает число x-частиц на единицу (понятие числа частиц было объяснено выше в связи с представлением Г), а оператор $C(x)^*$ уменьшает число частиц на единицу, если применить его к вектору, представляющему состояние, в котором есть по крайней мере одна x-частица.

Нетрудно проверить, что операторы $C_0(x)$ и $C_0(x)^*$, получающиеся при сужении $C(x)$ и $C(x)^*$ на $\mathscr{D}$, удовлетворяют соотношениям

$$[C_0(x),\ C_0(y)^*] = -(x,\ y),$$

из которых следует, что для

$$R_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(C_0(x) + C_0(x)^*)$$

выполняются соотношения

$$[R_0(x),\ R_0(y)] = -i\,\mathrm{Im}\,(x,\ y).$$

Это указывает на то, что операторы $R_0(\cdot)$ можно расширить до инфинитезимальных операторов системы Вейля, и строгое исследование подтверждает это предположение.

Впрочем, наиболее экономный способ вывода соотношений Вейля получается ссылкой на изоморфизм этой тензорной системы и обобщенной шредингеровской системы, для которой проверена справедливость таких соотношений. Опишем этот изоморфизм подробнее. Пусть $\mathscr{H}'$ — вещественное гильбертово пространство и $\mathscr{H}$ — его комплексификация $\mathscr{H}' + i\mathscr{H}'$. Всякий элемент из плотного множества $\mathscr{D}$ дает простой функционал на $\mathscr{H}^*$, если все переменные положить равными одному и тому же x^*. Результирующий функционал является полиномом на $\mathscr{H}^*$. Его сужение на $\mathscr{H}'$ попадает в область определения преобразования Винера с произвольным коэффициентом дисперсии и, в частности, с коэффициентом $1/2$. Построим теперь по заданному симметрическому k-тензору функционал в $L_2(\mathscr{H}')$, преобразуя его вначале в указанный функционал на $\mathscr{H}^*$, применяя затем преобразование Винера с параметром $1/2$ и умножая результат на $(k!)^{-1/2}$ (отметим, что соответствующее распределение на $\mathscr{H}'$ имеет параметр 1, а не $1/2$). Это соответствие по линейности и непрерывности распространяется до унитарного преобразования пространства $\mathscr{K}$ всех нормированных симметрических ковариантных тензоров на $\mathscr{H}$ в пространство $L_2(\mathscr{H}')$, причем введенный выше оператор $R_0(z)$ переходит в оператор, замыкание которого является самосопряженным инфинитезимальным оператором системы Вейля, стандартным образом ассоциированной с пространством $L_2(\mathscr{H}')$.

Третье представление во многом напоминает шредингеровское. Различие состоит в том, что пространство представлений строится теперь на функционалах на классическом фазовом пространстве $\mathscr{H}$, а не на его вещественной части; при этом неприводимость получается из рассмотрения не произвольных квадратично интегрируемых функционалов, а только голоморфных. Это представление не было достаточно подробно исследовано в литературе, но оно очень упрощает структуру операторов рождения и уничтожения и может в дальнейшем оказаться полезным. Квадратично интегрируемые функции на фазовом пространстве впервые использовал для представления динамических переменных Купман при исследовании классических систем с конечиым числом степеней свободы, однако ни голоморфные функционалы, ни переменные пóля при этом не появлялись.

Под полиномом на комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ мы будем понимать функцию $p(\cdot)$ на $\mathscr{H}$, представимую в виде полинома от конечного числа скалярных произведений $(z, e_1), \ldots, (z, e_n)$, где e_i — фиксированные векторы из $\mathscr{H}$. Рассматриваемое представление может базироваться как на голоморфных функционалах на пространстве $\mathscr{H}^*$, так и на антиголоморфных функционалах на пространстве $\mathscr{H}$, при этом голоморфные и антиголоморфные функционалы определяются как некоторые пределы полиномов. Между этими двумя миожествами функционалов легко установить унитарное соответствие, сопоставляющее любому полиному p на $\mathscr{H}^*$ антиполином p^* по следующему правилу: если $u \in \mathscr{H}$ и u^* — линейный функционал вида $u^*(w) = (w, u)$, где w — произвольный элемент из $\mathscr{H}$, то $p^*(u) = p(u^*)$. Достаточно будет описать представление в пространстве голоморфных функционалов.

Пусть n — центрированное нормальное распределение с единичной дисперсией на $\mathscr{H}^*$, рассматриваемом как вещественное пространство. Обозначим через $\mathscr{K}$ замыкание в метрике пространства $L_2(\mathscr{H}^*, n)$ множества всех полиномов на $\mathscr{H}^*$. Для произвольного z из $\mathscr{H}$ введем унитарный оператор $W(z)$ на $\mathscr{K}$, который действует на полиномы по формуле

$$p(u^*) \to p(u^* + z^*) \exp\left[-\frac{1}{4}(z, z) - \frac{1}{2}u^*(z)\right]$$

(z^* обозначает линейный функционал $u \to (u, z)$). Используя трансформационные свойства нормального распределения, легко вывести, что $W(\cdot)$ будет системой Вейля. Рассмотрим далее унитарный оператор $\Gamma(U)$, соответствующий унитарному оператору U на $\mathscr{H}$ и действующий на полиномы по формуле

$$p(u^*) \to p((Uu)^*).$$

Легко проверяется, что Г образует непрерывное унитарное представление группы всех унитарных операторов на $\mathscr{H}$. Пусть v^* — функционал на $\mathscr{H}^*$, тождественно равный единице. Можно показать теперь, что мы получили обычное представление свободного поля (с точностью до унитарной эквивалентности), в котором v^* — вакуум и $\Gamma(U)$ — представление одночастичных движений движениями поля.

Замечательным свойством этого представления является особенно простой вид операторов рождения и уничтожения. Исходя из переменных поля $R(z)$, порождаемых системой Вейля, легко получить вид операторов $C(z)$ и $C(z)^*$ на полиномах. При этом с точностью до множителей $\pm(-1/2)^{\pm 1/2}$ оказывается, что оператор рождения частицы с волновой функцией z действует как оператор умножения на (z, u), а оператор уничтожения действует как дифференцирование в направлении z (т. е. как единственное дифференцирование алгебры полиномов на $\mathscr{H}^*$, переводящее $u^*(w)$ в (w, z) при любом w из $\mathscr{H}$).

Представление Фока — Кука и представление голоморфными функционалами связаны очень просто. Если положить в k-тензоре f все переменные одинаковыми, он определит функционал на $\mathscr{H}^*$. Дополненное некоторыми числовыми множителями, это преобразование и переводит одно представление в другое. Каким из этих представлений следует пользоваться, это зависит от конкретной ситуации. Например, эквивалентность шредингеровского представления и представления Фока — Кука позволяет, по-видимому, простейшим способом описать спектр потока, связанного с броуновским движением (результат, полученный первоначально Какутани [1]). С другой стороны, иногда бывает необходимо рассматривать экспоненту или другие целые функции от операторов рождения и уничтожения. К этому близка задача представления экспоненты от $R(z)$ в так называемой нормальной форме Вика. С точки зрения этих задач целесообразнее всего использовать представление голоморфными функционалами. Оно порождает некоторую псевдодиагонализацию для недиагонализируемых операторов рождения и уничтожения; заключающаяся в нем возможность подхода к таким операторам представляет, по-видимому, и чисто математический интерес.

Литературные указания к главе VI

Первое точное, хотя и несколько нестрогое, описание пространства представлений для операторов квантовой теории было дано Фоком [1]. В работе Кука [1] это представление было исследовано с полной строгостью и, в частности, была доказана существенная самосопряженность некоторых основных квантовомеханических переменных. Перенормированное шредингеровское представление рассмотрел Сигал [4, 5]. Основываясь на квантовомеханических идеях, Винер и Зигель [1] указали на полезность унитарных групп, возникающих из групп преобразований, сохраняющих меру, и показали, каким образом работа Пэли и Винера приводит к представлению унитарной группы на $L_2(-\infty, \infty)$ сохраняющими меру преобразованиями пространства Винера. Замечательно, что это представление в существенном эквивалентно представлению Г унитарной группы, ассоциированному с квантованием Бозе — Эйнштейна при $\mathscr{H} = L_2(-\infty, \infty)$. Что же касается квантования Ферми — Дирака, то здесь возникают преобразования, сохраняющие меру в «пространстве с некоммутативной мерой» (Сигал [5]). Представление Г использовалось в эвристическом варианте Фридрихсом [1] для квантования Бозе — Эйнштейна. В этой работе в связи с представлением переменных поля определялось также скалярное произведение для «эрмитовых функционалов» на гильбертовом пространстве. Как уже отмечалось, двойственность между представлением Фока и представлением Шредингера имеет свои корни в хорошо известной связи между полем Бозе — Эйнштейна и системой гармонических осцилляторов (а следовательно, и с функциями Эрмита). Это неоднократно отмечалось Дираком, Ферми и другими.

Представление системы Вейля всеми квадратично интегрируемыми функционалами на комплексном гильбертовом пространстве было введено Шейлом. Это представление, разумеется, приводимо. Сигал [13] показал, что применение всех операторов системы Вейля к единичному функционалу порождает описанное в этой главе представление голоморфными функционалами. Оно лучше, чем другие представления, приспособлено к задаче нелинейного релятивистского квантования и играет существенную, хотя и неявную, роль в работе Сигала [11].

9 Зак. 1017

Глава VII

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ: КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Основная математическая задача в связи с взаимодействующими полями состоит не в том, чтобы устанавливать различные математические теоремы, а в том, чтобы найти эффективную формулировку самой концепции взаимодействующего поля. Теория эффективна тогда, когда в ее рамки могут быть включены содержательные примеры, однако в настоящее время не известно ни одного нетривиального релятивистского примера, описывающего возникновение частиц и допускающего трактовку с точки зрения любой из существующих общих формулировок понятия взаимодействующего поля. Такое положение не мешает успешно применять «теорию взаимодействующих полей» во многих нетривиальных частных случаях (примером может служить квантовая электродинамика), но тем не менее теория в обычном понимании отсутствует. Имеется лишь набор довольно специальных методов и идей, как правило, эвристических и даже довольно смутных, применимых только в конкретных задачах. Нельзя сказать, что предмет лишен математической красоты, которую на самом деле можно рассматривать как основное побуждение для его изучения; однако все еще нет уверенности, что эта красота не иллюзорна.

Представляется, что возможны два математических подхода к проблеме — конструктивный и аксиоматический, но между ними нет резкой границы, так как во всех случаях необходимо хотя бы в какой-то мере понять, из чего же состоит теория квантованных полей. Было дано несколько различных формулировок; все они могут восприниматься как попытки систематизировать существующую экспериментальную и теоретическую практику. Среди этих формулировок можно отметить, например, метод порождающих функционалов, развитый Швингером, подход в терминах вакуумных ожиданий от произведений переменных поля, активно развивавшийся в последние годы Челленом и Вайтманом, подход, основанный на использовании так называемых приходящих и уходящих полей и на не зависящем от представления формализме (это направление неявно отражено в предыдущих главах). Известно и много других подходов; некоторые из них могут рассматриваться как варианты только что названных. По сути дела, невозможно строго доказать, что квантовая электродинамика или какое-нибудь другое поле со взаимодействием существует или не существует; самое большее, на что можно надеяться, это на возможность при различных специальных формулировках устанавливать справедливость или несправедливость некоторой разумной совокупности утверждений.

В рамках этой ситуации трудно получать определенные результаты; это стало бы возможным только при наличии строгой и эффективной математической формулировки, достаточно простой с общей физической точки зрения. Математические трудности становятся очевидными, когда мы обнаруживаем (при том, что в глобальной теории нелинейных гиперболических уравнений остаются нерешенными многие принципиальные вопросы), что теория квантованных полей систематически использует именно уравнения такого сорта, в которых решение принимает не просто числовые значения, а является псевдооператором в бесконечномерном пространстве, и даже не оператором в строгом смысле слова, хотя бы и неограниченным, а каким-то зародышем оператора.

Успешное исследование модели ван Хова вызывает желание применить такие же методы для релятивистских взаимодействующих полей. Однако подобная программа приводит в этом случае к гораздо более скромным результатам. Положительным результатом настоящей главы является доказательство того, что в типичных случаях, например в квантовой электродинамике, гамильтониан взаимодействия можно сделать сходящимся, если выбрать некоторое специальное представление. При этом будет использована так называемая картина взаимодействия, которая, по-видимому, теснее связана с измерением, чем картина Гейзенберга; кроме этого, картина взаимодействия кажется более близкой к идеям перенормировки в их простейшей форме. Однако в этой картине гамильтониан взаимодействия зависит от времени, и возникает естественный вопрос, существует ли такое представление, в котором гамильтониан конечен для всех времен. Это трудный вопрос, но до некоторой степени его можно свести к корректно поставленным математическим задачам, не зависящим от вариаций в деталях формулировки. Впрочем, если бы было доказано, что такое представление существует или не существует (иначе говоря, был бы установлен определенный характер сходимости или расходимости), нельзя было бы утверждать что-либо о сходимости различных формулировок в терминах картины Гейзенберга. Грубо говоря, трудности порождаются тем, что нелинейную ситуацию в теории взаимодействующих полей мы пытаемся описать в линейных терминах (используя либо «голые» поля, либо асимптотически свободные физические поля; и те и другие линейны). Естественно, что мы получаем запутанные и сложные результаты. В следующей главе мы попробуем указать некоторые лекарста от этой болезни.

Наиболее важное взаимодействие теории поля, линейно-билинейное взаимодействие полей Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака, формально можно описать разными способами: при помощи уравнений движения, в терминах гамильтониана взаимодействия и т. д. Ни одна из этих формулировок не имеет ясного математического смысла; ради краткости мы выбрали здесь описание с помощью гамильтониана взаимодействия. В «картине взаимодействия» этот «оператор» зависит от времени и имеет вид

$$H_I(t) \sim \int \varphi(x, t)\, \mathbf{j}(x, t)\, d_3x,$$

где $\mathbf{j}(x, t)$ — эрмитова билинейная функция от фермионного поля $\psi(x, t)$. Функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям свободного поля — в этом и заключается преимущество картины взаимодействия. Как указывалось в гл. III, величина $\varphi(x, t)$ не имеет определенного математического смысла; ее можно охарактеризовать как операторнозначную квазифункцию, порождающую символическое представление линейного отображения $f \to \Phi(f) \sim \int \varphi(x) f(x)\, d_4x$ некоторого множества функций на пространстве-времени в операторы, действующие на векторы состояния в пространстве, на котором определено представление поля Бозе — Эйнштейна. Такое описание выглядит нестрогим, однако всякая более точная формулировка может быть лишь специальным истолкованием этой идеи и не отразится на существе дела. Коиечно, чтобы продвинуться в математическом отношении, без строгой интерпретации не обойтись, но здесь появляется опасность столкнуться со сложными техническими вопросами, которые в конце концов могут оказаться не относящимися к делу.

Чтобы дать математическое истолкование оператора взаимодействия, будем вначале рассуждать формально. Если мы хотим конкретизировать идею, мы можем считать φ фотонным полем φ_μ, а ψ — электронным полем, в этом случае $\mathbf{j}_\mu = \bar{\psi} \cdot \gamma_\mu \psi$ и $H_I(t) \sim \int \left(\sum_\mu \varphi_\mu \mathbf{j}_\mu \right) d_3x$.

Общий случай не виосит заметных отличий. Сказать, что φ является фотонным полем, формально эквивалентно возможности разложения φ по классическим фотонным волновым функциям с операторными коэффициентами, удовлетворяющими каноническим перестановочным соотношениям. Запишем это в виде

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} R_k \varphi_k(x),$$

здесь $\{\varphi_k\}$ — ортонормированный базис в пространстве нормируемых решений уравнения Максвелла, а R_k —

обычные операторы, коммутаторы которых являются скалярами. Подобным же образом ψ можно разложить по классическим решениям уравнения Дирака

$$\psi(x) \sim \sum_k S_k \psi_k(x),$$

и операторы S_k имеют скалярные антикоммутаторы. Исходное формальное выражение для H_I лишено математического смысла прежде всего потому, что мы не можем придать смысла произведению $\varphi_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$; оно не является квазифункцией подобно φ и ψ, и не известен способ приписать этому выражению значение в определенной точке. Но, продолжая формальные преобразования, подставим в H_I предыдущие выражения для φ и ψ через классические поля. В результате получим

$$H_I(t) \sim \sum_{ijk} R_i S_j^* S_k c_{ijk},$$

где постоянные c_{ijk} имеют вид

$$c_{ijk} = \int \varphi_i(x) \overline{\psi_j(x)} \psi_k(x) \, d_3x.$$

Это можно переписать так:

$$H_I(t) \sim \sum_i R_i N_i, \quad N_i = \sum_{jk} c_{ijk} S_j^* S_k.$$

Наше продвижение по сравнению с первоначальным выражением, включавшим локальные произведения полей, состоит в том, что теперь и индивидуальным операторам R_i и N_i, и конечным суммам $\sum_{i=1}^{n} R_i N_i$ можно придать явный математический смысл, и расходимость H_I может возникнуть только из-за отсутствия предела указанных сумм, а это довольно привычный характер расходимости. Поэтому переопределим H_I с помощью полученной суммы. Чтобы обеспечить конечность коэффициентов c_{ijk}, «поместим систему в ящик», т. е. предположим, что пространственные и временные координаты ограничены некоторым произвольным, но фиксированным способом, и наложим периодические граничные условия. Так как ящик можно сделать сколь угодно большим, то физические результаты будут получаться сколь угодно точными, и можно ожидать, что принципиальные вопросы сходимости не зависят от этой процедуры.

Погружение системы в ящик приводит и к тому, что все операторы N_i становятся настоящими самосопряженными операторами в пространстве векторов состояния поля Ферми — Дирака; без такого преобразования эти операторы оказались бы расходящимися. Это связано с тем, что билинейные выражения такого типа, как N_i, подобны математически безупречному объекту $d\Gamma(A_i)$, где Γ — представление, переводящее классические движения в квантовые, $d\Gamma$ — связанное с Γ инфинитезимальное представление и A_i — обычный самосопряженный оператор в исходном классическом гильбертовом пространстве. Наиболее известным выражением подобного сорта является интеграл $\int \psi^*(x)\psi(x)d_3x$, дающий полное число частиц; правильнее было бы писать эту величину как $d\Gamma(I)$, где I — тождественный оператор. В специальных примерах нетрудно, хотя это и несколько громоздко, найти явные выражения для A_i. Отбрасывания «вакуумных ожиданий», которые обычно являются бесконечными постоянными, в нашей формулировке не требуется, так как вакуумные ожидания автоматически оказываются нулями.

Отметим еще один существенный и несколько более формальный момент: оказывается, что все N_i взаимно коммутируют. Это следует из известного свойства квантования свободных полей, называемого «микропричинностью», и приводит к тому, что рассматриваемые в один и тот же момент времени t переменные «поля» $\varphi(x, t)$ Бозе — Эйнштейна (в разных точках x) и токи $\mathbf{j}(x, t)$ поля Ферми — Дирака коммутируют. Хотя микропричинность иногда и рассматривается как постулат, для свободных полей она автоматически вытекает из ковариантных правил квантования. Так как N_i зависят от $\mathbf{j}(x, t)$ линейно при фиксированном t, то формально N_i также коммутируют. Для каждого представления можно получить строгое обоснование, вычисляя операторы A_i, для которых $N_i = d\Gamma(A_i)$, и проверяя, что они взаимно коммутируют. Эти операторы оказываются корректно определенными операторами на одночастичном пространстве $\mathscr{H}$. Так как Γ является представлением, то для любых коммутирующих самосопряженных операторов A и B на $\mathscr{H}$ вследствие коммутативности однопараметрических групп e^{isA} и e^{itB} $(-\infty < s,\ t < \infty)$ получаем коммутативность соответствующих групп $\Gamma(e^{isA})$ и $\Gamma(e^{itB})$, так что их самосопряженные инфинитезимальные операторы коммутируют в обычном строгом смысле.

Теперь мы можем дать строгое определение $H_I(t)$:

$$H_I(t) = \sum_i (R_i N_i)^{\sim}.$$

Здесь R_i — канонические переменные на фотонном пространстве векторов состояния (представление пока не конкретизировано) и N_i — обсуждавшиеся самосопряженные операторы на электронном пространстве векторов состояния, имеющие специальный вид $d\Gamma(A_i)$. Значок $\sim$ у оператора отмечает операцию замыкания, т. е. расширения оператора на максимальную область, на которой он действует естественным образом; замыкание автоматически существует ввиду коммутативности и самосопряженности R_i и N_i. Сумму замкнутых операторов мы зададим как оператор, область определения которого состоит из всех векторов, входящих в области определения слагаемых и таких, что соответствующие ряды, получаемые после применения отдельных слагаемых, сходятся. На таких элементах сумма задается естественным образом. Конечно, сейчас мы не можем гарантировать, что в область определения суммы входит хотя бы один ненулевой вектор.

После того как мы определили оператор $H_I(t)$, перед нами встает вопрос о его свойствах и о свойствах связанного с ним движения поля. Ясно, что прежде всего это «единственность» и «конечность» $H_I(t)$, но для того, чтобы осознать, что следует понимать под «конечностью», мы должны обсудить ту роль, которую играет гамильтониан взаимодействия в общей теории. В эмпирическом плане на первом месте стоит так называемый S-оператор (или оператор рассеяния), описывающий полное движение (за время от $-\infty$ до ∞) относительно соответствующего движения поля без взаимодействия. Матричный элемент $(Sx,\ y)$ этого оператора определяет вероятность перехода из состояния, представленного вектором x, в состояние, представленное вектором y.

Формально оператор рассеяния определяется как унитарный оператор в представлении, порождаемом физическим вакуумом, индуцированным автоморфизмом $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)\theta_0(t)^{-1}$ алгебры наблюдаемых поля. Здесь использованы введенные ранее обозначения: $\theta(\cdot)$ — однопараметрическая группа автоморфизмов, отвечающая реальному временно́му движению поля (в «картине Гейзенберга»), а $\theta_0(\cdot)$ определяется кинематикой. Конечно, существование указанного предела тоже открытый вопрос, но он ненамного сложнее, чем строгое доказательство существования $\theta(\cdot)$. Из этого определения и определения $H_I(t)$ можно без труда вывести, что оператор S формально представляется непрерывным произведением

$$S=\lim\prod_{k=1}^{n}\exp\left[iH_I(t_k)(t_{k+1}-t_k)\right],$$

в котором сомножители должны быть расставлены в порядке возрастания времени справа налево. В этом произведении необходимо взять предел при $t_1\to-\infty$, $t_n\to+\infty$ и $\max\limits_k|t_{k+1}-t_k|\to 0$. В первый вариант этой формулы, предложенный Дайсоном, вместо экспонент входили два первых члена разложения их в степенные ряды. Этот вариант приводит к сложным степенным разложениям для S, коэффициенты которых становятся конечными только после «перенормировки». Однако и новый ряд, по-видимому, расходится и тем самым довольно бесперспективен в математическом отношении. Здесь мы будем иметь дело только с экспоненциальными произведениями. Из приведенного выражения для S и из коммутативности полей для одного и того же момента времени в случае «локальной» теории следует, что S коммутирует со всеми преобразованиями Лоренца (если рассматриваемая задача является релятивистской).

В выписанном произведении $H_I(t)$ определено в представлении, связанном с физическим вакуумом, но если нас интересуют только автоморфизмы, представляющие временно́е развитие поля, то главным свойством $H_I(t)$ становится для нас возможность определить экспоненту $\exp[iH_I(t_k)(t_{k+1}-t_k)]$. Это требование эквивалентно однозначной диагонализируемости $H_I(t)$ (что описывается в математических терминах как «существенная самосопряженность») и много сильнее, чем требование симметричности, которое в свою очередь сильнее, чем свойства гамильтониана взаимодействия, с которым имеют дело на практике. Классический подход неявно ограничивается исследованием H_I в том представлении, где конечен и гамильтониан свободного поля; нет никаких физических соображений, приводящих к этому техническому требованию, в сущности противоречащему духу теории перенормировок, если осознана роль, которую играет выбор представления.

Итак, следующий вопрос состоит в том, существует ли представление, в котором $H_I(t)$ — существенно самосопряженный оператор. Можно доказать, что всегда существует такое представление канонических переменных фотонного поля, зависящее, однако, от переменных фермионного поля, в котором $H_I(t)$ — существенно самосопряженный оператор. В терминах канонических пар переменных фотонного поля P_1, Q_1, P_2, Q_2, ... оператор $H_I(t)$ имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(P_kA_k+Q_kB_k)^{\sim}$, где A_k и B_k — зависящие от времени взаимно коммутирующие самосопряженные операторы, которые определяются фермионным полем и потому коммутируют с P и Q. Это есть не что иное, как обсуждавшийся ранее гамильтониан взаимодействия в модели ван Хова с той лишь разницей, что A_k и B_k теперь не числа, а операторы. Как и прежде, в этом случае также будет существовать новая совокупность канонических переменных P'_1, Q'_1, P'_2, Q'_2, ..., зависящих от заданных операторов, взятых в представлении свободного поля, такая, что оператор $\sum_k (P'_k A_k + Q'_k B_k)^{\sim}$ будет существенно самосопряженным. Таким образом, в этом представлении гамильтониан взаимодействия оказывается в нужном смысле конечным.

Возможно, что полученный результат может рассматриваться как первый шаг в желаемом направлении, однако остается еще много серьезных трудностей. К ним в первую очередь надо отнести неединственность представления, его зависимость от времени и согласованность только с фотонными переменными. Как устранить зависимость от времени, неизвестно; осложнения вызываются тем, что переменные $A_k(t)$ и $B_k(t)$ в разные моменты времени не коммутируют. Но так как $A_k(t)$ и $B_k(t)$ являются гладкими функциями от t, то естественно ожидать, что для любого конечного промежутка времени $-T<t<T$ существует такое представление, в котором все $H_I(t)$ будут существенно самосопряженными, и что тем самым существует непрерывное произведение, определяющее унитарный оператор, трансформирующий поле за время от $-T$ до T. С другой стороны, вероятнее всего, что для бесконечного промежутка $-\infty<t<\infty$ такого представления не существует. Правда, последнее с точки зрения физики не очень опасно, так как наблюдения соответствуют скорее случаю больших T, чем $T=\infty$. Но даже и при таком подходе остается проблема явной неединственности представления. Ввиду того что описанные ранее результаты не зависели от представления, а также ввиду того, что в перенормированной теории возмущений представление не конкретизируется явно, можно ожидать, что окончательные результаты будут одинаковыми во всех представлениях, в которых движение от $-T$ до T представимо конечным унитарным преобразованием и которые обладают некоторой естественной гладкостью. Однако никакого доказательства этого утверждения не существует. Что же касается представления фермионного поля, значение которого выглядит довольно туманным, то его уместно связать с интерпретацией окончательных результатов в терминах частиц.

Предыдущий подход к проблеме сходимости, так же как и все другие предлагавшиеся до сих пор строгие подходы, довольно спекулятивен и кажется чрезвычайно сложным и запутанным по сравнению с теми простыми концептуальными идеями, на которых базируется квантовая электродинамика. Может быть, теория все-таки сходится в каком-нибудь более наивном смысле и в том случае, когда все операторы заданы в представлении свободного поля? Уже отмечалось, что фактически невозможно строго опровергнуть такое предположение, так как нельзя с физической точки зрения отвергнуть возможность альтернативной формулировки задачи. Имеются, однако, некоторые точные решения для инфинитезимального движения, приводящие к определенным математическим результатам, физическая интерпретация которых, впрочем, не очень ясна, но которые показывают, что теория расходится при таком сравнительно ограниченном понимании сходимости.

Инфинитезимальное движение за время от t до $t+dt$ переводит динамическую переменную X, взятую в момент t, в динамическую переменную, представимую формальным выражением

$$\exp\left[iH_I(t)\,dt\right] X \exp\left[-iH_I(t)\,dt\right].$$

Если X — одна из канонических переменных, то это преобразование легко приводится к виду

$$P_k \to P_k + B_k\,dt, \quad Q_k \to Q_k - A_k\,dt.$$

Возникает совершенно конкретный математический вопрос, будет ли это преобразование при конечных значениях dt порождаться унитарным оператором. Приведенные выше теоремы нельзя применить в этом случае непосредственно из-за операторного характера A_k и B_k, однако можно исследовать эту задачу прежними методами, и оказывается, что такого унитарного оператора не существует. Грубо говоря, для того чтобы существовал такой унитарный оператор, A_k и B_k должны достаточно быстро стремиться к нулю, а на самом деле они имеют один и тот же порядок при всех k. Таким образом, оценка явной формы инфинитезимального движения в представлении взаимодействия (для квантовой электродинамики в «ящике») показывает, что в обычном понимании эта теория расходится. Тем самым мы вновь возвращаемся к необходимости иметь дело с различными представлениями переменных поля.

Суммируя, мы вынуждены признать, что предыдущий подход принес мало прибыли при довольно существенном вкладе. Поэтому представляется соблазнительным попытаться полностью изменить подход. Все новые подходы можно классифицировать в зависимости от того, какую картину — гейзенберговскую или взаимодействия — они используют, чтобы отразить явно важную релятивистскую инвариантность, а также в зависимости от того, насколько в этом подходе символические операторы теории близки к bona fide операторам в гильбертовом пространстве. Предыдущий подход использует, например, картину взаимодействия и, что более существенно, некоторый промежуточный уровень строгости в подходе к операторам: одни (хотя, конечно, не все) операторы в этом формализме предполагаются настоящими операторами в представлении, определяемом по вакууму, другие псевдооператоры представимы операторами в других представлениях. Естественно задать вопрос, насколько далеко можно продвинуться, используя картину Гейзенберга и вводя минимальные предположения о символических операторах.

По-видимому, простейшим в этом плане является подход, базирующийся на вакуумных ожиданиях от простых произведений (гейзенберговских) операторов поля. Хотя к идеям перенормировки ближе всего вакуумные ожидания так называемых «временны́м образом упорядоченных произведений», они сложнее с математической точки зрения. Мы начнем с замечания, что, хотя для взаимодействующих полей лишены математического смысла не только операторы $\varphi(x)$, но, возможно, даже их усреднения с гладкими финитными функциями $\int \varphi(x) f(x)\, d_4x$, тем не менее вакуумным ожиданиям от произведений последних псевдооператоров можно придать совершенно точный математический смысл. Это объясняется тем, что такие вакуумные ожидания имеют более непосредственную связь с экспериментом. Во всяком случае, в обычной теории эти вакуумные ожидания оказываются конечными после перенормировки, хотя первоначально они и расходятся. Такие начальные бесконечности могут вызвать некоторую нерешительность, но в рамках философии теории перенормировок они считаются почти положительным фактом, так как физическими, а тем самым и конечными являются именно перенормированные поля, в то время как «голые», или неперенормированные, поля считаются виртуальными объектами; им разрешается быть бесконечными, но их присутствие в теории должно быть минимизировано. В настоящее время «голые» поля неизбежно присутствуют во всякой специальной теории, вроде квантовой электродинамики, но хотелось бы как можно дальше развить методы, основанные только на более физических перенормированных полях.

Такой подход встречается, однако, со многими принципиальными затруднениями. Чтобы получить неотрицательные вероятности перехода, приходится предполагать, что вакуумные ожидания удовлетворяют условиям положительной определенности, автоматически выполняющимся для настоящих операторов. Эти вакуумные ожидания совершенно аналогичны моментам вероятностных распределений (правда, в бесконечномерном пространстве и для некоммутирующих случайных величин), а требование неотрицательности аналогично подобному же требованию для моментов. К сожалению, неизвестно, сохраняются ли условия положительной определенности после перенормировки.

При отсутствии всяких прямых формальных аргументов было бы ценно знать, что такое свойство выполняется в некоторых нетривиальных случаях в теории возмущений, однако никаких результатов в этом направлении до сих пор нет, что и не удивительно ввиду чрезвычайной громоздкости необходимых вычислений. В целом, однако, кажется обоснованным некоторый скептицизм в отношении положительной определенности вакуумных ожиданий в перенормированной теории, например в квантовой электродинамике.

Правда, с полуэмпирической точки зрения положительная определенность должна выполняться, так как действительные вероятности перехода неотрицательны. Однако если это так, то с вакуумными ожиданиями можно связать гильбертово пространство и конкретное представление операторов поля на этом пространстве, подобно тому как это было сделано выше для состояния на C^*-алгебре. Тогда лоренц-инвариантность этих вакуумных ожиданий приведет к представлению группы Лоренца на этом пространстве и т. д. Если предположить теперь, что возникающие операторы поля имеют какие-то свойства регулярности, например интегралы $\int \varphi(x) f(x) d_4x$ являются существенно самосопряженными операторами, то выигрыш от того, что мы исследуем вакуумные ожидания, а не операторы, исчезает. А подобные свойства регулярности приходится вводить хотя бы для единственности вероятностного распределения псевдонаблюдаемых в нашей теории.

С математической точки зрения возможно также появление корректно определенного регулярного состояния, в котором вакуумные ожидания произведений операторов поля бесконечны. Другая возможность может состоять в том, что все вакуумные ожидания от произведений конечны, но не определяют единственным образом состояния, наподобие того как моменты распределения необязательно однозначно задают распределение. Еще одна трудность может возникнуть в том случае, когда и все вакуумные ожидания конечны, и определяемое ими регулярное состояние единственно, но нарушаются необходимые свойства гладкости этих математических ожиданий как функционалов от усредняющих функций f, а так бывает даже для свободных полей (с массой, равной нулю).

Можно было бы обсудить также и многие другие формулировки, некоторые из которых были объектами очень интенсивного изучения, однако и сказанного достаточно, чтобы согласиться с тем, что математические проблемы теории взаимодействующих полей сложны и новы в очень разных аспектах. Правда, это не должно быть основанием для чрезмерного пессимизма, и мы верим, что не зависящий от представления теоретико-операторный подход, который мы обсуждали в предыдущих главах, порождает определенные надежды, но было бы нереально рассчитывать на простое и строгое решение задач, например квантовой электродинамики, в ближайшем будущем. В сущности, не может быть простого и строгого способа трактовки обычной теории квантованных полей, так как она предполагает анализ состояний поля в терминах состояний свободного поля, которое является чем-то мифическим, в особенности с точки зрения теории перенормировок. Рассчитывать на возможность принципиально простой и строгой математической теории, которая была бы, с одной стороны, логически последовательной, а с другой — была бы просто связана с экспериментом через понятие «свободных физических частиц», не приходится. В следующей главе будет кратко описан внутренний подход к теорин взаимодействующих полей, он не зависит ни от какой линейной системы отсчета, не зависит от лагранжиана или гамильтониана и принципиально более удовлетворителен, хотя в настоящее время и чрезвычайно далек от эффективного расчета реальных физических эффектов.

Литературные указания к главе VII

По теории перенормировок в квантовой электродинамике имеется много книг, среди которых мы отметим книгу Челлена [1] (изложение в ней основано на картине Гейзенберга) и книгу Яуха и Рорлиха [1] (изложение основано на картине взаимодействия).

По поводу вакуумных ожиданий от произведений поля см. работу Вайтмана [1] и дальнейшие его статьи.

Цитированная теорема о конечности линейных форм от канонических переменных поля Бозе — Эйнштейна доказана Сигалом [10].

10 Зак. 1017

Глава VIII

НОВЫЕ ПОДХОДЫ И ПРОБЛЕМЫ

Как уже отмечалось, ни одна из существующих попыток включить обычную теорию квантованных полей в рациональную и строгую схему не получила такого развития, которое давало бы надежду на исчерпывающие и окончательные результаты. И даже если бы такой прогресс был достигнут, теория осталась бы неудовлетворительной из-за зависимости от вводимой ad hoc линейной системы отсчета. Чтобы приблизиться к квантованию нелинейных систем во внутренних терминах, представляется целесообразным начать с аналогичной конечномерной задачи (которая упоминалась в предыдущих главах). Так как нашей основной целью является новый формализм, разумно подойти к этому отчасти эвристически, если окажется, конечно, что это способствует краткому и ясному описанию основных формальных элементов.

Итак, пусть $\mathcal{S}$ обозначает конечномерное гладкое многообразие, которое является конфигурационным пространством некоторой системы. Если $\mathcal{S}$ — линейное пространство $\mathcal{L}$, его можно проквантовать, рассматривая фазовое пространство $\mathcal{M}=\mathcal{L}\oplus\mathcal{L}^*$, на котором каноническим образом определена, как отмечалось выше, кососимметрическая форма B. При этом существует единственное отображение $z\to R(z)$ из $\mathcal{M}$ на множество самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Это отображение линейно и удовлетворяет соотношениям Вейля, которые в инфинитезимальной форме утверждают, что

$$[R(z),\ R(z')]\sim -iB(z,\ z')$$

для произвольных элементов z и z' из $\mathcal{M}$. Аналогом $\mathcal{M}$ для общих многообразий является так называемый кокасательный пучок, состоящий из всех пар $(q,\ p)$, где

q — точка на $\mathscr{S}$ и p — ковектор, принадлежащий пространству, сопряженному касательному к $\mathscr{S}$ пространству в точке p. Обозначим этот кокасательный пучок через $\mathscr{M}$. Вместо выделенной кососимметрической билинейной формы B, с которой мы имели дело в линейном случае, теперь рассматривается кососимметрическая билинейная форма Ω_z на касательных векторах к $\mathscr{M}$ в точке z. Эта форма как функция от z однозначно определяется дифференциальной формой второго порядка на $\mathscr{M}$, которую можно задать классической формулой

$$\Omega = \sum_k dp_k\, dq_k,$$

где $q_1, \ldots, q_n$ — произвольные локальные координаты точки на $\mathscr{S}$ и $p_1, \ldots, p_n$ — соответствующие ковекторные координаты.

Форму Ω нельзя использовать для формулировки перестановочных соотношений так же просто, как B в линейном случае. Обобщенные канонические переменные, входящие в эти соотношения, должны быть, с одной стороны, связаны с формой Ω, а с другой — должны сводиться в линейном случае к обычным переменным. Естественно взять вместо вектора z в линейном фазовом пространстве векторное поле на общем фазовом пространстве $\mathscr{M}$, так как оно связано с Ω так же, как z с B, и так как вектор z каноническим образом определяет векторное поле, а именно, он порождает сдвиг на вектор, пропорциональный z. Это, разумеется, чрезвычайно специальные векторные поля, так что может показаться, что канонические переменные, ассоциированные с общими векторными полями, создают избыток переменных, но в конце концов оказывается, что их получается не больше, чем нужно.

Векторные поля Z на $\mathscr{M}$ в общем случае не будут коммутировать, подобно сдвигам на линейном пространстве, поэтому можно ожидать дополнительных осложнений в виде добавочных членов в перестановочных соотношениях. Таким путем мы приходим к обобщенным перестановочным соотношениям

$$-i\,[R(Z),\ R(Z')] = \Omega(Z,\ Z') + R([Z,\ Z']).$$

Можно показать, что сюда включаются не только известные соотношения для $R(z)$ в том случае, когда $\mathcal{S}$ — линейное пространство, но также и перестановочные соотношения между обычными угловыми моментами, импульсами и координатами в квантовой механике. Тем самым возникает формулировка всех таких соотношений, инвариантная относительно классических канонических преобразований.

Классическое каноническое преобразование T — это такое преобразование фазового пространства $\mathcal{M}$, которое оставляет инвариантным основную форму Ω. Естественно, что оно будет оставлять инвариантной также всякую степень Ω, в частности Ω^n для n, равного размерности $\mathcal{S}$. В классических терминах форму Ω^n можно выразить соотношением

$$\Omega^n = \prod_k dp_k\, dq_k;$$

это означает, в частности, что всякое каноническое преобразование оставляет инвариантным элемент меры $\prod_k dp_k\, dq_k$ на $\mathcal{M}$. Отсюда следует, что соответствующее преобразование

$$f(z) \to f\left(T^{-1}z\right)$$

на гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2\left(\mathcal{M}, \Omega^n\right)$ всех квадратично интегрируемых относительно этой меры функций унитарно. Это обстоятельство было впервые замечено Купманом и использовано им и другими в связи с классической механикой. Пространство $\mathcal{H}$ для нас полезно потому, что оно порождает удобное представление для только что описанных обобщенных канонических перестановочных соотношений. Введем на $\mathcal{M}$ дифференциальную форму $\omega = \sum_k p_k\, dq_k$, инвариантную относительно общих преобразований на $\mathcal{S}$ или точнее относительно индуцированных ими преобразований на $\mathcal{M}$. Очевидно, что ковариантный дифференциал $d\omega$ (в смысле теории внешних дифференциальных форм) совпадает с первоначальной формой Ω.

Положим

$$R(X) = -iX + \frac{1}{2}\omega(X).$$

Непосредственно проверяется, что $R(X)$ удовлетворяет обобщенным перестановочным соотношениям и является симметрическим оператором, если X — инфинитезимальное каноническое преобразование.

Теперь можно заметить, что пространство $\mathcal{M}$ и форму Ω не обязательно связывать с конфигурационным пространством $\mathcal{S}$. Предыдущее квантование зависит лишь от структуры фазового пространства. Если задано только многообразие $\mathcal{M}$, представляющее фазовое пространство некоторой физической системы, без какого-либо специального разделения локальных координат на «пространственные», с одной стороны, и «импульсные» — с другой, и если выделена невырожденная дифференциальная форма второй степени Ω на $\mathcal{M}$, которая замкнута ($d\Omega=0$), то обобщенные перестановочные соотношения можно ввести без противоречий. Если $\mathcal{M}$ односвязно, то будет существовать такая форма ω на $\mathcal{M}$, что $\Omega = d\omega$, и становится возможной описанная выше конструкция представления. Возникающее при этом множество канонических переменных в существенном единственно: различным выборам ω отвечают унитарно эквивалентные конструкции. В этой связи возможность иметь дело с конфигурационным пространством $\mathcal{S}$ кажется неожиданным и замечательным фактом, тем более что в релятивистской теории поля нет полностью ковариантного способа отличать p и q или рассматривать фазовое пространство как кокасательный пучок для некоторого выделенного многообразия $\mathcal{S}$. Существует полезное нерелятивистское определение $\mathcal{S}$, но полная группа Лоренца не действует на таком $\mathcal{S}$.

Действительный интерес представляет для нас здесь случай бесконечномерного многообразия $\mathcal{M}$ специального типа, встречающегося в теории квантованных полей. Рассмотрим теперь приложение предыдущего подхода к проблеме квантования для такого многообразия. Простейшим случаем будет, очевидно, многообразие $\mathscr{M}$ всех решений лоренц-инвариантного дифференциального уравнения в частных производных

$$\Box\varphi = F(\varphi).$$

Здесь F — такая гладкая функция вещественного аргумента, что $F(0)=0$ и $F'(\lambda) \geqslant 0$ для всех вещественных значений λ (неизвестная функция $\varphi(x)$ считается вещественнозначной). Последнее условие заменяет вещественность массы в уравнении Клейна — Гордона. Многообразие $\mathscr{M}$ всех решений $\varphi(x)$ этого дифференциального уравнения как точечное множество — не особенно доступный объект на современном уровне развития глобальной теории нелинейных уравнений в частных производных, но это обстоятельство является второстепенным. В связи с квантованием пространство $\mathscr{M}$ важно как пространство с мерой, на котором действует группа Лоренца, аналогично случаю гильбертова пространства для перенормированного шредингеровского представления. Как и гильбертово пространство, $\mathscr{M}$ может содержать множества, которые велики в топологическом плане, но эффективно имеют нулевую меру и не влияют на квантование. Далее, несмотря на сравнительную недоступность $\mathscr{M}$, его касательные многообразия определяются просто при помощи линейных дифференциальных уравнений: касательное пространство в точке φ может быть параметризовано функциями η, удовлетворяющими уравнению в вариациях

$$\Box\eta = F'(\varphi)\,\eta.$$

Это — линейное гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами в старших членах, и, несмотря на существующие пробелы в глобальной спектральной теории таких уравнений, в последнее время получено довольно много результатов и методов, применимых к ним. Один из способов охарактеризовать многообразие $\mathscr{M}$ возникает, если заметить, что указанную касательную плоскость T_φ можно определить предыдущим уравнением для произвольной функции φ независимо от того, является она решением данного нелинейного уравнения или нет. Поэтому $\mathscr{M}$ можно описать как некоторое максимальное интегральное многообразие в общем функциональном пространстве, касательные элементы которого задаются соответствием $\varphi \to T_\varphi$, и именно то многообразие, которое проходит через точку $\varphi=0$. Обычные условия интегрируемости выполняются автоматически в силу способа построения касательных элементов.

Во всяком случае, проблема описания $\mathcal{M}$ представляется преодолимой, хотя математические трудности, связанные с нею, нельзя недооценивать.

Для того чтобы применить к бесконечномерному случаю метод, указанный выше для конечномерных многообразий, нужно задать на $\mathcal{M}$ подходящую форму Ω (т. е. наложить на $\mathcal{M}$ так называемую «симплектическую» структуру). Основную дифференциальную форму Ω можно определить следующим образом. Вначале введем «перестановочную функцию» $D_\varphi(x, x')$ на точках из $\mathcal{M}$ как решение гиперболического уравнения

$$\Box D(x) = F'(\varphi) D$$

с условиями Коши

$$D_\varphi(x, x')\Big|_{x_0=x_0'} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} D_\varphi(x, x')\Big|_{x_0=x_0'} = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}').$$

Далее, чтобы избежать деликатных и второстепенных вопросов из теории функций вещественной переменной, будем рассматривать касательное пространство T_φ в точке φ (которое вначале определялось как ядро линейного оператора $\Box - F'(\varphi)$) как факторпространство по модулю области значений этого оператора. Для определенности зададим оператор на пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций. В силу его симметричности обе реализации T_φ можно формально отождествить. Для простоты φ и F также можно предполагать бесконечно дифференцируемыми. Пусть η и η' — какие-нибудь два касательных вектора, а f и f' — их представители в классах эквивалентности; определим тогда дифференциальную форму Ω на $\mathcal{M}$

выражением

$$\Omega_\varphi(\eta, \eta') = \int\int D_\varphi(x, x') f(x) f(x') d_4x\, d_4x'.$$

(Иначе говоря, мы можем рассматривать только касательные векторы η вида

$$\eta(x) = \int D_\varphi(x, x') f(x') d_4x'$$

и использовать то же самое определение для Ω_φ.)

Формальными вычислениями легко установить, что Ω замкнута. Тогда естественно предположить, что существуют канонические переменные, удовлетворяющие указанным выше перестановочным соотношениям. Теперь можно следующим образом определить формальное квантованное поле φ, удовлетворяющее обычным перестановочным соотношениям. Пусть для любой гладкой функции f на пространстве-времени X_f будет векторным полем на $\mathcal{M}$, сопоставляющим каждой точке φ на $\mathcal{M}$ касательный вектор в классе эквивалентности (по модулю области значений $\Box - F'(\varphi)$), определяемом функцией f. Так как X_f зависит от f линейно, а $R(X)$ зависит линейно от X, то $R(X_f)$ зависит линейно от f и поэтому формально может быть выражено как

$$R(X_f) \sim \int \varphi(x) f(x) d_4x,$$

где φ — некоторая операторнозначная псевдофункция. Введенные выше перестановочные соотношения для $R(X)$ переносятся теперь на $\varphi(x)$. В частности, можно установить следующие соотношения:

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = 0, \quad \left[\varphi(x), \frac{\partial\varphi(x')}{\partial x_0'}\right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

$$\text{для } x_0 = x_0'.$$

Таким образом, операторное поле $\varphi(x)$ удовлетворяет традиционным каноническим перестановочным соотношениям. При построении поля $\varphi(x)$ мы использовали только классические уравнения движения. Естественно поэтому рассматривать его как квантованное поле, связанное с классической системой, которая задается при помощи дифференциальных уравнений в частных производных.

Итак, введена основная алгебра операторов. Теперь встает вопрос об определении вакуумного состояния. И с физической, и с математической точек зрения естественно определить его как такое лоренц-инвариантное регулярное состояние, для которого энергия в связанном с ним представлении неотрицательна. Следует ожидать, что определенный таким способом вакуум единствен — для свободных полей это строго доказанный факт. Тем самым вакуумное состояние порождает представление обобщенных канонических переменных $R(X_f)$, в котором вектор вакуума является циклическим вектором, и в соответствующем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ векторов состояния действует унитарное представление группы Лоренца. Однако в этом формализме мы сталкиваемся с трудностями при попытке интерпретации теории в терминах частиц. Это, вообще говоря, закономерно, на что указывает и общая неопределенность физического понятия частицы. Наличие простой интерпретации в терминах частиц для всех состояний квантованного поля должно быть, по-видимому, совершенно специальным свойством уравнений для взаимодействующих полей, и для некоторых уравнений в этом отношении, действительно, имеются формальные возможности.

Мы описали схему теории квантованных полей, не зависящую ни от какой специальной линейной системы отсчета и не содержащую обычных расходимостей по крайней мере до тех пор, пока в нее не вводится понятие частицы. Нашим намерением было также показать, как связать современные математические идеи и проблемы теоретической физики, и, кроме того, показать, как из общих физических рассмотрений могут рождаться новые математические задачи. Ясно, что математическое исследование описанных эвристических построений потребует развития, с одной стороны, глобальной теории нелинейных гиперболических уравнений, а с другой — анализа и некоторых аспектов дифференциальной геометрии на гладких бесконечномерных симплектических многообразиях. Дальнейшее исследование выделяет в этих направлениях сравнительно специальные проблемы. Среди них мы отметим задачу Коши с ковариантными (зависящими от времени) условиями на бесконечности для нелинейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами, а также обобщение в духе спектральной теории гильбертовых пространств основной теоремы для конечномерных многообразий, утверждающей, что существует многообразие с заданными касательными элементами. Представляют интерес, хотя это и менее очевидно, некоторые глобальные аналитические свойства нелинейных преобразований гильбертова пространства. Упомянутая задача Коши каноническим образом порождает формальную параметризацию $\mathcal{M}$ при помощи касательной плоскости T_0 к нулевому полю.

В заключение мы обсудим одиу задачу совершенно иного характера, имеющую принципиальное значение для современной физики и позволяющую еще раз проиллюстрировать взаимоотношение между математикой и теоретической физикой. Проблема теории квантованных полей, особенно с точки зрения математики, — это прежде всего проблема осмысливания, и в первую очередь она касается теории перенормировок. Однако, несмотря на эту общую проблему, числа, к которым приводит теория, находятся в исключительно точном согласии с экспериментом. Общее положение в классификации элементарных частиц оказывается совершенно противоположным. В теоретическом плане понятно, как классифицировать частицы в связи с заданной группой симметрии, и никаких вопросов сходимости или математического «смысла» при этом не возникает. Однако оказывается, что все теоретически построенные классификационные схемы обнаруживают довольно ограниченную связь с экспериментом и оказываются очень недолговечными. Формально говоря, предыдущее обсуждение имело дело с квантованием при заданном многообразии $\mathcal{M}$. Теперь мы задаем вопрос: что можно сказать об этом многообразии, а точнее о структуре касательного пространства в точке, отвечающей нулевому полю (или, более общо, в той единственной выделенной точке, которая инвариантна относительно фундаментальной группы симметрии)? Это касательное пространство можно рассматривать как пространство волновых функций для свободных квантов той теории, взаимодействие в которой определяется дифференциально-геометрической структурой $\mathcal{M}$.

Хотя со времени самого возникновения квантовой теории в 1925 г. многие ведущие физики, и в частности Нильс Бор, подчеркивали необходимость введения в сфере микроявлений радикально новых представлений о пространстве и времени, все достаточно развитые схемы классификации частиц и экспериментальных данных базировались на пространстве Минковского, на группе Лоренца и даже иногда на нерелятивистских моделях. Теперь настало время для создания более богатой, изощренной и рациональной теоретической схемы. Однако для этого имеются два серьезных препятствия. Прежде всего очевидно, что только достаточно подробная и детальная схема с отчетливой физической интерпретацией имеет шанс внести ясность в те сложные явления, которые обнаружены экспериментально. Второе, что может привести в замешательство, — это изобилие возможностей подхода к классификационным схемам. Однако более внимательное изучение вопроса показывает, что эти трудности, может быть, не так уж и существенны.

Два самых фундаментальных достижения механики со времен Ньютона можно описать как случаи, в которых некоторая алгебра Ли, имеющая механический смысл, заменяется некоторой менее вырожденной алгеброй. Переход от классической механики к квантовой состоит прежде всего во введении соотношения $[p, q] = -i\hbar$, которое при $\hbar \to 0$ приводит к свойству коммутативности классической механики. Подобным же образом релятивистская механика при $c \to \infty$ переходит в нерелятивистскую — это соответствует вырождению группы Лоренца в группу Галилея. В точном смысле это значит, что структурные постоянные группы Лоренца, зависящие от c, при

$c \to \infty$ сходятся к структурным постоянным группы Галилея. Естественно спросить, а не могут ли основные переменные обычной релятивистской теории быть некоторым вырожденным отражением более точной и эффективной теории, и если могут, то какие варианты при этом мыслимы.

В стандартной релятивистской теории мы имеем 14 основных переменных: импульсы и энергия p_0, p_1, p_2, p_3; угловые моменты m_1, m_2, m_3; пространственно-временные переменные x_0, x_1, x_2, x_3 и паразитические лоренцевские моменты, не поддающиеся измерению из-за некоммутативности с энергией, но неизбежные во всякой релятивистской теории. Перестановочные соотношения для алгебры Ли группы Лоренца известны, перестановочные соотношения между элементами этой алгебры и переменными x_k обычно не вводятся, а следуют из того, что всякое преобразование из группы Лоренца трансформирует x_k линейным неоднородным образом. Чтобы получить полную алгебру Ли, необходимо добавить единицу I, которая входит в коммутатор между x_k и p_k, и таким образом возникает 15-мерная алгебра Ли. Одной из давних трудностей обычной релятивистской теории является отсутствие bona fide операторов координат для стандартных релятивистских частиц: фотонов, электронов и других. Этот вопрос исследовали многие авторы, но полностью ковариантных операторов для координат так и не было найдено, и можно доказать, что не существует таких коммутирующих самосопряженных операторов x_0, x_1, x_2, x_3 на гильбертовом пространстве классических волновых функций для любой из этих частиц, которые преобразуются нужным образом под действием группы Лоренца. Это эквивалентно тому, что ни одно стандартное неприводимое представление группы Лоренца нельзя расширить до унитарного представления группы, алгебра Ли которой была описана выше, действующего на том же самом пространстве. Со стандартными пространствами релятивистских волновых функций как моделями для свободных частиц связаны и многие другие трудности.

Существует много алгебр Ли, для которых обычная релятивистская алгебра будет вырожденным случаем, и три из этих алгебр являются завершенными в том смысле, что сами они не могут быть получены как вырождение какой-либо другой алгебры Ли. Они оказываются алгебрами Ли некомпактных вещественных псевдоортогональных групп в шестимерном пространстве. Известны и корректно определенные представления этих групп, которые при вырождении переходят в представления группы Лоренца. Связанные с этими алгебрами модели имеют ряд естественных с эмпирической точки зрения качеств и порождают замечательно экономный способ объединения так называемых «внутренних» и «внешних» степеней свободы частицы. В большинстве современных моделей группа Лоренца как группа симметрии, связанная с внешними степенями свободы, и отдельно «внутренняя» группа, размерность которой меняется от трех до шести, объединяются в полную группу симметрии при помощи образования прямого произведения этих групп. При этом полная группа симметрии получается столь большой, что ее сравнение с экспериментом оказывается чрезвычайно затруднительным. Описанные выше 15-мерные группы сравнительно экономны и имеют, грубо говоря, правильные размеры, для того чтобы с небольшими отклонениями привести к экспериментально установленному набору «констант движения». Главной трудностью в связи с соответствующими моделями является то, что экспериментальных данных недостаточно для того, чтобы между ними можно было сделать нужный выбор.

Хотя, по-видимому, целесообразнее всего исследовать именно эти группы и некоторые четырехмерные пространства, на которых они действуют, может оказаться, что при этом будут пропущены многие другие группы симметрии, связанные с ними представления и физическое истолкование. Кажется спасительным принять, что всякая полная группа симметрии, размерность которой меньше 10, слишком мала, для того чтобы служить основой описания известных частиц, в то время как всякая группа, размерность которой больше 20, едва ли может быть выделена с помощью тех данных о частицах, на которые можно рассчитывать в предвидимом будущем. Оказывается, впрочем, что эта мысль вносит мало упрощений. Во всяком случае, ясно, что после того, как выбрана окончательная группа симметрии (или алгебра Ли), основные шаги, необходимые для построения физической теории элементарных частиц, будут состоять в следующем.

Прежде всего необходимо выделить специальное линейное представление группы и согласовать его с элементарными частицами. Элементарность при этом вовсе не означает чего-то абсолютного, она лишь отражает экспериментально наблюдаемую роль частицы. Во-вторых, должна быть выделена максимальная абелева диагонализируемая подалгебра групповой алгебры. Спектральные значения элементов этой подалгебры дадут так называемые «квантовые числа» рассматриваемых частиц. Обычно используется инфинитезимальная групповая алгебра, или так называемая обертывающая алгебра алгебры Ли, дополнениая довольно узкой подгруппой элементов из центра группы, который в релятивистском случае включает только один нетривиальный элемент, показывающий, будет спин целым или полуцелым. В-третьих, полученные квантовые числа должны быть согласованы с экспериментально измеримыми величинами; это включает построение словаря, дающего переход от этих квантовых чисел к квантовым числам, обычно используемым в релятивистской теории и дополненным такими внутренними квантовыми числами, как странность, барионный заряд и т. д.

Путь к полной теории долог, но конечен. Когда он будет пройден, можно будет приступить к сравнению с экспериментом. Несмотря на то что возможно большое число различных моделей, сравнительно немногие обладают такими чертами, как экономность. Исследование любой из этих моделей является существенным предприятием, но оно кажется более разумным, чем дальнейший перебор различных вариантов классификационных схем, основанных на группе Лоренца и различных неопределенных «внутренних» группах симметрии.

Даже с чисто математической точки зрения построение теории представлений упомянутых групп и эффективной теории сходимости представлений групп кажется в высшей степени интересной задачей.

С другой стороны, во всякой попытке иметь дело с классификацией свободных частиц имеется известный риск, так как может оказаться, что в эмпирические значения масс, констант взаимодействия и других параметров решающий вклад дают эффекты взаимодействия. Теория может быть настолько нелинейной, что линейное приближение к ней не обнаружит никакой связи с экспериментом. Это так же верно, как верно то, что, если бы масса Солнца была мала, мы бы никогда не услышали о Кеплере. Но такая ситуация маловероятна, так как кинематика наиболее известных частиц великолепно описывается линейными уравнениями Максвелла и Дирака в довольно широком диапазоне энергий.

Литературные указания к гл. VIII

Описанный здесь подход к квантованию нелинейных уравнений в частных производных принадлежит Сигалу [11]. Общая теория линейных гиперболических уравнений в частных производных подробно изложена в книге Лере [1]. Сравнительно простые условия абсолютной непрерывности преобразований гильбертова пространства были получены Гроссом [1]. Вырождение некоторой алгебры в неэквивалентную в связи с классификацией элементарных частиц было исследовано Сигалом [3, 8]. Недавно К. Йоргенс [1] рассмотрел глобальную задачу Коши для одного класса нелинейных релятивистских уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА

Биркгоф, фон Нейман (Birkhoff G., von Neumann J.)
1. The logic of quantum mechanics, *Ann. of Math.*, **37** (2), (1936), 823—843.

Бор, Розенфельд (Bohr N., Rosenfeld L.)
1. Zur Frage der Messbarkeit der Elektromagnetischen Feldgrössen, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **12**, № 8 (1933).

Брауэр, Вейль (Brauer R., Weyl H.)
1. Spinors in *n* dimensions, *Amer. J. Math.*, **57** (1935). 425—449.

Вайтман (Wightman A. S.)
1. Quantum field theory in terms of vacuum expectation values, *Phys. Rev.*, **101** (2), (1956), 860—866.

Вейль (Weyl H.)
1. Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Z. Physik*, **46** (1927), 1—46.

Вигнер (Wigner E. P.)
1. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Ann. of Math.*, 40 (2), (1939), 149—204.

Винер (Wiener N.)
1. The homogeneous chaos, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), 897—936.

Винер, Зигель (Wiener N., Siegel A.)
1. A new form for the statistical postulate of quantum mechanics, *Phys. Rev.*, **91** (2), (1953), 1551—1560.

Гейзенберг, Паули (Heisenberg W., Pauli W.)
1. Zur Quantendynamik der Wellenfelder, *Z. Physik*, **56** (1929), 1—61; **59** (1930), 168—190.

Гельфанд И. М., Наймарк М. А.
1. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **12** (54), (1943), 197—213.

Гординг, Вайтман (Gårding L., Wightman A. S.)
1. Representations of the commutation and anticommutation relations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 617—626.

Гросс (Gross L.)
1. Integration and nonlinear transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94** (1960), 404—440.

Дайсон (Dyson F. J.)

1. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman, *Phys. Rev.*, **75** (2), (1949), 486—502.
2. The *S*-matrix in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, **75** (2), (1949), 1736—1755. (Русский перевод: Дайсон Ф. Дж., *S*-матрица в квантовой электродинамике, сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954, стр. 205—238.)

Дирак П. А. М. (Dirac P. A. M.)

1. The quantum theory of the emission and absorption of radiation, *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A, **114** (1927), 243—265.
2. Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960 (1947).

Йоргенс (Jörgens K.)

1. Das Anfangswertproblem im Grossen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen, *Math. Z.*, **77** (1961), 295—308.

Какутани (Kakutani S.)

1. Determination of the spectrum of the flow of the Brownian motion, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **36** (1950), 319—323.

Камерон, Мартин (Cameron R. H., Martin W. T.)

1. Fourier — Wiener transforms of analytic functionals, *Duke Math. J.*, **12** (1945), 489—507.
2. The behavior of measure and measurability under change of scale in Wiener space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 130—137.
3. The transformation of Wiener integrals by nonlinear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **66** (1949), 253—283.

Кук (Cook J. M.)

1. The mathematics of second quantization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 222—245.

Лауденслегер (Lowdenslager D. B.)

1. On postulates for general quantum mechanics, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 88—91.

Леман, Симанзик, Циммерман (Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W.)

1. On the formulation of quantized field theories, *Nuovo Cimento*, **1** (10), (1955), 205—225; **6** (1957), 319—333.

Лере (Leray J.)

1. Hyperbolic differential equations, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953 (мимеографированные записки).

Макки (Mackey G. W.)

1. A theorem of Stone and von Neumann, *Duke Math. J.*, **16** (1949), 313—326.
2. Quantum mechanics and Hilbert space, *Amer. Math. Monthly*, **64** (1957), 45—57.
3. Unitary representations of group extensions. I, *Acta Math.*, **99** (1958), 265—311.

Меррей, фон Нейман(Murray F. J., von Neumann J.)
1. On rings of operators, *Ann. of Math.*, **37** (2), (1936), 116—229.

фон Нейман Дж. (von Neumann J.)
1. Mathematische Begrundung der Quantenmechanik, Gottinger Nachr., 1927, стр. 1—57. Wahrscheinlichskeitstheoretischer Aufbau der quantenmechanik, там же, стр. 245—272.
2. Die Eindentigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.*, **104** (1931), 570—578.
3. Математические основы квантовой механики, изд-во «Наука», М., 1964 (1932).
4. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Матем. сб.*, **1** (1936), 415—484.
5. On infinite products, *Compositio Math.*, **6** (1938), 1—77.

Сигал (Segal I. E.)
1. Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **53** (1947), 73—88.
2. Postulates for general quantum mechanics, *Ann. of Math.*, **48** (2), (1947), 930—948.
3. A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 221—265.
4. Tensor algebras over Hilbert spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 106—134.
5. Tensor algebras over Hilbert spaces, II, *Ann. of Math.*, **63** (2), (1956), 160—175.
6. The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 197—203.
7. Distributions in Hilhert space and canonical systems of operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 12—41.
8. Caractérisation mathématique des observables en théorie quantique des champs et ses conséquences pour la structure des particules libres. Colloque internationale sur les problémes mathématiques de la théorie quantique des champs, Paris, 1959, стр. 57—103.
9. Foundations of the theory of dynamical systems of infinitely many degrees of freedom. I, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **31**, № 12 (1959).
10. Quasi-finiteness of the interaction hamiltonian of certain quantum fields, *Ann. of Math.*, **72** (2), (1960), 594—602.
11. Quantization of nonlinear systems, *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 468—488.
12. Foundations ... II. A generating functional for the states of a linear boson field, *Canad. J. Math.*, **13** (1961), 1—18.
13. Mathematical characterization of the physical vacuum, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 500—523

Стоун (Stone M.)
1. Linear transformations in Hilbert space, III. Operational methods and group theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **16** (1930), 172—175.

2. On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *Ann. of Math*, **33** (2), (1932), 643—648.
3. A general theory of spectra. I. II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **26** (1940), 280—283; **27** (1941), 83—87.

Фейнман (Feynman R. P.)
1. Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction, *Phys. Rev.*, **80** (2), (1950), 440—457.
2. An operator calculus having applications in quantum electrodynamies, *Phys. Rev.*, **84** (2), (1951), 108—128. (Русский перевод: Фейнман Р. П., Об операторном исчислении, имеющем приложения в квантовой электродинамике, сб. «Проблемы современной физики», № 3, ИЛ, М., 1955, стр. 37—57.)

Фок (Fock V.)
1. Konfigurationsraum und zweite Quantelung, *Z. Physik*, **75** (1932), 622—647; **76** (1932), 952. (Русский перевод: Фок В. А., Конфигурационное пространство и вторичное квантование, сб. «Работы по квантовой теории поля», ЛГУ, 1957 стр. 25—51.)

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
1. Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience, New York. (Части 1—5 были первоначально опубликованы в *Comm. Pure and Appl. Math.*, **4—6**, 1951—1953.)

Хааг (Haag R.)
1. On quantum field theories, *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **29**, № 12 (1955).

ван Хов (van Hove L.)
1. Les difficultés de divergence pour un modéle particulier de champ quantifié, *Physica*, **18** (1952), 145—159.

Челлен (Källén G.)
1. Quantenelectrodynamik, Handbuch der Physik, **5**, часть 1, Berlin, 1958, стр. 169—364.

Челлен, Вайтман (Källén G., Wightman A. S.)
1. The analytic properties of the vacuum expectation value of a product of three scalar local fields, *Mat.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.*, **1**, № 6 (1958).

Швебер, Вайтман (Schweber S. S., Wightman A. S.)
1. Configuration space methods in relativistic quantum field theory, I, *Phys. Rev.*, **98** (2), (1955), 812—837.

Швингер Ю. (Schwinger J.)
1. Quantum electrodynamics, I, II, III, *Phys. Rev.*, **74** (2), (1949), 1439—1461; **75**, 651—679; **76**, 790—817. (Русский перевод: Швингер Ю., Квантовая электродинамика, сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, М., 1954, стр. 12—115.)
2. On the Green's functions of quantized fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **37** (1951), 452—459. (Русский перевод: Швингер Ю., О функциях Грина квантованных

полей, сб. «Проблемы современной физики», № 3, ИЛ, М., 1955, стр. 28—32.)
3. The theory of quantized fields. I., *Phys. Rev.*, 82 (2), (1951), 914—927.
4. Теория квантованных полей, ИЛ, М., 1956 (1953), стр. 13—89.

Шейл (Shale D.)
1. Linear symmetries of free boson fields, *Trans. Amer, Math. Soc.*, 103 (1962), 149—167.

Шерман (Sherman S.)
1. Non-negative observables are squares, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2 (1951), 31—33.
2. On Segal's postulates for general quantum mechanics, *Ann. of Math.*, 64 (2), (1956), 593—601.

Яух, Рорлих (Jauch J. M., Rohrlich F.)
1. The theory of photons and electrons, Addison-Wesley, Cambridge, Massachusetts, 1955.

Литература, добавленная при переводе

Березин Ф. А., Метод вторичного квантования, изд-во «Наука», М., 1965.

Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, М., 1957.

Вайтман А., Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, изд-во «Наука», М., 1968.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, Физматгиз, М., 1961.

Гельфанд И. М., Райков Д А., Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

Йост Р., Общая теория квантованных полей, изд-во «Мир», М., 1967.

Наймарк М. А., Нормированные кольца, изд-во «Наука», М., 1965.

Сигал (Sigal I. E.)
1. The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction, *Bull. Soc. Math. France*, 91 (1963), 129—135.
2. Non-linear semi-groups, *Ann. of Math.*, 78 (1963), 339—363.
3. Explicit formal construction of nonlinear quantum fields, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 269—282.

Стритер Р. Ф., Вайтман А. С., РСТ, спин и статистика и все такое, изд-во «Наука», М., 1966.

Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная, изд-во «Наука», М., 1967.

Приложение

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дж. Макки

1. Введение. Это приложение будет носить в основном математический характер, но мы начнем его все же с попытки описать один из аспектов применения теории представлений групп в квантовой механике.

Пусть S — множество, элементы которого приведены во взаимно однозначное соответствие с «состояниями» физической системы. Мы предположим, что «состояние» определено так, что в момент времени $t > t_0$ оно однозначно задается состоянием в момент времени t_0 и соответствующим физическим законом. Пусть $U_t(s)$ обозначает состояние в момент времени t, если при $t=0$ оно было s. Тогда в момент времени t_1+t_2 состояние можно записать как $U_{t_1}(U_{t_2}(s))$, а также как $U_{t_1+t_2}(s)$. Таким образом, для преобразования U_t мы имеем равенство $U_{t_1+t_2}=U_{t_1}U_{t_2}$. Если предположить, что система «обратима» в том смысле, что каждое U_t отображает S на все S взаимно однозначным образом, то мы можем определить U_{-t} как U_t^{-1} и U_0 как тождественное преобразование и получим гомоморфизм аддитивной группы R вещественной оси на группу P_s всех преобразований множества S. Конечно, S всегда есть нечто большее, чем просто абстрактное множество. Обычно оно имеет топологию и другие структуры, сохраняющиеся под действием U_t. Таким образом, фактически $t \to U_t$ является гомоморфизмом группы R на подходящим образом определенную группу A_s всех «автоморфизмов» множества S. Если состояния описываются прямоугольными координатами точек пространства и их производными по времени, то всякое движение в пространстве без деформации будет определять преобразование V_α множества S, вообще говоря, принадлежащее A_s. Ясно, что $V_{\alpha_1\alpha_2}=V_{\alpha_1}V_{\alpha_2}$, и мы получаем гомоморфизм $\alpha\to V_\alpha$ группы G всех движений без деформации в A_s. Многие системы пространственно однородны в том смысле, что $V_\alpha U_t=U_t V_\alpha$ для всех t и α. Для таких систем мы имеем гомоморфизм прямого произведения $R\times G$ в A_s. Для важного подкласса пространственно однородных систем гомоморфизм $(t, \alpha)\to V_\alpha U_t$ произведения $R\times G$ в A_s можно расширить до гомоморфизма большей группы преобразований пространства-времени в A_s. Для так называемых релятивистски инвариантных систем область действия гомоморфизма можно расширить так, что она будет включать всю неоднородную группу Лоренца.

Итак, для многих физических систем мы имеем естественный гомоморфизм некоторой группы G^0 пространственно-временных преобразований в группу A_s всех автоморфизмов множества состояний S.

Множество S для классической механической системы (системы в фазовом пространстве) обладает одним важным структурным свойством. Оно состоит в том, что с каждым гомоморфизмом R в A_s можно естественным образом связать «наблюдаемую», или «динамическую переменную». В частности, определенная наблюдаемая ассоциируется с каждой однопараметрической подгруппой в G^0, и такие наблюдаемые играют во всей теории центральную роль. Например, однопараметрической группе временных трансляций соответствует полная энергия, а однопараметрической группе пространственных трансляций в определенном направлении соответствует полный импульс в данном направлении. Это свойство переносится и в квантовую механику, где S является множеством всех одномерных подпространств гильбертова пространства H_s. Таким образом, имеется естественный способ перевести понятия энергии и импульса из классической механики в квантовую.

В случае квантовой механики автоморфизмы множества S перепутывают одномерные подпространства из H_s, сохраняя при этом линейную независимость и ортогональность. Можно показать, что каждое такое преобразование порождается либо унитарным, либо «антиунитарным» отображением H_s на H_s. Антиунитарным называется сохраняющее норму отображение V пространства H_s на H_s, линейное относительно вещественных скаляров и удовлетворяющее соотношению $V(i\varphi) = -iV\varphi$ для любых φ из H_s. Для любого комплексного c, равного по модулю 1, cV и V задают одно и то же перепутывание одномерных подпространств из H_s и поэтому определяют один и тот же элемент из A_s. Можно показать, с другой стороны, что этим и ограничивается неоднозначность. С точностью до произвольного множителя c оператор V однозначно определяется соответствующим элементом из A_s. Фиксируя этот множитель произвольным образом для каждого $\alpha \in G^0$, мы получаем отображение W: $\alpha \to W_\alpha$ группы G^0 на группу $U'(H_s)$ всех унитарных и антиунитарных операторов на H_s. Так как $W_{\alpha_1\alpha_2}$ и $W_{\alpha_1}W_{\alpha_2}$ определяют один и тот же элемент из A_s, то $W_{\alpha_1\alpha_2} = \sigma(\alpha_1, \alpha_2) W_{\alpha_1}W_{\alpha_2}$, где $\sigma(\alpha_1, \alpha_2)$ — комплексное число, равное по модулю единице. Если бы W_α были унитарны и $\sigma(\alpha_1, \alpha_2) = 1$, то $\alpha \to W_\alpha$ было бы унитарным представлением группы G^0. Если же $\sigma \neq 1$, то говорят об унитарном *проективном* представлении с множителем σ. Так как при унитарных или антиунитарных W_{α_1} и W_{α_2} оператор $W_{\alpha_1\alpha_2} = W_{\alpha_1}W_{\alpha_2}$ унитарен, то часто удается доказать, что антиунитарные операторы не могут встретиться в представлении. Во всяком случае, от антиунитарных операторов можно освободиться, если рассматривать только определенную подгруппу в G^0 индекса 2. При этом с каждой G^0-инвариантной физической системой будет связано определенное унитарное проективное представление группы G^0. Всякая классификация таких представлений порождает классификацию G^0-инвариантных физических систем, которая может иметь большое значение. Если, в частности, G^0 содержит сдвиги в пространстве и во времени, из таких представлений можно извлечь вид операторов энергии и импульса, а также функциональные соотношения между ними.

Если G^0 включает пространственные вращения, то мы получаем информацию о моменте и «спине».

Мы рассмотрим в этой главе один общий метод классификации унитарных представлений. Он применим к широкому классу групп, в число которых входят и наиболее интересные с физической точки зрения. Хотя этот метод применим к общим проективным представлениям, мы ради простоты рассмотрим в деталях только обычные унитарные представления. В качестве примера мы обсудим вигнеровскую теорию представлений неоднородной группы Лоренца и кратко опишем ее значение для классификации элементарных частиц.

2. Обозначения и основные понятия. Все рассматриваемые группы будут сепарабельными и локально компактными в некоторой топологии, относительно которой групповые операции непрерывны. На каждой такой группе G существует нетривиальная мера μ, определениая на всех борелевских множествах и инвариантная относительно правых сдвигов. Эта мера единственна с точностью до постоянного множителя и называется мерой Хаара на группе G.

Вообще говоря, представлением группы называют гомоморфизм $x \to L_x$ этой группы в группу всех неособенных линейных преобразований некоторого линейного пространства. Мы рассмотрим только тот случай, когда неособенные линейные преобразования L_x являются унитарными преобразованиями на некотором сепарабельном гильбертовом пространстве $H(L)$, и будем предполагать, что отображение $x \to L_x$ сильно непрерывно, т. е. $L_x(\varphi)$ — непрерывная функция от x для всех φ из $H(L)$. Полезно отметить, что сильная непрерывность обеспечивается более слабым предположением слабой измеримости, которое состоит в том, что $(L_x(\varphi), \psi)$ должна быть измеримой функцией от x для любых φ и ψ из $H(L)$. Так как мы не будем рассматривать никаких других представлений, кроме сильно непрерывных унитарных представлений, мы будем называть их просто представлениями.

Пусть L^1, L^2, L^3, ... — конечная или бесконечная последовательность представлений группы G. Если в качестве $H(L)$ взять прямую сумму $H(L^1) \oplus H(L^2) \oplus \ldots$ и положить $L_x(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) = (L_x^1(\varphi_1), L_x^2(\varphi_2), \ldots)$, то получится новое представление $L = L^1 \oplus L^2 \oplus \ldots$, которое называют *прямой суммой* представлений L^j. Для двух представлений L и M группы G определим *сплетающий оператор* как ограниченное линейное преобразование T из $H(L)$ в $H(M)$, удовлетворяющее условию $TL_x = M_xT$ при всех x из G. Множество всех сплетающих операторов для представлений L и M образует векторное пространство, которое мы обозначим $R(L, M)$. Если в $R(L, M)$ содержится унитарный оператор V из $H(L)$ на $H(M)$, то для него определяющее условие можно записать в виде $M_x = VL_xV^{-1}$. Ясно, что в этом случае представления L и M ничем существенным не отличаются друг от друга; говорят, что они *эквивалентны*. Обычно не бывает надобности различать эквивалентные представления. При $L = M$ пространство $R(L, M) = R(L, L)$ является алгеброй операторов; она называется *коммутирующей алгеброй* представления L. Если в $H(L)$ имеется замкнутое подпространство H', отображаемое в себя всеми L_x, то проектор на H' содержится в $R(L, L)$. Верно и обратное. Кроме того, H'' — ортогональное дополнение к H' — также отображается в себя всеми L_x и L эквивалентно прямой сумме своих сужений на H' и H''. Эти сужения называют *подпредставлениями* представления L. Говорят, что L *неприводимо*, если $H(L)$ не содержит нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, или, что то же, если L не эквивалентно прямой сумме двух ненулевых представлений. Нетрудно показать, что L неприводимо тогда и только тогда, когда $R(L, L)$ состоит из операторов, кратных тождественному. Пусть T — произвольный ненулевой элемент из $R(L, M)$. Обозначим через H_1 ортогональное дополнение нулевого подпространства оператора T и через H_2 — замыкание его области значений. Современная формулировка знаменитой леммы Шура утверждает, что H_1 и H_2 будут инвариантными подпространствами пространств $H(L)$ и $H(M)$ и действующие на них подпредставления *эквивалентны.* Отсюда следует, что $R(L, M)$ сводится к нулевому элементу тогда и только тогда, когда ни одно из подпредставлений представления L не будет эквивалентно ни одному из подпредставлений представления M. Мы будем в этом случае говорить, что L и M *дизъюнктны.*

3. Разложение представлений. Если группа G не только локально компактна, но и компактна, то каждое ее представление эквивалентно прямой сумме $L^1 \oplus L^2 \oplus \ldots$ неприводимых конечномерных представлений L^j (теорема Петера — Вейля). С помощью леммы Шура нетрудно установить следующую теорему единственности: если $L^1 \oplus L^2 \oplus \ldots$ эквивалентно $M^1 \oplus M^2 \oplus \ldots$, где L^i и M^j неприводимы, то существует такая перестановка π чисел 1, 2, ..., что L^j эквивалентно $M^{\pi(j)}$ для всех j. Таким образом, если известны все неприводимые представления компактной группы G, то известно и общее представление этой группы. Общее представление получается, если произвольно задать «кратность» ∞, 0, 1, 2, ..., с которой в него входит каждый класс эквивалентных представлений. Для многих компактных групп неприводимые представления «известны» в явном виде. Мы опишем один пример, на который будем ссылаться в дальнейшем. Пусть G — группа вращений трехмерного евклидова пространства E^3. Пусть S_2 — едииичная сфера в E^3, и пусть H — гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых комплекснозначных функций на S_2. Подпространство в H, состоящее из сужений на S_2 однородных гармонических полиномов от x, y, z степени j ($j=0, 1, 2, \ldots$), имеет размерность $2j+1$ и инвариантно относительно действия группы G. На нем тем самым индуцируется представление D^j этой группы; можно показать, что оно неприводимо и каждое неприводимое представление группы G эквивалентно одному из D^j.

Для большинства некомпактных групп такая ситуация уже не имеет места: произвольное представление не будет прямой суммой неприводимых представлений, и задача описания общего представления в терминах неприводимых сильно усложняется. В этом случае естественно попытаться замеиить описанную выше дискретную прямую сумму подходящим образом определенной «непрерывной прямой суммой», или «прямым интегралом». Такое понятие было определено фон Нейманом [11], и Маутнер [10] доказал, что каждое представление сепарабельной локально компактной группы G эквивалентно прямому интегралу неприводимых представлений. К сожалению, разложение Маутнера в высшей степени неоднозначно. Однако для описанных ниже представлений «класса I» разложение Маутнера оказывается в существенном единственным и дает удовлетворительную возможность свести общую задачу к нахождению неприводимых представлений. Это кажется особенно интересным из-за того, что многие (хотя и не все) группы, встречающиеся в физике, имеют только представления класса I.

Пусть $L = L^1 \oplus L^2 \oplus \ldots$, где все L^j неприводимы. Для того чтобы представление L было «представлением с однократным спектром», т. е. для того, чтобы L^i и L^j были неэквивалентны при $i \neq j$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра $R(L, L)$ была коммутативной. Не будем теперь предполагать, что L является прямой суммой неприводимых представлений, и примем полученное условие за определение. Будем говорить, что представление L является *«представлением с однократным спектром»*, если алгебра $R(L, L)$ коммутативна. Представление L называется представлением *класса* I, если оно эквивалентно прямой сумме $L^1 \oplus L^2 \oplus \ldots$, в которой каждое L^j является «представлением с однократным спектром». Такое определение эквивалентно более обычному, согласно которому L — представление класса I, если алгебра $R(L, L)$ является фактором класса I в терминологии Меррея и фон Неймана. Знание представлений с однократным спектром позволяет определить с точностью до эквивалентности все представления класса I.

Теорема[1]). *Пусть L — произвольное представление класса I. Существует последовательность L^∞, L^1, L^2, ... таких дизъюнктных представлений с однократным спектром, что L эквивалентно представлению $\infty L^\infty \oplus L^1 \oplus 2L^2 \oplus 3L^3 \oplus \ldots$. Представления L^j определяются однозначно с точностью до эквивалентности. Обозначение nM относится к представлению $M \oplus M \oplus \ldots \oplus M$, в которое входит n слагаемых.*

Существует теория, которая сводит изучение представлений с однократным спектром к неприводимым. Она имеет простейший вид в случае коммутативной группы G.

4. Представления с однократным спектром для коммутативных групп. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые сведения о представлениях коммутативных групп. Можно показать, что все представления коммутативных групп принадлежат классу I. Поэтому, согласно теореме предыдущего раздела, достаточно изучить лишь представления с однократным спектром. В этом разделе будет показано, что полное и удовлетворительное описание таких представлений можно получить, воспользовавшись классической теорией Хана — Хеллингера о классах эквивалентности самосопряженных операторов. Возможно, небезынтересно отметить, что, согласно теореме Стоуна, изучение представлений аддитивной группы вещественной оси полностью эквивалентно исследованию самосопряженных операторов.

Из леммы Шура следует, что неприводимое представление L коммутативной группы обязательно одномерно. Таким образом, каждое L_x имеет вид $\chi^L(x)I$, где I — тождественный оператор, а χ^L — непрерывная комплекснозначная функция на G, равная по модулю единице и удовлетворяющая соотношению $\chi^L(xy) = \chi^L(x)\chi^L(y)$ для всех x и y из G. Такие функции на-

[1]) Ссылки на литературу, в которой можно найти доказательство этой и других приводимых здесь теорем, см. в конце п. 12.

зываются *характерами* группы G. Если χ — характер и I — тождественный оператор на одномерном гильбертовом пространстве, то $x \to \chi(x) I$ — неприводимое представление L^{χ} группы G. Представления L^{χ_1} и L^{χ_2} эквивалентны тогда и только тогда, когда $\chi_1 \equiv \chi_2$. Таким образом, в коммутативном случае задача описания всех классов эквивалентных неприводимых представлений сводится к описанию множества $\hat{G}$ всех характеров группы G. Обычно эта задача легко решается. Рассмотрим в качестве примера аддитивную группу R_n всех упорядоченных последовательностей n вещественных чисел. Формула

$$\chi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e^{i(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между характерами группы R_n и последовательностями $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вещественных чисел. В качестве другого примера рассмотрим мультипликативную группу T комплексных чисел, равных по модулю 1. Здесь все характеры имеют вид $\chi(z) = z^n$ (n — целое).

Множество $\hat{G}$ всех характеров группы G само образует коммутативную группу. Групповая операция порождается обычным умножением характеров. Легко показать, что на $\hat{G}$ можно ввести такую топологию, при которой $\hat{G}$ превращается в сепарабельную локально компактную группу. Группу $\hat{G}$ называют двойственной к группе G. Использование этого термина оправдывается теоремой Понтрягина, которая будет сейчас сформулирована. Отметим вначале, что $\chi(x)$ при фиксированном $x \in G$ можно рассматривать как характер группы $\hat{G}$, иначе говоря, $F_x(\chi) \equiv \chi(x)$ является элементом из $\hat{\hat{G}}$. Согласно теореме Понтрягина, каждый элемент из $\hat{\hat{G}}$ имеет такой вид при некотором x, и отображение $x \to F_x$ устанавливает изоморфизм топологических групп G и $\hat{\hat{G}}$. Таким образом, мы можем отождествить G и $\hat{\hat{G}}$ и установить взаимно однозначное соответствие между G и $\hat{G}$. Обычно записывают $\chi(x)$ в более симметричной форме (x, χ). Может оказаться (например, в случае конечной группы или для линейной группы), что сами G и $\hat{G}$ изоморфны, тогда предыдущая теорема позволяет выделить «естественный» изоморфизм и отождествить G и $\hat{G}$.

Пусть μ — вполне аддитивная, определенная на всех борелевских множествах σ-конечная мера на $\hat{G}$. Определим представление L^μ группы G на пространстве $H(L^\mu) = L^2(\hat{G}, \mu)$ формулой $(L^\mu_x(f))(x) = \chi(x) f(\chi)$. Можно доказать следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Представление L^μ является представлением с однократным спектром.*

Теорема 4.2. *Каждое представление группы G, которое является представлением с однократным спектром, эквивалентно некоторому L^μ.*

Теорема 4.3. *Представления L^μ и L^ν эквивалентны тогда и только тогда, когда множества μ- и ν-меры нуль совпадают.*

Теорема 4.4. *Представления L^μ и L^ν дизъюнктны тогда и только тогда, когда μ и ν взаимно сингулярны (т. е. существует такое борелевское множество N на $\hat{G}$, что $\mu(N) = 0$ и $\nu(\hat{G} - N) = 0$).*

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний о представлениях с однократным спектром. Легко видеть, что L^μ — прямая сумма неприводимых представлений тогда и только тогда, когда мера μ сосредоточена на счетном множестве. В этом случае класс мер, имеющих те же множества нулевой меры, что и мера μ, полностью описывается этим счетным множеством, которое попросту является дополнением единственного максимального множества μ-меры нуль. Однако в общем случае максимального множества меры нуль не существует, и поэтому не существует подмножества в $\hat{G}$, которое описывает класс μ, или класс эквивалентных L^μ. В этом случае следует иметь дело с самим классом мер, т. е. с множеством всех мер, имеющих заданное семейство подмножеств меры нуль.

5. Полупрямые произведения. Мы рассмотрим здесь группы G, допускающие нетривиальную факторизацию следующего вида: существуют замкнутая нормальная подгруппа N и замкнутая (не обязательно нормальная) подгруппа K такие, что каждый элемент $x \in G$ можно однозначно представить в виде nk, где $n \in N$ и $k \in K$. Легко убедиться в том, что N и K факторизуют группу G подобным образом тогда и только тогда, когда $NK = G$ и $N \cap K = e$. Пусть n_1k_1 и n_2k_2 — элементы из G и $n_i \in N$, $k_i \in K$. При этом $(n_1k_1)(n_2k_2) = n_1k_1n_2k_1^{-1}k_1k_2$; здесь $n_1k_1n_2k_1^{-1} \in N$ и $k_1k_2 \in K$. Отсюда видно, что G можно восстановить, если заданы N, K и функция knk^{-1} из $N \times K$ в N. Конечно, для каждого фиксированного k отображение $n \to knk^{-1}$ будет автоморфизмом группы N, и тем самым возникает гомоморфизм из K в группу автоморфизмов группы N. Таким образом, упоминавшаяся функция должна быть этим гомоморфизмом. Обратно, предположим, что N и K — локально компактные группы и N коммутативна (впрочем, ее коммутативность не будет играть никакой роли в этом разделе). Зададим гомоморфизм φ группы K в группу автоморфизмов группы N так, что $\varphi(k)(n)$ непрерывно на $N \times K$. Множество пар (n, k) можно превратить в локально компактную группу, вводя топологию произведения $N \times K$ и полагая $(n_1, k_1)(n_2, k_2) = (n_1\varphi(k_1)(n_2), k_1k_2)$. Множество (n, e) будет тогда замкнутой нормальной подгруппой, изоморфной N, а (e, k) — «дополнительным сомножителем», изоморфным K. Если $\varphi(k)$ — тождественное преобразование группы N для всех k, то получается обычное прямое произведение групп N и K. В общем случае говорят о полупрямом произведении групп N и K, порождаемом гомоморфизмом φ. Как правило, символ φ будет опускаться, так что вместо $\varphi(k)(n)$ мы будем писать $k(n)$.

Известно много примеров полупрямых произведений. Группа перестановок трех объектов является полупрямым произведением нормальной подгруппы, состоящей из единицы, (a, b, c) и (a, c, b), и подгруппы, содержащей (ab) и единицу. Менее тривиальным примером является группа движений трехмерного пространства. Здесь N — группа сдвигов, а в качестве K можно взять группу вращений вокруг фиксированной точки. В этом случае φ сопоставляет каждому вращению естественный автоморфизм группы N. Неоднородная группа Лоренца также представляет собой полупрямое произведение линейной группы пространственно-временных трансляций и однородной группы Лоренца.

6. Сужение неприводимого представления на коммутативную нормальную подгруппу. Начиная с этого места нашей главной задачей будет установление связи между неприводимыми представлениями полупрямого произведения $G=N\times_{\varphi}K$ и неприводимыми представлениями группы N и некоторых подгрупп из K. Такой анализ во многих случаях приводит к описанию всех неприводимых представлений группы G. Наша стратегия будет следующей. Задав неприводимое представление L группы G, мы получим представление L^0 группы N, рассматривая L_x только для $x\in N$. Обычно такое представление будет приводимым, и можно попытаться выяснить, какие неприводимые представления группы N входят в L^0. На этот вопрос можно дать достаточно полный ответ; в особенности, если сделать некоторые дополнительные предположения. В результате мы приходим к важной классификации неприводимых представлений группы G. Остается изучить класс всех неприводимых представлений группы G, имеющих данное сужение на N, что эквивалентно определению всех неприводимых представлений определенной подгруппы из K.

Переходя к подробному обсуждению, мы сформулируем в виде теоремы первый важный факт.

Теорема 6.1. *Если L — неприводимое представление группы G, то его сужение L^0 на замкнутую нормальную подгруппу N имеет вид lM, где $l=\infty$, 0, 1,* 2, ... *и* M — *представление с однократным спектром* (*иными словами*, L^0 *имеет однородную кратность*).

Вначале мы будем игнорировать l и сосредоточим внимание на представлении M. В разд. 4 выяснено, что каждому такому M отвечает некоторый класс мер на $\hat{N}$. Тем самым каждое неприводимое представление L группы G определяет на $\hat{N}$ некоторый класс мер C_L.

Чтобы перейти к вопросу о том, какие классы мер являются классами вида C_L для неприводимых L, нам придется рассмотреть вначале естественное действие группы K на $\hat{N}$. Всякий автоморфизм α топологической группы N индуцирует естественный автоморфизм группы $\hat{N}$. В самом деле, для каждого $\chi \in \hat{N}$ отображение $n \to \chi(\alpha(n))$ также будет характером. Обозначим его $[\chi]\alpha$. Ясно, что $\chi \to [\chi]\alpha$ — автоморфизм группы $\hat{N}$. Эти рассмотрения применимы и к тому случаю, когда α является автоморфизмом $n \to k(n)$, порождаемым элементом $k \in K$. Тем самым для каждого $\chi \in \hat{N}$ и каждого $k \in K$ определено $[\chi]k$. Множество всех $[\chi]k$ для фиксированного χ и k, пробегающего всю подгруппу K, называется *орбитой* характера χ и обозначается O_χ. Ясно, что две орбиты O_{χ_1} и O_{χ_2} либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, $\hat{N}$ распадается на непересекающиеся множества.

Для определенной меры μ на $\hat{N}$ и любого $k \in K$ мы получим новую меру $k(\mu)$, полагая $k(\mu(E)) = \mu(E(k))$. Мы будем говорить, что μ *квазиинвариантна* относительно K, если μ и $k(\mu)$ для всех k имеют одни и те же множества нулевой меры. Иными словами, μ квазиинвариантна тогда и только тогда, когда каждый элемент $k \in K$ переводит меру μ в меру того же класса. Вообще же каждое $k \in K$, переводя μ в другую меру, переводит каждый класс мер в некоторый другой класс мер. Из только что сказанного следует, что любое $k \in K$ переводит класс мер в себя тогда и только тогда, когда каждый элемент класса квазиинвариантен относительно K. Конечно, в данном классе либо вовсе нет квазиинвариантных мер, либо он целиком состоит из них.

Мы будем говорить, что квазиинвариантная мера μ на $\hat{N}$ является *эргодической*, если не существует измеримых подмножеств, кроме подмножеств нулевой меры или имеющих дополнение меры нуль, инвариантных относительио всех $k \in K$. Будет или нет μ эргодической, зависит только от класса, в который она входит. Таким образом, мы можем говорить о классе эргодических инвариантных мер. Сформулируем теперь нашу вторую теорему.

Теорема 6.2. *Класс мер на $\hat{N}$ является классом вида C_L для некоторого неприводимого представления L группы G тогда и только тогда, когда C_L является эргодическим и инвариантным классом.*

7. Класс эргодических инвариантных мер, определяемый орбитой. Конечно, теорема 6.2 совершенно бесполезна, если не иметь эффективного метода для нахождения классов эргодических инвариантных мер на $\hat{N}$. В этом разделе мы опишем некоторый метод для иахождения таких классов, применяемый в том случае, когда определяемое орбитами разбиение множества $\hat{N}$ «достаточно гладкое». В общем случае можно показать, что для каждой орбиты находится один и только один класс эргодических инвариантных мер, сосредоточенных на этой орбите. При дополнительных предположениях гладкости удается доказать, что каждый такой класс оказывается сосредоточенным на некоторой орбите. В этом случае мы получаем взаимно однозначное соответствие между орбитами и классами эргодических инвариантных мер.

Пусть H_χ для каждого $\chi \in \hat{N}$ обозначает замкнутую подгруппу в K, состоящую из всех таких k, для которых $[\chi]k = \chi$. Тогда отображение $k \to [\chi]k$ определяет взаимно однозначное соответствие, сохраняющее борелевские множества, между пространством K/H_χ всех правых смежных классов в группе K относительно H_χ и орбитой O_χ. Пусть μ — какая-нибудь конечная счет-но аддитивная мера, определенная на всех борелевских множествах из K и имеющая те же множества нулевой меры, что и мера Хаара. Для каждого борелевского множества E из K/H_χ положим $\tilde{\mu}(E)=\mu(\tilde{E})$, где $\tilde{E}$ — прообраз множества E. Легко видеть, что $\tilde{\mu}$ будет квазиинвариантной и эргодической относительно естественного действия (правых сдвигов) группы K на пространстве K/H_χ. Можно показать, что все квазиинвариантные меры на K/H_χ входят в тот же класс мер, что и $\tilde{\mu}$. Таким образом, имеется единственный класс инвариантных мер на K/H_χ. Используя описанное выше взаимно однозначное соответствие между K/H_χ и O_χ, мы без труда заключаем, что существует единственный класс инвариантных эргодических мер на O_χ. Ясно, что класс эргодических инвариантных мер на O_χ есть не что иное, как класс эргодических инвариантных мер на $\hat{N}$, сосредоточенных на O_χ.

Чтобы убедиться в том, что могут существовать классы эргодических инвариантных мер, не сосредоточенных ни на какой орбите, рассмотрим пример. Пусть $\hat{N}$ — аддитивная группа комплексных чисел, K — аддитивная группа целых чисел и $\varphi(k)$ — автоморфизм $z \to ze^{ia\pi k}$, где a — некоторое иррациональное число. Для каждого $r>0$ введем $\mu_r(E)$ как (линейную) лебегову меру пересечения множества E с окружностью $|z|=r$. Мера μ_r инвариантна, и легко показать, что она эргодическая. С другой стороны, все орбиты являются счетными множествами, и μ_r, как мера счетного множества, равна нулю. Поэтому μ_r не сосредоточена ни на какой орбите.

Всякий раз, когда возникает такое положение, задача построения всех классов эргодических инвариантных мер оказывается очень трудной, и автору не известно, как ее решать. К счастью, имеются простые достаточные условия, которые часто выполняются и при которых эта задача решается.

Теорема 7.1. *Если существует борелевское множество в $\hat{N}$, пересекаемое всеми орбитами в точности* *в одной точке, то каждый класс эргодических инвариантных мер сосредоточен на некоторой орбите.*

Заключение теоремы 7.1 можно также получить при некоторых формально более слабых предположениях об орбитах. Если это заключение выполнено, мы будем говорить, что группа G является *регулярным* полупрямым произведением групп N и K.

8. Неприводимое представление группы G, ассоциированное с некоторой орбитой. Для того случая, когда G есть регулярное полупрямое произведение, задача разыскания всех его неприводимых представлений сводится к нахождению всех неприводимых представлений L, для которых C_L сосредоточено на фиксированной орбите O. Последняя задача эквивалентна нахождению всех неприводимых представлений определенной подгруппы в K, а именно подгруппы H_χ, где χ — какой-нибудь элемент орбиты O.

Чтобы сделать связь между неприводимыми представлениями групп H_χ и G более явной, удобно воспользоваться понятием «индуцированного» представления. Пусть G — произвольная сепарабельная локально компактная группа, а H — некоторая ее замкнутая подгруппа. Пусть μ — какой-нибудь элемент единственного инвариантного класса мер на G/H. Образуем гильбертово пространство $\mathscr{L}^2(G/H, \mu)$. Если μ — инвариантная мера, то правые сдвиги $f(x) \to f(xy)$ определяют на этом гильбертовом пространстве унитарный оператор U_y, и отображение $y \to U_y$ будет представлением группы G. Если же μ неинвариантна, то это можно компенсировать с помощью множителя $\rho_y(x)$ — квадратного корня из производной Радона — Никодима сдвинутой меры по исходной. Полагая $(U_y(f))(x) = \rho_x(y) f(xy)$, получаем унитарное представление $y \to U_y$. Если выбрать другую меру μ, то представление U заменится эквивалентным. Мы описали специальный случай интересующей нас конструкции, в котором индуцированное представление тривиально.

Чтобы перейти к общему случаю, заметим, что функции на G/H можно описать как функции на G, постоянные на правых смежных классах, т. е. как функции f на G, удовлетворяющие тождеству

$$f(\xi x)=f(x) \tag{*}$$

для всех ξ из H и всех x из G. Пусть теперь μ и ρ_y будут определены, как и выше, и пусть задано представление L подгруппы H. Рассмотрим вместо комплекснозначных функций функции со значениями в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}(L)$ и заменим тождество (*) тождеством

$$f(\xi x)=L_\xi(f(x)). \tag{**}$$

Если f удовлетворяет (**), то (f, f) удовлетворяет (*), так как $(f(\xi x), f(\xi x))=(L_\xi f(x), L_\xi f(x))=(f(x), f(x))$. Если f измерима, мы можем рассматривать $(f(x), f(x))$ как функцию на G/H и проинтегрировать ее по мере μ. Множество всех f, для которых такой интеграл конечен, образует гильбертово пространство, где сам интеграл принят за квадрат нормы. Для каждой функции f из этого гильбертова пространства и каждого элемента y из группы G положим, как и выше, $(U^L_y f)(x)=\rho_x(y) f(xy)$. Ясно, что операторы U^L_y унитарны и отображение $y\to U^L_y$ является представлением группы G. С точностью до эквивалентности это представление не зависит от μ и определяется только представлением L. Оно называется представлением группы G, *индуцированным* представлением L подгруппы H. Как правило, U^L не будет неприводимым, даже если неприводимо L. Однако в некоторых важных случаях U^L неприводимо, и построение U^L для подходящей подгруппы H является одним из основных способов нахождения неприводимых представлений некоммутативных некомпактных групп.

Возвращаясь к нашей задаче, введем произвольный элемент χ из $\hat{N}$. Образуем подгруппу NH_χ группы G, состоящую из всех произведений nk, где $n\in N$ и $k\in H_\chi$. Легко показать, что для каждого неприводимого представления L подгруппы H_χ соответствие $nk\to\chi(n)L_k$ будет представлением подгруппы NH_χ. Обозначим его через χ^L и образуем индуцированное представление U^{χ^L} группы G.

Теорема 8.1. *Для каждого неприводимого представления L подгруппы H_χ индуцированное представление U^{χ^L} группы G неприводимо. Класс мер, определяемый сужением U^{χ^L} на N, сосредоточен на орбите O_χ. Каждое неприводимое представление группы G, ассоциированное с орбитой O_χ, имеет вид U^{χ^L}, и L здесь определяется с точностью до эквивалентности.*

9. Несколько простых примеров. Пусть G — группа перестановок объектов a, b и c. Тогда $\hat{N}$ является циклической группой третьего порядка, и неединичный элемент из K меняет местами два неединичных элемента из $\hat{N}$. Таким образом, в $\hat{N}$ имеются две орбиты. Орбите, состоящей из единицы, соответствуют неприводимые представления группы G, постоянные на N. Эти представления получаются «поднятием» неприводимых представлений подгруппы K. Так как K коммутативна и имеет порядок два, то существуют два ее одномерных неприводимых представления. Таким образом, с неподвижной орбитой ассоциируются два одномерных представления группы G. Пусть χ — один из элементов на другой орбите. В этом случае H_χ состоит из единицы и U^{χ^I} является единственным неприводимым представлением группы G, ассоциированным с этой орбитой. Легко видеть, что оно двумерно. Тремя этими представлениями и исчерпываются все иеприводимые представлеиия группы G.

Пусть G — группа всех движений плоскости, рассматриваемая как полупрямое произведение группы сдвигов N и группы K поворотов вокруг O. Произвольный характер χ из $\hat{N}$ определяется парой вещественных чисел a, b: $\chi^{a,b}(x, y) = e^{i(ax+by)}$. Поворот на угол θ переводит $\chi^{a,b}$ в $\chi^{c,d}$, где $c = a\cos\theta + b\sin\theta$ и $d = -a\sin\theta + b\cos\theta$. Характеры $\chi^{a,b}$ и $\chi^{c,d}$ лежат на одной и той же орбите, если $a^2+b^2=c^2+d^2$. Неприводимые представления группы G, ассоциированные с орбитой (0, 0), — это счетное множество поднятых на G одномерных неприводимых представлений группы K. Для всех $\chi^{a,b}$ при $a^2+b^2>0$ подгруппа $H_{\chi^{a,b}}$

сводится к единице. Поэтому $U^{\chi^{a,b}}$ с точностью до эквивалентности является единственным неприводимым представлеиием группы G, ассоциированным с орбитой, проходящей через $\chi^{a,b}$. Тем самым для каждого $r>0$ имеется единственное бесконечномерное неприводимое представление группы G.

10. Неоднородная группа Лоренца. Этот пример более сложный, но он представляет и больший физический интерес. Пусть N — аддитивная группа четверок вещественных чисел x_0, x_1, x_2, x_3, а K — связная компонеита единицы в группе всех линейных преобразований N на N, сохраняющих квадратичную форму $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$. По определению K каждый член этой группы является автоморфизмом группы N, поэтому имеет смысл говорить, что φ — тождественный гомоморфизм. Результирующее полупрямое произведение $N\times_{\varphi}K$ изоморфно так называемой собственной неоднородной группе Лоренца, т. е. связной компоненте единицы в группе всех релятивистских автоморфизмов пространства-времени. Для каждой четверки $p=(p_0, p_1, p_2, p_3)$ вещественных чисел положим $\chi^p(x_0, x_1, x_2, x_3)=e^{i(x_0p_0-x_1p_1-x_2p_2-x_3p_3)}$. Тогда χ^p — элемент из $\hat{N}$, и каждый элемент из $\hat{N}$ имеет такой вид. Все $\alpha\in K$ имеют вид $(x_0, x_1, x_2, x_3)\to\sum_{j=0}^{3}a_{ij}x_j$, и соответствующий автоморфизм группы $\hat{N}$ задается формулой $(p_0, p_1, p_2, p_3)\to\left(\sum_{j=0}^{3}b_{ij}p_j\right)$, где $b_{ij}=a_{ji}$ при $i, j=1, 2, 3$, $i=j=0$ и $b_{0,j}=-a_{j,0}$, $b_{j,0}=-a_{0,j}$ при $j=1, 2, 3$. Отсюда следует, что K действует на $\hat{N}$ так же, как на N: все преобразования $p\to[p]\alpha$ являются элементами связной компоненты единицы в группе линейных преобразований, оставляющих инвариантной форму $p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2$.

Отсюда можно заключить, что каждая орбита содержится в одном из гиперболоидов $p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=c$, где c — вещественная постоянная. Простые вычисления показывают, что при $c<0$ соответствующий гиперболоид сам будет орбитой, которую мы обозначим O_c. С другой стороны, для $c>0$ гиперболоид является объединением двух орбит: одна из них O_{c+} содержит $(\sqrt{c}, 0, 0, 0)$, а другая O_{c-} содержит $(-\sqrt{c}, 0, 0, 0)$. При $c=0$ гиперболоид вырождается в конус, состоящий из трех орбит: O_{00} содержит только 0, O_{0+} содержит $(1, 1, 0, 0)$ и O_{0-} содержит $(-1, 1, 0, 0)$. Очевидно, что у орбит имеется борелевское сечение, так что мы имеем дело с регулярным полупрямым произведением.

При обсуждении представлений, ассоциированных с орбитами, удобно выделить несколько случаев:

Случай I. $c>0$. Обе группы $H_{\chi(\sqrt{c}, 0, 0, 0)}$ и $H_{\chi(-\sqrt{c}, 0, 0, 0)}$ изоморфны группе всех линейных преобразований в E^3, имеющих положительный определитель и сохраняющих форму $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Это группа вращений в трехмерном пространстве. Мы описывали неприводимые представления такой группы: это $(2j+1)$-мерные представления D_j $(j=0, 1, 2, \ldots)$. Тем самым для каждого $c>0$ мы получаем две бесконечные последовательности неприводимых представлений группы G: $U^{\chi(\sqrt{c}, 0, 0, 0)D_j}$ и $U^{\chi(-\sqrt{c}, 0, 0, 0)D_j}$. Обозначим их для будущих ссылок короче: $L^{\sqrt{c}, j}$ и $L^{-\sqrt{c}, j}$.

Случай II. O_{0+} и O_{0-}. Группы $H_{\chi(1, 1, 0, 0)}$ и $H_{\chi(-1, 1, 0, 0)}$ изоморфны группе всех движений плоскости. Эта группа обсуждалась в предыдущем разделе. Ее представления распадаются на два класса. Имеется «непрерывное» семейство неприводимых бесконечномерных представлений, параметризованное положительным вещественным числом r, и «дискретное» семейство одномерных неприводимых представлений, параметризованное целым числом n. В соответствии с этим мы имеем четыре класса неприводимых представлений группы G, которые мы обозначим $L^{0+, r}$, $L^{0-, r}$, $L^{0+, 0, n}$, $L^{0-, 0, n}$.

Случай III. O_{00}. Подгруппа $H_{\chi(0,\,0,\,0,\,0)}$ равна K, и соответствующие неприводимые представления группы G — это поднятые на G неприводимые представления группы K. Нахождение ее неприводимых представлений является трудной задачей; она была решена И. М. Гельфандом и М. А. Наймарком [4]. Однако соответствующие представления группы G не имеют физического значения, причины этого объясняются ниже. Поэтому этот случай мы не будем обсуждать подробнее.

Случай IV. $c<0$. Подгруппа изоморфна однородной группе Лоренца на трехмерном пространстве-времени. Определение ее неприводимых представлений также является трудной задачей. Она была решена Баргманом [1]. Однако и здесь соответствующие представления группы G неинтересны с физической точки зрения и не будут обсуждаться подробнее.

В заключение этого раздела мы кратко опишем физическое значение полученных результатов. В релятивистской квантовой механике неприводимые представления неоднородной группы Лоренца отвечают «элементарным частицам». Приведенная нами классификация неприводимых представлений порождает соответствующую классификацию элементарных частиц. Рассмотрим физический смысл параметров этой классификации. В разд. 1 отмечалось, что энергии соответствует инфинитезимальный оператор сужения представления на однопараметрическую подгруппу $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_0+t, x_1, x_2, x_3)$. Более того, x-компонента импульса соответствует инфинитезимальному оператору однопараметрической подгруппы $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_0, x_1+x, x_2, x_3)$. Аналогичные утверждения имеют место и для остальных двух компонент. Конечно, масштаб предполагается выбранным так, что $\hbar=1$. Ясно, что эти наблюдаемые зависят только от сужения нашего представления на N и, следовательно, от некоторой орбиты в $\hat{N}$. Представление группы N, ассоциированное с данной орбитой, имеет простой вид (он описан в разд. 4), и нетрудно показать, что для орбиты, лежащей на гиперболоиде $p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=c$, инфинитезимальиые операторы, отвечающие энергии и компонентам импульса, связаны соотношением $p_0^2=c+p_1^2+p_2^2+p_3^2$. Это в точности соотношение между энергией и импульсом для релятивистской частицы с массой покоя $\sqrt{c}$, если $c\geqslant 0$. При $c<0$ мы получаем соотиошение между энергией и импульсом, которое означает, что масса покоя является мнимой. Для физических частиц такое соотношение не встречается. Именно по этой причине и отбрасывается случай IV. В случае III мы имеем дело с другой физически невозможной ситуацией: $p_0, p_1, p_2, p_3=0$.

Представления $L^{\pm\sqrt{c},j}$ в случае I описываются двумя параметрами. Абсолютную величину одного из них мы уже связали с массой покоя. Знак параметра не имеет физического значения, так как представления $L^{\sqrt{c},j}$ и $L^{-\sqrt{c},j}$ переводятся друг в друга антиунитарным преобразованием и могут считаться «эквивалентными». Что же такое j? Не останавливаясь на этом детально, ограничимся только утверждением, что j соответствует угловому моменту. Отсюда мы заключаем, что частица с представлением $L^{\sqrt{c},j}$ имеет «спин», равный j. Мы получили только целочисленные значения для спина, так как ограничивались унитарными представлениями и игнорировали проективные представления.

В случае II частицы имеют массу покоя нуль и целочисленный параметр тоже может быть, хотя и не столь непосредственно, истолкован как спин. Представления с непрерывным параметром имеют сомнительное физическое значение.

11. Дополнительные замечания Пусть G будет группой класса I; это означает, что все ее представления принадлежат классу I. Обозначим через $\widehat{G}$ миожество всех классов эквивалентности неприводимых представлений группы G. На $\widehat{G}$ можно определить понятие борелевского множества, и удается так обобщить построения разд. 4, что получается взаимно однозначное соответствие между классами мер на $\hat{G}$ и представлениями с однократным спектром группы G в полной аналогии с тем, что было получено в разд. 4 для коммутативных групп. Тогда результаты разд. 3 показывают, что, как только мы знаем $\hat{G}$, мы знаем все представления группы G, и приводимые и неприводимые. Так как теперь для многих регулярных полупрямых произведений вид $\hat{G}$ известен, то особенно интересно выяснить, когда регулярное полупрямое произведение будет группой класса I.

Теорема 11.1. *Регулярное полупрямое произведение $N \times_{\varphi} K$ является группой класса* I *тогда и только тогда, когда подгруппа H_{χ} принадлежит классу* I *для всех $\chi \in \hat{N}$.*

В разд. 10 было установлено, что для группы Лоренца имеются четыре различные возможности для H_{χ}. В двух случаях H_{χ} есть связная полупростая группа, и поэтому она, согласно теореме Хариш — Чандра, принадлежит классу I. В третьем случае H_{χ} — компактная группа и принадлежит классу I в силу теоремы Петера — Вейля. Наконец, остается случай, в котором H_{χ} есть регулярное полупрямое произведение двух коммутативных групп. Все коммутативные группы принадлежат классу I, после этого простая ссылка на теорему 11.1 показывает, что и в этом случае H_{χ} принадлежит классу I. Таким образом, неоднородная группа Лоренца принадлежит классу I.

Что можно сказать о неприводимых представлениях группы G, когда она является нерегулярным полупрямым произведением групп N и K? В качестве примера приведем подгруппу движений плоскости, порожденную сдвигами и поворотами на углы, иррационально кратные π. Конечно, мы можем найти много представлений. Для каждой орбиты O_{χ} можно образовать H_{χ} и построить, как и в регулярном случае, неприводимое представление U^{χ^L}. Однако остаются два трудных вопроса: найти все классы эргодических инвариантных мер, не сосредоточенные на орбитах, и описать множество всех неприводимых представлений, ассоциированных с такими классами мер. В настоящее время автор, изучая второй вопрос, обнаружил, что можно развить теорию «виртуальных подгрупп» и их представлений, которая позволяет компенсировать отсутствие подгруппы H_χ, когда класс мер не сосредоточен на орбите.

В заключение мы отметим, что развитую здесь теорию можно распространить на тот случай, когда относительно N вместо коммутативности предполагается только принадлежность классу I, а K может и не существовать. При этом представления могут оказаться только проективными. В такую ситуацию включается и задача нахождения всех представлений антикоммутационных соотношений, но это приводит к нерегулярному случаю.

12. Примечания к списку литературы. Неприводимые представления неоднородной группы Лоренца были найдены Вигнером [3]. Их связь с элементарными частицами и релятивистскими волновыми уравнениями подробно обсуждалась Вигнером и Баргманом [2]. Описанная здесь общая теория полупрямых произведений была получена автором [5] в качестве следствия теоремы о системах импримитивности. Более подробное изложение, сопровождаемое примерами, можно найти в [6]. Отмеченная в разд. 11 общая теория содержится в работах [8, 9]. В работе [9] можно найти и подробное доказательство основной теоремы из [5]. В 1955 г. автор читал курс лекций в Чикагском университете; лекционные записки [7] содержат более детальную трактовку представленного здесь материала. Возможно, что эти записки читаются проще, чем работа [5] или [9]. Кроме предположения о принадлежности группы классу I, везде предполагалось также, что G является «гладкой». Недавно Глимм показал, что это предположение не обязательно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баргман (Bargmann V.), Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Ann. of Math.*, **48** (2), (1947), 568—640.
2. Баргман, Вигнер (Bargmann V., Wigner E.), Group theoretical discussion of relativistic wave equations, *Proc. Amer. Acad. Arts Sci.*, **34** (1948), 211—223.
3. Вигнер (Wigner E.), On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Ann. of Math.*, **40** (2), (1939), 149—204.
4. Гельфанд И. М., Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **11** (1947), 411—504.
5. Макки (Mackey G. W.), Imprimitivity for representations of locally compact groups. I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 537—545.
6. Макки (Mackey G. W.), Induced representations of locally compact groups. I, *Ann. of Math.*, **55** (2), (1952), 101—139.
7. Макки (Mackey G. W.), Theory of group representations, Lecture Notes, Univ. of Chicago, Summer 1955.
8. Макки (Mackey G. W.), Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **85** (1957), 134—165.
9. Макки (Mackey G. W.), Unitary representations of group extensions. I, *Acta Math.*, **99** (1958), 265—311.
10. Маутнер (Mautner F.), Unitary representations of locally compact groups, *Ann of Math.*, **51** (2), (1950), 1—25.
11. Фон Нейман (von Neumann J.), On rings of operators. Reduction theory, *Ann. of Math.*, **50** (2), (1949), 401—485.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ