BOOLEAN ALGEBRAS

BY

ROMAN SIKORSKI

Second edition

SPRINGER-VERLAG

Berlin · Göttingen · Heidelberg · New York

1964

Р. Сикорский

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

А. С. МИЩЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1969

Книга выдающегося польского математика Р. Сикорского посвящена одному из важнейших разделов современной математики — теории булевых алгебр. Это наиболее полное изложение теории булевых алгебр с теоретико-множественной точки зрения. В книге, по-видимому, впервые систематически изучаются булевы алгебры с бесконечными операциями. Последний раздел (дополнение) содержит многочисленные применения булевых алгебр к другим областям математики. Книга написана очень просто и подробно. Она вполне доступна и полезна широким кругам математиков, а также физикам и инженерам.

Редакция литературы по математическим наукам

2-2-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существует два подхода к теории булевых алгебр: алгебраический и теоретико-множественный. В соответствии с этим булевы алгебры можно рассматривать либо как частный случай алгебраических колец, либо как обобщение теоретико-множественного понятия поля множеств. Основные теоремы в этих двух направлениях принадлежат М. Стоуну, работы которого открыли новый этап в развитии теории булевых алгебр.

Книга написана с теоретико-множественных позиций, а алгебраическое направление затрагивается в ней лишь вскользь. Она состоит из двух глав и дополнения. В гл. I булевы алгебры рассматриваются только с точки зрения конечных булевых операций; большую часть содержащихся в этой главе результатов можно найти в книгах Биркгофа [2] и Гермса [1]. В гл. II, по-видимому, впервые систематически изучаются булевы алгебры с бесконечными операциями.

Для понимания гл. I и II достаточно владеть основными понятиями общей теории множеств и теоретико-множественной топологии; никаких знаний по теории структур или абстрактной алгебре не предполагается. Менее известные топологические теоремы формулируются; более глубокие топологические результаты используются только в некоторых примерах, однако эти примеры можно пропустить. Все теоремы в обеих главах даны с полными доказательствами.

Напротив, в дополнении доказательства, как правило, опускаются; оно содержит главным образом краткий обзор некоторых применений булевых алгебр к другим разделам математики и ссылки на литературу. Предполагается, что читатель обладает элементарными знаниями по этим разделам.

Я очень обязан профессору П. Халмошу за то, что он посоветовал мне написать эту книгу.

Я также выражаю благодарность Бассу, Бялыницкому-Бируля и Верритту за помощь при подготовке рукописи и Бровкину, Энгелькингу и Трачику за помощь при чтении корректуры.

Варшава — Нью Орлеан — Принстон
1957—1958

Роман Сикорский

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Глава I и дополнение остались без изменения. Напротив, в гл. II включено много новых результатов; некоторые параграфы расширены, в то время как другие совершенно переработаны. Однако общий характер этой главы остался прежним.

Я очень благодарен Двингеру, Гейфману, Хейлсу, Халперну, Карпу, Маттесу, Пирсу, Семадени и Якубу за ценную информацию, которая очень помогла поднять материал на современный уровень.

Я также очень обязан Фарлею, просмотревшему рукопись, и Трачику за чтение корректуры.

Архус
1962

Роман Сикорский

ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Заглавные латинские буквы используются для обозначения множеств точек и их булевых аналогов. Заглавные готические буквы обозначают классы множеств и их булевы аналоги, множества элементов булевых алгебр (за исключением фильтров и идеалов). В частности, буквы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (если необходимо, с индексами) всегда обозначают булевы алгебры или поля множеств. Буква $\mathfrak{F}$ всегда обозначает поле множеств.

Символ „$\cup$“ используется как для теоретико-множественного объединения, так и для более общего понятия булева объединения. В большинстве случаев обе возможные интерпретации символа „$\cup$“ совпадают. В противном случае или это точно указывается, или из текста видно, как в данном случае следует понимать символ „$\cup$“. Такое же замечание имеет место и для символа „$\cap$“, который используется как для теоретико-множественного пересечения, так и для более общего понятия булева пересечения. То же самое справедливо и для символов „$\cup$“ и „$\cap$“ соответствующих бесконечных операций (см. также замечание на стр. 91 для бесконечных булевых объединений и пересечений) и для символа „$-$“, обозначающего дополнение, и символа „$\subset$“, обозначающего включения.

Пустое множество обозначается через $\wedge$, так же обозначается и его булев аналог, нулевой элемент. Двойственное понятие, единичный элемент в булевой алгебре, обозначается двойственным символом $\vee$. Буква Δ обозначает идеал. Двойственный символ ∇ обозначает фильтр. Таким образом, двойственные булевы понятия и операции обозначаются двойственными символами.

Буква $\mathfrak{m}$ всегда обозначает кардинальное число. Буква $\mathfrak{n}$ обозначает (конечное или бесконечное) ненулевое кардинальное число (за исключением специально оговоренных случаев). Мощность множества всех целых чисел будет обозначаться как через $\aleph_0$, так и через σ. Последнее обозначение будет использоваться главным образом в выражениях типа „σ-мера“, „σ-поле“, „σ-алгебра“ и т. д., что соответствует общепринятой терминологии. Множество мощности $\aleph_0$ называется счетным.

Если мы исследуем подмножества фиксированного множества X, то часто называем X „пространством“ (при этом в X не выделяется никакой дополнительной структуры, если только это специально не оговорено).

Под топологическим пространством мы понимаем множество с операцией замыкания, удовлетворяющей хорошо известным четырем аксиомам Куратовского (см. стр. 318). Однако во всех случаях (за исключением, быть может, § 41) существенную роль играют только хаусдорфовы пространства. Для любого подмножества S топологического пространства $\mathbf{C}S$ и $\mathbf{I}S$ обозначают соответственно замыкание и внутренность множества S.

Под *индексированным множеством* $\{A_t\}_{t\in T}$ мы будем понимать отображение, которое каждому $t\in T$ ставит в соответствие элемент A_t. Оно не будет отождествляться с множеством всех элементов A_t, $t\in T$. Это будет существенно, например, в § 13, § 16, § 36 и § 38, где рассматриваются индексированные множества булевых алгебр. Во многих случаях это не существенно, например, когда рассматриваются объединения и пересечения индексированных множеств элементов булевой алгебры (гл. II).

Следующие сокращения полезны, особенно в гл. II: индексированное множество $\{A_t\}_{t\in T}$ будет называться $\mathfrak{m}$-*индексированным множеством*, если $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$. Та же терминология применяется для дважды индексированных множеств; $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\ s\in S}$ называется $\mathfrak{m}$-*индексированным множеством*, если $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$, $\overline{\overline{S}}\leqslant\mathfrak{m}$, и $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$-*индексированным множеством*, если $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$, а $\overline{\overline{S}}\leqslant\mathfrak{n}$.

Если S и T — непустые множества, то S^T будет обозначать множество всех отображений T в S. Если $f\in S^T$, а $g\in T^V$, то fg обозначает композицию отображений, за-

даваемую формулой $fg(u) = f(g(u))$ для $u \in V$. Если $T' \subset T$ и $f \in S^T$, то $f|T'$ есть отображение f, ограниченное на множестве T'.

Если формулы и примеры находятся в том же параграфе, то при ссылке на них указывается только номер. В остальных случаях добавляется еще номер параграфа.

ГЛАВА I

КОНЕЧНЫЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

§ 1. Определение булевых алгебр

Булева алгебра — это непустое множество $\mathfrak{A}$, в котором определены две бинарные операции $\cup$, $\cap$ и одна унарная операция —, удовлетворяющие, грубо говоря, тем же самым свойствам, что и операции взятия теоретико-множественного объединения, пересечения и дополнения подмножеств фиксированного пространства. Так как элементы из $\mathfrak{A}$ обладают многими свойствами, присущими множествам, мы будем обозначать их буквами A, B, ..., обычно употребляемыми для обозначения множеств. Для произвольных элементов A, B из $\mathfrak{A}$ единственным образом определены элементы $A \cup B$ и $A \cap B$ из $\mathfrak{A}$, называемые соответственно *объединением* и *пересечением* A и B. Для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ однозначно определен элемент $-A$, называемый *дополнением* к A. Операции $\cup$, $\cap$, — описываются такой системой аксиом, что свойства этих операций аналогичны свойствам операций взятия объединения, пересечения и дополнения множеств соответственно. Известно много эквивалентных систем аксиом, характеризующих $\cup$, $\cap$, —[1]. Мы выбираем следующую систему[2]:

(A_1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,

---

[1]) См. Беннет [1], Бернштейн [1, 2, 4, 6, 7], Биркгоф Г. и Биркгоф Г. Д. [1], Брейсвейт [1], Бирн [1, 2, 3], Круазо [1], Диамонд [1, 2], Фринк [1], Грау [1, 2], Хаммер [1], Хоберман и Маккинси [1], Хантингтон [1, 2], Калицкий [1], Миллер [1], Монтегю и Тарский [1], Нейман [1], Шеффер [1], Шоландер [1, 2], Стаблер [1], Стамм [1], Стоун [2, 3], Тарский [2, 5, 8, 12], Уайтмен [1, 2]. См. также Рудеану [2].

[2]) Система аксиом (A_1)—(A_5) не является независимой. Например, одна из аксиом (A_4) может быть опущена; см. Биркгоф [2],

(A_2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(A_3) $(A \cap B) \cup B = B$, $(A \cup B) \cap B = B$,
(A_4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) =$
$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(A_5) $(A \cap -A) \cup B = B$, $(A \cup -A) \cap B = B$.

Таким образом, *булева алгебра* — это непустое множество $\mathfrak{A}$ с тремя операциями $A \cup B$, $A \cap B$, $-A$, удовлетворяющими аксиомам (A_1)—(A_5).

Примеры. А) Под *полем множеств* мы будем понимать любой такой непустой класс $\mathfrak{A}$ подмножеств фиксированного пространства X, что $\mathfrak{A}$ замкнут относительно теоретико-множественных операций взятия конечного объединения, пересечения и дополнения, т. е. такой класс, что

(а) вместе с множествами A и B в классе $\mathfrak{A}$ содержится их теоретико-множественное объединение;

(б) вместе с множествами A и B в классе $\mathfrak{A}$ содержится их теоретико-множественное пересечение;

(в) если множество A содержится в классе $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ содержится и теоретико-множественное дополнение к A в пространстве X (т. е. множество всех элементов из X, которые не принадлежат A).

Как легко следует из законов Моргана для множеств, из условий (а) и (в) вытекает условие (б), а из (б) и (в) — условие (а). Следовательно, в определении поля множеств достаточно предположить только выполнение условия (в) и одного из условий (а), (б).

стр. 191 (страницы в книгах, переведенных на русский язык, указаны по русскому изданию.— *Прим. перев.*) Многие статьи из первой сноски содержат гораздо более короткие системы аксиом. Однако если система аксиом коротка, то из нее труднее вывести различные важные свойства булевых операций. Чтобы обойти эти алгебраические трудности, мы все-таки будем исходить из аксиом (A_1)—(A_5).

Заметим, что любая система аксиом для булевых алгебр должна содержать по крайней мере три переменных A, B, C. Это следует из того, что существует алгебра, не являющаяся булевой, любая подалгебра которой, порождаемая двумя элементами, является булевой. См. Диамонд и Маккинси [1].

Очевидно, каждое поле множеств является булевой алгеброй, причем булевыми операциями $\cup$, $\cap$,— будут операции взятия теоретико-множественного объединения, пересечения и дополнения соответственно.

В частности, класс всех подмножеств пространства X является полем множеств и, следовательно, булевой алгеброй.

Легко дать другие примеры полей множеств.

Например, для любого пространства X класс, составленный из всех конечных подмножеств и их дополнений, является полем множеств.

Аналогичным образом класс таких множеств действительных чисел, которые являются объединениями конечного числа интервалов (ограниченных или неограниченных) и одноточечных множеств, также является полем множеств.

Для любого топологического пространства X класс всех таких его подмножеств A, которые одновременно открыты и замкнуты, также является полем множеств. В дальнейшем такие множества мы будем называть *открыто-замкнутыми*.

Точно так же класс всех таких подмножеств A топологического пространства X, что граница A нигде не плотна, является полем множеств [1]). Последнее замечание следует из того, что и граница объединения $A \cup B$ и граница пересечения $A \cap B$ содержатся в объединении границ множеств A и B, а граница дополнения $-A$ совпадает с границей A. Следовательно, если границы множеств A и B нигде не плотны, то такими же будут границы множеств $A \cup B$, $A \cap B$, $-A$.

Б) Следующий более сложный пример — это булева алгебра, элементами которой являются множества, но булевы операции $\cup$, $\cap$,— не совпадают с теоретико-множественными операциями.

Пусть $\mathfrak{A}_1$ — класс всех *регулярных замкнутых подмножеств* топологического пространства X, т. е. подмножеств, которые являются замыканиями открытых подмножеств из X (или, что то же самое, являются замыканиями множеств своих внутренних точек). В качестве

---

[1]) См. Куратовский [3], стр. 73, и Стоун [6].

объединения $A \cup B$ множеств A, $B \in \mathfrak{A}_1$ берется теоретико-множественное объединение A и B. Пересечением $A \cap B$ множеств $A, B \in \mathfrak{A}_1$ является замыкание внутренности теоретико-множественного пересечения A и B. Булевым дополнением $-A$ множества $A \in \mathfrak{A}_1$ будет замыкание теоретико-множественного дополнения к A. Легко проверить, что так определенные операции $\cup$, $\cap$, — удовлетворяют аксиомам $(A_1)-(A_5)$, т. е. $\mathfrak{A}_1$ является булевой алгеброй [1]).

Класс $\mathfrak{A}_2$ всех *регулярных открытых подмножеств* X (т. е. класс множеств внутренних точек замкнутых подмножеств) вместе с определяемыми дальше булевыми операциями также является алгеброй Буля. Объединением $A \cup B$ множеств A, $B \in \mathfrak{A}_2$ является внутренность замыкания теоретико-множественного объединения A и B. Пересечением $A \cap B$ множеств A, $B \in \mathfrak{A}_2$ является теоретико-множественное пересечение A и B. Булевым дополнением $-A$ множества $A \in \mathfrak{A}_2$ является внутренность теоретико-множественного дополнения к A.

В) Фундаментальным понятием теории вероятностей является *событие*. Мы не будем выяснять здесь, что это такое. Мы только отметим, что в классе всех событий определены три операции, соответствующие логическим связкам „или“, „и“, „не“. Если A, B — некоторые события, то „A или B“, „A и B“ и „не A“ также являются событиями. Читатель, знакомый с теорией вероятностей, легко может проверить, что события образуют булеву алгебру, причем булевы операции $\cup$, $\cap$, — определяются как „или“, „и“ и „не“ соответственно [2]).

Г) Следующий пример адресуется читателям, знакомым с математической логикой.

Пусть S — множество всех формул (предикативных функций) формализованной теории, основанной на двузначной логике. Будем отождествлять в S две формулы α и β, если они эквивалентны, т. е. если формула

$$\alpha \text{ эквивалентно } \beta$$

является теоремой данной теории. Тогда S становится

---

[1]) См. Биркгоф [2], стр. 247.

[2]) Связь между основаниями теории вероятностей и алгебрами Буля будет рассматриваться в § 46.

булевой алгеброй $\mathfrak{A}$, причем булевы операции $\cup$, $\cap$, — определяются очевидным образом при помощи логических связок „или“, „и“ и „не“ соответственно. Алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть *алгеброй Линденбаума—Тарского* рассматриваемой формализованной теории[1]).

В § 10 будут описаны некоторые методы образования новых булевых алгебр при помощи уже известных.

Иногда удобно обозначать дополнение $-A$ (элемента A булевой алгебры $\mathfrak{A}$) через $(-1)\cdot A$. Тогда элемент A обозначается через $(+1)\cdot A$. По определению

$$(1) \qquad (-1)\cdot A = -A, \quad (+1)\cdot A = A.$$

Выражения вида $-A \cup B$, $A \cup -B$, $-A \cup -B$ будут сокращениями выражений $(-A) \cup B$, $A \cup (-B)$, $(-A) \cup (-B)$ соответственно. Аналогично для операции $\cap$.

§ 2. Некоторые следствия из аксиом

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра.

Из аксиом (A_1) и (A_2) § 1 следует, что операции $\cup$ и $\cap$ коммутативны и ассоциативны. Следовательно, элементы

$$(1) \qquad A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \ \cap A_n$$

корректно определены и не зависят от порядка элементов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Мы будем обозначать их также через

$$\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i \quad \text{и} \quad \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$$

соответственно.

Мы докажем, что для каждого $A \in \mathfrak{A}$

$$(2) \qquad A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

Действительно, применяя последовательно аксиомы (A_3),

---

[1]) Связь между математической логикой и булевыми алгебрами будет рассмотрена в § 40, 41. См. также пример E § 18.

(A_1), (A_4), (A_4) и (A_3), получаем

$$A = A \cup (A \cap B) = \\ = (A \cup A) \cap (A \cup B) = (A \cap (A \cup B)) \cup (A \cap (A \cup B)) = \\ = A \cup A$$

и аналогично

$$A = A \cap (A \cup B) = \\ = (A \cap A) \cup (A \cap B) = (A \cup (A \cap B)) \cap (A \cup (A \cap B)) = \\ = A \cap A.$$

Тождества (2) называются *законами идемпотентности*.

Аксиомы (A_4) § 1 называются *законами дистрибутивности*.

Аксиомы (A_3) § 1 называются *законами поглощения*. Из законов поглощения следует, что равенства

(3) $$A \cap B = A, \quad A \cup B = B$$

эквивалентны. Действительно, из первого закона поглощения следует, что соотношение $A \cap B = A$ влечет за собой соотношение $A \cup B = B$. Заменяя A на B и B на A во втором законе поглощения, мы замечаем, что соотношение $A \cup B = B$ влечет $A \cap B = A$ в силу закона коммутативности (A_1) § 1. Если имеет место (3), то пишем

(4) $$A \subset B \quad \text{или} \quad B \supset A$$

и мы говорим, что A является *подэлементом* B, или A *содержится в* B, или, наконец, B *содержит* A.

Отношение $\subset$ называется (булевым) *включением*. Заметим, что если рассматриваемая алгебра $\mathfrak{A}$ является полем множеств, то булево включение $\subset$ совпадает с теоретико-множественным.

Включение $\subset$ определяет частичный порядок в булевой алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. имеют место следующие свойства:

(5) $$A \subset A,$$

(6) $$\text{если } A \subset B \text{ и } B \subset A, \text{ то } A = B,$$

(7) $$\text{если } A \subset B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C,$$

где A, B, C — произвольные элементы из алгебры $\mathfrak{A}$.

Действительно, соотношение (5) немедленно вытекает из соотношения (2). Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то

$$A = A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$$

в силу аксиомы (A_3) § 1. Наконец, если $A \subset B$ и $B \subset C$, то по аксиоме (A_2) § 1

$$A = A \cap B = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C,$$

т. е. $A \subset C$.

Из аксиомы (A_5) § 1 сразу же вытекает, что

$$A \cap -A \subset B \quad \text{и} \quad B \subset A \cup -A \tag{8}$$

для произвольных элементов A, B.

Заменяя в соотношениях (8) элемент B на $B \cap -B$ и на $B \cup -B$, получаем, что

$$A \cap -A \subset B \cap -B \quad \text{и} \quad B \cup -B \subset A \cup -A.$$

Меняя местами в этих соотношениях A и B, получаем такие соотношения:

$$B \cap -B \subset A \cap -A \quad \text{и} \quad A \cup -A \subset B \cup -B.$$

Используя свойство (6), приходим к равенствам

$$A \cap -A = B \cap -B \quad \text{и} \quad A \cup -A = B \cup -B \tag{9}$$

для произвольных элементов A, $B \in \mathfrak{A}$.

Элемент $A \cap -A$, не зависящий, таким образом, от выбора $A \in \mathfrak{A}$, будем называть *нулевым элементом* (или просто *нулем*) алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначать через $\wedge$ или через $\wedge_{\mathfrak{A}}$ (если это необходимо). Элемент $A \cup -A$, также не зависящий от выбора элемента $A \in \mathfrak{A}$, будет называться *единичным элементом* (или просто *единицей*) алгебры $\mathfrak{A}$ и будет обозначаться через $\vee$ или $\vee_{\mathfrak{A}}$. Заметим, что в случае когда рассматриваемая булева алгебра является полем подмножеств пространства X, нулевым элементом $\mathfrak{A}$ является пустое множество, а единичным элементом — все пространство X.

По определению для каждого $A \in \mathfrak{A}$

$$A \cap -A = \wedge, \quad A \cup -A = \vee. \tag{10}$$

Аксиома (A_5) § 1 может быть теперь записана либо в форме

$$\wedge \cup B = B \quad \text{и} \quad \vee \cap B = B, \tag{11}$$

либо в форме

$$\wedge \subset A, \quad A \subset \vee \tag{12}$$

для каждого $A \in \mathfrak{A}$. Это означает, что нулевой и единичный элементы являются соответственно наименьшим и наибольшим элементом алгебры $\mathfrak{A}$ при указанном частичном порядке $\subset$.

Скажем, что булева алгебра является *вырожденной* алгеброй, если она содержит только один элемент. Равенство $\wedge = \vee$, т. е. совпадение нуля и единицы алгебры $\mathfrak{A}$, является необходимым и достаточным условием ее вырожденности. Достаточность вытекает из свойств (12) и (6).

Следовательно, если булева алгебра невырождена (т. е. имеет по крайней мере два элемента), то $\wedge \neq \vee$.

В начале § 1 мы говорили, что операции $\cup$, $\cap$, — обладают теми же свойствами, что и соответствующие теоретико-множественные операции. Это утверждение не является непосредственным следствием аксиом (A_1)—(A_5) § 1. Оно будет получено как следствие доказываемой в § 8 теоремы о представлении. А пока мы из аксиом выведем только некоторые свойства операций $\cup$, $\cap$, —, аналогичные хорошо известным свойствам теоретико-множественных операций.

Для упрощения наших рассмотрений заметим, что $\cup$ и $\cap$ играют совершенно симметричную роль в аксиомах (A_1)—(A_5) § 1. Система аксиом остается неизменной, если мы заменим всюду $\cup$ на $\cap$, а $\cap$ на $\cup$. Следовательно, если в справедливом утверждении, касающемся операций $\cup$, $\cap$, —, мы всюду заменим $\cup$ на $\cap$ и $\cap$ на $\cup$, то получим также справедливое утверждение, касающееся операций $\cup$, $\cap$, —, причем второе утверждение называется *двойственным* к первому. Отметим, что замена $\cup$ на $\cap$ и $\cap$ на $\cup$ в определениях (10) и (4) переводит единицу в нуль и нуль в единицу, а $\subset$ в $\supset$ и наоборот. Поэтому, чтобы получить двойственное утверждение, мы должны заменить всюду нуль на единицу и наоборот, а $\subset$ на $\supset$ и наоборот. Этот общий метод конструирования двойственных утверждений называется *принципом двойственности*.

Сначала мы докажем, что

(13) если $A \subset C$ и $B \subset D$, то $A \cup B \subset C \cup D$.

Действительно, $A \cup C = C$ и $B \cup D = D$. Поэтому из аксиом (A_1) и (A_2) § 1 вытекает, что $(A \cup B) \cup (C \cup D) = (A \cup C) \cup (B \cup D) = C \cup D$, т. е. $A \cup B \subset C \cup D$.

Из принципа двойственности получаем

(13′) если $C \subset A$ и $D \subset B$, то $C \cap D \subset A \cap B$,

Точное доказательство утверждения (13′) можно получить из предыдущего доказательства посредством замены $\cup$ на $\cap$ и наоборот.

Из утверждений (13) и (2) немедленно следует, что

(14) если $A \subset C$ и $B \subset C$, то $A \cup B \subset C$

и по двойственности, что

(14′) если $C \subset A$ и $C \subset B$, то $C \subset A \cap B$.

Кроме того, имеют место соотношения

(15) $$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B,$$

так как из соотношений (2) и аксиомы (A_2) § 1 вытекает, что $A \cup (A \cup B) = (A \cup A) \cup B = A \cup B$. Используя принцип двойственности, получаем также

(15′) $$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B.$$

Из утверждения (14) и соотношений (15) вытекает, что объединение $A \cup B$ можно определить только в терминах отношения порядка $\subset$. Действительно, $A \cup B$ есть наименьший элемент из $\mathfrak{A}$, подэлементами которого являются A и B. То же самое замечание верно и для пересечения; в силу свойств (14′) и (15′) $A \cap B$ является наибольшим среди всех элементов, являющихся подэлементами A и B одновременно.

В силу определения включения условие (4) влечет за собой (3). Следовательно, из соотношений (12) получаем

(16) $$A \cap \vee = A, \quad A \cup \vee = \vee,$$
(16′) $$A \cup \wedge = A, \quad A \cap \wedge = \wedge$$

для любого $A \in \mathfrak{A}$.

Дополнение $-A$ элемента A полностью характеризуется соотношениями (10), т. е.

(17) если $A \cap C = \wedge$ и $A \cup C = \vee$, то $C = -A$.

Действительно, в силу формул (16), (16′) и аксиомы (A_4) § 1

$$C = \wedge \cup C = (A \cap -A) \cup C = (A \cup C) \cap (-A \cup C) = \\ = \vee \cap (-A \cup C) = -A \cup C,$$

т. е. $-A \subset C$. С другой стороны,

$$C = \vee \cap C = (A \cup -A) \cap C = (A \cap C) \cup (-A \cap C) = \\ = \wedge \cup (-A \cap C) = -A \cap C,$$

т. е. $C \subset -A$. Следовательно, $C = -A$ [свойство (6)]. Из соотношений (10) и закона коммутативности (A_1) § 1 вытекает, что

$$-A \cap A = \wedge \quad \text{и} \quad -A \cup A = \vee,$$

а это влечет за собой в соответствии с утверждением (17) (где A заменяется на $-A$)

(18) $$A = --A.$$

Следовательно, если $-A = -B$, то $A = -(-A) = -(-B) = B$. Таким образом,

(19) $A = B$ тогда и только тогда, когда $-A = -B$.

Теперь мы докажем тождества, называемые *формулами Моргана:*

(20) $-(A \cup B) = -A \cap -B, \quad -(A \cap B) = -A \cup -B.$

Действительно, элемент $C = -A \cap -B$ удовлетворяет равенствам

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap -A \cap -B) \cup (B \cap -A \cap -B) = \\ = \wedge \cup \wedge = \wedge,$$

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup B \cup -A) \cap (A \cup B \cup -B) = \\ = \vee \cap \vee = \vee,$$

согласно законам дистрибутивности и свойствам (10), (16), (16′). В силу утверждения (17) это доказывает, что $C = -(A \cup B)$. Доказательство второго тождества (20) вытекает из принципа двойственности.

Из формул (20) следует, что

(21) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $-B \subset -A$,

так как $A \cup B = B$ тогда и только тогда, когда $-A \cap -B = -B$.

Из (18) и (20) получаем, что

(22) $A \cup B = -(-A \cap -B)$, $A \cap B = -(-A \cup -B)$.

Таким образом, операция объединения может быть выражена через операции пересечения и взятия дополнения. Аналогичным образом операция пересечения может быть выражена через операции объединения и взятия дополнения.

Заменяя B на $-A$ в формуле (22), мы получаем, используя (18), соотношение

(23) $$\vee = -\wedge, \quad \wedge = -\vee.$$

Элемент $A \cap -B$ будем обозначать через $A - B$ и называть *разностью* A и B. Заметим, что если рассматриваемая булева алгебра $\mathfrak{A}$ является полем множеств, то элемент $A - B$ (A, $B \in \mathfrak{A}$) является теоретико-множественной разностью множеств A и B, т. е. множеством всех точек, принадлежащих A, но не принадлежащих B. В каждой булевой алгебре $\mathfrak{A}$ выполняется соотношение $\vee - A = -A$.

Отметим, что

(24) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A - B = \wedge$.

Действительно, если $A \subset B$, то $A \cap -B = (A \cap B) \cap -B = A \cap (B \cap -B) = A \cap \wedge = \wedge$ в силу (16′). Обратно, если $A \cap -B = \wedge$, то в силу формул (16′) и закона дистрибутивности $A = A \cap (B \cup -B) = (A \cap B) \cup (A \cap -B) = (A \cap B) \cup \wedge = A \cap B$, т. е. $A \subset B$.

Так как $-(A - B) = -(A \cap -B) = -A \cup B$ [см. (20) и (18)], то из свойств (24) и (23) видно, что

(24′) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $-A \cup B = \vee$.

Операция

$$A \to B = -A \cup B,$$

двойственная к операции взятия разности $B - A$, играет важную роль в приложениях теории булевых алгебр

к математической логике[1]). Детально этот вопрос в книге рассматриваться не будет[2]). Отметим, что в силу утверждения (24′) имеет место

(24″) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \longrightarrow B = \vee$.

Элементы A, $B \in \mathfrak{A}$ называются *непересекающимися*, если

$$A \cap B = \wedge.$$

Например, для произвольных A, $B \in \mathfrak{A}$ элементы A и $B - A$ не пересекаются, т. е.

(25) $$A \cap (B - A) = \wedge,$$

так как $A \cap (B \cap -A) = B \cap (A \cap -A) = B \cap \wedge = \wedge$. Заметим, что

(26) $$A \cup (B - A) = A \cup B,$$

так как в силу закона дистрибутивности $A \cup (B \cap -A) = (A \cup B) \cap (A \cup -A) = (A \cup B) \cap \vee = A \cup B$.

§ 3. Идеалы и фильтры

Непустое подмножество Δ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *идеалом*[3]), если выполнены условия:

(а) из того, что A, $B \in \Delta$, следует, что $A \cup B \in \Delta$;

(б) из того, что $B \in \Delta$ и $A \subset B$, следует, что $A \in \Delta$.

Примеры. А) Множество всех подэлементов данного элемента $C \in \mathfrak{A}$ является идеалом. Это есть непосредственное следствие свойств (14) и (7) § 2. Такой идеал называется *главным*.

Б) Если $\mathfrak{A}$ является полем всех подмножеств бесконечного пространства X, то класс всех конечных подмножеств пространства X дает пример неглавного идеала в $\mathfrak{A}$.

---

[1]) По поводу логической интерпретации операции $\longrightarrow$ см. стр. 312.

[2]) Подробности см. Расёва и Сикорский [9].

[3]) Детальное изучение классификации идеалов можно найти в работе Стоуна [7]. См. также Маеда [1], Мори [1], Поспишил [3], Тарский [3, 6].

В) Действительная функция m, определенная на булевой алгебре $\mathfrak{A}$, называется *мерой*, если выполнены следующие условия:

(1) $0 \leqslant m(A) \leqslant \infty$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ и существует такой элемент $A_0 \in \mathfrak{A}$, что $m(A_0) < \infty$;

(2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$,

если только $A \cap B = \wedge$, A, $B \in \mathfrak{A}$.

Класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $m(A) = 0$, является идеалом; для доказательства достаточно показать, что любая мера m обладает следующими свойствами:

(3) $$m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B);$$

(4) $$\text{если } A \subset B, \text{ то } m(A) \leqslant m(B);$$

(5) $$m(\wedge) = 0.$$

Допустим, что A_0 является элементом, удовлетворяющим условию (1). Из условия (2) следует, что

$$m(A_0) = m(A_0 \cup \wedge) = m(A_0) + m(\wedge).$$

Так как $m(A_0)$ — конечное число, то мы получаем соотношение (5). Если $A \subset B$, то

$$m(A) \leqslant m(A) + m(B - A) = m(B),$$

согласно свойствам (1) и (2), поскольку [см. (25) и (26) § 2] B является объединением непересекающихся элементов A и $B - A$. Свойство (4) доказано. Принимая во внимание свойства (2), (4), а также (25), (26) § 2, получаем

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B - A) \leqslant m(A) + m(B),$$

что доказывает неравенство (3).

Г) Класс всех нигде не плотных подмножеств является идеалом поля всех подмножеств топологического пространства.

Идеал Δ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *собственным*, если он является собственным подмножеством $\mathfrak{A}$, т. е. $\Delta \neq \mathfrak{A}$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы идеал Δ был собственным, заключается в том, что $\vee \notin \Delta$. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости заметим, что если $\vee \in \Delta$, то в силу условия (б) и условия (12) § 2 имеем $A \in \Delta$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$, т. е. Δ не является собственным идеалом.

Очевидным следствием условий (б) и (12) § 2 является принадлежность нулевого элемента алгебры $\mathfrak{A}$ любому идеалу $\mathfrak{A}$. Множество, состоящее только из нулевого элемента, является идеалом, называемым нулевым.

Легко проверить, что пересечение произвольного семейства идеалов алгебры $\mathfrak{A}$ будет идеалом в $\mathfrak{A}$.

Для любого множества $\mathfrak{S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ существуют идеалы, содержащие $\mathfrak{S}$ (в частности, вся алгебра $\mathfrak{A}$). Пересечение Δ_0 всех таких идеалов является наименьшим идеалом, содержащим $\mathfrak{S}$. Будем говорить, что идеал Δ_0 *порождается* множеством $\mathfrak{S}$. Нетрудно описать элементы идеала Δ_0. Если $\mathfrak{S}$ пусто, то Δ_0 — нулевой идеал. Предположим, что $\mathfrak{S}$ непусто. Тогда элемент $A \in \mathfrak{A}$ принадлежит Δ_0 в том и только том случае, когда существует такая конечная последовательность $A_1, \ldots, A_n$ элементов из $\mathfrak{S}$, что

$$A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

Действительно, в силу условия (б) элементы A такого типа принадлежат каждому идеалу Δ, содержащему $\mathfrak{S}$, так как $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \Delta$, согласно свойству (а). С другой стороны, элементы такого типа образуют идеал, содержащий $\mathfrak{S}$.

В частности, идеал, порожденный элементом C, является главным идеалом, описанным в примере А. Идеал, порожденный данной конечной совокупностью элементов $C_1, \ldots, C_n$, является главным идеалом, порожденным элементом $C = C_1 \cup \ldots \cup C_n$.

Наименьший идеал Δ_0, содержащий данный идеал Δ и данный элемент C, является множеством всех таких элементов A, что

(6) $$A \subset B \cup C \text{ для некоторого } B \in \Delta.$$

Идеал Δ_0, порожденный Δ и C, не будет собственным тогда и только тогда, когда

(7) $$-C \in \Delta.$$

Действительно, если $-C \in \Delta$, то $-C \in \Delta_0$ и, следовательно, $\vee = C \cup -C \in \Delta_0$ [условие (а)], т. е. Δ_0 — несобственный идеал. С другой стороны, если Δ_0 — несобственный идеал, то в силу условия (6) существует такой элемент $B \in \Delta$, что $\vee \subset B \cup C$, т. е. $\vee = B \cup C$. Отсюда

вытекает, что $-C \subset B$, так как $-C = -C \cap (B \cup C) = (-C \cap B) \cup (-C \cap C) = -C \cap B$. Следовательно [условие (б)], $-C \in \Delta$.

Непустое подмножество ∇ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *фильтром*, если выполнены условия:

(а′) из A, $B \in \nabla$ следует, что $A \cap B \in \nabla$;

(б′) из $B \in \nabla$ и $A \supset B$ следует, что $A \in \nabla$.

Понятие фильтра двойственно к понятию идеала. Действительно, условия (а′) и (б′) получаются из условий (а) и (б) заменой $\cup$, $\cap$, $\subset$ на $\cap$, $\cup$, $\supset$ соответственно.

Из свойств (20) и (21) § 2 вытекает, что если Δ является идеалом, то множество всех элементов $-A$ для $A \in \Delta$ является фильтром, называемым *двойственным* к идеалу Δ. Обратно, если ∇ является фильтром, то множество всех элементов $-A$ для $A \in \nabla$ является идеалом, называемым *двойственным* к фильтру ∇. Это естественное взаимно однозначное соответствие между идеалами и фильтрами показывает, что практически достаточно рассматривать только идеалы.

Ясно, что все утверждения, двойственные к утверждениям, доказанным для идеалов, будут справедливы для фильтров.

Например, если дан элемент $C \in \mathfrak{A}$, то класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $C \subset A$, является фильтром, называемым *главным* фильтром, *порожденным* элементом C. Каждый фильтр содержит единичный элемент. Множество, состоящее только из единичного элемента, является фильтром, который называется *единичным фильтром* алгебры $\mathfrak{A}$ (разумеется, единичный фильтр двойствен к нулевому идеалу). Фильтр ∇ является *собственным*, если $\nabla \neq \mathfrak{A}$, т. е. $\wedge \notin \nabla$.

Формулировка других двойственных утверждений предоставляется читателю.

Заметим, что условия (а) и (б) в определении идеала можно заменить на такое условие:

$A \cup B \in \Delta$ тогда и только тогда, когда $A \in \Delta$ и $B \in \Delta$.

Аналогичным образом в определении фильтра ∇ условия (а′) и (б′) можно заменить одним условием

$A \cap B \in \nabla$ тогда и только тогда, когда $A \in \nabla$ и $B \in \nabla$.

Пример. Д) Подмножество ∇ булевой алгебры $\mathfrak{A}$, содержащее единичный элемент, является фильтром тогда и только тогда, когда условия $A \in \nabla$ и $A \to B \in \nabla$ влекут за собой условие $B \in \nabla$. В силу двойственности подмножество Δ алгебры $\mathfrak{A}$, содержащее нулевой элемент, является идеалом тогда и только тогда, когда условия $A \in \Delta$ и $B - A \in \Delta$ влекут за собой условие $B \in \Delta$. Доказательство предоставляется читателю.

§ 4. Подалгебры

Непустое подмножество $\mathfrak{A}_0$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй* алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}_0$ замкнуто относительно операций $\cup$, $\cap$, $-$, т. е. удовлетворяет следующим условиям:

(а) если A, $B \in \mathfrak{A}_0$, то $A \cup B \in \mathfrak{A}_0$;
(а′). если A, $B \in \mathfrak{A}_0$, то $A \cap B \in \mathfrak{A}_0$;
(б) если $A \in \mathfrak{A}_0$, то $-A \in \mathfrak{A}_0$.

В силу формул Моргана [см. (22) § 2] условие (б) и одно из условий (а), (а′) влекут за собой третье условие. Следовательно, если условие (б) и одно из условий (а), (а′) выполнены, то $\mathfrak{A}_0$ является подалгеброй. Из определения сразу же следует, что каждая подалгебра $\mathfrak{A}_0$ замкнута также относительно операции вычитания, т. е. справедливо условие

(в) если A, $B \in \mathfrak{A}_0$, то $A - B \in \mathfrak{A}_0$.

Каждая подалгебра $\mathfrak{A}_0$ произвольной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ также является булевой алгеброй относительно тех же самых операций $\cup$, $\cap$, $-$, рассматриваемых на $\mathfrak{A}_0$; отношением включения в булевой алгебре $\mathfrak{A}_0$ является отношение включения в $\mathfrak{A}$, рассматриваемое на $\mathfrak{A}_0$.

Каждая подалгебра $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$ содержит нуль $\wedge$ и единицу $\vee$ алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, если $A \in \mathfrak{A}_0$, то $\wedge = A \cap -A \in \mathfrak{A}_0$, $\vee = A \cup -A \in \mathfrak{A}_0$ в силу условий (а), (а′) и (б). Ясно, что нуль и единица алгебры $\mathfrak{A}$ являются соответственно нулем и единицей алгебры $\mathfrak{A}_0$.

Из (16), (16′), (23) § 2 вытекает, что множество, состоящее только из нуля и единицы алгебры $\mathfrak{A}$, будет подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, причем наименьшей из всех подалгебр.

Пересечение любого числа подалгебр некоторой алгебры вновь будет ее подалгеброй.

Для каждого множества $\mathfrak{S}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ существует наименьшая подалгебра $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая множество $\mathfrak{S}$. Очевидно, $\mathfrak{A}_0$ может быть определена как пересечение всех подалгебр, содержащих множество $\mathfrak{S}$. Будем говорить, что подалгебра $\mathfrak{A}_0$ *порождается* множеством $\mathfrak{S}$. Легко описать элементы из $\mathfrak{A}_0$. Если $\mathfrak{S}$ пусто, то $\mathfrak{A}_0$ состоит только из $\wedge$ и $\vee$. Предположим, что $\mathfrak{S}$ непусто, тогда элемент $A \in \mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}_0$ в том и только том случае, когда его можно представить в виде

$$(1) \qquad A = (A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,r_1}) \cup (A_{2,1} \cap \ldots \cap A_{2,r_2}) \cup \ldots \\ \ldots \cup (A_{s,1} \cap \ldots \cap A_{s,r_s}),$$

где или $A_{m,n} \in \mathfrak{S}$, или $-A_{m,n} \in \mathfrak{S}$ для любых m, n.

Действительно, класс элементов вида (1) удовлетворяет условию (а). Как следует из формулы Моргана [см. (20) § 2] и закона дистрибутивности [см. (A_4) § 1], дополнение к элементу A вида (1) может быть представлено в таком же виде. Поэтому условие (б) также удовлетворяется. Следовательно, элементы вида (1) образуют подалгебру $\mathfrak{A}_0$, содержащую $\mathfrak{S}$. С другой стороны, каждый элемент A вида (1) принадлежит любой подалгебре, содержащей $\mathfrak{S}$. Поэтому $\mathfrak{A}_0$ является наименьшей подалгеброй, содержащей $\mathfrak{S}$.

Из соображений двойственности мы заключаем, что подалгебра, порождаемая непустым множеством $\mathfrak{S}$, состоит из всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}$, которые представимы в виде

$$(2) \qquad A = (A_{1,1} \cup \ldots \cup A_{1,r_1}) \cap (A_{2,1} \cup \ldots \cup A_{2,r_2}) \cap \ldots \\ \ldots \cap (A_{s,1} \cup \ldots \cup A_{s,r_s}),$$

где или $A_{m,n} \in \mathfrak{S}$, или $-A_{m,n} \in \mathfrak{S}$ для любых m, n.

В частности, подалгебра, порожденная одним элементом $A \in \mathfrak{A}$, состоит только из $\wedge$, $\vee$, A и $-A$.

Если $\mathfrak{A}_0$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$ и $A_0 \in \mathfrak{A}$, то подалгебра, порожденная $\mathfrak{A}_0$ и A_0, состоит из всех элементов $A \in \mathfrak{A}$, представимых в виде

$$(3) \qquad A = (A_1 \cap A_0) \cup (A_2 - A_0), \text{ где } A_1,\ A_2 \in \mathfrak{A}_0.$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (1). Достаточно проверить, что объединение элементов вида (3) и дополнение к элементу вида (3) являются элементами того же вида.

§ 5. Гомоморфизмы и изоморфизмы

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — булевы алгебры. Отображение h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ назовем *гомоморфизмом*[1]), если оно сохраняет операции объединения, пересечения и взятия дополнения, т. е.

(а) $$h(A \cup B) = h(A) \cup h(B),$$

(а′) $$h(A \cap B) = h(A) \cap h(B),$$

(б) $$h(-A) = -h(A).$$

Из формул Моргана [см. (22) § 2] следует, что условие (б) и одно из условий (а) или (а′) влекут за собой условие (а′) или (а) соответственно. Следовательно, если выполнены условие (б) и одно из условий (а), (а′), то h является гомоморфизмом.

Из определения следует, что гомоморфизм h также сохраняет операцию вычитания, т. е.

(в) $$h(A - B) = h(A) - h(B).$$

Гомоморфизм h переводит нуль и единицу алгебры $\mathfrak{A}$ в нуль и единицу алгебры $\mathfrak{A}'$ соответственно, т. е.

(г) $$h(\wedge_{\mathfrak{A}}) = \wedge_{\mathfrak{A}'}, \quad h(\vee_{\mathfrak{A}}) = \vee_{\mathfrak{A}'},$$

так как $h(\wedge_{\mathfrak{A}}) = h(A \cap -A) = h(A) \cap -h(A) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$ и двойственным образом для $\vee$.

Обратно, если отображение h удовлетворяет условиям (а), (а′) и (г), то оно является гомоморфизмом. Действительно, в этом случае

$$h(A) \cap h(-A) = h(A \cap -A) = \wedge_{\mathfrak{A}'},$$
$$h(A) \cup h(-A) = h(A \cup -A) = \vee_{\mathfrak{A}'}$$

и отсюда вытекает [см. (17) § 2], что $h(-A) = -h(A)$.

---

[1]) О более общем понятии, чем гомоморфизм, см. Халмош [4], Райт [2, 3, 4].

Подобным же образом условие (в) вместе с последним из условий (г) и одним из условий (а), (а′) достаточно для того, чтобы h было гомоморфизмом.

Произвольный гомоморфизм h сохраняет также включение, т. е.

(1) если $A \subset B$, то $h(A) \subset h(B)$,

ибо если $B = A \cup B$, то $h(B) = h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.

Если h является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, то класс $h(\mathfrak{A})$ всех элементов вида $h(A) \in \mathfrak{A}'$ $(A \in \mathfrak{A})$ образует подалгебру алгебры $\mathfrak{A}'$.

Взаимно однозначный гомоморфизм h называется *изоморфизмом*. Если существует изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$, то булевы алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ называются *изоморфными*. В этом случае h^{-1} является изоморфизмом $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}$.

Взаимно однозначное отображение h алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда будет изоморфизмом, когда и h и h^{-1} сохраняют включение, т. е.

(2) $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $h(A) \subset h(B)$.

В самом деле, из (2) вытекает (г). Так как операции объединения и пересечения можно определить при помощи только отношения включения [см. § 2, стр. 19], то из (2) вытекают также условия (а) и (а′).

Если h является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, а Δ' — идеал в $\mathfrak{A}'$, то множество $\Delta = h^{-1}(\Delta')$ всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) \in \Delta'$, будет идеалом. В частности, множество $h^{-1}(\wedge_{\mathfrak{A}'})$ всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$, также образует идеал.

Гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $h^{-1}(\wedge_{\mathfrak{A}'})$ содержит лишь нуль алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. когда

(3) из равенства $h(A) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$ следует, что $A = \wedge_{\mathfrak{A}}$.

Действительно, если отображение h взаимно однозначно, то в силу свойства (г) условие (3) выполнено. Обратно, если условие (3) выполнено и $h(A) = h(B)$, то $A - B = \wedge_{\mathfrak{A}}$ и $B - A = \wedge_{\mathfrak{A}}$, так как $h(A - B) = h(A) - h(B) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$ и $h(B - A) = h(B) - h(A) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$. Отсюда выводим, что [см. (24) § 2] справедливы включения $A \subset B$ и $B \subset A$,

из которых вытекает равенство $A=B$. Значит, отображение h взаимно однозначно.

Двойственным образом, если ∇' является фильтром алгебры $\mathfrak{A}'$, а h — гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$, то $h^{-1}(\nabla')$ является фильтром $\mathfrak{A}$. В частности, множество $h^{-1}(\vee_{\mathfrak{A}'})$ есть фильтр алгебры $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм h тогда и только тогда является изоморфизмом, когда $h^{-1}(\vee_{\mathfrak{A}'})$ содержит только элемент $\vee_{\mathfrak{A}}$.

Если существует гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$, то будем говорить, что $\mathfrak{A}'$ является *гомоморфным образом* алгебры $\mathfrak{A}$.

Примеры. А) Предположим, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ являются полями множеств пространств X и X' соответственно. Пусть φ — такое отображение пространства X' в пространство X, что

$$\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{A}' \text{ для любого множества } A\in\mathfrak{A}.$$

Тогда отображение h, определенное по формуле

$$h(A)=\varphi^{-1}(A) \text{ для } A\in\mathfrak{A},$$

является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Будем говорить, что гомоморфизм h *индуцирован* отображением φ.

Б) Все двухэлементные булевы алгебры изоморфны между собой, причем изоморфизм задается отображением, переводящим нуль в нуль, а единицу в единицу. Любая двухэлементная булева алгебра изоморфна полю всех подмножеств одноточечного пространства.

В) Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются соответственно булевыми алгебрами всех регулярных замкнутых подмножеств топологического пространства X и всех его регулярных открытых подмножеств (см. пример Б § 1).

Отображение, ставящее в соответствие каждому множеству $A\in\mathfrak{A}_1$ его внутренность, является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_1$ на алгебру $\mathfrak{A}_2$.

§ 6. Максимальные идеалы и фильтры

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра.

Собственный идеал (фильтр) алгебры $\mathfrak{A}$ называется *максимальным* [1]), если он не является собственным под-

[1]) Максимальный идеал (фильтр) называется также *простым* идеалом (фильтром).

множеством никакого собственного идеала (фильтра) алгебры $\mathfrak{A}$.

Для того чтобы собственный идеал Δ (фильтр ∇) был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $A \in \mathfrak{A}$ либо A, либо $-A$ принадлежал Δ (∇).

Мы докажем этот критерий только для идеалов; доказательство для фильтров двойственно. Для доказательства достаточности предположим, что рассматриваемое условие выполнено и что Δ является собственным подмножеством идеала Δ_0, т. е. существует такой элемент $A \in \Delta_0$, что $A \notin \Delta$. Следовательно, $-A \in \Delta$ и поэтому $-A \in \Delta_0$, откуда получаем, что $\vee = A \cup -A \in \Delta_0$, т. е. Δ_0 не является собственным идеалом. Для доказательства необходимости предположим, что идеал Δ максимален. Если $A \notin \Delta$, то Δ является собственным подмножеством идеала Δ_0, порожденного идеалом Δ и элементом A. Так как Δ максимален, то Δ_0 — несобственный идеал. Из условия (7) § 3 вытекает, что $-A \in \Delta$.

Каждый собственный идеал (фильтр) содержит не более одного из элементов $A, -A$, ибо в противном случае он содержал бы элемент $\vee = A \cup -A$ ($\wedge = A \cap -A$) и не был бы собственным. Таким образом, идеал (фильтр) максимален тогда и только тогда, когда для любого элемента $A \in \mathfrak{A}$ он содержит в точности один из элементов $A, -A$.

Примеры. А) Если $\mathfrak{A}$ является полем подмножеств непустого пространства X, а $x_0 \in X$, то класс Δ всех множеств $A \in \mathfrak{A}$, не содержащих x_0, является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, так как для любого $A \in \mathfrak{A}$ либо A, либо $-A$ не содержит точку x_0. Из тех же самых соображений класс всех множеств $A \in \mathfrak{A}$, содержащих $x_0 \in A$, является максимальным фильтром алгебры $\mathfrak{A}$. Будем говорить, что такой идеал (фильтр) *определен* точкой x_0.

Если поле $\mathfrak{A}$ содержит все одноточечные подмножества пространства X, то максимальный фильтр ∇ определен точкой x_0 тогда и только тогда, когда $(x_0) \in \nabla$.

Б) Пусть X — произвольное бесконечное пространство, и пусть $\mathfrak{A}$ — поле всех таких множеств $A \subset X$, что или

A или $X-A$ является конечным множеством. Класс всех конечных (бесконечных) множеств A из $\mathfrak{A}$ является максимальным идеалом (максимальным фильтром) алгебры $\mathfrak{A}$. Этот идеал (фильтр) не определен никакой точкой $x_0 \in X$.

Под *двузначным гомоморфизмом* булевой алгебры $\mathfrak{A}$ мы будем понимать произвольный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ в двухэлементную булеву алгебру.

Мера m на булевой алгебре $\mathfrak{A}$ (см. пример В § 3) называется *двузначной*, если она принимает в точности два значения: число 0 и число 1. Тогда

$$m(A)=0 \text{ или } 1 \text{ для любого } A \in \mathfrak{A},$$

и в частности

$$m(\wedge)=0, \text{ а } m(\vee)=1.$$

Первое из этих двух равенств является частным случаем свойства (5) § 3. В силу свойства (4) § 3 $0 \leqslant m(A) \leqslant m(\vee)$. Из предположения, что $m(\vee)$ равно нулю, следует тождественное равенство нулю меры m, а это противоречит тому, что двузначная мера принимает оба значения 0 и 1.

Так как $m(A)+m(-A)=m(A \cup -A)=m(\vee)=1$, то

(1) $$m(-A)=1-m(A) \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}.$$

Заметим еще, что

(2) $$m(A \cap B)=m(A) \cdot m(B) \text{ для произвольных } A,\ B \in \mathfrak{A}.$$

Действительно, равенство (2) справедливо, если либо $m(A)$, либо $m(B)$ равно 0. Если $m(A)=1=m(B)$, то в силу формулы (1) $m(-A)=0=m(-B)$ и, следовательно, $m(-A \cup -B)=0$ [см. (3) и (1) § 3]. Поэтому [из формулы (1)] $m(A \cap B)=1-m(-A \cup -B)=1$, что завершает доказательство формулы (2).

Существует естественное взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами, максимальными фильтрами, двузначными гомоморфизмами и двузначными мерами.

Действительно, если Δ — максимальный идеал, то двойственный к Δ фильтр будет максимальным (см. § 3), формула

(3) $$h(A)=\begin{cases} \wedge, & \text{если } A \in \Delta \\ \vee, & \text{если } A \notin \Delta \end{cases}$$

определяет двузначный гомоморфизм h, а формула

$$m(A) = \begin{cases} 0, & \text{если } A \in \Delta \\ 1, & \text{если } A \notin \Delta \end{cases} \tag{4}$$

— двузначную меру m.

Подобным же образом, если ∇ — максимальный фильтр, то двойственный к ∇ идеал (см. § 3), т. е. множество Δ всех $-A$ для $A \in \nabla$, является максимальным идеалом, а формулы (3) и (4) определяют двузначный гомоморфизм и двузначную меру, соответствующие фильтру ∇.

С другой стороны, если h является двузначным гомоморфизмом, то множество Δ всех таких A, что $h(A) = \wedge$, будет максимальным идеалом, а множество ∇ всех таких A, что $h(A) = \vee$ — максимальным фильтром (двойственным к Δ). Аналогично если m является двузначной мерой, то множество Δ всех таких A, что $m(A) = 0$, будет максимальным идеалом, а множество ∇ всех таких A, что $m(A) = 1$ — максимальным фильтром, двойственным к Δ [см. (1) и (2)].

Это естественное соответствие позволяет нам автоматически получать из теорем о максимальных идеалах теоремы о максимальных фильтрах, о двузначных гомоморфизмах или о двузначных мерах и обратно.

Вырожденная алгебра $\mathfrak{A}$ не содержит ни одного максимального идеала (а значит, она не содержит ни одного максимального фильтра, не существует ни одного ее двузначного гомоморфизма или двузначной меры на ней). Действительно, единственным идеалом алгебры $\mathfrak{A}$ будет нулевой идеал, а этот идеал является несобственным.

Следующая теорема [1]) показывает, что каждая невырожденная булева алгебра $\mathfrak{A}$ имеет много максимальных идеалов, максимальных фильтров, двузначных гомоморфизмов и двузначных мер.

6.1. (i) *Для каждого собственного идеала Δ_0 существует максимальный идеал, содержащий Δ_0.*

---

[1]) Эта фундаментальная теорема получена Стоуном [5]. См. также Тарский [1], Улам [2].

(ii) *Для каждого собственного фильтра* ∇_0 *существует максимальный фильтр, содержащий* ∇_0.

(iii) *Для каждого собственного идеала* Δ_0 (*собственного фильтра* ∇_0) *существует двузначный гомоморфизм* h *такой, что* $h(A) = \wedge$ *для любого* $A \in \Delta_0$ (*такой, что* $h(A) = \vee$ *для любого* $A \in \nabla_0$).

(iv) *Для каждого собственного идеала* Δ_0 (*собственного фильтра* ∇_0) *существует такая двузначная мера* m, *что* $m(A) = 0$ *для любого* $A \in \Delta_0$ ($m(A) = 1$ *для любого* $A \in \nabla_0$).

Неизвестно эффективного доказательства этой теоремы[1]), т. е. каждое доказательство основывается на принципе полной упорядоченности или на других утверждениях, эквивалентных аксиоме выбора.

Вследствие естественного соответствия между максимальными идеалами, максимальными фильтрами, двузначными гомоморфизмами и двузначными мерами достаточно доказать только одну из четырех частей теоремы 6.1, например (i).

Заметим, во-первых, что если $\{\Delta_\alpha\}$ — возрастающая трансфинитная последовательность идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, то объединение всех идеалов Δ_α также будет идеалом в $\mathfrak{A}$. Если все идеалы Δ_α собственные (т. е. не содержат единицу), то их объединение — также собственный идеал (так как оно не содержит единицу).

Пусть система $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ — трансфинитная последовательность, пробегающая все элементы алгебры $\mathfrak{A}$. При помощи трансфинитной индукции следующим образом определим возрастающую последовательность $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ идеалов алгебры $\mathfrak{A}$:

Δ_0 — идеал из пункта (i). Если $0 < \alpha < \beta$, то через Δ_α обозначим идеал, порожденный элементом A_α и объединением всех идеалов Δ_γ, $\gamma < \alpha$, при условии, что этот идеал собственный; в противном случае в качестве Δ_α возьмем объединение всех Δ_γ, $\gamma < \alpha$.

Объединение Δ всех идеалов Δ_α ($\alpha < \beta$) является собственным идеалом, содержащим Δ_0. Мы докажем, что

[1]) Проблема эффективности теоремы 6.1 будет исследована в § 47.

идеал Δ является максимальным, т. е. для каждого α или A_α, или $-A_\alpha$ принадлежит Δ.

Если $A_\alpha \in \Delta_\alpha$, то, разумеется, $A_\alpha \in \Delta$. Если $A_\alpha \notin \Delta_\alpha$, то Δ_α является обьединением всех Δ_γ для $\gamma < \alpha$, и идеал, порожденный Δ_α и A_α, не является собственным. Следовательно, в силу свойства (7) § 3 $-A_\alpha$ принадлежит Δ_α, а значит, и Δ.

Теорема 6.1 может быть обобщена в различных направлениях. Обобщение пункта (iii) будет дано в § 33 (теорема 33.1). Пункт (iv) является частным случаем следующей теоремы в теории меры [1]). Каждая мера m_0, определенная на подалгебре $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$, может быть продолжена до меры m на всей алгебре $\mathfrak{A}$ таким образом, чтобы множество значений меры m содержалось в замыкании множества значений меры m_0. В частности, каждая двузначная мера m_0 на подалгебре $\mathfrak{A}_0$ может быть продолжена до двузначной меры на всей алгебре $\mathfrak{A}$. Чтобы доказать пункт (iv) с помощью этой теоремы, достаточно предположить, что $\mathfrak{A}_0$ есть подалгебра, порожденная идеалом Δ_0 (т. е. множество всех элементов A и $-A$, где $A \in \Delta_0$), и определить m_0 по формуле $m_0(A) = 0$ и $m_0(-A) = 1$ для всех $A \in \Delta_0$.

§ 7. Приведенные и совершенные поля множеств

Поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X называется *приведенным*, если любые две точки x и y из X разделяются множеством A из $\mathfrak{F}$, т. е. существует такое множество $A \in \mathfrak{F}$, что $x \in A$, а $y \notin A$.

Примеры. А) Поле всех подмножеств пространства X является приведенным. Вырожденное поле, состоящее только из пустого множества (т. е. поле всех подмножеств пустого пространства), является приведенным.

Б) Если X содержит более чем одну точку, то поле, состоящее только из пустого множества и всего пространства X, не является приведенным.

---

[1]) См. Хорн и Тарский [1], Лось и Марчевский [1], Тарский [11].

В) Если топологическое пространство X нульмерно, то поле всех открыто-замкнутых множеств $A \subset X$ является приведенным. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Если поле всех открыто-замкнутых подмножеств топологического пространства X является приведенным, то X называется *вполне несвязным*. Очевидно, что каждое вполне несвязное пространство является хаусдорфовым.

Каждое поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X изоморфно приведенному полю $\mathfrak{F}'$. Чтобы получить $\mathfrak{F}'$, достаточно отождествить те точки пространства X, которые не разделяются никаким множеством $A \in \mathfrak{F}$. Более точно, для каждой точки $x \in X$ обозначим через x' множество всех $y \in X$, которые не отделимы от x никаким множеством $A \in \mathfrak{F}$. Пусть A' — множество всех x', где $x \in A$. Класс $\mathfrak{F}'$ всех множеств A' $(A \in \mathfrak{F})$ является приведенным полем подмножеств пространства X', а отображение

$$h(A) = A'$$

является изоморфизмом $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'$.

Поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X называется *совершенным*, если каждый максимальный фильтр (или, что эквивалентно, каждый максимальный идеал) поля $\mathfrak{F}$ определяется точкой пространства X (см. пример А § 6).

Примеры. Г) Каждое конечное поле (т. е. поле, состоящее из конечного числа подмножеств) является совершенным, ибо пересечение A_0 всех множеств A, принадлежащих максимальному фильтру ∇, также принадлежит ∇ (так как оно является пересечением конечного числа элементов фильтра ∇) и каждая точка x_0 из A_0 определяет фильтр ∇.

Д) Поле множеств, определенное в § 6 Б, несовершенно.

Е) Поле всех подмножеств бесконечного пространства X несовершенно. Действительно, пусть Δ_0 — идеал, составленный из всех конечных подмножеств пространства X. В силу теоремы 6.1 идеал Δ_0 является подмножеством максимального идеала Δ, но последний не определяется никакой точкой из X.

Ж) Обобщая примеры Д и Е, мы видим, что если

пространство X бесконечно и поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X содержит все одноточечные множества (следовательно, все конечные подмножества), то поле $\mathfrak{F}$ несовершенно.

3) Поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств компактного топологического пространства X совершенно. Действительно, если ∇ является максимальным фильтром в $\mathfrak{F}$, то пересечение всех множеств $A \in \nabla$ непусто, так как множества $A \in \nabla$ замкнуты и пересечение любого конечного их числа принадлежит ∇ и, следовательно, непусто. Каждая точка x_0, принадлежащая пересечению всех множеств $A \in \nabla$, определяет фильтр ∇.

Если поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X совершенно и является приведенным, то естественное взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами, максимальными фильтрами, двузначными гомоморфизмами и двузначными мерами может быть распространено также на точки пространства X. Действительно, каждая точка пространства X определяет единственный максимальный фильтр (а значит, максимальный идеал, двузначный гомоморфизм и двузначную меру) и, наоборот, каждый максимальный фильтр (и, следовательно, каждый максимальный идеал, двузначный гомоморфизм и двузначная мера) определяется точкой из X. Различные точки x, y определяют различные максимальные фильтры (максимальные идеалы, двузначные гомоморфизмы и двузначные меры). Действительно, пусть $A \in \mathfrak{F}$ — такое множество, что $x \in A$, а $y \notin A$. Тогда A принадлежит максимальному фильтру, определенному точкой x, но не принадлежит максимальному фильтру, определенному точкой y. Это доказывает, что фильтры, определенные точками x и y, различны.

Из примеров В и 3 следует, что если X — компактное вполне несвязное пространство, то поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств X является приведенным и совершенным. Верно и обратное:

7.1. *Если $\mathfrak{F}$ является совершенным приведенным полем подмножеств пространства X, то на X можно определить такую топологию, что X будет компактным вполне не-*

связным пространством, а $\mathfrak{F}$ — полем всех открыто-замкнутых подмножеств топологического пространства X.

Для доказательства предположим, что $\mathfrak{F}$ является базисом открытых множеств топологического пространства X. Другими словами, множество $G \subset X$ будет называться открытым тогда и только тогда, когда оно является объединением каких-либо множеств из $\mathfrak{F}$. Разумеется, каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ открыто. Оно также замкнуто в этой топологии, так как множество $X - A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и, следовательно, открыто. Поскольку $\mathfrak{F}$ является приведенным полем, то пространство X вполне несвязно. Для доказательства компактности X достаточно показать, что если оно представлено в виде объединения класса $\mathfrak{S}$ открытых подмножеств, то существует такая конечная последовательность $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$, что

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = X. \tag{1}$$

Мы можем предположить, что множества из $\mathfrak{S}$ принадлежат полю $\mathfrak{F}$ (если это не так, то мы можем заменить $\mathfrak{S}$ классом всех множеств $A \in \mathfrak{F}$, каждое из которых содержится в одном из множеств $B \in \mathfrak{S}$).

Предположим, что равенство (1) не выполняется ни для одной последовательности $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$. Это означает, что идеал Δ_0, порожденный множеством $\mathfrak{S}$ (см. § 3), является собственным. В силу утверждения 6.1 идеал Δ_0 может быть расширен до максимального идеала Δ. Так как поле $\mathfrak{F}$ совершенно, то существует точка $x_0 \in X$, определяющая Δ, т. е.

$$A \in \Delta \text{ тогда и только тогда, когда } x_0 \notin A.$$

Следовательно, $x_0 \notin A$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$, а это противоречит тому, что $\mathfrak{S}$ покрывает X.

Теперь мы докажем, что если множество A из X открыто-замкнуто, то $A \in \mathfrak{F}$. По определению топологии A является объединением класса $\mathfrak{K}$ множеств из $\mathfrak{F}$, так как A — открытое множество. В то же время A является замкнутым подмножеством компактного пространства X, т. е. существует такая конечная последовательность $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{F}$, что $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Следовательно, $A \in \mathfrak{F}$.

Заметим, что топология в X однозначно определяется полем $\mathfrak{F}$ и условиями теоремы 7.1. Действительно, предположим, что мы можем ввести требуемую топологию другим способом. Пусть X_0 обозначает пространство X с этой новой топологией. Так как каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ открыто в X_0, то каждое множество, открытое в X, открыто также и в X_0. Это означает, что тождественное отображение X_0 на X непрерывно. Так как X_0 — компактное хаусдорфово пространство, то отсюда следует, что тождественное отображение X_0 на X является гомеоморфизмом, т. е. эти две топологии совпадают.

Отметим, что если два совершенных приведенных поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ (подмножеств пространства X и X' соответственно) изоморфны, то пространства X и X', снабженные такими же топологиями, как и в теореме 7.1, гомеоморфны. Действительно, пусть h обозначает изоморфизм $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'$. Для каждой точки $x \in X$ класс Δ всех таких $A \in \mathfrak{F}$, что $x \in A$, является максимальным фильтром. Изоморфизм h переводит фильтр Δ в максимальный фильтр $\Delta' = h(\Delta)$, определенный некоторой точкой $x' \in X'$. Следовательно, для каждого $A \in \mathfrak{F}$

$$x \in A \text{ тогда и только тогда, когда } x' \in h(A).$$

Отсюда вытекает, что взаимно однозначное отображение φ (X на X'), определенное при помощи формулы

$$\varphi(x) = x',$$

обладает свойствами

$$\varphi(A) = h(A) \in \mathfrak{F}' \text{ для каждого } A \in \mathfrak{F},$$
$$\varphi^{-1}(A') = h^{-1}(A') \in \mathfrak{F} \text{ для каждого } A' \in \mathfrak{F}'.$$

Поэтому $\varphi(G)$ является открытым в X' множеством для каждого открытого в X множества G, а $\varphi^{-1}(G')$ открыто в X для каждого G', открытого в X'. Отсюда следует, что φ — гомеоморфизм X на X'.

Примеры. И) Предположим, что $\mathfrak{F}$ является совершенным (не обязательно приведенным) полем подмножеств пространства X. Определяя открытые подмножества так же, как в теореме 7.1, мы превращаем X в компактное топологическое пространство (которое, вообще говоря, не является T_0-пространством). Доказательство компактности такое же, как и в доказательстве теоремы 7.1.

К) Если $\mathfrak{F}$ является совершенным полем подмножеств пространства X, а $\{A_t\}_{t \in T}$ — бесконечное индексированное множество непересекающихся непустых множеств из $\mathfrak{F}$, то теоретико-множественное объединение A всех A_t не принадлежит полю $\mathfrak{F}$.

Действительно, рассмотрим X как топологическое пространство с топологией, определенной в примере И. Допустим, что $A \in \mathfrak{F}$, тогда открытые множества A_t покрывают замкнутое подмножество A компактного пространства X. Отсюда вытекает, что множество A является объединением конечного числа множеств A_t вопреки предположению о том, что множество T бесконечно, а множества A_t непусты и попарно не пересекаются.

§ 8. Основная теорема о представлении

Как говорилось в § 1, элементы булевой алгебры являются аналогами подмножеств данного пространства. Из сказанного в § 6 и 7 следует, что максимальные фильтры (или, что эквивалентно, максимальные идеалы, двузначные гомоморфизмы, двузначные меры) являются булевыми аналогами точек пространств. Это замечание будет полезно при доказательстве следующих двух теорем.

8.1. *Пусть X — множество максимальных фильтров булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ через $h(A)$ обозначим множество всех таких максимальных фильтров $\nabla \in X$, что $A \in \nabla$. Тогда класс $\mathfrak{F}$ всех множеств $h(A)$ (где $A \in \mathfrak{A}$) является приведенным полем подмножеств пространства X, а h — гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$.*

Если для каждого $A \neq \wedge$ существует такой максимальный фильтр $\nabla \in X$, что $A \in \nabla$, то h является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$.

Из определения h следует, что

(1) $\quad A \in \nabla$ тогда и только тогда, когда $\nabla \in h(A)$.

Так как $A \cap B \in \nabla$ тогда и только тогда, когда $A \in \nabla$ и $B \in \nabla$ (см. конец § 3), то

$$h(A \cap B) = h(A) \cap h(B),$$

где символ „$\cap$“ в правой части равенства обозначает теоретико-множественное пересечение. Поскольку каждый

фильтр $\nabla \in X$ максимален, то мы заключаем, что (см. начало § 6)

$$A \in \nabla \text{ тогда и только тогда, когда} - A \notin \nabla.$$

Из этого в силу формулы (1) вытекает, что

$$h(-A) = -h(A),$$

где „—“ в правой части равенства обозначает теоретико-множественное дополнение в пространстве X. Таким образом, h является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств пространства X. Следовательно, класс $\mathfrak{F} = h(\mathfrak{A})$ является полем подмножеств пространства X.

Если ∇_1 и ∇_2 являются различными точками в X, т. е. различными максимальными фильтрами, то существует элемент $A \in \mathfrak{A}$, который принадлежит только одному из них, например,

$$A \in \nabla_1 \text{ и } A \notin \nabla_2.$$

Следовательно, в силу формулы (1)

$$\nabla_1 \in h(A) \in \mathfrak{F} \text{ и } \nabla_2 \notin h(A),$$

что доказывает приведенность поля $\mathfrak{F}$.

Если выполнено условие второй части теоремы 8.1, то $h(A)$ непусто, если $A \neq \wedge$. Это доказывает, что h является изоморфизмом [см. (3) § 5].

8.2. *Каждая булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна совершенному приведенному полю множеств, т. е. полю всех открыто-замкнутых подмножеств компактного вполне несвязного пространства*[1]).

Предположим в теореме 8.1, что X является множеством всех максимальных фильтров алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть h и $\mathfrak{F}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 8.1.

---

[1]) Эта основная теорема о представлении доказана Стоуном [1, 4, 5, 6, 10]. Теорема 8.2 о представлении и теорема 6.1 о существовании максимальных идеалов и фильтров исследовались во многих работах. См. Ауман [2], Дилуорс [1], Данфорд и Шварц [1] (стр. 41), Данфорд и Стоун [1], Энгелькинг и Куратовский [1], Эномото [1], Фринк [1], Исеки [1], Какутани [1], Ливенсон [1], Мори [1], Нолин [1], Стаблер [2], Тарский [1]. Другая теорема о представлении булевых алгебр дана Хаимо [2].

Если $A \neq \wedge$, то главный фильтр, порожденный элементом A, является собственным, поэтому в силу теоремы 6.1 его можно продолжить до максимального фильтра ∇. Очевидно, $A \in \nabla \in X$. Из теоремы 8.1 следует, что h является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на приведенное поле $\mathfrak{F}$. Докажем, что поле $\mathfrak{F}$ является совершенным.

Пусть ∇' — максимальный фильтр поля $\mathfrak{F}$. Из изоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ и поля $\mathfrak{F}$ вытекает, что класс ∇ всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) \in \nabla'$, является максимальным фильтром в $\mathfrak{A}$. Пусть $B \in \mathfrak{F}$, т. е. $B = h(A)$ для некоторого элемента $A \in \mathfrak{A}$. Тогда

$$B \in \nabla' \text{ тогда и только тогда, когда } A \in \nabla,$$

т. е. [см. (1)]

$$B \in \nabla' \text{ тогда и только тогда, когда } \nabla \in B.$$

Отсюда следует, что фильтр ∇' определяется точкой $\nabla \in X$, т. е. что поле $\mathfrak{F}$ совершенно.

Последнее утверждение теоремы 8.2 сразу же следует из доказанного и из теоремы 7.1.

Компактное вполне несвязное пространство X называется *пространством Стоуна* булевой алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{A}$ изоморфна (совершенному приведенному) полю всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X. Из замечаний в конце § 7 вытекает, что все пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ гомеоморфны между собой. Обратно, если X и X' — гомеоморфные пространства, а X является пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$, то таковым же будет и пространство X'. Действительно, если φ — гомеоморфизм X на X', то отображение $h(A) = \varphi(A)$ $(A \in \mathfrak{F})$ является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств из X на поле $\mathfrak{F}'$ всех открыто-замкнутых подмножеств из X'. Если поле $\mathfrak{F}$ изоморфно алгебре $\mathfrak{A}$, то и поле $\mathfrak{F}'$ ей изоморфно. Таким образом, пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{A}$ определяется ею однозначно с точностью до гомеоморфизма.

Очевидно, в построении пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$, данном в доказательстве теоремы 8.2, мы могли бы использовать максимальные идеалы (или двузначные гомоморфизмы, двузначные меры) вместо максимальных

фильтров. Соответствующим образом требуется изменить определение $h(A)$.

Мы доказали в § 2, что булевы операции $\cup$, $\cap$, $-$ и булево включение $\subset$ обладают некоторыми свойствами, аналогичными соответствующим свойствам теоретико-множественных операций и теоретико-множественного включения. Из теоремы 8.2 вытекает, что, грубо говоря, они обладают всеми свойствами своих теоретико-множественных аналогов. Действительно, каждая булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторому полю множеств, и этот изоморфизм сохраняет все свойства (конечных) теоретико-множественных операций и теоретико-множественного включения.

Как следует из теоремы 8.2, различие между понятием поля множеств и более общим понятием булевой алгебры не существенно с точки зрения конечных теоретико-множественных операций и их булевых аналогов. В гл. II мы покажем, что это различие существенно, если рассматривать некоторые бесконечные операции.

Теорема 8.2 также демонстрирует значение понятия компактного вполне несвязного пространства для теории булевых алгебр.

Примеры. А) Если $\mathfrak{A}$ — поле всех открыто-замкнутых подмножеств компактного вполне несвязного пространства X, то X является пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$.

Б) Если булева алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то пространство Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$ будет конечным хаусдорфовым пространством (и наоборот). В этом случае $\mathfrak{F}$ будет классом всех подмножеств пространства X. Если X состоит из n элементов, то $\mathfrak{A}$ состоит из 2^n элементов. Таким образом, если две конечные булевы алгебры имеют одинаковое число элементов, то они изоморфны.

В частности, любое одноточечное пространство является пространством Стоуна двухэлементной булевой алгебры. Пустое множество является пространством Стоуна вырожденной булевой алгебры.

В) Пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{A}$ метризуемо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ не более чем счетна. Это

вытекает из теоремы о том, что компактное хаусдорфово пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно обладает счетной базой открытых множеств[1]), т. е. если существует такая счетная последовательность открытых множеств, что каждое открытое множество представимо в виде объединения множеств из этой последовательности. Если алгебра $\mathfrak{A}$ счетна, то поле $\mathfrak{F}$ (всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$) является счетным открытым базисом пространства X, т. е. пространство X метризуемо. Наоборот, если X обладает базисом открытых множеств $\{G_n\}$, то каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ является объединением некоторых множеств из последовательности $\{G_n\}$. Так как множество A замкнуто в компактном пространстве, то его можно представить в виде объединения конечной системы множеств из последовательности $\{G_n\}$. Отсюда следует, что мощность $\mathfrak{F}$ не превосходит $\aleph_0$. Следовательно, мощность алгебры $\mathfrak{A}$ также меньше или равна $\aleph_0$.

Известно[2]), что число топологических типов вполне несвязных компактных метрических пространств равно $2^{\aleph_0}$. Отсюда следует, что имеется $2^{\aleph_0}$ изоморфных типа счетных булевых алгебр, т. е. все счетные булевы алгебры можно таким образом разделить на $2^{\aleph_0}$ класса, что две булевы алгебры попадают в один класс тогда и только тогда, когда они изоморфны.

Г) Пусть X_0 — бесконечное пространство и $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, образованная всеми конечными подмножествами X_0 и их дополнениями относительно пространства X_0 (см. § 6, пример Б). Через x_0 обозначим точку, не принадлежащую пространству X_0, и пусть $X = X_0 \cup (x_0)$. Отображение

$$h(A) = \begin{cases} A, & \text{если множество } A \in \mathfrak{A} \text{ конечно} \\ A \cup (x_0), & \text{если множество } A \in \mathfrak{A} \text{ бесконечно} \end{cases}$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X. Превратим X в топологическое пространство, считая класс $\mathfrak{F}$ базисом его открытых множеств.

---

[1]) Эта теорема доказана Урысоном. См., например, Александров и Хопф [1], стр. 88.

[2]) Мостовский [1]. См. также Мазуркевич и Серпинский [1].

Тогда пространство X компактно и вполне несвязно, и, следовательно, является пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$. Так топологизированное пространство X называется одноточечной компактификацией дискретного пространства X_0.

Д) Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшее поле подмножеств единичного интервала $0 \leqslant x < 1$, содержащее все интервалы $0 \leqslant x < a$ $(0 < a \leqslant 1)$, т. е. класс всех конечных объединений замкнутых слева и открытых справа подинтервалов единичного интервала. Пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ является множество X, полученное из замкнутого интервала $0 \leqslant x \leqslant 1$ посредством раздвоения каждой внутренней точки x на две точки x^- и x^+. Множество X будем рассматривать как упорядоченное множество с естественным порядком

$$0 < x^- < x^+ < y^- < y^+ < 1 \text{ для любых } 0 < x < y < 1.$$

В топологии, определенной этим порядком, X будет компактным и вполне несвязным пространством[1]). Булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна полю $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X (если в соответствие каждому интервалу $a \leqslant x < b$ поставить множество, образованное элементами a^+, b^- и всеми x^-, x^+ для $a < x < b$!), поэтому X является пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$[2]).

Е) Читатель, знакомый с компактификацией Чеха — Стоуна, может легко убедиться в том, что если алгебра $\mathfrak{A}$ является полем всех подмножеств пространства X_0 (рассматриваемого в дискретной топологии), то компактификация Чеха — Стоуна $\beta(X_0)$ будет пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$.

Ж) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле подмножеств пространства X. Для любого $A \in \mathfrak{F}$ через $g(A)$ обозначим множество всех таких максимальных фильтров ∇, что $A \in \nabla$ и ∇ не определяется никакой точкой из X. Тогда отображение

$$h(A) = A \cup g(A) \qquad (A \in \mathfrak{F})$$

является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на совершенное поле подмножеств пространства $X' = X \cup g(X)$.

---

[1]) Александров и Урысон [1].

[2]) Относительно аналогичной конструкции пространства Стоуна поля всех множеств вида $A \cup B$, где $A \in \mathfrak{A}$, а множество B конечно, см. Марчевский [12, 13]. См. также Семадени [3], стр. 79.

Основная теорема 8.2 о представлении позволяет нам переводить булевы понятия на топологический язык соответствующих пространств Стоуна. В дальнейшем это будет делаться часто. Здесь мы дадим топологическую интерпретацию идеалов и фильтров.

Пусть X — пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть h — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X.

Для каждого открытого множества $G \subset X$ класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) \subset G$, является идеалом. Он называется *идеалом, соответствующим множеству* G. Обратно, каждый идеал Δ соответствует некоторому открытому подмножеству пространства X, а именно объединению всех множеств $h(A)$, где $A \in \Delta$.

Для каждого замкнутого множества $F \subset X$ класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что F лежит в $h(A)$, есть фильтр, называемый *фильтром, соответствующим множеству* F. Обратно, каждый фильтр ∇ соответствует некоторому замкнутому подмножеству пространства X, а именно пересечению всех множеств $h(A)$, где $A \in \nabla$.

Таким образом, имеет место взаимно однозначное соответствие между идеалами и открытыми подмножествами и между фильтрами и замкнутыми подмножествами пространства Стоуна. Следовательно, изучение идеалов и фильтров в алгебре $\mathfrak{A}$ можно свести к изучению открытых и замкнутых подмножеств пространства X. Указанное соответствие позволяет нам также классифицировать идеалы и фильтры с точки зрения топологических свойств соответствующих открытых и замкнутых множеств. Например, естественно выделить класс идеалов, соответствующих регулярным или плотным открытым множествам, класс фильтров, соответствующих регулярным или нигде не плотным замкнутым множествам, и т. д. Такая классификация [1]) не входит в предмет исследования этой книги. Мы отметим только, что нулевой идеал соответствует пустому множеству, а собственные идеалы в алгебре $\mathfrak{A}$ соответствуют собственным открытым подмножествам пространства X. Аналогично единичный фильтр соответствует всему пространству X, а собственные фильтры в алгебре $\mathfrak{A}$

[1]) Рассмотренная в работе Стоуна [7].

соответствуют непустым замкнутым подмножествам пространства X. Максимальные фильтры соответствуют одноточечным множествам, а максимальные идеалы — дополнениям к одноточечным множествам.

§ 9. Атомы

Говорят, что элемент $a \neq \wedge$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является *атомом*[1]) алгебры $\mathfrak{A}$, если для любого $A \in \mathfrak{A}$ включение

$$A \subset a \tag{1}$$

означает, что

$$\text{или } A = \wedge, \text{ или } A = a. \tag{2}$$

Понятие атома есть булева аналогия одноточечного множества. Действительно, если $\mathfrak{A}$ — поле множеств, то любое одноточечное множество в алгебре $\mathfrak{A}$ является атомом алгебры $\mathfrak{A}$.

Если a — атом булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то для любого элемента $B \in \mathfrak{A}$

$$\text{или } a \subset B, \text{ или } a \cap B = \wedge. \tag{3}$$

Чтобы доказать это, достаточно в условиях (1) и (2) положить $A = a \cap B$.

Обратно, если $a \neq \wedge$ и удовлетворяет условию (3), то a — атом.

Заметим, что элемент $a \in \mathfrak{A}$ является атомом тогда и только тогда, когда главный фильтр ∇, порождаемый a (т. е. класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $a \subset A$), будет максимальным фильтром. Действительно, условие (3) означает, что для любого $B \in \mathfrak{A}$ или B, или $-B$ принадлежит фильтру ∇, т. е. ∇ — максимальный фильтр. С другой стороны, если фильтр ∇ максимален, то $a \neq \wedge$ и для любого $B \in \mathfrak{A}$ или $a \subset B$ или $a \subset -B$. Поскольку условие $a \subset -B$ означает, что $a \cap B = \wedge$, то условие (3) выполнено, т. е. a — атом.

---

[1]) Обобщение понятия атома см. Пирс [5].

Другими словами, элемент a тогда и только тогда является атомом алгебры $\mathfrak{A}$, когда главный идеал, порожденный элементом $-a$ (т. е. класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $a \cap A = \wedge$), является максимальным идеалом.

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ *атомна*, если для каждого элемента $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ существует атом $a \subset A$. Булеву алгебру $\mathfrak{A}$ называют *безатомной*, если она не содержит ни одного атома.

9.1. *Пусть для любого $A \in \mathfrak{A}$, через $h(A)$ обозначено множество всех атомов a алгебры $\mathfrak{A}$, таких, что $a \subset A$. Отображение h является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле всех подмножеств множества $X = h(\vee)$ всех атомов.*

Если $\mathfrak{A}$ — атомная алгебра, то отображение h является изоморфизмом.

Теорема 9.1 непосредственно следует из теоремы 8.1, где за X берется множество всех главных максимальных фильтров.

Примеры. А) Пусть отображение h является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$. В таком случае элемент $a \in \mathfrak{A}$ будет атомом тогда и только тогда, когда $h(a)$ является одноточечным подмножеством пространства X. Конечно, одноточечное множество (x) принадлежит полю $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда x является изолированной точкой пространства X.

Алгебра $\mathfrak{A}$ является атомной тогда и только тогда, когда множество всех изолированных точек плотно в пространстве X. Алгебра $\mathfrak{A}$ будет безатомной тогда и только тогда, когда пространство X плотно в себе, т. е. не имеет изолированных точек.

Б) Поле всех открыто-замкнутых подмножеств канторова совершенного множества X действительных чисел (т. е. множества всех действительных чисел вида

$$\frac{2\alpha_1}{3} + \frac{2\alpha_2}{3^2} + \ldots,$$

где α_n равно 0 или 1) является безатомной булевой алгеброй, поскольку пространство X плотно в себе.

В) Известно[1]), что все метризуемые плотные в себе вполне несвязные компактные пространства гомеоморфны между собой, а именно они гомеоморфны канторову множеству, определенному в примере Б. Это значит, что все счетные безатомные булевы алгебры изоморфны, так как они изоморфны полю всех открыто-замкнутых подмножеств канторова множества (см. § 8, пример В).

Г) Любая конечная булева алгебра атомна. Если она имеет 2^n элемента (см. § 8, пример Б), то n — число атомов.

§ 10. Факторалгебры

Пусть Δ — идеал булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Для произвольных элементов A, $B \in \mathfrak{A}$ мы пишем, что

$$A \sim B$$

тогда и только тогда, когда

$$A - B \in \Delta \text{ и } B - A \in \Delta.$$

Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

(1) $$A \sim A;$$

(2) $$\text{если } A \sim B, \text{ то } B \sim A;$$

(3) $$\text{если } A \sim B \text{ и } B \sim C, \text{ то } A \sim C.$$

Свойство (1) следует из того факта, что идеал Δ содержит нулевой элемент $\wedge$. Свойство (2) очевидно, а свойство (3) вытекает из включений

$$A - C \subset (A - B) \cup (B - C), \quad C - A \subset (C - B) \cup (B - A).$$

Кроме того,

(4) $$\text{если } A_1 \sim A_2, \text{ то } -A_1 \sim -A_2;$$

(5) $$\text{если } A_1 \sim A_2 \text{ и } B_1 \sim B_2,$$
$$\text{то } A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2 \text{ и } A_1 \cap B_1 \sim A_2 \cap B_2.$$

Действительно, $(-A_1) - (-A_2) = A_2 - A_1 \in \Delta$ и аналогично $(-A_2) - (-A_1) \in \Delta$, что доказывает (4). Чтобы доказать первую часть утверждения (5), достаточно заметить, что имеет место включение $(A_1 \cup B_1) - (A_2 \cup B_2) \subset$

---

[1]) См. Куратовский [4], стр. 58.

$\subset (A_1 - A_2) \cup (B_1 - B_2) \in \Delta$, и аналогичное включение для $(A_2 \cup B_2) - (A_1 \cup B_1)$. Вторая часть (5) следует из включения $(A_1 \cap B_1) - (A_2 \cap B_2) \subset (A_1 - A_2) \cup (B_1 - B_2) \in \Delta$ и подобного же включения для $(A_2 \cap B_2) - (A_1 \cap B_1)$.

Из условий (1), (2) и (3) следует, что отношение $\sim$ разбивает множество $\mathfrak{A}$ на непересекающиеся классы (классы эквивалентности по отношению $\sim$) таким образом, что два элемента A_1 и A_2 находятся в одном классе тогда и только тогда, когда $A_1 \sim A_2$. Класс, содержащий элемент $A \in \mathfrak{A}$, будем обозначать через $[A]$ (или $[A]_\Delta$, если это необходимо). Согласно определению, эквивалентны следующие условия:

$$A \sim B, \quad A \in [B], \quad [A] = [B].$$

Множество всех классов $[A] (A \in \mathfrak{A})$ будем обозначать через $\mathfrak{A}/\Delta$. Это множество становится булевой алгеброй, если следующим образом определить булевы операции:

(6) $[A] \cup [B] = [A \cup B], \quad [A] \cap [B] = [A \cap B] - [A] = [-A].$

Конечно, символы $\cup$, $\cap$, $-$ в левых частях этих равенств обозначают не теоретико-множественные операции над элементами $[A]$ и $[B]$, интерпретированными как множества, а булевы операции над $[A]$ и $[B]$, рассматриваемыми как элементы булевой алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$.

Из условий (4) и (5) мгновенно следует, что элементы $[A] \cup [B]$, $[A] \cap [B]$ и $-[A]$ не зависят от выбора представителей A, $B \in \mathfrak{A}$ элементов $[A]$, $[B] \in \mathfrak{A}/\Delta$. Доказательство того, что так определенные булевы операции алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ удовлетворяют аксиомам $(A_1) - (A_5)$ из § 1, непосредственно основано на тождествах (6), которые утверждают, что операция взятия квадратных скобок [ ] коммутирует с операциями $\cup$, $\cap$, $-$. Например, мы проверяем, что

$$[A] \cup [B] = [A \cup B] = [B \cup A] = [B] \cup [A]$$

и аналогично для остальных аксиом.

Из определения (6) вытекает, что

$$[A] - [B] = [A - B], \tag{7}$$

поскольку $[A] - [B] = [A] \cap -[B] = [A] \cap [-B] = [A \cap -B] = [A - B]$.

Построение факторалгебр $\mathfrak{A}/\Delta$ в теории булевых алгебр подобно аналогичным операциям в теории групп. Связь между факторалгебрами и гомоморфизмами такая же, как и в теории групп. Действительно, с одной стороны, из условия (6) непосредственно следует, что отображение

$$h(A)=[A]$$

является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на факторалгебру $\mathfrak{A}/\Delta$. Этот гомоморфизм будем называть *естественным гомоморфизмом*. С другой стороны, если h — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, а Δ — идеал всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A)=\wedge$, то формула

$$g([A])=h(A)$$

определяет изоморфизм g факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ на алгебру $\mathfrak{A}'$.

Элементы $[\wedge]$ и $[\vee]$ являются нулем и единицей факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$, так как естественный гомоморфизм отображает нуль в нуль и единицу в единицу (см. § 5, Г). Следовательно,

(8) $[A]$ является нулем факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ тогда и только тогда, когда $A \in \Delta$.

Заметим также, что

(9) $[A] \subset [B]$ тогда и только тогда, когда $A-B \in \Delta$.

Действительно, это включение имеет место тогда и только тогда, когда элемент $[A]-[B]$, т. е. элемент $[A-B]$ является нулем факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$, что эквивалентно, согласно (8), включению $A-B \in \Delta$.

Примеры. А) Множество всех подэлементов любого элемента E булевой алгебры $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как булеву алгебру. Мы ее обозначим через $\mathfrak{A}|E$. Под операциями объединения и пересечения в алгебре $\mathfrak{A}|E$ понимают то же, что и в алгебре $\mathfrak{A}$. Дополнение к A в алгебре $\mathfrak{A}|E$ определяется как пересечение элемента E и дополнения к A в булевой алгебре $\mathfrak{A}$. Легкая проверка аксиом $(A_1)-(A_5)$ оставлена читателю.

Пусть Δ — главный идеал (булевой алгебры $\mathfrak{A}$), порожденный элементом $-E \in \mathfrak{A}$ (т. е. идеал Δ является классом всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $A \cap E=\wedge$). Алгебра $\mathfrak{A}|E$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}/\Delta$, точнее отображение $h(A)=$

$=[A](A \in \mathfrak{A} \mid E)$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A} \mid E$ на алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$.

Б) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле подмножеств пространства X, а E — некоторое подмножество из X. Класс Δ всех таких множеств $A \in \mathfrak{F}$, что пересечение $A \cap E$ пусто (т. е. класс всех подмножеств пространства $X - E$, которые принадлежат $\mathfrak{F}$), является идеалом поля $\mathfrak{F}$. Булева алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ изоморфна полю (обозначенному через $\mathfrak{F} \mid E$) всех множеств $A \cap E$, где $A \in \mathfrak{F}$. Изоморфизм задается отображением

$$h(E \cap A) = [A] \qquad (A \in \mathfrak{F}).$$

Действительно, это отображение h является взаимно однозначным, поскольку $A_1 \cap E = A_2 \cap E$ тогда и только тогда, когда $A_1 - A_2 \subset -E$ и $A_2 - A_1 \subset -E$, т. е. $[A_1] = [A_2]$. Очевидно, что отображение h сохраняет булевы операции.

Заметим, что если $E \in \mathfrak{F}$, то поле $\mathfrak{F} \mid E$ совпадает с булевой алгеброй $\mathfrak{F} \mid E$, определенной в примере А.

В) Пусть Δ — идеал в булевой алгебре $\mathfrak{A}$, $E \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\Delta$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A} \mid E$, $\Delta_0 = \Delta \cap \mathfrak{A}$. Тогда Δ_0 является идеалом в алгебре $\mathfrak{A}_0$, а факторалгебра $\mathfrak{A}_0/\Delta_0$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}' \mid [E]_\Delta$. Именно формула

$$h([A]_{\Delta_0}) = [A]_\Delta \qquad (A \in \mathfrak{A}_0)$$

определяет изоморфизм факторалгебры $\mathfrak{A}_0/\Delta_0$ на $\mathfrak{A}' \mid [E]_\Delta$.

Г) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех множеств (топологического пространства X) с нигде не плотной границей (см. стр. 13), т. е. класс всех множеств вида $G \cup N$, где множество G открыто, а N нигде не плотно. Пусть Δ — идеал всех нигде не плотных подмножеств. Булева алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ изоморфна каждой из булевых алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ всех регулярных замкнутых подмножеств или всех регулярных открытых подмножеств соответственно (см. § 1, пример Б) [1]).

Это следует из того факта, что для любого множества $A \in \mathfrak{F}$ существует в точности одно множество $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ и в точности одно множество $A_2 \in \mathfrak{A}_2$, такие, что $[A] = [A_1] = [A_2]$.

Легко определить пространство Стоуна факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ посредством пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.

---

[1]) Стоун [6].

Пусть h — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, и пусть D — объединение всех множеств $h(A)$, где $A \in \Delta$. Поскольку множество D открыто, то $E = X - D$ замкнуто, поэтому множество E есть компактное вполне несвязное пространство, а $\mathfrak{F} | E$ является полем всех открыто-замкнутых подмножеств из E. Заметим, что $A \in \Delta$ тогда и только тогда, когда $h(A) \subset D$, т. е. $h(A) \cap E = \wedge$. Поскольку отображение h_0, определенное формулой

$$h_0([A]) = h(A) \cap E,$$

является изоморфизмом факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ на $\mathfrak{F} | E$, пространство E является пространством Стоуна факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta$.

Таким образом, пространства Стоуна факторалгебр $\mathfrak{A}/\Delta$ являются с точностью до гомеоморфизмов замкнутыми подмножествами пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ и обратно. Каждый гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфен подходящей факторалгебре $\mathfrak{A}/\Delta$, откуда следует, что пространства Стоуна гомоморфных образов алгебры $\mathfrak{A}$ являются гомеоморфными образами замкнутых подмножеств пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ и, обратно, булева алгебра $\mathfrak{A}'$ является гомеоморфным образом алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда пространство Стоуна гомеоморфно замкнутому подмножеству пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$.

Если ∇ — фильтр алгебры $\mathfrak{A}$, то под булевой алгеброй $\mathfrak{A}/\nabla$ мы будем понимать по двойственности булеву алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$, где Δ — идеал, двойственный фильтру ∇. Таким образом, два элемента $A, B \in \mathfrak{A}$ определяют некоторый элемент алгебры $\mathfrak{A}/\nabla$ тогда и только тогда, когда

$$A \to B \in \nabla \text{ и } B \to A \in \nabla.$$

Факторалгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ (или $\mathfrak{A}/\nabla$) является двухэлементной булевой алгеброй тогда и только тогда, когда Δ (∇) является максимальным идеалом (фильтром). Тогда естественный гомоморфизм является двузначным.

Факторалгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ ($\mathfrak{A}/\nabla$) вырождена тогда и только тогда, когда идеал Δ (фильтр ∇) не является собственным.

Если идеал Δ является нулевым идеалом (если фильтр ∇ является единичным фильтром), то $[A]=[B]$ тогда и только тогда, когда $A=B$. Таким образом, класс эквивалентности $[A]$ содержит только элемент A. Отождествляя $[A]$ с A, мы отождествляем факторалгебру $\mathfrak{A}/\Delta$ с алгеброй $\mathfrak{A}$, и это отождествление сохраняет булевы операции.

Пусть Δ — идеал булевой алгебры $\mathfrak{A}$, Δ' — идеал факторалгебры $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}/\Delta$. Класс Δ'' всех таких элементов $A\in\mathfrak{A}$, что $[A]_\Delta\in\Delta'$, является идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Легко проверить, что формула

$$h([A]_{\Delta''})=[[A]_\Delta]_{\Delta'} \tag{10}$$

определяет изоморфизм факторалгебры $\mathfrak{A}/\Delta''$ на булеву алгебру $(\mathfrak{A}/\Delta)/\Delta'$ (т. е. на $\mathfrak{A}'/\Delta'$).

По двойственности, если ∇ — фильтр алгебры $\mathfrak{A}$ и ∇' — фильтр алгебры $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}/\nabla$, то класс ∇'' всех $A\in\mathfrak{A}$, которые определяют в $\mathfrak{A}'$ элементы, принадлежащие ∇', является фильтром и булевы алгебры $\mathfrak{A}/\nabla''$ и $(\mathfrak{A}/\nabla)/\nabla'$ (т. е. $\mathfrak{A}'/\nabla'$) изоморфны.

§ 11. Индуцированные гомоморфизмы между полями множеств

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — поля подмножеств пространств X и X' соответственно. Напомним (см. § 5, пример А), что гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$ *индуцирован* отображением φ пространства X' в пространство X, если

$$h(A)=\varphi^{-1}(A) \text{ для каждого множества } A\in\mathfrak{F}. \tag{1}$$

Примеры. А) Если $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}\,|\,X'$ (см. § 10, пример Б), где X' — подмножество пространства X, то гомоморфизм

$$h(A)=A\cap X'$$

поля $\mathfrak{F}$ на поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется тождественным отображением φ пространства X' в пространство X:

$$\varphi(x')=x' \text{ для } x'\in X'.$$

Б) Гомоморфизм h, определенный в § 8, пример Д, не индуцируется никаким поточечным отображением φ. Предположим, что такое отображение φ существует.

Поскольку одноточечное множество $A_0 = (\varphi(x_0))$ конечно, то множество $h(A_0)$ не содержит x_0. С другой стороны, $x_0 \in \varphi^{-1}(A_0)$. Следовательно, $h(A_0) \neq \varphi^{-1}(A_0)$. Противоречие.

Следующее условие является необходимым и достаточным для того, чтобы гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ (подмножеств пространства X) в поле $\mathfrak{F}'$ (подмножеств пространства X') индуцировался поточечным отображением: если максимальный фильтр ∇' поля $\mathfrak{F}'$ определяется точкой x' пространства X', то максимальный фильтр $\nabla = h^{-1}(\nabla')$ (т. е. множество всех таких $A \in \mathfrak{F}$, что $h(A) \in \nabla'$) определяется точкой x в пространстве X. Действительно, если это условие выполнено, то формула

$$\varphi(x') = x$$

определяет отображение (пространства X' в X), индуцирующее гомоморфизм h, так как, согласно определению, для любых $x' \in X'$ и $A \in \mathfrak{F}$

$\varphi(x') \in A$ тогда и только тогда, когда $x' \in h(A)$,

откуда следует, что

$$h(A) = \varphi^{-1}(A) \text{ для любого } A \in \mathfrak{F}.$$

Обратно, если отображение φ пространства X' в пространство X индуцирует гомоморфизм h, а ∇' — максимальный фильтр, определяемый точкой $x' \in X'$, то $\nabla = h^{-1}(\nabla')$ определяется точкой $x = \varphi(x')$, так как для каждого $A \in \mathfrak{F}$ эквивалентны следующие утверждения:

$$A \in \nabla, \quad h(A) \in \nabla', \quad x' \in h(A), \quad x' \in \varphi^{-1}(A), \quad x \in A.$$

Это доказывает следующую теорему.

11.1. *Если поле $\mathfrak{F}$ совершенно, то каждый гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в произвольное поле множеств $\mathfrak{F}'$ индуцируется поточечным отображением.*

Обратно, если изоморфизм поля $\mathfrak{F}$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна поля $\mathfrak{F}$ индуцируется поточечным отображением, то поле $\mathfrak{F}$ совершенно[1]).

---

[1]) Сикорский [6].

Из сказанного выше следует, что отображение φ пространства X' в пространство X индуцирует заданный гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$ тогда и только тогда, когда для любого $x' \in X'$ точка $\varphi(x')$ определяет максимальный фильтр $h^{-1}(\nabla')$, где ∇' обозначает фильтр, определенный точкой x'. Следовательно, мы получили, что если поле $\mathfrak{F}$ приведенное, то существует не более одного отображения φ, индуцирующего гомоморфизм h. Значит, если поле $\mathfrak{F}$ совершенное и приведенное (в частности, если $\mathfrak{F}$ — поле открыто-замкнутых подмножеств компактного вполне несвязного пространства), то каждый гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в произвольное поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется в точности одним поточечным отображением φ.

Пусть g — гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. По теореме 8.2 алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ изоморфны соответственно полям $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ всех открыто-замкнутых подмножеств компактных вполне несвязных пространств X и X'. Пусть h — гомоморфизм поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$, который соответствует в силу этого изоморфизма гомоморфизму g. Гомоморфизм h индуцируется поточечным отображением φ, которое непрерывно, потому что $\varphi^{-1}(A)$ открыто в пространстве X' для каждого $A \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, для каждого открытого множества $A \subset X$. Обратно, если φ — непрерывное отображение пространства X' в пространство X, то φ индуцирует гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$ и, значит, отображение φ определяет гомоморфизм g алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Это естественное соответствие между гомоморфизмами g алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ и непрерывными отображениями φ пространства X' в пространство X взаимно однозначно.

Мы заметили в § 8, что рассмотрение булевых алгебр можно свести к рассмотрению компактных вполне несвязных пространств. Теперь мы видим, что рассмотрение гомоморфизмов булевых алгебр можно свести к рассмотрению непрерывных отображений вполне несвязных компактных пространств.

Заметим далее, что гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда индуцирующее непрерывное отображение φ отображает пространство X' на пространство X. Таким образом, булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна подалгебре алгебры $\mathfrak{A}'$ в том

и только том случае, когда пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ является непрерывным образом пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}'$.

Гомоморфизм h (алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$) отображает алгебру $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда индуцирующее отображение φ взаимно однозначно, т. е. является гомеоморфизмом пространства X' на замкнутое подмножество пространства X. Итак, мы второй раз получаем утверждение из § 10 о том, что булева алгебра $\mathfrak{A}'$ является гомоморфным образом булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}'$ гомеоморфно некоторому замкнутому подмножеству пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$.

Примеры. В) Изоморфизм h булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на себя называется *автоморфизмом*. Естественно, что тождественное отображение алгебры $\mathfrak{A}$ на себя является ее автоморфизмом. Существуют булевы алгебры $\mathfrak{A}$, которые не имеют никаких других автоморфизмов. Это следует из существования такого компактного вполне несвязного пространства[1]) X, для которого тождественное отображение является единственным гомеоморфизмом на себя. Поле $\mathfrak{F}$ открыто-замкнутых подмножеств такого пространства X является булевой алгеброй без собственных автоморфизмов. Действительно, каждый автоморфизм поля $\mathfrak{F}$ (всех открыто-замкнутых подмножеств любого компактного вполне несвязного пространства X) на себя индуцируется некоторым гомеоморфизмом X на X и обратно.

Г) Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ *сверхатомна*[2]), если каждый гомоморфный образ алгебры $\mathfrak{A}$ является атомным. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ является сверхатомной тогда и только тогда, когда пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ является рассеянным, т. е. оно не содержит никакого непустого плотного в себе множества. Так как компакт-

---

[1]) Пример такого пространства был дан Катетовым [1] с помощью техники β-компактификации. Два подобных примера линейно упорядоченных компактных пространств с указанным свойством были одновременно и независимо даны Джонсоном [1] и Ригером [6].

[2]) Для исследования этого понятия см. Дэй [1].

ное хаусдорфово пространство рассеяно тогда и только тогда, когда каждый из его непрерывных образов рассеян [1]), то мы получили, что алгебра $\mathfrak{A}$ сверхатомна тогда и только тогда, когда каждая ее подалгебра является атомной [2]).

Отметим, что существует сверхатомная несчетная булева алгебра со счетным множеством атомов, потому что существует неметризуемое компактное рассеянное пространство со счетным множеством изолированных точек [3]).

Канторово совершенное множество (см. стр. 48) является непрерывным образом любого нерассеянного компактного вполне несвязного пространства. Отсюда вытекает, что каждая не сверхатомная булева алгебра содержит подалгебру, изоморфную булевой алгебре, описанной в примере Б § 9[4]).

§ 12. Теоремы о продолжении до гомоморфизмов

Мы напомним систему обозначений, введенную в формулах (1) § 1,

$$(-1)\cdot A = -A \quad \text{и} \quad (+1)\cdot A = A$$

для каждого элемента A булевой алгебры $\mathfrak{A}$.

Согласно определению из § 4 (стр. 27), говорят, что множество $\mathfrak{S}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ *порождает* алгебру $\mathfrak{A}$ (или является множеством *образующих* алгебры $\mathfrak{A}$), если подалгебра, порожденная множеством $\mathfrak{S}$, совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{A}$, т. е. каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ имеет вид

$$A = \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} A_{p,q}, \tag{1}$$

где $A_{p,q} \in \mathfrak{S}$ и $\varepsilon_{p,q} = \pm 1$ [см. § 4 (1)].

Пусть $\mathfrak{A}'$ — другая булева алгебра и f — отображение множества $\mathfrak{S}$ образующих алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Мы

---

[1]) Пелчинский и Семадени [1], Рудин [1].

[2]) Это замечание сделано Гофманом.

[3]) Александров и Урысон [1]. См. также Семадени [1], стр. 20.

[4]) Пелчинский и Семадени [1]. О характеристике рассеянных компактных пространств (т. е. сверхатомных булевых алгебр) в терминах теории меры см. Рудин [2], Пелчинский и Семадени [1].

будем обсуждать проблему, при каком условии отображение f может быть продолжено до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Сначала заметим, что если такое продолжение до гомоморфизма h существует, то оно единственно. Действительно, если h совпадает с отображением f на множестве $\mathfrak{S}$, то, согласно условиям (а), (а'), (б) § 5, образ $h(A)$ любого элемента A типа (1) удовлетворяет равенству

$$(2) \qquad h(A) = \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} f(A_{p,q}).$$

Поэтому если продолжение h существует, то оно задается равенством (2).

Из единственности продолжения до гомоморфизма непосредственно следует, что если h_1 и h_2 — два гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, совпадающие на множестве $\mathfrak{S}$, порождающем алгебру $\mathfrak{A}$, то $h_1(A) = h_2(A)$ для $A \in \mathfrak{A}$.

В частности, если h — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в себя и множество $\mathfrak{S}$ порождает алгебру $\mathfrak{A}$, то

(3) если $h(A) = A$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$, то $h(A) = A$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$.

Следующая лемма будет полезна в дальнейшем.

12.1. *Если f — взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{S}$, порождающего булеву алгебру $\mathfrak{A}$, на множество $\mathfrak{S}'$, порождающее булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, и если f может быть продолжено до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, а f^{-1} может быть продолжено до гомоморфизма g алгебры $\mathfrak{A}'$ в алгебру $\mathfrak{A}$, то h является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ и $g = h^{-1}$.*

Действительно, для любого $A \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство

$$g(h(A)) = A.$$

Тогда из утверждения (3) вытекает, что это равенство выполняется также для всех $A \in \mathfrak{A}$. Аналогично

$$h(g(A')) = A'$$

для каждого элемента $A' \in \mathfrak{S}'$ и, следовательно, для каждого $A' \in \mathfrak{A}'$. Это доказывает, что $g = h^{-1}$. Таким образом, h является изоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$.

Следующая теорема дает полное решение проблемы, поставленной в начале этого параграфа.

12.2. *Отображение f множества $\mathfrak{S}$ образующих булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ может быть продолжено до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда*

$$(4)\qquad \varepsilon_1 A_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n A_n = \wedge_{\mathfrak{A}} \text{ влечет за собой } \varepsilon_1 f(A_1) \cap \ldots \cap \varepsilon_n f(A_n) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$$

для каждой последовательности $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$ и каждого набора $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ чисел $-1, 1$ [1].

Непосредственно из условий (а′) (б) и (г) § 5 следует необходимость условия (4).

Чтобы доказать достаточность, предположим, что имеет место условие (4). Если (1) и

$$(1')\quad A = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant s'} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant r'_k} \varepsilon'_{k,l} A'_{k,l} \left(A'_{k,l} \in \mathfrak{S}, \varepsilon'_{k,l} = -1 \text{ или } 1\right)$$

— два представления одного и того же элемента A с помощью элементов из множества $\mathfrak{S}$, то

$$(5)\quad \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} f(A_{p,q}) = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant s'} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant r'_k} \varepsilon'_{k,l} f(A'_{k,l}).$$

Действительно, равенства (1) и (1′) означают, благодаря закону Моргана и закону дистрибутивности, что

$$\bigcup_{\{l_k\}} \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s'} \left(\varepsilon_{p,q} A_{p,q} \cap -\varepsilon'_{k,l_k} A'_{k,l_k}\right) =$$
$$= \left(\bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} A_{p,q}\right) \cap -\left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant s'} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant r'_k} \varepsilon'_{k,l} A'_{k,l}\right) = \wedge_{\mathfrak{A}},$$

где объединение $\bigcup_{\{l_k\}}$ распространяется на все последовательности таких целых чисел l_k, что $1 \leqslant l_k \leqslant r'_k$ $(1 \leqslant k \leqslant s')$. Из условия (4) следует, что

$$\left(\bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} f(A_{p,q})\right) \cap -\left(\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant s'} \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant r'_k} \varepsilon'_{k,l} f(A'_{k,l})\right) =$$
$$= \bigcup_{\{l_k\}} \bigcup_{1 \leqslant p \leqslant s} \bigcap_{1 \leqslant q \leqslant r_p} \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant s'} \left(\varepsilon_{p,q} f(A_{p,q}) \cap \right.$$
$$\left. \cap -\varepsilon'_{k,l_k} f(A'_{k,l_k})\right) = \wedge_{\mathfrak{A}'}.$$

---

[1]) Сикорский [14].

Подобным же образом мы доказываем, что

$$\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant s'}\ \bigcap_{1\leqslant l\leqslant r_k'} \varepsilon'_{k,l} f(A'_{k,l})\right) \cap$$
$$\cap -\left(\bigcup_{1\leqslant p\leqslant s}\ \bigcap_{1\leqslant q\leqslant r_p} \varepsilon_{p,q} f(A_{p,q})\right) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$$

и этим завершаем доказательство равенства (5).

Таким образом, равенство (2) определяет единственным образом отображение h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Если $A \in \mathfrak{S}$, то, конечно, $A = A$ является представлением A в форме (1). Следовательно, $h(A) = f(A)$, т. е. h является продолжением f. Легко проверить, что h — гомоморфизм.

12.3. *Пусть f — взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{S}$, порождающего булеву алгебру $\mathfrak{A}$, на множество $\mathfrak{S}'$, порождающее булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Отображение f может быть продолжено до некоторого изоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ в том и только том случае, если для каждой последовательности $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{S}$ и каждой последовательности $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ чисел ± 1*

$$\varepsilon_1 A_1 \cap \ldots \cap \varepsilon_n A_n = \wedge_{\mathfrak{A}} \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } \varepsilon_1 f(A_1) \cap \ldots \cap \varepsilon_n f(A_n) = \wedge_{\mathfrak{A}'}\ ^{1)}.$$

Необходимость этого условия следует из условий (а′), (б), (в), (3) § 5. Если же условие выполнено, то, согласно теореме 12.2, отображение f может быть продолжено до некоторого гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, а f^{-1} — до гомоморфизма $\mathfrak{A}'$ в $\mathfrak{A}$. В силу теоремы 12.1 отображение f может быть продолжено до некоторого изоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$.

12.4. *Пусть $\mathfrak{A}_t$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ для каждого $t \in T$, и пусть h_t — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Предположим, что теоретико-множественное объединение всех $\mathfrak{A}_t$ порождает алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда для того чтобы существовал гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, являющийся общим продолжением всех гомоморфизмов h_t, т. е. такой, что*

$$h(A) = h_t(A) \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}_t,$$

---

[1]) Куратовский и Позамент [1].

необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $t_1, \ldots, t_n$ *различных элементов из* T *и для произвольных элементов* $A_1 \in \mathfrak{A}_{t_1}, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}_{t_n}$ *выполнялось условие*

(6) $$A_1 \cap \ldots \cap A_n = \wedge_{\mathfrak{A}} \text{ влечет за собой } h_{t_1}(A_1) \cap \ldots \cap h_{t_n}(A_n) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$$ [1]).

Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности заметим, что если $A \in \mathfrak{A}_{t_1}$ и $A \in \mathfrak{A}_{t_2}$ $(t_1 \neq t_2)$, то $A \cap -A = \wedge$, $-A \cap A = \wedge$ и в силу условия (6)

$$h_{t_1}(A) \cap -h_{t_2}(A) = \wedge, \quad -h_{t_1}(A) \cap h_{t_2}(A) = \wedge,$$

откуда следует, что $h_{t_1}(A) = h_{t_2}(A)$. Таким образом, равенство

$$f(A) = h_t(A) \text{ для } A \in \mathfrak{A}_t$$

однозначно определяет отображение f теоретико-множественного объединения $\mathfrak{S}$ всех алгебр $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Из условия (6) следует, что отображение f удовлетворяет условию (4). Тогда гомоморфизм h, упомянутый в теореме 12.2, удовлетворяет всем требованиям теоремы 12.4.

Говорят, что множество $\mathfrak{S}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ *плотно (в алгебре* $\mathfrak{A}$*)*, если для каждого ненулевого элемента $A \in \mathfrak{A}$ существует такой элемент $B \in \mathfrak{S}$, что $\wedge \neq B \subset A$.

12.5. *Предположим, что множество* $\mathfrak{S}$ — *плотное подмножество ненулевых элементов булевой алгебры* $\mathfrak{A}$, *порождающее алгебру* $\mathfrak{A}$, *и* $\mathfrak{S}'$ — *плотное подмножество ненулевых элементов булевой алгебры* $\mathfrak{A}'$, *порождающее алгебру* $\mathfrak{A}'$. *Тогда каждое такое отображение* f *множества* $\mathfrak{S}$ *на множество* $\mathfrak{S}'$, *что*

(7) $$A_1 \subset A_2 \text{ тогда и только тогда, когда } f(A_1) \subset f(A_2) \; (A_1, A_2 \in \mathfrak{S}),$$

может быть единственным образом продолжено до изоморфизма алгебры $\mathfrak{A}_1$ *на алгебру* $\mathfrak{A}_2$ [2]).

---

[1]) Сикорский [14].
[2]) Сикорский [32].

Заметим, что из (7) вытекает следующее свойство отображения f:

(8) $A_1 \cap A_2 = \wedge_{\mathfrak{A}}$ тогда и только тогда, когда
$$f(A_1) \cap f(A_2) = \wedge_{\mathfrak{A}'} (A_1, A_2 \in \mathfrak{S}).$$

Действительно, если $A_1 \cap A_2 \neq \wedge$, то существует такой элемент $B \in \mathfrak{S}$, что $B \subset A_1$ и $B \subset A_2$. Следовательно, $f(B) \subset f(A_1)$ и $f(B) \subset f(A_2)$. Более того, $f(B) \neq \wedge$. Это доказывает, что $f(A_1) \cap f(A_2) \neq \wedge$. Аналогично доказывается, что из $f(A_1) \cap f(A_2) \neq \wedge$ следует $A_1 \cap A_2 \neq \wedge$.

Чтобы доказать теорему 12.5, достаточно показать, что отображение f удовлетворяет условию теоремы 12.3. Предположим, что для некоторых $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ из $\mathfrak{S}$

$$(9)\quad A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap -B_1 \cap \ldots \cap -B_m \neq \wedge.$$

Тогда существует такой элемент $A \in \mathfrak{S}$, что A является подэлементом элемента (9), т. е.

$$A \subset A_i \text{ для } i = 1, \ldots, n \text{ и } A \cap B_j = \wedge \text{ для } j = 1, \ldots, m.$$

Из свойств (7) и (8) следует, что

$$f(A) \subset f(A_i) \text{ для } i = 1, \ldots, n \text{ и } f(A) \cap -f(B_j) = \wedge \text{ для } j = 1, \ldots, m.$$

Так как $f(B) \neq \wedge$, то

$$(10)\quad f(A_1) \cap \ldots \cap f(A_n) \cap -f(B_1) \cap \ldots \cap -f(B_m) \neq \wedge.$$

Подобным же образом мы докажем, что из соотношения (10) следует (9).

Примеры. А) Булева алгебра атомна тогда и только тогда, когда множество всех атомов плотно.

Б) Любое плотное множество $\mathfrak{S}$ ненулевых элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является частично упорядоченным относительно булева включения $\subset$ и удовлетворяет следующему условию:

(а) Если $A, B \in \mathfrak{S}$ и $A \not\subset B$, то существует такой элемент $C \subset A$, $C \in \mathfrak{S}$, что никакой элемент $D \in \mathfrak{S}$ не удовлетворяет одновременно условиям $D \subset C$ и $D \subset B$.

Другими словами, если A не является подэлементом B, то существует элемент $C \subset A$ $(C \in \mathfrak{S})$, не пересекающийся с B.

Обратно, можно доказать[1]), что если множество $\mathfrak{S}$, частично упорядоченное с помощью отношения включения $\subset$, удовлетворяет условию (а), то существует такая булева алгебра $\mathfrak{A}$, что множество $\mathfrak{S}$ является плотным подмножеством алгебры $\mathfrak{A}$ и булево включение в алгебре $\mathfrak{A}$ является продолжением частичного порядка $\subset$.

§ 13. Независимые подалгебры. Произведения

Говорят, что индексированное множество $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ подалгебр булевой алгебры $\mathfrak{A}$ *независимо*[2]), если

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \wedge \tag{1}$$

для любой конечной последовательности ненулевых элементов A_i, выбранных из подалгебр с разными индексами, т. е. для таких произвольных элементов $A_1, \ldots, A_n$, что

$$\wedge \neq A_j \in \mathfrak{A}_{t_j},\ t_j \neq t_k \text{ для } j \neq k\,(j,\ k=1,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, что из соотношения (1) следует, что никакой элемент $A \in \mathfrak{A}$, отличный от $\wedge$ и $\vee$, не принадлежит двум подалгебрам $\mathfrak{A}_t$ с разными индексами. Верен более общий факт, что если $A_1 \in \mathfrak{A}_{t_1}$, $A_2 \in \mathfrak{A}_{t_2}$ и $t_1 \neq t_2$, то включение $A_1 \subset A_2$ может иметь место лишь в случае, когда или $A_1 = \wedge$, или $A_2 = \vee$. Это следует из того, что включение $A_1 \subset A_2$ эквивалентно равенству $A_1 \cap -A_2 = \wedge$.

13.1. *Если $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ — независимое индексированное множество подалгебр булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и h_t для каждого $t \in T$ является гомоморфизмом $\mathfrak{A}_t$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, то существует такой гомоморфизм h подалгебры $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, порожденной объединением всех $\mathfrak{A}_t$ $(t \in T)$, в алгебру $\mathfrak{A}'$, что*

$$h(A) = h_t(A) \text{ для любых } A \in \mathfrak{A}_t,\ t \in T.$$

---

[1]) Бюхи [1]. Другое доказательство см. Сикорский [31].

[2]) Понятие независимости (и $\mathfrak{m}$-независимости — см. § 37) является легким обобщением понятия теоретико-множественной независимости множеств, введенной Фихтенгольцем и Канторовичем [1], Хаусдорфом [1]. Марчевский [5, 6, 8, 14, 16] рассмотрел это понятие с точки зрения применения к теории меры. См. также Каппос [5]. Теоремы, упомянутые в § 13, доказаны Сикорским [11, 13, 14].

Действительно, если $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \wedge$ и $A_j \in \mathfrak{A}_{t_j}$, $t_j \neq t_k$ при $j \neq k$, то существует такой индекс j_0, что $A_{j_0} = \wedge$. Значит, $h_{t_{j_0}}(A_{j_0}) = \wedge$ и, следовательно, $h_{t_1}(A_1) \cap \ldots \cap h_{t_n}(A_n) = \wedge$. Согласно теореме 12.4, все гомоморфизмы h_t имеют общее продолжение, которое является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

13.2. *Если $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ и $\{\mathfrak{A}'_t\}_{t \in T}$ — независимые индексированные множества подалгебр булевых алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно, а $h_t\,(t \in T)$ — изоморфизм $\mathfrak{A}_t$ в $\mathfrak{A}'_t$, то изоморфизмы h_t имеют общее продолжение h, которое является изоморфизмом подалгебры $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$, порожденной объединением всех $\mathfrak{A}_t$, на подалгебру $\mathfrak{A}'_0 \subset \mathfrak{A}'$, порожденную объединением всех $\mathfrak{A}'_t$.*

В силу предложения 13.1 мы можем продолжить изоморфизмы h_t до гомоморфизма h подалгебры $\mathfrak{A}_0$ в подалгебру $\mathfrak{A}'_0$. Используя те же самые рассуждения, мы можем продолжить все изоморфизмы h_t^{-1} до гомоморфизма h' подалгебры $\mathfrak{A}'_0$ в подалгебру $\mathfrak{A}_0$. Из сказанного и из теоремы 12.1 следует, что h является изоморфизмом $\mathfrak{A}_0$ на $\mathfrak{A}'_0$.

Следующая операция образования произведения полей множеств дает важный пример независимого индексированного множества подалгебр.

Пусть для каждого $t \in T$ через $\mathfrak{F}_t$ обозначено (невырожденное) поле подмножеств непустого пространства X_t. Пусть X — декартово произведение всех пространств X_t, т. е. множество всех $x = \{x_t\} = \{x_t\}_{t \in T}$, где $x_t \in X_t$ для каждого $t \in T$. Для каждого $A \subset X_t$ обозначим через A^* множество всех точек $x \in X$, чьи t-е координаты x_t принадлежат A, и пусть $\mathfrak{F}_t^*$ — поле (подмножеств X), образованное всеми множествами A^*, где $A \in \mathfrak{F}_t$. Поле $\mathfrak{F}$ (подмножеств X), порожденное объединением всех классов $\mathfrak{F}_t^*\,(t \in T)$, называется F-*произведением* индексированного множества $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ полей множеств.

Операция образования F-произведения часто используется в теории меры. В теории меры доказывается, что если m_t являются заданными мерами на $\mathfrak{F}_t$ и $m_t(X_t) = 1$, то существует в точности одна мера m на F-произведе-

нии $\mathfrak{F}$, такая, что

(2) $$m(A_1^* \cap \ldots \cap A_n^*) = m_{t_1}(A_1) \ldots m_{t_n}(A_n)$$

для каждой конечной последовательности $A_j \in \mathfrak{F}_{t_j}$, где $t_j \neq t_k$ при $j \neq k$ (j, $k = 1, \ldots, n$). Говорят, что мера m является *произведением* мер m_t.

Индексированное множество $\{\mathfrak{F}_t^*\}_{t \in T}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{F}$ независимо. Действительно, если множества $A_j^* \in \mathfrak{F}_{t_j}^*$ ($t_j \neq t_k$ при $j \neq k$) непусты, то множества A_j также непусты, т. е. существуют $x_j \in A_j$. Каждая такая точка $x = \{x_t\} \in X$, что $x_{t_j} = x_j$, принадлежит $A_1^* \cap \ldots \cap A_n^*$.

Заметим, что $\mathfrak{F}_t^*$ изоморфно полю $\mathfrak{F}_t$, т. е. отображение

(3) $$g_t(A) = A^* \text{ для } A \in \mathfrak{F}_t$$

является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}_t$ на поле $\mathfrak{F}_t^*$.

Приведенные выше рассуждения наводят на мысль о следующем обобщении понятия F-произведения.

Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ — индексированное множество невырожденных булевых алгебр. Под *булевым произведением*[1]) (или просто *произведением*) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ мы будем понимать всякую пару

(4) $$\{\{i_t\}_{t \in T}, \mathfrak{B}\},$$

такую, что

(а) $\mathfrak{B}$ является булевой алгеброй;

(б) i_t есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{B}$ для всех $t \in T$;

(в) индексированное множество $\{i_t(\mathfrak{A}_t)\}_{t \in T}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{B}$ независимо;

(г) объединение всех подалгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$, $t \in T$ порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

Если (4) и

(4′) $$\{\{i_t'\}_{t \in T}, \mathfrak{B}'\}$$

— две пары, удовлетворяющие условиям (а) и (б), то мы говорим, что пара (4′) *изоморфна* паре (4), если существует такой изоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$,

---

[1]) Сикорский [13]. Другое эквивалентное определение дано Каппосом [2, 5] и Риддером [1].

что

(5) $$i'_t = hi_t \text{ для всех } t \in T.$$

Заметим, что изоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$ удовлетворяет условию (5) тогда и только тогда, когда

(5′) h является общим продолжением всех изоморфизмов $i'_t i_t^{-1}$ (алгебр $i(\mathfrak{A}_t)$ на алгебры $i'(\mathfrak{A}_t)$), $t \in T$.

Если пара (4′) изоморфна паре (4), то пара (4) изоморфна паре (4′) (надо взять изоморфизм h^{-1}!). Поэтому мы можем просто говорить, что пары (4) и (4′) изоморфны.

Из условия (5′) и теоремы 13.2 легко вытекает, что любые два произведения (4) и (4′) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ изоморфны. С другой стороны, если пара (4) является произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, а пара (4′) ей изоморфна, то (4′) также является произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Таким образом, булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ определяется этими алгебрами единственным образом с точностью до изоморфизма.

Булево произведение любого индексированного множества $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ невырожденных алгебр всегда существует. Действительно, пусть h_t — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ на поле $\mathfrak{F}_t$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X_t алгебры $\mathfrak{A}_t$. Пусть $\mathfrak{F}$ есть F-произведение всех полей $\mathfrak{F}_t$, $t \in T$, и пусть

(6) $$h_t^*(A) = h_t(A)^* \text{ для всех } A \in \mathfrak{A}_t,$$

($t \in T$). Тогда пара

(7) $$\{\{h_t^*\}_{t \in T}, \mathfrak{F}\}$$

является булевым произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Заметим, что $\mathfrak{F}$ есть поле всех открыто-замкнутых подмножеств декартова произведения X всех пространств X_t, а X — компактное и вполне несвязное пространство, поскольку таковы пространства X_t. Таким образом, X есть пространство Стоуна поля $\mathfrak{F}$, т. е. произведение пространств Стоуна булевых алгебр $\mathfrak{A}_t$ является пространством Стоуна булева произведения алгебр $\mathfrak{A}_t$.

Следующая теорема может рассматриваться как другое эквивалентное определение булева произведения.

13.3. *Пара* $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ *является булевым произведением алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (а), (б) *и* (г), *а также следующее условие* (д):

(д) *если* h_t — *произвольные гомоморфизмы алгебр* $\mathfrak{A}_t$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, $t\in T$, *то существует такой гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{C}$, *что*

$$h_t = hi_t \text{ для всех } t\in T. \tag{8}$$

Заметим сначала, что условие (8) эквивалентно следующему утверждению:

(д′) *гомоморфизм* h *является общим продолжением всех гомоморфизмов* $h_t i_t^{-1}$ *(алгебр* $i_t(\mathfrak{A}_t)$ *в* $\mathfrak{C}$), $t\in T$.

Из теоремы 13.1 вытекает, что каждое булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ обладает свойством (д).

С другой стороны, из теоремы 12.1 следует, что если пары (4) и (4′) удовлетворяют условиям (а), (б), (в) и (д), то они изоморфны. Пусть теперь (4) — любая пара, удовлетворяющая условиям (а), (б), (в) и (д), а (4′) — булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Тогда пары (4) и (4′) изоморфны. Значит, пара (4) также является булевым произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$.

Отметим, что если пара (4) — булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, то множество всех элементов вида

$$\bigcap_{t\in T'} i_t(A_t), \tag{9}$$

где $A_t\in\mathfrak{A}_t$, $t\in T'$, а T' — конечное подмножество T, плотно в алгебре $\mathfrak{B}$. Это можно легко доказать в случае, когда пара (4) совпадает с парой (7), а потом распространить доказательство на произвольные булевы произведения с помощью изоморфизма.

Заметим, что теорема о построении произведения мер справедлива также и для булевых алгебр: если m_t — мера на алгебре $\mathfrak{A}_t$, $t\in T$, такая, что $m_t(\vee)=1$, а (4) — булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, то существует в точности одна мера m на алгебре $\mathfrak{B}$, такая, что имеет место равенство (2), где теперь A_j^* обозначает образ элемента A_j при изоморфизме i_{t_j}, т. е. $A_j^* = i_{t_j}(A_j)$ для $j=1, 2, \ldots, n$,

Если $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ — булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, $\mathfrak{A}_t$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, а i_t — тождественное отображение для всех $t\in T$, то $\mathfrak{B}$ также будет называться *булевым произведением* алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$.

§ 14. Свободные булевы алгебры

Множество $\mathfrak{S}$ образующих булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется множеством ее *свободных образующих*, если каждое отображение f множества $\mathfrak{S}$ в произвольную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ может быть продолжено до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$. Очевидно, свободные образующие всегда отличны от нуля и единицы [см. свойство (г) § 5].

Булева алгебра $\mathfrak{A}$ называется *свободной* (*с* $\mathfrak{n}$ *свободными образующими*), если она обладает множеством $\mathfrak{S}$ (мощности $\mathfrak{n}$) свободных образующих.

Например, каждая четырехэлементная булева алгебра $\mathfrak{A}$ является свободной с одной свободной образующей. В качестве свободной образующей можно взять любой из двух отличных от $\wedge$ и $\vee$ элементов. Действительно, пусть A — такой элемент. Алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из элементов $\wedge$, $\vee$, A и $-A$. Если $f(A)=A'\in\mathfrak{A}'$, то отображение h, определяемое формулами

$$h(\wedge)=\wedge,\quad h(\vee)=\vee,\quad h(A)=A',\quad h(-A)=-A',$$

является гомоморфизмом, продолжающим f.

14.1. *Для того чтобы булева алгебра $\mathfrak{A}$ была свободной с $\mathfrak{n}$ свободными образующими, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{A}$ была булевым произведением индексированного множества $\mathfrak{n}$ четырехэлементных булевых алгебр.*

Предположим, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ свободна, а элементы A_t ($t\in T$, $\overline{\overline{T}}=\mathfrak{n}$) являются ее свободными образующими. Множество элементов $\wedge$, $\vee$, A_t и $-A_t$ является четырехэлементной подалгеброй $\mathfrak{A}_t$ алгебры $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}$ порождается объединением всех $\mathfrak{A}_t$. Пусть h_t — гомоморфизм $\mathfrak{A}_t$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, и пусть

$$f(A_t)=h_t(A_t) \text{ для } t\in T.$$

Так как элементы A_t являются свободными образующими, то отображение f может быть продолжено до гомомор-

физма h, который будет в то же время общим продолжением всех гомоморфизмов h_t. Как следует из теоремы 13.3, $\mathfrak{A}$ будет булевым произведением алгебр $\mathfrak{A}_t$, $t \in T$.

С другой стороны, предположим, что $\mathfrak{A}$ является булевым произведением $\mathfrak{n}$ четырехэлементных булевых алгебр, т. е. $\mathfrak{A}$ содержит $\mathfrak{n}$ таких четырехэлементных алгебр $\mathfrak{A}_t$, что объединение всех $\mathfrak{A}_t$ порождает $\mathfrak{A}$ и любые гомоморфизмы h_t подалгебр $\mathfrak{A}_t$ в произвольную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ могут быть продолжены до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ [см. условие (д′) теоремы 13.3]. Подалгебра $\mathfrak{A}_t$ состоит из элементов $\wedge$, $\vee$, A_t и $-A_t$. Докажем, что элементы A_t являются свободными образующими алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, они порождают $\mathfrak{A}$. Пусть f — произвольное отображение множества всех A_t в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Тогда отображение h_t, определяемое формулами

$$h_t(\wedge) = \wedge, \quad h_t(\vee) = \vee, \quad h_t(A_t) = f(A_t), \quad h_t(-A_t) = -f(A_t),$$

является гомоморфизмом $\mathfrak{A}_t$ в $\mathfrak{A}'$. Гомоморфизм h, являющийся общим продолжением всех h_t, будет также продолжением f.

Из рассмотрений § 13 и теоремы 14.1 следует, что две свободные булевы алгебры с одинаковым числом свободных образующих изоморфны. Разумеется, алгебра, изоморфная свободной булевой алгебре, является также свободной с тем же числом свободных образующих. Таким образом, свободные булевы алгебры с точностью до изоморфизма однозначно определены числом своих свободных образующих.

Индексированное множество $\{A_t\}_{t \in T}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *независимым*, если

$$\varepsilon_1 A_{t_1} \cap \varepsilon_2 A_{t_2} \cap \ldots \cap \varepsilon_n A_{t_n} \neq \wedge$$

для любой последовательности индексов $t_j \in T$, $t_j \neq t_k$ при $j \neq k$, и для любой последовательности чисел $\varepsilon_j = -1, 1$. В этом случае все элементы A_t отличны от $\wedge$ и $\vee$.

Легко заметить, что множество $\{A_t\}_{t \in T}$ независимо тогда и только тогда, когда независимо индексированное множество $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, где $\mathfrak{A}_t$ обозначает четырехэлементную

алгебру, порожденную элементом A_t. Таким образом, мы получили теорему

14.2. *Булева алгебра $\mathfrak{A}$ свободна (с $\mathfrak{n}$ свободными образующими) тогда и только тогда, когда она порождается независимым индексированным множеством из $\mathfrak{n}$ элементов. Эти элементы будут тогда свободными образующими.*

Пусть T_0 — множество мощности $\mathfrak{n}$. Для каждого $t \in T_0$ пусть H_t обозначает экземпляр хаусдорфова пространства H, состоящего только из чисел -1 и 1. Декартово произведение $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}} = \mathop{\mathsf{P}}\limits_{t \in T_0} H_t = H^{T_0}$ является вполне несвязным бикомпактным пространством, называемым *канторовым дисконтинуумом* (или, более точно, *канторовым $\mathfrak{n}$-дисконтинуумом*)[1]). Для каждого фиксированного индекса $t \in T_0$ через D_t обозначим множество всех таких точек из $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, t-я координата которых равна 1 (т. е. множество всех таких точек $\{a_\tau\}_{\tau \in T_0} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, для которых $a_t = 1$). Пусть $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ — поле всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$. Из определения топологии в декартовом произведении $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ следует, что $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ является наименьшим полем, содержащим все множества D_t, $t \in T_0$. Множества D_t независимы, так как если индексы $t_1, \ldots, t_n$ различны, то каждая точка $\{a_\tau\}_{\tau \in T_0} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ с $a_{t_j} = \varepsilon_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ принадлежит пересечению $\varepsilon_1 \cdot D_{t_1} \cap \ldots \cap \varepsilon_n \cdot D_{t_n}$ ($\varepsilon_j = \pm 1$ для $j = 1, \ldots, n$). Отсюда и из утверждения 14.2 вытекает утверждение

14.3. *Поле $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ всех открыто-замкнутых подмножеств канторова $\mathfrak{n}$-дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ является свободной булевой алгеброй с $\mathfrak{n}$ свободными образующими D_t, $t \in T_0$.*

Теорему 14.3 можно также вывести из утверждения 14.1 и замечания на стр. 67. Действительно, H_t является пространством Стоуна для четырехэлементной булевой алгебры. Отсюда следует, что $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ является пространством

---

[1]) Если $\mathfrak{n} = \aleph_0$, то $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству действительных чисел, определенному в § 9, Б.

Стоуна для произведения $\mathfrak{n}$ экземпляров четырехэлементной булевой алгебры, т. е., что $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ является свободной булевой алгеброй с $\mathfrak{n}$ образующими.

Если $\mathfrak{A}'$ — булева алгебра с множеством $\mathfrak{S}'$ свободных образующих, то для каждой булевой алгебры $\mathfrak{A}$, порожденной множеством $\mathfrak{S}$, где $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \overline{\overline{\mathfrak{S}}}'$, существует такой гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}'$ на алгебру $\mathfrak{A}$, что h отображает $\mathfrak{S}'$ на $\mathfrak{S}$. Это сразу же следует из существования отображения $\mathfrak{S}'$ на $\mathfrak{S}$ и из определения свободной алгебры. Таким образом, каждая булева алгебра является гомоморфным образом свободной булевой алгебры с достаточно большим числом свободных образующих.

Сделанное замечание может быть выражено также в следующей форме:

14.4 *Каждая булева алгебра $\mathfrak{A}$ с множеством образующих $\mathfrak{S}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{n}$, изоморфна факторалгебре $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}/\Delta$, где Δ — подходящий идеал из $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$. Более того, мы можем предполагать, что этот изоморфизм отображает множество всех элементов $[D_t]$ на множество $\mathfrak{S}$ образующих алгебры $\mathfrak{A}$.*

Попутно мы доказали, что каждое бикомпактное вполне несвязное пространство гомеоморфно замкнутому подмножеству канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ *для достаточно большого* $\mathfrak{n}$ (см. замечания на стр. 52—53).

Примеры. А) Конечная булева алгебра свободна тогда и только тогда, когда она состоит из 2^{2^n} элементов ($n = 1, 2, \ldots$). Она в этом случае имеет n свободных образующих и 2^n атома и изоморфна полю всех подмножеств 2^n-элементного пространства. Это сразу же вытекает из предложения 14.3 (см. также пример Б § 8 и пример Г § 9).

Двухэлементная булева алгебра может рассматриваться как свободная алгебра с пустым множеством свободных образующих.

Б) Счетная булева алгебра свободна тогда и только тогда, когда в ней нет атомов (она безатомна). Это вытекает из того факта, что произведение $\mathfrak{D}_{\aleph_0}$ гомеоморфно канторову совершенному множеству, описанному в примере Б § 9. См. также пример В § 8 и пример В § 9.

В) Если бесконечная булева алгебра имеет по крайней мере один атом, то она не свободна.

Г) Для каждого бесконечного множества X мощности $2^{\mathfrak{n}}$ существует такое приведенное совершенное поле $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X, что $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}=\mathfrak{n}$.

Действительно, во-первых, вместо X можно рассматривать его образы при взаимно однозначных отображениях. Во-вторых, множество $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ имеет мощность $2^{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ является приведенным совершенным полем подмножеств $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}_{0,\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}$.

Д) Для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ канторов дисконтинуум $\mathscr{D}_{2^{\mathfrak{m}}}$ содержит всюду плотное подмножество мощности $\mathfrak{m}$ [1]).

Действительно, $\mathscr{D}_{2^{\mathfrak{m}}}=\mathop{\mathsf{P}}\limits_{t\in T_0} H_t$ (см. стр. 71), где $\overline{\overline{T}}_0=2^{\mathfrak{m}}$. Существует такое приведенное поле $\mathfrak{F}$ подмножеств множества T_0, что $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}=\mathfrak{m}$. Для каждого $A\in\mathfrak{F}$ через $a_A=\{a_t\}_{t\in T_0}$ обозначим точку из $\mathscr{D}_{2^{\mathfrak{m}}}$, определяемую так:

$$a_t=1,\ \text{если}\ t\in A,\ \text{и}\ a_t=-1,\ \text{если}\ t\in -A.$$

Множество X всех точек a_A, где $A\in\mathfrak{F}$, имеет мощность $\mathfrak{m}$. Так как поле $\mathfrak{F}$ является приведенным, то для любой системы различных точек $t_1, \ldots, t_n$ из T_0 и для любой последовательности $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ чисел -1 и 1 существует такое множество $A\in\mathfrak{F}$, что

$$t_i\in A,\ \text{если}\ \varepsilon_i=1,\ \text{и}\ t_i\in -A,\ \text{если}\ \varepsilon_i=-1.$$

Отсюда следует, что $a_A\in\varepsilon_1\cdot D_{t_1}\cap\ldots\cap\varepsilon_n\cdot D_{t_n}$. Так как система множеств вида $\varepsilon_1\cdot D_{t_1}\cap\ldots\cap\varepsilon_n\cdot D_{t_n}$ составляет открытый базис в $\mathscr{D}_{2^{\mathfrak{m}}}$, то множество X всюду плотно.

Е) Поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества X мощности $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ содержит подполе, изоморфное полю $\mathfrak{F}_{0,2^{\mathfrak{m}}}$ (следовательно, X содержит $2^{\mathfrak{m}}$ независимых подмножеств [2]).

---

[1]) Эта теорема является частным случаем общей теоремы (принадлежащей Хьюиту [2]) о декартовом произведении топологических пространств. Для случая $\mathfrak{m}=\aleph_0$ эта теорема была независимо найдена Марчевским [9].

[2]) Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, доказанной Хаусдорфом [1] и Тарским [6]. Для $\mathfrak{m}=\aleph_0$ см. также Фихтенгольц и Канторович [1].

Достаточно доказать утверждение в случае, когда X является всюду плотным подмножеством $\mathscr{D}_{2^{\mathfrak{m}}}$, $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{m}$. Тогда отображение

$$h(A)=A\cap X \text{ для } A\in\mathfrak{F}_{0,\,2^{\mathfrak{m}}}$$

является изоморфизмом $\mathfrak{F}_{0,\,2^{\mathfrak{m}}}$ в $\mathfrak{F}$.

Ж) Пространство Стоуна X_0 поля $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества мощности $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$ имеет мощность $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ [1]).

Действительно, легко доказать, что множество всех максимальных фильтров в $\mathfrak{F}$ имеет мощность, не превосходящую $2^{2^{\mathfrak{m}}}$. Следовательно, $\overline{\overline{X}}_0\leqslant 2^{2^{\mathfrak{m}}}$. С другой стороны, из примера Е вытекает, что существует непрерывное отображение X_0 на $D_{2^{\mathfrak{m}}}$ (см. замечание на стр. 56). Следовательно, $\overline{\overline{X}}_0\geqslant\overline{\overline{\mathscr{D}}}_{2^{\mathfrak{m}}}=2^{2^{\mathfrak{m}}}$.

§ 15. Индуцированные гомоморфизмы между факторалгебрами

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — поля подмножеств пространств X и X' соответственно, и пусть Δ и Δ' — идеалы полей $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ соответственно. Обобщая определение из § 11 (см. также пример А § 5), мы говорим, что гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ *индуцируется*[2]) поточечным отображением φ пространства X' в пространство X, если

(1) $$h([A]_\Delta)=[\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \text{ для каждого } A\in\mathfrak{F}.$$

Конечно, из соотношения (1) следует, что

(2) $$\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{F}' \text{ для каждого } A\in\mathfrak{F}.$$

---

[1]) Гилман и Джерисон [1], Новак [2], Поспишил [5, 6]. См. также Тарский [6], Хаусдорф [1].

[2]) Сикорский [6]. Теоремы 15.1, 15.2 доказаны Сикорским [6,18]. Первой теоремой такого вида была теорема фон Неймана [1] об индуцированных изоморфизмах, сохраняющих меру.

Из этого также вытекает, что

(3) $$\varphi^{-1}(A) \in \Delta' \text{ для каждого } A \in \Delta,$$

поскольку гомоморфизм h отображает нуль факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в нуль $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Обратно, если отображение φ удовлетворяет условиям (2) и (3), то формула (1) определяет гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$.

В частности, если Δ — нулевой идеал, то отождествляя $\mathfrak{F}/\Delta$ с $\mathfrak{F}$ (см. конец § 10), мы говорим, что гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется отображением φ множества X' в множество X, если

(4) $$h(A) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \text{ для каждого } A \in \mathfrak{F}.$$

Условие (2) также выполнено. Обратно, если φ — отображение X' в X, удовлетворяющее условию (2), то формула (4) определяет гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$.

Если оба идеала Δ и Δ' являются нулевыми, то $\mathfrak{F}/\Delta$ и $\mathfrak{F}'/\Delta'$ могут быть отождествлены с $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ соответственно (см. конец § 10) и в этом случае приведенное выше определение индуцированного гомоморфизма совпадает с определением из § 11 и примера А § 5.

Достаточное условие, данное в первой части теоремы 11.1, в общем случае является недостаточным, если рассматривать гомоморфизмы поля $\mathfrak{F}$ в произвольные факторалгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$.

Пример. А) Пусть X является замкнутым множеством вполне несвязного компактного пространства X', а $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — поля всех открыто-замкнутых подмножеств пространств X и X' соответственно, и пусть Δ' — идеал всех $B \in \mathfrak{F}'$, не пересекающихся с пространством X. Каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ имеет вид

$$A = A' \cap X,$$

где $A' \in \mathfrak{F}'$. Множество A' в этом равенстве неоднозначно определяется множеством A, но элемент $[A']_{\Delta'}$ определяется единственным образом, и отображение h, заданное

равенством

$$h(A)=[A']_{\Delta'},$$

является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'/\Delta'$ [см. пример В § 10]. Изоморфизм h индуцируется поточечным отображением тогда и только тогда, когда X является *ретрактом* пространства X' [1]), т. е. существует такое непрерывное отображение ψ (называемое *ретракцией* пространства X' на множество X) пространства X' в X, что

$$\psi(x)=x \text{ для каждого } x\in X.$$

Действительно, с одной стороны, непрерывное отображение ψ множества X' в множество X является ретракцией X' на X тогда и только тогда, когда

$$\psi^{-1}(A)\cap X=A \text{ для каждого } A\in\mathfrak{F}. \tag{5}$$

С другой стороны, отображение ψ (X' в X) индуцирует h тогда и только тогда, когда оно непрерывно и удовлетворяет условию (5).

Существуют такие компактные вполне несвязные пространства X', содержащие замкнутые подмножества X, что X не является ретрактом X' (или где X не является даже непрерывным образом X'). В этом случае гомоморфизм h, определенный выше, не индуцируется поточечным отображением. Заметим, что такие пространства всегда являются неметризуемыми, поскольку каждое замкнутое подмножество X любого компактного вполне несвязного метризуемого пространства X' является его ретрактом [2]).

Пространство X, определенное в примере Д § 8, является примером такого сингулярного пространства. Оно является компактным и вполне несвязным, поэтому оно не может быть (гомеоморфно) вложено в канторов дисконтинуум $X'=\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, если $\mathfrak{n}$ достаточно велико. С другой стороны, X не является непрерывным образом $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ ни для какого кардинального числа $\mathfrak{n}$ [3]).

Пространство Стоуна булевой алгебры всех подмножеств счетного множества X (т. е. компактификация Чеха — Стоуна дискретного пространства X — см. при-

---

[1]) Сикорский [6, 18].
[2]) Серпинский [4].
[3]) Шанин [1].

мер E § 8) является еще одним примером компактного вполне несвязного пространства, которое не является непрерывным образом $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ ни для какого кардинального числа $\mathfrak{n}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ является полем всех открыто-замкнутых подмножеств канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, а Δ — его идеал. Через $\mathfrak{F}'$ обозначим произвольное поле подмножеств X', а через Δ' — некоторый идеал поля $\mathfrak{F}'$.

15.1. *Каждый гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется некоторым поточечным отображением.*

Сохраним все обозначения стр. 71 § 14. Для любого $t\in T_0$ обозначим через $A'_t\in\mathfrak{F}'$ такое множество, что

$$h([D_t]_\Delta)=[A'_t]_{\Delta'}. \tag{6}$$

Положим

$$\varphi_t(x')=\begin{cases}1, & \text{если } x'\in A'_t,\\ -1, & \text{если } x'\in -A'_t,\end{cases}$$

и пусть

$$\varphi(x')=\{\varphi_t(x')\}\in\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}} \text{ для } x'\in X'\ ^{1)}.$$

Тогда

$$\varphi^{-1}(D_t)=A'_t\in\mathfrak{F}' \tag{7}$$

и, значит, $\varphi^{-1}(A)\in\mathfrak{F}'$ для каждого элемента $A\in\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$. Таким образом, формула

$$h_1(A)=[\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'}\quad (A\in\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}})$$

определяет гомоморфизм h_1 алгебры $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Формула

$$h_2(A)=h([A]_\Delta)\quad (A\in\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}})$$

---

[1]) Отображение φ называется *характеристической функцией* семейства $\{A'_t\}_{t\in T}$. Понятие характеристических функций было рассмотрено Марчевским [2, 10] в случае, когда T есть множество положительных целых чисел. Обобщения на несчетные множества T см. в работе Стоуна [11]. Метод характеристических функций Марчевского несколько раз использован в этой книге.

также определяет гомоморфизм h_2 алгебры $\mathfrak{F}_{0,n}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Из равенств (6) и (7) вытекает, что гомоморфизмы h_1 и h_2 совпадают на множестве всех образующих D_t алгебры $\mathfrak{F}_{0,n}$. Следовательно, отсюда вытекает (см. замечание в § 12 на стр. 59), что $h_1 = h_2$, а это доказывает равенство (1).

15.2. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{0,n} | X$ — поле всех открыто-замкнутых подмножеств замкнутого подмножества X обобщенного канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_n$. Для того чтобы каждый гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в любую факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцировался некоторым поточечным отображением, необходимо и достаточно, чтобы X являлся ретрактом пространства $\mathfrak{D}_n$.*

В этом случае X будет также ретрактом каждого компактного вполне несвязного пространства, содержащего его в качестве подпространства.

Для доказательства достаточности предположим, что ψ — ретракция пространства $\mathfrak{D}_n$ на X, т. е.

$$\psi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}_{0,n} \text{ и } \psi^{-1}(A) \cap X = A \text{ для каждого } A \in \mathfrak{F}.$$

Отображение h_0, определяемое равенством

$$h_0(B) = h(B \cap X) \quad (B \in \mathfrak{F}_{0,n}),$$

является гомоморфизмом поля $\mathfrak{F}_{0,n}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$, поэтому, согласно теореме 15.1, оно индуцируется некоторым отображением φ_0 пространства X' в пространство $\mathfrak{D}_n$, т. е.

$$h(B \cap X) = [\varphi_0^{-1}(B)]_{\Delta'} \text{ для каждого } B \in \mathfrak{F}_{0,n}.$$

Полагая $B = \psi^{-1}(A)$, мы получаем равенства

$$h(A) = h(\psi^{-1}(A) \cap X) = [\varphi_0^{-1}(\psi^{-1}(A))]_{\Delta'} \text{ для } A \in \mathfrak{F}.$$

Это доказывает, что суперпозиция

$$\varphi(x') = \psi(\varphi_0(x')) \; (x' \in X')$$

индуцирует гомоморфизм h.

Необходимость и последнее утверждение теоремы 15.2 следуют из рассуждений примера А.

Из теоремы 15.2 вытекает, что для поля $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств любого компактного вполне несвязного пространства X эквивалентны следующие три условия:

(а) каждый гомоморфизм поля $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется некоторым поточечным отображением;

(б) пространство X гомеоморфно ретракту пространства $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$;

(в) пространство X является абсолютным ретрактом в классе вполне несвязных компактных пространств, т. е. оно является ретрактом всякого вполне несвязного компактного пространства $X' \supset X$.

Исследование § 11 показывает, что если поле $\mathfrak{F}$ обладает свойством (а), то оно является совершенным (случай, когда Δ' есть нулевой идеал). Однако если поле $\mathfrak{F}$ совершенно, то существование отображения φ, индуцирующего данный гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$, эквивалентно существованию такого гомоморфизма h' поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$, что $h(A) = [h'(A)]$ для каждого $A \in \mathfrak{F}$. Действительно, если указанный гомоморфизм h' существует, то он индуцирован некоторым отображением φ, которое индуцирует также и гомоморфизм h. Обратно, если гомоморфизм h индуцирован отображением φ, то гомоморфизм h', определенный формулой $h'(A) = \varphi^{-1}(A)$, удовлетворяет вышеупомянутым условиям.

Таким образом, задачу о выполнении условия (а) можно свести к следующему вопросу. При каких условиях булева алгебра обладает следующим свойством?

(а′) Для каждого гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в любую алгебру $\mathfrak{A}'/\Delta'$ (где $\mathfrak{A}'$ — булева алгебра, а Δ' — идеал алгебры $\mathfrak{A}'$) существует такой гомоморфизм h' алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, что

$$h(A) = [h'(A)]_{\Delta'} \text{ для каждого } A \in \mathfrak{A}. \tag{8}$$

Для ответа на этот вопрос мы дадим определение, которое является алгебраическим аналогом рассмотренного выше топологического понятия ретракта: говорят, что подалгебра $\mathfrak{A}_0$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ есть *ретракт* алгебры $\mathfrak{A}$, если существует такой гомоморфизм g (называемый *ретрагирующим гомоморфизмом*) алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}_0$, что $g(A) = A$ для $A \in \mathfrak{A}_0$.

15.3. *Для любой булевой алгебры* $\mathfrak{A}$ *свойство* (а′) *эквивалентно каждому из следующих свойств:*

(б′) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *изоморфна ретракту свободной булевой алгебры;*

(в′) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является абсолютным булевым ретрактом, т. е. для каждой булевой алгебры* $\mathfrak{A}'$, *такой, что алгебра* $\mathfrak{A}$ *является гомоморфным образом алгебры* $\mathfrak{A}'$, *алгебра* $\mathfrak{A}$ *изоморфна некоторому ретракту алгебры* $\mathfrak{A}'$ [1]).

Теорему 15.3. можно доказать, используя только что полученную эквивалентность свойств (а), (б), (в), поскольку мы можем ограничить наши исследования случаем, когда $\mathfrak{A}$ — совершенное поле, а $\mathfrak{A}'$ — поле множеств. Тогда (а) эквивалентно (а′). Поскольку булева алгебра $\mathfrak{B}$ изоморфна ретракту булевой алгебры $\mathfrak{B}'$ тогда и только тогда, когда пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{B}$ гомеоморфно ретракту пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{B}'$, условия (б′) и (в′) эквивалентны условиям (б) и (в) соответственно.

Теорема 15.3 может быть доказана прямо, как это сделано ниже [и это доказательство можно рассматривать как второе доказательство теоремы 15.2, если использовать эквивалентность условий (а), (б), (в) условиям (а′), (б′), (в′) соответственно].

Сначала заметим, что если алгебра $\mathfrak{A}$ свободна, то она удовлетворяет условию (а′). Действительно, пусть $\mathfrak{S}$ является множеством свободных образующих алгебры $\mathfrak{A}$. Для каждого $A \in \mathfrak{S}$ определим $f(A) \in \mathfrak{A}'$ так, чтобы $[f(A)] = h(A)$. Отображение f можно продолжить до гомоморфизма h', причем последний удовлетворяет соотношению (8).

С другой стороны, любой ретракт $\mathfrak{A}_0$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей условию (а′), тоже обладает этим свойством. Действительно, пусть g — ретрагирующий гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}_0$. Согласно условию (а′), существует такой гомоморфизм h', что $hg(A) = [h'(A)]$ для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$. В частности, $h(A) = [h'(A)]$ для всех $A \in \mathfrak{A}_0$.

Поскольку свойство (а′) сохраняется при изоморфиз-

---

[1]) Халмош [10]. Обобщения см. у Семадени [5].

мах, то два предыдущих утверждения доказывают, что из (б′) следует (а′).

Поскольку каждая булева алгебра является гомоморфным образом некоторой свободной булевой алгебры (см. теорему 14.4), то из (в′) следует (б′).

Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}$ обладает свойством (а′) и является гомоморфным образом булевой алгебры $\mathfrak{A}'$, т. е. существует изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'/\Delta'$ для некоторого идеала Δ'. Гомоморфизм h', удовлетворяющий равенствам (8), изоморфно отображает алгебру $\mathfrak{A}$ на некоторую подалгебру $\mathfrak{A}'_0$ алгебры $\mathfrak{A}'$, а отображение g, определяемое равенством

$$g(A') = h'h^{-1}([A']) \quad (A' \in \mathfrak{A}'),$$

является ретрагирующим гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{A}'_0$. Таким образом, из (а′) вытекает (в′).

§ 16. Прямые объединения

Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ — индексированное множество булевых алгебр. Рассмотрим их декартово произведение $\mathfrak{A}$, т. е. множество всех индексированных множеств $A = \{A_t\} = \{A_t\}_{t \in T}$, таких, что $A_t \in \mathfrak{A}_t$ для каждого индекса $t \in T$. Множество $\mathfrak{A}$ становится булевой алгеброй, если определить булевы операции следующим образом:

$$\{A_t\} \cup \{B_t\} = \{A_t \cup B_t\},$$
$$\{A_t\} \cap \{B_t\} = \{A_t \cap B_t\},$$
$$-\{A_t\} = \{-A_t\}.$$

Простая проверка выполнения аксиом $(A_1)-(A_5)$ § 1 для таких операций $\cup$, $\cap$, $-$ на множестве $\mathfrak{A}$ оставлена читателю.

Определенная выше булева алгебра $\mathfrak{A}$ называется *прямым объединением* алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

Конечно, элементы $\{\wedge\}$ и $\{\vee\}$ (т. е. элементы декартова произведения $\mathfrak{A}$, у которых все координаты равны соответственно нулевому или единичному элементу алгебр $\mathfrak{A}_t$) суть нулевой и единичный элементы алгебры $\mathfrak{A}$. Булево включение $\{A_t\} \subset \{B_t\}$ имеет место тогда и только

тогда, когда для каждого $t \in T$ выполнено включение $A_t \subset B_t$. Кроме того, имеет место равенство

$$\{A_t\} - \{B_t\} = \{A_t - B_t\}.$$

Если $\mathfrak{n}_t$ — мощность алгебры $\mathfrak{A}_t$, то мощность $\mathfrak{n}$ прямого объединения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ равна

$$\mathfrak{n} = \prod_{t \in T} \mathfrak{n}_t. \tag{I}$$

Если $\mathfrak{A}_t$ — поля подмножеств непересекающихся пространств X_t соответственно, то прямое объединение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ изоморфно полю всех таких подмножеств B объединения X всех пространств $X_t (t \in T)$, что $B \cap X_t \in \mathfrak{A}_t$ для каждого индекса $t \in T$. Указанный изоморфизм задается формулой

$$h(\{A_t\}) = \bigcup_{t \in T} A_t.$$

В частности, если алгебры $\mathfrak{A}_t$ двухэлементные, т. е. являются полями всех подмножеств одноэлементного пространства $X_t = (t)$, то прямое объединение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ изоморфно полю всех подмножеств множества T.

Основная теорема 8.2 о представлении может быть сформулирована теперь следующим образом: каждая невырожденная булева алгебра изоморфна подалгебре прямого объединения двухэлементных булевых алгебр.

Более точно, пусть T — множество всех гомоморфизмов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на фиксированную двухэлементную булеву алгебру $\mathfrak{A}_0$, и пусть $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{A}_0$. Отображение

$$h(A) = \{t(A)\}_{t \in T}$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в прямое объединение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, и изоморфизм h действительно совпадает с изоморфизмом h, определенным в доказательстве теоремы 8.2, если отождествить максимальные фильтры с соответствующими двузначными гомоморфизмами.

Примеры. А) Булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна прямому объединению булевых алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ тогда и только тогда, когда существуют такие непересекающиеся элементы $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, что

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \vee,$$

а

$$\mathfrak{A} \mid A_j \text{ изоморфна } \mathfrak{A}_j (j = 1, \ldots, n).$$

Именно, если h_j — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A} \mid A_j$ на $\mathfrak{A}_j$, то

$$h(A) = \{h_1(A \cap A_1), \ldots, h_n(A \cap A_n)\} \quad (A \in \mathfrak{A})$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на прямое объединение алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$.

Аналогичная задача для бесконечного индексированного множества булевых алгебр будет рассматриваться в примере Д § 22.

Б) Обозначим через X_t пространство Стоуна булевой алгебры $\mathfrak{A}_t$ для каждого индекса $t \in T$. Предположим, что пространства X_t не пересекаются. Объединение X пространств X_t будем рассматривать как топологическое пространство, базисом открытых множеств которого служит класс всех открыто-замкнутых подмножеств пространств X_t. Другими словами, множество $A \subset X$ открыто, если множества $A \cap X_t$ открыты в пространствах X_t для каждого t. В частности, каждое множество X_t открыто и замкнуто в пространстве X.

Читатель, знакомый с компактификацией Чеха — Стоуна, может проверить, что компактификация Чеха — Стоуна $\beta(X)$ пространства X является пространством Стоуна прямого объединения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ [1]).

§ 17. Связь с алгебраическими кольцами

Мы напомним, что (алгебраическим) *кольцом* называется непустое множество $\mathfrak{A}$ элементов (обозначаемых буквами $A, B, C, \ldots$) с двумя операциями — сложением $A + B$ и умножением $A \cdot B$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

(R_1) $A + B = B + A$;

(R_2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(R_3) для данных A и C существует ровно один элемент B, такой, что $A + B = C$;

---

[1]) Двингер [2].

(R_4) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$;
(R_5) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
(R_6) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Из аксиом (R_1)—(R_3) вытекает, что существует такой элемент, называемый *нулем* кольца $\mathfrak{A}$ и обозначаемый через $\boldsymbol{0}$, что

(1) $$A+\boldsymbol{0}=A \text{ для каждого } A.$$

Говорят, что элемент $\boldsymbol{1}$ алгебры $\mathfrak{A}$ является *единицей* алгебры $\mathfrak{A}$, если

$$A\cdot\boldsymbol{1}=A=\boldsymbol{1}\cdot A \text{ для каждого } A.$$

Каждое кольцо содержит не более одной единицы.

Говорят, что кольцо $\mathfrak{A}$ *коммутативно*, если

$$A\cdot B=B\cdot A \text{ для всех } A,\ B.$$

Говорят, что кольцо $\mathfrak{A}$ является *булевым кольцом*, если $\mathfrak{A}$ содержит единицу[1]) $\boldsymbol{1}$ и

(2) $$A\cdot A=A \text{ для всех } A.$$

Простым примером булева кольца служит кольцо $\mathfrak{R}$ всех целых чисел по модулю 2, т. е. алгебраическое кольцо, содержащее только два элемента — нуль $\boldsymbol{0}$ и единицу $\boldsymbol{1}$, со следующим определением сложения и умножения:

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{1},\quad \boldsymbol{0}+\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{1}\cdot\boldsymbol{1}=\boldsymbol{1}.$$

Другим примером булева кольца служит кольцо $\mathfrak{R}^X$ всех отображений любого множества X в кольцо $\mathfrak{R}$ с обычным определением сложения и умножения: сумма $f=f_1+f_2$ (соответственно произведение $f=f_1\cdot f_2$) есть отображение, определенное формулой $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ (соответственно $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$). Если A — подмножество множества X,

---

[1]) Обычно существование единицы в определении булевых колец опускается. Предложенное здесь определение более удобно для применения в этой книге.

то функция $f \in \mathfrak{R}^X$, определенная равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{1}, & \text{если} \quad x \in A, \\ \boldsymbol{0}, & \text{если} \quad x \notin A, \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества A. Заметим, что соответствие между подмножествами множества X и их характеристическими функциями является взаимно однозначным. Кольцо $\mathfrak{R}^X$ является множеством характеристических функций всех подмножеств множества X. Нуль (единица) в кольце $\mathfrak{R}^X$ есть функция, тождественно равная $\boldsymbol{0}$ (соответственно $\boldsymbol{1}$), т. е. характеристическая функция пустого множества (соответственно всего пространства X).

Подкольца кольца $\mathfrak{R}^X$ также являются булевыми кольцами, если они содержат единицу кольца $\mathfrak{R}^X$. В частности, если X — топологическое пространство, то множество всех непрерывных отображений пространства X в дискретное пространство $\mathfrak{R}$ является булевым кольцом. Это кольцо есть множество характеристических функций всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X.

Каждое булево кольцо $\mathfrak{A}$ обладает следующими свойствами:

(3) $\quad A + A = \boldsymbol{0}$ для каждого A,

(4) $\quad$ если $A + B = \boldsymbol{0}$, то $B = A$,

(5) $\quad A \cdot B = B \cdot A$ для всех A и B

(т. е. булево кольцо всегда коммутативно).

Действительно, из соотношения (2) следует, что

$$(\boldsymbol{1} + A) \cdot (\boldsymbol{1} + A) = (\boldsymbol{1} + A),$$

т. е.

$$(\boldsymbol{1} + A) + (A + A) = (\boldsymbol{1} + A).$$

Следовательно, в силу аксиомы (R_3) (единственность!) и равенства (1) (где A заменено на $\boldsymbol{1} + A$) мы получаем равенство (3). Свойство (4) следует из равенства (3) и единственности, которая обеспечивается аксиомой (R_3). Для доказательства формулы (5) заметим, что

$$(A + B) \cdot (A + B) = A + B,$$

т. е., согласно аксиоме (R_5) и равенству (2), имеет место

соотношение

$$(A+B)+(A\cdot B+B\cdot A)=(A+B),$$

которое в силу (R_3) и (1) дает равенство $A\cdot B+B\cdot A=\mathbf{0}$. Это доказывает формулу (5), если использовать равенство (4).

17.1. *Каждая булева алгебра является булевым кольцом, если операции сложения и умножения определить следующим образом:*

(6) $$A+B=(A-B)\cup(B-A),$$

(7) $$A\cdot B=A\cap B.$$

Обратно, каждое булево кольцо является булевой алгеброй, если операции объединения, пересечения и дополнения определить следующим образом:

(8) $$A\cup B=A+B+A\cdot B,$$

(9) $$A\cap B=A\cdot B,$$

(10) $$-A=\mathbf{1}+A.$$

В обоих случаях алгебраические нуль и единица совпадают с булевыми нулем и единицей соответственно [1]).

Первую часть теоремы 17.1 можно доказать посредством проверки того факта, что если $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, то операции $A+B$ (часто называемая *симметрической разностью* [2]) элементов A и B) и $A\cdot B$, определенные равенствами (6) и (7), удовлетворяют аксиомам (R_1) — (R_6). Другое короткое доказательство получаем при помощи следующего рассуждения. Мы можем ограничиться только случаем, когда $\mathfrak{A}$ есть поле всех открыто-замкнутых подмножеств вполне несвязного компактного пространства X. Отождествляя подмножества пространства X с их характеристическими функциями, мы можем рассматри-

---

[1]) Теорема 17.1 доказана Стоуном [2, 5]. Существуют также другие бинарные операции, по отношению к которым каждая булева алгебра является кольцом и которые единственным образом определяют булевы операции. См. Рудеану [2].

[2]) По поводу симметрической разности см., например, Хелсон [1], Марчевский [7].

вать $\mathfrak{A}$ как множество всех непрерывных отображений пространства X в $\mathfrak{R}$. В силу этого отождествления сумма и произведение, определенные формулами (6) и (7), совпадают с обычными суммой и произведением отображений пространства X в $\mathfrak{R}$, и поэтому удовлетворяют аксиомам (R_1)—(R_6).

Для доказательства второй части теоремы 17.1 предположим, что $\mathfrak{A}$ есть булево кольцо и $A \cup B$, $A \cap B$, $-A$ определены по формулам (8), (9), (10).

Коммутативность сложения и умножения [см. (R_1) и (5)] влечет за собой закон коммутативности (A_1) § 1. Мы имеем

$$A \cup (B \cup C) = A + (B + C + B \cdot C) + A \cdot (B + C + B \cdot C) = \\ = A + B + C + A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C + A \cdot B \cdot C$$

и

$$(A \cup B) \cup C = (A + B + A \cdot B) + C + (A + B + A \cdot B) \cdot C = \\ = A + B + C + A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C + A \cdot B \cdot C,$$

что доказывает первый закон ассоциативности (A_2) § 1. Второй закон немедленно следует из аксиомы (R_4). Согласно формулам (2) и (3),

$$(A \cap B) \cup B = A \cdot B + B + A \cdot B \cdot B = B + A \cdot B + A \cdot B = B$$

и аналогично

$$(A \cup B) \cap B = (A + B + A \cdot B) \cdot B = A \cdot B + B + A \cdot B = B,$$

что доказывает закон поглощения (A_3) § 1. Подобным же образом мы проверяем, учитывая свойства (2), (3) и (5), что

$$A \cap (B \cup C) = A \cdot (B + C + B \cdot C) = A \cdot B + A \cdot C + A \cdot B \cdot C,$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cdot B + A \cdot C + A \cdot B \cdot A \cdot C = \\ = A \cdot B + A \cdot C + A \cdot B \cdot C,$$
$$A \cup (B \cap C) = A + B \cdot C + A \cdot B \cdot C,$$
$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (A + B + A \cdot B)(A + C + A \cdot C) = \\ = A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B \cdot A + A \cdot C + B \cdot C + A \cdot B \cdot C + \\ + A \cdot A \cdot C + B \cdot A \cdot C + A \cdot B \cdot A \cdot C = A + B \cdot C + A \cdot B \cdot C,$$

что доказывает закон дистрибутивности (A_4) § 1. Поскольку

$$A \cap -A = A \cdot (\boldsymbol{1} + A) = A + A = \boldsymbol{0}$$

и

$$A \cup -A = A + (\boldsymbol{1} + A) + A \cdot (\boldsymbol{1} + A) = \\ = \boldsymbol{1} + A + A + A + A = \boldsymbol{1},$$

то закон (A_5) § 1 тоже выполнен.

Примеры. А) Кольцо $\mathfrak{R}$, рассматриваемое как булева алгебра, является двухэлементной булевой алгеброй.

Б) Кольцо $\mathfrak{R}^X$, рассматриваемое как булева алгебра, изоморфно полю всех подмножеств множества X.

ГЛАВА II

БЕСКОНЕЧНЫЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ И ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

§ 18. Определение

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — элементы булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Конечное объединение

$$B = A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

является наименьшим элементом, содержащим все элементы $A_1, \ldots, A_n$, т. е. единственным образом определяется двумя условиями

(j_1) $A_i \subset B$ для $i = 1, \ldots, n$,

(j_2) если $A_i \subset B'$ для $i = 1, \ldots, n$, то $B \subset B'$.

Подобным же образом конечное пересечение

$$C = A_1 \cap \ldots \cap A_n$$

является наибольшим элементом, содержащимся во всех элементах $A_1, \ldots, A_n$, т. е. однозначно определяется следующими двумя условиями:

(m_1) $C \subset A_i$ для $i = 1, \ldots, n$,

(m_2) если $C' \subset A_i$ для $i = 1, \ldots n$, то $C' \subset C$.

Эти свойства объединения и пересечения были доказаны в § 2 для $n = 2$ [см. условия (15), (14) и (15′), (14′) § 2]. По индукции мы можем обобщить их на любое положительное целое число n. Эти свойства указывают на следующее обобщение понятий объединения и пересечения для случая произвольного конечного или бесконечного числа элементов.

Пусть $\mathfrak{S}$ — непустое множество элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Говорят, что элемент $B \in \mathfrak{A}$ есть *объединение*

всех элементов $A \in \mathfrak{S}$ *в алгебре* $\mathfrak{A}$, если он является наименьшим элементом этой алгебры $\mathfrak{A}$, содержащим все элементы $A \in \mathfrak{S}$, т. е. если выполнены следующие два условия:

(J_1) $A \subset B$ для всех $A \in \mathfrak{S}$,
(J_2) если $A \subset B'$ $(B' \in \mathfrak{A})$ для всех $A \in \mathfrak{S}$, то $B \subset B'$.

Двойственным образом элемент $C \in \mathfrak{A}$ называется *пересечением* всех элементов $A \in \mathfrak{S}$ *в алгебре* $\mathfrak{A}$, если он является наибольшим элементом, содержащимся во всех элементах $A \in \mathfrak{S}$, т. е. если выполнены следующие два условия:

(M_1) $C \subset A$ для всех $A \in \mathfrak{S}$,
(M_2) если $C' \subset A$ $(C' \in \mathfrak{A})$ для всех $A \in \mathfrak{S}$, то $C' \subset C$.

Объединение B всех $A \in \mathfrak{S}$ будем обозначать (если оно существует) через

(1) $$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A,$$

а пересечение C всех $A \in \mathfrak{S}$ будем обозначать (тоже если оно существует) через

(1′) $$\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A,$$

Если $\mathfrak{S}$ – множество всех элементов индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$, то вместо выражений (1) и (1′) будем писать соответственно

(2) $$\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$$

и

(2′) $$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t.$$

Конечно, если T — множество всех положительных целых чисел, то мы пишем также

(3) $$\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n$$

и

(3′) $$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n$$

вместо (2) и (2′) соответственно.

Индекс $^{\mathfrak{A}}$ при знаках $\bigcup$ и $\bigcap$, вообще говоря, необходим, когда мы рассматриваем некоторую подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$ одновременно с целой алгеброй $\mathfrak{A}$. Действитель-

но, предположим, что $\mathfrak{B}$ есть подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{S}$ — подмножество алгебры $\mathfrak{B}$. Тогда по определению

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{B}} A \tag{4}$$

и

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{B}} A \subset \bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A, \tag{4'}$$

если указанные объединения и пересечения существуют. Действительно, элемент $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A$ является наименьшим элементом алгебры $\mathfrak{A}$, содержащим все $A \in \mathfrak{S}$, а элемент $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{B}} A$ — наименьшим элементом алгебры $\mathfrak{B}$, содержащим все $A \in \mathfrak{S}$. Поскольку $\mathfrak{B}$ есть подмножество алгебры $\mathfrak{A}$, то имеет место соотношение (4). По двойственности получаем соотношение (4′).

Если множество $\mathfrak{S}$ конечно, то знак $\subset$ в соотношениях (4) и (4′) можно заменить на знак $=$, поскольку оба объединения (пересечения) совпадают с объединением (пересечением) элементов множества $\mathfrak{S}$ в смысле первой главы. Если множество $\mathfrak{S}$ бесконечно, то знак $\subset$, вообще говоря, нельзя заменить на знак $=$. Это будет показано ниже (см. пример А).

Однако если мы рассматриваем бесконечные объединения и пересечения по отношению к некоторой фиксированной булевой алгебре $\mathfrak{A}$, то для простоты мы будем опускать индекс $^{\mathfrak{A}}$ в обозначениях (1), (1′), (2), (2′), (3), (3′).

Заметим, что если $\mathfrak{B}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ — подмножество алгебры $\mathfrak{B}$, а объединение $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A$ существует и принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, то это объединение является также объединением всех элементов $A \in \mathfrak{S}$ в подалгебре $\mathfrak{B}$, т. е.

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{B}} A. \tag{5}$$

Двойственным образом, если $\mathfrak{S}$ — подмножество подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ и пересечение $\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}}$ существует и принадлежит $\mathfrak{B}$, то это пересечение является также пересечением

всех $A \in \mathfrak{S}$ в подалгебре $\mathfrak{B}$, т. е.

$$(5') \qquad \bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{B}} A.$$

Бесконечные объединения и пересечения инвариантны относительно изоморфизмов *на*, т. е. если h — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{S}$ — подмножество алгебры $\mathfrak{A}$, то

$$(6) \qquad h\Big(\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A\Big) = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}'} h(A),$$

$$(6') \qquad h\Big(\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A\Big) = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}'} h(A).$$

Эти равенства следует понимать следующим образом: если объединение (пересечение) в одной стороне существует, то существует объединение (пересечение) в другой стороне и имеют место указанные выше равенства.

Для доказательства равенств (6) и (6′) напомним, что изоморфизмы h и h^{-1} сохраняют включение $\subset$ [см. утверждение (2) § 5]. Поскольку бесконечные объединения и пересечения определяются только с помощью включения, то h сохраняет также и их.

Однако бесконечные объединения и пересечения не сохраняются, вообще говоря, при гомоморфизмах и изоморфизмах *в*.

Пусть Δ — идеал булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\Delta$. Элемент $A' = [A] \in \mathfrak{A}'$ является объединением индексированного множества элементов $A'_t = [A_t]$ $(t \in T)$ в булевой алгебре $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда

(J_1^*) $A_t - A \in \Delta$ для всех $t \in T$,

(J_2^*) если $A_t - A_0 \in \Delta (A_0 \in \mathfrak{A})$ для всех $t \in T$, то $A - A_0 \in \Delta$.

Это немедленно вытекает из условий (J_1), (J_2) и формулы (9) § 10.

По двойственности мы видим, что элемент $A' = [A] \in \mathfrak{A}/\Delta = \mathfrak{A}'$ является пересечением индексированного множества элементов $A'_t = [A_t]$ $(t \in T)$ в булевой алгебре $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда

(M_1^*) $A - A_t \in \Delta$ для каждого $t \in T$,

(M_2^*) если $A_0 - A_t \in \Delta$ $(A_0 \in \mathfrak{A})$ для каждого $t \in T$, то $A_0 - A \in \Delta$.

Примеры. А) Пусть $\mathfrak{A}$ — поле всех подмножеств пространства X всех неотрицательных целых чисел, $\mathfrak{B}$ — его подалгебра, образованная всеми конечными множествами положительных чисел и их дополнениями в пространстве X. Пусть $A_n = (n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ — одноточечное множество, содержащее только число n. Тогда

$$\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n = X - (0),$$

т. е. булево объединение всех элементов A_n в алгебре $\mathfrak{A}$, совпадает с теоретико-множественным объединением. С другой стороны,

$$\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n = X = \vee,$$

поскольку X — единственный элемент алгебры $\mathfrak{B}$, который содержит все A_n. Аналогично если $B_n = X - A_n$, то

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} B_n = (0),$$

т. е. это булево пересечение совпадает с теоретико-множественным пересечением, но

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} B_n = \wedge.$$

Этот пример показывает, что знак $\subset$ нельзя заменить на знак $=$ в формулах (4) и (4′). Он показывает также, что в поле множеств теоретико-множественное объединение и пересечение, вообще говоря, не совпадают с (бесконечным) булевым объединением и пересечением соответственно. Однако легко видеть, что если $\mathfrak{F}$ — поле множеств, $A_t \in \mathfrak{F}$ для каждого $t \in T$ и теоретико-множественное объединение (пересечение) всех A_t принадлежит полю $\mathfrak{F}$, то оно является также булевым объединением (пересечением) всех A_t в булевой алгебре $\mathfrak{F}$.

Б) Если поле $\mathfrak{F}$ (подмножеств пространства X) содержит все одноточечные подмножества пространства X, то бесконечные объединения и пересечения всегда совпадают с теоретико-множественными объединениями и пересечениями соответственно. Более точно, если $A_t \in \mathfrak{F}$ для каждого $t \in T$, то объединение $\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{F}} A_t$ (пересечение $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{F}} A_t$) существует тогда и только тогда, когда теоретико-множе-

ственное объединение (пересечение) всех A_t принадлежит полю $\mathfrak{F}$, и тогда они совпадают.

Действительно, предположим, что объединение $A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{F}} A_t$ существует. В силу условия (J_1) все A_t являются подмножествами множества A. Если A не является объединением всех A_t, то существует такая точка $x_0 \in A$, что $A_t \subset A - (x_0) \in \mathfrak{F}$ для каждого $t \in T$. Согласно условию (J_2), это противоречит предположению, что A есть булево объединение всех A_t в поле $\mathfrak{F}$.

Обратное утверждение было доказано в примере А. По двойственности мы получаем доказательство для пересечений.

В) Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая булева алгебра. Говорят, что объединение $A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ является *существенно бесконечным*, если $A \neq A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}$ для каждой конечной последовательности $t_1, \ldots, t_n \in T$.

Если $\mathfrak{A}$ — поле всех открыто-замкнутых множеств компактного пространства X, то объединение $A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t (A_t \in \mathfrak{A})$ совпадает с теоретико-множественным объединением тогда и только тогда, когда оно не является существенно бесконечным, т. е. если $A = A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}$ для некоторых $t_1, \ldots, t_n \in T$. Действительно, если открыто-замкнутое множество A есть объединение всех A_t, то в силу компактности пространства X оно является объединением некоторых множеств $A_{t_1}, \ldots, A_{t_n}$, откуда следует, что $A = A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}$. Обратное утверждение очевидно.

По двойственности мы получаем аналогичное замечание для пересечений.

Г) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле подмножеств пространства X. Предположим, что все не более чем счетные подмножества пространства X принадлежат полю $\mathfrak{F}$. Пусть Δ — идеал всех конечных подмножеств пространства X, а $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\Delta$ [1]). Ни одно счетное объединение $\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n$ не является существенно бесконечным.

Согласно условиям (J_1) и (J_2), достаточно доказать, что если

---

[1]) Исследование таких булевых алгебр см. Серпинский [3,5].

(7) $A, A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \subset A$ и $A_1 \cup \ldots \cup A_n \neq A$ для $n = 1, 2, \ldots$,

то существует такой элемент $A' \in \mathfrak{A}$, что

$$A' \subset A, \quad A' \neq A \quad \text{и} \quad A_n \subset A' \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $A_n = [B_n]$, $A = [B]$, где $B_n, B \in \mathfrak{F}$. В силу условий (7) и формулы (9) § 10 множества $B - (B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ бесконечны, а множества $B_n - B$ конечны. Мы можем выбрать такую последовательность $\{x_n\}$ различных элементов, что

$$x_n \in B - (B_1 \cup \ldots \cup B_n) \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $B' = B - (x_1, x_2, \ldots) \in \mathfrak{F}$ и $A' = [B']$. Поскольку $B' \subset B$ и $B - B'$ бесконечно, то $A' \subset A$ и $A' \neq A$. Так как $B_n - B' \subset (B_n - B) \cup (x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, имеет место включение $A_n \subset A'$, что и требовалось доказать.

По двойственности мы получаем аналогичное утверждение для пересечений.

Д) Пусть Δ — идеал булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\Delta$.

Заметим, что, вообще говоря, скобки [ ] не коммутируют с бесконечными объединениями $\bigcup\limits_{t \in T}$ и пересечениями $\bigcap\limits_{t \in T}$, т. е. что равенства

$$\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} [A_t] = [\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t], \tag{8}$$

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} [A_t] = [\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t] \tag{8'}$$

не имеют места, вообще говоря, даже когда эти объединения и пересечения существуют.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}$ — поле всех подмножеств бесконечного множества T, Δ — идеал всех конечных подмножеств и $A_t = (t)$. Тогда

$$\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} [A_t] = \wedge \neq \vee = [\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t].$$

Переходя к дополнениям элементов A_t, мы получаем контрпример для пересечений.

Е) Следующий пример рассчитан на читателя, знакомого с математической логикой.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра Линденбаума — Тарского формализованной теории (см. пример Г § 1.) Элемент (алгебры $\mathfrak{A}$), определяемый формулой α, будет обозначаться через $|\alpha|$.

Пусть $\alpha(\tau)$ — формула, содержащая по крайней мере одну свободную индивидную переменную τ. Можно доказать[1]), что

$$|\bigcup_{\tau} \alpha(\tau)| = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} |\alpha(t)|, \quad |\bigcap_{\tau} \alpha(\tau)| = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} |\alpha(t)|,$$

где $\bigcup_{\tau}$ и $\bigcap_{\tau}$ в левой части равенств обозначают логические кванторы: „существует такое τ, что...“ и „для любого τ...“ соответственно, а T — (бесконечное) множество всех термов.

Ж) Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех атомов булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Алгебра $\mathfrak{A}$ атомна тогда и только тогда, когда $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = \bigvee$ (мы предполагаем, что $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = \bigwedge$, если $\mathfrak{S}$ — пустое множество).

§ 19. Алгебраические свойства бесконечных объединений и пересечений. (m, n)-дистрибутивность

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра. Все встречающиеся ниже объединения и пересечения рассматриваются в алгебре $\mathfrak{A}$.

Из определения немедленно вытекает, что бесконечные объединения и пересечения являются коммутативными, т. е. для каждого взаимно однозначного отображения τ множества индексов T на себя имеют место равенства

$$(1) \qquad \bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} A_{\tau(t)}, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} A_{\tau(t)}.$$

Каждое из этих равенств нужно читать следующим образом: если одно из объединений (пересечений) существует, то существует и второе, и равенство (1) имеет место.

Легко проверить, что бесконечные объединения и пересечения являются также ассоциативными, т. е. если мно-

---

[1]) См., например, Расёва и Сикорский [1,7]. См. также § 40. Чтобы выполнить подстановку $\alpha(t)$, иногда нужно изменить связанные переменные.

жество T является объединением множеств T_s $(s \in S)$, то

(2) $$\bigcup_{s \in S} \bigcup_{t \in T_s} A_t = \bigcup_{t \in T} A_t, \quad \bigcap_{s \in S} \bigcap_{t \in T_s} A_t = \bigcap_{t \in T} A_t.$$

Каждое из этих равенств следует читать так: если объединение (пересечение) в левой части равенства существует, то объединение (пересечение) в правой части также существует, и равенство имеет место.

Для бесконечных объединений и пересечений также справедливы *законы Моргана:*

(3) $$\bigcup_{t \in T} -A_t = -\bigcap_{t \in T} A_t, \quad \bigcap_{t \in T} -A_t = -\bigcup_{t \in T} A_t.$$

Существование объединения (или пересечения) в одной части каждого из этих равенств влечет за собой существование объединения (пересечения) в другой части, и соответствующее равенство имеет место.

Законы Моргана (3) легко следуют из определения бесконечного пересечения и объединения и формулы (21) § 2.

Если для каждого $t \in T$ существует такое $s \in S$, что $A_t \subset B_s$, то

(4) $$\bigcup_{t \in T} A_t \subset \bigcup_{s \in S} B_s$$

каждый раз, когда оба объединения существуют. Аналогично если для каждого $t \in T$ существует такое $s \in S$, что $B_s \subset A_t$, то

(4′) $$\bigcap_{s \in S} B_s \subset \bigcap_{t \in T} A_t$$

каждый раз, когда оба пересечения существуют.

В частности,

(5) $$\bigcup_{t \in T'} A_t \subset \bigcup_{t \in T} A_t \quad \text{и} \quad \bigcap_{t \in T} A_t \subset \bigcap_{t \in T'} A_t \quad \text{для} \quad T' \subset T,$$

(6) $$A_{t_0} \subset \bigcup_{t \in T} A_t \quad \text{и} \quad \bigcap_{t \in T} A_t \subset A_{t_0} \quad \text{для} \quad t_0 \in T,$$

(7) $$\bigcup_{t \in T} A_t \subset A, \text{ если } A_t \subset A \text{ для всех } t \in T,$$

(7′) $$A \subset \bigcap_{t \in T} A_t, \text{ если } A \subset A_t \text{ для всех } t \in T,$$

при условии, что рассматриваемые объединения и пересечения существуют.

Кроме того,

$$(8)\qquad \begin{aligned} A \cup \Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big) &= \bigcup_{t\in T} (A \cup A_t),\\ A \cap \Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big) &= \bigcap_{t\in T} (A \cap A_t). \end{aligned}$$

Существование объединения (пересечения) в левой части влечет за собой существование объединения (пересечения) в правой части.

Немного сложнее проверить следующие *законы дистрибутивности:*

$$(9)\qquad \begin{aligned} A \cap \Big(\bigcup_{t\in T} A_t\Big) &= \bigcup_{t\in T} (A \cap A_t),\\ A \cup \Big(\bigcap_{t\in T} A_t\Big) &= \bigcap_{t\in T} (A \cup A_t). \end{aligned}$$

Каждый из этих законов следует читать так: если бесконечное объединение (пересечение) в левой части существует, то существует бесконечное объединение (пересечение) и в правой части, и равенство имеет место.

Для доказательства первого закона (9) предположим, что $B = \bigcup_{t\in T} A_t$. Тогда

$$A \cap A_t \subset A \cap B \text{ для всех } t \in T,$$

поскольку $A_t \subset B$. Пусть C — такой элемент, что

$$A \cap A_t \subset C \text{ для всех } t \in T,$$

т. е.

$$A - C \subset -A_t \text{ для всех } t \in T.$$

Следовательно,

$$A - C \subset \bigcap_{t\in T} -A_t,$$

т. е. в силу закона Моргана

$$A - C \subset -B,$$

откуда вытекает, что

$$A \cap B \subset C.$$

Это доказывает, что $A \cap B$ является объединением всех элементов $A \cap A_t$.

По двойственности мы получаем доказательство второго закона дистрибутивности.

Теоретико-множественные объединения и пересечения удовлетворяют также следующим законам дистрибутивности:

$$\bigcap_{t\in T}\bigcup_{s\in S} A_{t,s}=\bigcup_{\varphi\in S^T}\bigcap_{t\in T} A_{t,\varphi(t)}, \tag{10}$$

$$\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S} A_{t,s}=\bigcap_{\varphi\in S^T}\bigcup_{t\in T} A_{t,\varphi(t)}, \tag{10'}$$

где S^T обозначает множество всех отображений T в S (см. стр. 9). Эти законы, вообще говоря, не имеют места для булевых алгебр, даже если предположить, что все рассматриваемые объединения и пересечения существуют и даже в случае, когда S конечно[1].

Пример. А) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских множеств вещественных чисел. Пусть Δ — идеал всех не более чем счетных множеств и $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}/\Delta$. Пусть, далее, $B_{n,i}$ — множество всех чисел вида

$$x=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j+1}{2^{j+1}},$$

где $a_j=-1$, 1 для $j\neq n$, $a_n=i$ ($i=\pm 1$, $n=1, 2, \ldots$). Множества $B_{n,i}$ принадлежат полю $\mathfrak{F}$, поскольку каждое из них является объединением конечного числа замкнутых подинтервалов в замкнутом единичном интервале U. Положим $A_{n,i}=[B_{n,i}]$. Тогда

$$\bigcap_{1\leqslant n<\infty}(A_{n,-1}\cup A_{n,1})=[U]\neq\wedge=\bigcup_{\varphi\in\Phi}\bigcap_{1\leqslant n<\infty}A_{n,\varphi(n)},$$

где Φ обозначает множество всех отображений φ множества T всех положительных целых чисел в множество S, состоящее только из чисел -1 и 1.

Действительно, $A_{n,-1}\cup A_{n,1}=[U]$, поэтому пересечение всех этих элементов равно $[U]\neq\wedge$. С другой стороны,

$$\bigcap_{1\leqslant n<\infty}A_{n,\varphi(n)}=\wedge \tag{11}$$

[1]) Для изучения бесконечной дистрибутивности в булевых алгебрах см. Чин и Тарский [1], Христенсен и Пирс [1], Эномото [1], Керстан [1], Ковальский [1], Маттес [1, 2], Пирс [3, 5, 6], Скотт [1], Сикорский [25, 27], Сикорский и Трачик [2], Смит [1], Смит и Тарский [1]. См. также § 20, 24, 25, 29, 34, 35, 36, 38.

для каждого $\varphi \in \Phi$. В самом деле, если $[B] \subset A_{n, \varphi(n)} = [B_{n, \varphi(n)}]$ для $n = 1, 2, \ldots$, то все множества $C_n = B - B_{n, \varphi(n)}$ принадлежат идеалу Δ. Поскольку $B \subset B_{n, \varphi(n)} \cup C_n$, то $B \subset \bigcap_{1 \leqslant n < \infty} (B_{n, \varphi(n)} \cup C_n) \subset (\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} B_{n, \varphi(n)}) \cup (\bigcup_{1 \leqslant n < \infty} C_n) \in \Delta$, так как множество $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} B_{n, \varphi(n)}$ состоит только из одного элемента, именно числа

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)+1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, $B \in \Delta$, т. е. $[B] = \wedge$. Это доказывает равенство (11) [1].

Заметим, что приведенные выше рассуждения остаются в силе, если идеал всех счетных подмножеств заменить, например, на идеал всех борелевских множеств первой категории или на идеал всех борелевских множеств лебеговой меры нуль.

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*дистрибутивной*, если равенство (10) имеет место для каждого $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, для которого существуют все пересечения $\bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)}$ и

(12) существуют все объединения $\bigcup_{s \in S} A_{t,s}$ и пересечение $\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s}$.

В силу законов Моргана алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*дистрибутивной* тогда и только тогда, когда имеет место равенство (10′) для каждого $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$, для которого существуют все объединения $\bigcup_{t \in T} A_{t, \varphi(t)}$ и

(12′) существуют все пересечения $\bigcap_{s \in S} A_{t,s}$ и объединение $\bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s}$.

Говорят, что булева алгебра является $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной*, если она $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$-дистрибутивна. Говорят, что алгебра *вполне дистрибутивна*, она $\mathfrak{m}$-дистрибутивна для

[1]) Тождество (11) легко получить также из теоремы 21.1.

каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$. Если $\mathfrak{m}$ — конечное число, то, согласно равенствам (9), каждая булева алгебра является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной. Каждая булева алгебра является $(\mathfrak{m}, 1)$-дистрибутивной. Чтобы исключить эти тривиальные случаи, мы всегда в дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число, а $\mathfrak{n} \geqslant 2$.

Из определения немедленно следует, что если алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной, а $\mathfrak{m}' \leqslant \mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}' \leqslant \mathfrak{n}$, то алгебра $\mathfrak{A}$ является также и $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n}')$-дистрибутивной. Таким образом, вполне дистрибутивная алгебра является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной для каждого $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$.

Пусть H — множество, состоящее из чисел 1 и -1.

19.1[1]. *Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной;*

(ii) *алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, 2)$-дистрибутивной;*

(iii) *если $\{A_t\}_{t \in T}$ является $\mathfrak{m}$-индексированным множеством элементов из алгебры $\mathfrak{A}$, то для каждого элемента $A \neq \wedge (A \in \mathfrak{A})$ существует такая функция $\varepsilon \in H^T$, что*

$$A \cap \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t \neq \wedge. \tag{13}$$

Условие (13) следует понимать так: или пересечения всех элементов A, $\varepsilon(t) \cdot A_t (t \in T)$ не существует, или оно существует, но не равно $\wedge$. Заметим, что если все бесконечные пересечения $\bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t$ существуют, то существование функции $\varepsilon \in H^T$ для каждого $A \neq \wedge$, обладающей свойством (13), эквивалентно, согласно условию (9), равенству

$$\bigcup_{\varepsilon \in H^T}^{\mathfrak{A}} \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t = \vee. \tag{14}$$

Условие (ii) тривиально вытекает из условия (i).

Из условия (ii) следует (iii). Предположим, что элемент $A \in \mathfrak{A}$ таков, что

$$A \cap \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t = \wedge \text{ для каждой функции } \varepsilon \in H^T$$

[1]) Пирс [3], Смит и Тарский [1].

(т. е. пересечение всех элементов A, $\varepsilon(t)\cdot A_t$ всегда равно $\wedge$).

Пусть t_0 — элемент, не принадлежащий множеству T, и пусть $T'=T\cup(t_0)$, $S=H$ и, наконец,

$$A_{t,s}=s\cdot A_t \text{ для } t\in T,\ s\in S,$$
$$A_{t_0,s}=A \text{ для } s\in S.$$

Применяя равенство (10) к $(\mathfrak{m}, 2)$-индексированному множеству $\{A_{t,s}\}_{t\in T',\, s\in S}$, мы получаем равенство

$$A=\bigcap_{t\in T'}\bigcup_{s\in S}A_{t,s}=\wedge.$$

Условие (iii) влечет за собой (i). Допустим, что $\mathfrak{A}$ не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй, т. е. существует $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$, удовлетворяющее всем упомянутым в определении дистрибутивности условиям и такое, что равенство (10) не имеет места. Таким образом, существует такой элемент $A\neq\wedge$, что

$$A\subset\bigcup_{s\in S}A_{t,s} \text{ для каждого } t\in T \tag{15}$$

и

$$A\cap\bigcap_{t\in T}A_{s,\varphi(t)}=\wedge \text{ для каждого } \varphi\in S^T. \tag{16}$$

Мы докажем, что для каждой функции $\varepsilon\in H^{T\times S}$ имеет место равенство

$$A\cap\bigcap_{(t,s)\in T\times S}\varepsilon(t,s)\cdot A_{t,s}=\wedge. \tag{17}$$

Действительно, если существует такое $t\in T$, что $\varepsilon(t,s)=-1$ для всех $s\in S$, то равенство (17) вытекает из (15). Если для каждого $t\in T$ существует такое $s=\varphi(t)$, что $\varepsilon(t,s)=1$, то равенство (17) следует из (16), поскольку каждый элемент, появляющийся в левой части равенства (16), появляется и в левой части равенства (17). Только что доказанное свойство (17) показывает, что $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{(t,s)\in T\times S}$ не обладает свойством (iii).

Согласно теореме 19.1, достаточно рассматривать $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивность только для $\mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$. Поэтому во всех теоремах, касающихся $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности,

мы всегда будем предполагать, что $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — бесконечные кардинальные числа.

19.2. *Для любой булевой алгебры* $\mathfrak{A}$ *следующие три условия эквивалентны*:

(d) *алгебра* $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*дистрибутивна*;

(d_1) *если* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*индексированное множество* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ *элементов алгебры* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условию* (12) *и*

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} \neq \wedge, \tag{18}$$

то существует такое отображение $\varphi \in S^T$, *что*

$$\bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} \neq \wedge; \tag{19}$$

(d_2) *если* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*индексированное множество* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ *элементов алгебры* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет равенству*

$$\bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee \text{ для каждого } t \in T, \tag{20}$$

то для каждого $A \neq \wedge (A \in \mathfrak{A})$ *существует такое отображение* $\varphi \in S^T$, *что*

$$A \cap \bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} \neq \wedge. \tag{21}$$

Условие (19) нужно читать следующим образом: или пересечения $\bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)}$ не существует, или оно существует, но не равно $\wedge$. Условие (21) следует интерпретировать таким же образом: или пересечения A и всех элементов $A_{t, \varphi(t)}$ $(t \in T)$ не существует, или оно существует, но не равно $\wedge$. Отметим, что если все пересечения $\bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)}$ существуют, то заключение в условии (d_2) эквивалентно тождеству

$$\bigcup_{\varphi \in S^T} \bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} = \vee. \tag{21'}$$

Это легко следует из (9).

Утверждение (d) влечет за собой (d_1), поскольку из условий (10) и (18) вытекает (19) для некоторого $\varphi \in S^T$.

Чтобы вывести из (d_2) условие (d_1), достаточно дополнить множество T одним элементом t_0, положить

$A_{t_0,s}=A$ для всех $s\in S$ и применить (d_1) к семейству $\{A_{t,s}\}_{t\in T\cup(t_0),\,s\in S}$, предположив, что равенство (20) имеет место.

(d_2) влечет за собой (d). Действительно, пусть ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\,s\in S}$ удовлетворяет условию (12) и $B=\bigcap\limits_{t\in T}\bigcup\limits_{s\in S}A_{t,s}$. Предположим, что равенство (10) не выполняется, т. е. существует такой элемент $A\neq\wedge$, что

(22) $A\subset B$ и $\bigcap\limits_{t\in T}A_{t,\varphi(t)}\subset B-A$ для каждого $\varphi\in S^T$.

Дополним множество S одним новым элементом s_0 и обозначим

$$B_{t,s_0}=-B \text{ для всех } t\in T,$$

$$B_{t,s}=B\cap A_{t,s} \text{ для всех } t\in T \text{ и для всех } s\in S.$$

Тогда ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-индексированное множество $\{B_{t,s}\}_{t\in T,\,s\in S\cup(s_0)}$ удовлетворяет условию (20). Применяя (d_2) к этому индексированному множеству, мы получаем, что существует такое $\varphi\in S^T$, что $A\cap\bigcap\limits_{t\in T}A_{t,\varphi(t)}\neq\wedge$, а это противоречит утверждению (22).

Определение ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивности на стр. 100 является несколько сложным, поскольку приходится требовать существования различных бесконечных объединений и пересечений. Приведенная ниже теорема 19.3 предлагает другое эквивалентное определение, которое позволяет избежать этой трудности. Чтобы сформулировать его, назовем индексированное ($\mathfrak{n}$-индексированное) множество $\{A_s\}_{s\in S}$ *покрытием* (*$\mathfrak{n}$-покрытием*) булевой алгебры $\mathfrak{A}$, если $\bigcup\limits_{s\in S}A_s=\vee_{\mathfrak{A}}$. Говорят, что покрытие $\{B_r\}_{r\in R}$ *измельчает* покрытие $\{A_s\}_{s\in S}$, если для каждого $r\in R$ существует такое $s\in S$, что $B_r\subset A_s$.

19.3. *Для каждой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны следующие условия*:

(d) *алгебра $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивна*;

(d_3) *каждое множество, состоящее из не более чем* $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$-*покрытий, имеет общее измельчение*[1].

Достаточно доказать, что условие (d_3) эквивалентно условию (d_2) теоремы 19.2.

Условие (d_2) влечет за собой (d_3). Действительно, предположим, что

(23) для каждого $t \in T$ ($\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$) множество $\{A_{t,s}\}_{s \in S}$ есть $\mathfrak{n}$-покрытие алгебры $\mathfrak{A}$,

т. е. имеет место равенство (20). Пусть $\{B_r\}_{r \in R}$ — индексированное множество, образованное всеми элементами $B \in \mathfrak{A}$, обладающими следующим свойством:

(24) существует такое $\varphi \in S^T$, что $B \subset A_{t,\varphi(t)}$ для каждого $t \in T$.

Если (d_2) имеет место, то $\{B_r\}_{r \in R}$ является покрытием алгебры $\mathfrak{A}$, ибо в противном случае существовал бы такой элемент $A \neq \wedge$, что

(25) $$A \cap B_r = \wedge \text{ для всех } r \in R.$$

Согласно условию (d_2), существовало бы такое отображение $\varphi \in R^T$, что имело бы место равенство (21), т. е. существовал бы такой элемент $B \neq \wedge$, что $B \subset A$, $B \subset A_{t,\varphi(t)}$ для каждого $t \in T$. Последнее свойство показывает, что B есть один из элементов B_r, что невозможно, согласно (25). В силу свойства (24) покрытие $\{B_r\}_{r \in R}$ является измельчением для каждого $\mathfrak{n}$-покрытия $\{A_{t,s}\}_{s \in S,\, t \in T}$.

Условие (d_3) влечет за собой (d_2). Предположим, что ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ удовлетворяет равенству (20), т. е. имеет место условие (23). Пусть $\{B_r\}_{r \in R}$ — общее измельчение каждого из $\mathfrak{n}$-покрытий $\{A_{t,s}\}_{s \in S}$. Таким образом, если $A \neq \wedge$, то существует такое $r \in R$, что $A \cap B_r \neq \wedge$, а для каждого $t \in T$ существует такое $s = \varphi(t) \in S$, что $B_r \subset A_{t,\varphi(t)}$. Поскольку ненулевой элемент $A \cap B_r$ является подэлементом всех элементов A, $A_{t,\varphi(t)}$ ($t \in T$), то неравенство (21) справедливо.

---

[1]) Пирс [3].

§ 20. $\mathfrak{m}$-полные булевы алгебры

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, а $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Согласно законам Моргана [см. формулы (3) § 19], следующие два условия эквивалентны:

(а) для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ (элементов алгебры $\mathfrak{A}$) существует в алгебре $\mathfrak{A}$ объединение $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$;

(а′) для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ (элементов алгебры $\mathfrak{A}$) существует в алгебре $\mathfrak{A}$ пересечение $\bigcap\limits_{t \in T} A_t$.

Если одно из приведенных выше условий выполнено (или, что то же самое, оба условия выполнены), то говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ является *$\mathfrak{m}$-полной булевой алгеброй* или *булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй*. Если алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полной булевой алгеброй для каждого $\mathfrak{m}$, то она называется *полной булевой алгеброй*.

Конечно, каждая булева алгебра, изоморфная некоторой $\mathfrak{m}$-полной булевой алгебре (полной булевой алгебре), тоже является $\mathfrak{m}$-полной булевой алгеброй (полной булевой алгеброй).

Пусть $\mathfrak{F}$ — поле подмножеств пространства X. Согласно закону Моргана для множеств, следующие два условия эквивалентны:

(б) для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ множеств поля $\mathfrak{F}$ теоретико-множественное объединение всех $A_t\,(t \in T)$ принадлежит полю $\mathfrak{F}$;

(б′) для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ множеств поля $\mathfrak{F}$ теоретико-множественное пересечение всех $A_t\,(t \in T)$ принадлежит полю $\mathfrak{F}$.

Если одно (или оба) из этих условий выполнено, то говорят, что поле $\mathfrak{F}$ является *$\mathfrak{m}$-полным полем множеств*, или *$\mathfrak{m}$-полем множеств*. Если $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-полным полем множеств для каждого $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{F}$ называют *полным полем множеств*.

Примеры. А) Класс всех подмножеств A пространства X, таких, что или $\overline{\overline{A}} \leqslant \mathfrak{m}$ или $\overline{\overline{X - A}} \leqslant \mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-полем подмножеств пространства X. Класс всех под-

множеств любого пространства X является полным полем множеств.

Б) Из замечания в конце примера А § 18 следует, что каждое $\mathfrak{m}$-полное (полное) поле множеств является $\mathfrak{m}$-полной (полной) булевой алгеброй, а булевы объединения $\bigcup_{t \in T} A_t$ и пересечения $\bigcap_{t \in T} A_t$ совпадают с теоретико-множественными объединениями и пересечениями соответственно, если $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно; поле множеств $\mathfrak{F}$ может быть $\mathfrak{m}$-полной булевой алгеброй, но может не быть $\mathfrak{m}$-полным полем множеств.

Например, пусть h — изоморфизм поля $\mathfrak{A}$ всех подмножеств бесконечного пространства X на поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда поле $\mathfrak{F}$ есть полная булева алгебра, поскольку оно изоморфно полной булевой алгебре $\mathfrak{A}$. Однако $\mathfrak{F}$ не есть σ-поле[1]) множеств (и, следовательно, $\mathfrak{F}$ не будет $\mathfrak{m}$-полным полем ни для какого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$). Действительно, если $\{A_n\}$ — бесконечная последовательность непустых непересекающихся подмножеств пространства X, то теоретико-множественное объединение всех $h(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не принадлежит полю $\mathfrak{F}$, так как оно (объединение) незамкнуто [см. также пример К § 7].

В) Булева алгебра $\mathfrak{A}_1$ всех регулярных замкнутых подмножеств топологического пространства X [см. пример Б § 1] является полной булевой алгеброй (которая, вообще говоря, не является полным полем множеств)[2]).

Действительно, легко проверить, что для каждого индексированного множества $\{A_t\}$ регулярных замкнутых подмножеств пространства X замыкание теоретико-множественного объединения всех A_t является булевым объединением всех A_t в алгебре $\mathfrak{A}_1$; замыкание внутренности теоретико-множественного пересечения всех A_t является булевым пересечением всех A_t в алгебре $\mathfrak{A}_1$.

---

1) Буква σ обозначает $\aleph_0$. См. терминологию и обозначения на стр. 9.

2) См. Тарский [3], Биркгоф [2] и Макнейл [1].

Подобным же образом мы можем доказать, что булева алгебра $\mathfrak{A}_2$ всех регулярных открытых подмножеств пространства X (см. пример Б § 1) является полной булевой алгеброй[1]). Для любого индексированного множества $\{A_t\}$ регулярных открытых подмножеств внутренность замыкания теоретико-множественного объединения всех A_t есть булево объединение всех A_t в алгебре $\mathfrak{A}_2$, а внутренность теоретико-множественного пересечения всех A_t является булевым пересечением всех A_t в алгебре $\mathfrak{A}_2$.

Г) Если $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полной (полной) булевой алгеброй и E — элемент алгебры $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{A} \mid E$ (см. пример А § 10) тоже является $\mathfrak{m}$-полной (полной) булевой алгеброй. Если $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-полное (полное) поле подмножеств пространства X и E — подмножество пространства X, то поле $\mathfrak{F} \mid E$ (см. пример Б § 10) тоже является $\mathfrak{m}$-полным (полным) полем множеств.

Д) Каждая бесконечная булева σ-алгебра $\mathfrak{A}$ содержит подалгебру, изоморфную полю $\mathfrak{F}$ всех подмножеств некоторого счетного множества X и, значит, имеет мощность, большую или равную $2^{\aleph_0}$.

В самом деле, если $\mathfrak{A}$ — бесконечная алгебра, то она содержит такое индексированное множество $\{A_x\}_{x \in X}$ непересекающихся элементов, что $\bigcup\limits_{x \in X} A_x = \vee$. Отображение, которое каждому множеству $B \subset X$ ставит в соответствие элемент $\bigcup\limits_{x \in B} A_x \in \mathfrak{A}$, является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}$.

Таким образом, пространство Стоуна X_0 поля $\mathfrak{F}$ [т. е. компактификация Чеха — Стоуна $\beta(X)$ дискретного пространства X — см. пример Е § 8] является непрерывным образом пространства Стоуна любой бесконечной булевой σ-алгебры $\mathfrak{A}$. Поскольку X_0 не является непрерывным образом обобщенного канторова дисконтинуума $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ для любого числа $\mathfrak{n}$ (см. стр. 76), то пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ не является непрерывным образом пространства $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$[2]).

Следовательно, ни одна бесконечная булева σ-алгебра $\mathfrak{A}$ не изоморфна никакой подалгебре свободной булевой

---

[1]) См. Тарский [3], Биркгоф [2] и Макнейл [1].

[2]) Энгелькинг и Пелчинский [1].

алгебры $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ ни для какого кардинального числа $\mathfrak{n}$.

Е) Пусть X — топологическое пространство. Мы напомним, что множество $A \subset X$ обладает *свойством Бэра*[1]), если существует такое открытое множество G, что $A - G$ и $G - A$ являются множествами первой категории. Другими словами, A обладает свойством Бэра, если

$$A = (G - N_1) \cup N_2,$$

где G открыто, а N_1, N_2 — множества первой категории.

Если A обладает свойством Бэра, то этим же свойством обладает и его дополнение. В самом деле, пусть $G_0 = -\mathbf{C}G$ — дополнение к замыканию множества G. Тогда

$$(-A) - G_0 = \mathbf{C}G - A \subset (\mathbf{C}G - G) \cup (G - A),$$
$$G_0 - (-A) = A - \mathbf{C}G \subset A - G.$$

Следовательно, $(-A) - G_0$ и $G_0 - (-A)$ суть множества первой категории. Если множества A_n ($n = 1, 2, \ldots$) обладают свойством Бэра, то их объединение A тоже обладает этим свойством. Действительно, пусть G_n — такое открытое множество, что $A_n - G_n$ и $G_n - A_n$ суть множества первой категории, $n = 1, 2, \ldots$. Пусть G — объединение множеств G_n. Поскольку

$$A - G \subset \bigcup_{1 \leqslant n < \infty} (A_n - G_n), \quad G - A \subset \bigcup_{1 \leqslant n < \infty} (G_n - A_n),$$

то и $A - G$, и $G - A$ являются множествами первой категории.

Таким образом, класс всех множеств, обладающих свойством Бэра, образует σ-поле подмножеств пространства X. Это поле содержит все открытые множества. По определению класс всех борелевских множеств является наименьшим σ-полем, содержащим все открытые множества. Значит, отсюда следует, что каждое борелевское множество обладает свойством Бэра.

Ж). Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — поля подмножеств пространств X и X' соответственно. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}'_1$ — наименьшие полные поля, содержащие соответственно $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$.

---

[1]) См., например, Куратовский [3], стр. 92—101.

Говорят, что поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ *сильно изоморфны*, если существует такой изоморфизм h_1 поля $\mathfrak{F}_1$ на $\mathfrak{F}'_1$, что $h_1(\mathfrak{F})=\mathfrak{F}'$. Отображение $h=h_1|\mathfrak{F}$ тогда называется *сильным изоморфизмом*[1]) поля $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'$.

Не каждый изоморфизм между полями множеств является сильным. Например, если X — вполне несвязное компактное пространство, X' — плотное подмножество в X, $\mathfrak{F}$ — поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, а $\mathfrak{F}'=\mathfrak{F}|X'$ есть поле всех множеств вида $A\cap X'$, где $A\in\mathfrak{F}$, то отображение

$$h(A)=A\cap X' \text{ для } A\in\mathfrak{F}$$

является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{F}'$, но не является сильным изоморфизмом, если $X'\neq X$.

Заметим, что изоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ на поле $\mathfrak{F}'$ является сильным тогда и только тогда, когда как h, так и h^{-1} индуцируются поточечными отображениями (см. § 11).

Говорят, что поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ подмножеств пространства X и X' соответственно являются *эквивалентными*[2]), если существует такое взаимно однозначное отображение ψ пространства X на пространство X', что отображение h, определенное по формуле

$$h(A)=\psi(A) \text{ для } A\in\mathfrak{F},$$

является изоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ на поле $\mathfrak{F}'$.

Отметим, что поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ сильно изоморфны тогда и только тогда, когда приведенные поля $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}'_0$, полученные соответственно из $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ отождествлением неотделимых точек (см. § 7 стр. 35), являются эквивалентными.

3) Прямое объединение любого индексированного множества булевых $\mathfrak{m}$-алгебр ($\mathfrak{m}$-полей подмножеств непересекающихся пространств) является булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй ($\mathfrak{m}$-полем подмножеств объединения этих пространств). Аналогичное замечание справедливо для полных булевых алгебр (полных полей множеств).

---

[1]) Марчевский [3].
[2]) Марчевский [3,10].

И) Каждое $\mathfrak{m}$-поле множеств является $\mathfrak{m}$-дистрибутивным. Действительно, равенство (10) § 19 легко следует из замечания в конце примера А § 18. Другое доказательство можно получить, проверив, что выполняется условие (d_1) [или (d_2)] теоремы 19.2.

Каждое полное поле множеств является вполне дистрибутивным.

Теперь мы докажем следующий простой критерий $\mathfrak{m}$-полноты булевых алгебр.

20.1. *Если объединение* $\bigcup\limits_{t \in T} B_t$ *существует для любого* $\mathfrak{m}$-*индексированного множества* $\{B_t\}_{t \in T}$ *непересекающихся элементов булевой алгебры* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$-*полной алгеброй*[1]).

Доказательство проводится индукцией по кардинальному числу $\mathfrak{m}$. Допустим, что теорема 20.1 справедлива для всех кардинальных чисел $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ и что существует объединение любого $\mathfrak{m}$-индексированного множества непересекающихся элементов в алгебре $\mathfrak{A}$. Таким образом, $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}'$-полной булевой алгеброй для всех бесконечных кардинальных чисел $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$.

Пусть $\{A_t\}_{t \in T}$ — любое индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$, $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{m}$.

Удобно считать, что T — множество всех порядковых чисел $t < \alpha$, где α — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{m}$. Положим

$$(1) \qquad B_0 = A_0 \text{ и } B_t = A_t - \bigcup_{t' < t} A_{t'} \text{ для } 0 < t < \alpha.$$

Тогда

$$\bigcup_{t' < t} A_{t'} = \bigcup_{t' < t} B_{t'} \text{ для } 0 < t \leqslant \alpha.$$

Доказательство этого равенства проведем трансфинитной индукцией. Легко проверить, что если равенство имеет место для некоторого t, то для $t+1$ оно тоже справедливо. Пусть теперь t — предельное порядковое число, и равенство имеет место для всех порядковых чисел, меньших t. Тогда по индуктивному предположению каждый

[1]) Смит и Тарский [1].

$A_{t'}$ является подэлементом элемента $\bigcup_{t''\leqslant t'} B_{t''}$. Это доказывает, что $\bigcup_{t'<t} A_{t'} \subset \bigcup_{t'<t} B_{t'}$. Обратное включение тоже справедливо, так как $B_{t'} \subset A_{t'}$ для всех t'.

Поскольку объединение $\bigcup_{t<\alpha} B_t$ существует, мы заключаем, что объединение $\bigcup_{t\in T} A_t$ тоже существует. Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полной.

Заметим, что одновременно мы доказали следующую теорему:

20.2. *Если булева алгебра* $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}'$-*полной для каждого* $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, *то для каждого* $\mathfrak{m}$-*индексированного множества* $\{A_t\}_{t\in T}$ *элементов алгебры* $\mathfrak{A}$ *существует такое* $\mathfrak{m}$-*индексированное множество* $\{B_t\}_{t\in T}$ *непересекающихся элементов алгебры* $\mathfrak{A}$, *что*

$$B_t \subset A_t \quad \textit{для каждого} \quad t \in T$$

и

$$\bigcup_{t\in T} B_t = \bigcup_{t\in T} A_t.$$

Требование, чтобы рассматриваемая булева алгебра $\mathfrak{A}$ была $\mathfrak{m}$-полной, очень полезно при исследовании бесконечных объединений и пересечений не более чем $\mathfrak{m}$ элементов, поскольку в этом случае не нужно дополнительно постулировать существование этих объединений и пересечений.

Например, если $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, то требование, чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была $\mathfrak{n}$-полной, существенно облегчает определение $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности на стр. 100: алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной, если тождество (10) [или (10′)] имеет место для каждого $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$. Аналогично можно упростить и некоторые доказательства. Например, в доказательстве того, что из условия (d_2) вытекает (d_3), на стр. 103 достаточно в качестве $\{B_r\}_{r\in R}$ взять индексированное множество $\{\bigcap_{t\in T} A_{t,\varphi(t)}\}_{\varphi\in S^T}$.

Мы применим теперь теорему 20.2 для того, чтобы сформулировать критерий $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности, яв-

ляющийся видоизменением теоремы 19.3. Покрытие ($\mathfrak{n}$-покрытие), состоящее из непересекающихся элементов, мы для краткости будем называть *разбиением* ($\mathfrak{n}$-*разбиением*).

20.3. *Для любой булевой алгебры* $\mathfrak{A}$, *являющейся* $\mathfrak{n}'$-*полной для каждого кардинального числа* $\mathfrak{n}' < \mathfrak{n}$, *эквивалентны следующие условия:*

(d) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивной;*

(d_4) *каждое множество, состоящее из не более чем* $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$-*разбиений, имеет общее измельчение*[1]).

Согласно теореме 19.3, достаточно доказать, что условие (d_4) эквивалентно условию (d_3) из теоремы 19.3. Поскольку из (d_3) прямо вытекает (d_4), то мы должны доказать только обратную импликацию. Предположим, что для каждого $t \in T$ ($\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$) множество $\{A_{t,s}\}_{s \in S}$ является $\mathfrak{n}$-покрытием алгебры $\mathfrak{A}$. Согласно теореме 20.2, существует такое разбиение $\{B_{t,s}\}_{s \in S}$, что $B_{t,s} \subset A_{t,s}$. В силу условия (d_4) существует покрытие $\{B_r\}_{r \in R}$, которое является общим измельчением всех $\mathfrak{n}$-разбиений $\{B_{t,s}\}_{s \in S}$, $t \in T$. Ясно, что $\{B_r\}$ является также общим измельчением и всех $\mathfrak{n}$-покрытий $\{A_{t,s}\}_{s \in S}$, $t \in T$.

Из теоремы 20.3 следует, что в условии (d_2) теоремы 19.2 мы можем дополнительно требовать в равенстве (20), чтобы $A_{t,s} \cap A_{t,s'} = \wedge$ при $s \neq s'$. Мы используем это замечание в доказательстве следующей теоремы.

20.4. *Каждая* $2^{\mathfrak{m}}$-*полная* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивная булева алгебра является* ($\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$)-*дистрибутивной*[2]).

Пусть H — множество, состоящее из чисел 1 и -1, $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{m} = \overline{\overline{S}}$. Достаточно доказать [согласно последней редакции условия (d_2), см. также равенство (21′) § 19], что

$$\bigcup_{\varphi \in (H^S)^T} \bigcap_{t \in T} A_{t,\varphi(t)} = \vee$$

для каждого индексированного множества $\{A_{t,\varepsilon}\}_{t \in T, \varepsilon \in H^S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, таких, что

$$\bigcup_{\varepsilon \in H^S} A_{t,\varepsilon} = \vee \text{ для каждого } t \in T, \tag{2}$$

$$A_{t,\varepsilon} \cap A_{t,\varepsilon'} = \wedge \text{ при } \varepsilon \neq \varepsilon'. \tag{3}$$

[1]) Пирс [3].

[2]) Смит и Тарский [1]. См. также Пирс [3].

Пусть $B_{t,s,j}$, где $j \in H$, — объединение всех таких элементов $A_{t,\varepsilon}$, что $\varepsilon(s) = j$. Из определения и равенства (3) непосредственно вытекает, что

$$A_{t,\varepsilon} = \bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varepsilon(s)}, \tag{4}$$

поскольку элемент в правой части равенства содержит $A_{t,\varepsilon}$ в качестве подэлемента и не пересекается ни с одним $A_{t,\varepsilon'}$, где $\varepsilon' \neq \varepsilon$.

Так как алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной, то, согласно соотношениям (4) и (2), имеют место равенства

$$\bigcap_{s \in S} \bigcup_{j \in H} B_{t,s,j} = \bigcup_{\varepsilon \in H^S} \bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varepsilon(s)} = \bigcup_{\varepsilon \in H^S} A_{t,\varepsilon} = \vee$$

для каждого $t \in T$. Следовательно, в силу $\mathfrak{m}$-дистрибутивности алгебры $\mathfrak{A}$

$$\vee = \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} \bigcup_{j \in H} B_{t,s,j} = \bigcap_{(t,s) \in T \times S} \bigcup_{j \in H} B_{t,s,j} =$$

$$= \bigcup_{\varphi \in H^{T \times S}} \bigcap_{(t,s) \in T \times S} B_{t,s,\varphi(t,s)} = \bigcup_{\varphi \in H^{T \times S}} \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varphi(t,s)}.$$

Любую функцию $\varphi \in H^{T \times S}$ можно естественным образом интерпретировать как элемент множества $(H^S)^T$, а именно как отображение, которое каждому $t \in T$ ставит в соответствие функцию $\varepsilon_t = \varphi(t)$ из множества S в H, определяемую равенством

$$\varepsilon_t(s) = \varphi(t, s).$$

Приняв эту интерпретацию, мы можем отождествить множество $H^{T \times S}$ с множеством $(H^S)^T$. Более того,

$$\bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varphi(t,s)} = \bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varepsilon_t(s)} = A_{t,\varepsilon_t} = A_{t,\varphi(t)}$$

в силу равенства (4). Значит, отсюда следует, что

$$\vee = \bigcup_{\varphi \in (H^S)^T} \bigcap_{t \in T} \bigcap_{s \in S} B_{t,s,\varphi(t,s)} = \bigcup_{\varphi \in (H^S)^T} \bigcap_{t \in T} A_{t,\varphi(t)}.$$

Примеры. К) Существует $\mathfrak{m}$-поле множеств $\mathfrak{F}$, которое не является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^+)$-дистрибутивным, причем $\mathfrak{m}^+$

обозначает наименьшее кардинальное число, превосходящее $\mathfrak{m}$[1]).

Пусть T и S — множества мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}^+$ соответственно, а X — множество таких функций $f \in T^S$, что множество $T - f(S)$ бесконечно. Для любых $t \in T$ и $s \in S$ обозначим через $A_{t,s}$ множество всех таких $f \in X$, что $f(s) = t$. Легко проверить, что класс $\mathfrak{F}$ всех множеств $A \subset X$, удовлетворяющих следующим условиям:

(a′) если $x \in A$, то $x \in \bigcap_{s \in S'} A_{t_s, s} \subset A$ для некоторых $t_s \in T$ и некоторого множества $S' \subset S$, $\overline{\overline{S'}} \leqslant \mathfrak{m}$,

(a″) если $x \in -A$, то $x \in \bigcap_{s \in S''} A_{t_s, s} \subset -A$ для некоторых $t_s \in T$ и некоторого множества $S'' \subset S$, $\overline{\overline{S''}} \leqslant \mathfrak{m}$,

является $\mathfrak{m}$-полем подмножеств пространства X, содержащим все множества $A_{t,s}$. Для каждого фиксированного $t \in T$ теоретико-множественное пересечение A_0 всех множеств $-A_{t,s}$ $(s \in S)$ состоит из всех функций $f \in X$, которые не принимают значения t. Поскольку A_0 не содержит никакого непустого множества вида $\bigcap_{s \in S'} A_{t_s, s}$ $(\overline{\overline{S'}} \leqslant \mathfrak{m})$, то, согласно условию (a′), пустое множество будет единственным множеством $A \in \mathfrak{F}$, которое является подмножеством A_0, т. е. подмножеством всех $-A_{t,s}$, $s \in S$. Другими словами, $\bigcap^{\mathfrak{F}}_{s \in S} -A_{t,s} = \wedge$, т. е.

$$\bigcup^{\mathfrak{F}}_{s \in S} A_{t,s} = \vee \text{ для каждого } t \in T.$$

С другой стороны, множество

$$\bigcap^{\mathfrak{F}}_{t \in T} A_{t, \varphi(t)}$$

пусто для каждого $\varphi \in S^T$, ибо если $f \in A_{t, \varphi(t)}$ для каждого $t \in T$, то $f(\varphi(t)) = t$ для каждого $t \in T$, и, следовательно, $f(S) = T$, т. е. $f \notin X$. Таким образом,

$$\bigcap^{\mathfrak{F}}_{t \in T} \bigcup^{\mathfrak{F}}_{s \in S} A_{t,s} = \vee \neq \wedge = \bigcup^{\mathfrak{F}}_{\varphi \in S^T} \bigcap^{\mathfrak{F}}_{t \in T} A_{t, \varphi(t)},$$

что доказывает, что поле $\mathfrak{F}$ не является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^+)$-дистрибутивным.

---

[1]) Пирс [3].

Отметим следующее свойство поля $\mathfrak{F}$, которое будет использовано в примере О § 35:

$$\bigcap_{t\in T}\bigcup_{s\in S} A_{t,s}=\wedge,$$

где $\bigcap$ и $\bigcup$ обозначают теоретико-множественные пересечения и объединения соответственно. Действительно, функция f принадлежит $\bigcup_{s\in S} A_{t,s}$ тогда и только тогда, когда она принимает значение t. Таким образом, если $f\in\bigcap_{t\in T}\bigcup_{s\in S} A_{t,s}$, то f должна отображать S на все множество T; однако такие функции не принадлежат пространству X.

Л) Для каждого бесконечного регулярного[1]) кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует полная булева алгебра $\mathfrak{A}$, которая является $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n})$-дистрибутивной для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}'<\mathfrak{m}$ и каждого кардинального числа $\mathfrak{n}$, но не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной[2]).

Пусть $H=(-1, 1)$ и $\overline{\overline{T}}_0=\mathfrak{m}$. Тогда $X=H^{T_0}$ есть множество всех $x=\{x_t\}_{t\in T_0}$, где $x_t=\pm 1$. Так же, как и на стр. 71, пусть D_t обозначает множество всех таких x, что $x_t=1$. Рассмотрим множество X как топологическое пространство, в котором базисом открытых множеств служит класс всех пересечений вида

$$\bigcap_{t\in T}\varepsilon_t\cdot D_t,\ \text{где}\ \varepsilon_t=\pm 1,\ T\subset T_0,\ \overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}.$$

Это нульмерное топологическое пространство X обладает следующими свойствами[3]): (а) пересечение менее чем $\mathfrak{m}$ регулярных открытых множеств является регулярным множеством; (б) объединение менее чем $\mathfrak{m}$ нигде не плотных множеств является нигде не плотным. Таким образом, пересечение менее чем $\mathfrak{m}$ плотных открытых множеств является плотным открытым множеством.

---

[1]) Кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *регулярным*, если его нельзя представить в виде суммы менее чем $\mathfrak{m}$ кардинальных чисел, каждое из которых меньше чем $\mathfrak{m}$.

[2]) Скотт [1].

[3]) Сикорский [12].

Полная булева алгебра $\mathfrak{A}$ всех регулярных открытых множеств в пространстве X обладает требуемыми свойствами. Действительно, предположим, что $\{A_{t,s}\}_{t\in T, s\in S}$ — такое $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n})$-индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{m}' < \mathfrak{m})$, что

$$\bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}} A_{t,s} = \vee \text{ для каждого } t \in T.$$

Пусть знаки $\bigcup$ и $\bigcap$ без индексов обозначают теоретико-множественные операции. Для каждого $t \in T$ объединение $\bigcup_{s\in S} A_{t,s}$ является плотным открытым множеством. Поскольку $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, то пересечение

$$\bigcap_{t\in T} \bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \bigcup_{\varphi\in S^T} \bigcap_{t\in T} A_{t,\varphi(t)}$$

является плотным открытым множеством. Имеет место включение

$$\bigcap_{t\in T} A_{t,\varphi(t)} \subset \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_{t,\varphi(t)},$$

поскольку множество в левой части является регулярным открытым множеством. Таким образом,

$$\bigcup_{\varphi\in S^T}^{\mathfrak{A}} \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_{t,\varphi(t)} = \vee.$$

Согласно условию (d_2) теоремы 19.2 и соотношению (21′), это доказывает $(\mathfrak{m}', \mathfrak{n})$-дистрибутивность алгебры $\mathfrak{A}$. С другой стороны, полагая $A_{t,s} = s\cdot D_t$ для любого $s \in S = H$ и $t \in T = T_0$, мы получаем неравенство

$$\vee = \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} \bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}} A_{t,s} \neq \bigcup_{\varphi\in S^T}^{\mathfrak{A}} \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_{t,\varphi(t)} = \wedge,$$

которое доказывает, что алгебра $\mathfrak{A}$ не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной.

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{m}$-*цепному условию*, если каждое множество непересекающихся элементов в алгебре $\mathfrak{A}$ имеет мощность, меньшую или равную $\mathfrak{m}$.

Пример. M) Из топологии известно, что каждый класс непересекающихся открытых подмножеств канторова дисконтинуума $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ не более чем счетен[1]). Отсюда вытекает (см. § 14), что каждая свободная булева алгебра и, значит, любая ее подалгебра удовлетворяет σ-цепному условию. В частности, каждая булева алгебра, обладающая свойством (a′) из § 15, удовлетворяет σ-цепному условию.

Очень полезным на практике является следующий простой критерий полноты булевой алгебры.

20.5. *Каждая* $\mathfrak{m}$-*полная булева алгебра* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющая* $\mathfrak{m}$-*цепному условию, является полной булевой алгеброй*[2]).

Действительно, объединение любого индексированного множества непересекающихся элементов существует. Таким образом, согласно теореме 20.1, алгебра $\mathfrak{A}$ является полной.

Пример. H) Говорят, что вещественная функция m, определенная на булевой алгебре $\mathfrak{A}$, является $\mathfrak{m}$-*мерой* (или $\mathfrak{m}$-*аддитивной мерой*), если

(5) $$0 \leqslant m(A) \leqslant \infty \text{ для всех } A \in \mathfrak{A};$$

существует такой элемент A_0, что $m(A_0) < \infty$;

(6) $$m\Big(\bigcup_{t \in T} A_t\Big) = \sum_{t \in T} m(A_t)$$

для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ непересекающихся элементов алгебры $\mathfrak{A}$, для которых существует объединение $\bigcup\limits_{t \in T} A_t$.

Безусловно, бесконечную сумму $\sum\limits_{t \in T}$ в равенстве (6) нужно понимать следующим образом: если $m(A_t) = 0$ для всех t, за исключением конечной или счетной последовательности $t_n \in T$ ($t_i \neq t_j$ при $i \neq j$) и $\sum\limits_n m(A_{t_n}) = c < \infty$, то $\sum\limits_{t \in T} m(A_t) = c$; в остальных случаях $\sum\limits_{t \in T} m(A_t) = \infty$. Если

[1]) Это следует из более общей теоремы о сепарабельности декартовых произведений (точнее, о свойстве типа сепарабельности, см. теорему 3.—*Прим. перев.*). См. Марчевский [9].

[2]) Тарский [3].

$\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-алгеброй, то условие „для которых существует объединение $\bigcup_{t \in T} A_t$“ в этом определении излишне.

Очевидно, что каждая $\mathfrak{m}$-мера является мерой в смысле определения примера В § 3. Следовательно, она обладает свойствами (3), (4), (5) § 3.

Если m является $\mathfrak{m}$-мерой на булевой $\mathfrak{m}$-алгебре $\mathfrak{A}$, то

$$m\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) \leqslant \sum_{t \in T} m(A_t) \tag{7}$$

для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$.

Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда T есть множество всех порядковых чисел мощности, меньшей $\mathfrak{m}$. Пусть B_t определено по формуле (1). Тогда

$$m\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right) = m\left(\bigcup_{t \in T} B_t\right) = \sum_{t \in T} m(B_t) \leqslant \sum_{t \in T} m(A_t),$$

поскольку все элементы B_t не пересекаются, а $B_t \subset A_t$.

Заметим, что неравенство (7) справедливо также, если m является σ-мерой на произвольной булевой алгебре, а $\overline{\overline{T}} \leqslant \aleph_0$, если только $\bigcup_{t \in T} A_t$ существует. Доказательство остается без изменения.

Случай σ-мер является наиболее важным [1]).

Говорят, что σ-мера m является *σ-конечной* на булевой алгебре $\mathfrak{A}$, если единичный элемент $\vee$ является объединением счетной последовательности $\{A_n\}$ элементов конечной меры. Мы можем также предположить, что элементы A_n не пересекаются. Каждая конечная мера, безусловно, является σ-конечной. Лебегова мера является примером σ-конечной, но не конечной σ-меры.

Говорят, что мера m на булевой алгебре $\mathfrak{A}$ является *строго положительной*, если $m(A) > 0$ для всех $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Из теоремы 20.5 немедленно вытекает, что каждая булева σ-алгебра, обладающая конечной (или σ-аддитивной

---

[1]) Грубо говоря, σ-меры на булевых алгебрах обладают теми же свойствами, что и σ-меры на полях множеств. Мы часто будем использовать этот факт без указаний на него. Относительно подробностей см., например, Ауман [3].

и σ-конечной) строго положительной мерой, является полной, поскольку она удовлетворяет σ-цепному условию.

Заметим, что существование строго положительной σ-конечной σ-меры m на алгебре $\mathfrak{A}$ влечет за собой существование строго положительной конечной меры на ней, ибо если $\{A_n\}$ — последовательность таких непересекающихся элементов, что $0 < m(A_n) < \infty$ и $\bigcup_{1 \leqslant n < \infty} A_n = \vee$, то формула

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(A \cap A_n)}{2^n m(A_n)} \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}$$

определяет строго положительную конечную σ-меру m' на алгебре $\mathfrak{A}$.

§ 21. $\mathfrak{m}$-идеалы и $\mathfrak{m}$-фильтры. Факторалгебры

Говорят, что идеал Δ $\mathfrak{m}$-полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-*полным идеалом* или $\mathfrak{m}$-*идеалом*, если

(а) из того, что $A_t \in \Delta$ для всех $t \in T$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, вытекает, что $\bigcup_{t \in T} A_t \in \Delta$.

Из теоремы 20.2 легко следует, что идеал Δ является $\mathfrak{m}$-полным, если объединение любого $\mathfrak{m}$-индексированного множества непересекающихся элементов из идеала Δ принадлежит идеалу Δ.

По двойственности говорят, что фильтр ∇ $\mathfrak{m}$-полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-*полным фильтром* или просто $\mathfrak{m}$-*фильтром*, если

(а′) из того, что $A_t \in \nabla$ для всех $t \in T$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, вытекает, что $\bigcap_{t \in T} A_t \in \nabla$.

Примеры. А) Класс Δ всех таких подмножеств A множества X, что $\overline{\overline{A}} \leqslant \mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-идеалом булевой алгебры всех подмножеств множества X. Множество ∇ всех множеств вида $X - A$, где $\overline{\overline{A}} \leqslant \mathfrak{m}$, является $\mathfrak{m}$-фильтром этой булевой алгебры.

Б) Пусть $\mathfrak{A}$ — полная булева алгебра. Идеал (фильтр) алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда является $\mathfrak{m}$-полным для каждого $\mathfrak{m}$, когда он является главным идеалом (фильт-

ром). В этом случае он порождается объединением (пересечением) всех своих элементов.

21.1. *Если* Δ *является* $\mathfrak{m}$-*идеалом* (*если* ∇ *является* $\mathfrak{m}$-*фильтром*) $\mathfrak{m}$-*полной булевой алгебры* $\mathfrak{A}$, *то алгебра* $\mathfrak{A}/\Delta$ (*соответственно* $\mathfrak{A}/\nabla$) *будет* $\mathfrak{m}$-*полной булевой алгеброй, а для каждого* $\mathfrak{m}$-*индексированного множества* $A_t \in \mathfrak{A}$ $(t \in T)$ *имеют место равенства*

$$(1) \qquad \bigcup_{t \in T} [A_t] = [\bigcup_{t \in T} A_t] \quad \text{и} \quad \bigcap_{t \in T} [A_t] = [\bigcap_{t \in T} A_t].$$

Достаточно доказать равенство (1) для алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$. Пусть $A = \bigcup_{t \in T} A_t$. Тогда $A_t - A = \wedge \in \Delta$. С другой стороны, если $A_0 \in \mathfrak{A}$ — любой элемент, такой, что $A_t - A_0 \in \Delta$ для каждого $t \in T$, то $A - A_0 = \bigcup_{t \in T} (A_t - A_0) \in \Delta$. Поскольку выполнены условия (J_1^*), (J_2^*) из § 18, то имеет место первое из равенств (1). Доказательство второго вполне аналогично.

Заметим, что равенства (1) не имеют, вообще говоря, места, если $\overline{\overline{T}} > \mathfrak{m}$. Противоречащий пример можно легко получить из примера Д § 18, заменив идеал всех конечных подмножеств на идеал всех подмножеств, мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$.

Следующий важный пример показывает, что иногда степень полноты алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ может быть выше, чем степень полноты алгебры $\mathfrak{A}$ и идеала Δ [1]).

Примеры. В) Пусть $\mathfrak{A}$ есть σ-поле всех борелевских подмножеств (или всех подмножеств, обладающих свойством Бэра) топологического пространства X, а Δ — σ-идеал всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ первой категории. Согласно теореме 21.1, алгебра $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}/\Delta$ является σ-полной булевой алгеброй. Мы же докажем, что $\mathfrak{A}'$ является полной булевой алгеброй [2]).

---

[1]) Мы рассматриваем здесь (примеры В, Г, Д) только простейший случай увеличения степени полноты факторалгебр. Другие интересные теоремы подобного сорта см. в работе Смита и Тарского [1].

[2]) Этот результат получен Биркгофом и Уламом. См. Биркгоф [1], а также фон Нейман [2].

Действительно, каждое множество $A \in \mathfrak{A}$ представляется в виде

$$A = (G - A_1) \cup A_2,$$

где G — открытое множество, а A_1, $A_2 \in \Delta$. Следовательно, $[A] = [G]$, т. е. каждый элемент алгебры $\mathfrak{A}'$ представляется в виде $[G]$, где G — открытое множество в пространстве X.

Пусть $A'_t = [G_t]$ (G_t открыты) — некоторое индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{A}'$. Пусть G — теоретико-множественное объединение всех множеств G_t, и пусть $A' = [G]$. Тогда элемент A' является объединением всех A'_t в алгебре $\mathfrak{A}'$. Это следует из условий (J_1^*), (J_2^*) § 18. В самом деле, $G_t - G = \wedge \in \Delta$ для каждого t. Пусть теперь $G_t - A_0 \in \Delta$ для всех t ($A_0 \in \mathfrak{A}$). Множества $G_t - A_0$ являются множествами первой категории и открыты в индуцированной топологии объединения $G - A_0$, поскольку $G_t - A_0 = (G - A_0) \cap G_t$. Согласно известной топологической теореме[1]), объединение $G - A_0$ тоже является множеством первой категории, т. е. $G - A_0 \in \Delta$.

Заметим, что мы доказали уже и коммутативность (и для несчетных множеств T тоже)

$$(1') \qquad \bigcup_{t \in T} [G_t] = \left[\bigcup_{t \in T} G_t\right],$$

но только для открытых множеств G_t. В общем случае эта несчетная коммутативность не сохраняется для произвольных множеств из алгебры $\mathfrak{A}$ (например, для одноточечных подмножеств при условии, что X плотно в себе). Переходя к дополнениям, мы получаем также следующий закон коммутативности (несчетной) для замкнутых множеств F_t:

$$(1'') \qquad \bigcap_{t \in T} [F_t] = \left[\bigcap_{t \in T} F_t\right].$$

Отметим, что в случае когда X имеет счетную базу открытых множеств, полнота алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$ может быть получена

---

[1]) Банах [3]. См также Куратовский [3], стр. 87.

из теоремы 20.5, поскольку булева σ-алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ удовлетворяет σ-цепному условию.

Эта алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ часто называется *алгеброй борелевских подмножеств пространства X по модулю множеств первой категории.*

Г) Предположим, что m есть $\mathfrak{m}$-мера на булевой $\mathfrak{m}$-алгебре. Из неравенства (7) § 20 немедленно следует, что множество всех элементов, мера m которых равна нулю, является $\mathfrak{m}$-идеалом.

В частности, если m есть σ-мера на булевой σ-алгебре $\mathfrak{A}$, то множество Δ всех элементов меры m, равной нулю, является σ-идеалом. По теореме 21.1 алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ является булевой σ-алгеброй. Однако если σ-мера m конечна (или, более общим образом, σ-конечна), то $\mathfrak{A}/\Delta$ является полной булевой алгеброй [1]).

Это немедленно следует из примера Н § 20, поскольку формула

$$m'([A]_\Delta) = m(A) \text{ для } A \in \mathfrak{A}.$$

определяет на алгебре $\mathfrak{A}/\Delta$ строго положительную σ-меру, и m' является конечной (σ-конечной) мерой, если таковой является m.

Если $\mathfrak{A}$ является σ-полем подмножеств (пространства X), измеримых по отношению к σ-мере m, то алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$ часто называют *алгеброй измеримых подмножеств пространства X по модулю множеств меры нуль.*

Д) Результат, полученный в примере Г, можно усилить следующим образом: если m — любая конечная мера на σ-полной булевой алгебре $\mathfrak{A}$ и Δ — идеал, состоящий из элементов, m-мера которых равна нулю, то $\mathfrak{A}/\Delta$ является полной булевой алгеброй [2]).

Это мгновенно вытекает из приведенной далее теоремы 21.3, которой мы предпошлем следующую лемму.

21.2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева $\mathfrak{m}$-алгебра, Δ — идеал в алгебре $\mathfrak{A}$ и $\{A_t\}_{t \in T}$ — любое $\mathfrak{m}$-индексированное множество непересекающихся элементов в алгебре $\mathfrak{A}/\Delta$. Если идеал Δ является*

---

[1]) Веккен [1]. См. также Биркгоф [3].
[2]) Смит и Тарский [1].

$\mathfrak{m}'$-полным для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$ и объединение

$$A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}/\Delta} A_t \tag{2}$$

существует, то объединение

$$\bigcup_{t \in T'}^{\mathfrak{A}/\Delta} A_t$$

тоже существует для каждого $T' \subset T$[1]).

Удобно считать, что T есть множество всех порядковых чисел мощности меньше $\mathfrak{m}$. Пусть $A_t = [B_t]$ и $A = [B]$ для некоторых элементов B_t, $B \in \mathfrak{A}$. Элементы

$$C_t = (B_t - \bigcup_{t' < t} B_{t'}) \cap B \in \mathfrak{A}$$

не пересекаются, и $[C_t] = A_t$.

Положим $C = \bigcup_{t \in T'}^{\mathfrak{A}} C_t$. По определению

$$[C] \subset A, \quad A_t \subset [C] \text{ для всех } t \in T',$$
$$[C] \cap A_t = \wedge \quad \text{для всех} \quad t \in T - T'.$$

Тогда $[C] = \bigcup_{t \in T'}^{\mathfrak{A}/\Delta} A_t$. Действительно, предположим, что это равенство не выполняется, т. е. существует такой элемент $D \neq \wedge$ $(D \in \mathfrak{A}/\Delta)$, что

$$D \subset [C] \quad \text{и} \quad A_t \subset [C] - D \quad \text{для} \quad \text{всех } t \in T'.$$

Значит, $A_t \subset A - D \neq A$ для каждого $t \in T$, что противоречит равенству (2).

21.3. *Если $\mathfrak{A}$ — булева $\mathfrak{m}$-алгебра, Δ — идеал, который является $\mathfrak{m}'$-полным для всех бесконечных кардинальных чисел $\mathfrak{m}' < \mathfrak{m}$, и алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ удовлетворяет $\mathfrak{m}$-цепному условию, то алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ является полной*[2]).

Пусть $\{A_t\}_{t \in T'}$ — любое индексированное множество непересекающихся ненулевых элементов алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$.

Множество $\{A_t\}_{t \in T'}$ можно расширить до максимального индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ непересекающихся

---

[1]) Смит и Тарский [1].
[2]) Смит и Тарский [1].

ненулевых элементов в алгебре $\mathfrak{A}/\Delta$. В силу максимальности имеем равенство $\bigcup_{t \in T} A_t = \vee$. Поскольку алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ удовлетворяет $\mathfrak{m}$-цепному условию, то $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. По теореме 21.2 объединение $\bigcup_{t \in T'} A_t$ существует. Комбинируя последний результат с теоремой 20.1, мы получаем, что $\mathfrak{A}/\Delta$ — полная алгебра.

Примеры. Е) Пусть $\mathfrak{A}$ есть σ-поле всех борелевских множеств вещественных чисел, Δ_0 — идеал всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ лебеговой меры нуль, а Δ_1 — идеал всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ первой категории. Полные булевы алгебры $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}/\Delta_0$ и $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\Delta_1$ не изоморфны[1]).

В самом деле, на алгебре $\mathfrak{A}_0$ существует ненулевая σ-конечная мера m, а именно мера, индуцированная естественным образом лебеговой мерой μ:

$$m([A]) = \mu(A) \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

С другой стороны, на алгебре $\mathfrak{A}_1$ каждая σ-конечная σ-мера тождественно равна нулю. Действительно, каждая σ-конечная σ-мера m на $\mathfrak{A}_1$ однозначно определяет σ-конечную σ-меру μ на $\mathfrak{A}$ [см. (3)], причем эта мера μ равняется нулю на всех множествах $A \in \Delta_1$. Согласно одной из теорем теории меры[2]), множество X всех вещественных чисел является объединением двух таких непересекающихся борелевских множеств A_0 и A_1, что мера μ на A_0 равна нулю, а $A_1 \in \Delta_1$. Следовательно,

$$m([X]_{\Delta_1}) = m([A_0]_{\Delta_1}) + m([A_1]_{\Delta_1}) = \mu(A_0) + m(\wedge) = 0.$$

Это доказывает, что мера m тождественно равна нулю [см. свойства (1) и (4) из § 3][3]).

Так как существование σ-конечной ненулевой σ-меры на булевой σ-алгебре является инвариантным относительно

---

[1]) Это замечание сделали Биркгоф и Улам. См. Биркгоф [3].

[2]) См., например, Марчевский [1] или Марчевский и Сикорский [2].

[3]) Относительно другого доказательства того факта, что на $\mathfrak{A}_1$ не существует никакой σ-меры, см. Хорн и Тарский [1]. Отсутствие хотя бы одной строго положительной σ-меры на $\mathfrak{A}_1$ и неизоморфность алгебр $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ вытекает также из примеров В и Г § 29.

изоморфизмов, то мы получаем, что алгебры $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$ не изоморфны.

Ж) Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — поле всех множеств вещественных чисел, Δ_0 является σ-идеалом всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ лебеговой меры нуль, а Δ_1 — σ-идеалом всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ первой категории. Из гипотезы континуума $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ вытекает, что булевы σ-алгебры $\mathfrak{A}/\Delta_0$ и $\mathfrak{A}/\Delta_1$ изоморфны.

В самом деле, каждое множество первой категории является подмножеством F_σ-множества[1]) первой категории. Класс всех F_σ-множеств первой категории имеет мощность $2^{\aleph_0}$, поэтому, согласно гипотезе континуума, этот класс можно представить в виде трансфинитной последовательности $\{B_t\}_{t<\Omega}$, где Ω — наименьшее несчетное порядковое число. С помощью этой последовательности мы определим по индукции такую трансфинитную последовательность $\{A_t\}_{t<\Omega}$ непересекающихся несчетных множеств первой категории, что

(4) для каждого множества $A \in \Delta_1$ существует такое порядковое число $t' < \Omega$, что $A \subset \bigcup\limits_{t<t'} A_t$.

Именно, пусть A_0 — произвольное несчетное множество в Δ_1. Предположим, что множества $A_{t'}$ определены для всех $t' < t$. Поскольку объединение $\bigcup\limits_{t'<t} A_{t'}$ является множеством первой категории, то его дополнение содержит несчетное множество C_t первой категории. Положим $A_t = C_t \cup (B_t - \bigcup\limits_{t'<t} A_{t'})$.

Используя G_δ-множества[2]) меры нуль вместо F_σ-множеств первой категории, мы определим такую трансфинитную последовательность $\{A'_t\}_{t<\Omega}$ непересекающихся несчетных множеств меры нуль, что

(5) для каждого множества $A \in \Delta_0$ существует такое порядковое число $t' < \Omega$, что $A \subset \bigcup\limits_{t<t'} A'_t$.

---

[1]) Говорят, что подмножество топологического пространства является F_σ-*множеством*, если оно является объединением последовательности замкнутых множеств.

[2]) Говорят, что подмножество топологического пространства является G_δ-*множеством*, если оно является пересечением последовательности открытых множеств.

Из условий (4) и (5) следует, что

$$\bigcup_{t<\Omega} A_t = \bigcup_{t<\Omega} A'_t = X$$

(где X есть множество всех вещественных чисел).

Из гипотезы континуума следует, что множества A_t и A'_t имеют одинаковую мощность. Поэтому существует такое взаимно однозначное отображение φ множества X на себя, что

$$\varphi(A_t) = A'_t \quad \text{для каждого } t < \Omega.$$

Отсюда, учитывая условия (4) и (5), следует, что $A \in \Delta_1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(A) \in \Delta_0$ [1]). Значит, отсюда вытекает, что формула

$$h([A]_{\Delta_1}) = [\varphi(A)]_{\Delta_0} \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}$$

определяет изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}/\Delta_1$ на алгебру $\mathfrak{A}/\Delta_0$.

Следующая теорема будет использована в примере 3.

21.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех подмножеств пространства X, и пусть Δ — идеал (поля $\mathfrak{F}$), содержащий все одноточечные подмножества пространства X. Предположим, что существуют два $\mathfrak{m}$-индексированных множества $\{A_t\}_{t \in T}$ и $\{B_t\}_{t \in T}$, таких, что*

(6) $A_t \cap A_{t'} = \wedge$ *при* $t \neq t'$ *и* $A_t - B_t \notin \Delta$ $(t, t' \in T)$,

(7) *для каждого* $B \in \Delta$ *существует такое* $t \in T$, *что* $B \subset B_t$.

Тогда алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не является $\mathfrak{m}$-полной [2]).

А именно, в алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$ не существует объединения $\bigcup_{t \in T} [A_t]$, поскольку, если для некоторого $A \in \mathfrak{F}$

$$[A_t] \subset [A] \text{ при всех } t \in T,$$

то существует такое $C \in \mathfrak{F}$, что

$$[C] \subset [A] \neq [C] \text{ и } [A_t] \subset [C] \text{ для всех } t \in T.$$

---

[1]) Существование отображения φ с указанными свойствами доказано Серпинским [2, 6]. См. также Марчевский [11], Окстоби и Улам [1].

[2]) Сикорский [10].

Действительно, так как $A_t - B_t \notin \Delta$ и $A_t - A \in \Delta$, то множества

$$C_t = (A_t - B_t) - (A_t - A)$$

непусты. Они попарно не пересекаются, поскольку являются подмножествами непересекающихся множеств A_t. Возьмем по одной точке x_t из каждого множества C_t. Пусть B — множество всех точек x_t $(t \in T)$ и $C = A - B$. Так как $A_t - C \subset (A_t - A) \cup (x_t) \in \Delta$, то имеют место включения $[A_t] \subset [C] \subset [A]$. С другой стороны, $B = A - C \notin \Delta$ в силу условия (7). В самом деле, B не содержится ни в одном из множеств B_t, так как $x_t \in B$ и $x_t \notin B_t$. Это доказывает, что $[C] \neq [A]$.

Примеры. 3) Пусть $\mathfrak{A}$, Δ_0 и Δ_1 имеют тот же смысл, что и в примере Ж. Булевы σ-алгебры $\mathfrak{A}/\Delta_0$ и $\mathfrak{A}/\Delta_1$ не являются $2^{\aleph_0}$-полными.

Это следует немедленно из теоремы 21.4. и того факта, что множество всех вещественных чисел является объединением $2^{\aleph_0}$ непересекающихся неизмеримых множеств (или $2^{\aleph_0}$ непересекающихся множеств, не обладающих свойством Бэра). Существование такого разбиения вытекает, например, из следующей общей теоретико-множественной леммы (в случае когда $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$, а $\mathfrak{L}$ — класс всех борелевских множеств вещественных чисел мощности $2^{\aleph_0}$).

Если $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{L}$ — такой класс подмножеств пространства X, что $\overline{\overline{\mathfrak{L}}} = \mathfrak{m}$ и $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{m}$ для каждого $B \in \mathfrak{L}$, то существует такой класс $\mathfrak{K}$ непересекающихся множеств пространства X, что $\overline{\overline{\mathfrak{K}}} = \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{A \cap B}} = \mathfrak{m}$ для любых $A \in \mathfrak{K}$ и $B \in \mathfrak{L}$, а пространство X является объединением всех множеств $A \in \mathfrak{K}$ [1]).

Действительно, пусть T — множество всех порядковых чисел мощности меньше $\mathfrak{m}$, $\{x_t\}_{t \in T}$ — трансфинитная последовательность, образованная всеми точками пространства X, а $\{B_t\}_{t \in T}$ — такая трансфинитная последователь-

---

[1]) Эта лемма является обобщением рассуждений в доказательстве теоремы Бернштейна о существовании вполне несовершенных множеств. См., например, Куратовский [3], стр. 524.

ность, образованная всеми множествами из класса $\mathfrak{L}$, что каждое множество $B \in \mathfrak{L}$ встречается в последовательности $\{B_t\}_{t \in T}$ $\mathfrak{m}$ раз. Теперь мы определим точки $x_{t_1, t_2} \in X$, где $t_1 \leqslant t_2$ $(t_1, t_2 \in T)$, при помощи трансфинитной индукции. Допустим, что точки

(8) $\quad x_{t_1', t_2'}$, где или $t_2' < t_2$, или $t_2' = t_2$ и $t_1' < t_1$,

уже определены. Тогда x_{t_1, t_2} будет первой точкой в трансфинитной последовательности $\{x_t\}_{t \in T}$, которая принадлежит B_{t_1} и отлична от всех точек типа (8). Пусть A_t — множество всех точек $x_{t, t'}$ $(t \leqslant t' \in T)$. Тогда класс $\mathfrak{K}$ всех множеств A_t обладает требуемыми свойствами.

И) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех подмножеств несчетного пространства X. Не решена проблема, существует ли неглавный σ-идеал Δ, такой, что алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ полна [1]).

21.5. *Пусть Δ есть $\mathfrak{m}$-идеал $\mathfrak{m}$-дистрибутивной $2^{\mathfrak{m}}$-полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной тогда и только тогда, когда Δ $2^{\mathfrak{m}}$-полно* [2]).

Пусть $\{A_{t, s}\}_{t \in T, s \in S}$ — любое $\mathfrak{m}$-индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{A}/\Delta$. Тогда $A_{t, s} = [B_{t, s}]$ для некоторых $B_{t, s} \in \mathfrak{A}$. Из $\mathfrak{m}$-дистрибутивности алгебры $\mathfrak{A}$ вытекает равенство

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} B_{t, s} = \bigcup_{\varphi \in S^T} \bigcap_{t \in T} B_{t, \varphi(t)}.$$

Если Δ — $2^{\mathfrak{m}}$-полный идеал, то, согласно теореме 21.1, операция [ ] коммутирует с вышеупомянутыми операциями объединения и пересечения. Это доказывает, что аналогичное тождество имеет место и для $A_{t, s}$, т. е. $\mathfrak{A}/\Delta$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй.

Для доказательства второй части теоремы 21.5 допустим, что T, S — множества мощности $\mathfrak{m}$. Удобно представить $2^{\mathfrak{m}}$-индексированное множество в виде $\{B_\varphi\}_{\varphi \in S^T}$.

Допустим, что $\mathfrak{m}$-идеал Δ не является $2^{\mathfrak{m}}$-идеалом. Тогда существует такое индексированное множество

---

[1]) См. Сикорский [10].

[2]) Пирс [3]. Часть этой теоремы независимо доказана Смитом и Тарским [1]. См. также Сикорский [21].

$\{B_\varphi\}_{\varphi \in S^T}$ непересекающихся элементов из идеала Δ, что объединение

$$A = \bigcup_{\varphi \in S^T} B_\varphi$$

не принадлежит идеалу Δ. Для любых $t \in T$ и $s \in S$ через $A_{t,s}$ обозначим объединение всех элементов B_φ, для которых $\varphi(t) = s$. Поскольку элементы B_φ не пересекаются, то

$$B_\varphi = \bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)},$$

так как элемент в правой части равенства содержится в A, содержит B_φ и не пересекается со всеми $B_{\varphi'}$ при $\varphi' \neq \varphi$. Таким образом,

$$A = \bigcup_{\varphi \in S^T} \bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} = \bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s},$$

так как $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй. Значит,

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} [A_{t,s}] = [A] \neq \wedge,$$

поскольку $A \notin \Delta$. С другой стороны,

$$\bigcup_{\varphi \in S^T} \bigcap_{t \in T} [A_{t, \varphi(t)}] = \bigcup_{\varphi \in S^T} [B_\varphi] = \wedge,$$

поскольку $B_\varphi \in \Delta$ для каждого $\varphi \in S^T$. Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{A}/\Delta$ не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной.

Мы определили понятие $\mathfrak{m}$-идеалов и $\mathfrak{m}$-фильтров только для случая булевых $\mathfrak{m}$-алгебр $\mathfrak{A}$. Если отказаться от требования $\mathfrak{m}$-полноты алгебры $\mathfrak{A}$, то определение столкнется с затруднением, поскольку имеются три различных обобщения.

(D) Говорят, что идеал Δ (фильтр ∇) алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-идеалом ($\mathfrak{m}$-фильтром), если для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ элементов идеала Δ (фильтра ∇) существует такой элемент $A \in \Delta$ ($A \in \nabla$), что $A_t \subset A$ ($A \subset A_t$) для всех $t \in T$.

(D′) Говорят, что идеал Δ (фильтр ∇) алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-идеалом ($\mathfrak{m}$-фильтром), если для каждого $\mathfrak{m}$-ин-

дексированного множества $\{A_t\}_{t\in T}$ элементов идеала Δ (фильтра ∇) из существования объединения $\bigcup\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ (пересечения $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t$) следует, что оно принадлежит Δ (фильтру ∇).

(D″) Говорят, что идеал Δ (фильтр ∇) является $\mathfrak{m}$-идеалом ($\mathfrak{m}$-фильтром) алгебры $\mathfrak{A}$, если для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t\in T}$ элементов из Δ (из ∇) объединение $\bigcup\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ (пересечение $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t$) существует и принадлежит идеалу Δ (фильтру ∇).

К сожалению, эти определения не эквивалентны. Для некоторых задач наиболее удобным является определение (D), для других — определение (D′) и т. д. Например, определение (D′) наиболее удобно для проблемы представления, рассматриваемой в § 24 (см. стр. 159), а определение (D) наиболее удобно для другой проблемы представления, рассматриваемой в § 29.

В этой книге мы почти всюду будем рассматривать $\mathfrak{m}$-идеалы и $\mathfrak{m}$-фильтры только в булевых $\mathfrak{m}$-алгебрах. В этом случае все определения (D), (D′), (D″) совпадают с определением, приведенным в начале § 21. В том случае, когда мы не будем требовать $\mathfrak{m}$-полноты рассматриваемой алгебры, мы будем точно указывать, какое именно определение мы имеем в виду.

Мы охарактеризуем $\mathfrak{m}$-идеалы и $\mathfrak{m}$-фильтры через свойства соответствующих открытых и замкнутых подмножеств пространства Стоуна (см. стр. 46). Для этого мы должны ввести следующие определения.

Говорят, что открытое (замкнутое) подмножество B топологического пространства имеет *нижний* (*верхний*) *характер* $\mathfrak{m}$, если для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{B_t\}_{t\in T}$ открыто-замкнутых подмножеств из включения $B_t\subset B$ для всех $t\in T$ следует, что B содержит замыкание объединения множеств B_t (из включения $B\subset B_t$ для всех $t\in T$ следует, что B содержится во внутренности пересечения всех множеств B_t).

В следующей теореме подразумевается определение (D).

21.6. *Идеал* Δ (фильтр ∇) *булевой алгебры* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$-*идеалом* ($\mathfrak{m}$-*фильтром*) *тогда и только тогда, когда он*

соответствует открытому (замкнутому) множеству, нижний (верхний) характер которого равен $\mathfrak{m}$.

Легкое доказательство оставлено читателю.

Пример. К) Если $\mathfrak{A}$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X всех порядковых чисел, не превосходящих Ω (где Ω — первое несчетное порядковое число) с обычной порядковой топологией, то нигде не плотное одноточечное множество (Ω) имеет верхний характер $\aleph_0$. Плотное открытое множество $X-(\Omega)$ имеет нижний характер $\aleph_0$.

22. $\mathfrak{m}$-гомоморфизмы. Связь с пространствами Стоуна

Пусть h — гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$.

Предположим, что

(1) $$A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$$

и существует объединение

(2) $$\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t).$$

Тогда имеет место включение

(3) $$h(A) \supset \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t),$$

поскольку равенство (1) означает, что $A_t \subset A$ и, следовательно, $h(A_t) \subset h(A)$ для каждого $t \in T$. Мы скажем, что гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ *сохраняет* объединение (1), если существует объединение (2) и

(4) $$h(A) = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} h(A_t).$$

Предположим теперь, что

(1′) $$A = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t,$$

и существует пересечение

(2′) $$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t).$$

Тогда имеет место включение

$$(3') \qquad h(A) \subset \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t),$$

поскольку $A \subset A_t$ и, значит, $h(A) \subset h(A_t)$ для каждого $t \in T$. Мы будем говорить, что гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$ *сохраняет* пересечение (1′), если существует пересечение (2′) и

$$(4') \qquad h(A) = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t).$$

Пусть $\mathfrak{m}$ — фиксированное кардинальное число. Говорят, что гомоморфизм h является *$\mathfrak{m}$-полным гомоморфизмом* (или просто *$\mathfrak{m}$-гомоморфизмом*) *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в алгебру* $\mathfrak{A}'$, если он сохраняет все объединения (1) для $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Из законов Моргана [см. (3) § 19] следует, что h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет все пересечения (1′) для $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Говорят, что гомоморфизм h является *полным гомоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A}$ *в алгебру* $\mathfrak{A}'$, если он является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$.

Аналогичную терминологию примем и для изоморфизмов.

Если существует $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$, то говорят, что алгебра $\mathfrak{A}'$ является *$\mathfrak{m}$-гомоморфным образом алгебры* $\mathfrak{A}$.

Заметим, что гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда

(а) из равенства $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge$ (где $A_t \in \mathfrak{A}$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$) следует, что $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t) = \wedge$.

Необходимость условия (а) очевидна. Чтобы доказать достаточность, предположим, что имеет место равенство (1). Тогда $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} (A - A_t) = \wedge$ и, согласно условию (а), $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} (h(A) - h(A_t)) = \wedge$. Отсюда вытекает равенство (4), поскольку $A_t \subset A$ и, значит, $h(A_t) \subset h(A)$ для каждого $t \in T$.

Наиболее часто мы будем пользоваться понятием $\mathfrak{m}$-гомоморфизма и $\mathfrak{m}$-изоморфизма, когда алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ являются $\mathfrak{m}$-полными булевыми алгебрами. Заметим в этом случае, что если h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом, то множество $h^{-1}(\wedge)$ (т. е. множество всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) = \wedge$) будет $\mathfrak{m}$-идеалом алгебры $\mathfrak{A}$, а множество $h^{-1}(\vee)$ (т. е. множество всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $h(A) = \vee$) является $\mathfrak{m}$-фильтром алгебры $\mathfrak{A}$.

В следующей теореме подразумевается определение $\mathfrak{m}$-фильтра в смысле (D′).

22.1. *Пусть X — множество $\mathfrak{m}$-полных максимальных фильтров булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ через $h(A)$ обозначим множество всех фильтров $\nabla \in X$, для которых $A \in \nabla$. Тогда h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств пространства X.*

Если $\mathfrak{A}$ есть $\mathfrak{m}$-полная булева алгебра, то класс $\mathfrak{F}$ всех множеств $h(A)$, где $A \in \mathfrak{A}$, является приведенным $\mathfrak{m}$-полем подмножеств пространства X.

Если для каждого $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ существует такой фильтр $\nabla \in X$, что $A \in \nabla$, то h является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$.

Согласно теореме 8.1, достаточно доказать, что если имеет место равенство (1′), то $h(A)$ является теоретико-множественным пересечением множеств $h(A_t)$ $(t \in T$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m})$.

Если ∇ принадлежит этому пересечению, то $\nabla \in h(A_t)$ для каждого $t \in T$, т. е. $A_t \in \nabla$ для всех $t \in T$. Поскольку ∇ является $\mathfrak{m}$-фильтром, то $A \in \nabla$, т. е. $\nabla \in h(A)$. Это доказывает, что $\bigcap_{t \in T} h(A_t) \subset h(A)$. Обратное включение тоже справедливо [см. (3′)].

Примеры. А) Как следует из равенства (6) § 18, каждый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$ является полным. Это замечание не имеет места, если слово „на“ заменить на „в“. Например, если $\mathfrak{B}$ — поле (подмножеств множества X неотрицательных целых чисел), определенное в примере А § 18, то тождественный изоморфизм

алгебры $\mathfrak{B}$ в поле $\mathfrak{B}'$ всех подмножеств пространства X не является σ-полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$ в поле $\mathfrak{B}'$, поскольку счетное объединение в алгебре $\mathfrak{B}$ не совпадает с теоретико-множественным объединением.

С другой стороны, если h — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, то из равенства (4) всегда вытекает равенство (1) [из равенства (4′) всегда вытекает равенство (1′)]. Это утверждение может быть непосредственно получено из определения бесконечных объединений и пересечений или его можно получить следующим образом. Если имеет место равенство (4), то, согласно равенству (5) § 18, имеем также $h(A) = \bigcup_{t \in T}^{h(\mathfrak{A})} h(A_t)$. Поскольку h является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $h(\mathfrak{A})$, то последнее равенство эквивалентно (1). Доказательство для пересечения получаем по двойственности.

Б) Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, и для каждого $A \in \mathfrak{A}$ пусть $h(A)$ — класс всех атомов, содержащихся в A. Тогда h является полным гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств множества X всех атомов алгебры $\mathfrak{A}$.

Это немедленно вытекает из теоремы 22.1, поскольку каждый атом можно отождествить с максимальным главным фильтром, а каждый главный фильтр является $\mathfrak{m}$-полным для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$.

Заметим, что если алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полной, то по теореме 22.1 $h(\mathfrak{A})$ является $\mathfrak{m}$-полем подмножеств пространства X. Если $\mathfrak{A}$ — полная булева алгебра, то $h(\mathfrak{A})$ является полным полем (подмножеств пространства X), содержащим все одноточечные множества (образы атомов!), и таким образом является полем всех подмножеств пространства X.

В) Из законов дистрибутивности (9) § 19 следует, что гомоморфизм h, определенный формулой

$$h(A) = A \cap E \text{ для любого } A \in \mathfrak{A},$$

является полным гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на факторалгебру $\mathfrak{A}|E$ (см. пример А § 10).

Г) Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — две булевы $\mathfrak{m}$-алгебры, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$ и

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \vee_{\mathfrak{A}}, \quad A_{t_1} \cap A_{t_2} = \wedge_{\mathfrak{A}} \quad \text{для } t_1 \neq t_2,$$

$$\bigcup_{t \in T} A'_t = \vee_{\mathfrak{A}'}, \quad A'_{t_1} \cap A'_{t_2} = \wedge_{\mathfrak{A}'} \quad \text{для } t_1 \neq t_2.$$

Если h_t является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A} \mid A_t$ в (на) $\mathfrak{A}' \mid A'_t$ для каждого $t \in T$, то формула

$$h(A) = \bigcup_{t \in T} h_t(A \cap A_t) \quad (A \in \mathfrak{A})$$

определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в (на) алгебру $\mathfrak{A}'$. Если каждый гомоморфизм h_t является изоморфизмом, то h тоже является изоморфизмом.

Д) Полная булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна прямому объединению полных булевых алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ тогда и только тогда, когда существуют такие непересекающиеся элементы $A_t \in \mathfrak{A}$ $(t \in T)$, что

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \vee,$$

а $\mathfrak{A} \mid A_t$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_t$ для каждого $t \in T$. А именно, если h_t — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A} \mid A_t$ на $\mathfrak{A}_t$, то формула

$$h(A) = \{h_t(A \cap A_t)\}_{t \in T}$$

определяет изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ на прямое объединение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

Предыдущее замечание справедливо также, если все алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-полны, а $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$.

Е) Из равенств (1) § 21 следует, что если Δ является $\mathfrak{m}$-полным идеалом (если ∇ является $\mathfrak{m}$-полным фильтром) некоторой $\mathfrak{m}$-полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то естественный гомоморфизм $h(A) = [A]$ является $\mathfrak{m}$-полным гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$ (на $\mathfrak{A}/\nabla$).

Ж) Пусть $\mathfrak{A}_1$ — булева алгебра всех регулярных замкнутых подмножеств топологического пространства X (см. пример Б § 1 и пример В § 20). Пусть $\mathfrak{A}$ — поле всех борелевских подмножеств пространства X, а Δ — идеал всех множеств $A \in \mathfrak{A}$ первой категории (см. при-

мер В § 21). Знакомый с топологией читатель легко может проверить, что отображение

$$h(A)=[A]_\Delta \quad \text{для } A\in\mathfrak{A}_1 \tag{5}$$

является полным гомоморфизмом полной булевой алгебры $\mathfrak{A}_1$ на полную булеву алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$. Если в пространстве X нет открытых непустых подмножеств первой категории, то h является изоморфизмом[1]).

Аналогично если $\mathfrak{A}_2$ — булева алгебра всех регулярных открытых подмножеств пространства X, то отображение (5) (в котором $\mathfrak{A}_1$ заменена на $\mathfrak{A}_2$) является полным гомоморфизмом полной булевой алгебры $\mathfrak{A}_2$ на полную булеву алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$.

З) Если $\mathfrak{A}'_0$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}'$ и h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, а $h(\mathfrak{A})$ является подмножеством алгебры $\mathfrak{A}'_0$, то h является также $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'_0$. Это следует из (5) § 18.

И) Пусть h_0 — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.

Если существует некоторое существенно бесконечное объединение (1) в алгебре $\mathfrak{A}$, причем $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$, то h_0 не является $\mathfrak{m}$-изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{A}'$ всех подмножеств пространства X. В самом деле, тогда не выполняется равенство (4). Действительно, предположим, что равенство (4) справедливо, т. е. замкнутое множество $h_0(A)$ является объединением открытых множеств $h_0(A_t)$. Поскольку X — компактное пространство, то должна существовать такая конечная последовательность $t_1, \ldots, \ldots, t_n\in T$, что $h_0(A)=h_0(A_{t_1})\cup\ldots\cup h_0(A_{t_n})$. Поскольку h_0 — изоморфизм, то получаем равенство $A=A_{t_1}\cup\ldots\cup A_{t_n}$, что противоречит предположению о том, что объединение (1) существенно бесконечно.

Конечно, справедливым является тот факт, что h_0 есть $\mathfrak{m}$-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{F}_0$ (см. пример А), но не алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Поэтому всегда нужно отме-

---

[1]) См. Биркгоф [2], стр. 250.

чать булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ в выражении вида „h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом ($\mathfrak{m}$-изоморфизмом) алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$“.

Говорят, что подмножество S топологического пространства X является *$\mathfrak{m}$-замкнутым* (*$\mathfrak{m}$-открытым*), если оно является пересечением (объединением) не более чем $\mathfrak{m}$ открыто-замкнутых подмножеств. Очевидно, что $\mathfrak{m}$-замкнутое ($\mathfrak{m}$-открытое) множество является замкнутым (открытым).

Мы напомним, что для любого подмножества S топологического пространства символом $\mathbf{C}S$ и $\mathbf{I}S$ обозначают соответственно замыкание и внутренность множества S.

Мы завершим замечание из примера И следующей теоремой.

22.2. *Пусть h_0 — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.*

Для любых элементов A, A_t алгебры $\mathfrak{A}$ равенство

$$A = \bigcup_{t \in T} A_t \quad (\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}) \tag{6}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$h_0(A) = \mathbf{C} \bigcup_{t \in T} h_0(A_t), \tag{7}$$

т. е. когда $\mathfrak{m}$-замкнутое множество

$$S = h_0(A) - \bigcup_{t \in T} h_0(A_t) \tag{8}$$

нигде не плотно и $h_0(A_t) \subset h_0(A)$ для любого $t \in T$.

Аналогичным образом равенство

$$A = \bigcap_{t \in T} A_t \quad (\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}) \tag{6'}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$h_0(A) = \mathbf{I}\left(\bigcup_{t \in T} h_0(A_t)\right), \tag{7'}$$

т. е. когда $\mathfrak{m}$-замкнутое множество

$$S' = \bigcap_{t \in T} h_0(A_t) - h_0(A) \tag{8'}$$

нигде не плотно и $h_0(A) \subset h_0(A_t)$ для каждого $t \in T$.

В формулах (7), (8), (7′), (8′) знаки $\bigcup$ и $\bigcap$ обозначают соответственно теоретико-множественные объединение и пересечение.

Множество (8) $\mathfrak{m}$-замкнуто, так как оно является пересечением открыто-замкнутых множеств $h_0(A)$ и $h_0(-A_t)$, $t \in T$.

Пусть $S_0 = h_0(A) - \mathbf{C} \bigcup_{t \in T} h_0(A_t)$. По определению S_0 открыто и

$$S_0 = \mathbf{I}S,$$

где S определяется формулой (8).

Если имеет место равенство (6), то $A_t \subset A$ и, значит, $h_0(A_t) \subset h_0(A)$ для каждого $t \in T$. Таким образом, $\bigcup_{t \in T} h_0(A_t) \subset h_0(A)$ и

$$\mathbf{C} \bigcup_{t \in T} h_0(A_t) \subset \mathbf{C} h_0(A) = h_0(A).$$

Открытое множество S_0 пусто, ибо если это не так, то найдется такой элемент $A_0 \in \mathfrak{A}$, что $A_0 \neq \wedge$ и $h(A_0) \subset S$. Тогда $h(A_0) \subset h(A)$ и $h(A_0) \cap h(A_t) = \wedge$. Следовательно, $A_0 \subset A$ и $A_0 \cap A_t = \wedge$, т. е. $A_t \subset A - A_0 \neq A$ для каждого $t \in T$, что противоречит равенству (6).

Если имеет место равенство (7), то $h_0(A_t) \subset h_0(A)$ для каждого $t \in T$ и $\mathbf{I}S = S_0 = \wedge$, т. е. S нигде не плотно.

Если $h_0(A_t) \subset h_0(A)$ для каждого $t \in T$, то $A_t \subset A$ для каждого $t \in T$. Если в дополнение S еще и нигде не плотно, то имеет место равенство (6). Действительно, если это не так, то найдется такой элемент $B \subset A$, $B \neq A$, что $A_t \subset B$ для каждого $t \in T$. Положим $A_0 = A - B$. Поскольку $A_0 \neq \wedge$ и $A_t \cap A_0 = \wedge$ для каждого $t \in T$, то непустое открытое множество $h_0(A_0)$ является подмножеством множества S, т. е. S нигде не плотно.

Первая часть теоремы 22.2 доказана. Вторая часть следует из первой путем перехода к дополнениям.

Если равенство (6) имеет место, то множество (8) называется *дефектным множеством*, соответствующим объединению (6). Аналогично если имеет место равенство (6′), то множество (8′) называется *дефектным множеством*, соответствующим пересечению (6′). Согласно теореме 22.2, дефектные множества всегда нигде не плотны.

Из теоремы 22.2 непосредственно вытекает, что

22.3. *Объединение* $\bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ *существует тогда и только тогда, когда замкнутое множество*

$$B = \complement \bigcup_{t \in T} h_0(A_t)$$

открыто. В этом случае $h_0^{-1}(B) = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$.

Пересечение $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ *существует тогда и только тогда, когда открытое множество*

$$B' = \mathbf{I} \bigcap_{t \in T} h_0(A_t)$$

замкнуто. В этом случае $h_0^{-1}(B') = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$.

Следующая теорема мгновенно вытекает из теоремы 22.3.

22.4. *Булева алгебра* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$*-полной тогда и только тогда, когда в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *замыкание каждого* $\mathfrak{m}$*-открытого множества является открытым множеством или, что эквивалентно, когда внутренность каждого* $\mathfrak{m}$*-замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Алгебра $\mathfrak{A}$ *является полной алгеброй тогда и только тогда, когда ее пространство Стоуна экстремально несвязно.*

Мы напомним, что вполне несвязное топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание каждого открытого множества открыто или, что эквивалентно (путем перехода к дополнениям), если внутренность каждого замкнутого множества замкнута [1]).

Чтобы сформулировать очередную теорему, удобно ввести следующее определение.

Говорят, что подмножество A топологического пространства X является $\mathfrak{m}$-*нигде не плотным*, если оно является нигде не плотным $\mathfrak{m}$-замкнутым множеством. Вся-

[1]) Детальный обзор свойств экстремально несвязных пространств см. у Гилмана и Джерисона [1].

кое объединение не более чем $\mathfrak{m}$ множеств, $\mathfrak{m}$-нигде не плотных в пространстве X, называется *множеством* $\mathfrak{m}$-*категории*.

Легко видеть, что любое непрерывное отображение φ топологического пространства X' в другое топологическое пространство X обладает следующим свойством:

Если A является $\mathfrak{m}$-замкнутым подмножеством пространства X, то $\varphi^{-1}(A)$ будет $\mathfrak{m}$-замкнутым подмножеством пространства X'.

Говорят, что отображение φ пространства X' в пространство X является $\mathfrak{m}$-*непрерывным*, если оно непрерывно и обладает следующим свойством:

Если A — $\mathfrak{m}$-нигде не плотное подмножество пространства X, то $\varphi^{-1}(A)$ является $\mathfrak{m}$-нигде не плотным подмножеством пространства X'.

Конечно, для того чтобы доказать, что непрерывное отображение φ является $\mathfrak{m}$-непрерывным, достаточно показать, что $\varphi^{-1}(A)$ нигде не плотно для любого $\mathfrak{m}$-замкнутого нигде не плотного множества A.

Допустим теперь, что h — гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Пусть X и X' — пространства Стоуна алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно, а h_0 и h_0' — изоморфизмы соответственно алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X и алгебры $\mathfrak{A}'$ на поле $\mathfrak{F}_0'$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X'. Гомоморфизм h определяет естественным образом соответствующий гомоморфизм h' поля $\mathfrak{F}_0$ в поле $\mathfrak{F}_0'$, а именно гомоморфизм

$$h'(B) = h_0'(h(h_0^{-1}(B))) \text{ для любого } B \in \mathfrak{F}_0. \tag{9}$$

Согласно теореме 11.1 (см. также замечание на стр. 56), гомоморфизм h' индуцирован некоторым непрерывным отображением φ пространства X' в пространство X. По определению

$$\varphi^{-1}(B) = h_0' h h_0^{-1}(B) \text{ для каждого } B \in \mathfrak{F}_0.$$

22.5. *Для того чтобы h сохранял бесконечное объединение* (6) [*бесконечное пересечение* (6′)], *необходимо и достаточно, чтобы прообраз $\varphi^{-1}(S)$ соответствующего дефектного множества S был нигде не плотным.*

Таким образом, h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда φ является $\mathfrak{m}$-непрерывным отображением.

Если равенство (6) имеет место, то $A_t \subset A$ и, значит, $h'_0 h(A_t) \subset h'_0 h(A)$ для каждого $t \in T$. По теореме 22.2

$$h(A) = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t)$$

тогда и только тогда, когда множество

$$\begin{aligned} S' &= h'_0 h(A) - \bigcup_{t \in T} h'_0 h(A_t) = \\ &= h'_0 h h_0^{-1}(h_0(A)) - \bigcup_{t \in T} h'_0 h h_0^{-1}(h_0(A_t)) = \\ &= \varphi^{-1}(h_0(A_t)) - \bigcup_{t \in T} \varphi^{-1}(h_0(A_t)) = \varphi^{-1}(S) \end{aligned}$$

нигде не плотно. По двойственности мы получаем аналогичное утверждение для пересечения (6′).

Вторая часть теоремы 22.5 непосредственно следует из первой части.

Из теоремы 22.5 вытекает, что если гомоморфизм h сохраняет объединение (6) или пересечение (6′), то сохраняет также и много других объединений и пересечений, а именно h сохраняет те объединения и пересечения, чьи соответствующие дефектные множества являются подмножествами дефектного множества объединения (6) или пересечения (6′).

Иногда нам нужно рассматривать гомоморфизмы h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, которые сохраняют данное множество бесконечных объединений и пересечений. Для этой цели удобно ввести следующую терминологию.

Пусть $\mathbf{J}$ — класс непустых подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что для каждого $\mathfrak{S} \in \mathbf{J}$ существует объединение

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A, \tag{10}$$

и пусть $\mathbf{M}$ — класс непустых подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что для каждого $\mathfrak{S} \in \mathbf{M}$ существует пересечение

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A. \tag{10′}$$

Говорят, что гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в другую булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*гомоморфизмом*, если h сохраняет все бесконечные объединения (10) и пересечения (10′).

Заметим, что гомоморфизм h сохраняет объединение (10) тогда и только тогда, когда он сохраняет пересечение $\bigcap\limits_{A \in \mathfrak{S}} -A$, согласно формуле Моргана. Таким образом, сохранение некоторого класса объединений всегда можно свести к сохранению данного класса пересечений. Аналогично сохранение класса пересечений можно свести к сохранению класса объединений.

Если $\mathbf{J}$ — класс всех таких непустых подмножеств $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$, что $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{m}$ и объединение (10) существует, а $\mathbf{M}$ — класс всех таких подмножеств $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$, что $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{m}$ и пересечение (10′) существует, то ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмы совпадают с $\mathfrak{m}$-гомоморфизмами.

Пусть $\mathfrak{N}$ — класс нигде не плотных подмножеств топологического пространства X. Говорят, что отображение φ топологического пространства X' в пространство X является $\mathfrak{N}$-*непрерывным*, если для каждого $A \in \mathfrak{N}$ множество $\varphi^{-1}(A)$ нигде не плотно в пространстве X'.

Допустим, что $\mathfrak{N}$ является классом всех дефектных множеств, соответствующих бесконечным объединениям (10) и пересечениям (10′). Тогда можно следующим образом обобщить вторую часть теоремы 22.5: h является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда отображение φ является $\mathfrak{N}$-непрерывным.

Если $\mathfrak{N}$ — класс нигде не плотных подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$, то под $\mathfrak{N}$-*гомоморфизмом* мы будем понимать ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизм, где $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ являются соответственно классами всех непустых множеств $\mathfrak{S} \in \mathfrak{A}$, таких, что существует объединение (10) или пересечение (10′), а дефектные множества, соответствующие объединению (10) или пересечению (10′), принадлежат классу $\mathfrak{N}$.

Если h является изоморфизмом и ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмом ($\mathfrak{N}$-гомоморфизмом), то h называется ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*изоморфизмом* ($\mathfrak{N}$-*изоморфизмом*).

Примеры. К) Пусть $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ — булево произведение индексированного множества $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ невырожденных булевых алгебр (см. § 13). Для каждого $t\in T$ изоморфизм i_t является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{B}$.

Поскольку все булевы произведения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ изоморфны между собой, то достаточно доказать, что булево произведение

$$\{\{h_t^*\}_{t\in T}, \mathfrak{F}\},$$

определенное в (7) § 13, обладает указанным свойством. Ниже мы будем пользоваться обозначениями из § 13. Знак $\bigcup$ без индексов обозначает теоретико-множественное объединение.

Если $A=\bigcup\limits_{u\in U}^{\mathfrak{A}_t} A_u$ $(A,\ A_u\in\mathfrak{A}_t)$, то дефектное множество $S=h_t(A)-\bigcup\limits_{u\in U} h_t(A_t)\subset X_t$ нигде не плотно в пространстве X_t. Согласно известной топологической теореме, множество $S^*=h_t^*(A)-\bigcup\limits_{u\in U} h_t^*(A_u)$ нигде не плотно в декартовом произведении X всех пространств X_t. Поскольку X является пространством Стоуна поля $\mathfrak{F}$, то, согласно теореме 22.2, имеет место равенство $h_t^*(A)=\bigcup\limits_{u\in U}^{\mathfrak{F}} h_t^*(A_u)$. Аналогично мы доказываем, что h_t^* сохраняет бесконечные пересечения в алгебре $\mathfrak{A}_t$.

Л) Булева алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{m}$-цепному условию тогда и только тогда, когда в ее пространстве Стоуна X каждое нигде не плотное множество является $\mathfrak{m}$-нигде не плотным.

Пусть h_0 имеет то же значение, что и в теореме 22.2.

Предположим, что N является нигде не плотным подмножеством пространства X. Пусть $\{A_t\}_{t\in T}$ — максимальный класс таких ненулевых непересекающихся элементов в $\mathfrak{A}$, что ни одно из множеств $h_0(A_t)$ не пересекает множество N. Поскольку класс максимален, то объединение G всех $h_0(A_t)$ плотно в X, т. е. его дополнение $N_0=X-G$ является нигде не плотным множеством. Имеем включение $N\subset N_0$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{m}$-цепному условию, то $\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$ и, значит, множество $N_0=\bigcap\limits_{t\in T} h_0(-A_t)$

является $\mathfrak{m}$-замкнутым. Это доказывает, что N $\mathfrak{m}$-нигде не плотно.

Предположим теперь, что каждое нигде не плотное подмножество пространства X является $\mathfrak{m}$-нигде не плотным. Мы докажем, что для каждого индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ непересекающихся ненулевых элементов алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место неравенство $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Достаточно доказать этот факт для случая, когда $\{A_t\}_{t \in T}$ является максимальным классом непересекающихся элементов, т. е. когда объединение G всех множеств $h_0(A_t)$ плотно в X. Нигде не плотное множество $X - G$ содержится в нигде не плотном $\mathfrak{m}$-замкнутом множестве N. Таким образом, существует такое $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{B_s\}_{s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, что объединение G_0 всех множеств $h_0(B_s)$ $(s \in S)$ удовлетворяет равенству

$$G_0 = X - N \subset G.$$

Множество $h_0(B_s)$ компактно, а $h_0(A_t)$ открыто в компактном пространстве X, так что для каждого фиксированного индекса s существует только конечное число индексов t, таких, что $h_0(A_t)$ пересекает $h_0(B_s)$. Поскольку G_0 плотно в X, то каждое множество $h_0(A_t)$ пересекает не более одного множества $h_0(B_s)$. Это доказывает, что $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$.

М) Множество всех предельных точек пространства Стоуна X булевой σ-алгебры $\mathfrak{A}$ плотно в себе (напомним, что точка $x \in X$ является предельной точкой пространства X, если $x \in \mathbf{C}(X - (x))$ [1]).

Предположим противное, т. е. что множество A всех предельных точек пространства X имеет изолированную точку x_0. Тогда существует такое открыто-замкнутое множество $B \subset X$, что $A \cap B = (x_0)$. Пусть C — такое счетное подмножество множества $B - (x_0)$, что $B - C$ бесконечно. Множество C будет σ-открытым, так как оно является суммой счетной последовательности одноточечных открыто-замкнутых множеств (x), $x \in C$ (точки множества C являются изолированными). Точка x_0 принадлежит замыканиям бесконечных непересекающихся множеств C и

[1]) Семадени [1].

$B - C - (x_0)$. Это доказывает, что замыкание $C \cup (x_0)$ σ-открытого множества C не является открытым. Противоречие с предположением, что алгебра $\mathfrak{A}$ является σ-полной.

Из только что доказанного утверждения вытекает, что ни одна бесконечная сверхатомная булева алгебра не будет σ-полной.

Говорят, что максимальный идеал Δ (максимальный фильтр ∇) *сохраняет объединение* (1), если соответствующий двузначный естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$ (на $\mathfrak{A}/\nabla$) сохраняет объединение (1), т. е. выполняется следующее условие:

если $A_t \in \Delta$ (если $A_t \notin \nabla$) для каждого $t \in T$,
то $A \in \Delta$ (то $A \notin \nabla$).

Говорят, что максимальный идеал Δ (максимальный фильтр ∇) *сохраняет пересечение* (1′), если соответствующий двузначный естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$ (на $\mathfrak{A}/\nabla$) сохраняет пересечение (1′), т. е. выполняется следующее условие:

если $A_t \notin \Delta$ (если $A_t \in \nabla$) для каждого $t \in T$,
то $A \notin \Delta$ (то $A \in \nabla$).

Каждую точку пространства Стоуна X булевой алгебры $\mathfrak{A}$ можно интерпретировать как максимальный фильтр или максимальный идеал (см. § 8). Согласно этой интерпретации, теорему 22.2 можно сформулировать следующим образом: множество всех максимальных фильтров (максимальных идеалов), которые не сохраняют данное бесконечное объединение (6) или пересечение (6′), является $\mathfrak{m}$-замкнутым и нигде не плотным в пространстве Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$. В самом деле, множество S в указанной интерпретации есть множество всех максимальных фильтров (максимальных идеалов), которые не сохраняют объединение (6), а множество S' является множеством всех максимальных фильтров (максимальных идеалов), которые не сохраняют пересечение (6′) [см. (8) и (8′)].

Пример. Н) Будем рассматривать (как и выше) точки пространства Стоуна X булевой алгебры $\mathfrak{A}$ как максималь-

ные фильтры в алгебре $\mathfrak{A}$. Теоретико-множественное дополнение объединения всех $\mathfrak{m}$-нигде не плотных подмножеств пространства X является множеством всех максимальных $\mathfrak{m}$-фильтров алгебры $\mathfrak{A}$ (здесь подразумевается определение $\mathfrak{m}$-фильтров в смысле (D′) см. стр. 130).

Действительно, максимальный фильтр ∇ не является $\mathfrak{m}$-полным тогда и только тогда, когда он не сохраняет бесконечное объединение (1) при $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, т. е. если он принадлежит множеству S вида (8).

Заметим, что если $\mathfrak{A}$ является булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй, то при естественных взаимно однозначных соответствиях между максимальными идеалами, максимальными фильтрами, двузначными гомоморфизмами и двузначными мерами (§ 6) максимальные $\mathfrak{m}$-идеалы, максимальные $\mathfrak{m}$-фильтры, двузначные $\mathfrak{m}$-гомоморфизмы и двузначные $\mathfrak{m}$-меры переходят друг в друга.

Мы закончим этот параграф следующей теоремой.

22.6. *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева σ-алгебра, A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}$ и $A_1 \subset A_2$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A} \mid A_1$, то она изоморфна также и алгебре $\mathfrak{A} \mid A_2$* [1]).

Пусть h — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на факторалгебру $\mathfrak{A} \mid A_1$,

$$B_1 = -A_2 \text{ и } B_n = h(B_{n-1}) \text{ для } n = 2, 3, \ldots,$$

и пусть

$$B_0 = -\bigcup_{1 \leqslant n < \infty} B_n.$$

Таким образом,

$$\vee = B_0 \cup \bigcup_{1 \leqslant n < \infty} B_n. \tag{11}$$

По определению $B_0 \cap B_n = \wedge$ при $n = 1, 2 \ldots$. Более того, $B_1 \cap B_{m+1} = \wedge$ для $m = 1, 2, \ldots$, поскольку $B_{m+1} \subset A_1 \subset -B_1$. Следовательно, $B_2 \cap B_{m+2} = h(B_1 \cap B_{m+1}) =$

---

[1]) Сикорский [1] и Тарский [8]. Требование, чтобы $\mathfrak{A}$ была σ-полной алгеброй, существенно. См. Киносита [1], Ханф [1]. Теоретико-множественное значение этой теоремы объяснено на стр. 311.

$= \wedge$. По индукции $B_n \cap B_{n+m} = \wedge$. Таким образом, все элементы

(12) $$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots$$

не пересекаются. Утверждения (11) и (12) означают, что

(13) $$B_0 \cup \bigcup_{2 \leqslant n < \infty} B_n = \vee_{\mathfrak{A} \mid A_2} = A_2 = -B_1.$$

Пусть h_0 — тождественный изоморфизм алгебры $\mathfrak{A} \mid B_0$ на себя. Отображения $h_n = h \mid (\mathfrak{A} \mid B_n)$ являются изоморфизмами алгебры $\mathfrak{A} \mid B_n$ на $\mathfrak{A} \mid B_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно примеру Г (где $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \mid A_2$) и утверждениям (11), (12) и (13), формула

$$h'(A) = \bigcup_{0 \leqslant n < \infty} h_n(A \cap B_n) = (A \cap B_0) \cap h(A - B_0)\ (A \in \mathfrak{A})$$

определяет изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A} \mid A_2$.

§ 23. $\mathfrak{m}$-подалгебры

Пусть $\mathfrak{B}$ — подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{m}$ — некоторое бесконечное кардинальное число.

Говорят, что подалгебра $\mathfrak{B}$ является *$\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры* $\mathfrak{A}$ (или *$\mathfrak{m}$-полной подалгеброй алгебры* $\mathfrak{A}$), если для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $A_t \in \mathfrak{B}$, $t \in T$, объединение $\bigcup^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t$ принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, если только оно существует. Согласно равенству (5) § 18, это объединение тогда является также объединением всех элементов A_t в алгебре $\mathfrak{B}$:

(1) $$\bigcup^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t = \bigcup^{\mathfrak{B}}_{t \in T} A_t.$$

Из законов Моргана [см. (3) § 19] следует, что $\mathfrak{B}$ есть $\mathfrak{m}$-подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $A_t \in \mathfrak{B}$, $t \in T$, пересечение $\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t$ принадлежит алгебре $\mathfrak{B}$, если только оно существует. Тогда по формуле (5′) § 18 это пересечение является также пересечением всех A_t в алгебре $\mathfrak{B}$

(1′) $$\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t = \bigcap^{\mathfrak{B}}_{t \in T} A_t.$$

Ясно, что если $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-алгеброй, то слова „если только оно существует“ в предыдущих определениях и условиях можно опустить.

Если $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$ для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{B}$ называется *полной подалгеброй алгебры* $\mathfrak{A}$.

Заметим, что каждая $\mathfrak{m}$-подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ тоже является булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй. Каждая полная подалгебра полной булевой алгебры тоже является полной булевой алгеброй.

Примеры. А) Если h есть $\mathfrak{m}$-гомоморфизм булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, то класс $h(\mathfrak{A})$ всех элементов $h(A)$, $A \in \mathfrak{A}$, является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$ и булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй.

Б) Поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X является $\mathfrak{m}$-полем тогда и только тогда, когда оно является $\mathfrak{m}$-подалгеброй поля всех подмножеств пространства X.

В) Говорят, что индексированное множество $\{A_t\}_{t \in T}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является *монотонным*, если для любых индексов t_1, $t_2 \in T$ или $A_{t_2} \subset A_{t_1}$, или $A_{t_1} \subset A_{t_2}$ (т. е. если множество всех A_t линейно упорядочено относительно булева включения $\subset$).

Если $\mathfrak{B}$ — такая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, что $\bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{A}} B_t \in \mathfrak{B}$ для каждого монотонного $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{B_t\}_{t \in T}$ элементов алгебры $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Более того, если h — такой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{C}$, что $h\left(\bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{A}} B_t\right) = \bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{C}} h(B_t)$ для каждого монотонного $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{B_t\}_{t \in T}$ элементов алгебры $\mathfrak{B}$, то он является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{C}$.

Для доказательства первой части утверждения достаточно показать, что если $\{A_t\}_{t \in T}$ — любое $\mathfrak{m}$-индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{B}$, то $\bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t \in \mathfrak{B}$. Можно считать, что T есть множество всех порядковых чисел, меньших порядкового числа t_0, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$. Допустим, что $\bigcap\limits_{t < t_1}^{\mathfrak{A}} A_t \notin \mathfrak{B}$ для поряд-

кового числа $t_1 \leqslant t_0$[1]). Пусть t_1 — наименьшее порядковое число с этим свойством. Таким образом, для каждого $t < t_1$ элемент $B_t = \bigcap^{\mathfrak{A}}_{t' < t} A_{t'}$ лежит в алгебре $\mathfrak{B}$. Поскольку $\{B_t\}_{t < t_1}$ является монотонным $\mathfrak{m}$-индексированным множеством, мы имеем включение $\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t < t_1} B_t \in \mathfrak{B}$. С другой стороны, прямо из определения бесконечных пересечений следует, что $\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t < t_1} A_t = \bigcap^{\mathfrak{A}}_{t < t_1} B_t \in \mathfrak{A}$. Противоречие.

Доказательство второй части утверждения аналогично.

Заметим, что по двойственности утверждение остается в силе, если бесконечные пересечения заменить на бесконечные объединения.

Говорят, что подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-*регулярной* подалгеброй, если для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $A_t \in \mathfrak{B}$, $t \in T$, объединение $\bigcup^{\mathfrak{B}}_{t \in T} A_t$ (если только оно существует) является также объединением всех элементов A_t в алгебре $\mathfrak{A}$, т. е. имеет место равенство (1). Согласно законам Моргана [см. (3) § 19], подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $A_t \in \mathfrak{B}$, $t \in T$, существование пересечения $\bigcap^{\mathfrak{B}}_{t \in T} A_t$ влечет за собой существование пересечения $\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t$ и имеет место равенство (1′). Следующее условие тоже является необходимым и достаточным для того, чтобы подалгебра $\mathfrak{B}$ была $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$;

(2) для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $A_t \in \mathfrak{B}$ $(t \in T)$, из того, что $\bigcap^{\mathfrak{B}}_{t \in T} A_t = \wedge$, следует равенство $\bigcap^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t = \wedge$.

Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из того факта, что если $A \subset A_t$ для каждого $t \in T$ $(A \in \mathfrak{B},\ A_t \in \mathfrak{B})$,

---

[1]) Автор, по-видимому, предполагает, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-алгеброй. — *Прим. перев.*

то равенство $A = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_t$ эквивалентно равенству $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} (A_t - A) = \wedge$, а равенство $A = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$ эквивалентно соотношению $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} (A_t - A) = \wedge$.

Если подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-регулярной для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{B}$ называется *регулярной* подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

Прямо из определения следует, что подалгебра $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ является ее $\mathfrak{m}$-регулярной (регулярной) подалгеброй тогда и только тогда, когда тождественное отображение алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{A}$

$$h(A) = A \text{ для любого } A \in \mathfrak{B}$$

является $\mathfrak{m}$-полным (полным) гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{A}$.

Более общим образом, если h — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, то алгебра $h(\mathfrak{A})$ является $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}'$ тогда и только тогда, когда h является $\mathfrak{m}$-изоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$.

Каждая $\mathfrak{m}$-подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

Если $\mathfrak{C}$ есть $\mathfrak{m}$-регулярная (регулярная) подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-регулярной (регулярной) подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{C}$ будет также $\mathfrak{m}$-регулярной (регулярной) подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

Напомним (см. стр. 62), что множество $\mathfrak{S}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотным* в алгебре $\mathfrak{A}$, если для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq \wedge$, существует такой элемент $B \in \mathfrak{S}$, что $\wedge \neq B \subset A$.

Если $\mathfrak{S}$ плотно в алгебре $\mathfrak{A}$, то множества $\mathfrak{S} \cup (\wedge)$ и $\mathfrak{S} - (\wedge)$ тоже плотны в алгебре $\mathfrak{A}$.

Множество $\mathfrak{S}$, содержащее $\wedge$, плотно в алгебре $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ является объединением всех таких $B \in \mathfrak{S}$, что $B \subset A$ (или, что эквивалентно, если каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ является пересечением всех элементов $-B$, где $B \in \mathfrak{S}$ и $A \subset -B$).

Действительно, предположим, что элемент $A_1 \in \mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что $B \subset A_1$ для каждого такого $B \in \mathfrak{S}$, что $B \subset A$. Разность $A - A_1$ должна быть нулевым элементом, ибо если это не так, то он содержит некоторый

ненулевой элемент $B_0 \in \mathfrak{S}$ и этот элемент должен быть подэлементом A, но не лежать в A_1. Однако равенство $A - A_1 = \wedge$ означает, что $A \subset A_1$, а это доказывает, что A является объединением всех элементов $B \in \mathfrak{S}$, которые лежат в A. Доказательство аналогичного утверждения для пересечений можно получить, переходя к дополнениям.

23.1. *Если $\mathfrak{B}$ — плотная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, а каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ является объединением (пересечением) всех таких элементов $B \in \mathfrak{B}$, что $B \subset A$ $(A \subset B)$*[1].

Достаточно доказать только первую часть теоремы 23.1. Предположим, что $\bigcup\limits_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_t = B \in \mathfrak{B}$ ($A_t \in \mathfrak{B}$ для каждого $t \in T$). Пусть $A \in \mathfrak{A}$ — любой элемент, такой, что $A_t \subset A$ для каждого $t \in T$. Если элемент $B - A$ не равен нулю, то он содержит ненулевой элемент $B_0 \in \mathfrak{B}$. Следовательно, имеет место включение $A_t \subset B - B_0 \in \mathfrak{B}$ для каждого $t \in T$ и $B - B_0 \subset B \neq B - B_0$, а это противоречит тому факту, что B является объединением всех A_t в алгебре $\mathfrak{B}$. Таким образом, если $A_t \subset A \in \mathfrak{A}$ для каждого $t \in T$, то $B - A = \wedge$, т. е. $B \subset A$. Это доказывает, что B является также объединением всех A_t в алгебре $\mathfrak{A}$. Итак, $\mathfrak{B}$ есть регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$.

23.2. *Если $\mathfrak{B}'$ — плотная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ — подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}'$ — регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ также является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$*[2].

Достаточно доказать условие (2). Пусть $A_t \in \mathfrak{B}$, $t \in T$. Предположим, что $\bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_t = \wedge$. По теореме 23.1 $A_t = \bigcap\limits_{s \in S_t}^{\mathfrak{B}} A_{t,s}$, где $A_{t,s} \in \mathfrak{B}'$. Следовательно, $\bigcap\limits_{t \in T, s \in S_t}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} = \wedge$, а это означает, что $\bigcap\limits_{t \in T}^{\mathfrak{B}'} \bigcap\limits_{s \in S_t} A_{t,s} = \wedge$. Поскольку $\mathfrak{B}'$ — регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, последнее равенство влечет за собой равенство

$$\bigcap_{t \in T, s \in S_t}^{\mathfrak{A}} A_{s,t} = \wedge. \tag{3}$$

---

[1]) Сикорский [13].
[2]) Сикорский [13].

Допустим, что $A \in \mathfrak{A}$ и $A \subset A_t$ для всех $t \in T$. Тогда $A \subset A_{t,s}$ для каждого $t \in T$ и каждого $s \in S_t$. Следовательно, согласно (3), $A = \wedge$. Это доказывает, что $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge$.

Примеры. Г) Пусть $\mathfrak{G}$ — открытый базис топологического пространства X, т. е. такой класс открытых множеств, что каждое открытое множество является объединением множеств из класса $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — такое поле подмножеств пространства X, что $\mathfrak{G}$ является подмножеством поля $\mathfrak{F}$ и каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ обладает свойством Бэра. Пусть Δ — идеал всех множеств $A \in \mathfrak{F}$ первой категории в пространстве X. Тогда класс всех элементов $[G]$, где $G \in \mathfrak{G}$, является плотным подмножеством фактор-алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$.

В самом деле, если $A \in \mathfrak{F}$, то

$$A = (G_0 \cup B_1) - B_2,$$

где G_0 — открытое множество, а B_1 и B_2 — множества первой категории. Если $[A]_\Delta \neq \wedge$, то G_0 не будет множеством первой категории. Множество G_0 будет объединением некоторых множеств, принадлежащих $\mathfrak{G}$, и по крайней мере одно из них, скажем G, не является множеством первой категории (так как всякое объединение открытых множеств первой категории снова является множеством первой категории[1])). Мы имеем включение $\wedge \neq [G]_\Delta \subset A$, которое завершает доказательство.

Д) По аналогии с топологическими пространствами говорят, что булева алгебра является *сепарабельной*[2]), если она содержит не более чем счетное плотное подмножество $\mathfrak{S}$.

Например, все счетные булевы алгебры являются сепарабельными. Поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества X всех положительных целых чисел является примером несчетной сепарабельной булевой алгебры. Эта алгебра атомна. Существуют также несчетные полные безатомные сепарабельные булевы алгебры. Алгебра $\mathfrak{B}/\Delta$, где $\mathfrak{B}$ — поле всех борелевских множеств вещественных чисел,

---

[1]) Банах [3]. См. также Куратовский [3], стр. 87.

[2]) Исследование сепарабельных булевых алгебр см. у Хорна и Тарского [1].

а Δ — идеал всех множеств первой категории, является примером алгебры такого сорта (в качестве $\mathfrak{S}$ нужно взять все элементы $[A]$, где A — любой интервал с рациональными концевыми точками!).

Любая сепарабельная булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна подалгебре поля $\mathfrak{F}$[1]). Действительно, предположим, что ненулевые элементы $A_1, A_2, \ldots$ образуют плотное подмножество алгебры $\mathfrak{A}$. Для каждого n существует такой максимальный фильтр ∇_n, что $A_n \in \nabla_n$ (см. 6.1). Отображение h, задаваемое формулой

$$h(A) = \{n;\ A \in \nabla_n\},$$

является требуемым изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{F}$ (см. 8.1).

Обратное утверждение не верно: поле $\mathfrak{F}$ содержит несепарабельные подалгебры[2]). В самом деле, поле $\mathfrak{F}$ содержит подалгебру, изоморфную свободной булевой алгебре $\mathfrak{F}_{0,2^{\aleph_0}}$, которая не является сепарабельной [см. пример Е § 14]. С другой стороны, булева алгебра изоморфна подалгебре поля $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда ее пространство Стоуна является непрерывным образом пространства Стоуна поля $\mathfrak{F}$, т. е. компактификации Чеха — Стоуна $\beta(X)$ дискретного пространства X [см. пример Е § 8]. Знакомый с компактификацией Чеха — Стоуна читатель может легко проверить, что булева алгебра изоморфна подалгебре поля $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда ее пространство Стоуна содержит счетное плотное множество. Таким образом, пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{B}/\Delta$ (определенной выше) борелевских множеств по модулю множеств первой категории содержит счетное плотное множество. Можно доказать, что пространство Стоуна алгебры борелевских множеств (вещественных чисел) по модулю множеств лебеговой меры нуль не содержит никакого счетного плотного подмножества[3]), поскольку эта алгебра не сепарабельна (см. замечание в конце примера Д § 35).

---

[1]) Хорн и Тарский [1].
[2]) Хорн и Тарский [1], Тарский [6].
[3]) Семадени [2, 3].

Е) Если $\mathfrak{S}$ — плотное подмножество булевой алгебры $\mathfrak{A}$, удовлетворяющей $\mathfrak{n}$-цепному условию, то каждый элемент алгебры $\mathfrak{A}$ является объединением $\mathfrak{n}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ непересекающихся элементов из $\mathfrak{S}$. В самом деле, пусть $\{A_t\}_{t \in T}$ — максимальное множество непересекающихся элементов $A_t \subset A$, $A_t \in \mathfrak{S}$. Тогда $A = \bigcup\limits_{t \in T} A_t$, поскольку подмножество $\mathfrak{S}$ является плотным, а $\{A_t\}_{t \in T}$ — максимальное множество, и $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{n}$, так как $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{n}$-цепному условию.

Говорят, что подмножество $\mathfrak{S}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{m}$-*порождает* $\mathfrak{m}$-подалгебру $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ является наименьшей $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, содержащей $\mathfrak{S}$ в качестве подмножества. Элементы множества $\mathfrak{S}$ называются тогда $\mathfrak{m}$-*образующими* алгебры $\mathfrak{B}$.

Таким образом, множество $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$ (т. е. $\mathfrak{S}$ является множеством $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}$) тогда и только тогда, когда наименьшая $\mathfrak{m}$-подалгебра, содержащая множество $\mathfrak{S}$, совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{A}$. Заметим, что если множество $\mathfrak{S}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$-порождает булеву алгебру $\mathfrak{A}$, то

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}. \tag{4}$$

Предположим, что $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-порождает $\mathfrak{m}$-подалгебру $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда, если h_1 и h_2 — два $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{B}$ в булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ и $h_1(A) = h_2(A)$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$, то

$$h_1(A) = h_2(A) \text{ для каждого } A \in \mathfrak{B}, \tag{5}$$

поскольку класс всех элементов $A \in \mathfrak{A}$, на которых h_1 и h_2 имеют одинаковые значения, является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$ и поэтому содержит $\mathfrak{B}$. Следовательно, если отображение f множества $\mathfrak{S}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, то такое продолжение единственно.

23.3. *Пусть f — взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{m}$-порождающего булеву алгебру $\mathfrak{A}$, на множество $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{m}$-порождающее булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Если f*

можно продолжить до $\mathfrak{m}$-*гомоморфизма алгебры* $\mathfrak{A}$ *в алгебру* $\mathfrak{A}'$, *а* f^{-1} *можно продолжить до* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизма алгебры* $\mathfrak{A}'$ *в алгебру* $\mathfrak{A}$, *то* f *можно продолжить до изоморфизма алгебры* $\mathfrak{A}$ *на алгебру* $\mathfrak{A}'$.

Доказательство этой леммы подобно доказательству аналогичной леммы 12.1.

23.4. *Пусть* $\mathfrak{A}_0$ — *подалгебра булевой* $\mathfrak{m}$-*алгебры* $\mathfrak{A}$. *Если множество* $\mathfrak{K}$ *элементов алгебры* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) $\mathfrak{A}_0$ *является подмножеством множества* $\mathfrak{K}$,

(б) $\bigcup\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t \in \mathfrak{K}$ *и* $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t \in \mathfrak{K}$ *для каждого монотонного* $\mathfrak{m}$-*индексированного множества* $\{A_t\}_{t\in T}$ *элементов множества* $\mathfrak{K}$,

то множество $\mathfrak{K}$ *содержит* $\mathfrak{m}$-*подалгебру* $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{m}$-*порожденную алгеброй* $\mathfrak{A}_0$ [*другими словами,* $\mathfrak{B}$ *является наименьшим классом* $\mathfrak{K}$, *удовлетворяющим условиям* (а) *и* (б)].

Если, кроме того, h — *отображение множества* $\mathfrak{K}$ *в булеву* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{A}'$, *такое, что*

(а′) $h'|\mathfrak{A}_0$ *является гомоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A}_0$ *в алгебру* $\mathfrak{A}'$,

(б′) $h(\bigcup\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t) = \bigcup\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t)$ *и* $h(\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t) = \bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} h(A_t)$ *для каждого монотонного* $\mathfrak{m}$-*индексированного множества* $\{A_t\}_{t\in T}$ *элементов множества* $\mathfrak{K}$,

то $h|\mathfrak{B}$ *является* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмом алгебры* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathfrak{A}'$.

Пусть $\mathfrak{K}_0$ — наименьший класс, удовлетворяющий условиям (а) и (б). Для каждого элемента $B \in \mathfrak{A}$ через $\mathfrak{K}(B)$ обозначим класс всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что одновременно имеют место условия

$$(6) \qquad A \cup B \in \mathfrak{K}_0, \quad A - B \in \mathfrak{K}_0 \text{ и } B - A \in \mathfrak{K}_0,$$

$$(6') \qquad h(A \cup B) = h(A) \cup h(B), \quad h(A - B) = h(A) - h(B),$$
$$h(B - A) = h(B) - h(A).$$

Из симметричности условий (6) и (6′) мгновенно следует, что

(7) $A \in \mathfrak{K}(B)$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathfrak{K}(A)$.

Для каждого фиксированного $B \in \mathfrak{A}$ класс $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(B)$ удовлетворяет условию (б). Если $B \in \mathfrak{A}_0$, то условие (а) тоже выполняется. Следовательно, $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}(B)$, т. е.

$$\text{если } B \in \mathfrak{A}_0 \text{ и } A \in \mathfrak{K}_0, \text{ то } A \in \mathfrak{K}(B).$$

Согласно свойству (7), отсюда вытекает следующее утверждение:

$$\text{если } B \in \mathfrak{A}_0 \text{ и } A \in \mathfrak{K}_0, \text{ то } B \in \mathfrak{K}(A).$$

Значит, если $A \in \mathfrak{K}_0$, то класс $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(A)$ удовлетворяет условию (а). Поскольку условие (б) также выполнено, то $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}(A)$. Следовательно, если $A, B \in \mathfrak{K}_0$, то $B \in \mathfrak{K}(A)$, т. е. условия (6) и (6′) выполняются для произвольных элементов $A, B \in \mathfrak{K}_0$. Это означает, что $\mathfrak{K}_0$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, а $h \mid \mathfrak{K}_0$ — гомоморфизмом. Согласно (б), (б′) и примеру В, $\mathfrak{K}_0$ будет $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$ и $h \mid \mathfrak{K}_0$ является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом. Следовательно, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{K}_0$. С другой стороны, $\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{B}$, поскольку класс $\mathfrak{K} = \mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям (а) и (б). Это доказывает, что $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{B}$[1]).

Чтобы ограничиться доказательством только первой части теоремы 23.4, достаточно везде в приведенном выше доказательстве опустить условие (6′).

Говорят, что подмножество $\mathfrak{S}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ *вполне порождает* полную подалгебру $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ является наименьшей полной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, содержащей $\mathfrak{S}$ в качестве подмножества. Элементы множества $\mathfrak{S}$ в этом случае называются *полными образующими* алгебры $\mathfrak{B}$.

Таким образом, множество $\mathfrak{S}$ вполне порождает алгебру $\mathfrak{A}$ (т. е. $\mathfrak{S}$ является множеством полных образующих алгебры $\mathfrak{A}$) тогда и только тогда, когда наименьшая полная подалгебра, содержащая множество $\mathfrak{S}$, совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{A}$. Например, каждое плотное подмножество алгебры $\mathfrak{A}$ вполне ее порождает (см. замечание перед теоремой 23.1).

---

[1]) Это доказательство теоремы 23.4 является небольшим изменением доказательства подобной теоремы у Халмоша [1], стр. 32.

§ 24. Представления с помощью $\mathfrak{m}$-полей множеств

В § 8 мы доказали, что каждая булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторому полю множеств $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{A}$ — булева $\mathfrak{m}$-алгебра, то поле $\mathfrak{F}$ также является $\mathfrak{m}$-алгеброй, но, вообще говоря, не является $\mathfrak{m}$-полем множеств (см. пример В § 18). Более того, мы можем показать, что для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существуют булевы $\mathfrak{m}$-алгебры, которые не изоморфны никакому $\mathfrak{m}$-полю множеств[1]).

Пример. А) Каждое $\mathfrak{m}$-поле множеств является $\mathfrak{m}$-дистрибутивным. Следовательно, каждая булева $\mathfrak{m}$-алгебра, изоморфная некоторому $\mathfrak{m}$-полю, является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной. Если $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских множеств вещественных чисел, а Δ — или идеал всех множеств первой категории, или идеал всех множеств меры нуль, то для каждого $\mathfrak{m}$ алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ является $\mathfrak{m}$-алгеброй (см. примеры В и Г § 21), не изоморфной никакому $\mathfrak{m}$-полю множеств, поскольку $\mathfrak{F}/\Delta$ не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй (см. пример А § 19). Аналогично если $\mathfrak{F}$ имеет тот же смысл, а Δ — идеал всех не более чем счетных множеств, то $\mathfrak{F}/\Delta$ является примером булевой σ-алгебры, которая не изоморфна никакому σ-полю множеств, поскольку она не σ-дистрибутивна.

С помощью легкого анализа доказательства теоремы 8.2 мы получаем следующую теорему[2]).

24.1 *Пусть $\mathfrak{A}$ — булева $\mathfrak{m}$-алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(o) *алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств;*

(i) *для каждого элемента $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ существует такой максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр ∇, что $A \in \nabla$;*

(ii) *для каждого элемента $A \neq \vee$ $(A \in \mathfrak{A})$ существует такой максимальный $\mathfrak{m}$-идеал Δ, что $A \in \Delta$;*

(iii) *для каждого элемента $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ существует такая двузначная $\mathfrak{m}$-мера m, что $m(A) = 1$;*

---

[1]) Этот факт впервые был замечен Тарским [3]. См. также Марчевский [4], Сикорский [4].

[2]) Паук [2], Хорн и Тарский [1], Пирс [2], Сикорский [4], Тарский [3].

(iv) *для каждого элемента* $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ *существует такой двузначный* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{A}$, *что* $h(A) = \vee$;

(v) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *нет ни одного открытого непустого множества, являющегося объединением* $\mathfrak{m}$-*нигде не плотных множеств.*

Эквивалентность условий (i), (ii) (iii) и (iv) вытекает из естественного взаимно однозначного соответствия между максимальными $\mathfrak{m}$-фильтрами, максимальными $\mathfrak{m}$-идеалами, двузначными $\mathfrak{m}$-гомоморфизмами и двузначными $\mathfrak{m}$-мерами (см. замечание в конце § 22). Условие (i) эквивалентно условию (v), согласно примеру Н § 22. По теореме 22.1 из условия (i) вытекает условие (o). Обратно, из (o) вытекает условие (i). В самом деле, поскольку условие (i) инвариантно относительно изоморфизмов, достаточно показать, что каждое $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ (подмножеств пространства X) обладает свойством (i). Если $A \in \mathfrak{F}$ непусто, то пусть x_0 — любой элемент из множества A. Фильтр ∇, определенный точкой x_0, удовлетворяет условию (i).

Заметим, что без требования $\mathfrak{m}$-полноты алгебры $\mathfrak{A}$ все условия (i), (ii), (iv), (v) [в которых определение $\mathfrak{m}$-идеалов и $\mathfrak{m}$-фильтров следует понимать в смысле (D′), см. стр. 130] эквивалентны следующему утверждению:

(o′) алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{m}$-регулярной подалгебре $\mathfrak{m}$-поля множеств.

Идея доказательства та же.

Говорят, что $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X является $\mathfrak{m}$-*совершенным*, если каждый максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр (или, что то же самое, каждый максимальный $\mathfrak{m}$-идеал) определяется некоторой точкой $x_0 \in X$.

Пример. Б) Пусть X — множество всех максимальных $\mathfrak{m}$-фильтров булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и для каждого $A \in \mathfrak{A}$ через $h(A)$ обозначим множество всех $\nabla \in X$, таких, что $A \in \nabla$. Согласно теореме 22.1, поле $\mathfrak{F} = h(\mathfrak{A})$ является приведенным $\mathfrak{m}$-полем. Это $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным. Точное доказательство последнего утверждения аналогично соответствующей части доказательства теоремы 8.2.

По теореме 22.1, если выполнено условие (i), то h является изоморфизмом. Следовательно,

24.2. *Если выполнено одно из условий* (o), (i), (ii), (iii), (iv), (v) *теоремы* 24.1, *то булева* $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{A}$ *изоморфна некоторому приведенному* $\mathfrak{m}$-*совершенному* $\mathfrak{m}$-*полю множеств* $\mathfrak{F}$.

В частности,

24.3. *Каждое* $\mathfrak{m}$-*поле множеств изоморфно некоторому приведенному* $\mathfrak{m}$-*совершенному* $\mathfrak{m}$-*полю множеств.*

Из примера Б § 22 следует, что

24.4. *Каждая атомная булева* $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{A}$ *изоморфна некоторому* $\mathfrak{m}$-*полю множеств. Именно отображение*

$$h(A) = \text{множество всех атомов } a \subset A$$

является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ *в поле всех подмножеств множества всех атомов алгебры* $\mathfrak{A}$.

Атомность алгебры является достаточным, но не необходимым условием для того, чтобы булева $\mathfrak{m}$-алгебра была изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Это следует из того факта, что для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует неатомное $\mathfrak{m}$-поле множеств.

Пример. В) Пусть $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ обозначает наименьшее $\mathfrak{m}$-поле подмножеств обобщенного канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}} = H^{T_0}$ (где $\overline{\overline{T}}_0 = \mathfrak{n}$, а $H = (-1,\ 1)$), содержащее $\mathfrak{F}_{0,\,\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ (см. стр. 71). Поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ является приведенным, поскольку таковым является поле $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$. Каждое множество $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ можно представить в виде

$$A = (\mathop{\mathsf{P}}_{t \in T_0 - T} H_t) \times B, \tag{1}$$

где B — подмножество пространства $\mathop{\mathsf{P}}_{t \in T} H_t$, а $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Это следует из того факта, что класс всех множеств вида (1) является $\mathfrak{m}$-полем множеств и содержит поле $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$, поэтому он содержит поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$

Следовательно, каждое множество $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является объединением множеств D вида

$$D = \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot D_t, \tag{2}$$

где $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, $\varepsilon(t) = \pm 1$, а множества D_t определены так же, как и на стр. 71 § 14.

Если $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, то каждое одноточечное подмножество пространства $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ принадлежит полю $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, поскольку его можно представить в виде (2), положив $T = T_0$.

Если $\sigma \leqslant \mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, то поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является безатомным, поскольку оно не содержит никакого одноточечного множества (каждый атом приведенного поля является одноточечным множеством!).

Как мы уже отмечали, $\mathfrak{m}$-дистрибутивность является необходимым условием для того, чтобы булева $\mathfrak{m}$-алгебра была изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Однако $\mathfrak{m}$-дистрибутивность не является достаточным условием (контрпример будет приведен в примере Г § 28). Атомность является достаточным, но, вообще говоря, не необходимым условием. Условия $\mathfrak{m}$-дистрибутивности и атомности являются как необходимыми, так и достаточными для булевых алгебр с $\mathfrak{m}$ образующими. Более точно,

24.5. *Для любой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{m}$-порожденной не более чем $\mathfrak{m}$ образующими, следующие условия эквивалентны:*

(i) *алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств;*
(ii) *алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной;*
(iii) *алгебра $\mathfrak{A}$ является атомной.*

Необходимо доказывать только импликацию (ii)$\rightarrow$(iii). Если $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{A_t\}_{t \in T}$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, то каждый элемент вида

$$\bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t, \tag{3}$$

где $\varepsilon(t) = \pm 1$, является или нулем, или атомом, поскольку выполнено условие (3) § 9. Так как

$$\bigcap_{t \in T} (A_t \cup -A_t) = \vee,$$

то из условия (d_2) теоремы 19.2 следует, что каждый элемент $A \neq \wedge$ содержит по крайней мере один атом (3). Таким образом, алгебра атомна.

24.6. *Для каждой булевой* $\mathfrak{m}$-*алгебры* $\mathfrak{A}$ *эквивалентны следующие условия:*

(i) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной;*

(ii) *если* $\mathfrak{S}$ — *множество всех атомов некоторой* $\mathfrak{m}$-*подалгебры,* $\mathfrak{m}$-*порожденной не более чем* $\mathfrak{m}$ *элементами, то* $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A = \vee$;

(iii) *каждая* $\mathfrak{m}$-*подалгебра,* $\mathfrak{m}$-*порожденная не более чем* $\mathfrak{m}$ *элементами, является атомной;*

(iv) *каждая* $\mathfrak{m}$-*подалгебра,* $\mathfrak{m}$-*порожденная не более чем* $\mathfrak{m}$ *элементами, изоморфна некоторому* $\mathfrak{m}$-*полю множеств.*

Доказательство импликации (i) $\rightarrow$ (ii) такое же, как и доказательство импликации (ii) $\rightarrow$ (iii) в теореме 24.5. Из условия (ii) следует (iii) в силу соотношения (5) § 18 и примера Ж § 18. По теореме 24.4 из условия (iii) вытекает условие (iv). Из условия (iv) следует (i), так как алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной тогда и только тогда, когда каждая из ее $\mathfrak{m}$-подалгебр, $\mathfrak{m}$-порожденная не более чем $\mathfrak{m}$ элементами, является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ — приведенное $\mathfrak{m}$-совершенное поле подмножеств пространства X. Мы можем ввести в пространстве X топологию таким же образом, как и в § 7, т. е. считая поле $\mathfrak{F}$ открытым базисом в пространстве X. Тогда каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ является как открытым, так и замкнутым в пространстве X, но обратное утверждение, вообще говоря, не верно (см. пример А § 27), а различные $\mathfrak{m}$-поля подмножеств X могут индуцировать в пространстве X одну и ту же топологию. Поэтому эта топология в общем не имеет практической ценности.

Полную аналогию с пространством Стоуна можно получить только в случае, когда рассматриваемое $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ удовлетворяет следующему условию, аналогичному условию (i) теоремы 6.1:

($e_{\mathfrak{m}}$) каждый собственный $\mathfrak{m}$-идеал содержится в некотором максимальном $\mathfrak{m}$-идеале.

Формулировка условий, эквивалентных условию ($e_{\mathfrak{m}}$) и аналогичных условиям (ii), (iii), (iv) теоремы 6.1, предоставляется читателю.

Если приведенное $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ обладает свойством $(e_{\mathfrak{m}})$, то пространство X, топологизированное указанным выше способом, удовлетворяет следующему условию, являющемуся бесконечным аналогом компактности:

если $X = \bigcup_{t \in T} G_t$, где G_t — открытые множества, то существует такое подмножество $T' \subset T$, что $\overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{m}$ и $X = \bigcup_{t \in T'} G_t$.

Свойство $(e_{\mathfrak{m}})$ означает также, что $\mathfrak{F}$ является полем всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X.

Доказательство последних двух утверждений аналогично доказательству подобных утверждений в теореме 7.1[1]).

Для того чтобы дать критерий существования расширения собственного $\mathfrak{m}$-идеала до максимального $\mathfrak{m}$-идеала, мы введем следующее определение.

Пусть α — наименьшее порядковое число мощности $\mathfrak{n}$. Обозначим через S (через S_0) множество всех последовательностей $s = \{\varepsilon_\gamma\}_{\gamma < \beta}$, где $0 < \beta \leqslant \alpha$ (где $\beta = \alpha$) и $\varepsilon_\gamma = \pm 1$ для каждого γ. Порядковое число β называют *длиной* трансфинитной последовательности s. Для любых $s, s' \in S$ мы пишем $s' < s$, если s' является собственным начальным сегментом последовательности s. Если $s \in S - S_0$, то

$$s, \pm 1$$

обозначает последовательность, полученную из s прибавлением в конце последовательности ± 1.

Под $\mathfrak{n}$-*диадической системой* мы будем понимать любое индексированное множество $\{A_s\}_{s \in S}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$, такое, что

$$A_{-1} \cup A_1 = \vee, \quad A_{-1} \cap A_1 = \wedge,$$

$$A_{s,-1} \cup A_{s,1} = A_s \quad \text{и} \quad A_{s,-1} \cap A_{s,1} = \wedge$$

для каждого $s \in S - S_0$,

$$A_s = \bigcap_{s' < s} A_{s'},$$

если длина $s \in S$ — предельное порядковое число.

---

[1]) Сикорский [12].

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ является *диадически* $\mathfrak{n}$-*дистрибутивной*, если

$$\vee = \bigcup_{s \in S_0} A_s$$

для каждой $\mathfrak{n}$-диадической системы $\{A_s\}_{s \in S}$ алгебры $\mathfrak{A}$.

24.7. *Пусть* Δ — *собственный* $\mathfrak{m}$-*идеал булевой* $\mathfrak{m}$-*алгебры* $\mathfrak{A}$. *Предположим, что существует такое бесконечное кардинальное число* $\mathfrak{n}$, *что* $2^{\mathfrak{n}'} \leqslant \mathfrak{m}$ *для каждого* $\mathfrak{n}' < \mathfrak{n}$, *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является диадически* $\mathfrak{n}$-*дистрибутивной, а* $\mathfrak{A}/\Delta$ *удовлетворяет* $\mathfrak{n}_0$-*цепному условию для некоторого* $\mathfrak{n}_0 < \mathfrak{n}$. *Тогда идеал* Δ *содержится в некотором максимальном* $\mathfrak{m}$-*идеале*[1]).

Достаточо доказать, что существует такой элемент $E \notin \Delta$, что

(4) пересечение $\Delta_0 = \Delta \cap (\mathfrak{A} \mid E)$ является максимальным $\mathfrak{m}$-идеалом в алгебре $\mathfrak{A} \mid E$.

Действительно, множество всех таких $A \in \mathfrak{A}$, что $A \cap E \in \Delta_0$, является тогда максимальным $\mathfrak{m}$-идеалом, содержащим Δ.

Предположим, что не существует элемента E со свойством (4), т. е. для каждого элемента $E \notin \Delta$ существует такой элемент, обозначаемый через $f(E)$, что $f(E) \subset E$, $f(E) \notin \Delta$ и $E - f(E) \notin \Delta$. Мы продолжим отображение f на Δ, полагая $f(E) = E$ для любого $E \in \Delta$.

Теперь определим $\mathfrak{n}$-диадическую систему следующим образом:

$$A_1 = f(\vee),\ A_{-1} = -f(\vee),$$

$$A_{s,1} = f(A_s) \text{ и } A_{s,-1} = A_s - f(A_s) \text{ для каждого } s \in S - S_0,$$

$$A_s = \bigcap_{s' < s} A_{s'},$$

если длина s — предельное порядковое число.

Тогда в силу диадической $\mathfrak{n}$-дистрибутивности

$$\vee = \bigcup_{s \in S_0} A_s.$$

---

[1]) Смит и Тарский [1].

Пусть S' обозначает множество всех таких $s' \in S - S_0$, что $A_{s'} \in \Delta$. Для каждого $s \in S_0$ существует такое $s' \in S'$, что $s' < s$. Действительно, если это не так, то множество всех элементов $[A_{s'} - A_{s', \varepsilon_{s'}}]_\Delta$, где $s' < s$, а $\varepsilon_{s'} = \pm 1$ выбрано так, что $(s', \varepsilon_{s'}) < s$, должно быть классом $\mathfrak{n}$ непересекающихся элементов в алгебре $\mathfrak{A}/\Delta$. Противоречие.

Поскольку $A_s \subset A_{s'}$ при $s' < s$, то

$$\vee = \bigcup_{s' \in S'} A_{s'}.$$

Так как $S' \subset S - S_0$, то $\overline{\overline{S'}} \leqslant \mathfrak{m}$. Это значит, что $\vee \in \Delta$, т. е. Δ является несобственным идеалом. Противоречие.

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ — два класса непустых подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$, таких, что существуют все объединения

(5) $$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A \quad (\mathfrak{S} \in \mathbf{J})$$

и пересечения

(5′) $$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} A \quad (\mathfrak{S} \in \mathbf{M}).$$

Иногда важно знать, существует ли $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств пространства X, т. е. такой гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ на поле множеств, который переводит бесконечные объединения (5) и пересечения (5′) в соответствующие теоретико-множественные объединения и пересечения.

Легкий анализ доказательства теоремы 22.1 показывает, что

24.8. *Если X_0 — любое множество максимальных фильтров, сохраняющих все объединения* (5) *и пересечения* (5′) (*см.* § 22 *стр.* 146), *то отображение h, определенное равенством*

(6) $$h(A) = \{\nabla \in X_0;\ A \in \nabla\},$$

является $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$*-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств пространства X_0.*

Анализ доказательства теоремы 24.1 дает следующую теорему.

24.9. *Для существования* **(J, M)**-*изоморфизма* h *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в поле всех подмножеств пространства* X *необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента* $A \neq \wedge$ *существовал максимальный фильтр* ∇, *сохраняющий все объединения* (5) *и пересечения* (5′) *и такой, что* $A \in \nabla$.

Конечно, необходимое и достаточное условие, данное в теореме 24.9, не всегда выполняется (например, оно не выполняется, если $\mathfrak{A}$ является булевой σ-алгеброй, которая не изоморфна никакому σ-полю множеств, а (5) и (5′) суть множества всех счетных объединений и пересечений, существующих в алгебре $\mathfrak{A}$). Однако оно всегда выполняется, если данное множество объединений и пересечений не более чем счетно:

24.10. *Если* $\overline{\overline{\mathbf{J}}} \leqslant \aleph_0$ *и* $\overline{\overline{\mathbf{M}}} \leqslant \aleph_0$, *то существует* **(J, M)**-*изоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в поле всех подмножеств некоторого пространства*[1]).

В самом деле, пусть X — пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$, а h_0 — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X. Согласно теореме 22.2, объединение Z всех дефектных множеств, соответствующих объединениям (5) и пересечениям (5′), является множеством первой категории в пространстве X. С другой стороны, каждое множество первой категории в компактном хаусдорфовом пространстве ограничено, т. е. его дополнение всюду плотно[2]). Следовательно, множество $X_0 = X - Z$ плотно в пространстве X и, значит, множество

$$h(A) = X_0 \cap h_0(A)$$

непусто при $A \neq \wedge$. По теореме 24.8 h является требуемым изоморфизмом.

Согласно законам Моргана, гомоморфизм сохраняет бесконечное объединение (5) тогда и только тогда, когда он сохраняет бесконечное пересечение $\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}} - A$. Таким

---

[1]) Теорема 24.10 найдена Сикорским. См. Расёва и Сикорский [1] и Расёва [2]. Другое алгебраическое доказательство теоремы 24.10 найдено Тарским.

[2]) Чех [1]. См. также Сикорский [4].

образом, в рассматриваемой здесь проблеме о представлении достаточно рассматривать только сохранение некоторого множества **M** бесконечных пересечений. Это замечание будет использовано ниже для упрощения формулировок теорем.

Пусть **M** — такой класс непустых подмножеств булевой алгебры $\mathfrak{A}$, что существуют все пересечения (5′). Говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ является **M**-*дистрибутивной*, если она обладает следующим свойством (где $H=(-1,\ 1)$):

$$B=\bigcup_{\varepsilon\in H^T}\left(B\cap\bigcap_{t\in T}\varepsilon(t)\cdot A_t\right) \tag{7}$$

для каждого элемента $B\in\mathfrak{A}$ и каждого индексированного множества $\{A_t\}_{t\in T}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, такого, что для любой функции $\varepsilon\in H^T$ множество, образованное элементами

$$B,\ \varepsilon(t)\cdot A_t \qquad (t\in T), \tag{8}$$

принадлежит классу **M**. В формуле (7) и в дальнейшем $B\cap\bigcap_{t\in T}\varepsilon(t)\cdot A_t$ обозначает пересечение всех элементов (8) (это пересечение может существовать даже тогда, когда пересечения $\bigcap_{t\in T}\varepsilon(t)\cdot A_t$ не существует).

Пусть **M** — любой класс непустых подмножеств булевой алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что существуют все пересечения (5′). Мы обозначим через **M**′ наименьший класс непустых подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$, такой, что

(a_0) **M** является подклассом класса **M**′,

(a_1) все одноэлементные подмножества принадлежат классу **M**′,

(a_2) объединение двух множеств из класса **M**′ также принадлежит классу **M**′,

(a_3) если $\mathfrak{S}\in\mathbf{M}'$, а пересечение (5′) всех элементов из $\mathfrak{S}$ равно $\wedge$, то каждое множество $\mathfrak{S}'\supset\mathfrak{S}$ принадлежит классу **M**′.

Такой наименьший класс **M**′ всегда существует (именно, его можно определить, как пересечение всех классов, удовлетворяющих условиям (a_0) — (a_3)). Для любого множества $\mathfrak{S}\in\mathbf{M}'$ пересечение $\bigcap_{A\in\mathfrak{S}}A$ существует.

24.11. *Для того чтобы существовал изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств некоторого множества X, сохраняющий все бесконечные пересечения* (5′) *из класса* **M**, *необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была* **M**′*-дистрибутивной* [1]).

Для доказательства необходимости заметим сначала, что если h сохраняет все бесконечные пересечения из **M**, то h также сохраняет все бесконечные пересечения из класса **M**′. Для любых элементов B, $A_t \in \mathfrak{A}$ $(t \in T)$ имеет место равенство

$$h(B) = \bigcup_{\varepsilon \in H^T}^{\mathfrak{F}} \left(h(B) \cap \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{F}} \varepsilon(t) \cdot h(A_t) \right),$$

потому что все операции в правой части равенства являются теоретико-множественными. Если все множества (8) лежат в классе **M**′, то

$$h(B) \cap \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{F}} \varepsilon(t) \cdot h(A_t) = h\left(B \cap \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t \right).$$

Таким образом,

$$h(B) = \bigcup_{\varepsilon \in H^T}^{\mathfrak{F}} \left(h\left(B \cap \bigcap_{t \in T} \varepsilon(t) \cdot A_t \right) \right),$$

что доказывает равенство (7) (см. последнее замечание примера А § 22, стр. 135).

Для доказательства достаточности предположим, что алгебра $\mathfrak{A}$ является **M**′-дистрибутивной. Пусть $\{A_t\}_{t \in T}$ — индексированное множество, содержащее все элементы алгебры $\mathfrak{A}$. Для любой функции $\varepsilon \in H^T$ через $\mathfrak{S}_\varepsilon$ обозначим множество всех элементов $\varepsilon(t) \cdot A_t$. Таким образом, согласно формуле (7),

$$B = \bigcup_{\varepsilon \in H^T} \left(B \cap \bigcap_{A \in \mathfrak{S}_\varepsilon} A \right) \tag{9}$$

при условии, что для каждого $\varepsilon \in H^T$ множество, образованное элементом B и всеми элементами из $\mathfrak{S}_\varepsilon$, принадлежит классу **M**′.

Для каждого $\varepsilon \in H^T$ через ∇_ε обозначим множество всех таких элементов $C \in \mathfrak{A}$, что

$$C \supset \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A \text{ для множества } \mathfrak{S} \in \mathbf{M}', \ \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_\varepsilon. \tag{10}$$

---

[1]) Брюнс [1].

Из условия (a_2) следует, что ∇_ε является фильтром алгебры $\mathfrak{A}$. Из (a_1) вытекает, что для каждого $t \in T$ или A_t, или $-A_t$ принадлежит ∇_ε. Таким образом, фильтр ∇_ε или максимальный, или несобственный. Из определения (10) (см. также стр. 146) немедленно вытекает, что если ∇_ε — максимальный фильтр, то ∇_ε сохраняет все бесконечные пересечения из класса $\mathbf{M}'$, в частности все бесконечные пересечения из класса $\mathbf{M}$ [см. (a_0)].

Согласно теореме 24.9, достаточно доказать, что для каждого ненулевого элемента $B \in \mathfrak{A}$ существует такая функция $\varepsilon \in H^T$, что $B \in \nabla_\varepsilon$, а фильтр ∇_ε максимальный. Предположим противное, т. е. что существует такой элемент $B \neq \wedge$, что для каждого $\varepsilon \in H^T$ или ∇_ε — несобственный идеал, или $B \notin \nabla_\varepsilon$. Другими словами, фильтр, порожденный элементом B и фильтром ∇_ε, является несобственным, т. е., согласно условию (10), существует такое множество $\mathfrak{S} \in \mathbf{M}'$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_\varepsilon$, что

$$B \cap \bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A = \wedge.$$

В силу условий (a_1) и (a_2) множество, образованное элементом B и элементами из множества $\mathfrak{S}$, принадлежит классу $\mathbf{M}'$. Согласно условию (a_3), множество, образованное элементом B и всеми элементами из $\mathfrak{S}_\varepsilon$, принадлежит классу $\mathbf{M}'$. Поскольку $B \cap \bigcap_{A \in \mathfrak{S}_\varepsilon} A = \wedge$, то мы получаем из равенства (9) равенство $B = \wedge$.

Пример. Г) Допустим, что $\mathbf{M}$ есть класс всех подмножеств булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$, мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$. Теорема 24.11 дает тогда необходимое и достаточное условие для того, чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств.

Заметим, что в этом случае алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathbf{M}$-дистрибутивной тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{m}$-дистрибутивна в силу теорем 19.1 и 19.2. Условие $\mathbf{M}'$-дистрибутивности является более сильным условием, чем $\mathfrak{m}$-дистрибутивность.

§ 25. Полные булевы алгебры

Если $\mathfrak{A}$ — полная булева алгебра, то справедливо утверждение, обратное теореме 24.4. Более точно:

25.1. *Полная булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна полному полю множеств тогда и только тогда, когда она атомна. В этом случае алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна полю всех подмножеств множества всех атомов алгебры $\mathfrak{A}$* [1]).

Достаточно доказать, что если алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна полному полю множеств, то она атомна. Остальная часть теоремы 25.1 следует из теоремы 24.4.

Поэтому достаточно доказать, что каждое полное поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X является атомным. Пусть A — непустое множество поля $\mathfrak{F}$ и $x_0 \in A$. Пересечение A_0 всех множеств $B \in \mathfrak{F}$, таких, что $x_0 \in B$, является атомом поля $\mathfrak{F}$ и $A_0 \subset A$.

Из теоремы 25.1 следует, что две полные атомные булевы алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда мощности их множеств атомов равны (см. частный случай в примерах Б § 8 и Г § 9 для бесконечных булевых алгебр, являющихся частными случаями полных булевых алгебр).

Другой критерий дается следующей теоремой.

25.2. *Полная булева алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна полному полю множеств тогда и только тогда, когда она вполне дистрибутивна.*

Необходимость полной дистрибутивности вытекает из того факта, что каждое полное поле множеств является вполне дистрибутивным.

Для доказательства достаточности предположим, что множество $\{A_t\}_{t \in T}$ содержит все элементы вполне дистрибутивной полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть S — множество, состоящее только из чисел -1, 1, а $A_{t,s} = s \cdot A_t$ для $t \in T$ и $s \in S$. Для каждой функции $\varphi \in S^T$ элемент

$$\bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} \tag{1}$$

[1]) Теорема 25.1 доказана Линденбаумом и Тарским (см. Тарский [2]), теорема 25.2 доказана Тарским [2]. См. также Хорн и Тарский [1].

или равен $\wedge$, или является атомом [поскольку выполнено условие (3) § 9]. Согласно дистрибутивности [см. (d_2) теоремы 19.2], каждый элемент $A \neq \wedge$ ($A \in \mathfrak{A}$) содержит некоторый атом (1). Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{A}$ является атомной.

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ является *однородной*, если для каждого $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq \wedge$, алгебра $\mathfrak{A} \mid A$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}$. Мы приведем два важных примера полных однородных алгебр.

Примеры. А) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских подмножеств пространства X всех вещественных чисел, а Δ — идеал всех борелевских множеств лебеговой меры нуль. Тогда полная булева алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\Delta$ является однородной.

Действительно, если $A \in \mathfrak{F}$, $[A] \neq \wedge$, то существует такое взаимно однозначное отображение φ множества A на пространство X, что для каждого $B \subset A$ множество $\varphi(B)$ является борелевским тогда и только тогда, когда борелевским является множество B, и $\varphi(B)$ имеет положительную меру тогда и только тогда, когда B имеет положительную меру [1]).

Следовательно, отображение φ индуцирует изоморфизм алгебры $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\Delta$ на $\mathfrak{F}_A/\Delta_A$, где $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{F} \mid A$, а $\Delta_A = \Delta \cap \mathfrak{F}_A$. Согласно примеру В § 10, алгебра $\mathfrak{F}_A/\Delta_A$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A} \mid [A]$. Значит, алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A} \mid [A]$.

Б) Пусть X — такое топологическое пространство, что

(h) каждое непустое открытое множество содержит открытое подмножество, гомеоморфное пространству X.

Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских множеств пространства X, а Δ — идеал всех борелевских множеств первой категории. Тогда полная булева алгебра $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\Delta$ является однородной.

В самом деле, каждый элемент $A \in \mathfrak{A}$ можно представить в форме $A = [G]$, где G — открытое множество. Если $A \neq \wedge$, то G непусто и содержит открытое подмноже-

[1]) См., например, Марчевский [15].

ство G_0, гомеоморфное X. Поле $\mathfrak{F}_0$ всех борелевских множеств топологического пространства G_0 и идеал Δ_0 всех борелевских множеств первой категории в пространстве G_0 удовлетворяют равенствам

$$\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F} \mid G_0, \qquad \Delta_0 = \Delta \cap \mathfrak{F}_0.$$

Таким образом, в силу примера В § 10 алгебра $\mathfrak{A} \mid A_0$, где $A_0 = [G_0] \in \mathfrak{A}$, изоморфна алгебре $\mathfrak{F}_0/\Delta_0$. С другой стороны, гомеоморфизм G_0 на X индуцирует изоморфизм алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на $\mathfrak{F}_0/\Delta_0$. Это доказывает, что алгебра $\mathfrak{A} \mid A_0$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}$. Поскольку $A_0 \subset A$, то по теореме 22.6 алгебра $\mathfrak{A} \mid A$ тоже изоморфна алгебре $\mathfrak{A}$.

Примером пространства X со свойством (h) является пространство всех вещественных чисел. Легко видеть, что в этом случае алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$.

Другой важный пример[1]) топологического пространства со свойством (h) — это обобщенный канторов дисконтинуум $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}} = H^{T_0}$ ($\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$), определенный на стр. 71. Действительно, каждое непустое открытое множество $G \subset \mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ является объединением множеств

$$(2) \qquad \varepsilon_1 \cdot D_{t_1} \cap \ \ldots \ \cap \varepsilon_n \cdot D_{t_n} \quad (t_i \in T_0,\ \varepsilon_i = \pm 1),$$

где обозначения заимствованы со стр. 71. Легко проверить, что каждое множество типа (2) гомеоморфно пространству $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$.

Предположим, что $\mathfrak{n}$ — бесконечное кардинальное число. Класс всех множеств (2) имеет мощность $\mathfrak{n}$. Поскольку каждый класс непересекающихся множеств вида (2) является конечным или счетным (см. пример М § 20), то каждое открытое множество в $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ есть объединение конечной или счетной последовательности множеств (2) и нигде не плотного множества. Это значит, что число элементов в алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$ не превосходит $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$. Это значит также, что каждый элемент алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ можно представить в виде

$$(3) \qquad [G \times H^{T_0 - T'}],$$

где T' — конечное или счетное множество, а G — открытое подмножество канторова дисконтинуума $H^{T'}$. Более того,

---

[1]) Пирс [4].

для каждого счетного множества $T \subset T_0$ можно найти такое множество $G_T \subset H^T$, что если G — другое открытое множество, такое, что $G \subset H^{T'}$, и

$$[G_T \times H^{T_0 - T}] = [G \times H^{T_0 - T'}],$$

то $T \subset T'$ (чтобы построить множество G_T, удобно представлять H^T для счетного T как канторово совершенное множество вещественных чисел, определенное на стр. 48, см. сноску на стр. 71). Это доказывает, что $[G_{T_1}] \neq [G_{T_2}]$ для различных счетных множеств $T_1, T_2 \subset T_0$. Поскольку класс всех счетных подмножеств множества T_0 имеет мощность $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$, то мы получаем, что алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ содержит не менее $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$ элементов. Следовательно, алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ имеет в точности $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$ элементов.

Таким образом, для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{n}$ существует полная однородная булева алгебра мощности $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$ [1]).

Все известные примеры полных булевых алгебр изоморфны прямым объединениям полных однородных булевых алгебр. Не известно, всякая ли полная булева алгебра обладает этим свойством. Ответ на этот вопрос утвердительный, если однородность заменить на аналогичное свойство, называемое слабой однородностью. Это следует из теоремы 25.3.

Для любого ненулевого элемента A фиксированной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ через $\operatorname{card} A$ мы будем обозначать мощность булевой алгебры $\mathfrak{A} \mid A$. По определению функция $\operatorname{card} A$ обладает следующим свойством монотонности:

$$\text{если } A \subset B \ (A,\ B \in \mathfrak{A}), \text{ то } \operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} B.$$

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ является *слабо однородной*, если $\operatorname{card} A = \operatorname{card} \vee$ (т. е. $\operatorname{card} A = \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$) для каждого $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq \wedge$.

25.3 [2]). *Для каждой невырожденной полной булевой*

---

[1]) Пирс [4]. Ранее Гинзбург [2] доказал, что для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{n}$ существует однородная алгебра мощности $2^{\mathfrak{n}}$.

[2]) Пирс [4], где теорема сформулирована более общим образом. Под $\operatorname{card} A$ понимается любая функция со значениями в кардинальных числах, которая обладает свойством монотонности. Доказательство остается без изменений. См. также Пирс [9].

алгебры $\mathfrak{A}$ существует единственное разложение

(4) $$\vee = \bigcup_{t \in T} A_t$$

с ненулевыми непересекающимися элементами A_t, а для каждого $t \in T$ существует (вообще говоря, не единственное) разложение

(5) $$A_t = \bigcup_{s \in S_t} A_{t,s}$$

с ненулевыми непересекающимися элементами $A_{t,s}$, причем все алгебры $\mathfrak{A} \mid A_{t,s}$ слабо однородны, а

(6) $\operatorname{card} A_{t,s} = \operatorname{card} A_{t',s'}$ *тогда и только тогда, когда* $t = t'$.

Пусть T_0 — множество всех кардинальных чисел, не превосходящих $\operatorname{card} \vee$. Для каждого $t \in T_0$ положим

(7) $$B_t = \bigcup_{\operatorname{card} A \leqslant t} A$$

и

(8) $$A_t = B_t - \bigcup_{t' < t} B_{t'}.$$

Элементы A_t не пересекаются и обладают следующими свойствами:

(9) если $\wedge \neq B \subset A_t$, то существует такое A, что $A \cap B \neq \wedge$ и $\operatorname{card} A = t$,

(10) если $\wedge \neq C \subset A_t$, то $\operatorname{card} C \geqslant t$,

ибо неравенство $t' = \operatorname{card} C < t$ означало бы $C \subset B_t$ и $C \cap A_t = \wedge$.

Единичный элемент является объединением всех элементов A_t, $t \in T_0$, поскольку объединение всех A_t равно объединению всех B_t, а последнее из множеств B_t равно $\vee$.

Пусть T — множество всех таких $t \in T_0$, что $A_t \neq \wedge$. Ясно, что равенство (4) имеет место.

Для каждого $t \in T$ через $\{A_{t,s}\}_{s \in S_t}$ обозначим максимальное множество непересекающихся ненулевых подэлементов элемента A_t, такое, что

(11) $$\operatorname{card} A_{t,s} = t.$$

По определению имеет место свойство (6). Мы докажем равенство (5).

Допустим что равенство (5) не имеет места для некоторого $t \in T$, т. е. существует такой ненулевой элемент $B \subset A_t$, что $B \cap A_{t,s} = \wedge$ для каждого $s \in S_t$. Пусть A — элемент, удовлетворяющий условию (9). Согласно условию (10), элемент $C = A \cap B$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{card} C \geqslant t$. По монотонности $\operatorname{card} C \leqslant \operatorname{card} A = t$. Таким образом, $\operatorname{card} C = t$. Это противоречит максимальности множества $\{A_{t,s}\}_{s \in S_t}$, поскольку элемент C не пересекается со всеми $A_{t,s}$, $s \in S_t$.

Алгебра $\mathfrak{A} \mid A_{t,s}$ является слабо однородной. Действительно, предположим, что $\wedge \neq C \subset A_{t,s}$. Тогда $\operatorname{card} C \leqslant t$ по монотонности и $\operatorname{card} C \geqslant t$, согласно свойству (10). Таким образом, $\operatorname{card} C = t = \operatorname{card} A_{t,s}$, а $A_{t,s}$ является единичным элементом алгебры $\mathfrak{A} \mid A_{t,s}$.

Осталось доказать, что разложение (7) единственно. Предположим, что $\{A_t\}_{t \in T}$ и $\{A_{t,s}\}_{s \in S_t}$ $(t \in T)$ — два индексированных множества, удовлетворяющих условиям теоремы 25.3. Согласно условию (6), можно считать, что индекс t совпадает с кардинальным числом $\operatorname{card} A_{t,s}$. Тогда $A_{t,s} \subset B_t - \bigcup_{t' < t} B_t$, где B_t определяется по формуле (7). Следовательно, из равенства (4) и (5) вытекает, что элемент A_t совпадает с элементами типа (8). Это завершает доказательство теоремы 25.3.

Слабая однородность алгебры $\mathfrak{A} \mid A_{t,s}$ означает, что для каждого кардинального числа $t \in T$ или $t = 2$, или t — бесконечное число, и, значит, $t \geqslant 2^{\aleph_0}$ в силу примера Д § 20. Обозначим через T' множество всех бесконечных кардинальных чисел множества T, а через $\mathfrak{n}$ — мощность алгебры $\mathfrak{A}$. Из равенств (4), (5) и свойства (6) следует, что

$$\mathfrak{n} = 2^{\overline{\overline{S}}_2} \cdot \prod_{t \in T'} t^{\overline{\overline{S}}_t}$$

[см. (1) § 16 и пример Д § 22]. Если $2 \notin T$, то $\overline{\overline{S}}_2 = 0$.

Теперь заметим, что если булева алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна и слабо однородна, то мощность t алгебры $\mathfrak{A}$ обладает свойством

$$t^{\aleph_0} = t. \tag{12}$$

В самом деле, в этом случае существует такая бесконечная последовательность C_n непересекающихся ненулевых элементов, что $\vee = \bigcup\limits_{1 \leqslant n < \infty} C_n$. Следовательно,

$$t = \overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \prod_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{\mathfrak{A} \mid C_n}} = t^{\aleph_0}.$$

Из равенства (12) мы получаем следующее соотношение на мощность $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{n}^{\aleph_0} = 2^{\overline{\overline{S}}_2 \cdot \aleph_0} \cdot \prod_{t \in T} t^{\overline{\overline{S}}_t}.$$

Допустим теперь, что алгебра $\mathfrak{A}$ бесконечна. Тогда или S_2 бесконечно, или T' непусто.

Если S_2 — бесконечное множество, то $\overline{\overline{S}}_2 \cdot \aleph_0 = \overline{\overline{S}}_2$ и, значит,

(13) $$\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{n}.$$

Если S_2 конечно, то T' содержит по крайней мере одно кардинальное число t_0, $t_0 \geqslant 2^{\aleph_0}$. Значит, [см. (1) § 16 и пример Д § 22]

$$2^{\overline{\overline{S}}_2 \cdot \aleph_0} \cdot t_0^{\overline{\overline{S}}_{t_0}} = t_0^{\overline{\overline{S}}_{t_0}} = 2^{\overline{\overline{S}}_2} \cdot t_0^{\overline{\overline{S}}_{t_0}},$$

и соотношение (13) снова справедливо. Таким образом, мы доказали, что мощность $\mathfrak{n}$ любой бесконечной полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ удовлетворяет равенству (13). С другой стороны, если кардинальное число $\mathfrak{n}$ удовлетворяет соотношению (13), то существует полная булева алгебра, мощность которой равна $\mathfrak{n}$. Действительно, из замечания в конце примера Б следует, что существует однородная полная булева алгебра мощности $\mathfrak{n}^{\aleph_0}$, т. е. мощности $\mathfrak{n}$, согласно условию (13). Итак, мы показали, что

25.4. *Для того чтобы кардинальное число* $\mathfrak{n}$ *было мощностью некоторой полной булевой алгебры, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{n}^{\aleph_0} = \mathfrak{n}$[1]).

Напомним, что из обобщенной гипотезы континуума $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ следует, что соотношение (13) имеет место для всех кардинальных чисел, кроме тех, которые можно

[1]) Пирс [4].

представить в виде суммы счетной последовательности меньших кардинальных чисел.

Теперь мы дадим топологическую характеристику полных булевых алгебр.

Допустим, что X является топологическим пространством, а $N \subset X$. Если A — открыто-замкнутое множество в пространстве X, то $B = A - N$ является открыто-замкнутым множеством в топологическом пространстве $X - N$. Мы будем говорить, что множество N *разделяет* пространство X, если класс всех множеств вида

$$B = A - N, \tag{14}$$

где A как открыто, так и замкнуто в пространстве X,

является собственным подклассом класса всех открыто-замкнутых подмножеств топологического пространства $X - N$ [т. е. если $X - N$ содержит по крайней мере одно подмножество B, которое открыто и замкнуто в пространстве $X - N$, но не представляется в форме (14)].

25.5. *Булева алгебра $\mathfrak{A}$ является полной тогда и только тогда, когда ни одно нигде не плотное замкнутое подмножество не разделяет пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$* [1]).

Поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ полна тогда и только тогда, когда пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ является экстремально несвязным, достаточно доказать, что топологическое пространство X является экстремально несвязным тогда и только тогда, когда ни одно нигде не плотное подмножество N не разделяет X. Для любого множества $S \subset X$ через $\mathbf{C}S$ будем обозначать замыкание множества S в пространстве X.

Пусть B — подмножество пространства $X - N$, которое является открыто-замкнутым. Поскольку N замкнуто, то непересекающиеся множества B и $B' = (X - N) - B$ открыты в X. Следовательно, $\mathbf{C}B \cap B' = \wedge$. Таким образом, $B = A - N$, где $A = \mathbf{C}B$. Если пространство X экстремально несвязно, то A является открыто-замкнутым в пространстве X, т. е. N не разделяет пространства X.

Обратно, предположим, что ни одно нигде не плотное

---

[1]) Двингер [2].

замкнутое подмножество не разделяет пространства X. Пусть B — любое открытое подмножество пространства X. Тогда множество $N = \mathbf{C}B - B$ нигде не плотно и замкнуто, а B как открыто, так и замкнуто в пространстве $X - N$. Значит, существует такое открыто-замкнутое в пространстве X множество A, что $B = A - N$. Следовательно, $B \subset A$ а, значит, $\mathbf{C}B \subset \mathbf{C}A = A$. Поскольку $B = A - (\mathbf{C}B - B)$, мы получаем, что $\mathbf{C}B = A$. Таким образом, замыкание $\mathbf{C}B$ любого открытого множества B является открытым, т. е. пространство X является экстремально несвязным.

§ 26. Поле всех подмножеств некоторого множества

Согласно определению на стр. 159, полное поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества X является $\mathfrak{m}$-совершенным, если и только если каждая двузначная мера m на поле $\mathfrak{F}$ определяется некоторой точкой $x_0 \in X$. Отметим, что мера m определяется точкой x_0 тогда и только тогда, когда $m((x_0)) = 1$.

Если $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n} = \overline{\overline{Y}}$ и поле всех подмножеств множества X является $\mathfrak{m}$-совершенным, то поле всех подмножеств множества Y тоже является $\mathfrak{m}$-совершенным. Таким образом, свойство быть $\mathfrak{m}$-совершенным зависит только от мощности $\mathfrak{n}$ множества X. Следовательно, мы будем говорить, что кардинальное число $\mathfrak{n}$ является $\mathfrak{m}$-*совершенным*, если равенство $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n}$ влечет за собой тот факт, что поле всех подмножеств множества X является $\mathfrak{m}$-совершенным.

Если $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, то $\mathfrak{n}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным, поскольку для любой двузначной $\mathfrak{m}$-меры m на поле всех подмножеств множества X мощности $\mathfrak{n}$ имеет место равенство

$$\sum_{x \in X} m((x)) = m(X) = 1, \tag{1}$$

и поэтому $m((x_0)) = 1$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Таким образом, единственным интересным оказывается случай $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$. Это неравенство предполагается выполненным в следующей теореме.

26.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *кардинальное число* $\mathfrak{n}$ *является* $\mathfrak{m}$-*совершенным;*

(ii) *для каждой булевой* $\mathfrak{n}$*-алгебры* $\mathfrak{A}$ *всякая двузначная* $\mathfrak{m}$*-мера (всякий двузначный* $\mathfrak{m}$*-гомоморфизм) на алгебре* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{n}$*-мерой (*$\mathfrak{n}$*-гомоморфизмом);*

(iii) *для каждой булевой* $\mathfrak{n}$*-алгебры* $\mathfrak{A}$ *всякий максимальный* $\mathfrak{m}$*-фильтр (максимальный* $\mathfrak{m}$*-идеал) в алгебре* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{n}$*-фильтром (*$\mathfrak{n}$*-идеалом);*

(iv) *для каждой булевой* $\mathfrak{n}$*-алгебры* $\mathfrak{A}$ *всякий* $\mathfrak{m}$*-гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в произвольную полную атомную булеву алгебру* $\mathfrak{A}'$ *является* $\mathfrak{n}$*-гомоморфизмом.*

Согласно естественному взаимно однозначному соответствию между двузначными мерами, двузначными гомоморфизмами, максимальными фильтрами и максимальными идеалами (см. стр. 32 и стр. 147), оба варианта условия (ii) и оба варианта условия (iii) эквивалентны.

Из (i) следует (ii). Пусть m — двузначная $\mathfrak{m}$-мера на булевой $\mathfrak{n}$-алгебре $\mathfrak{A}$. Нам нужно доказать, что

$$m\left(\bigcup_{x\in X} A_x\right) = \sum_{x\in X} m(A_x) \tag{2}$$

для каждого индексированного множества $\{A_x\}_{x\in X}$ непересекающихся элементов алгебры $\mathfrak{A}$, причем $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n}$. Это равенство имеет место, если $m\left(\bigcup_{x\in X} A_x\right) = 0$ [см. (4) § 3].

Допустим, что $m\left(\bigcup_{x\in X} A_x\right) = 1$. Тогда формула

$$m'(B) = m\left(\bigcup_{x\in B} A_x\right) \text{ для } B \subset X$$

определяет двузначную $\mathfrak{m}$-меру m' на поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств B пространства X. В силу условия (i) мера m' определяется некоторой точкой $x_0 \in X$, т. е. $m'((x_0)) = 1$ и, значит, $m(A_{x_0}) = 1$. Поскольку m — двузначная мера и $A_x \cap A_{x_0} = \wedge$ при $x \neq x_0$, то $m(A_x) = 0$ при $x \neq x_0$. Это доказывает равенство (2).

Из (ii) следует (i). Пусть m — двузначная $\mathfrak{m}$-мера на булевой алгебре $\mathfrak{A}$, равной полю $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества X, $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n}$. В силу условия (ii) мера m является $\mathfrak{n}$-мерой и, значит,

$$\sum_{x\in X} m((x)) = m(X) = 1,$$

а это означает, что $m((x_0))=1$ для некоторой точки $x_0 \in X$. Эта точка x_0 определяет меру m.

Из (ii) следует (iv). Согласно теореме 25.1, достаточно рассмотреть только случай, когда $\mathfrak{A}'$ является полем $\mathfrak{F}$ всех подмножеств некоторого пространства X. В силу § 16 мы можем представить алгебру $\mathfrak{A}'$ в виде прямого объединения двухэлементных булевых алгебр $\{\mathfrak{B}_x\}_{x \in X}$, где $\mathfrak{B}_x$ состоит только из пустого множества и одноточечного множества (x). Тогда гомоморфизм h можно представить в виде $h(A)=\{h_x(A)\}_{x \in X}$, где $h_x(A)=h(A) \cap (x)$ является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}_x$. В силу условия (ii) h_x есть $\mathfrak{n}$-полный гомоморфизм. Это доказывает, что h является $\mathfrak{n}$-полным гомоморфизмом.

Из (iv) следует (ii) (для варианта с гомоморфизмами). Достаточно считать, что $\mathfrak{A}'$ есть двухэлементная булева алгебра.

26.2. *Пусть $\mathfrak{n}$ есть $\mathfrak{m}$-совершенное кардинальное число, $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$. Если булева $\mathfrak{n}$-алгебра изоморфна $\mathfrak{m}$-полю множеств, то она изоморфна некоторому $\mathfrak{n}$-полю множеств*[1]).

Это мгновенно следует из теорем 24.1 и 26.1.

26.3. *Предположим, что $\mathfrak{n}$ есть $\mathfrak{m}$-совершенное кардинальное число, $\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$, $\mathfrak{A}$ — булева $\mathfrak{n}$-алгебра и Δ_0 — некоторый $\mathfrak{m}$-идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Если булева алгебра $\mathfrak{A}/\Delta_0$ изоморфна $\mathfrak{m}$-полю множеств, то Δ_0 является $\mathfrak{n}$-идеалом*[2]).

Алгебра $\mathfrak{A}/\Delta_0$ будет булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй. Для каждого максимального $\mathfrak{m}$-идеала Δ алгебры $\mathfrak{A}/\Delta_0$ множество Δ' всех $A \in \mathfrak{A}$, таких, что $[A] \in \Delta$, является максимальным $\mathfrak{m}$-идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. По теореме 26.1 Δ' является $\mathfrak{n}$-идеалом. Согласно условию (ii) теоремы 24.1, предположение, что $\mathfrak{A}/\Delta_0$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств, означает, что идеал Δ_0 является пересечением всех только что определенных идеалов Δ'. Таким образом, Δ_0 является $\mathfrak{n}$-идеалом.

26.4. *Класс $\mathfrak{K}$ всех $\mathfrak{m}$-совершенных кардинальных чисел обладает следующими свойствами:*

---

[1]) См. Сикорский [4], Смит и Тарский [1].

[2]) Тарский [3]. См. также Смит и Тарский [1]. Они доказали другие интересные теоремы, утверждающие более высокую полноту идеалов.

(а) $\mathfrak{m}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{K}$;

(б) *если* $\mathfrak{a}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{K}$ *и* $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$, *то* $\mathfrak{b}$ *тоже принадлежит классу* $\mathfrak{K}$;

(в) *если для каждого* $t \in T$ *кардинальное число* $\mathfrak{a}_t$ *принадлежит классу* $\mathfrak{K}$ *и если* $\overline{\overline{T}}$ *тоже принадлежит классу* $\mathfrak{K}$, *то кардинальное число* $\sum_{t \in T} \mathfrak{a}_t$ *принадлежит классу* $\mathfrak{K}$;

(г) *если* $\mathfrak{a}$ *принадлежит классу* $\mathfrak{K}$, *то* $2^{\mathfrak{a}}$ *тоже принадлежит классу* $\mathfrak{K}$ [1]).

Свойство (а) было уже доказано [см. формулу (1)].

Доказательство свойства (б). Допустим, что $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Пусть $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{a}$ и X' — такое множество, что $X \subset X'$ и $\overline{\overline{X'}} = \mathfrak{b}$. Каждую двузначную $\mathfrak{m}$-меру m на поле всех подмножеств пространства X можно продолжить до двузначной $\mathfrak{m}$-меры m' на поле всех подмножеств пространства X' по формуле

$$m'(A) = m(A \cap X) \text{ для любого } A \subset X'.$$

Мера m' определяется некоторой точкой $x_0 \in X'$. Поскольку $m'(X' - X) = 0$, то мы получаем, что $x_0 \in X$. Эта точка x_0 и определяет меру m.

Доказательство свойства (в). Допустим, что $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n} = \sum_{t \in T} \mathfrak{a}_t$, где $\overline{\overline{T}}$ и все кардинальные числа $\mathfrak{a}_t$ принадлежат классу $\mathfrak{K}$. Множество X является объединением непересекающихся подмножеств $X_t (t \in T)$ мощности $\mathfrak{a}_t$ соответственно. Пусть m — двузначная $\mathfrak{m}$-мера на поле всех подмножеств множества X. Формула

$$m'(B) = m\left(\bigcup_{t \in B} X_t\right) \text{ для любого } B \subset T$$

---

[1]) Эта теорема доказана Уламом [1]. При более сильных ограничениях на мощность X она является частным случаем общей теоремы, утверждающей, что каждая σ-конечная σ-мера поля всех подмножеств пространства X сосредоточена на некотором счетном множестве. См. Банах и Куратовский [1], Банах [1], Улам [1]. Для случая $\overline{\overline{X}} = 2^{\aleph_0}$ см. также Марчевский [1], Серпинский [1]. Дальнейшие обобщения имеются у Марчевского и Сикорского [1], Мазура [1], Серпинского [2], гл. 5, и Тарского [3].

определяет двузначную $\mathfrak{m}$-меру m' на поле всех подмножеств B множества T. Таким образом, существует точка $t_0 \in T$, которая определяет меру m'. Поскольку $m'((t_0))=1$, то $m(X_{t_0})=1$. Мера m, рассматриваемая только на поле всех подмножеств множества X_{t_0}, является двузначной $\mathfrak{m}$-мерой. Следовательно, отсюда вытекает, что существует такая точка $x_0 \in X_{t_0}$, что $m((x_0))=1$. Эта точка x_0 определяет всю меру m.

Доказательство свойства (г). Пусть $\mathfrak{a}$ принадлежит классу $\mathfrak{K}$. Поскольку $\overline{\overline{\mathscr{D}_{\mathfrak{a}}}} = 2^{\mathfrak{a}}$, то достаточно доказать, что каждая $\mathfrak{m}$-мера m, заданная на поле всех подмножеств обобщенного канторова дисконтинуума $\mathscr{D}_{\mathfrak{a}} = H^{T_0}(\overline{\overline{T}}_0 = \mathfrak{a})$, определяется некоторой точкой x_0. Для каждого $t \in T_0$ пусть D_t — подмножество множества $\mathscr{D}_{\mathfrak{a}}$, определенное на стр. 71. Заметим, что для каждой функции $\varphi(t) = \pm 1$ $(t \in T_0)$ пересечение

$$\bigcap_{t \in T_0} \varphi(t) \cdot D_t \tag{3}$$

содержит ровно одну точку. Одно из множеств D_t и $-D_t$ имеет меру, равную единице. Пусть $\varphi(t)=1$, если $m(D_t)=1$, и $\varphi(t)=-1$ в противном случае. По определению

$$m(\varphi(t) \cdot D_t) = 1 \text{ и } m(-\varphi(t) \cdot D_t) = 0.$$

Согласно теореме 26.1, мера m является $\mathfrak{a}$-аддитивной. Поэтому множество (3) (для только что определенной функции φ) имеет меру единица, поскольку его дополнение имеет меру нуль [дополнение является объединением $\mathfrak{a}$ множеств $-\varphi(t) \cdot D_t$ меры нуль]. Множество (3) состоит только из одной точки x_0. Поскольку $m((x_0))=1$, то точка x_0 определяет меру m.

Теорема 26.4 доказана. Пересечение $\mathfrak{K}_{\mathfrak{m}}$ всех классов $\mathfrak{K}$ кардинальных чисел, удовлетворяющих условиям (а), (б), (в), (г), тоже удовлетворяет этим условиям. Говорят, что кардинальное число $\mathfrak{n}$ является $\mathfrak{m}$-*достижимым*, если оно принадлежит классу $\mathfrak{K}_{\mathfrak{m}}$. Если $\mathfrak{m} = \sigma = \aleph_0$, то мы вместо σ-*достижимое* будем говорить просто *достижимое*.

Например, кардинальные числа 1, 2, ..., $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$, $2^{2^{\aleph_0}}$, ..., $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, ... являются достижимыми и, следовательно, $\mathfrak{m}$-достижимыми для каждого $\mathfrak{m}$.

Существование не-$\mathfrak{m}$-достижимых (в частности, недостижимых) кардинальных чисел зависит от принятой системы аксиом для теории множеств. Действительно, с одной стороны, для всех обычно рассматриваемых систем аксиом теории множеств класс множеств, чьи мощности являются $\mathfrak{m}$-достижимыми, тоже удовлетворяет всем аксиомам, и в этой ограниченной модели аксиоматической теории множеств все кардинальные числа являются $\mathfrak{m}$-достижимыми. С другой стороны, кажется очень вероятным, что при добавлении (к принятой системе аксиом теории множеств) новой аксиомы, утверждающей существование не-$\mathfrak{m}$-достижимых кардинальных чисел, мы получим совместную систему аксиом.

Из теоремы 26.4 следует, что каждое $\mathfrak{m}$-достижимое кардинальное число является σ-совершенным. В частности, каждое достижимое число является σ-совершенным. Очевидно, каждое σ-совершенное кардинальное число является $\mathfrak{m}$-совершенным для каждого $\mathfrak{m}$.

Долгое время была открытой проблема, может ли быть σ-совершенным недостижимое кардинальное число. Недавно эта проблема была решена в положительном смысле[1]). Замечание в предыдущем абзаце показывает, что класс всех σ-совершенных кардинальных чисел очень велик, он содержит, грубо говоря, все кардинальные числа, которые обычно встречаются в математических задачах. Однако в настоящее время не известно, все ли кардинальные числа являются σ-совершенными, хотя все говорит за то, что эта гипотеза справедлива[2]).

[1]) Решение предложено Тарским [18], который получил его как следствие одной математической теоремы Ханфа [2,3]. Первое доказательство теоремы Тарского было на языке метаматематики. Доказательство на языке математики было предложено Кейслером [1]. Полное изложение см. Кейслер и Тарский [1]. Указанные работы касаются также других проблем в теории булевых алгебр. См. также Эрдёш и Тарский [2] и Ханф [4].

[2]) Скотт [4] доказал, что существование кардинальных чисел, которые не являются σ-совершенными, влечет за собой существование множеств, которые не конструктивны в смысле Гёделя [1]. Этот результат показывает, что практически невозможно указать не-σ-совершенное кардинальное число.

§ 27. Поле всех борелевских подмножеств метрического пространства

Пусть X — метрическое пространство с функцией расстояния ρ. Если $x \in X$ и множество $A \subset X$ непусто, то $\rho(x, A)$ обозначает наибольшую нижнюю грань множества всех чисел $\rho(x, y)$, где $y \in A$. Если множество A пусто, то полагаем $\rho(x, A) = 0$.

27.1. *σ-поле $\mathfrak{F}$ всех борелевских подмножеств метрического пространства X является σ-совершенным тогда и только тогда, когда поле $\mathfrak{F}'$ всех подмножеств пространства X является σ-совершенным.*

В частности, если кардинальное число $\overline{\overline{X}}$ достижимо, то поле $\mathfrak{F}$ является σ-совершенным[1]).

Если $\mathfrak{F}'$ не является σ-совершенным, то существует такая двузначная σ-мера m на поле $\mathfrak{F}'$, что $m((x)) = 0$ для каждого $x \in X$. Ограничение меры m на поле $\mathfrak{F}$ является примером двузначной σ-меры, которая не определяется никакой точкой пространства X. Таким образом, поле $\mathfrak{F}$ не σ-совершенно.

Предположим теперь, что поле $\mathfrak{F}'$ является σ-совершенным, т. е. что кардинальное число $\mathfrak{n} = \overline{\overline{X}}$ является σ-совершенным. Пусть m — двузначная σ-мера на поле $\mathfrak{F}$ и $\{G_t\}_{t<\alpha}$ — трансфинитная последовательность, образованная всеми (различными) открытыми подмножествами меры нуль пространства X, т. е.

$$(1) \qquad m(G_t) = 0 \text{ для } 0 \leqslant t < \alpha.$$

Пусть T — множество всех таких порядковых чисел t, что $0 \leqslant t < \alpha$, H_0 — пустое множество и

$$H_t = \bigcup_{t'<t} G_{t'} \quad (0 < t \leqslant \alpha).$$

---

[1]) Марчевский и Сикорский [1]. При некоторых предположениях о кардинальном числе $\overline{\overline{X}}$ эта теорема является частным случаем общей теоремы, утверждающей, что каждая конечная σ-мера на поле всех борелевских подмножеств пространства X сосредоточена на некотором сепарабельном подмножестве. См. Марчевский и Сикорский [1]. Обобщение для неметризуемых пространств см. у Катетова [2].

Для каждого множества $B \subset T$ объединение

$$S_B = \bigcup_{t \in B} (H_{t+1} - H_t)$$

является борелевским подмножеством[1]). В самом деле,

$$S_B = \bigcup_{1 \leqslant n < \infty} F_n,$$

где

$$F_n = \bigcup_{t \in B} F_{n,t},$$

а $F_{n,t}$ есть множество всех таких точек $x \in X - H_t$, что

$$\rho(x, X - H_{t+1}) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Множества $F_{n,t}$ замкнуты. Более того, если $x \in F_{n,t}$, $y \in F_{n,t'}$ и $t \neq t'$, то $\rho(x, y) \geqslant 1/n$. Следовательно, множество F_n тоже является замкнутым. Это доказывает, что S_B — борелевское множество.

Для каждого множества $B \subset T$ положим

$$m'(B) = m(S_B).$$

Функция m' является σ-мерой на поле всех подмножеств множества T и принимает только значения 0 и 1. Согласно формуле (1), $m'((t)) = 0$ для каждого $t \in T$. Кардинальное число $\overline{\overline{T}}$ удовлетворяет неравенству $\overline{\overline{T}} \leqslant 2^n$ и поэтому тоже является в силу теоремы 26.4 σ-совершенным. Это означает, что мера m' тождественно равна нулю. В частности, $m'(T) = 0$, т. е. $m(H_\alpha) = 0$, так как $H_\alpha = S_T$. Множество H_α является объединением всех открытых множеств, мера m которых равна нулю, т. е. это наибольшее открытое множество, мера m которого равна нулю. Отсюда следует, что его дополнение имеет меру 1 и состоит только из одной точки x_0. Поскольку $m((x_0)) = 1$, то эта точка x_0 определяет меру m.

Из теоремы 27.1 следует, что каждая двузначная σ-мера на борелевском поле сепарабельного метрического пространства определяется некоторой точкой, поскольку мощность пространства в этом случае не превосходит

[1]) Это утверждение является частным случаем одной общей теоремы Монтгомери [1]. См. также Куратовский [2].

$2^{\aleph_0}$, и, значит, оно σ-совершенно. Однако этот частный случай теоремы 27.1 можно доказать более простым способом.

Пусть $\{G_n\}$ — счетный открытый базис пространства X и G — объединение всех таких множеств G_n, у которых $m(G_n)=0$. Множество G является наибольшим открытым множеством со свойством $m(G)=0$ и поэтому его дополнение состоит только из одной точки, которая и определяет меру m.

Пример. А) Если метрическое пространство X несчетно и σ-совершенно, поле $\mathfrak{F}$ всех его борелевских подмножеств и поле $\mathfrak{F}'$ всех его подмножеств не обладают свойством $(e_{\aleph_0})$ из § 24 (рассмотреть, например, σ-идеал всех не более чем счетных подмножеств пространства X). Топологии, индуцированные в пространстве X с помощью поля $\mathfrak{F}$ или поля $\mathfrak{F}'$ описанным в § 24 (стр. 162) методом, одинаковы, именно это дискретная топология.

§ 28. Представление факторалгебр в виде полей множеств

Различные примеры булевых $\mathfrak{m}$-алгебр обычно имеют вид $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ — некоторое $\mathfrak{m}$-поле подмножеств пространства X, а Δ — некоторый $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$. Теперь мы обсудим проблему, когда булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ указанного выше вида изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Согласно теореме 24.3, можно всегда считать без ограничения общности, что поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным.

28.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле подмножеств пространства X, а Δ — $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$.*

Следующее условие является достаточным, а в случае, когда $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{m}$-совершенное поле, и необходимым для того, чтобы факторалгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ была изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств:

(a) *существует такое множество $X' \subset X$ (X' может принадлежать и не принадлежать полю $\mathfrak{F}$), что для каждого множества $A \in \mathfrak{F}$*

(1) $A \in \Delta$ *тогда и только тогда*, когда $A \cap X' = \Lambda$

(*т. е.* Δ *является классом всех множеств* $A \in \mathfrak{F}$, *которые лежат в* $X - X'$).

Если условие (а) *выполнено, то алгебра* $\mathfrak{F}/\Delta$ *изоморфна* $\mathfrak{m}$-*полю* $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \mid X'$ *всех множеств* $A \cap X'$, *где* $A \in \mathfrak{F}$[1]).

Если условие (а) выполнено, то алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ и $\mathfrak{F} \mid X'$ изоморфны в силу примера В § 10.

Допустим теперь, что $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-совершенное поле и алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств, т. е. $\mathfrak{F}/\Delta$ удовлетворяет условию (i) теоремы 24.1. Если ∇ — максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$, то множество всех таких $A \in \mathfrak{F}$, что $[A] \in \nabla$, является максимальным $\mathfrak{m}$-фильтром поля $\mathfrak{F}$, определенным некоторой точкой x_∇ пространства X. По определению для каждого $A \in \mathfrak{F}$

(2) $\quad [A] \in \nabla$ тогда и только тогда, когда $x_\nabla \in A$.

Множество X' всех точек x_∇ обладает свойством (а). Действительно, если $A \in \Delta$, т. е. $[A] = \wedge$, то $[A] \notin \nabla$, и, значит, согласно условию (2), $x_\nabla \notin A$ для каждого ∇. Это доказывает, что $A \cap X' = \wedge$. С другой стороны, если $A \notin \Delta$, т. е. $[A] \neq \wedge$, то по свойству (i) теоремы 24.1 существует такой максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр ∇, что $[A] \in \nabla$. Значит, по условию (2) $x_\nabla \in A$, т. е. $A \cap X' \neq \wedge$,

Следующие две теоремы непосредственно вытекают из теорем 28.1, 26.1, 27.1.

28.2. *Если мощность* $\overline{\overline{X}}$ *множества* X *является* $\mathfrak{m}$-*совершенной*, $\mathfrak{F}$ — *поле всех подмножеств пространства* X, *а* Δ *является* $\mathfrak{m}$-*идеалом поля* $\mathfrak{F}$, *то алгебра* $\mathfrak{F}/\Delta$ *изоморфна некоторому* $\mathfrak{m}$-*полю множеств тогда и только тогда, когда идеал* Δ *главный.*

28.3. *Если* X — *метрическое пространство, кардинальное число* $\overline{\overline{X}}$ *является* σ-*совершенным*, $\mathfrak{F}$ *есть* σ-*поле всех борелевских подмножеств пространства* X, *а* Δ — *некоторый* σ-*идеал поля* $\mathfrak{F}$, *то алгебра* $\mathfrak{F}/\Delta$ *изоморфна некоторому* σ-*полю множеств тогда и только тогда, когда существует такое подмножество* $X' \subset X$, *что*

$A \in \Delta$ *тогда и только тогда,*

когда пересечение $A \cap X'$ *пусто.*

---

[1]) Теоремы 28.1—28.3 доказаны Сикорским [4].

Примеры. А) Если кардинальное число $\overline{\overline{X}}$ σ-совершенно, $\mathfrak{F}$ — поле всех подмножеств пространства X, а Δ — собственный σ-идеал, содержащий все одноточечные подмножества, то алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не изоморфна никакому σ-полю множеств.

Б) Если X — метрическое пространство, мощность $\overline{\overline{X}}$ которого σ-совершенна, $\mathfrak{F}$ есть σ-поле всех борелевских пространств X, а Δ — собственный σ-идеал (поля $\mathfrak{F}$), содержащий все одноточечные подмножества, то алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не изоморфна никакому σ-полю множеств.

Этот результат обобщает результат примера А § 24.

В) Допустим, что $\mathfrak{n}$ является $\mathfrak{m}$-достижимым кардинальным числом ($\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$), $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{n}$-поле множеств, а Δ — $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$. Если идеал Δ не является $\mathfrak{n}$-полным, то алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не изоморфна никакому $\mathfrak{m}$-полю множеств[1]).

Это мгновенно следует из теоремы 26.3.

Г) Как мы уже отмечали в примере А § 24, $\mathfrak{m}$-дистрибутивность является необходимым условием для того, чтобы булева алгебра была изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Однако $\mathfrak{m}$-дистрибутивность не является достаточным условием.

В самом деле, пусть X — любое пространство мощности $2^{2^{\mathfrak{m}}}$, $\mathfrak{F}$ — поле всех подмножеств пространства X, а Δ — идеал всех подмножеств мощности, не превосходящей $2^{\mathfrak{m}}$.

По теореме 21.5 $2^{\mathfrak{m}}$-алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной. Из теоремы 28.2 следует, что алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не является изоморфной никакому $\mathfrak{m}$-полю множеств[2]).

Напомним, что в § 24 (см. теорему 24.11) было сформулировано другое, более сильное условие дистрибутивности, которое уже эквивалентно изоморфности некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств.

---

[1]) Тарский [3].

[2]) Такая же конструкция была использована Сикорским [21] в проблеме аксиоматизации понятия σ-поля множеств. См. также Хорн и Тарский [1], Сикорский [4], Смит и Тарский [1].

§ 29. Основная теорема о представлении булевых σ-алгебр. $\mathfrak{m}$-представимость

Обсуждение результатов § 28 приводит к следующему вопросу:

Всякая ли булева алгебра изоморфна некоторой факторалгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-полем множеств, а Δ есть $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$?

Ответ на этот вопрос отрицателен при $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$. Действительно, если булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле, а Δ — $\mathfrak{m}$-идеал и $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$, то алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ в силу теоремы 21.5 является σ-дистрибутивной. С другой стороны, существуют полные булевы алгебры, которые не являются σ-дистрибутивными (см. примеры А § 19 и примеры В, Г § 21).

Теперь мы докажем, что ответ на наш вопрос утвердителен, если $\mathfrak{m} = \aleph_0$.

29.1. *Для каждой булевой σ-алгебры $\mathfrak{A}$ существует σ-поле множеств $\mathfrak{F}$ и σ-идеал Δ поля $\mathfrak{F}$, такие, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$* [1]).

Более точно:

Пусть X — пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ — наименьшее σ-поле (подмножеств пространства X), содержащее все открыто-замкнутые подмножества пространства X, а Δ — σ-идеал всех подмножеств $B \in \mathfrak{F}$ первой категории в пространстве X. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$. Именно если h_0 — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, то отображение h, заданное формулой

$$h(A) = [h_0(A)]_\Delta \text{ для любого } A \in \mathfrak{A},$$

---

[1]) Эта основная теорема о представлении булевых σ-алгебр была независимо найдена Лумисом [1] и Сикорским [4]. Лумисом она опубликована в августе 1947 г., а Сикорским она была представлена (с доказательством) на съезде Польского Математического Общества в Кракове в мае 1947 г., но опубликована лишь год спустя в силу издательских трудностей в Польше после второй мировой войны.

Представленное здесь доказательство дано Сикорским [4]. Подобное доказательство было независимо найдено П. Р. Халмошем. См. также Ауман [1]. Новое доказательство основано на математических идеях, предложенных Тарским [12].

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$.

Гомоморфизм h является изоморфизмом. Это следует из топологической теоремы, утверждающей, что ни одно открытое непустое подмножество компактного хаусдорфова пространства не является множеством первой категории[1]). Следовательно, если $A \neq \wedge\ (A \in \mathfrak{A})$, то открыто-замкнутое множество $h_0(A)$ не принадлежит идеалу Δ, и, значит, $h(A)$ не является нулевым элементом в алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$.

Для доказательства того, что h отображает алгебру $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$, достаточно показать, что класс $\mathfrak{F}'$ всех таких множеств $B \in \mathfrak{F}$, что $[B] = h(A)$ для элементов $A \in \mathfrak{A}$, является σ-полем множеств (и поэтому совпадает с полем $\mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$). Если $B \in \mathfrak{F}'$, т. е. $[B] = h(A)$ для $A \in \mathfrak{A}$, то $[-B] = h(-A)$ и поэтому $-B$ также принадлежит полю $\mathfrak{F}'$. Если $B_n \in \mathfrak{F}'$ для $h = 1, 2, \ldots$, т. е. $[B_n] = h(A_n) = [h_0(A_n)]$ для некоторых элементов $A_n \in \mathfrak{A}$, то по теореме 22.2

$$\Big[\bigcup_{1 \leqslant n < \infty} B_n\Big] = \Big[\bigcup_{1 \leqslant n < \infty} h_0(A_n)\Big] = \\ = \Big[h_0\Big(\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n\Big)\Big] = h\Big(\bigcup_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}} A_n\Big).$$

Следовательно, теоретико-множественное объединение $\bigcup\limits_{1 \leqslant n < \infty} B_n$ тоже принадлежит полю $\mathfrak{F}'$, а это и доказывает, что поле $\mathfrak{F}'$ является σ-полем множеств.

Говорят, что булева алгебра является $\mathfrak{m}$-*представимой*, если она изоморфна некоторой $\mathfrak{m}$-регулярной подалгебре факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле множеств, а Δ — некоторый $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$ (другими словами, если существует $\mathfrak{m}$-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ и Δ обладают упомянутыми выше свойствами).

Таким образом, булева $\mathfrak{m}$-алгебра называется $\mathfrak{m}$-*представимой* в том и только том случае, если она изоморфна факторалгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ — некоторое $\mathfrak{m}$-поле множеств, а Δ — его $\mathfrak{m}$-идеал.

Булева $\mathfrak{m}$-алгебра является $\mathfrak{m}$-представимой тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{m}$-гомоморфным обра-

---

[1]) Чех [1]. См. также Сикорский [4].

зом $\mathfrak{m}$-поля множеств, т. е. когда существует некоторое $\mathfrak{m}$-поле множеств $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ на алгебру $\mathfrak{A}$.

Действительно, если $\mathfrak{F}$ и h с указанными выше свойствами существуют, то равенство

$$h'([A]_\Delta) = h(A) \text{ для } A \in \mathfrak{F},$$

где Δ — $\mathfrak{m}$-идеал всех таких $B \in \mathfrak{F}$, что $h(B) = \wedge$, определяет изоморфизм алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Обратно, если h' — изоморфизм алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на алгебру $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{F}$ — некоторое $\mathfrak{m}$-поле множеств, а Δ — его $\mathfrak{m}$-идеал, то та же формула определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}$ на алгебру $\mathfrak{A}$.

Из приведенной выше характеристики прямо вытекает, что любой $\mathfrak{m}$-гомоморфный образ $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгебры тоже является $\mathfrak{m}$-представимым, поскольку он также является $\mathfrak{m}$-гомоморфным образом $\mathfrak{m}$-поля множеств [другое доказательство можно получить из равенства (10) § 10].

С помощью только что введенной терминологии полученные результаты можно сформулировать следующим образом. Каждая булева σ-алгебра является σ-представимой. Для каждого $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$ существуют булевы $\mathfrak{m}$-алгебры, которые не являются $\mathfrak{m}$-представимыми [1]).

Мы рассмотрим более детально, какие булевы алгебры являются $\mathfrak{m}$-представимыми.

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, h_0 — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.

Напомним (см. § 22, стр. 140), что множество $B \subset X$ называется $\mathfrak{m}$-нигде не плотным, если оно является подмножеством нигде не плотного $\mathfrak{m}$-замкнутого множества, т. е. подмножеством теоретико-множественного пересечения

$$\bigcap_{t \in T} h_0(A_t), \text{ где } \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge \text{ и } \overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

---

[1]) Недавно Карп [1] доказал, что для каждого $\mathfrak{m} > \aleph_0$ существует не-$\mathfrak{m}$-представимая $\mathfrak{m}$-алгебра. Более точно, для каждого $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ существует полная $\mathfrak{m}$-представимая алгебра, которая не является $\mathfrak{m}^+$-представимой, причем $\mathfrak{m}^+$ — наименьшее кардинальное число, большее $\mathfrak{m}$.

Говорят, что B является множеством $\mathfrak{m}$-категории, если оно является объединением некоторого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\mathfrak{m}$-нигде не плотных множеств.

Пусть $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ — наименьшее $\mathfrak{m}$-поле, содержащее поле $\mathfrak{F}_0$, а Δ — $\mathfrak{m}$-идеал всех множеств $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, которые являются множествами $\mathfrak{m}$-категории.

Класс $\mathfrak{F}$ всех множеств вида

$$(B_0 \cup B_1) - B_2, \text{ где } B_0 \in \mathfrak{F}_0 \text{ и } B_1,\ B_2 \in \Delta,$$

является подполем поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, а $\mathfrak{F}/\Delta$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$.

Факторалгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ называется *каноническим* $\mathfrak{m}$-*представлением для алгебры* $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$, задаваемый формулой

$$h(A) = [h_0(A)]_\Delta \text{ для любого } A \in \mathfrak{A},$$

называется $\mathfrak{m}$-*каноническим гомоморфизмом*. Если он является взаимно однозначным, он называется $\mathfrak{m}$-*каноническим изоморфизмом*.

Используя приведенную выше терминологию и замечания, мы докажем следующие две теоремы.

29.2. $\mathfrak{m}$-*канонический гомоморфизм* h *является* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмом алгебры* $\mathfrak{A}$ *в алгебру* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$. *Следовательно, если* h — *изоморфизм, то алгебра* $\mathfrak{F}/\Delta$ *является* $\mathfrak{m}$-*регулярной подалгеброй алгебры* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$.

Если $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$-*алгеброй, то* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ *и, следовательно,* $\mathfrak{F}/\Delta = \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$.

Если $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge$ $(\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m})$, то пересечение всех множеств $h_0(A_t)$ принадлежит идеалу Δ и, значит, согласно (1) § 21,

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta} h(A_t) = \Big[\bigcap_{t \in T} h_0(A_t)\Big]_\Delta = \wedge.$$

Это доказывает первую часть теоремы [см. § 22 (а)].

Допустим теперь, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полной. Для доказательства того, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, достаточно показать, что $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-полем.

Заметим, что по определению поля $\mathfrak{F}$ множество B принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда существует

такой элемент $A \in \mathfrak{A}$, что

(1) $$h_0(A) - B \in \Delta \quad \text{и} \quad B - h_0(A) \in \Delta.$$

Допустим, что $B_t \in \mathfrak{F}$ для каждого $t \in T$ ($\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$), т. е.

$$h_0(A_t) - B_t \in \Delta \quad \text{и} \quad B_t - h_0(A_t) \in \Delta$$

для некоторого $A_t \in \mathfrak{A}$. Пусть $A = \bigcup^{\mathfrak{A}}_{t \in T} A_t$ и B — теоретико-множественное объединение всех B_t. Тогда

$$h_0(A) - B \subset (h_0(A) - \bigcup_{t \in T} h_0(A_t)) \cup \Big(\bigcup_{t \in T} (h_0(A_t) - B_t)\Big)$$

и

$$B - h_0(A) \subset \bigcup_{t \in T} (B_t - h_0(A_t)),$$

где $\bigcup\limits_{t \in T}$ обозначает теоретико-множественное объединение. Это доказывает (см. теорему 22.2), что A и B удовлетворяют условиям (1). Отсюда следует, что $B \in \mathfrak{F}$. Это завершает доказательство второй части теоремы 29.2.

В следующей теореме мы используем понятие $\mathfrak{m}$-фильтра в произвольных булевых алгебрах в смысле определения (D) (см. § 21, стр. 130).

29.3. *Для всякой булевой алгебры $\mathfrak{A}$ каждое из следующих условий является как необходимым, так и достаточным, для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была $\mathfrak{m}$-представимой* [1]):

(г) *$\mathfrak{m}$-канонический гомоморфизм является изоморфизмом;*

($г_1$) *если $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ есть $\mathfrak{m}$-индексированное множество (элементов алгебры $\mathfrak{A}$), такое, что*

(2) *существуют все объединения $\bigcup\limits_{s \in S} A_{t,s}$*

и пересечение $\bigcap\limits_{t \in T} \bigcup\limits_{s \in S} A_{t,s}$

и если

(3) $$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} \neq \Lambda,$$

---

[1]) Условия ($г_5$) и ($г_5'$) доказаны Чангом [1]. См. также Скотт [3]. Условие ($г_1$) доказано Пирсом [2]. Условие ($г_1$) является видоизменением (Сикорский [25]) достаточного условия, предложенного Смитом [1]. Вся теорема 29.3 опубликована Сикорским [25].

то существует функция $\varphi \in S^T$ *со свойством*

(4) $$\bigcap_{t \in T'} A_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$$

для каждого конечного множества $T' \subset T$;

(r_2) *если* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ *есть* $\mathfrak{m}$*-индексированное множество, удовлетворяющее условию* (2), *и если*

(5) $$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee,$$

то для каждого элемента $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ *существует такая функция* $\varphi \in S^T$, *что*

(6) $$A \cap \bigcap_{t \in T'} A_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$$

для каждого конечного множества $T' \subset T$;

(r_2') *если* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ *есть* $\mathfrak{m}$*-индексированное множество, удовлетворяющее условию* (2), *и если имеет место равенство* (5), *то для каждого собственного* $\mathfrak{m}$*-фильтра* ∇ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *существует такая функция* $\varphi \in S^T$, *что*

(7) $$A \cap \bigcap_{t \in T'} A_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$$

для каждого конечного множества $T' \subset T$ *и каждого* $A \in \nabla$;

(r_3) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *любое пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $\mathfrak{m}$*-открытых множеств плотно, т. е. пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $\mathfrak{m}$*-открытых множеств пересекает каждое непустое открытое множество;*

(r_3') *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *любое пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $\mathfrak{m}$*-открытых множеств пересекает любое непустое замкнутое множество, имеющее верхний характер*[1]) $\mathfrak{m}$.

(r_4) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *каждое множество* $\mathfrak{m}$*-категории является граничным множеством, т. е. ни одно открытое непустое множество не является множеством* $\mathfrak{m}$*-категории;*

(r_4') *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *ни одно замкнутое непустое множество верхнего характера* $\mathfrak{m}$ *не является множеством* $\mathfrak{m}$*-категории;*

---

[1]) См. определение на стр. 131 и теорему 21.6.

(r_5) *для каждого множества бесконечных объединений и пересечений в алгебре* $\mathfrak{A}$

$$\bigcup_{s\in S'_t} A_{t,s}=A_t,\ \text{где}\ \overline{\overline{S'_t}}\leqslant\mathfrak{m},\ t\in T',\ \overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{m},$$

(8)

$$\bigcap_{s\in S''_t} B_{t,s}=B_t,\ \text{где}\ \overline{\overline{S''_t}}\leqslant\mathfrak{m},\ t\in T'',\ \overline{\overline{T''}}\leqslant\mathfrak{m},$$

и для каждого $A\neq\wedge\ (A\in\mathfrak{A})$ *существует максимальный фильтр, содержащий* A *и сохраняющий все объединения и пересечения* (8);

(r'_5) *для каждого множества* (8) *бесконечных объединений и пересечений в алгебре* $\mathfrak{A}$ *и каждого собственного* $\mathfrak{m}$*-фильтра* ∇ *существует максимальный фильтр, содержащий* ∇ *и сохраняющий объединения и пересечения* (8).

Если $\mathfrak{A}$ — *булева* $\mathfrak{m}$*-алгебра, то каждое из приведенных выше условий является необходимым и достаточным для того, чтобы алгебра* $\mathfrak{A}$ *была изоморфна факторалгебре* $\mathfrak{F}'/\Delta'$, *где* $\mathfrak{F}'$ — *некоторое* $\mathfrak{m}$*-поле множеств, а* Δ' *есть* $\mathfrak{m}$*-идеал поля* $\mathfrak{F}'$.

Из (r_1) вытекает (r_2). Доказательство аналогично доказательству импликации (d_1) $\longrightarrow$ (d_2) в теореме 19.2.

Из (r_2) вытекает (r_3). В самом деле, допустим, что для каждого $t\in T\ (\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m})$ через G_t обозначено плотное $\mathfrak{m}$-открытое подмножество пространства X, т. е.

$$G_t=\bigcup_{s\in S} h_0(A_{t,s}),\ \text{где}\ \bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}} A_{t,s}=\vee\ (\overline{\overline{S}}\leqslant\mathfrak{m}).$$

Пусть G — любое непустое открытое подмножество пространства X. Поскольку $\mathfrak{F}_0$ является открытым базисом пространства X, то существует такой элемент $A\neq\wedge(A\in\mathfrak{A})$, что $h_0(A)\subset G$. Согласно условию (r_2), существует такая функция $\varphi\in S^T$, что имеет место условие (6), т. е.

$$h_0(A)\cap\bigcap_{t\in T'} h_0(A_{t,\varphi(t)})\neq\wedge$$

для каждого конечного множества $T'\subset T$. Так как все множества $h_0(A)$, $h_0(A_{t,s})$ являются замкнутыми в компактном пространстве X, то

$$\wedge\neq h_0(A)\cap\bigcap_{t\in T} h_0(A_{t,\varphi(t)})\subset G\cap\bigcap_{t\in T} G_t.$$

Из (r_3) вытекает (r_4) с помощью перехода к дополнениям.

Для доказательства очередной импликации удобно отождествить максимальные фильтры с точками пространства X, т. е. считать, что X есть множество всех максимальных фильтров алгебры $\mathfrak{A}$, а

$$h_0(A)=\{\nabla\in X;\ A\in\nabla\}$$

(см. доказательство теоремы 8.2).

Из (r_4) вытекает (r_5). В самом деле, множество всех максимальных фильтров, которые не сохраняют некоторые объединения или пересечения из множества (8), является множеством $\mathfrak{m}$-категории (см. теорему 22.2 и замечания на стр. 146). Согласно условию (r_4), существует точка в $h_0(A)$, которая не принадлежит этому множеству $\mathfrak{m}$-категории. Эта точка является максимальным фильтром, сохраняющим все объединения и пересечения (8), а $A\in\nabla$.

Из (r_5) следует (r_2). Допустим, что имеет место равенство (5). Применим условие (r_5) к объединению

$$\bigcup_{s\in S} A_{t,s}=\vee\ (t\in T). \tag{9}$$

Пусть ∇_0 — максимальный фильтр, сохраняющий все объединения (9) и содержащий элемент A. По определению $\nabla_0\in h_0(A)$ и $\nabla_0\in\bigcup_{s\in S} h_0(A_{t,s})$ для каждого $t\in T$. Таким образом, существует такое $s=\varphi(t)$, что $\nabla_0\in h_0(A_{t,\varphi(t)})$. Следовательно,

$$h_0(A)\cap\bigcap_{t\in T'} h_0(A_{t,\varphi(t)})\neq\wedge$$

для каждого конечного множества $T'\subset T$,

т. е. имеет место условие (6).

Из (r_2') следует (r_3'), из (r_3') следует (r_4'), из (r_4') следует (r_5'), из (r_5') следует (r_2'). Доказательство этих импликаций аналогично доказательствам импликаций (r_2)$\to$(r_3), (r_3)$\to$(r_4), (r_4)$\longrightarrow$(r_5), (r_5)$\longrightarrow$(r_2) соответственно.

Из (r_2) следует (r_2')[1]. Действительно, допустим, что имеет место равенство (5), а условие (7) не выполняется,

[1]) Доказательство этой импликации является легким видоизменением доказательства Бялыницкого-Бируля (не опубликовано) теоремы Чанга [1] о представлении.

т. е. для каждого $\varphi \in S^T$ существует такое конечное множество $T_\varphi \subset T$, а для этого множества T_φ такой элемент $A_{T_\varphi} \in \nabla$, что

$$A_{T_\varphi} \cap \bigcap_{t \in T_\varphi} A_{t, \varphi(t)} = \wedge.$$

Множество всех A_{T_φ} имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$ (поскольку класс всех конечных подмножеств множества T имеет мощность, меньшую или равную $\mathfrak{m}$). Так как ∇ является $\mathfrak{m}$-фильтром, то существует такой элемент $A \in \nabla$, что $A \subset A_{T_\varphi}$ для каждого $\varphi \in S^T$. Ясно, что $A \neq \wedge$, так как ∇ — собственный фильтр. Таким образом,

$$A \cap \bigcap_{t \in T_\varphi} A_{t, \varphi(t)} = \wedge$$

для каждого $\varphi \in S^T$, т. е. имеет место условие (r_2).

Из (r_2') следует (r_2) (взять в качестве ∇ главный фильтр, порожденный элементом A!).

Из (r_4) следует (r). В самом деле, если $A \neq \wedge (A \in \mathfrak{A})$, то $h_0(A)$ является открытым и непустым множеством. Согласно условию (r_4), множество $h_0(A) \notin \Delta$, т. е. $h(A) \neq \wedge$. Это доказывает, что h является изоморфизмом.

Если имеет место условие (r), то по теореме 29.2 алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-представимой.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-представимой, то имеет место условие (r_1). Достаточно доказать эту импликацию только в случае, когда $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$, где $\mathfrak{F}'$ — некоторое $\mathfrak{m}$-поле множеств, а Δ' — $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}'$.

Допустим, что в алгебре $\mathfrak{A}$ имеет место неравенство (3). Поскольку эта алгебра является $\mathfrak{m}$-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$, то все объединения и пересечения в формуле (3) можно рассматривать как объединения и пересечения в алгебре $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Тогда

$$A_{t,s} = [B_{t,s}] \text{ для некоторых множеств } B_{t,s} \in \mathfrak{F}'.$$

Пусть B — объединение всех конечных пересечений

$$B_{t_1, s_1} \cap \ldots \cap B_{t_n, s_n},$$

которые принадлежат идеалу Δ', и пусть

$$C_{t,s} = B_{t,s} - B.$$

Получаем, что

$$A_{t,s} = [C_{t,s}],$$

поскольку $B \in \Delta'$. Более того, для любого конечного пересечения,

(10) если $C_{t_1, s_1} \cap \ldots \cap C_{t_n, s_n} \neq \wedge$,
то $C_{t_1, s_1} \cap \ldots \cap C_{t_n, s_n} \notin \Delta'$,

т. е.

$$A_{t_1, s_1} \cap \ldots \cap A_{t_n, s_n} \neq \wedge.$$

В силу неравенства (3) $\left[\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} C_{t,s}\right] \neq \wedge$. Таким образом, множество $\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} C_{t,s}$ содержит точку x. Следовательно, для каждого $t \in T$ существует такое $s = \varphi(t)$, что $x \in C_{t, \varphi(t)}$. Поэтому

$$C_{t_1, \varphi(t_1)} \cap \ldots \cap C_{t_n, \varphi(t_n)} \neq \wedge.$$

Согласно условию (10), отсюда вытекает (4).

Последняя часть теоремы следует из только что доказанной части и определения $\mathfrak{m}$-представимых $\mathfrak{m}$-алгебр.

В случае $\mathfrak{m}$-$\aleph_0$ теорема 29.3 дает следующее обобщение теоремы 29.1.

29.4. *Каждая булева алгебра является σ-представимой.*

Это немедленно вытекает из условия (r_4) теоремы 29.3, поскольку каждое множество σ-категории является множеством первой категории, а ни одно открытое непустое подмножество компактного хаусдорфова пространства не является множеством первой категории.

В случае когда $\mathfrak{A}$ есть σ-алгебра, факторалгебра $\mathfrak{F}/\Delta$, определенная в теореме 29.1, совпадает с каноническим σ-представлением алгебры $\mathfrak{A}$. Действительно, в обоих случаях $\mathfrak{F}$ является наименьшим σ-полем, содержащим все открыто-замкнутые подмножества пространства Стоуна. Хотя идеалы Δ, упомянутые в теореме 29.1 и в определении канонического σ-представления, определяются по-разному, они равны друг другу. Действительно, из определений мгновенно вытекает, что идеал Δ, упомянутый в определении канонического σ-представления, яв-

ляется подмножеством идеала Δ, упомянутого в теореме 29.1. С другой стороны, если $A \in \mathfrak{F}$, то $A = (B_0 \cup B_1) - B_2$, где B_0 как открыто, так и замкнуто, а B_1, B_2 принадлежат идеалу Δ, упомянутому в определении канонического σ-представления. Если A — множество первой категории, т. е. A принадлежит идеалу Δ из теоремы 29.1, то B_0 пусто, и, значит, множество $A = B_1 - B_2$ принадлежит идеалу Δ в определении канонического σ-представления. Таким образом, эти два идеала совпадают.

29.5. *Булева* $\mathfrak{m}$-*алгебра является* $\mathfrak{m}$-*представимой тогда и только тогда, когда каждая ее* $\mathfrak{m}$-*подалгебра,* $\mathfrak{m}$-*порожденная не более чем* $\mathfrak{m}$ *элементами, является* $\mathfrak{m}$-*представимой.*

Это непосредственно вытекает из теоремы 29.3, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию (r_1) тогда и только тогда, когда каждая ее $\mathfrak{m}$-подалгебра, $\mathfrak{m}$-порожденная не более чем $\mathfrak{m}$ элементами, удовлетворяет условию (r_1).

Примеры. А) Пусть $\mathfrak{A}$ есть $\mathfrak{m}$-представимая булева алгебра, X — пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{F}/\Delta$ — каноническое $\mathfrak{m}$-представление алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда существует такой изоморфизм g алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в поле $\mathfrak{F}$, что

$$[g(A)]_\Delta = A \tag{11}$$

для каждого $A \in \mathfrak{F}/\Delta$. В самом деле, X является тогда пространством Стоуна алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$, и естественный изоморфизм g алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X обладает свойством (11).

Возникает вопрос, существует ли для каждого поля $\mathfrak{F}'$ подмножеств пространства X' и каждого идеала Δ' поля $\mathfrak{F}'$ такой изоморфизм g алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ в поле $\mathfrak{F}'$, чтобы имело место равенство (11). Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос[1]).

Б) Если $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$, $\mathfrak{F}'$ — поле всех подмножеств пространства мощности $\mathfrak{n}'$, а Δ' — идеал всех подмножеств мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, то не существует ни

[1]) Пример Б является частным случаем общей теоремы Неймана и Стоуна [1]. Указанная работа содержит полное исследование этого вопроса. См. также Тарский [3].

одного изоморфизма g алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ в поле $\mathfrak{F}'$, чтобы выполнялось равенство (11).

Для упрощения доказательства мы будем считать, что $\mathfrak{F}'$ является полем всех подмножеств декартова произведения $X \times X'$, где X, X' — множества мощностей $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n}'$ соответственно. Для каждого $x \in X$ положим $A_x = (x) \times X'$ и аналогично для каждого $x' \in X'$ положим $A^{x'} = X \times (x')$. Допустим, что существует такой гомоморфизм g алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ в поле $\mathfrak{F}'$, что справедливо равенство (11). Через U (U') обозначим множество всех точек (x, x'), которые не принадлежат множеству $g([A_x])$ [соответственно множеству $g([A^{x'}])$].

Ясно, что

$$U \cup U' = X \times X', \tag{12}$$

поскольку если $(x, x') \notin U \cup U'$, то

$$(x, x') \in g([A_x]) \cap g([A^{x'}]) = g([(x, x')]) = \wedge,$$

что невозможно.

Для каждого $x' \in X'$

$$A^{x'} \cap U' \text{ имеет мощность меньше } \mathfrak{n}, \tag{13}$$

поскольку $A^{x'} \cap U' \subset A^{x'} - g([A^{x'}]) \in \Delta'$ в силу равенства (11). Подобным же образом мы доказываем, что для каждого $x \in X$ пересечение $A_x \cap U$ имеет мощность, меньшую чем $\mathfrak{n}$. Отсюда вытекает, что мощность проекции множества U на сомножитель X' не превосходит $\mathfrak{n}$. Значит, существует точка x_0', которая не принадлежит этой проекции, т. е. такая, что $A^{x_0'} \subset U'$ [см. (12)]. Таким образом, $A^{x_0'} \cap U'$ имеет мощность $\mathfrak{n}$, что противоречит условию (13).

Отметим, что можно ослабить предпосылку только что доказанного утверждения. Например, достаточно предполагать, что $\mathfrak{n} < \mathfrak{n}'$, а Δ является идеалом всех подмножеств мощности меньше $\mathfrak{n}$ (в этой формулировке оно включает случай идеала всех конечных подмножеств несчетного пространства).

Рассматриваемая в этом параграфе проблема представления может быть обобщена следующим образом.

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра. Пусть далее $\mathbf{J}$ — класс таких непустых подмножеств $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$, что $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{m}$ и существует объединение

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A = A_{\mathfrak{S}} \tag{14}$$

для каждого $\mathfrak{S} \in \mathbf{J}$. Наконец, пусть $\mathbf{M}$ — класс таких непустых подмножеств $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$, что $\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{m}$ и существует пересечение

$$\bigcap_{A \in \mathfrak{S}} A = B_{\mathfrak{S}} \tag{14'}$$

для каждого $\mathfrak{S} \in \mathbf{M}$. При каких условиях существует некоторое $\mathfrak{m}$-поле множеств $\mathfrak{F}$, его $\mathfrak{m}$-идеал Δ и $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-изоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$? Мы напомним (см. стр. 143), что под $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-изоморфизмом [$(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-гомоморфизмом] мы понимаем изоморфизм (гомоморфизм), сохраняющий все объединения (14) и пересечения (14′). Если изоморфизм h, обладающий требуемыми свойствами, существует, то говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*представимой*.

Чтобы упростить формулировку ответа на поставленный вопрос, заметим, что гомоморфизм h, определенный на алгебре $\mathfrak{A}$, сохраняет все объединения (14) и пересечения (14′) тогда и только тогда, когда он сохраняет все объединения

$$\begin{aligned} &\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} (A \cup -A_{\mathfrak{S}}) = \vee \quad (\mathfrak{S} \in \mathbf{J}), \\ &\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} (-A \cup B_{\mathfrak{S}}) = \vee \quad (\mathfrak{S} \in \mathbf{M}). \end{aligned} \tag{15}$$

Обозначим через $\mathbf{J}_0$ класс всех множеств элементов вида

$$A \cup -A_{\mathfrak{S}} \qquad (A \in \mathfrak{S})$$

и всех множеств элементов вида

$$-A \cup B_{\mathfrak{S}} \qquad (A \in \mathfrak{S}),$$

где $\mathfrak{S} \in \mathbf{J}$ или $\mathfrak{S} \in \mathbf{M}$ соответственно. Удобно представлять класс $\mathbf{J}_0$ в виде индексированного множества $\{\{A_{t,s}\}_{s \in S}\}_{t \in T_0}$, где

$$\overline{\overline{S}} = \mathfrak{m}.$$

По определению

(15′) $$\bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}} A_{t,s} = \vee \text{ для каждого } t \in T_0.$$

Класс всех объединений (15′) совпадает с классом всех объединений (15). Гомоморфизм h, определенный на алгебре $\mathfrak{A}$, является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда он сохраняет все объединения (15′).

Пусть h_0 — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$. Дефектные множества

(16) $$X - \bigcup_{s\in S} h_0(A_{t,s}) \quad (t \in T_0),$$

соответствующие бесконечным объединениям из $\mathbf{J}_0$ (где $\bigcup$ обозначает теоретико-множественное объединение), являются по теореме 22.2 нигде не плотными $\mathfrak{m}$-замкнутыми множествами. Множества (16) являются в точности дефектными множествами, соответствующими объединениям (14) и пересечениям (14′). Каждое подмножество множества (16) называется ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*нигде не плотным*. Любое объединение не более чем $\mathfrak{m}$ ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-нигде не плотных множеств будет называться множеством ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*категории*. Множества

$$\bigcup_{s\in S} h_0(A_{t,s}) \qquad (t \in T_0)$$

являются плотными $\mathfrak{m}$-открытыми подмножествами пространства X. Мы их будем называть *плотными* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*открытыми множествами*.

Пусть $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ обозначает, как и раньше, наименьшее $\mathfrak{m}$-поле, содержащее поле $\mathfrak{F}_0$, а Δ обозначает теперь $\mathfrak{m}$-идеал всех множеств $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, являющихся множествами ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-категории. Гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$, определяемый формулой

$$h(A) = [h_0(A)]_\Delta \text{ для любого } A \in \mathfrak{A},$$

называется ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*каноническим гомоморфизмом*.

Этот ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-канонический гомоморфизм h (алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$) сохраняет все объединения (15′). Доказательство такое же, как и доказательство соответствующей части теоремы 29.2. Следовательно, h сохраняет все

объединения (14) и пересечения (14′), т. е. является $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$.

Ответ на наш вопрос дается следующей теоремой, формулировка которой аналогична теореме 29.3, благодаря введенной выше терминологии.

29.6. *Следующие условия эквивалентны:*

(R) $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*канонический гомоморфизм является изоморфизмом;*

(R_1) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является* $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*представимой;*

(R_2) *для каждого множества* $T \subset T_0$ *мощности меньше* $\mathfrak{m}$ *и каждого элемента* $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ *существует такая функция* $\varphi \in S^T$, *что*

$$A \cap \bigcap_{t \in T'} A_{t, \varphi(t)} \neq \wedge$$

для каждого конечного множества $T' \subset T$;

(R_2') *для каждого множества* $T \subset T_0$ *мощности, не превосходящей* $\mathfrak{m}$, *и каждого собственного* $\mathfrak{m}$-*фильтра* ∇ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *существует такая функция* $\varphi \in S^T$, *что*

$$A \cap \bigcap_{t \in T} A_{t, \varphi(t)} \neq \wedge$$

для каждого $A \in \nabla$ *и каждого конечного множества* $T' \subset T$;

(R_3) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *любое пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-*открытых множеств является плотным, т. е. любое пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-*открытых множеств пересекает каждое непустое открытое множество;*

(R_3') *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *любое пересечение не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-*открытых множеств пересекает любое непустое открытое множество верхнего характера* $\mathfrak{m}$;

(R_4) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *каждое множество* $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*категории является граничным множеством, т. е. ни одно открытое непустое множество не является множеством* $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*категории;*

(R_4') *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *ни одно замкнутое непустое множество верхнего характера* $\mathfrak{m}$ *не является множеством* $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-*категории;*

(R_5) *для каждого множества* $T \subset T_0$ *мощности, не превосходящей* $\mathfrak{m}$, *и каждого* $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ *существует максимальный фильтр, содержащий* A *и сохраняющий все объединения* $\bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee$, *где* $t \in T$;

(R_5') *для каждого множества* $T \subset T_0$ *мощности, не превосходящей* $\mathfrak{m}$, *и каждого собственного* $\mathfrak{m}$*-фильтра* ∇ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *существует максимальный фильтр, содержащий* ∇ *и сохраняющий все объединения* $\bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee$, *где* $t \in T$ [1])

Ясно, что условия (R), (R_2), (R_2'), (R_3), (R_3'), (R_4), (R_4'), (R_5), (R_5') аналогичны условиям (r), (r_2), (r_2'), (r_3), (r_3'), (r_4), (r_4'), (r_5), (r_5') теоремы 29.3 соответственно.

Доказательство теоремы 29.6 является легким видоизменением доказательства теоремы 29.3, именно, доказываются импликации

$$(R_2) \to (R_3) \to (R_4) \to (R_5) \to (R_2), \quad (R_2') \to (R_3') \to$$
$$\to (R_4') \to (R_5') \to (R_2'), \quad (R_2) \to (R_2') \to (R_2), \quad (R_4) \to (R) \to$$
$$\to (R_1) \to (R_2).$$

Заметим, что если класс **J** содержит все множества $\mathfrak{S}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, для которых существуют объединения (14), или если класс **M** содержит все множества $\mathfrak{S}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, для которых существуют пересечения (14′), то (**J**, **M**)-нигде не плотные множества совпадают с $\mathfrak{m}$-нигде не плотными множествами, множества (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-категории совпадают с множествами $\mathfrak{m}$-категории, а (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-канонический гомоморфизм — с $\mathfrak{m}$-каноническим гомоморфизмом со стр. 192. В этом случае алгебра $\mathfrak{A}$ является (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-представимой тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{m}$-представимой, а теорема 29.6 становится частью теоремы 29.3.

§ 30. Слабая ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивность

Условия (r_1) и (r_2) теоремы 29.3 о представлении аналогичны условиям (d_1) и (d_2) теоремы 19.2 (для $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$), т. е. они выражают некоторое свойство дистрибутивности,

---

[1]) Так же как и в теореме 29.3, мы используем определение (D) (см. стр. 130) $\mathfrak{m}$-фильтров.

более слабое, чем $\mathfrak{m}$-дистрибутивность, определенная в § 19. Мы введем сейчас новое свойство дистрибутивности, называемое слабой $\mathfrak{m}$-дистрибутивностью, которое слабее, чем $\mathfrak{m}$-дистрибутивность, но сильнее, чем свойства (r_1) и (r_2), т. е. сильнее чем $\mathfrak{m}$-представимость [1]). С этой целью введем следующие обозначения.

Знаки T и S будут обозначать непустые множества. Через $\boldsymbol{S}$ обозначим класс всех конечных непустых подмножеств множества S. В соответствии с соглашением, принятым на стр. 9, $\boldsymbol{S}^T$ есть множество всех функций Φ, определенных на T, со значениями в классе $\boldsymbol{S}$, т. е. таких функций, что для каждого $t \in T$ $\Phi(t)$ является конечным непустым подмножеством множества S. Если $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ — любое индексированное множество элементов булевой алгебры, а $\Phi \in \boldsymbol{S}^T$, то положим

$$A_{t,\,\Phi(t)} = \bigcup_{s \in \Phi(t)} A_{t,s}.$$

Говорят, что булева алгебра $\mathfrak{A}$ является *слабо* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивной*, если равенство

$$\bigcup_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \bigcup_{\Phi \in \boldsymbol{S}^T} \bigcap_{t \in T} A_{t,\,(\Phi)(t)}$$

выполняется для каждого ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, для которого существуют и все пересечения вида $\bigcap_{t \in T} A_{t,\,\Phi(t)}$ и

(1) существуют все объединения $\bigcup_{s \in S} A_{t,s}$

и пересечение $\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s}$.

Говорят, что алгебра $\mathfrak{A}$ является *слабо* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной*, если она является слабо ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$)-дистрибутивной.

По определению каждая булева алгебра является слабо ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивной, если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ конечно. Чтобы исключить этот тривиальный случай, мы в дальнейшем будем считать, что $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — бесконечные числа.

---

[1]) Обсуждение связей между $\mathfrak{m}$-дистрибутивностью, слабой $\mathfrak{m}$-дистрибутивностью и $\mathfrak{m}$-представимостью см. у Сикорского [27].

30.1. *Для любой булевой алгебры* $\mathfrak{A}$ *следующие условия эквивалентны*[1]):

(w) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *является слабо* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$*-дистрибутивной;*

(w_1) *для каждого* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$*-индексированного множества* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$, *удовлетворяющего условию* (1), *если*

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} \neq \wedge, \tag{2}$$

то существует такая функция $\Phi \in S^T$, *что*[2])

$$\bigcap_{t \in T} A_{t, \Phi(t)} \neq \wedge; \tag{3}$$

(w_2) *для каждого* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$*-индексированного множества* $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$, *удовлетворяющего условию* (1), *если*

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee, \tag{4}$$

то для каждого $A \neq \wedge$ $(A \in \mathfrak{A})$ *существует такая функция* $\Phi \in S^T$, *что*

$$A \cap \bigcap_{t \in T} A_{t, \Phi(t)} \neq \wedge; \tag{5}$$

(w_3) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *внутренность любого пересечения не более чем* $\mathfrak{m}$ *плотных* $\mathfrak{n}$*-открытых подмножеств является плотным подмножеством;*

(w_4) *в пространстве Стоуна алгебры* $\mathfrak{A}$ *каждое объединение не более чем* $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$*-нигде не плотных множеств является нигде не плотным множеством;*

(w_5) *если задано произвольное множество бесконечных объединений и пересечений в алгебре* $\mathfrak{A}$

$$\bigcup_{s \in S'_t} A_{t,s} = A_t, \quad \text{где} \quad \overline{\overline{S'_t}} \leqslant \mathfrak{m}, \quad t \in T', \quad \overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{m}, \tag{6}$$

$$\bigcap_{s \in S''_t} B_{t,s} = B_t, \quad \text{где} \quad \overline{\overline{S''_t}} \leqslant \mathfrak{m}, \quad t \in T'', \quad \overline{\overline{T''}} \leqslant \mathfrak{m},$$

то каждый ненулевой элемент $A \in \mathfrak{A}$ *содержит такой ненулевой элемент* B, *что всякий максимальный фильтр,*

---

[1]) См. Сикорский [25], где теорема доказана для $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$.

[2]) Соотношение (3) следует читать так: или пересечения (3) не существует или оно существует, но не равно $\wedge$. Аналогичное замечание для соотношения (5).

содержащий B, сохраняет все объединения и пересечения (6).

Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$, условие ($w_4$) можно сформулировать следующим образом:

(w_4') *в пространстве Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ каждое множество $\mathfrak{m}$-категории является нигде не плотным.*

Из (w) следует (w_1), из (w_1) следует (w_2), из (w_2) следует (w). Доказательство этих импликаций аналогично доказательству импликаций (d) $\longrightarrow$ (d_1), (d_1) $\longrightarrow$ (d_2), (d_2) $\longrightarrow$ (d) теоремы 19.2.

В доказательстве остальных импликаций h_0 обозначает изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.

Из (w_2) следует (w_3). Действительно, предположим, что для каждого $t\in T$ ($\overline{\overline{T}}\leqslant\mathfrak{m}$) множество G_t является $\mathfrak{n}$-открытым плотным подмножеством пространства X, т. е.

$$G_t=\bigcup_{s\in S} h_0(A_{t,s}),\quad \text{где}\quad \bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}} A_{t,s}=\vee,$$

($\overline{\overline{S}}\leqslant\mathfrak{n}$). Пусть G_0 обозначает внутренность пересечения множеств G_t, $t\in T$, а $G\subset X$ — любое непустое открытое подмножество пространства X. Существует такой ненулевой элемент A алгебры $\mathfrak{A}$, что $h_0(A)\subset G$. Согласно условию (w_2), существует такая функция $\Phi\in S^T$, что внутренность C пересечения

$$h_0(A)\cap\bigcap_{t\in T} h_0(A_{t\,\Phi(t)})$$

не пуста. Поскольку C — открытое множество и $C\subset h_0(A)\cap\bigcap_{t\in T} G_t$, мы получаем, что $C\subset G\cap G_0$. Поскольку пересечение G_0 с любым непустым открытым множеством G непусто, то G_0 является плотным множеством.

Из (w_3) следует (w_4) путем перехода к дополнениям.

В доказательстве очередных двух импликаций мы отождествим точки пространства X с максимальными фильтрами, т. е. будем считать, что X есть множество всех максимальных фильтров алгебры $\mathfrak{A}$, а

$$h_0(A)=\{\nabla\in X;\ A\in\nabla\}$$

(см. доказательство теоремы 8.2).

Из (w_4) следует (w_5). В самом деле, множество N всех максимальных фильтров, не сохраняющих некоторые из объединений или пересечений (6), является объединением не более чем $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{n}$-нигде не плотных множеств, именно дефектных множеств, соответствующих объединениям и пересечениям (6) (см. теорему 22.2 и замечание на стр. 146), а значит, множество N является нигде не плотным в силу условия (w_4). Таким образом, множество $h_0(A)-N$ имеет непустую внутренность, т. е. существует такой элемент $B \neq \wedge$ $(B \subset A)$, что $h_0(B) \subset h_0(A)-N$. Этот элемент B обладает требуемыми свойствами.

Из (w_5) следует (w_2). Допустим, что имеет место равенство (4). Применим условие (w_5) к объединениям

$$\bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee \qquad (t \in T). \tag{7}$$

Так как все максимальные фильтры, содержащие B [т. е. принадлежащие $h_0(B)$], сохраняют все объединения (7), то

$$h_0(B) \subset \bigcup_{s \in S} h_0(A_{t,s}) \text{ для каждого } t \in T.$$

Поскольку $h_0(B)$ замкнуто, а $h_0(A_{t,s})$ открыты, то существует такое конечное множество $\Phi(t) \subset S$, что

$$h_0(B) \subset \bigcup_{s \in \Phi(t)} h_0(A_{t,s}) = h_0(A_{t,\Phi(t)}).$$

Это означает (вместе с включением $B \subset A$), что

$$\wedge \neq B \subset A \cap A_{t,\Phi(t)} \text{ для каждого } t \in T.$$

Таким образом, неравенство (5) справедливо.

30.2. *Каждая* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивная булева алгебра является слабо* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивной*

Это немедленно следует из определения.

30.3. *Каждая слабо* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивная булева алгебра является* $\mathfrak{m}$-*представимой.*

Поскольку условие (w_3) влечет за собой (r_3), то это немедленно вытекает из теорем 29.3 и 30.1.

Примеры. А) Каждая булева σ-алгебра со строго положительной конечной (или, более общим образом, σ-конечной) σ-мерой m является слабо σ-дистрибутивной [1]).

Мы докажем это только для случая конечной меры, поскольку случай σ-конечных мер можно свести к случаю конечных мер (см. замечание в конце § 20).

Допустим, что

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} \bigcup_{1 \leqslant j < \infty} A_{n,j} = \vee,$$

и пусть $A \neq \wedge$. Поскольку мера m конечна и σ-аддитивна, то существует такое конечное множество $\Phi(n)$ положительных целых чисел, что

$$m\left(\bigcup_{j \in \Phi(n)} A_{n,j}\right) \geqslant m(\vee) - \frac{m(A)}{2^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$m\left(\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_{n,\Phi(n)}\right) \geqslant m(\vee) - \frac{m(A)}{2}.$$

Это доказывает, что $A \cap \bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_{n,\Phi(n)} \neq \wedge$, т. е. имеет место условие (w_2).

Б) Пусть $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских множеств вещественных чисел и Δ — идеал всех множеств первой категории. Полная булева алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не является слабо σ-дистрибутивной [2]).

Пусть W — множество всех иррациональных чисел единичного интервала $0 < x < 1$, а $A_{n,j}$ — множество всех $x \in W$, у которых разложение в непрерывную дробь

$$x = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$$

удовлетворяет условию $a_n = j$.

---

[1]) Эта теорема была ясно сформулирована и доказана Хорном и Тарским [1], но ранее использовалась Банахом и Куратовским [1]. См. также Нейман [2].

[2]) См. фон Нейман [2].

Тогда $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} \bigcup_{1 \leqslant j < \infty} [A_{n,j}] = [W] \neq \wedge$. С другой стороны, для каждой последовательности $\Phi(n)$ конечных множеств положительных целых чисел пересечение $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_{n, \Phi(n)}$ является компактным множеством пространства W и потому нигде не плотно, а это означает, что $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} [A_{n, \Phi(n)}] = \wedge$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не обладает свойством (w_1).

В) Если $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{m}^+$ и $2^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^+$ [1]), $\mathfrak{F}$ — поле всех множеств в пространстве X, а Δ — собственный $\mathfrak{m}$-идеал, содержащий все одноточечные подмножества пространства X, то булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ не является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной [2]).

Достаточно доказать существование такого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{B_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ подмножеств пространства X, что

$$X = \bigcup_{s \in S} B_{t,s} \quad \text{для каждого} \quad t \in T$$

и что для каждой функции $\Phi \in S^T$ множество

$$\bigcap_{t \in T} B_{t, \Phi(t)}$$

имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$. В самом деле, в этом случае в алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$ для $A_{t,s} = [B_{t,s}]$ выполняется равенство

$$\bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee \neq \wedge,$$

а для каждой функции $\Phi \in S^T$ — равенство

$$\bigcap_{t \in T} A_{t, \Phi(t)} = \wedge.$$

Поскольку существование таких множеств $B_{t,s}$ в пространстве X инвариантно при взаимно однозначных преобразованиях пространства X, то достаточно доказать это утверждение только для множества X мощности $\mathfrak{m}^+$, которое будет определено ниже. Удобно считать, что $T = S$ равно множеству всех порядковых чисел мощности мень-

---

[1]) $\mathfrak{m}^+$ обозначает наименьшее кардинальное число, большее чем $\mathfrak{m}$.

[2]) Эта теорема доказана Банахом и Куратовским [1]; см. также Банах [1].

ше $\mathfrak{m}$. Пусть U — множество всех порядковых чисел мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$. В силу предположения, что $2^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^+$, существует индексированное множество $\{f_u\}_{u \in U}$, содержащее все элементы множества S^T.

Для любых функций $f, g \in S^T$ мы будем писать $g \leqslant f$, если $g(t) \leqslant f(t)$ для каждого $t \in T$. Заметим, что для любого множества $X_0 \subset S^T$, $\overline{\overline{X}}_0 \leqslant \mathfrak{m}$, мы можем с помощью диагонального метода построить такую функцию $g \in S^T$, что ни для какого $f \in X_0$ неравенство $g \leqslant f$ не выполняется. Следовательно, для каждого порядкового числа $u \in U$ существует такая функция $g = f_{\varphi(u)}$, что ни для какого $u' \leqslant u$ неравенство $f_{\varphi(u)} \leqslant f_{\varphi(u')}$ не выполняется ($\varphi \in U^U$). Более того, мы можем считать, что $f_{\varphi(u)} \neq f_{\varphi(u_1)}$ для $u \neq u_1$.

Пусть теперь X — множество всех функций $f_{\varphi(u)}$, $u \in U$. Ясно, что X имеет требуемую мощность и

(8) для каждой функции $f \in S^T$ множество всех таких $g \in X$, что $g \leqslant f$, имеет мощность, не превосходящую $\mathfrak{m}$.

Пусть $B_{t,s}$ — множество всех таких $f \in X$, что $f(t) = s$. Ясно, что для каждого $t \in T$ пространство X является объединением всех множеств $B_{t,s}$, $s \in S$. Пусть $\Phi \in S^T$, а $f(t)$ равно наибольшему порядковому числу в конечном непустом множестве $\Phi(t)$. По определению $f \in S^T$, а пересечение $\bigcap_{t \in T} B_{t, \Phi(t)}$ является подмножеством множества всех таких $g \in X$, что $g \leqslant f$. В силу условия (8) оно имеет мощность, меньшую или равную $\mathfrak{m}$.

Г) Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, удовлетворяющая σ-цепному условию. Алгебра $\mathfrak{A}$ является σ-дистрибутивной тогда и только тогда, когда в пространстве Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ каждое множество первой категории является нигде не плотным [1]).

Действительно, из примера А § 22 следует, что если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет σ-цепному условию, то понятия „σ-нигде не плотный“ и „нигде не плотный“ совпадают в пространстве Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$. Следовательно, множества σ-категории совпадают с множествами первой категории. Поэтому наше замечание немедленно вытекает из условия (w_4') теоремы 30.1.

---

[1]) Эту теорему доказали Келли [2] и Дж. Окстоби.

§ 31. Свободные булевы $\mathfrak{m}$-алгебры

Пусть $\mathfrak{n}$ — произвольное кардинальное число. Говорят, что булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ является *свободной булевой* $\mathfrak{m}$-*алгеброй с* $\mathfrak{n}$ *свободными* $\mathfrak{m}$-*образующими*, если в алгебре $\mathfrak{A}$ существует подмножество $\mathfrak{S}$, для которого выполнены следующие условия:

(а) мощность множества $\mathfrak{S}$ равна $\mathfrak{n}$,

(б) множество $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$ (т. е. алгебра $\mathfrak{A}$ является наименьшей $\mathfrak{m}$-алгеброй, содержащей множество $\mathfrak{S}$),

(в) каждое отображение f множества $\mathfrak{S}$ в булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ продолжается до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Элементы множества $\mathfrak{S}$ называются *свободными* $\mathfrak{m}$-*образующими алгебры* $\mathfrak{A}$

Из предложения 23.3 вытекает, что все свободные булевы $\mathfrak{m}$-алгебры с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими изоморфны между собой.

31.1. *Свободная булева* $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,\mathfrak{n}}$ *с* $\mathfrak{n}$ *свободными* $\mathfrak{m}$-*образующими существует для любых кардинальных чисел* $\mathfrak{m}$ *и* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, $\mathfrak{n} > 0$ [1]).

Пусть N — множество мощности $\mathfrak{n}$. Следуя общим замечаниям на стр. 9, обозначим через $\mathfrak{B}^N$ множество всех отображений v множества N в булеву алгебру $\mathfrak{B}$.

Рассмотрим теперь соответствие α, которое

(г) каждой булевой $\mathfrak{m}$-алгебре $\mathfrak{B}$ сопоставляет отображение $\alpha_{\mathfrak{B}}$ множества $\mathfrak{B}^N$ в алгебру $\mathfrak{B}$.

Например, таким соответствием α может служить соответствие, при котором отображение $\alpha_{\mathfrak{B}}$ задается по формуле

$$\alpha_{\mathfrak{B}}(v) = v(n) \quad \text{для} \quad v \in \mathfrak{B}^N,$$

где n — фиксированный элемент множества N. Такое соответствие будем обозначать через n^*. Итак, по определению, если $n \in N$, то через n^* обозначается такое соответствие, которое каждой булевой $\mathfrak{m}$-алгебре $\mathfrak{B}$ сопо-

---

[1]) Ригер [5]. Приведенное здесь доказательство отличается от доказательства Ригера.

ставляет отображение $n^*_{\mathfrak{B}}$ множества $\mathfrak{B}^N$ в алгебру $\mathfrak{B}$, причем это отображение $n^*_{\mathfrak{B}}$ определяется по формуле

$$n^*_{\mathfrak{B}}(v) = v(n) \quad \text{для любого } v \in \mathfrak{B}^N.$$

Легко видеть, что

(1) если $n_1 \neq n_2$, то $n_1^* \neq n_2^*$ $(n_1, n_2 \in N)$.

Если соответствие α обладает свойством (г), то через $-\alpha$ будем обозначать соответствие, которое каждой булевой $\mathfrak{m}$-алгебре $\mathfrak{B}$ сопоставляет отображение $(-\alpha)_{\mathfrak{B}}$ множества $\mathfrak{B}^N$ в алгебру $\mathfrak{B}$, определяемое равенством

(2) $(-\alpha)_{\mathfrak{B}}(v) = -(\alpha_{\mathfrak{B}}(v))$ для любого $v \in \mathfrak{B}^N$.

Соответствие $-\alpha$ тоже обладает свойством (г). Подобным же образом для двух соответствий α и α', обладающих свойством (г), определяются соответствия $\alpha \cup \alpha'$ и $\alpha \cap \alpha'$ при помощи равенств

(3) $(\alpha \cup \alpha')_{\mathfrak{B}}(v) = \alpha_{\mathfrak{B}}(v) \cup \alpha'_{\mathfrak{B}}(v)$ для $v \in \mathfrak{B}^N$,

(4) $(\alpha \cap \alpha')_{\mathfrak{B}}(v) = \alpha_{\mathfrak{B}}(v) \cap \alpha'_{\mathfrak{B}}(v)$ для $v \in \mathfrak{B}^N$,

причем эти соответствия тоже обладают свойством (г). И вообще, если имеется семейство соответствий α_t, $t \in T$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$ и каждое из α_t обладает свойством (г), то и при помощи равенств

(5) $\left(\bigcup_{t \in T} \alpha_t\right)_{\mathfrak{B}}(v) = \bigcup_{t \in T} \alpha_{t\mathfrak{B}}(v)$ для $v \in \mathfrak{B}^N$,

(6) $\left(\bigcap_{t \in T} \alpha_t\right)_{\mathfrak{B}}(v) = \bigcap_{t \in T} \alpha_{t\mathfrak{B}}(v)$ для $v \in \mathfrak{B}^N$

определяются соответствия $\bigcup_{t \in T} \alpha_t$ и $\bigcap_{t \in T} \alpha_t$ [тоже обладающие свойством (г)].

Через $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$ обозначим наименьшее множество соответствий α, обладающих свойством (г), для которого выполняются условия:

(7) $n^* \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$ для каждого $n \in N$,

(8) если $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$, то $-\alpha$, $\alpha \cup \alpha'$, $\alpha \cap \alpha' \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$,

(9) если $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, $\alpha_t \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$ для всех $t \in T$,
то $\bigcup_{t \in T} \alpha_t \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$ и $\bigcap_{t \in T} \alpha_t \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\,n}$.

Из соотношений (2), (3), (4) и (8) непосредственно вытекает, что множество $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является булевой алгеброй по отношению к операциям $\cup$, $\cap$, $-$, которые определяются при помощи соотношений (2,) (3) и (4). Из соотношений же (5), (6) и (9) вытекает, что алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является $\mathfrak{m}$-полной. Именно если имеется семейство элементов $\alpha_t \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, $t \in T$, а $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, то элементы $\bigcup_{t \in T} \alpha_t$ и $\bigcap_{t \in T} \alpha_t$, определяемые соотношениями (5) и (6), являются соответственно объединением и пересечением элементов α_t в булевой алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Из определения алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ вытекает, что семейство $\mathfrak{S}$ элементов вида n^*, где $n \in N$, $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Мощность семейства $\mathfrak{S}$ равна $\mathfrak{n}$ [см. (1)]. Заметим, что, как следует из формулы (4) § 23, имеет место неравенство

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}. \tag{10}$$

Мы теперь покажем, что алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй, а множество $\mathfrak{S}$ — множеством свободных $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Пусть f — произвольное отображение множества $\mathfrak{S}$ в некоторую булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$. Тогда формула

$$v'(n) = f(n^*) \text{ для любого } n \in N$$

определяет некоторый элемент v' множества $(\mathfrak{A}')^N$. Из соотношений (2), (3), (4), (5) и (6) непосредственно вытекает формула

$$h(\alpha) = \alpha_{\mathfrak{A}'}(v') \text{ для } \alpha \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}},$$

которая определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. По определению

$$h(n^*) = n^*_{\mathfrak{A}'}(v') = v'(n) = f(n^*),$$

т. е. гомоморфизм h является *продолжением* отображения f. Теорема 31.1 доказана[1]).

---

[1]) Если мы хотим в доказательстве теоремы 31.1 избежать логических затруднений, связанных с тем, что соответствие α определялось на множестве *всех* булевых $\mathfrak{m}$-алгебр $\mathfrak{B}$, то достаточно рассмотреть только такие булевы $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{B}$, элементы которых

31.2. *Для любой булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$, число $\mathfrak{m}$-образующих которой не превосходит $\mathfrak{n}$, существует такой $\mathfrak{m}$-идеал Δ в свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$. Более того, если через $\mathfrak{S}$ обозначить множество свободных $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, а через $\mathfrak{S}_0$ — множество $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}=\mathfrak{n}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}_0}}\leqslant\mathfrak{n}$, то мы можем считать, что изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$ на алгебру $\mathfrak{A}$ отображает множество всех элементов вида $[A]\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$, где $A\in\mathfrak{S}$, на множество $\mathfrak{S}_0$*

Пусть f — отображение множества $\mathfrak{S}$ на множество $\mathfrak{S}_0$. В силу условия (в) отображение f можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h_0 алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}$. Поскольку образ $h_0(\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}})$ является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, содержащей множество $\mathfrak{m}$-образующих $\mathfrak{S}_0$, то имеет место равенство $\mathfrak{A}=h_0(\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}})$, т. е. h_0 является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{m}$-идеал Δ всех таких элементов $A\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, что $h_0(A)=\wedge$, и изоморфизм h, определенный равенством

$$h([A])=h_0(A) \text{ для } A\in\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}},$$

обладают требуемыми свойствами.

принадлежат некоторому фиксированному множеству M, причем мощность этого множества равна $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}}$. Достаточно также свойство (в) доказывать только для таких алгебр $\mathfrak{A}'$, элементы которых принадлежат множеству M.

Правомерность такого рассуждения вытекает из того, что каждая булева $\mathfrak{m}$-алгебра не более чем с $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{m}$-образующими изоморфна некоторой булевой алгебре, элементы которой уже принадлежат множеству M [§ 23 (4)]. С другой стороны, булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ является свободной, если выполнены условия (а) и (б), а также условие (в), но только в условии (в) в качестве алгебры $\mathfrak{A}'$ берутся алгебры с не более чем $\mathfrak{n}$ $\mathfrak{m}$-образующими (заменим алгебру $\mathfrak{A}'$ на ее $\mathfrak{m}$-подалгебру, которая $\mathfrak{m}$-порождается множеством $f(\mathfrak{S})$!). Используя указанный выше изоморфизм, достаточно показать, что алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (а), (б) и условию (в), где в качестве алгебры $\mathfrak{A}'$ берутся только алгебры, состоящие из элементов множества M.

Теорема 31.1 и ее доказательство остаются неизменными и в случае произвольных абстрактных алгебр с конечными операциями, а также алгебр с бесконечными операциями, но ограниченной мощности.

Мы совсем ничего не знаем о структуре свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими за исключением некоторых частных случаев. Если $\mathfrak{n}$ конечно, то конечная (и потому полная) свободная булева алгебра $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$, определенная в § 14, является $\mathfrak{m}$-свободной для любого кардинального числа $\mathfrak{m}$ (с тем же самым множеством свободных образующих). В случае, когда $\mathfrak{m}=\aleph_0$, а $\mathfrak{n}$ — произвольное кардинальное число, структура алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ хорошо описывается приведенной ниже теоремой 31.6. По поводу остальных случаев мы знаем только, что

31.3. *Если* $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$, *то свободная булева* $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ *не является* $\mathfrak{m}$-*представимой*.

Полная алгебра $\mathfrak{A}$ всех борелевских множеств (вещественных чисел) по модулю множеств первой категории обладает счетным числом σ-образующих (следует взять элементы, определяемые интервалами с рациональными концами!), которые, следовательно, $\mathfrak{m}$-порождают алгебру $\mathfrak{A}$ для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$. По теореме 31.2 существует такой $\mathfrak{m}$-идеал Δ' в алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна факторалгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta'$. Предположим, что имеет место равенство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}=\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле множеств, а Δ — его $\mathfrak{m}$-идеал. В силу замечания в конце § 10 алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta'$ изоморфна факторалгебре $\mathfrak{F}/\Delta''$, где Δ'' есть $\mathfrak{m}$-идеал всех таких элементов $A\in\mathfrak{F}$, что $[A]_\Delta\in\Delta'$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}/\Delta''$. Такой изоморфизм в случае $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$ невозможен, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ не является $\mathfrak{m}$-представимой при $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$ (см. замечание в начале § 29).

Можно доказать, что

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\geqslant\mathfrak{m} \text{ для } \mathfrak{m},\ \mathfrak{n}\geqslant\aleph_0 \text{ [1])}. \tag{11}$$

---

[1]) Этот результат был недавно получен Гейфманом [1,3] и Хейлсом [1, 2]. Он имеет следующее интересное следствие. Заменив везде в определении свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгебры слова „$\mathfrak{m}$-алгебра" на слова „полная алгебра", а „$\mathfrak{m}$-порождает" на „вполне порождает", мы получаем аналогичное определение для свободной полной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ с множеством $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{n}$ свободных полных образующих. Такая свободная полная булева алгебра с $\mathfrak{n}$ образующими существует, если $\mathfrak{n}$ конечно (а именно совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$), и не сущест-

Доказательство неравенства (11) будет дано в примере М § 35.

Иногда бывает удобным определять понятие свободной $\mathfrak{m}$-алгебры относительно некоторого меньшего класса булевых $\mathfrak{m}$-алгебр, а именно пусть $\mathbf{K}$ — некоторый класс булевых $\mathfrak{m}$-алгебр. Говорят, что алгебра $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}$ является *$\mathbf{K}$-свободной $\mathfrak{m}$-алгеброй* (или *свободной в классе* $\mathbf{K}$ *$\mathfrak{m}$-алгебр*) *с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими*, если $\mathfrak{A}$ содержит подмножество $\mathfrak{S}$, удовлетворяющее условиям (а), (б) и условию (в) для каждого $\mathfrak{A}' \in \mathbf{K}$. Единственное отличие этого определения от определения на стр. 212 заключается в том, что мы требуем, чтобы алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ находились в классе $\mathbf{K}$. Так же как и раньше, из теоремы 23.3 мы заключаем, что все $\mathbf{K}$-свободные $\mathfrak{m}$-алгебры с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими изоморфны между собой (при условии, что они существуют).

В этом параграфе мы рассмотрим только случай, когда $\mathbf{K}$ является классом всех $\mathfrak{m}$-представимых $\mathfrak{m}$-алгебр. В этом случае $\mathbf{K}$-свободная $\mathfrak{m}$-алгебра с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими будет называться *свободной $\mathfrak{m}$-представимой с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими*.

Для описания структуры свободных $\mathfrak{m}$-представимых алгебр мы напомним обозначения из § 14 (стр. 71) и из примера В § 24: $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ обозначает обобщенный канторов дисконтинуум веса $\mathfrak{n}$, т. е. декартово произведение $\mathscr{D}_n = \mathop{\mathsf{P}}\limits_{t \in T_0} H_t = H^{T_0}$, где $H_t = H(-1, 1)$, а $T_0 = \mathfrak{n}$. Для каждого $t \in T_0$ через D_t обозначается множество всех точек из $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$, у которых координата с номером t равна 1. Через $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}}$ обозначено $\mathfrak{m}$-поле, $\mathfrak{m}$-порождаемое множествами D_t, т. е. $\mathfrak{m}$-порождаемое полем $\mathfrak{F}_{0, \mathfrak{n}}$ всех открыто-замкнутых подмножеств $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$.

31.4. *Наименьшее $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}}$, содержащее все открыто-замкнутые подмножества канторова дисконтинуума*

вует, если $\mathfrak{n}$ бесконечно, ибо можно доказать (таким же методом, как и аналогичное утверждение в примере Ж § 35), что наименьшая $\mathfrak{m}$-подалгебра, содержащая множество $\mathfrak{S}$, должна быть свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй с $\mathfrak{n}$-образующими. Следовательно, в случае бесконечного $\mathfrak{n}$ мы имеем неравенство $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \geqslant \mathfrak{m}$ для каждого кардинального числа $\mathfrak{m}$, что невозможно.

$\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, является свободной $\mathfrak{m}$-представимой алгеброй с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими. В качестве свободных $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ можно взять множества D_t[1]).

Доказательство является повторением метода, использованного в доказательстве теоремы 15.1.

Достаточно показать, что каждое отображение f множества $\mathfrak{S}$ всех образующих D_t $(t \in T_0)$ в любую булеву алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле подмножеств X, а Δ — $\mathfrak{m}$-идеал поля $\mathfrak{F}$, можно продолжить до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$.

Для каждого $t \in T_0$ обозначаем через $X_t \in \mathfrak{F}$ такое множество, что

$$f(D_t) = [X_t].$$

Положим далее

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in X_t, \\ -1, & \text{если } x \in -X_t = X - X_t. \end{cases}$$

Отображение $\varphi(x) = \{\varphi_t(x)\}$ множества X в пространство $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ индуцирует $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h с помощью формулы

$$h(A) = [\varphi^{-1}(A)]_\Delta \in \mathfrak{F}/\Delta \text{ для любого } A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}},$$

причем этот гомоморфизм h и является требуемым продолжением отображения f.

Следующую теорему мы докажем методом, подобным доказательству теоремы 31.2.

31.5. *Для каждой $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ с множеством $\mathfrak{S}_0$ $\mathfrak{m}$-образующих, $\overline{\overline{\mathfrak{S}_0}} \leqslant \mathfrak{n}$, существует такой $\mathfrak{m}$-идеал Δ в алгебре $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, что алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна факторалгебре $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$. Более того, мы можем считать, что этот изоморфизм отображает множество всех элементов $[D_t]$ на все множество $\mathfrak{S}_0$*

В случае $\mathfrak{m} = \aleph_0$ класс всех σ-алгебр совпадает с классом всех σ-представимых σ-алгебр (это вытекает из теоремы 29.1). Следовательно, в силу теорем 31.4 и 31.2 (или 31.5) имеет место теорема

---

[1]) В случае $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \aleph_0$ теоремы 31.4—31.6 были доказаны Сикорским [14] Случай $\mathfrak{n} > \aleph_0$ был впервые рассмотрен Ригером [5]. Доказательство, предложенное здесь, было дано Сикорским [17].

31.6. *Наименьшее σ-поле $\mathfrak{F}_{\sigma,\mathfrak{n}}$ подмножеств канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, содержащее все открыто-замкнутые подмножества пространства $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$, является свободной булевой σ-алгеброй. Множества D_t являются свободными σ-образующими алгебры $\mathfrak{F}_{\sigma,\mathfrak{n}}$.*

Каждая булева алгебра с не более чем $\mathfrak{n}$ образующими изоморфна факторалгебре $\mathfrak{F}_{\sigma,\mathfrak{n}}/\Delta$ алгебры $\mathfrak{F}_{\sigma,\mathfrak{n}}$ по некоторому σ-идеалу Δ.

Видоизменяя определение на стр. 71 § 14, мы будем говорить, что индексированное семейство $\{A_t\}_{t\in T}$ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-*независимым*, если для каждого подмножества индексов $T'\subset T$, $\overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{m}$, и для каждой функции $\varepsilon(t)=\pm 1$ пересечение $\bigcap\limits_{t\in T'}\varepsilon(t)\cdot A_t$ существует и не равно $\wedge$. Конечно, если семейство $\{A_t\}_{t\in T}$ $\mathfrak{m}$-независимо, то оно также независимо и в смысле определения на стр. 71.

31.7. *Свободные $\mathfrak{m}$-образующие алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ являются $\mathfrak{m}$-независимыми. Свободные $\mathfrak{m}$-образующие $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ также являются $\mathfrak{m}$-независимыми.*

Вторая часть теоремы 31.7 немедленно вытекает из определения множеств D_t. Доказательство подобно доказательству аналогичного утверждения на стр. 71.

Для доказательства первой части теоремы 31.7 обозначим через f любое взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{S}$ свободных $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на семейство всех множеств D_t. Пусть далее A_t обозначает элемент множества $\mathfrak{S}$, чей образ равен D_t. В силу свойства (в) отображение f можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Поскольку для подмножества индексов $T'\subset T_0$, $\overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{m}$, имеет место соотношение

$$h\Big(\bigcap_{t\in T'}\varepsilon(t)\cdot A_t\Big)=\bigcap_{t\in T'}\varepsilon(t)\cdot D_t\neq\wedge,$$

то отсюда вытекает, что $\bigcap\limits_{t\in T'}\varepsilon(t)\cdot A_t\neq\wedge$.

Следующее замечание непосредственно вытекает из теорем 31.7 и 14.2.

31.8. *Подалгебра* $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ *(алгебры* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$*), порождаемая множеством* $\mathfrak{S}$ *свободных* $\mathfrak{m}$*-образующих алгебры* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$*, является свободной булевой алгеброй с* $\mathfrak{n}$ *свободными образующими.*

Справедливо также аналогичное замечание относительно поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, так как по определению алгебра, порожденная свободными $\mathfrak{m}$-образующими D_t поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, есть свободная булева алгебра $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$, определенная на стр. 71.

Поскольку алгебра $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ есть $\mathfrak{m}$-поле множеств, а каждое $\mathfrak{m}$-поле множеств является $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгеброй, то из теоремы 31.4 следует, что алгебра $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является свободной алгеброй в классе всех $\mathfrak{m}$-полей множеств[1]).

§ 32. Гомоморфизмы, индуцированные поточечными отображениями

Мы напомним [см. пример А § 5 и 11], что гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X в поле $\mathfrak{F}'$ подмножеств пространства X' называется гомоморфизмом, индуцированным поточечным отображением φ пространства X' в пространство X, если выполнено равенство

$$(1) \qquad h(A)=\varphi^{-1}(A) \text{ для каждого } A\in\mathfrak{F}.$$

Очевидно, что если поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ являются $\mathfrak{m}$-полями множеств, а гомоморфизм h индуцирован поточечным отображением φ, то гомоморфизм h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом. Однако не каждый $\mathfrak{m}$-гомоморфизм $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется поточечным отображением.

Пример. А) Следующий пример является несложной модификацией примеров Г из § 8 и Б из § 11.

Пусть X — множество мощности, строго большей $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{F}$ — поле, состоящее из всех подмножеств множества X, мощность которых не превосходит $\mathfrak{m}$, и из всех дополнений к таким подмножествам. Поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-полем. Предположим, что точка x_0 не принадлежит простран-

[1]) Это следует также из общих свойств свободных алгебр, описанных Пирсом [8].

ству X. Через X' обозначим объединение пространства X и точки x_0. Положим далее

$$h(A)=\begin{cases} A, & \text{если } \overline{\overline{A}}\leqslant \mathfrak{m}, \\ A\cup(x_0), & \text{если } \overline{\overline{X-A}}\leqslant \mathfrak{m}. \end{cases}$$

Гомоморфизм h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом поля $\mathfrak{F}$ в поле $\mathfrak{F}'$ всех подмножеств пространства X', причем ни одно отображение φ пространства X' в пространство X не индуцирует гомоморфизм h.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h некоторого $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X в $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}'$ подмножеств пространства X' индуцировался поточечным отображением пространств, является следующее условие: если максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр ∇' поля $\mathfrak{F}'$ определяется некоторой точкой x' пространства X', то максимальный $\mathfrak{m}$-фильтр $\nabla=h^{-1}(\nabla')$ тоже определяется некоторой точкой x пространства X. Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство аналогичного утверждения из § 11.

Доказательство следующей теоремы также аналогично доказательству утверждения 11.1.

32.1. *Если $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным, то каждый $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется поточечным отображением.*

Следовательно, если $\mathfrak{m}$-изоморфизм h (упоминаемый в предложении 24.3) поля $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{m}$-совершенное приведенное $\mathfrak{m}$-поле множеств индуцируется поточечным отображением, то поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным[1]).

Следующая теорема является немедленным следствием теоремы 32.1 (см. также утверждение 27.1).

32.2. *Если мощность множества X является $\mathfrak{m}$-совершенной, то каждый $\mathfrak{m}$-гомоморфизм поля $\mathfrak{F}$ всех подмножеств множества X в любое $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется поточечным отображением.*

---

[1]) Теоремы 32.1, 32.2 и 32.4—32.6 являются небольшим изменением аналогичных утверждений, доказанных Сикорским [6, 8, 18] для случая $\mathfrak{m}=\aleph_0$.

Если мощность метрического пространства X является σ-совершенной, то каждый σ-гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ всех борелевских подмножеств пространства X в любое σ-поле $\mathfrak{F}'$ индуцируется поточечным отображением.

Следующая теорема выясняет структуру $\mathfrak{m}$-гомоморфизмов булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в любое $\mathfrak{m}$-поле множеств. Прежде чем сформулировать эту теорему, введем некоторые обозначения. Пусть $h_0(A)$ — множество всех максимальных $\mathfrak{m}$-фильтров ∇ алгебры $\mathfrak{A}$, содержащих множество A $(A \in \mathfrak{A})$. Через X обозначим множество всех максимальных $\mathfrak{m}$-фильтров алгебры $\mathfrak{A}$.

32.3. *Для каждого $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}'$ подмножеств пространства X' существует такое отображение φ пространства X' в пространстве X, что*

$$h(A) = \varphi^{-1}(h_0(A)) \quad \textit{для каждого } A \in \mathfrak{A}.$$

Заметим сначала, что для любых элементов $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$

$$\text{если } h(A_1) \neq h(A_2), \text{ то } h_0(A_1) \neq h_0(A_2),$$

ибо если существует точка $x_0 \in h(A_1) - h(A_2)$, то множество ∇ всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}$, что $x_0 \in h(A)$, является максимальным $\mathfrak{m}$-фильтром, причем $\nabla \in h_0(A_1) - h_0(A_2)$.

Следовательно, равенство

$$h_1(h_0(A)) = h(A) \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}$$

определяет отображение h_1 из $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F} = h_0(\mathfrak{A})$ (см. 22.1) в поле $\mathfrak{F}'$. Легко проверяется, что отображение h_1 является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом. Как следует из рассуждений, приведенных в примере Е § 24, поле $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{m}$-совершенным. Из утверждения 32.1 вытекает, что гомоморфизм h_1 индуцируется поточечным отображением φ. Следовательно, отображение φ обладает требуемыми свойствами.

Напомним, что если Δ и Δ' — идеалы полей $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ соответственно (которые являются полями подмножеств пространств X и X'), то в этом случае говорят, что гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$

индуцируется поточечным отображением φ пространства X' в пространство X, если

$$h([A]_\Delta) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \tag{2}$$

для каждого элемента $A \in \mathfrak{F}$ (см. § 15). В частности, когда идеал Δ является нулевым, говорят, что гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется отображением φ пространства X' в пространство X, если

$$h(A) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \tag{3}$$

для каждого элемента $A \in \mathfrak{F}$.

Ясно, что если поля $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ являются $\mathfrak{m}$-полями, идеалы Δ и Δ' являются $\mathfrak{m}$-идеалами, а гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется поточечным отображением φ, то гомоморфизм h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом $\mathfrak{m}$-алгебр.

Пусть $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ обозначает то же, что и в § 31, т. е. наименьшее $\mathfrak{m}$-поле, содержащее все открыто-замкнутые подмножества обобщенного канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_\mathfrak{n}$ веса $\mathfrak{n}$. Тогда следующая теорема доказывается так же, как и утверждение 15.1.

32.4. *Если Δ является $\mathfrak{m}$-идеалом поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, а Δ' является $\mathfrak{m}$-идеалом $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}'$, то всякий $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ индуцируется поточечным отображением.*

Как известно, всякое сепарабельное метрическое пространство X гомеоморфно подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$ (т. е. декартова произведения счетного числа единичных интервалов). Говорят, что пространство X является *абсолютным борелевским пространством*, если оно гомеоморфно борелевскому подмножеству гильбертова куба $\mathcal{H}$. Например, каждое полное метрическое пространство является абсолютным борелевским пространством[1]).

32.5. *Пусть X — абсолютное борелевское пространство, $\mathfrak{F}$ является σ-полем всех борелевских подмножеств про-*

---

[1]) См., например, Куратовский [3], стр. 441.

странства X, а Δ является σ-идеалом поля $\mathfrak{F}$. Тогда каждый σ-гомоморфизм h факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$, где $\mathfrak{F}'$ — некоторое σ-поле, а Δ' — некоторый σ-идеал поля $\mathfrak{F}'$, индуцируется поточечным отображением.

Рассмотрим сначала случай, когда пространство X является не более чем счетным множеством, $X=(x_1, x_2, \ldots)$. Пусть $B_n \in \mathfrak{F}'$ — такое множество, что $h([(x_n)]_\Delta)=[B_n]_{\Delta'}$. Положим $C_1=B_1 \cup (X-(B_1 \cup B_2 \cup \ldots))$, $C_n=B_n-(B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1})$ для $n>1$. Множества C_n попарно не пересекаются, объединение этих множеств равно X, а $h([(x_n)]_\Delta=[C_n]_{\Delta'}$. Отображение φ, определенное по формуле

$$\varphi(x')=x_n \quad \text{для любого } x' \in C_n,$$

индуцирует гомоморфизм h.

Предположим теперь, что пространство X является несчетным множеством. В этом случае доказательство основывается на следующей топологической теореме: если пространство X является несчетным абсолютным борелевским пространством, то существует такое взаимно однозначное отображение канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_{\aleph_0}$ на пространство X, что для каждого подмножества $A \subset \mathfrak{D}_{\aleph_0}$ множество $\psi(A)$ является борелевским подмножеством тогда и только тогда, когда множество A является борелевским подмножеством пространства $\mathfrak{D}_{\aleph_0}$ (т. е. когда $A \in \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}$) [1]).

Пусть Δ'' является классом всех множеств $A \in \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}$, для которых $\psi(A) \in \Delta$. Отображение h', определенное по формуле

$$h'([A]_{\Delta''})=h([\psi(A)]_\Delta) \quad (A \in \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}),$$

является σ-гомоморфизмом факторалгебры $\mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}/\Delta''$ в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Вследствие утверждения 32.4 σ-гомоморфизм h' индуцируется некоторым поточечным отображением φ'. Легко проверить, что отображение $\varphi(x')=\psi(\varphi'(x'))$ индуцирует гомоморфизм h.

---

[1]) См., например, Куратовский [3], стр. 463.

Пример. Б) Если сепарабельное метрическое пространство X не является абсолютным борелевским пространством, то тогда существует σ-поле $\mathfrak{F}'$, σ-идеал Δ' поля $\mathfrak{F}'$ и такой σ-гомоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ всех борелевских подмножеств пространства X в факторалгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$, который не индуцируется никаким поточечным отображением[1]).

Действительно, мы можем считать, что пространство X является неборелевским подмножеством гильбертова куба $\mathscr{H}$. Положим $X'=\mathscr{H}$, и пусть $\mathfrak{F}'$ является σ-полем всех борелевских подмножеств пространства X', а Δ' — σ-идеалом всех множеств $A\in\mathfrak{F}'$, которые не пересекаются с пространством X. По определению $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}'\mid X$ (см. пример Б § 10). Тогда σ-изоморфизм h поля $\mathfrak{F}$ на алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$, определенный по формуле

$$h(A\cap X)=[A]_{\Delta'} \quad \text{для любого } A\in\mathfrak{F}', \tag{4}$$

не индуцируется никаким поточечным отображением φ пространства X' в пространстве X. В самом деле, предположим, что такое отображение φ существует. Тогда $\varphi^{-1}(B)\in\mathfrak{F}'$ для $B\in\mathfrak{F}$, т. е. отображение φ является бэровским отображением пространств. Заменяя в формуле (4) множество A на одноточечное подмножество (x) пространства X, мы легко получаем, что $\varphi(x)=x$ для $x\in X$. Следовательно, пространство X состоит из всех таких точек $x'\in X'$, что $\varphi(x')=x'$. Отсюда вытекает, что пространство X является борелевским подмножеством пространства X'. Противоречие доказывает утверждение.

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ являются $\mathfrak{m}$-представимыми алгебрами, пространства X и X' — пространствами Стоуна этих алгебр, а алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ и $\mathfrak{F}'/\Delta'$ — их каноническими $\mathfrak{m}$-представлениями (см. § 29, стр. 192). Так как алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, а алгебра $\mathfrak{A}'$ изоморфна алгебре $\mathfrak{F}'/\Delta'$, то исследование $\mathfrak{m}$-гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ всегда можно свести к изучению $\mathfrak{m}$-гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Следующая теорема утверждает, что это исследование можно свести к изучению $\mathfrak{m}$-непрерывных отображений пространства X' в пространство X.

---

[1]) Сикорский [6].

32.6. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — две $\mathfrak{m}$-представимые булевы алгебры. Тогда каждый $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h канонического $\mathfrak{m}$-представления $\mathfrak{F}/\Delta$ алгебры $\mathfrak{A}$ в каноническое $\mathfrak{m}$-представление $\mathfrak{F}'/\Delta'$ алгебры $\mathfrak{A}'$ индуцируется некоторым $\mathfrak{m}$-непрерывным отображением φ пространства Стоуна X' алгебры $\mathfrak{A}'$ в пространство Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$.*

Пусть $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_0'$ являются полями открыто-замкнутых подмножеств пространств X и X' соответственно. Так как поле $\mathfrak{F}_0$ изоморфно алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, а поле $\mathfrak{F}_0'$ — алгебре $\mathfrak{F}'/\Delta'$, то гомоморфизм h определяет соответствующий гомоморфизм h' поля $\mathfrak{F}_0$ в поле $\mathfrak{F}_0'$ [см. (9) § 22]. По определению имеет место равенство

$$h([A_0]_\Delta) = [h'(A_0)]_{\Delta'} \quad \text{для каждого } A_0 \in \mathfrak{F}_0.$$

Вследствие теоремы 11.1 гомоморфизм h' индуцируется непрерывным отображением φ пространства X' в пространство X, т. е.

$$h'(A_0) = \varphi^{-1}(A_0) \quad \text{для каждого } A_0 \in \mathfrak{F}_0.$$

Тогда

$$(5) \qquad h([A_0])_\Delta) = [\varphi^{-1}(A_0)]_{\Delta'} \quad \text{для каждого } A_0 \in \mathfrak{F}_0.$$

Так как $\varphi^{-1}(A_0) \in \mathfrak{F}_0'$ для всех множеств $A_0 \in \mathfrak{F}_0$, то полный прообраз $\varphi^{-1}(A)$ любого множества A из наименьшего $\mathfrak{m}$-поля, содержащего поле $\mathfrak{F}_0$, тоже принадлежит наименьшему $\mathfrak{m}$-полю, содержащему поле $\mathfrak{F}_0'$.

В силу утверждения 22.5 отображение φ является $\mathfrak{m}$-непрерывным. Итак, для каждого нигде не плотного $\mathfrak{m}$-замкнутого подмножества пространства X прообраз $\varphi^{-1}(B)$ принадлежит идеалу Δ' и, значит, $\varphi^{-1}(B) \in \Delta'$ для каждого множества $B \in \Delta$. Отсюда вытекает, что $\varphi^{-1}(A) \in \mathfrak{F}'$ для каждого множества $A \in \mathfrak{F}$ и что формула

$$(6) \qquad h''([A]_\Delta) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \quad \text{для любого } A \in \mathfrak{F}$$

определяет гомоморфизм h'' алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Поскольку всякий элемент $A \in \mathfrak{F}$ можно представить в виде

$$A = (A_0 \cup B_1) - B_2, \quad \text{где} \quad A_0 \in \mathfrak{F}_0 \text{ и } B_1,\ B_2 \in \Delta,$$

то из формул (5) и (6) следует, что гомоморфизм h'' совпадает с гомоморфизмом h, т. е. отображение φ индуцирует гомоморфизм h.

Пример. В) Во всех теоремах об индуцированных гомоморфизмах, которые были приведены в § 11, 15 и 32, кроме теоремы 32.6, ограничения налагались только на область определения $\mathfrak{F}/\Delta$ (или $\mathfrak{F}$) изучаемого гомоморфизма, в то время как структура области значений $\mathfrak{F}'/\Delta'$ (или $\mathfrak{F}'$) гомоморфизма была произвольной. В теореме же 32.6 структура алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ предполагается специальной. Поэтому возникает вопрос, остается ли теорема 32.6 справедливой (конечно, уже без требования непрерывности отображения φ), если предположить только, что поле $\mathfrak{F}'$ является некоторым $\mathfrak{m}$-полем множеств, а Δ' — некоторым $\mathfrak{m}$-идеалом поля $\mathfrak{F}'$. Ответ на этот вопрос отрицательный.

Пусть, например, алгебра $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}'/\Delta'$ является факторалгеброй, как это было определено в примере Б § 29, т. е. поле $\mathfrak{F}'$ является $\mathfrak{m}$-полем, идеал Δ' является $\mathfrak{m}$-идеалом поля $\mathfrak{F}'$ и не существует ни одного изоморфизма g алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ в поле $\mathfrak{F}'$, такого, что $[g(A)]_{\Delta'}=A$ для каждого элемента $A\in\mathfrak{F}'/\Delta'$. Пусть $\mathfrak{F}/\Delta$ — каноническое представление алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда естественный изоморфизм h алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta'$ не индуцируется ни одним поточечным отображением[1]). В самом деле, предположим, что такое отображение существует. Пусть A — некоторый элемент алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$. Элемент $h^{-1}(A)\in\mathfrak{F}/\Delta$ представим в виде

$$h^{-1}(A)=[A_0]_\Delta,$$

где A_0 является открыто-замкнутым множеством. Множество A_0 однозначно определяется множеством A и указанным выше условием. Тогда отображение $g(A)=\varphi^{-1}(A_0)$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta'$ в поле $\mathfrak{F}'$, причем $[g(A)]_{\Delta'}=A$ для каждого $A\in\mathfrak{F}'/\Delta'$. Противоречие.

Аналогично тому, как это сделано в конце § 15, нужно было бы исследовать проблему, которая тесно

[1]) Трачик [1].

связана с существованием индуцирующих отображений. А именно, при каких условиях данная булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ обладает свойством:

(а) для каждого $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в любую булеву алгебру $\mathfrak{A}'/\Delta'$ (где $\mathfrak{A}'$ — некоторая булева $\mathfrak{m}$-алгебра, а Δ' — ее $\mathfrak{m}$-идеал) существует такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h' алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, что

$$h(A)=[h'(A)]_{\Delta'} \quad \text{для каждого } A\in\mathfrak{A}?$$

Ответ на этот вопрос дается теоремой, аналогичной теореме 15.3. Точно ее сформулировать мы предоставляем читателю.

§ 33. Теоремы о продолжении гомоморфизмов

Следующая теорема будет полезна в § 35.

33.1. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ является подалгеброй булевой алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда каждый гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ может быть продолжен до гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$* [1]).

Достаточно доказать, что если h_0 — гомоморфизм подалгебры $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$ и если $A_0\in\mathfrak{A}$, то гомоморфизм h_0 может быть продолжен до гомоморфизма h подалгебры $\mathfrak{A}_1$, порожденной подалгеброй $\mathfrak{A}_0$ и элементом A_0. Действительно, теорема 33.1 немедленно вытекает из этого утверждения. Достаточно упорядочить все элементы алгебры $\mathfrak{A}$ в трансфинитную последовательность $\{A_\alpha\}_{\alpha<\beta}$ и продолжать гомоморфизм шаг за шагом на наименьшую подалгебру, содержащую подалгебру $\mathfrak{A}_0$ и элементы $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots$ соответственно.

Для доказательства леммы вспоминаем, что $\mathfrak{A}_1$ является множеством всех элементов $A\in\mathfrak{A}$, которые могут быть представлены в виде

$$A=(A_1\cap A_0)\cup(A_2-A_0), \tag{1}$$

где $A_1, A_2\in\mathfrak{A}_0$ [см. (3) § 4]. Пусть B_1 является объединением (в полной алгебре $\mathfrak{A}'$) всех элементов $h_0(A)$, где

[1]) Сикорский [5].

$A \in \mathfrak{A}_0$ и $A \subset A_0$. Подобным же образом пусть B_2 является пересечением (в полной алгебре $\mathfrak{A}'$) всех элементов $h_0(A)$, где $A \in \mathfrak{A}_0$, $A_0 \subset A$. По определению $B_1 \subset B_2$. Выберем так элемент $B \in \mathfrak{A}'$, чтобы выполнялось включение $B_1 \subset B \subset B_2$. По определению

(2) если $C, D \in \mathfrak{A}_0$ и $C \subset A_0 \subset D$, то $h_0(C) \subset B \subset h_0(D)$.

Если элемент $A \in \mathfrak{A}_1$ имеет вид (1), то определяем элемент $h(A)$ с помощью равенства

$$h(A) = (h_0(A_1) \cap B) \cup (h_0(A_2) - B). \tag{3}$$

Для того чтобы проверить корректность этого определения, мы должны показать, что элемент, стоящий в правой части равенства (3), не зависит от представления элемента $A \in \mathfrak{A}_1$ в форме (1)[1]). Предположим, что одновременно имеют место равенства (1) и

$$A = (A'_1 \cap A_0) \cup (A'_2 - A_0), \tag{1'}$$

где $A'_1, A'_2 \in \mathfrak{A}_0$. Из равенств (1) и (1′) вытекает, что

$$A_2 - A'_2 \subset A_0, \quad A'_2 - A_2 \subset A_0,$$
$$A_0 \subset -A_1 \cup A'_1, \quad A_0 \subset A_1 \cup -A'_1.$$

Следовательно, в силу утверждения (2)

$$h_0(A_2) - h_0(A'_2) \subset B, \quad h_0(A'_2) - h_0(A_2) \subset B,$$
$$B \subset -h_0(A_1) \cup h_0(A'_1), \quad B \subset h_0(A_1) \cup -h_0(A'_1).$$

Отсюда получаем, что

$$(h_0(A_1) \cap B) \cup (h_0(A_2) - B) = (h_0(A'_1) \cap B) \cup (h_0(A'_2) - B).$$

Таким образом, равенство (3) однозначно определяет отображение h алгебры $\mathfrak{A}_1$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Легко проверить, что оно является гомоморфизмом. Если $A \in \mathfrak{A}_0$, то $A = (A \cap A_0) \cup (A - A_0)$, и в силу равенства (3)

$$h(A) = (h_0(A) \cap B) \cup (h_0(A) - B) = h_0(A).$$

---

[1]) Эту часть доказательства можно заменить проверкой того, что отображение f, которое совпадает с отображением h_0 на $\mathfrak{A}_0$ и принимает значение B на элементе A_0, удовлетворяет условию (4) § 12.

Другими словами, гомоморфизм h является продолжением гомоморфизма h_0.

Заметим, что теорема 33.1 является обобщением теоремы 6.1 (iii). Чтобы получить теорему 6.1 (iii) из теоремы 33.1, достаточно предположить в последней, что алгебра $\mathfrak{A}'$ есть двухэлементная булева алгебра, алгебра $\mathfrak{A}_0$ — ее подалгебра, состоящая из всех элементов $A \in \Delta_0$ и их дополнений, а гомоморфизм h_0 определяется формулой

$$h_0(A) = \begin{cases} \wedge, & \text{если} \quad A \in \Delta_0, \\ \vee, & \text{если} \quad -A \in \Delta_0. \end{cases}$$

Теорему 33.1 можно сформулировать также следующим образом. Пусть h — гомоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}_0$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$, и пусть g — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ в булеву алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда существует такой гомоморфизм h' алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, что $h = h'g$.

Переходя к пространствам Стоуна X_0, X, X' алгебр $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ соответственно и к непрерывным отображениям φ, φ', ψ, которые индуцируют соответственно гомоморфизмы h, h', g, мы получаем следующую топологическую формулировку теоремы 33.1. Если φ — непрерывное отображение экстремально несвязного компактного пространства X' во вполне несвязное компактное пространство X_0 и если ψ является непрерывным отображением вполне несвязного компактного пространства X на пространство X_0, то существует такое непрерывное отображение φ' пространства X' в пространство X, что $\varphi = \psi\varphi'$ [1]).

Отметим, что условие полноты алгебры $\mathfrak{A}'$ может быть заменено в теореме 33.1 предположением, что алгебра $\mathfrak{A}'$ является $\mathfrak{m}$-полной булевой алгеброй для $\mathfrak{m} = \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Если же $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_0 < \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, то можно ограничиться условием, что алгебра $\mathfrak{A}'$ является $\mathfrak{m}$-полной для каждого кардинального числа $\mathfrak{m} < \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Доказательство остается неизменным.

---

[1]) Эта теорема является частным случаем более общей топологической теоремы, доказанной Глисоном [1]. Относильно связи между теоремой 33.1 и теоремой Глисона, а также приложений теоремы Глисона и смежных вопросов см. Халмош [8], Исбелл и Семадени [1], Рейнватер [1], Семадени [4, 5].

33.2. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ — плотная подалгебра булевой алгебры $\mathfrak{A}$, а h_0 — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{A}'$. Тогда изоморфизм h_0 может быть продолжен до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$* [1].

В силу теоремы 33.1 изоморфизм h_0 можно продолжить до гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Если $A \in \mathfrak{A}$, $A \neq \wedge$, то существует такой элемент $A_0 \in \mathfrak{A}_0$, что $\wedge \neq A_0 \subset A$. Следовательно, $\wedge \neq h_0(A_0) = h(A_0) \subset h(A)$. Значит, $h(A) \neq \wedge$, а это доказывает, что h является изоморфизмом.

33.3. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — две полные булевы алгебры, а h_0 — изоморфизм подалгебры $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$ на плотную подалгебру $\mathfrak{A}'_0 \subset \mathfrak{A}'$. Тогда всякий гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, продолжающий гомоморфизм h_0, отображает алгебру $\mathfrak{A}$ на всю алгебру $\mathfrak{A}'$.*

Пусть B — некоторый элемент из алгебры $\mathfrak{A}'$. Пусть далее A является булевым объединением (в полной алгебре $\mathfrak{A}$) всех элементов $h_0^{-1}(B_1)$, где $B_1 \in \mathfrak{A}'_0$, $B_1 \subset B$. Если B_1, $B_2 \in \mathfrak{A}'_0$ и $B_1 \subset B \subset B_2$, то

$$h_0^{-1}(B_1) \subset A \subset h_0^{-1}(B_2).$$

Следовательно,

$$B_1 = h(h_0^{-1}(B_1)) \subset h(A) \subset h(h_0^{-1}(B_2)) = B_2.$$

Так как алгебра $\mathfrak{A}'_0$ плотна в алгебре $\mathfrak{A}'$, то элемент B является пересечением всех таких элементов $B_2 \in \mathfrak{A}'_0$, что $B \subset B_2$, и одновременно B является объединением всех таких элементов $B_1 \in \mathfrak{A}'_0$, что $B_1 \subset B$ (см. теорему 23.1). Итак, $B = h(A)$, что и доказывает утверждение.

33.4. *Пусть $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}'_0$ — плотные подалгебры в полных булевых алгебрах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно. Тогда каждый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{A}'_0$ можно продолжить до изоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$.*

Это немедленно вытекает из теорем 33.2 и 33.3.

---

[1] Леммы 33.2—33.4 доказаны Сикорским [13].

§ 34. Теоремы о продолжении (отображений) до гомоморфизмов

Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — булевы $\mathfrak{m}$-алгебры, а $\mathfrak{S}$ — подмножество алгебры $\mathfrak{A}$, которое $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$ (см. § 23). Мы рассмотрим задачу нахождения условий, при которых отображение f множества $\mathfrak{S}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Напомним, что если это продолжение существует, то оно единственно [см. (5) § 23].

Очевидно, для того чтобы отображение f продолжалось до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма, необходимо следующее условие:

(a) если $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} \varepsilon(t)\cdot A_t = \wedge_{\mathfrak{A}}$, то $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} \varepsilon(t)\cdot f(A_t) = \wedge_{\mathfrak{A}'}$

для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного семейства $A_t \in \mathfrak{S}$ и каждой функции $\varepsilon(t) = \pm 1$. Это следует из перестановочности продолжения h с операциями $\bigcap$ и $-$.

Вообще говоря, условие (a) не является достаточным для существования продолжения h (см. следующие ниже примеры А, Б и Г).

Мы будем говорить, что булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}'$ обладает *свойством сильной* $\mathfrak{m}$-*продолжаемости*, если для любой булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ каждое отображение f (множества $\mathfrak{S}$, которое $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, в алгебру $\mathfrak{A}'$), удовлетворяющее условию (a), можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

34.1. *Каждое* $\mathfrak{m}$-*поле множеств обладает свойством сильной* $\mathfrak{m}$-*продолжаемости.*

Пусть $\mathfrak{A}'$ — некоторое $\mathfrak{m}$-поле подмножеств пространства X', и пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, f имеют тот же смысл, что и раньше.

Заметим сначала, что если собственный $\mathfrak{m}$-фильтр ∇ алгебры $\mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что

(1) для каждого $A \in \mathfrak{S}$ или $A \in \nabla$, или $-A \in \nabla$,

то фильтр ∇ является максимальным, ибо естественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}/\nabla$ отображает множество $\mathfrak{S}$ в подалгебру, состоящую только из нуля

и единицы. Следовательно, этот гомоморфизм отображает всю алгебру $\mathfrak{A}$ на двухэлементную подалгебру, т. е. алгебра $\mathfrak{A}/\nabla$ совпадает с этой двухэлементной подалгеброй.

Теперь через $\{A_t\}_{t \in T_0}$ обозначим индексированное множество, состоящее из всех элементов множества $\mathfrak{S}$. Для любой точки $x \in X$ положим

$$\varepsilon_x(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in f(A_t), \\ -1, & \text{если } x \in -f(A_t). \end{cases} \tag{2}$$

Пусть ∇_x обозначает $\mathfrak{m}$-фильтр, $\mathfrak{m}$-порожденный всеми элементами вида $\varepsilon_x(t) \cdot A_t$, $t \in T_0$.

Покажем, что $\mathfrak{m}$-фильтр ∇_x является собственным. Если бы это было не так, то $\bigcap_{t \in T} \varepsilon_x(t) \cdot A_t = \wedge$ для некоторого множества $T \subset T_0$, $\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$. Отсюда бы вытекало в силу условия (а), что множество $\bigcap_{t \in T} \varepsilon_x(t) \cdot f(A_t)$ пусто, что невозможно, так как это множество содержит точку x.

Значит, $\mathfrak{m}$-фильтр ∇_x является максимальным, поскольку он обладает свойством (1).

Пусть теперь X' обозначает множество всех максимальных $\mathfrak{m}$-фильтров ∇ алгебры $\mathfrak{A}$. Формула

$$\varphi(x) = \nabla_x \quad \text{для любого } x \in X$$

определяет отображение пространства X в пространство X'. Отображение

$$h_0(A) = \{\nabla \in X'; \quad A \in \nabla\}$$

является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств пространства X' (см. теорему 22.1).

Таким образом, отображение

$$h(A) = \varphi^{-1}(h_0(A)) \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}$$

является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в поле всех подмножеств пространства X.

Гомоморфизм h является продолжением отображения f. Действительно, из формулы (2) и определения фильтра ∇_x немедленно следует, что $x \in f(A_t)$ тогда и только тогда, когда $A_t \in \nabla_x$, т. е. когда $\varphi(x) \in h_0(A_t)$. Это доказывает, что $f(A_t) = \varphi^{-1}(h_0(A_t)) = h(A_t)$.

Поскольку f отображает множество $\mathfrak{S}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, продолжение h отображает алгебру $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Итак, гомоморфизм h обладает всеми требуемыми свойствами.

Отметим, что мы по ходу дела еще раз доказали здесь теорему 32.3.

Теорема 34.1 может быть обобщена следующим образом:

34.2. *Каждая $\mathfrak{m}$-дистрибутивная булева $\mathfrak{m}$-алгебра обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости*[1]).

Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}'$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной $\mathfrak{m}$-алгеброй, а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, f имеют прежний смысл.

Если $\mathfrak{S}_1$ — любое подмножество множества $\mathfrak{S}$, причем $\overline{\overline{\mathfrak{S}_1}} \leqslant \mathfrak{m}$, то пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$ обозначает $\mathfrak{m}$-подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, которая $\mathfrak{m}$-порождается множеством $\mathfrak{S}_1$, а $\mathfrak{A}'(\mathfrak{S}_1)$ обозначает $\mathfrak{m}$-подалгебру алгебры $\mathfrak{A}'$, которая $\mathfrak{m}$-порождается множеством $f(\mathfrak{S}_1)$. Поскольку $\overline{\overline{f(\mathfrak{S}_1)}} \leqslant \mathfrak{m}$, то алгебра $\mathfrak{A}'(\mathfrak{S}_1)$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств, как это следует из теоремы 24.5. Так как свойство сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости сохраняется при изоморфизмах, то булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}'(\mathfrak{S}_1)$ обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости. Таким образом, существует $\mathfrak{m}$-гомоморфизм $h_{\mathfrak{S}_1}$ алгебры $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$ в алгебру $\mathfrak{A}'(\mathfrak{S}_1)$, который является продолжением отображения $f \mid \mathfrak{S}_1$, т. е. отображения f, ограниченного на $\mathfrak{S}_1$.

Пусть теперь $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — два подмножества множества $\mathfrak{S}$, причем $\overline{\overline{\mathfrak{S}_1}} \leqslant \mathfrak{m}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}_2}} \leqslant \mathfrak{m}$. Мы докажем, что

(3) если $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1) \cap \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2)$, то $h_{\mathfrak{S}_1}(A) = h_{\mathfrak{S}_2}(A)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{S}_3$ есть объединение подмножеств $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$. Из единственности продолжения следует, что $h_{\mathfrak{S}_3} \mid \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1) = h_{\mathfrak{S}_1}$ и $h_{\mathfrak{S}_3} \mid \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2) = h_{\mathfrak{S}_2}$, т. е. гомоморфизм $h_{\mathfrak{S}_3}$, ограниченный на $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$ или $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2)$, совпадает с $h_{\mathfrak{S}_1}$ или $h_{\mathfrak{S}_2}$ соответственно. Следовательно, $h_{\mathfrak{S}_1}(A) = h_{\mathfrak{S}_3}(A) = h_{\mathfrak{S}_2}(A)$ для всех A, принадлежащих одновременно и $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$, и $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_2)$.

---

[1]) Сикорский [32], Сикорский и Трачик [2].

Так как множество $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{A}$ является объединением всех подалгебр $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$, где $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$, $\overline{\overline{\mathfrak{S}_1}} \leqslant \mathfrak{m}$. Из формулы (3) вытекает, что все $\mathfrak{m}$-гомоморфизмы $h_{\mathfrak{S}_1}$ на алгебрах $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_1)$ определяют вместе некоторое отображение h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Легко проверить, что отображение h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом.

Проблема существования не $\mathfrak{m}$-дистрибутивной булевой $\mathfrak{m}$-алгебры, обладающей свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, остается нерешенной. Мы покажем ниже (теорема 34.5), что всякая $\mathfrak{m}$-алгебра, обладающая свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, является $\mathfrak{m}$-представимой. С другой стороны, существует $\mathfrak{m}$-представимая $\mathfrak{m}$-алгебра, которая не обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости (см. пример А этого параграфа и пример А § 37).

Мы закончим рассмотрение свойства сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости следующей теоремой.

34.3. *Пусть для каждого $t \in T$ символ $\mathfrak{A}_t$ обозначает некоторую $\mathfrak{m}$-подалгебру булевой $\mathfrak{m}$-алгебры, а через h_t обозначен $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ в $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$, которая обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости (в частности, в $\mathfrak{m}$-дистрибутивную $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ или в $\mathfrak{m}$-поле множеств $\mathfrak{A}'$). Предположим, что теоретико-множественное объединение всех алгебр $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда для того, чтобы существовал $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, являющийся общим продолжением всех гомоморфизмов h_t, т. е.*

$$h(A) = h_t(A) \quad \text{для каждого } A \in \mathfrak{A}_t,\ t \in T,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого подмножества $T' \subset T$, $\overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{m}$, и для каждого индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T'}$, $A_t \in \mathfrak{A}_t$, $t \in T'$, выполнялось условие

$$\bigcap_{t \in T'}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge \text{ влечет за собой } \bigcap_{t \in T'}^{\mathfrak{A}'} h_t(A_t) = \wedge.$$

Доказательство теоремы 34.3 точно такое же, как и доказательство теоремы 12.4.

Пусть теперь $\mathfrak{A}_0$ является такой подалгеброй булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$,

и пусть f — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ в булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$. Тогда для того чтобы гомоморфизм f имел продолжение до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, необходимо, чтобы выполнялось условие,

$$(\mathrm{a}') \text{ если } \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t = \wedge_{\mathfrak{A}}, \text{ то } \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} f(A_t) = \wedge_{\mathfrak{A}'},$$

для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t\in T}$, состоящего из элементов алгебры $\mathfrak{A}_0$.

Условие (a′) эквивалентно условию (a) в случае, когда множество $\mathfrak{S}$ есть подалгебра $\mathfrak{A}_0$. Условие (a′) также эквивалентно следующему условию:

$$(\mathrm{a}'') \; f\left(\bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t\right) = \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} f(A_t) \text{ и } f\left(\bigcup_{t\in T}^{\mathfrak{A}} B_t\right) = \bigcup_{t\in T}^{\mathfrak{A}'} f(B_t) \text{ для}$$

всех таких $\mathfrak{m}$-индексированных множеств $\{A_t\}_{t\in T}$ и $\{B_t\}_{t\in T}$, состоящих из элементов алгебры $\mathfrak{A}_0$, что $\bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} A_t \in \mathfrak{A}_0$ и $\bigcup_{t\in T}^{\mathfrak{A}} B_t \in \mathfrak{A}_0$.

Вообще говоря, условие (a′) не является достаточным для существования продолжения h (см. ниже примеры А и Б).

Говорят, что булева $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{A}'$ обладает *свойством слабой* $\mathfrak{m}$-*продолжаемости*, если для каждой булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ и для каждой подалгебры $\mathfrak{A}_0$, которая $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, всякий гомоморфизм f алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, удовлетворяющий условию (a′), может быть продолжен до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Свойство сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости всегда влечет за собой свойство слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости.

Однако свойство сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости и свойство слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости не эквивалентны; существуют булевы алгебры, которые обладают свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости, но не обладают свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости (и, следовательно, не являются $\mathfrak{m}$-дистрибутивными алгебрами в силу теоремы 34.3); см. ниже пример Д.

34.4. *Всякая слабо* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивная булева алгебра обладает свойством слабой* $\mathfrak{m}$-*продолжаемости*[1]).

Предположим, что $\mathfrak{A}_0$ — подалгебра некоторой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$, алгебра $\mathfrak{A}_0$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, а f — такой гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_0$ в слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивную булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$, что выполнено свойство (a′). Нам нужно доказать, что гомоморфизм f можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Далее буквы T и S всегда обозначают множества мощности $\mathfrak{m}$. Как было оговорено на стр. 205, $\boldsymbol{S}$ будет обозначать класс всех конечных непустых подмножеств множества S, и для любого $\Phi \in \boldsymbol{S}^T$ и любого индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}'$ имеем $A_{t,\Phi(t)} = \bigcup\limits_{s \in \Phi(t)} A_{t,s}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — множество всех элементов A из алгебры $\mathfrak{A}$, которые обладают следующим свойством:

(б) существует такой элемент $A' \in \mathfrak{A}'$ и такое $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}'$, что

$$\bigcup_{s \in S} A_{t,s} = \vee, \text{ для каждого } t \in T \tag{4}$$

и, более того, для всякого $\Phi \in \boldsymbol{S}^T$ существует такое непустое множество $\mathfrak{K}_\Phi \subset \mathfrak{A}_0$, что

$$\overline{\overline{\mathfrak{K}_\Phi}} \leqslant \mathfrak{m}, \tag{5}$$

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} B \subset A \subset \bigcup_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} B, \tag{6}$$

$$A' \cap A_\Phi = f(B) \cap A_\Phi \text{ для всех } B \in \mathfrak{K}_\Phi, \tag{7}$$

где через A_Φ для краткости обозначено

$$A_\Phi = \bigcap_{t \in T} A_{t\,\Phi(t)}. \tag{8}$$

Допустим, что A^* — другой элемент из множества $\mathfrak{K}$, т. е. существуют

$$A'^*,\ \{A^*_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S} \text{ и } \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}, \text{ где } \Phi^* \in \boldsymbol{S}^T,$$

[1]) Маттес [1]. Доказательство, приведенное здесь, является небольшим изменением (неопубликованного) доказательства, которое Маттес сообщил автору.

удовлетворяющие условиям (4), (5), (6) и (7). Мы докажем, что

(9) если $A \subset A^*$, то $A' \in A'^*$.

Из формулы (6) и аналогичного утверждения для $\mathfrak{K}^*_\Phi$ следует, что для любых Φ, $\Phi^* \in S^T$

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} B \subset \bigcup_{B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}} B^*,$$

т. е.

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} \bigcap_{B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}} (B \cap \dot{-} B^*) = \wedge_{\mathfrak{A}}.$$

Поэтому в силу условия (a′) [а также в силу условия (5)] имеет место равенство

$$\bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} \bigcap_{B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}} (f(B) \cap -f(B^*)) = \wedge_{\mathfrak{A}'},$$

т. е.

(10) $$\bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} f(B) \subset \bigcup_{B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}} f(B^*).$$

Из формулы (7) вытекает, что $A' \cap A_\Phi \subset f(B)$ для $B \in \mathfrak{K}_\Phi$. Таким образом,

(11) $$A' \cap A_\Phi \subset \bigcap_{B \in \mathfrak{K}_\Phi} f(B).$$

Применяя условие (7) к A'^*, получаем включение $f(B^*) \subset A'^* \cup -A^*_{\Phi^*}$ для $B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}$, где аналогично формуле (8) введено сокращение

$$A^*_{\Phi^*} = \bigcap_{t \in T} A^*_{t,\, \Phi^*(t)}.$$

Значит,

(12) $$\bigcup_{B^* \in \mathfrak{K}^*_{\Phi^*}} f(B^*) \subset A'^* \cup -A^*_{\Phi^*}.$$

Из формул (10), (11) и (12) следует, что

$$A' \cap A_\Phi \subset A'^* \cup -A^*_{\Phi^*} \text{ для любых } \Phi,\ \Phi^* \in S^T.$$

Так как алгебра $\mathfrak{A}'$ является слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной, то

$$\bigcup_{\Phi \in S^T} A_\Phi = \vee \quad \text{и} \quad \bigcup_{\Phi^* \in S^T} A^*_{\Phi^*} = \vee$$

в силу формулы (4) и ее аналога для $\{A^*_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$. Поэтому

$$A' \subset A'^* \cup -A^*_{\Phi^*} \text{ для каждого } \Phi^* \in \boldsymbol{S}^T$$

и, наконец, $A' \subset A'^*$, т. е. формула (9) доказана.

Из формулы (9) следует, что если $A = A^* \in \mathfrak{K}$, то $A' = A'^*$, т. е. для каждого элемента $A \in \mathfrak{K}$ существует точно один такой элемент A', что выполняется условие (б). Таким образом, равенство

$$h(A) = A'$$

определяет отображение множества $\mathfrak{K}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Отметим теперь, что

(13) $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{K}$ и $h(A) = f(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}_0$.

Действительно, чтобы показать это, достаточно предположить, что $A' = f(A)$, $A_{t,s} = \vee$ для всех t и s и $\mathfrak{K}_\Phi = (A)$ для каждого $\Phi \in \boldsymbol{S}^T$. Все условия (4), (5), (6) и (7) при этом выполняются.

Очевидно, что если A, A', $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$ и $\mathfrak{K}_\Phi$ удовлетворяют условиям (4), (5), (6) и (7), то элементы $-A$, $-A'$, $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$ и множество

$$\mathfrak{K}^-_\Phi = \{-B;\ B \in \mathfrak{K}_\Phi\}$$

также удовлетворяют этим же условиям. Это доказывает, что

(14) если $A \in \mathfrak{K}$, то $-A \in \mathfrak{K}$ и $h(-A) = -h(A)$.

Чтобы закончить, наконец, доказательство теоремы 34.4, достаточно показать, что

(15) $$\bigcap_{r\in S} A_r \in \mathfrak{K} \text{ и } h\Big(\bigcap_{r\in S} A_r\Big) = \bigcap_{r\in S} h(A_r)$$

для любого упорядоченного $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_r\}_{r\in S}$ элементов множества $\mathfrak{K}$.

Действительно, из условий (14) и (15) следует, что

(15′) $$\bigcup_{r\in S} A_r \in \mathfrak{K} \text{ и } h\Big(\bigcup_{r\in S} A_r\Big) = \bigcup_{r\in S} h(A_r)$$

для каждого упорядоченного $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_r\}_{r\in S}$ элементов множества $\mathfrak{K}$. В силу условий

(13), (15) и (15′) множество $\mathfrak{K}$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 23.4. Так как алгебра $\mathfrak{A}_0$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$, то из теоремы 23.4 вытекает, что $\mathfrak{K}=\mathfrak{A}$, а h является $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Следовательно, из условия (13) вытекает, что h является продолжением отображения f.

Чтобы доказать свойство (15), предположим, что $\{A_r\}_{r\in S}$ является монотонным $\mathfrak{m}$-индексированным множеством элементов множества $\mathfrak{K}$. Таким образом, для каждого индекса $r\in S$ существует элемент $A'_r\in\mathfrak{A}'$ и такое $\mathfrak{m}$-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t\in T_r,\ s\in S}$, что

(16) $$\bigcup_{s\in S} A_{t,s}=\vee \text{ для } t\in T_r,$$

и, кроме того, для каждого элемента $\Phi\in S^{T_r}$ существует такое непустое множество $\mathfrak{K}_{r,\Phi}\subset\mathfrak{A}_0$, что

(17) $$\overline{\overline{\mathfrak{K}}}_{r,\Phi}\leqslant\mathfrak{m},$$

(18) $$\bigcap_{B\in\mathfrak{K}_{r,\Phi}} B\subset A_r\subset\bigcup_{B\in\mathfrak{K}_{r,\Phi}} B,$$

(19) $$A'_r\cap\bigcap_{t\in T_r} A_{t,\Phi(t)}=f(B)\cap\bigcap_{t\in T_r} A_{t,\Phi(t)}$$
$$\text{для любого } B\in\mathfrak{K}_{r,\Phi}.$$

Мы можем считать, что все множества T_r попарно не пересекаются.

Пусть $T=\bigcup_{r\in S} T_r\cup(t_0)$, где t_0 — некоторый элемент, не принадлежащий объединению $\bigcup_{r\in S} T_r$. Пусть далее

(20) $$A=\bigcap_{r\in S} A_r,\quad A'=\bigcap_{r\in S} A'_r,$$

(21) $$A_{t_0,s}=A'\cup -A'_s \text{ для всех } s\in S,$$

а для каждого $\Phi\in S^T$ положим

(22) $$\mathfrak{K}_\Phi=\bigcup_{r\in S_\Phi}\mathfrak{K}_{r,\Phi\mid T_r},$$

где S_Φ — множество всех таких $r\in S$, что

(23) $$A_r\subset\bigcap_{s\in\Phi(t_0)} A_s.$$

Так как $\{A_r\}_{r \in S}$ — упорядоченное множество, то условие (23) эквивалентно условию

$$(23') \qquad A_r \subset A_{s_0},$$

где A_{s_0} является наименьшим из всех элементов A_s, $s \in \Phi(t_0)$ [множество $\Phi(t_0)$ конечно и непусто!]

Так определенные элементы A, A', $\{A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ и $\mathfrak{K}_\Phi$ $(\Phi \in S^T)$ удовлетворяют условиям (4), (5), (6) и (7). Действительно, из условий (16), (20) и (21) вытекает условие (4), из условий (17) и (22) вытекает условие (5), а из условий (18), (22) и (23), (23′) — условие (6). Для доказательства условия (7) предположим, что $B \in \mathfrak{K}_\Phi$, $\Phi \in S^T$. Тогда существует такой индекс $r \in S_\Phi$, что $B \in \mathfrak{K}_{r, \Phi | T_r}$ $(\Phi | T_r \in S^{T_r})$. В силу условия (19)

$$A'_r \cap \bigcap_{t \in T_r} A_{t, \Phi(t)} = f(B) \cap \bigcap_{t \in T_r} A_{t, \Phi(t)}.$$

Следовательно,

$$A'_r \cap A_{t_0, \Phi(t_0)} \cap \bigcap_{t \in T} A_{t, \Phi(t)} = f(B) \cap \bigcap_{t \in T} A_{t, \Phi(t)}.$$

Так как $r \in S_\Phi$, то выполняется условие (23) и, значит, $A'_r \subset \bigcap_{s \in \Phi(t_0)} A'_s$ вследствие условия (9). Итак, из условий (20) и (21) вытекает, что

$$A'_r \cap A_{t_0, \Phi(t_0)} = A'_r \cap (A' \cup - \bigcap_{s \in \Phi(t_0)} A'_s) = A'.$$

Это доказывает выполнение условия (7) и заканчивает доказательство свойства (15).

Не известно, существует ли булева алгебра, обладающая свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости, но не являющаяся слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной.

34.5. *Каждая булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ со свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости (а следовательно, и каждая булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{A}$ со свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости) является $\mathfrak{m}$-представимой.*

Пусть $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ и D_t имеют тот же смысл, что и в § 31[1]). Предположим, что мощность алгебры $\mathfrak{A}$ равна $\mathfrak{n}$. Таким образом, существует взаимно однозначное отображение f_0 множества всех множеств D_t (свободных $\mathfrak{m}$-образующих поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$) на алгебру $\mathfrak{A}$. Вследствие теоремы 14.3 отображение f_0 можно продолжить до гомоморфизма f поля $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ $\mathfrak{m}$-порождает поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Гомоморфизм f_0 удовлетворяет условию (a′). Ясно, что если $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}} A_t = \wedge$ ($\overline{\overline{T}} \leqslant \mathfrak{m}$, $A_t \in \mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$), то в силу компактности пространства $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ мы имеем $\bigcap\limits_{t\in T'}^{\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}} A_t = \wedge$ для некоторого конечного множества $T' \subset T$. Так как f является гомоморфизмом, мы получаем, что $\bigcap\limits_{t\in T'}^{\mathfrak{A}} f(A_t) = \wedge_{\mathfrak{A}}$, а следовательно, и $\bigcap\limits_{t\in T}^{\mathfrak{A}} f(A_t) = \wedge_{\mathfrak{A}}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ обладает свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости, отображение f_0 можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h $\mathfrak{m}$-поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Итак, алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-представимой.

Примеры. А) Пусть E — такое булево подмножество канторова дисконтинуума $\mathscr{D}_\sigma$ (см. § 14, стр. 71), что E не является G_δ-множеством. Пусть $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{F}_{0,\sigma} | E$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma} | E$, и пусть Δ есть σ-идеал, σ-порождаемый всеми замкнутыми не пересекающимися с E множествами, т. е. множество $A \in \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}$ принадлежит идеалу Δ тогда и только тогда, когда оно является подмножеством некоторого F_σ-множества, не пересекающегося с множеством E. Отсбражение f, определенное формулой

$$f(A \cap E) = [A]_\Delta \quad (A \in \mathfrak{F}_{0,\sigma}), \tag{24}$$

является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}/\Delta$ и удовлетворяет условию (a′). Действительно, если

---

[1]) То есть $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ — произведение двухточечных пространств H_t, $t \in t_0$, $\overline{\overline{T}}_0 = \mathfrak{n}$, D_t — подмножества $\mathscr{D}_{\mathfrak{n}}$ всех точек, у которых координата с номером t равна 1, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ — $\mathfrak{m}$-поле, $\mathfrak{m}$-порождаемое множествами D_t. — *Прим. перев.*

$A_n \in \mathfrak{F}_{0,\sigma}$, а $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} (E \cap A_n) = E \cap (\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_n) = \wedge$, то $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_n \in \Delta$, так как это множество замкнуто и пересекается с множеством E; значит,

$$\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} f(E \cap A_n) = \left[\bigcap_{1 \leqslant n < \infty} A_n\right]_\Delta = \wedge.$$

Однако отображение f нельзя продолжить до σ-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Действительно, если предположить, что продолжение h существует, то гомоморфизмы $h_1(A) = h(A \cap E)$ и $h_2(A) = [A]_\Delta (A \in \mathfrak{F}_{\sigma,\sigma})$ являются $\mathfrak{m}$-гомоморфизмами поля $\mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$ и в силу равенства (24) $h_1(A) = h_2(A)$ для всех $A \in \mathfrak{F}_{0,\sigma}$. Так как поле $\mathfrak{F}_{0,\sigma}$ σ-порождает поле $\mathfrak{F}_{\sigma,\sigma}$, мы немедленно получаем, что $h_1 = h_2$. Но это невозможно, поскольку, с одной стороны, $h_1(-E) = \wedge$, а с другой, $-E \notin \Delta$ и, значит, $h_2(-E) \neq \wedge$ [1]).

Это доказывает, что условие (а′) [а значит, и условие (а)] не является достаточным даже в случае, когда $\mathfrak{m} = \aleph_0$, а f предполагается изоморфизмом. Булева σ-алгебра $\mathfrak{A}'$ не обладает свойством слабой σ-продолжаемости, а значит, и свойством сильной σ-продолжаемости.

Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ — индексированное множество всех конечных подалгебр алгебры $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{F}_{0,\sigma} | E$, и пусть h_t — ограничение изоморфизма f (из приведенного выше примера) на алгебру $\mathfrak{A}_t$. Тогда не существует σ-гомоморфизма h, который бы являлся общим продолжением всех гомоморфизмов h_t (так как в этом случае h являлся бы продолжением изоморфизма f). Это доказывает существенность предположения в теореме 34.3 о том, что алгебра $\mathfrak{A}'$ обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, даже в случае, когда предполагается, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-полем, а h_t — изоморфизмами. В этом примере мощность множества индексов $\overline{\overline{T}}$ равна $\aleph_0$. Случай $\overline{\overline{T}} = 2$ будет приведен в примере А § 37.

Б) Предположим, что $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$, а $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$, $\mathfrak{D}_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ и D_t имеют тот же смысл, что и в § 31, стр. 217.

---

[1]) Пример А предложил Сикорский в [14].

Пусть f является взаимно однозначным отображением класса свободных $\mathfrak{m}$-образующих D_t поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на множество $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-образующих свободной $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Отображение f удовлетворяет условию (а), так как множества D_t являются $\mathfrak{m}$-независимыми. Однако отображение f не может быть продолжено до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Допустим, что такое продолжение h существует. Тогда гомоморфизм h отображает поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, значит, алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ может быть $\mathfrak{m}$-представлена, что противоречит теореме 31.3.

По теореме 14.3 отображение f можно продолжить до гомоморфизма f_0 поля $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства $\mathfrak{D}_{\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ (с помощью теоремы 12.1 легко проверить, что f_0 изоморфно отображает $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ на $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$). Подалгебра $\mathfrak{F}_{0,\mathfrak{n}}$ $\mathfrak{m}$-порождает поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$. Гомоморфизм f_0 удовлетворяет условию (а′) (аргументация та же, что и в доказательстве теоремы 34.5). Однако гомоморфизм f_0 нельзя продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h поля $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, так как такое продолжение h было бы продолжением отображения f, а последнее нельзя продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма.

Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ при $\mathfrak{m} \geqslant 2^{\aleph_0}$ и $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ не обладает ни свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, ни свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости.

В) Каждая булева σ-алгебра $\mathfrak{A}'$, обладающая строго положительной σ-конечной σ-мерой, обладает также свойством слабой σ-продолжаемости[1]).

Это непосредственно вытекает из теоремы 34.4 и примера А § 30.

Заметим, что алгебра $\mathfrak{A}'$, обладающая строго положительной σ-конечной σ-мерой, не обязательно является σ-дистрибутивной (возьмем, например, алгебру борелевских множеств вещественных чисел по модулю множеств лебеговой меры нуль — см. пример А § 19).

Г) Пусть f — отображение множества $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{m}$-образующих $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$.

Пусть $\mathfrak{A}_0$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порожденная множеством $\mathfrak{S}$. Предположим, что отображение f удовлетворяет условию (а). Тогда, как вытекает из теоремы 12.2,

---

[1]) Дубинс [1].

отображение f можно единственным образом продолжить до гомоморфизма f_0 алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Однако гомоморфизм f_0 не обязан удовлетворять условию (а), т. е. (а′). Если f_0 не удовлетворяет этому условию, то ни f, ни f_0 не могут быть продолжены до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Пример (для $\mathfrak{m}=\aleph_0$) может быть построен следующим образом. Пусть $\mathfrak{F}$ есть σ-поле всех борелевских множеств вещественных чисел, Δ — σ-идеал всех борелевских множеств первой категории, Δ' — идеал всех борелевских множеств лебеговой меры нуль и, наконец, $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}/\Delta$, $\mathfrak{A}'=\mathfrak{F}/\Delta'$. Пусть $\mathfrak{S}$ — класс всех элементов $[A]_\Delta$, где A — полуинтервал, и пусть $f([A]_\Delta)=[A]_{\Delta'}$. Легко проверить, что отображение f удовлетворяет условию (а). Его продолжение f_0 на подалгебру $\mathfrak{A}_0$, порожденную множеством $\mathfrak{S}$, не обладает свойством (а′). Допустим от противного, что f_0 удовлетворяет условию (а′). Тогда, как показывает пример В, отображение f_0 можно продолжить до σ-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Лебегова σ-мера на поле $\mathfrak{F}$ определяет ненулевую строго положительную σ-конечную σ-меру m на $\mathfrak{A}'$. Таким образом, формула $m'(B)=m(h(B))$ $(B\in\mathfrak{A})$ определяет ненулевую σ-конечную σ-меру m' на $\mathfrak{A}$. С другой стороны, известно, что каждая σ-конечная мера на алгебре $\mathfrak{A}$ тождественно нулевая (см. пример Е § 21).

Д) Алгебра борелевских множеств (вещественных чисел) по модулю множеств лебеговой меры нуль обладает свойством слабой σ-продолжаемости, но не обладает свойством сильной σ-продолжаемости. Это непосредственно вытекает из примера В и свойств отображения f, построенного в примере Г.

§ 35. Пополнения и $\mathfrak{m}$-пополнения

Проблема представления, рассмотренная в § 24, может быть сформулирована следующим образом: существует ли такой изоморфизм, который отображает данную булеву алгебру $\mathfrak{A}$ в полную атомную булеву алгебру (т. е. на поле множеств — см. теорему 25.1) и при этом сохраняет некоторые заданные бесконечные объединения

и пересечения? Теперь мы обсудим другую проблему: существует ли изоморфизм, который данную булеву алгебру $\mathfrak{A}$ отображает в полную (но, вообще говоря, не атомную) булеву алгебру и сохраняет все бесконечные объединения и пересечения?

Следующая теорема показывает, что ответ на последний вопрос всегда является утвердительным.

35.1. *Пусть h_0 — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}_0$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{F}$ есть σ-поле всех борелевских подмножеств пространства X (или σ-поле всех подмножеств, обладающих свойством Бэра), и пусть Δ — идеал всех множеств $A \in \mathfrak{F}$ первой категории в пространстве X. Тогда отображение i_0, задаваемое равенством*

$$i_0(A) = [h_0(A)]_\Delta \quad (A \in \mathfrak{A}), \tag{1}$$

является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$. Более того, $i_0(\mathfrak{A})$ является плотной регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$.

Гомоморфизм i_0 является изоморфизмом, так как ни одно непустое открытое подмножество компактного хаусдорфова пространства не является множеством первой категории. Булева алгебра $\mathfrak{F}/\Delta$ полна вследствие примера В § 21. Каждое множество $A \in \mathfrak{F}$ имеет вид

$$A = (G - A_1) \cup A_2,$$

где G — открытое множество, а $A_1, A_2 \in \Delta$. Если $[A]_\Delta \neq \wedge$, то множество G непусто, т. е. существует такой элемент $A_0 \in \mathfrak{A}$, что $A_0 \neq \wedge$ и $h_0(A_0) \subset G$. Следовательно, $\wedge \neq i_0(A_0) = [h_0(A_0)] \subset [G] = [A]$, а это доказывает, что алгебра $\mathfrak{B}$ плотна в алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$. По теореме 23.1 алгебра $i_0(\mathfrak{A})$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$. Если $A = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_t$, то $i_0(A) = \bigcup_{t \in T}^{i_0(\mathfrak{A})} i_0(A_t)$, так как i_0 является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $i_0(\mathfrak{A})$. Так как алгебра $i_0(\mathfrak{A})$ — регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$, мы можем записывать последнее из равенств в форме $i_0(A) = \bigcup_{t \in T}^{\mathfrak{F}/\Delta} i_0(A_t)$, а это и доказывает, что отображение i_0 является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая фиксированная булева алгебра.

В этом и следующем параграфах мы будем рассматривать упорядоченные пары $\{i, \mathfrak{B}\}$, где i является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Говорят, что пара $\{i', \mathfrak{B}'\}$, *изоморфна* паре $\{i, \mathfrak{B}\}$, если существует такой изоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$, что $i' = hi$ [другими словами, если изоморфизм $i'i^{-1}$ алгебры $i(\mathfrak{A})$ на алгебру $i'(\mathfrak{A})$ может быть продолжен до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$]. Заметим, что отображение h^{-1} тогда тоже является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}'$ на алгебру $\mathfrak{B}$, причем $i = h^{-1}i'$, и, значит, пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ изоморфна паре $\{i', \mathfrak{B}'\}$. Таким образом, мы можем просто говорить, что пары $\{i, \mathfrak{B}\}$ и $\{i', \mathfrak{B}'\}$ изоморфны.

Говорят, что пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является *пополнением*[1]) алгебры $\mathfrak{A}$, если выполнены условия:

(а) алгебра $\mathfrak{B}$ является полной булевой алгеброй;

(б) изоморфизм i является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ [т. е. $i(\mathfrak{A})$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$];

(в) алгебра $i(\mathfrak{A})$ *вполне* порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

Например, из теоремы 35.1 следует, что пара

$$\{i_0, \mathfrak{F}/\Delta\}, \tag{2}$$

определенная в этой теореме, является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что, если пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, а пара $\{i', \mathfrak{B}'\}$ изоморфна паре $\{i, \mathfrak{B}\}$, то пара $\{i', \mathfrak{B}'\}$ тоже является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, все пары, изоморфные паре (2), являются пополнениями алгебры $\mathfrak{A}$. Обратное утверждение также справедливо. Это есть часть следующей теоремы, из которой вытекает, что все пополнения алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфны.

35.2. *Пусть i — некоторый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в полную булеву алгебру $\mathfrak{B}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\{i, \mathfrak{B}\}$ — *пополнения алгебры* $\mathfrak{A}$;

---

[1]) О пополнениях булевых алгебр см. Гливенко [1], Макнейл [1], Сикорский [13] и Стоун [5]. См. также Дилуорс [3], Глисон [1], Рейнватер [1], Семадени [2].

(ii) $\{i, \mathfrak{B}\}$ *изоморфна паре* (2);

(iii) $i(\mathfrak{A})$ — *плотная подалгебра алгебры* $\mathfrak{B}$;

(iv) *для каждого изоморфизма* i' *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в любую полную булеву алгебру* $\mathfrak{B}'$ *существует такой изоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{B}'$, *что* $i' = hi$. [*другими словами, изоморфизм* $i'i^{-1}$ *алгебры* $i(\mathfrak{A})$ *в алгебру* $\mathfrak{B}'$ *можно продолжить до изоморфизма* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{B}'$] [1]).

Условие (ii) влечет за собой условие (iii). Это вытекает из теоремы 35.1.

Условие (iii) влечет условие (iv). Это следует из теоремы 33.2.

Условие (iv) влечет (ii). Действительно, отображение $i_0 i^{-1}$ можно продолжить до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$. В силу теорем 35.1 и 33.3 изоморфизм h отображает алгебру $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$. Тем самым пары $\{i, \mathfrak{B}\}$ и $\{i_0, \mathfrak{F}/\Delta\}$ изоморфны.

Условие (i) влечет за собой (iv). Для краткости, пусть $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{F}/\Delta$ [см. (2)]. Поскольку (ii), (iii) и (iv) эквивалентны, то пара $\{i_0, \mathfrak{B}_0\}$ удовлетворяет условию (iv). Таким образом, изоморфизм ii_0^{-1} алгебры $i_0(\mathfrak{A})$ в алгебру $\mathfrak{B}$ можно продолжить до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{B}_0$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Подалгебра $i(\mathfrak{A}) = h(i_0(\mathfrak{A}))$ плотна в алгебре $h(\mathfrak{B}_0)$ вследствие теоремы 35.1 и того, что отображение h является изоморфизмом. Из условия (в) вытекает, что алгебра $i(\mathfrak{A})$ есть регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$. Значит, как следует из теоремы 23.2, алгебра $h(\mathfrak{B}_0)$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. С другой стороны, алгебра $h(\mathfrak{B}_0)$ — полная булева алгебра, так как она изоморфна алгебре $\mathfrak{B}_0$. Отсюда следует, что алгебра $h(\mathfrak{B}_0)$ является полной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. Значит, $h(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}$ в силу условия (б), т. е. пара $\{i_0, \mathfrak{B}_0\}$ изоморфна паре $\{i, \mathfrak{B}\}$. Так как свойство (iv) инвариантно относительно изоморфизмов и пара $\{i_0, \mathfrak{B}_0\}$ обладает этим свойством, то и пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ тоже обладает свойством (iv).

Условие (iii) влечет за собой условие (i). Это следует из теоремы 23.1.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, отображение i — тождественным отображением и пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ — пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, то сама алгебра $\mathfrak{B}$ может

---

[1]) Сикорский [13].

быть названа *пополнением* алгебры $\mathfrak{A}$. Пополнение $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ всегда существует [отождествим алгебру $\mathfrak{A}$ с алгеброй $i_0(\mathfrak{A})$ посредством изоморфизма i_0!] и определяется алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до изоморфизма. Из теоремы 35.2 вытекает, что каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы полная булева алгебра $\mathfrak{B}$ являлась пополнением своей подалгебры $\mathfrak{A}$:

($в_1$) алгебра $\mathfrak{A}$ является регулярной подалгеброй и вполне порождает алгебру $\mathfrak{B}$;

($в_2$) алгебра $\mathfrak{A}$ является плотной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$;

($в_3$) каждый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в полную булеву алгебру может быть продолжен до изоморфизма алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{B}'$.

Примеры. А) Если булева алгебра $\mathfrak{A}$ является атомной, поле $\mathfrak{F}$ — полем всех подмножеств множества всех атомов алгебры $\mathfrak{A}$, а $i(A)$ равно множеству всех атомов $a \subset A$ для любого $A \in \mathfrak{A}$, то пара $\{i, \mathfrak{F}\}$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Это немедленно вытекает из теорем 35.2 (i), (iii) и 24.4.

Б) Если алгебра $\mathfrak{A}$ является безатомной, а пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ — пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{B}$ тоже является безатомной. Это сразу вытекает из теоремы 35.2 (i), (iii).

В) Булева алгебра всех регулярных замкнутых подмножеств (см. пример Б § 1) вполне несвязного компактного пространства является пополнением булевой алгебры всех открыто-замкнутых подмножеств этого пространства[1]). Это замечание также прямо следует из теоремы 35.2 (i), (iii) и примера В § 20.

Аналогичное замечание справедливо также для булевой алгебры всех регулярных открытых подмножеств (см. пример В § 5).

Г) Предположение в теореме 33.1, что булева алгебра $\mathfrak{A}'$ полна, является существенным. Более точно, если алгебра $\mathfrak{A}'$ является неполной булевой алгеброй, то существуют булева алгебра $\mathfrak{A}$, подалгебра $\mathfrak{A}_0$ алгебры $\mathfrak{A}$ и гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{A}'$, который

---

[1]) См. Макнейл [1].

нельзя продолжить до некоторого гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Именно, пусть $\mathfrak{A}$ — пополнение алгебры $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}'$, и h — тождественное отображение алгебры $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{A}'$. Предположим, что гомоморфизм h можно продолжить до гомоморфизма h' алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Тогда гомоморфизм h' отображает алгебру $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}'$. С помощью таких же аргументов, как и в доказательстве теоремы 33.2, проверяем, что гомоморфизм h' является изоморфизмом. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}'$ является полной, так как она изоморфна полной алгебре $\mathfrak{A}$. Противоречие.

Д) Все сепарабельные безатомные полные булевы алгебры изоморфны алгебре $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ — поле всех борелевских множеств вещественных чисел, а Δ — идеал всех множеств первой категории[1]).

Это утверждение является следствием таких утверждений: ($а_0$) пополнения изоморфных булевых алгебр изоморфны, ($б_0$) все счетные безатомные булевы алгебры изоморфны (см. пример В § 9), ($в_0$) каждая безатомная полная сепарабельная булева алгебра является пополнением некоторой счетной безатомной булевой алгебры.

Чтобы доказать утверждение ($в_0$), достаточно заметить, что если множество $\mathfrak{S}$ есть счетное плотное подмножество безатомной булевой алгебры, то подалгебра, порожденная этим множеством, является счетной безатомной и плотной во всей алгебре.

Из примера Е § 21 следует, что алгебра борелевских множеств лебеговой меры нуль является несепарабельной алгеброй.

Е) Говорят, что пара $\{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2\}$ подмножеств булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является *сечением* алгебры $\mathfrak{A}$, если выполнены условия:

(г′) если $A_1 \subset A_2$ для каждого $A_2 \in \mathfrak{S}_2$, то $A_1 \in \mathfrak{S}_1$;

(г″) если $A_1 \subset A_2$ для каждого $A_1 \in \mathfrak{S}_1$, то $A_2 \in \mathfrak{S}_2$.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть пополнение своей подалгебры $\mathfrak{A}$. Если B — любой элемент алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}_1$ — множество всех таких

---

[1]) Этот результат получен С. Жасковским (не опубликовано). См. Тарский [3], стр. 199.

элементов $A_1 \in \mathfrak{A}$, что $A_1 \subset B$, а $\mathfrak{S}_2$ — множество всех таких элементов $A_2 \in \mathfrak{A}$, что $B \subset A_2$, то пара $\{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2\}$ является сечением в алгебре $\mathfrak{A}$. Обратно, каждое сечение в алгебре $\mathfrak{A}$ определяется указанным выше образом с помощью некоторого элемента $B \in \mathfrak{B}$, точнее, с помощью элемента $B = \bigcup^{\mathfrak{B}}_{A_1 \in \mathfrak{S}_1} A_1 = \bigcap^{\mathfrak{B}}_{A_2 \in \mathfrak{S}_2} A_2$. Итак, элементы любого пополнения $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ можно отождествить с сечениями алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. алгебра $\mathfrak{B}$ может быть определена как множество всех сечений алгебры $\mathfrak{A}$[1]).

Ж) В качестве применения существования пополнений булевых алгебр мы докажем дополнительное замечание к теореме 31.8. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество мощности $\mathfrak{n}$ свободных $\mathfrak{m}$-образующих свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ ($\overline{\overline{\mathfrak{S}}} = \mathfrak{n}$), и пусть $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{m}' \leqslant \mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{m}'$-подалгебра $\mathfrak{C}$ (алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$), $\mathfrak{m}'$-порождаемая множеством $\mathfrak{S}$, изоморфна свободной булевой $\mathfrak{m}'$-алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$ с $\mathfrak{n}$ свободными $\mathfrak{m}'$-образующими.

Для доказательства рассмотрим $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$ как регулярную подалгебру ее пополнения $\mathfrak{B}$. Пусть f — взаимно однозначное отображение множества $\mathfrak{S}$ на множество $\mathfrak{S}'$ свободных $\mathfrak{m}$-образующих алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$. Отображение f можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Продолжение h гомоморфизма f, если его рассматривать только на алгебре $\mathfrak{C}$, является $\mathfrak{m}'$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{C}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$. С другой стороны, отображение f^{-1} может быть продолжено до $\mathfrak{m}'$-гомоморфизма g алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{C}$. В силу теоремы 23.3 алгебра $\mathfrak{C}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}',\mathfrak{n}}$.

Как и выше, пусть i — изоморфизм булевой алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Будем говорить, что пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является *$\mathfrak{m}$-пополнением* алгебры $\mathfrak{A}$, если выполнены следующие условия:

(а′) алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-алгеброй;

(б′) изоморфизм i является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ [т. е. $i(\mathfrak{A})$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$];

(в′) алгебра $i(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

---

[1]) Этот метод построения пополнения булевых алгебр был применен Макнейлом [1].

Например, если пара $\{i_0, \mathfrak{C}\}$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{B}_0$ — ее подалгебра, которая $\mathfrak{m}$-порождена алгеброй $i(\mathfrak{A})$, то пара

$$\{i_0, \mathfrak{B}_0\} \quad , \tag{3}$$

является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Так как пара $\{i_0, \mathfrak{C}\}$ определяется алгеброй $\mathfrak{A}$ однозначно с точностью до изоморфизма, пара (3) тоже однозначно определяется алгеброй $\mathfrak{A}$ с точностью до изоморфизма. Заметим, что если пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, а пара $\{i', \mathfrak{B}'\}$ изоморфна паре $\{i, \mathfrak{B}\}$, то $\{i', \mathfrak{B}'\}$ тоже является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, все пары, изоморфные паре (3), являются $\mathfrak{m}$-пополнениями алгебры $\mathfrak{A}$. Обратное утверждение тоже справедливо и является частью следующей теоремы, из которой следует, что все $\mathfrak{m}$-пополнения алгебры $\mathfrak{A}$ изоморфны между собой.

35.3. *Пусть i — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{B}$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$;*

(ii) *пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ изоморфна паре* (3);

(iii) *алгебра $i(\mathfrak{A})$ является плотной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$* [1]).

Условие (i) влечет за собой условие (ii). Действительно, пусть $\{h, \mathfrak{C}\}$ — пополнение алгебры $\mathfrak{B}$, $i_0 = hi$ и $\mathfrak{B}_0 = h(\mathfrak{B})$. Тогда пара $\{i_0, \mathfrak{C}\}$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_0$ — подалгеброй, которая $\mathfrak{m}$-порождена множеством $i_0(\mathfrak{A})$, а h — изоморфизмом пары $\{i, \mathfrak{B}\}$ на пару $\{i_0, \mathfrak{B}_0\}$.

Условие (ii) влечет за собой условие (iii). Это следует из соответствующей импликации (ii) $\rightarrow$ (iii) в теореме 35.2.

Условие (iii) влечет за собой условие (i). Это вытекает из теоремы 23.1.

Если $\mathfrak{A}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, i — тождественное отображение, а пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$, то сама алгебра $\mathfrak{B}$ может быть названа *$\mathfrak{m}$-пополнением* алгебры $\mathfrak{A}$. При этом $\mathfrak{m}$-пополнение $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ всегда существует [отождествим алгебру $\mathfrak{A}$ с подалгеброй $i_0(\mathfrak{A})$ в паре (3) с помощью изоморфизма i_0!] и опреде-

---

[1]) В случае $\mathfrak{m} = \aleph_0$ см. Сикорский [13].

ляется алгеброй однозначно с точностью до изоморфизма. В силу теоремы 35.3 каждое из следующих условий является необходимым и достаточным для того, чтобы $\mathfrak{m}$-точная булева алгебра $\mathfrak{B}$ была $\mathfrak{m}$-пополнением ее подалгебры $\mathfrak{A}$:

($в_1'$) алгебра $\mathfrak{A}$ является регулярной подалгеброй и $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$;

($в_2'$) алгебра $\mathfrak{A}$ является плотной подалгеброй и $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

Примеры. З) Если булева алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{n}$-цепному условию, то ее пополнение и $\mathfrak{m}$-пополнение тоже удовлетворяют $\mathfrak{n}$-цепному условию. Таким образом, при $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$ $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$ является полной булевой алгеброй в силу теоремы 20.5, и, следовательно, оно совпадает с пополнением алгебры $\mathfrak{A}$.

И) Если пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является $\mathfrak{m}$-пополнением атомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то алгебра $\mathfrak{B}$ тоже является атомной. Это следует, например, из примера А.

К) Пусть $\mathfrak{A}$, h_0, X и $\mathfrak{F}_0$ имеют тот же смысл, что и в теореме 35.1, $\mathfrak{F}_\sigma$ является σ-полем, σ-порождаемым полем $\mathfrak{F}_0$, и пусть Δ_0 является σ-идеалом всех множеств $B \in \mathfrak{F}_\sigma$ первой категории и, наконец, положим

$$i_0(A) = [h_0(A)]_{\Delta_0} \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Тогда пара $\{i_0, \mathfrak{F}_\sigma/\Delta_0\}$ является σ-пополнением алгебры $\mathfrak{A}$.

Л) В качестве применения существования $\mathfrak{m}$-пополнений мы докажем следующее утверждение: для каждого бесконечного кардинального числа $\mathfrak{m}$ существует такая булева $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{B}$, что $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \geqslant \mathfrak{m}$ и алгебра $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{m}$-порождается счетным множеством $\mathfrak{S}_0$ ее элементов[1]).

Сначала мы построим поле $\mathfrak{F}$ подмножеств обобщенного канторова дисконтинуума $\mathfrak{D}_\mathfrak{m} = H^{T_0}$, где, как обычно, $H = (1, -1)$, а T_0 — множество мощности $\mathfrak{m}$. По соглашению на стр. 71 D_t означает множество всех точек $x = \{x_t\}_{t \in T_0} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{m}$, у которых координата с номером t равна 1. Удобно предположить, что

$$T_0 = (S \cup U) \times S,$$

[1]) Гейфман [1, 3] и Хейлс [1, 2]. Конструкция алгебры $\mathfrak{B}$, рассматриваемая здесь, такая же, как и у Хейлса [1, 2].

где U — множество всех порядковых чисел мощности меньше $\mathfrak{m}$ (включая и число 0), а S — счетное множество, не пересекающееся с U. Буквами j, k, l, n, m, p, q и s (с индексами, если понадобится) будем обозначать элементы множества S, а буквами α, β и γ (тоже с индексами) — порядковые числа из множества U. Таким образом, элементы t множества T_0 — это пары вида

$$t=\{j, s\} \quad \text{и} \quad t=\{\alpha, j\}.$$

Простоты ради мы будем писать $D_{j,s}$ и $D_{\alpha,j}$ вместо $D_{\{j,s\}}$ и $D_{\{\alpha,j\}}$ соответственно. Для любого индекса j из множества S положим

$$S_j=S-(j).$$

Символы $\bigcup$, $\bigcap$ без всяких индексов сверху будут обозначать теоретико-множественное объединение и пересечение соответственно.

Определим множества $A_{\alpha,j}$ по трансфинитивной индукции следующим образом:

(4) $$A_{0,j}=D_{0,j},$$

(4′) $$A_{\alpha+1,j}=\bigcup_{s\in S_j}(A_{\alpha,j}\cap A_{\alpha,s}\cap D_{j,s})\bigcup\bigcap_{\beta\leqslant\alpha+1}D_{\beta,j},$$

(4″) $$A_{\alpha,j}=\bigcap_{\beta<\alpha}A_{\beta,j},$$ если α — предельное порядковое число.

По определению

(5) $$\bigcap_{\beta\leqslant\alpha}D_{\beta,j}\subset A_{\alpha,j}$$

и

(5′) $$A_{\alpha+1,j}\subset A_{\alpha,j}.$$

Элемент $x=\{x_t\}_{t\in T_0}\in\mathscr{D}_{\mathfrak{m}}$, определенный формулой

$$x_t=\begin{cases}1, & \text{если } t=\{\beta, j\}, \text{ где } \beta\leqslant\alpha,\\ -1, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

принадлежит множеству $A_{\alpha,j}$ в силу включения (5), но не принадлежит множеству $A_{\alpha+1,j}$, так как $x\notin D_{j,s}$ и $x\notin D_{\alpha+1,j}$. Таким образом, $A_{\alpha+1,j}\neq A_{\alpha,j}$, и, значит,

вследствие формул (4′) и (5′) имеет место соотношение

(6) $$A_{\beta,j} \supset A_{\alpha,j} \neq A_{\beta,j} \quad \text{для } \beta < \alpha.$$

Пусть $\mathfrak{F}$ — поле (подмножеств пространства $\mathfrak{D}_{\mathfrak{m}}$), порождаемое всеми множествами $A_{\alpha,j}$ и $D_{i,j}$. Из условия (6) [см. также § 4, (1) или (2)] следует, что

(7) $$\overline{\overline{\mathfrak{F}}} = \mathfrak{m}.$$

Мы докажем теперь равенство

(8) $$A_{\alpha+1,j} = \bigcup_{s \in S_j}^{\mathfrak{F}} (A_{\alpha,j} \cap A_{\alpha,s} \cap D_{j,s}),$$

т. е. докажем, что

(8′) если $A_{\alpha,j} \cap A_{\alpha,s} \cap D_{j,s} \subset A \in \mathfrak{F}$ для всех $s \in S_j$, то $A_{\alpha+1,j} \subset A$.

Как показывает формула (2) § 4, достаточно доказать условие (8′) только в случае, когда

(9) $$A = \bigcup_{r \in R_1} A_{\alpha_r, j_r} \cup \bigcup_{r \in R_2} -A_{\gamma_r, k_r} \cup \bigcup_{r \in R_3} D_{m_r, n_r} \cup \bigcup_{r \in R_4} -D_{p_r, q_r},$$

где R_1, R_2, R_3, R_4 — конечные множества индексов. Более того, достаточно доказать условие (8′) только в том случае, когда множество $-A_{\alpha+1,j}$ присутствует в правой части равенства (9) [так как добавлением множества $-A_{\alpha+1,j}$ к множеству вида (9) мы получим эквивалентное утверждение]. Поэтому, чтобы доказать равенство (8), достаточно доказать следующую лемму:

(L) Если A имеет вид (9) и

(10) $$\gamma_{r_0} = \alpha + 1, \quad k_{r_0} = j \text{ для некоторого } r_0 \in R_2,$$

и если

(11) $$A_{\alpha,j} \cap A_{\alpha,s} \cap D_{j,s} \subset A \text{ для всех } s \in S_j,$$

то

(12) $$A = \mathfrak{D}_{\mathfrak{m}}.$$

Пусть $l \in S$ — такой элемент, что

(13) $$l \neq j, \quad l \neq j_r \quad \text{для } r \in R_1, \qquad l \neq k_r \quad \text{для } r \in R_2,$$
$$l \neq n_r \quad \text{для } r \in R_3, \qquad p_r \neq l \neq q_r \quad \text{для } r \in R_4.$$

Рассмотрим точку $x=\{x_t\}_{t\in T_0}\in\mathscr{D}_{\mathfrak{m}}$, которую определим равенствами:

(14а) $x_t=1$, если $t=\{\beta, k_r\}$, где $r\in R_2$ и $\beta\leqslant\gamma_r$;

(14б) $x_t=1$, если $t=\{p_r, q_r\}$, где $r\in R_4$;

(14в) $x_t=1$, если $t=\{\beta, l\}$ и $\beta\leqslant\alpha$;

(14г) $x_t=1$, если $t=\{j, l\}$;

(14д) $x_t=-1$ во всех остальных случаях.

Из (14г) вытекает, что $x\in D_{j,l}$. Из формул (14в) и (5) следует, что $x\in A_{\alpha,l}$, и, наконец, из формул (14а) и (5) получаем, что $x\in A_{\alpha,j}$ [в случае когда $r=r_0$ — см. формулу (10)]. Таким образом,

(15) $$x\in A_{\alpha,j}\cap A_{\alpha,l}\cap D_{j,l}.$$

Так как $l\neq j$ в силу формул (13), мы из включения (11) выводим, что

$$x\in A.$$

С другой стороны, $x\notin\bigcup_{r\in R_2}-A_{\gamma_r,k_r}$ по свойствам (14а) и (5) и $x\notin\bigcup_{r\in R_4}-D_{p_r,q_r}$ по свойству (14б). Итак, нужно рассмотреть два случая:

1) $x\in\bigcup_{r\in R_3}D_{m_r,n_r}$, т. е. $x\in D_{m_{r'},n_{r'}}$, для некоторого $r'\in R_3$.

Тогда в силу свойств (13), (14б), (14в) (14г) и (14д) существует такое $r\in R_4$, что $\{m_{r'}, n_{r'}\}=\{p_r, q_r\}$. Это доказывает равенство (12), так как в правой части равенства (9) присутствует множество $D_{m_{r'},n_{r'}}$ и его дополнение $-D_{p_r,q_r}$.

2) $x\in\bigcup_{r\in R_1}A_{\alpha_r,j_r}$. Тогда $x\in A_{\alpha_r,j_r}$ для некоторого $r\in R_1$.

Если $-A_{\alpha_r,j_r}\subset A$, то имеет место равенство (12). Значит, для доказательства леммы (L) достаточно показать, что предположения

(16) $$x\in A_{\alpha_r,j_r}\text{ и }-A_{\alpha_r,j_r}\not\subset A$$

ведут к противоречию.

Допустим, что условия (16) выполнены. Заметим, что $j_r \neq l$ в силу условий (13). Пусть α' — такое наименьшее порядковое число, что существует индекс $j' \in S$ со свойствами

(17) $$j' \neq l, \quad x \in A_{\alpha', j'} \text{ и } -A_{\alpha', j'} \not\subset A.$$

Если $\alpha' = 0$, то из условий (4), (14а) и (14д) мы получаем, что $k_{r'} = j'$ для некоторого $r' \in R_2$. Значит [см. (6)],

$$-A_{\alpha', j'} = -A_{0, j'} \subset -A_{\gamma_{r'}, j'} \subset A.$$

Это противоречит условию (17).

Если α' — предельное число, то в силу условия (4″) существует такое число $\beta < \alpha'$, что $x \in A_{\beta, j'}$ и $-A_{\beta, j'} \not\subset A$. Это противоречит минимальности числа α'.

Предположим теперь, что $\alpha' = \alpha'' + 1$. Тогда, как показывает формула (4′), нужно рассмотреть два случая.

2′) $x \in \bigcap\limits_{\beta \leqslant \alpha'} D_{\beta, j'}$. В этом случае из формул (13), (14а) и (14д) вытекает, что существует такое $r \in R_2$, что $\gamma_r \geqslant \alpha'$ и $k_r = j'$. Тогда $-A_{\alpha', j'} \subset -A_{\gamma_r, k_r} \subset A$, что противоречит условию (17).

2″) $x \in \bigcup\limits_{s \in S_{j'}} (A_{\alpha'', j'} \cap A_{\alpha'', s} \cap D_{j', s})$, т. е. $x \in A_{\alpha'', j'} \cap A_{\alpha'', s} \cap$ $\cap D_{j', s}$ для некоторого индекса $s \neq j'$.

Рассмотрим случай, когда $s \neq l$. Тогда из минимальности числа α' мы получаем, что $-A_{\alpha'', j'} \subset A$ и $-A_{\alpha'', s} \subset A$. Так как $x \in D_{j', s}$, то из условий (13), (14б) и (14д) следует, что $\{j', s\} = \{p_r, q_r\}$ для некоторого индекса $r \in R_4$, т. е. $D_{j', s} = D_{p_r, q_r}$. Таким образом, $-D_{j', s} \subset A$. Следовательно,

$$-A_{\alpha', j'} \subset -A_{\alpha'', j'} \cup -A_{\alpha'', s} \cup -D_{j', s} \subset A.$$

Это противоречит условию (17).

Наконец, рассмотрим случай $s = l$, т. е.

$$x \in A_{\alpha'', j'} \cap A_{\alpha'', l} \cap D_{j', l}.$$

Так как $x \in D_{j', l}$, то из условий (14б), (14г), (14д) и (13) вытекает, что $j' = j$. Значит, $-A_{\alpha', j} \not\subset A$. Поскольку

$-A_{\alpha+1,j} \subset A$ в силу условия (10), мы из формулы (6) получаем неравенство $\alpha'' \geqslant \alpha+1$. Тогда из той же формулы (6) вытекает, что $x \in A_{\alpha+1,l}$, так как $x \in A_{\alpha'',l}$. Формула (4′) показывает, что могут быть две возможности:

$$x \in \bigcap_{\beta \leqslant \alpha+1} D_{\beta,1} \text{ или } x \in \bigcup_{s \in S_l} (A_{\alpha,l} \cap A_{\alpha,s} \cap D_{l,s}).$$

В первом случае $x_t = 1$ для $t = \{\alpha+1, l\}$, что невозможно ввиду условий (13), (14а), (14в) и (14д). Во втором случае существует такой индекс $s \in S_l$ (т. е. $s \neq l$), что $x_t = 1$ для $t = \{l, s\}$. Это тоже невозможно ввиду условий (13) (14б), (14в) и (14д). Тем самым доказательство леммы (L) завершено. Итак, равенство (8) справедливо.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — некоторое $\mathfrak{m}$-пополнение булевой алгебры $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{S}_0$ — счетное множество всех элементов $D_{j,s}$ $(j, s \in S)$, а $\mathfrak{B}_0$ — $\mathfrak{m}$-подалгебра (алгебры $\mathfrak{B}$), $\mathfrak{m}$-порожденная множеством $\mathfrak{S}$. Так как поле $\mathfrak{F}$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, то из условий (8) и (4″) вытекает, что

$$A_{\alpha+1,j} = \bigcup_{s \in S_j}^{\mathfrak{B}} (A_{\alpha,j} \cap A_{\alpha,s} \cap D_{j,s})$$

для любого порядкового числа $\alpha \in U$ и (см. замечание в конце примера А § 18)

$$A_{\alpha,j} = \bigcap_{\beta<\alpha}^{\mathfrak{F}} A_{\beta,j} = \bigcap_{\beta<\alpha}^{\mathfrak{B}} A_{\beta,j}$$

для любого предельного порядкового числа $\alpha \in U$. Следовательно, по трансфинитной индукции [см. также (4)] получаем, что все множества $A_{\alpha,j}$ являются элементами алгебры $\mathfrak{B}_0$. Так как поле $\mathfrak{F}$ порождено множеством $\mathfrak{S}_0$ и всеми элементами $A_{\alpha,j}$, то имеет место включение $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}_0$. Это доказывает, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$, т. е. алгебра $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{m}$-порождена счетным множеством $\mathfrak{S}_0$. Из формулы (7) следует, что $\overline{\overline{\mathfrak{B}}} \geqslant \mathfrak{m}$.

М) Теперь мы в состоянии доказать неравенство (11) из § 31 (стр. 216). Пусть $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ — свободная булева $\mathfrak{m}$-алгебра с множеством $\mathfrak{S}$ мощности $\mathfrak{n}$ свободных $\mathfrak{m}$-образующих, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. Пусть f — любое отображение множества $\mathfrak{S}$ на счетное множество $\mathfrak{S}_0$ $\mathfrak{m}$-сбразующих булевой $\mathfrak{m}$-алгебры $\mathfrak{B}$, которая построена в примере Л. Отобра-

жение f можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Так как множество $\mathfrak{S}_0$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$, гомоморфизм h отображает алгебру $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{B}$. Поскольку $\overline{\mathfrak{B}} \geqslant \mathfrak{m}$, мы получаем неравенство $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \geqslant \mathfrak{m}$.

Теперь мы дадим несколько применений пополнений и $\mathfrak{m}$-пополнений к рассмотрению $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности булевых алгебр.

Определение $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности на стр. 100 является несколько усложненным, поскольку необходимо постулировать существование различных бесконечных объединений и пересечений. Теорема 35.4 предлагает другое определение, которое обходит эти трудности.

35.4. *Пусть $\mathfrak{B}$ — пополнение (или $\mathfrak{m}'$-пополнение, где $\mathfrak{m}' \geqslant \mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}' \geqslant \mathfrak{n}$) своей подалгебры $\mathfrak{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(d) *алгебра $\mathfrak{A}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной;*

(d_5) *для каждого $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место равенство*

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} = \bigcup_{\varphi \in S^T}^{\mathfrak{B}} \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_{t,\varphi(t)}. \tag{18}$$

Рассмотрим первый случай, когда алгебра $\mathfrak{B}$ является пополнением алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда все рассматриваемые пересечения и объединения существуют, поскольку алгебра $\mathfrak{B}$ является полной. Так как $A_{t,\varphi(t)} \subset \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s}$, то

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_{t,\varphi(t)} \subset \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s}.$$

Таким образом, равенство (18) справедливо тогда и только тогда, когда элемент

$$B = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} - \bigcup_{\varphi \in S^T}^{\mathfrak{B}} \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_{t,\varphi(t)} \in \mathfrak{B}$$

равен $\wedge$.

Предположим, что $B \neq \wedge$. Поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ плотна в алгебре $\mathfrak{B}$, существует такой элемент $A \in \mathfrak{A}$, что $\wedge \neq$

$\neq A \subset B$. Тогда [см. (5) § 18]

$$\bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{A}} A \cap A_{t,s} = A$$

и, следовательно,

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{A}} A \cap A_{t,s} = A \neq \wedge,$$

но

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A \cap A_{t,\varphi(t)} = \wedge$$

для каждого $\varphi \in S^T$. Таким образом, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированное множество $\{A \cap A_{t,s}\}_{t \in T, s \in S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ не удовлетворяет условию (d_1) теоремы 19.2, т. е. алгебра $\mathfrak{A}$ не является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной. Это доказывает, что из условия (d) вытекает условие (d_5).

С другой стороны, очевидно, что из условия (d_5) вытекает (d), так как алгебра $\mathfrak{A}$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$.

Пусть теперь $\mathfrak{B}'$ — подалгебра (алгебры $\mathfrak{B}$), $\mathfrak{m}'$-порожденная алгеброй $\mathfrak{A}$. Так как алгебра $\mathfrak{A}$ плотна в алгебре $\mathfrak{B}$, то тот же факт верен и для алгебры $\mathfrak{B}'$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{B}'$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$. Поскольку $\mathfrak{m}' \geqslant \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}' \geqslant \mathfrak{n}$, а алгебра $\mathfrak{B}'$ является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, то имеют место, следовательно, равенства:

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}'} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}'} A_{t,s} \in \mathfrak{B}',$$

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} A_{t,\varphi(t)} = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}'} A_{t,\varphi(t)} \in \mathfrak{B}'.$$

Если справедливо равенство (18), то ввиду равенства (5) § 18 верно также и равенство

$$(18') \qquad \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}'} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}'} A_{t,s} = \bigcup_{\varphi \in S^T}^{\mathfrak{B}'} \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}'} A_{t,\varphi(t)}.$$

С другой стороны, из равенства (18′) вытекает (18), поскольку $\mathfrak{B}'$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. Таким образом, равенства (18) и (18′) эквивалентны, что и доказывает утверждение 35.4 для случая $\mathfrak{m}'$-пополнения алгебры $\mathfrak{A}$.

35.5. *Алгебра* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющая* $\mathfrak{n}$-*цепному условию, является* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*дистрибутивной тогда и только тогда, когда* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*дистрибутивным является ее пополнение.*

Предположим, что алгебра $\mathfrak{B}$ есть пополнение своей подалгебры $\mathfrak{A}$, причем последняя является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной и удовлетворяет $\mathfrak{n}$-цепному условию. В силу эквивалентности утверждений 19.2 (d) и (d_1), чтобы доказать, что алгебра $\mathfrak{B}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной, достаточно показать, что если $\{B_{t,s}\}_{t \in T,\, s \in S}$ — такое $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-индексированное множество элементов алгебры $\mathfrak{B}$, что

$$B = \bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{B}} B_{t,s} \neq \wedge,$$

то существует такое $\varphi \in S^T$, что $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} B_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$.

Поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ плотна в алгебре $\mathfrak{B}$, то существует такой элемент $A \in \mathfrak{A}$, что $\wedge \neq A \subset B$. Как показывает пример Е § 23, имеет место равенство

$$B_{t,s} = \bigcup_{s' \in S'}^{\mathfrak{B}} B_{t,s,s'}, \text{ где } B_{t,s,s'} \in \mathfrak{A}, \overline{\overline{S'}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Положим $A_{t,s,s'} = A \cap B_{t,s,s'}$. Так как

$$\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} \bigcup_{(s\ s') \in S \times S'}^{\mathfrak{A}} A_{t,s,s'} = A \neq \wedge,$$

то в силу утверждения 19.2 (d_1) существует такое отображение $\psi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t))$, определенное на T и принимающее значения $\varphi(t) \in S, \varphi'(t) \in S'$, что $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{A}} A_{t,\varphi(t),\varphi'(t)} \neq \wedge$. Поскольку $A_{t,\varphi(t),\varphi'(t)} \subset B_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$, то $\bigcap_{t \in T}^{\mathfrak{B}} B_{t,\varphi(t)} \neq \wedge$.

Таким образом, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивность алгебры $\mathfrak{A}$ влечет за собой $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивность ее пополнения $\mathfrak{B}$. Импликация в обратную сторону получается из следующего утверждения, которое вытекает непосредственно из определения $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивности: каждая регулярная подалгебра $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной алгебры является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-дистрибутивной.

Как показывает последнее замечание, слово „пополнение“ можно заменить в утверждении 35.5 на слово „$\mathfrak{m}'$-пополнение“, где $\mathfrak{m}'$ — некоторое бесконечное кардинальное число,

35.6. *Булева алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной тогда и только тогда, когда ее $\mathfrak{m}$-пополнение является $\mathfrak{m}$-дистрибутивным* [1]).

Пусть $\mathfrak{B}$ есть $\mathfrak{m}$-пополнение своей подалгебры $\mathfrak{A}$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной, то каждая подалгебра $\mathfrak{B}_0$ алгебры $\mathfrak{B}$, которая $\mathfrak{m}$-порождена некоторым $\mathfrak{m}$-индексированным множеством $\{A_t\}_{t\in T}$ алгебры $\mathfrak{A}$, является атомной алгеброй и, следовательно, изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Действительно, элемент

$$\bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{B}} \varepsilon(t)\cdot A_t \qquad (\varepsilon(t)=\pm 1) \tag{19}$$

является атомом в алгебре $\mathfrak{B}_0$ или равен $\wedge$. Используя утверждение 35.4, где $S=(1,-1)$, $A_{t,s}=s\cdot A_t$, приходим к выводу, что единичный элемент есть объединение всех элементов типа (19) (см. подобные аргументы в доказательстве предложения 24.5).

Каждая $\mathfrak{m}$-подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{m}$-порожденная не более чем $\mathfrak{m}$ образующими, содержится в подалгебре $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{m}$-порожденной $\mathfrak{m}$-индексированным множеством $\{A_t\}_{t\in T}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$, и, значит, изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Следовательно, по теореме 24.6 алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной.

Таким образом, из $\mathfrak{m}$-дистрибутивности алгебры $\mathfrak{A}$ вытекает $\mathfrak{m}$-дистрибутивность ее $\mathfrak{m}$-пополнения $\mathfrak{B}$. Обратная импликация следует из замечания в конце доказательства предложения 35.5.

35.7. *Пусть $\mathfrak{B}$ — пополнение (или $\mathfrak{m}'$-пополнение, причем $\mathfrak{m}'\geqslant\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'\geqslant\mathfrak{n}$) своей подалгебры $\mathfrak{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

(w) *алгебра $\mathfrak{A}$ является слабо $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$-дистрибутивной:*

(w_6) *для каждого $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$-индексированного множества $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$ элементов из $\mathfrak{A}$ имеет место равенство*

$$\bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{B}} \bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} = \bigcup_{\Phi\in S^T}^{\mathfrak{B}} \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{B}} A_{t,\Phi(t)}. \tag{20}$$

---

[1]) Пирс [3]. Изложенное выше доказательство утверждения 35.5 отличается от доказательства Пирса.

Символы S и $A_{t,\Phi(t)}$ имеют тот же смысл, что и в определении слабой ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивности на стр 205.

Доказательство предложения 35.7 аналогично доказательству 35.4 [вместо условия 19.2 (d_1) следует применить условие 30.1(w_1)]. Условие (w_6) звучит подобно первоначальному определению слабой ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивности, но является более простым, так как дополнительно не постулируется существование бесконечных объединений и пересечений.

35.8. *Пусть булева алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет $\mathfrak{n}$-цепному условию. Алгебра $\mathfrak{A}$ является слабо* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивной тогда и только тогда, когда ее пополнение является* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*дистрибутивным* [1]).

Доказательство аналогично доказательству предложения 35.5. Поскольку каждая регулярная подалгебра слабо ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивной алгебры тоже является ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-дистрибутивной, то слово „пополнение" в предложении 35.8 можно заменить на слово „$\mathfrak{m}'$-пополнение", где $\mathfrak{m}'$ — любое бесконечное кардинальное число.

Примеры. Н) Существует $\mathfrak{m}$-дистрибутивная булева алгебра (и даже $\mathfrak{m}$-поле множеств), у которой пополнения и все $\mathfrak{m}'$-пополнения при $\mathfrak{m}' \geqslant 2^{\mathfrak{m}}$ не являются $\mathfrak{m}$-дистрибутивными [2]).

В самом деле, в примере К § 20 мы показали, что существует такое $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X, которое не является ($\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$)-дистрибутивным. Пусть $\mathfrak{B}$ — любая такая $2^{\mathfrak{m}}$-полная булева алгебра, что $\mathfrak{F}$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. Алгебра $\mathfrak{B}$ не будет $\mathfrak{m}$-дистрибутивной. Действительно, если предположить, что $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй, то в силу утверждения 20.4 она окажется также и ($\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$)-дистрибутивной. Следовательно, поле $\mathfrak{F}$ будет ($\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$)-дистрибутивным как регулярная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$.

О) Если $2^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^+$ [1]), то существует слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивная булева $\mathfrak{m}$-алгебра (и даже $\mathfrak{m}$-поле множеств),

---

[1]) Трачик [5].
[2]) Пирс [3].

пополнение и все $\mathfrak{m}'$-пополнения которой при $\mathfrak{m}' \geqslant \mathfrak{m}^+$ не являются слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивными[1]).

Пусть T и S — два множества мощности $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}^+$ соответственно, а $\boldsymbol{T}$ — множество всех конечных непустых подмножеств множества T. Как показывает пример B § 30, существуют такие множества $S_{t', t''} \subset S$ $(t', t'' \in T)$, что

(21) $$S = \bigcup_{t'' \in T} S_{t', t''} \text{ для каждого } t' \in T,$$

(22) множество $S_\Phi = \bigcap_{t' \in T} S_{t', \Phi(t')}$ имеет мощность,

не превосходящую $\mathfrak{m}$, для каждого $\Phi \in \boldsymbol{T}^T$.
Здесь, в согласии с обозначениями на стр. 205,

(23) $$S_{t', \Phi(t')} = \bigcup_{t'' \in \Phi(t')} S_{t', t''}.$$

Во-первых, мы докажем, что если $\{B_{t,s}\}_{t \in T\, s \in S}$ — такое $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^+)$-индексированное множество элементов слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной булевой $\mathfrak{m}^+$-алгебры, что

(24) $$\bigcup_{s \in S} B_{t,s} = \vee \text{ для каждого } t \in T,$$

(25) $$B_{t,s} \cap B_{t,s'} = \wedge \text{ для } s \neq s',$$

то имеет место равенство

(26) $$\bigcup_{\Psi \in \boldsymbol{T}^{T \times T}} \bigcap_{t \in T} \bigcup_{s \in S_{\Psi_t}} B_{t,s} = \vee.$$

Здесь функция $\Psi_t \in \boldsymbol{T}^T$ определяется для каждого $\Psi \in \boldsymbol{T}^{T \times T}$ равенством

$$\Psi_t(t') = \Psi(t, t') \text{ для } t' \in T,$$

а S_{Ψ_t} определено так же, как и в равенстве (23), т. е.

$$S_{\Psi_t} = \bigcap_{t' \in T} S_{t', \Psi_t(t')} = \bigcap_{t' \in T} \bigcup_{t'' \in \Psi_t(t')} S_{t', t''}.$$

Положим

(27) $$B_{t, t', t''} = \bigcup_{s \in S_{t', t''}} B_{t,s} \text{ для } t, t', t'' \in T.$$

---

[1]) $\mathfrak{m}^+$ обозначает наименьшее кардинальное число, большее, чем $\mathfrak{m}$.

[2]) Трачик [5].

Из равенств (21) и (24) следует, что

$$\bigcup_{t''\in T} B_{t,t',t''} = \vee \text{ для каждой пары } (t, t') \in T\times T.$$

Поскольку алгебра $\mathfrak{B}$ слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивна, мы получаем, что

$$\bigcup_{\Psi\in T^{T\times T}} \bigcap_{(t,t')\in T\times T} B_{t,t',\Psi(t,t')} = \vee, \tag{28}$$

где, по соглашению на стр. 205 [см. также (23)], полагаем

$$B_{t,t',\Psi(t,t')} = \bigcup_{t''\in\Psi(t,t')} B_{t,t',t''}.$$

Равенство (28) можно также записать в следующем виде:

$$\bigcup_{\Psi\in T^{T\times T}} \bigcap_{t\in T} \bigcap_{t'\in T} B_{t,t',\Psi_t(t')} = \vee. \tag{29}$$

В силу равенств (24) и (25) для каждого фиксированного индекса $t\in T$ отображение

$$h(S') = \bigcup_{s\in S'} B_{t,s} \qquad (S'\subset S)$$

является $\mathfrak{m}^+$-изоморфизмом поля всех подмножеств множества S в алгебру $\mathfrak{B}$. Поэтому отсюда вытекает, что

$$\bigcap_{t'\in T} B_{t,t',\Psi_t(t')} = \bigcup_{s\in S_{\Psi_t}} B_{t,s},$$

что вместе с равенством (28) дает равенство (26). Точное доказательство последнего тождества проводится следующим образом:

$$\bigcap_{t'\in T} B_{t,t',\Psi_t(t')} = \bigcap_{t'\in T} \bigcup_{t''\in\Psi_t(t')} h(S_{t',t}) =$$

$$= h\left(\bigcap_{t'\in T} \bigcup_{t''\in\Psi_t(t')} S_{t',t''}\right) = h(S_{\Psi_t}) = \bigcup_{s\in S_{\Psi_t}} B_{t,s}.$$

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-поле, определенное в примере К § 20. Мы напомним основное свойство поля $\mathfrak{F}$. Оно

содержит такое $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^+)$-индексированное множество $\{A_{t,s}\}_{t\in T,\, s\in S}$, что

(30) $$\bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{F}} A_{t,s} = \vee,$$

(31) $$\bigcap_{t\in T} \bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \wedge,$$

где $\bigcup$ и $\bigcap$ обозначают теоретико-множественное объединение и пересечение соответственно. Из равенства (30) и теоремы 20.2 вытекает, что существуют такие множества $B_{t,s}\in\mathfrak{F}$, для которых

(32) $B_{t,s}\subset A_{t,s}$, $B_{t,s}\cap B_{t,s'} = \wedge$ при $s\neq s'$ и $\bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{F}} B_{t,s} = \vee$ для $t\in T$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{B}$ — такая $\mathfrak{m}^+$-алгебра, что $\mathfrak{F}$ является ее регулярной подалгеброй. Тогда $\mathfrak{B}$ не будет слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй. Предположим противное, т. е. что $\mathfrak{B}$ является слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной. В силу свойств (32) предпосылки условий (24) и (25) выполнены. Значит, имеет место равенство (26). С другой стороны, из (31) и (32) вытекает, что $\bigcap_{t\in T} \bigcup_{s\in S_{\Psi_t}} B_{t,s} = \wedge$ для каждого $\Psi\in \boldsymbol{T}^{T\times T}$. Противоречие.

Взяв в качестве алгебры $\mathfrak{B}$ пополнение или $\mathfrak{m}'$-пополнение поля $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{m}'\geqslant\mathfrak{m}^+)$, мы получим утверждение примера К.

§ 36. Расширения булевых алгебр

Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра, $\mathfrak{m}$ — фиксированное бесконечное кардинальное число и $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ — два таких фиксированных множества непустых подмножеств алгебры $\mathfrak{A}$, что

(1) $\overline{\overline{\mathfrak{S}}}\leqslant\mathfrak{m}$ для каждого $\mathfrak{S}\in\mathbf{J}$ и для каждого $\mathfrak{S}\in\mathbf{M}$,

и существуют все объединения

(2) $$\bigcup_{A\in\mathfrak{S}} A \quad (\mathfrak{S}\in\mathbf{J})$$

и пересечения

(2′) $$\bigcap_{A\in\mathfrak{S}} A \quad (\mathfrak{S}\in\mathbf{M}).$$

Пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ называется ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширением*[1]) *алгебры* $\mathfrak{A}$, если выполнены условия:

(а) $\mathfrak{B}$ — булева алгебра;

(б) i есть ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ (см. стр. 143);

(в) $i(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

В случае когда $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ суть множества всех таких ненулевых подмножеств $\mathfrak{S}$ алгебры $\mathfrak{A}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, что существуют объединения (2) и пересечения (3), ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширение алгебры $\mathfrak{A}$ будет называться просто $\mathfrak{m}$-*расширением алгебры* $\mathfrak{A}$. В силу результатов § 22 (стр. 143) ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-изоморфизмы совпадают тогда с $\mathfrak{m}$-изоморфизмами и, значит, условие (б) можно сформулировать следующим образом:

($б_0$) i есть $\mathfrak{m}$-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$.

Условия (а), (в) совпадают с условиями (а′), (в′) в определении $\mathfrak{m}$-пополнения алгебры $\mathfrak{A}$ на стр. 251 § 35, но условия (б) и ($б_0$) являются более слабыми, чем условие (б′). Это приводит к тому, что в отличие от $\mathfrak{m}$-пополнения алгебра $\mathfrak{A}$ может иметь неизоморфные ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения или неизоморфные $\mathfrak{m}$-расширения (см. примеры Б и В).

Пусть $\{i, \mathfrak{B}\}$ и $\{i', \mathfrak{B}'\}$ — два ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения алгебры $\mathfrak{A}$. Говорят, что расширение $\{i', \mathfrak{B}'\}$ есть $\mathfrak{m}$-*гомоморфный образ расширения* $\{i, \mathfrak{B}\}$, если существует такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{B}'$, что

$$i' = hi. \tag{3}$$

Мы тогда пишем:

$$\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\}. \tag{4}$$

---

[1]) σ-расширения были впервые рассмотрены Сикорским [13]. Позднее Керстан [1] доказал существование свободного ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения для любого $\mathfrak{m}$. Другое доказательство существования свободного ($\mathbf{J}$ $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения было дано Сикорским в [32]. Независимо такое же доказательство существования свободного $\mathfrak{m}$-расширения было найдено Якубом [1], который также рассмотрел случай, когда $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ пусты. См. также Дэй [1] и Дэй и Якуб [1]. Изложение этого параграфа является небольшой модификацией изложения из работы Сикорского [32].

Заметим, что условие (3) эквивалентно следующему условию:

(5) h является продолжением изоморфизма $i'i^{-1}$ алгебры $i(\mathfrak{A})$ на алгебру $i'(\mathfrak{A})$.

Следовательно, если $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h с требуемым условием существует, то он единствен. Более того, h отображает алгебру $\mathfrak{B}$ на всю алгебру $\mathfrak{B}'$. Эти два утверждения непосредственно вытекают из условия (в).

Если гомоморфизм h является изоморфизмом, то пары $\{i, \mathfrak{B}\}$ и $\{i', \mathfrak{B}'\}$ изоморфны в смысле определения на стр. 247 § 35.

Заметим, что если $\{i, \mathfrak{B}\}$ есть $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширение алгебры $\mathfrak{A}$ и h — любой изоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в другую булеву алгебру $\mathfrak{B}'$, то пара $\{hi, h(\mathfrak{B})\}$ является $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением алгебры $\mathfrak{B}$, изоморфным расширению $\{i, \mathfrak{B}\}$. Другими словами, любая алгебра, изоморфная $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширению алгебры $\mathfrak{A}$, тоже является $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением.

Легко проверить, что отношение (4) является отношением квазипорядка в классе $\boldsymbol{K}$ всех $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширений алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. это отношение рефлексивно и транзитивно. Более того, два элемента $\{i, \mathfrak{B}\}$ и $\{i', \mathfrak{B}'\}$ из класса $\boldsymbol{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда одновременно имеют место неравенства

$$\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\} \quad \text{и} \quad \{i, \mathfrak{B}\} \leqslant \{i', \mathfrak{B}'\}$$

(см. теорему 23.3). Иногда удобно отождествлять изоморфные элементы класса $\boldsymbol{K}$; после отождествления этот класс становится частично упорядоченным с помощью отношения $\leqslant$.

Класс $\boldsymbol{K}$ непуст, а именно каждое $\mathfrak{m}$-пополнение $\{i, \mathfrak{B}\}$ алгебры $\mathfrak{A}$ принадлежит к классу $\boldsymbol{K}$, т. е. каждое $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$ является $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{n}$ — мощность множества образующих алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}}$ — свободная булева $\mathfrak{m}$-алгебра со множеством мощности $\mathfrak{n}$ свободных $\mathfrak{m}$-образующих. В силу теоремы 31.8 наименьшая подалгебра $\mathfrak{A}_{0, \mathfrak{n}}$ алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}}$, содержащая все свободные $\mathfrak{m}$-образующие, является свободной булевой

алгеброй с $\mathfrak{n}$ свободными образующими. Таким образом, булева алгебра с $\mathfrak{n}$ образующими является гомоморфным образом алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$. В частности, существует гомоморфизм g_0 алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Так как свободные $\mathfrak{m}$-образующие алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ являются одновременно и свободными образующими алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$, то алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ и $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ обладают тем свойством, что

(г) каждый гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ в любую $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ можно единственным образом продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$.

Пусть Δ_0 — идеал всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$, что $g_0(A) = \wedge$, а $\boldsymbol{I}$ — множество всех таких $\mathfrak{m}$-идеалов Δ в алгебре $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, что

(д′) $$\Delta \cap \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}} = \Delta_0,$$

(д″) Δ содержит все элементы вида

$$A_0 - \bigcup_{A \in \mathfrak{S}_1} A, \qquad \bigcup_{A \in \mathfrak{S}_1} A - A_0,$$

$$A_0 - \bigcap_{A \in \mathfrak{S}_2} A, \qquad \bigcap_{A \in \mathfrak{S}_2} A - A_0,$$

где $A_0 \in \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$, а $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ — произвольные подмножества алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ мощности, не превосходящей $\mathfrak{m}$, и обладающие свойствами

$$g_0(\mathfrak{S}_1) \in \mathbf{J}, \quad g_0(A_0) = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}_1} g_0(A),$$

$$g_0(\mathfrak{S}_2) \in \mathbf{M}, \quad g_0(A_0) = \bigcap_{A \in \mathfrak{S}_2} g_0(A).$$

Для каждого $\Delta \in \boldsymbol{I}$ пусть $\mathfrak{A}_\Delta = \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}/\Delta$, а $\mathfrak{A}_{\Delta,0}$ — подалгебра (алгебры $\mathfrak{A}_\Delta$), образованная всеми элементами $[A]_\Delta$, $A \in \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$.

Условие (д′) означает, что формула

$$g_0([A]_\Delta) = g_0(A) \text{ для } A \in \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$$

определяет изоморфизм g_Δ алгебры $\mathfrak{A}_{\Delta,0}$ на алгебру $\mathfrak{A}$. Пусть

$$i_\Delta = g_\Delta^{-1}.$$

Условие (д″) означает, что i_Δ есть $(\mathbf{J}, \mathbf{M})$-изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ на алгебру $\mathfrak{A}_\Delta$. Так как алгебра $\mathfrak{A}_{\Delta,0} = i_\Delta(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}_\Delta$, мы получаем следующую теорему:

36.1. *Для каждого* Δ *из* $\boldsymbol{I}$ *пара* $\{i_\Delta, \mathfrak{A}_\Delta\}$ *является* $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*расширением алгебры* $\mathfrak{A}$.

Теперь мы докажем, что и обратно,

36.2. *Для каждого* $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*расширения* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *существует такой идеал* $\Delta \in \boldsymbol{I}$, *что пара* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *изоморфна паре* $\{i_\Delta, \mathfrak{A}_\Delta\}$.

В силу свойства (г) гомоморфизм ig_0 алгебры $\mathfrak{A}_{0,n}$ в алгебру $\mathfrak{B}$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма g алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{m}$-идеал Δ всех таких элементов $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$, что $g(A) = \wedge$, обладает свойствами (д′), (д″), т. е. $\Delta \in \boldsymbol{I}$, и формула

$$h([A]_\Delta) = g(A) \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$$

определяет требуемый изоморфизм h пары $\{i_\Delta, \mathfrak{A}_\Delta\}$ на $\{i, \mathfrak{B}\}$.

36.3. *Для любых идеалов* Δ', Δ'' *из* $\boldsymbol{I}$

$\{i_{\Delta'}, \mathfrak{A}_{\Delta'}\} \leqslant \{i_{\Delta''}, \mathfrak{A}_{\Delta''}\}$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta'' \subset \Delta'$.

Следовательно, пары $\{i_{\Delta'}, \mathfrak{A}_{\Delta'}\}$ *и* $\{i_{\Delta''}, \mathfrak{A}_{\Delta''}\}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $\Delta' = \Delta''$.

В самом деле, пусть h есть $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{\Delta''}$ в алгебру $\mathfrak{A}_{\Delta'}$, который является продолжением гомоморфизма $i_{\Delta'} i_{\Delta''}^{-1}$ и, таким образом,

$$h([A]_{\Delta''}) = [A]_{\Delta'} \tag{6}$$

для любого $A \in \mathfrak{A}_{0,n}$. Легко проверить, что класс всех $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$, для которых имеет место равенство (6), является $\mathfrak{m}$-подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$. Поскольку эта $\mathfrak{m}$-подалгебра содержит $\mathfrak{A}_{0,n}$, она совпадает с алгеброй $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$, т. е. равенство (6) имеет место для всех $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},n}$. Если $A \in \Delta''$, то $A \in \Delta'$. Итак, $\Delta'' \subset \Delta'$. Обратно, если $\Delta'' \subset \Delta'$, то равенство (6) определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}_{\Delta''}$ в $\mathfrak{A}_{\Delta'}$, который является продолжением гомоморфизма $i_{\Delta'} i_{\Delta''}^{-1}$. Это доказывает первую часть утверждения 36.3. Вторая часть непосредственно вытекает из первой.

Теоремы 36.1, 36.2, 36.3 дают точное описание класса $\boldsymbol{K}$ всех $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширений алгебры $\mathfrak{A}$. Пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ принадлежит классу $\boldsymbol{K}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна паре $\{i_\Delta, \mathfrak{A}_\Delta\}$ для некоторого $\Delta \in \boldsymbol{I}$. После отождествления изоморфных элементов множество $\boldsymbol{K}$ становится

изоморфным (в смысле теории частично упорядоченных множеств) множеству $\boldsymbol{I}$, которое частично упорядочено с помощью отношения, обратного теоретико-множественному включению.

Пересечение Δ^0 всех идеалов Δ из $\boldsymbol{I}$ также принадлежит множеству $\boldsymbol{I}$. В силу теоремы 36.1 пара

$$\{i_{\Delta^0},\ \mathfrak{A}_{\Delta^0}\} \tag{7}$$

является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширением алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширение (7) и все ему изоморфные расширения называются *максимальными* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширениями алгебры* $\mathfrak{A}$.

36.4. *Для того чтобы* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширение* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ *было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*гомоморфизма* g *алгебры* $\mathfrak{A}$ *в любую булеву* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{C}$ *существовал такой* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, *что*

$$g = hi.$$

Чтобы объяснить последнее условие, удобно отождествить алгебру $\mathfrak{A}$ с образом $i(\mathfrak{A})$ с помощью изоморфизма i. Тогда это условие означает, что всякий ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизм подалгебры $\mathfrak{A} = i(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{B}$ в любую булеву $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{C}$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{C}$.

Для доказательства утверждения 36.4 заметим, что гомоморфизм gg_0 алгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{C}$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h' алгебры $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ в алгебру $\mathfrak{C}$ в силу свойства (г). Тогда $\mathfrak{m}$-идеал Δ' всех таких $A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$, что $h'(A) = \bigwedge$, обладает свойством (д″), так как g является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмом. Поскольку $\Delta_0 \subset \Delta'$, то

$$(\Delta' \cap \Delta^0) \cap \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}} = \Delta' \cap (\Delta^0 \cap \mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}) = \Delta' \cap \Delta_0 = \Delta_0,$$

т. е. $\mathfrak{m}$-идеал $\Delta' \cap \Delta^0$ удовлетворяет условию (д′). Так как этот идеал удовлетворяет также и условию (д″) [как пересечение идеалов, удовлетворяющих условию (д″)], то он принадлежит $\boldsymbol{I}$. Значит, $\Delta^0 \subset \Delta' \cap \Delta^0$, т. е. $\Delta^0 \subset \Delta'$. Следовательно, формула

$$h([A]_{\Delta^0}) = h'(A) \quad \text{для} \quad A \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$$

определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_{\Delta_0}$ в алгебру $\mathfrak{C}$, и $g=hi$.

Таким образом, мы доказали, что пара (7) обладает свойством продолжаемости, упоминаемым в утверждении 36.4. Значит, и каждая пара, изоморфная паре (7), т. е. каждое максимальное ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширение алгебры $\mathfrak{A}$, обладает этим свойством.

С другой стороны, как это следует из теоремы 23.3, все ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения алгебры $\mathfrak{A}$, обладающие свойством продолжаемости, изоморфны друг другу. Так как расширение (7) обладает свойством продолжаемости, то все ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения со свойством продолжаемости изоморфны расширению (7), т. е. являются максимальными.

Согласно общему определению для частично упорядоченных множеств, элемент $\{i, \mathfrak{B}\}$ из $\boldsymbol{K}$ называется наибольшим элементом в $\boldsymbol{K}$, если

$$\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\} \text{ для каждого } \{i', \mathfrak{B}'\} \in \boldsymbol{K}.$$

Элемент $\{i, \mathfrak{B}\}$ называется наименьшим элементом в $\boldsymbol{K}$, если

$$\{i, \mathfrak{B}\} \leqslant \{i', \mathfrak{B}'\} \text{ для каждого } \{i', \mathfrak{B}'\} \in \boldsymbol{K}.$$

Элемент $\{i, \mathfrak{B}\}$ называется минимальным, если для каждого $\{i', \mathfrak{B}'\}$

$$\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\} \text{ влечет за собой } \{i, \mathfrak{B}\} \leqslant \{i', \mathfrak{B}'\},$$

т. е. элемент $\{i', \mathfrak{B}'\}$ изоморфен элементу $\{i, \mathfrak{B}\}$ и, значит, может быть отождествлен с элементом $\{i, \mathfrak{B}\}$.

36.5. *Любое максимальное* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширение алгебры* $\mathfrak{A}$ *есть наибольший элемент в* $\boldsymbol{K}$. *Любое* $\mathfrak{m}$-*пополнение алгебры* $\mathfrak{A}$ *является минимальным элементом в* $\boldsymbol{K}$.

Первая часть этого утверждения легко следует из 36.4. Чтобы доказать вторую часть, достаточно показать, что если $\{i, \mathfrak{B}\}$ есть $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$, $\{i', \mathfrak{B}'\}$ — любой элемент из $\boldsymbol{K}$ и h — такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$, что $i'=hi$, то h является изоморфизмом. Действительно, h является продолжением изоморфизма $i'i^{-1}$ алгебры $i(\mathfrak{A})$ на алгебру $i'(\mathfrak{A})$. Таким образом, $h(A) \neq \wedge_{\mathfrak{B}'}$ для $A \neq \wedge_{\mathfrak{B}}$, $A \in i(\mathfrak{A})$. Если B — любой ненулевой элемент A из алгебры $\mathfrak{B}$, то найдется такой ненулевой

элемент A из алгебры $i(\mathfrak{A})$, что $A \subset B$, поскольку алгебра $i(\mathfrak{A})$ плотна в алгебре $\mathfrak{B}$ (в силу теоремы 35.3). Так как $\wedge_{\mathfrak{B}'} \neq h(A) \subset h(B)$, то $h(B) \neq \wedge_{\mathfrak{B}'}$, а это доказывает тот факт, что h является изоморфизмом.

Теорема 36.5 мотивирует использование термина „максимальный" для расширений, изоморфных расширению (7). По таким же соображениям $\mathfrak{m}$-пополнения алгебры $\mathfrak{A}$ называют *минимальными* $\mathfrak{m}$-*расширениями* алгебры $\mathfrak{A}$ (значит, пополнения алгебры также называют *минимальными расширениями* алгебры $\mathfrak{A}$). Свойство продолжаемости из теоремы 36.4 похоже на основное свойство свободных $\mathfrak{m}$-алгебр. Поэтому максимальные ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширения называют еще *свободными* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширениями* алгебры $\mathfrak{A}$.

Неизвестно, является ли $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$ наименьшим элементом в классе $\boldsymbol{K}$. Частичный ответ на этот вопрос дается следующими двумя теоремами.

36.6. *Если* $\{i, \mathfrak{B}\} \in \boldsymbol{K}$ *и* $\mathfrak{m}$-*алгебра* $\mathfrak{B}$ *обладает свойством слабой* $\mathfrak{m}$-*продолжаемости (в частности,* $\mathfrak{B}$ *является слабо* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной алгеброй или* $\mathfrak{m}$-*полем множеств), то расширение* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *является* $\mathfrak{m}$-*пополнением алгебры* $\mathfrak{A}$ *и наименьшим элементом в* $\boldsymbol{K}$.

В самом деле, пусть $\{i', \mathfrak{B}'\}$ — другой элемент из $\boldsymbol{K}$. Поскольку алгебра $\mathfrak{B}$ обладает свойством слабой $\mathfrak{m}$-продолжаемости (см. § 34), то изоморфизм ii'^{-1} алгебры $i'(\mathfrak{A})$ в алгебру $\mathfrak{B}$ можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма алгебры $\mathfrak{B}'$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Это доказывает, что $\{i, \mathfrak{B}\} \leqslant \{i', \mathfrak{B}'\}$. Таким образом, пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является наименьшим элементом в $\boldsymbol{K}$. Так как в каждом частично упорядоченном множестве все минимальные элементы совпадают с наименьшим элементом, если таковой существует, то расширение $\{i, \mathfrak{B}\}$ должно быть пополнением алгебры $\mathfrak{A}$ в силу второй части теоремы 36.5.

36.7. *Если алгебра* $\mathfrak{A}$ *является* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной или если она является слабо* $\mathfrak{m}$-*дистрибутивной и удовлетворяет* $\mathfrak{m}$-*цепному условию, то* $\mathfrak{m}$-*пополнение алгебры* $\mathfrak{A}$ *является наименьшим элементом в* $\boldsymbol{K}$.

Это непосредственно вытекает из теорем 36.6 и 35.6 или 35.8.

Пусть $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ означает класс всех таких ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширений $\{i, \mathfrak{B}\}$ алгебры $\mathfrak{A}$, что алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-представимой. Ясно, что класс $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ непуст тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-представимой.

Чтобы изучать класс $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$, нам придется вспомнить обозначения из § 29, стр. 201: h_0 будет изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ на поле $\mathfrak{F}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ будет обозначать наименьшее $\mathfrak{m}$-поле, содержащее $\mathfrak{F}$. Наконец, $\mathfrak{m}$-идеал всех множеств $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-категории (см. стр. 202) теперь будет обозначаться через Δ^*.

Пусть $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$ — класс всех таких $\mathfrak{m}$-идеалов Δ, что

($д_1$) ни одно непустое открытое подмножество пространства $\mathbf{X}$ не принадлежит идеалу Δ;

($д_2$) Δ^* является подмножеством Δ.

Для каждого Δ из $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$ формула

$$i^{\Delta}(A) = [h_0(A)]_{\Delta}$$

определяет $\mathfrak{m}$-изоморфизм i^{Δ} алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$, а множество $i^{\Delta}(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$, другими словами,

36.8 *Для каждого* $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$ *расширение* $\{i^{\Delta}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta\}$ *принадлежит* $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$.

Именно, гомоморфизм i^{Δ} является изоморфизмом в силу условия ($д_1$) и ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизмом в силу условия ($д_2$). Подалгебра $i^{\Delta}(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$ вследствие того, что поле $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{m}$-порождает $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$.

Тогда из теоремы 29.6 получаем, что расширение

$$\{i^{\Delta^*}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*\} \tag{8}$$

принадлежит $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$. Это ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширение (8) и все ему изоморфные расширения называются *максимальными представимыми* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширениями алгебры* $\mathfrak{A}$ или *свободными представимыми* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширениями алгебры* $\mathfrak{A}$. Мотивировкой введения таких терминов служат приводимые ниже теоремы 36.10 и 36.9.

36.9. *Для того чтобы* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширение* $\{i, \mathfrak{B}\} \in \boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ *было максимальным представимым расширением, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-*гомомор-*

физма g алгебры $\mathfrak{A}$ в любую $\mathfrak{m}$-представимую $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{C}$ существовал такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{C}$, что

$$g = hi.$$

Объяснение последнего свойства продолжаемости такое же, как и в случае теоремы 36.4.

Сначала мы докажем, что расширение (8) обладает этим свойством продолжаемости. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}'/\Delta'$ является каноническим $\mathfrak{m}$-представлением $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгебры. Пусть g — некоторый ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{C}$. В силу таких же аргументов, как в доказательстве теоремы 32.6 (см. также теорему 22.5), мы утверждаем, что гомоморфизм $h' = g(i^{\Delta^*})^{-1}$ индуцирован поточечным отображением φ, которое является ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-непрерывным. Другими словами,

$$h'([A]_{\Delta^*}) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \text{ для каждого } A \in \mathfrak{F},$$

и $\psi^{-1}(B)$ принадлежит Δ' для каждого ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$)-нигде не плотного множества B из X, и следовательно, для всех $B \in \Delta^*$. Отсюда вытекает, что формула

$$h([A]_{\Delta^*}) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta'} \text{ для всех } A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$$

определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*$ в алгебру $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}'/\Delta'$, который является продолжением гомоморфизма h', т. е. $g = hi^{\Delta^*}$.

Таким образом, мы доказали, что расширение (8) обладает свойством продолжаемости, описанным в 36.9. Следовательно, каждое расширение, изоморфное (8), т. е. максимальное представимое ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-расширение алгебры $\mathfrak{A}$, обладает этим свойством.

С другой стороны, из теоремы 23.3 следует, что все элементы из $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$, обладающие свойством продолжаемости, изоморфны друг другу. Поскольку расширение (8) обладает этим свойством, то все элементы из $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$, обладающие свойством продолжаемости, изоморфны расширению (8), т. е. являются максимальными представимыми расширениями.

36.10 *Любое максимальное представимое* ($\mathbf{J}$, $\mathbf{M}$, $\mathfrak{m}$)-*расширение алгебры $\mathfrak{A}$ является наибольшим элементом в $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$.*

Это вытекает прямо из теоремы 36.9.

36.11. *Для каждого расширения* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *из* $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ *существует такой идеал* $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$, *что пара* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *изоморфна* $\{i^{\Delta}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{m}}/\Delta\}$.

По теореме 36.9 существует такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*$ в алгебру $\mathfrak{B}$, что $i = hi^{\Delta^*}$, т. е. h является продолжением гомоморфизма $i(i^{\Delta^*})^{-1}$. Так как алгебра $i(\mathfrak{A})$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$ и содержится в $h(\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*)$, то $\mathfrak{F} = h(\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*)$. Тогда $\mathfrak{m}$-идеал Δ всех таких $A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, что $h([A]_{\Delta^*}) = \wedge_{\mathfrak{B}}$, принадлежит $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$. Действительно, условие ($д_1$) выполняется, поскольку h является продолжением изоморфизма $i(i^{\Delta^*})^{-1}$. Условию же ($д_2$) идеал Δ удовлетворяет по определению. Формула

$$h'([A]_{\Delta}) = h([A])_{\Delta^*} \text{ для } A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$$

определяет изоморфизм h' алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta$ на $\mathfrak{B}$, причем $i = h'i^{\Delta} = hi^{\Delta^*}$. Таким образом, пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ изоморфна паре $\{i^{\Delta}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta\}$.

36.12. *Для любых* Δ', Δ'' *из* $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$

$$\{i^{\Delta'}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta'\} \leqslant \{i^{\Delta''}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta''\}$$

тогда и только тогда, когда $\Delta'' \subset \Delta'$.

Следовательно, пары $\{i^{\Delta'}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta'\}$ *и* $\{i^{\Delta''}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta''\}$ *изоморфны в том и только том случае, когда* $\Delta' = \Delta''$.

Доказательство теоремы 36.12 подобно доказательству аналогичной теоремы 36.3.

Следующее простое замечание вытекает из того факта, что каждый $\mathfrak{m}$-гомоморфный образ $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгебры является $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгеброй.

36.13. *Если* $\{i, \mathfrak{B}\} \in \boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$, $\{i', \mathfrak{B}'\} \in \boldsymbol{K}$ *и* $\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\}$, *то* $\{i', \mathfrak{B}'\} \in \boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$.

Теоремы 36.8, 36.11 и 36.12 полностью описывают класс $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$. Именно, пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ принадлежит $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ тогда и только тогда, когда она изоморфна паре $\{i^{\Delta}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta\}$ для некоторого $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$. После отождествления изоморфных элементов множество $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ становится изоморфным (в смысле теории частично упорядоченных множеств) множеству $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$, частично упорядоченному по включению, обратному теоретико-множественному. Теоремы 36.10 и 36.13 объясняют, как множество $\boldsymbol{K}_{\mathfrak{r}}$ расположено в $\boldsymbol{K}$.

Неизвестно, находится ли $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$ в множестве $\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$. Из теоремы 36.13 легко следует, что если $\mathfrak{m}$-пополнение алгебры $\mathfrak{A}$ является наименьшим элементом в $\boldsymbol{K}$, то оно принадлежит $\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$. Это верно, например, если алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной или слабо $\mathfrak{m}$-дистрибутивной и удовлетворяет $\mathfrak{m}$-цепному условию.

В случае $\mathfrak{m}=\aleph_0$ имеет место равенство $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$, поскольку каждая булева алгебра является σ-представимой.

Заметим, что в случае $\mathfrak{m}$-расширений идеал Δ^* состоит из всех множеств $A\in\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ $\mathfrak{m}$-категории.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй $\mathfrak{B}$, то гомоморфизм i тождествен, а $\{i, \mathfrak{B}\}$ является $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением ($\mathfrak{m}$-расширением) алгебры $\mathfrak{A}$, то сама алгебра $\mathfrak{B}$ называется $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-*расширением* ($\mathfrak{m}$-расширением) своей подалгебры $\mathfrak{A}$.

Примеры. А) Если множества $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ пусты, то пара $\{h_0, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}\}$ является максимальным представимым $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением алгебры $\mathfrak{A}$ (при условии, конечно, что алгебра $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-представимой)[1]).

Б) Если $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ — пустые множества, то алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ является свободным (т. е. максимальным) $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением подалгебры $\mathfrak{A}_{0,\mathfrak{n}}$. (Обозначения см. на стр. 219.) Если $\mathfrak{n}\geqslant\aleph_0$, $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$, то алгебра $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$ будет непредставимой по теореме 31.3. Таким образом, вообще говоря, для несчетных $\mathfrak{m}$ равенство $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{r}}$ не выполняется.

В) Существует такая алгебра (булева, атомная) $\mathfrak{A}$, что минимальное σ-расширение алгебры $\mathfrak{A}$ не изоморфно максимальному σ-расширению.

Пусть D — канторово множество действительных чисел (см. пример Б § 9), B — такое борелевское подмножество множества D, что $C=D-B$ плотно в D и для каждого

---

[1]) Недавно Якуб в [1] доказал, что (для пустых $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$) если $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$ и $\{h_0, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}\}$ является максимальным $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением, то алгебра $\mathfrak{A}$ является сверхатомной. Дэй [1] доказал обратное утверждение. Таким образом, $\{h_0, \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}\}$ является максимальным $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширением алгебры $\mathfrak{A}$ для пустых $\mathbf{J}$ и $\mathbf{M}$ и $\mathfrak{m}\geqslant 2^{\aleph_0}$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является сверхатомной. См. Дэй и Якуб [1].

счетного множества $E \subset D$ объединение $B \cup E$ не является F_σ-множеством. Пусть ψ — некоторое взаимно однозначное соответствие между множествами C и C', где C' не пересекается с D, и пусть $X = D \cup C'$. Множество X становится вполне несвязным компактным пространством, если ввести следующую топологию: каждая точка из C' объявляется изолированной; если $x \in D$, то множества вида $G \cup \psi(G \cap C) - K$, где G открыто в D $(x \in G)$, а K — конечное подмножество множества C', принимаются за базу окрестностей точки x.

Булева алгебра $\mathfrak{A}$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X является атомной (так как множество C' изолированных точек пространства X плотно в пространстве Стоуна X алгебры $\mathfrak{A}$). Однако алгебра $\mathfrak{F}_\sigma/\Delta^*$ (см. обозначение на стр. 274), где $\mathfrak{m} = \sigma$, а Δ^* является теперь σ-идеалом множеств σ-категории, не является атомной, а потому максимальное σ-расширение $\{i^{\Delta^*}, \mathfrak{F}_\sigma/\Delta^*\}$ алгебры $\mathfrak{A}$ не изоморфно никакому σ-пополнению алгебры $\mathfrak{A}$ (см. пример И § 35).

Действительно, легко проверить, что множество $A \subset X$ является нигде не плотным и σ-замкнутым в X тогда и только тогда, когда оно является замкнутым подмножеством в пространстве D, а $A - B$ не более чем счетно. Следовательно, идеал Δ^* всех множеств σ-категории $A \in \mathfrak{F}_\sigma$ состоит из всех таких борелевских подмножеств F_σ-множеств $A \subset D$, что $A - B$ не более чем счетно. Значит, $B \notin \Delta^*$, т. е. $[B]_{\Delta^*} \neq \wedge$. Тем самым элемент $[B]_{\Delta^*}$ не содержит ни одного атома[1]).

§ 37. $\mathfrak{m}$-независимые подалгебры. $\mathfrak{m}$-F-произведение

Говорят, что индексированное множество подалгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является $\mathfrak{m}$-независимым, если

$$\bigcap_{t \in T'}^{\mathfrak{A}} A_t \neq \wedge \tag{1}$$

для каждого $\mathfrak{m}$-индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T'}$, такого, что $T' \subset T$, $A_t \neq \wedge$, $A_t \in \mathfrak{A}_t$ для каждого $t \in T'$

[1]) Пример В предложен Катетовым (не опубликовано).

(из последнего условия вытекает, что элементы A_t с различными индексами принадлежат подалгебрам $\mathfrak{A}_t$ с различными индексами). Неравенство (1) следует понимать так: пересечение, написанное слева, существует и не равно нулевому элементу [в приложениях мы будем рассматривать только $\mathfrak{m}$-полные алгебры $\mathfrak{A}$ и поэтому левая часть (1) всегда будет существовать]. Каждое $\mathfrak{m}$-независимое множество подалгебр является также независимым в смысле определения § 13, поэтому оно обладает всеми свойствами независимых подалгебр, описанных в § 13.

Всякое $\mathfrak{m}$-независимое индексированное множество подалгебр булевой $\mathfrak{m}$-алгебры обладает следующим важным свойством продолжаемости гомоморфизмов (см. также аналогичную теорему 13.1).

37.1. *Если $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ есть $\mathfrak{m}$-независимое множество $\mathfrak{m}$-подалгебр булевой алгебры $\mathfrak{A}$, h_t есть $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ в $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ для каждого $t\in T$, причем алгебра $\mathfrak{A}'$ обладает свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости (в частности, $\mathfrak{A}'$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй или $\mathfrak{m}$-полем множеств), то все гомоморфизмы h_t можно (единственным образом) продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма $\mathfrak{m}$-подалгебры $\mathfrak{A}_0\subset\mathfrak{A}$, $\mathfrak{m}$-порожденной теоретико-множественным объединением всех алгебр $\mathfrak{A}_t$, в алгебру $\mathfrak{A}'$* [1])

Доказательство теоремы 37.1 подобно доказательству теоремы 13.1, за исключением того, что вместо теоремы 12.4 нужно ссылаться на теорему 34.3.

Подобно теореме 13.2 мы можем вывести из теоремы 37.1 следующее утверждение:

37.2. *Пусть $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ и $\{\mathfrak{A}'_t\}_{t\in T}$ — два $\mathfrak{m}$-независимых множества $\mathfrak{m}$-подалгебр $\mathfrak{m}$-алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ соответственно, причем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ обладают свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости (в частности, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ могут быть $\mathfrak{m}$-дистрибутивными $\mathfrak{m}$-алгебрами или $\mathfrak{m}$-полями множеств), а объединение всех $\mathfrak{A}_t$ (всех $\mathfrak{A}'_t$) $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}'$). Пусть далее h_t — изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ на алгебру $\mathfrak{A}'_t$ для всех $t\in T$. Тогда все h_t можно продолжить до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}'$* [2]).

---

[1]) Сикорский [11, 14].

[2]) Сикорский [11].

Важный пример $\mathfrak{m}$-независимых подалгебр дает следующая операция взятия $\mathfrak{m}$-F-произведения.

Напомним некоторые обозначения из § 13. Для каждого $t \in T$ через $\mathfrak{F}_t$ обозначим (невырожденное) поле подмножеств непустого пространства X_t. Через X обозначим декартово произведение всех пространств X_t, т. е. множество всех $x = \{x_t\}_{t \in T}$, $x_t \in X_t$ для $t \in T$. Если $A \subset X_t$, то через A^* обозначается множество всех точек $x \in X$, у которых t-я координата x_t принадлежит A. Через $\mathfrak{F}_t^*$ обозначим поле (подмножеств пространства X), образованное всеми подмножествами вида A^* для $A \in \mathfrak{F}_t$.

Наименьшее $\mathfrak{m}$-поле $\mathfrak{F}$ (подмножеств пространства X), содержащее все поля $\mathfrak{F}_t^*$ $(t \in T)$, называется $\mathfrak{m}$-F-*произведением индексированного множества* $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$. Другими словами, $\mathfrak{m}$-F-произведение семейства $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ есть $\mathfrak{m}$-поле, $\mathfrak{m}$-порожденное F-произведением семейства полей $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ (см. § 13).

Семейство $\{\mathfrak{F}_t^*\}_{t \in T}$ является $\mathfrak{m}$-независимым индексированным множеством подполей поля $\mathfrak{F}$. Доказательство подобно доказательству аналогичного утверждения в § 13 (стр. 66). Поле $\mathfrak{F}_t^*$ изоморфно полю $\mathfrak{F}_t$ для каждого $t \in T$.

В случае $\mathfrak{m} = \sigma$ операция взятия σ-произведения очень часто используется в теории меры. Одной из фундаментальных теорем теории меры является следующая[1]): если для каждого $t \in T$ дана σ-мера m_t на поле $\mathfrak{F}_t$, причем $m_t(X_t) = 1$, то существует точно одна такая σ-мера m на σ-F-произведении $\mathfrak{F}$ множества полей $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$, что

$$m(A_1^* \cap \ldots \cap A_n^*) = m_{t_1}(A_1) \cdot \ldots \cdot m_{t_n}(A_n) \tag{2}$$

для произвольных множеств $A_j \in \mathfrak{F}_{t_j}$, $t_l \neq t_j$ при $l \neq j$ $(l, j = 1, \ldots, n)$. Говорят, что мера m является σ-*произведением* мер m_t.

37.3. *Пусть* $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$ — *индексированное множество невырожденных* $\mathfrak{m}$-*полей множеств и* $\mathfrak{A}$ — *некоторое* $\mathfrak{m}$-*поле множеств. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathfrak{A}$ *изоморфно* $\mathfrak{m}$-F-*произведению семейства полей* $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in T}$;

---

[1]) См., например, Халмош [1], стр. 152—158.

(ii) $\mathfrak{A}$ *содержит* $\mathfrak{m}$-*независимое индексированное множество* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ $\mathfrak{m}$-*подполей, изоморфных полям* $\mathfrak{F}_t$ *соответственно, причем теоретико-множественное объединение всех* $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-*порождает поле* $\mathfrak{A}$;

(iii) $\mathfrak{A}$ *содержит индексированное множество* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ $\mathfrak{m}$-*подполей, изоморфных полям* $\mathfrak{F}_t$ *соответственно, причем теоретико-множественное объединение всех* $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-*порождает поле* $\mathfrak{A}$, *и для произвольных* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмов* h_t *полей* $\mathfrak{A}_t$ *в любое* $\mathfrak{m}$-*поле множеств* $\mathfrak{A}'$ *существует* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *поля* $\mathfrak{A}$ *в поле* $\mathfrak{A}'$, *являющийся общим продолжением всех гомоморфизмов* h_t [1]).

(i) влечет за собой (ii). Это очевидно, так как $\mathfrak{m}$-F-произведение $\mathfrak{F}$ полей $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in T}$ и $\mathfrak{m}$-подполей $\mathfrak{F}_t^*$ обладает свойствами условия (ii):

(ii) влечет за собой (iii). Это вытекает из теоремы 37.1.

(iii) влечет за собой (i). Доказательство этой импликации точно такое же, как и в теореме 37.2 (и в аналогичном утверждении 13.2). Действительно, в доказательстве теоремы 37.2 используется только свойство продолжения $\mathfrak{m}$-гомоморфизмов.

Пример. А) Из теоремы 37.1 следует, в частности, что если $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-F-произведение семейства полей $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\in T}$, а $\mathfrak{F}_t^*$ имеет тот же смысл, что и выше, то произвольные $\mathfrak{m}$-гомоморфизмы h_t полей $\mathfrak{F}_t^*$ в $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{A}'$, обладающую свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, можно продолжить до $\mathfrak{m}$-гомоморфизма h поля $\mathfrak{F}$ в алгебру $\mathfrak{A}'$. Требование, чтобы алгебра $\mathfrak{A}'$ обладала свойством сильной $\mathfrak{m}$-продолжаемости, существенно и не может быть заменено, например, более слабым требованием, чтобы алгебра $\mathfrak{A}'$ являлась $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгеброй даже в случае, когда T состоит только из двух элементов, а h_t являются изоморфизмами. Значит, и требования на алгебру $\mathfrak{A}'$, наложенные в теоремах 37.1 и 37.3 (iii), нельзя заменить на более слабое условие, чтобы алгебра $\mathfrak{A}'$ была $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгеброй.

---

[1]) Сикорский [11]. Эквивалентность условий (i) и (ii) была одновременно и независимо доказана Шерманом [1].

Например, пусть R — множество всех действительных чисел, C — некоторое аналитическое[1]) неборелевское подмножество множества R и $X_1 = R - C$, $X_2 = R$. Пусть далее $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ суть σ-поля всех борелевских подмножеств пространств X_1 и X_2 соответственно. Наконец, через X' обозначим декартово произведение $X' = R \times R$ (иначе говоря, X' есть плоскость), через $\mathfrak{F}'$ — σ-поле всех борелевских подмножеств пространства X' и через Δ' — σ-идеал (поля $\mathfrak{F}'$), σ-порожденный всеми множествами вида $B \times R$, где B — такое борелевское подмножество из R, что $B \cap X_1$ непусто (т. е. $B \subset C$). Формулы

$$h_1((B \cap X_1) \times X_2) = [B \times R]_{\Delta'}, \quad h_2(X_1 \times B) = [R \times B]_{\Delta'}$$

(где B — борелевское подмножество из R) определяют σ-изоморфизмы h_1 и h_2 полей $\mathfrak{F}_1^*$ и $\mathfrak{F}_2^*$ соответственно в алгебру $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}'/\Delta'$. Эти σ-изоморфизмы нельзя продолжить до σ-гомоморфизма h наименьшего σ-поля $\mathfrak{F}$, содержащего $\mathfrak{F}_1^*$ и $\mathfrak{F}_2^*$ (т. е. σ-F-произведения $\mathfrak{F}$ полей $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$) в алгебру $\mathfrak{A}' = \mathfrak{F}'/\Delta'$. В самом деле, предположим, что такое продолжение h существует. Тогда для каждого борелевского подмножества A из $X' = R \times R$ имеет место равенство

$$h(A \cap (X_1 \times X_2)) = [A]_{\Delta'}$$

(это следует из того факта, что класс всех множеств $A \subset X'$, удовлетворяющих этому равенству, является σ-полем, содержащим все множества вида $B \times R$ и $R \times B$, где B — борелевское множество пространства R). Аналитическое множество C является проекцией некоторого плоского G_δ-множества $D \subset X'$, т. е. $x \in C$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in D$ для некоторого $y \in R$. Так как множество D не пересекается с множеством $X_1 \times X_2$, то $h(D \cap (X_1 \times X_2)) = \wedge$. С другой стороны, множество D не принадлежит идеалу Δ' (поскольку в противном случае оно имело бы вид $D = C \times R$ и C было бы борелевским множеством). Значит, $[D]_{\Delta'} \neq \wedge$. Противоречие[2]).

В силу же теоремы 37.1 (σ-представимая) σ-алгебра $\mathfrak{F}'/\Delta'$ не обладает свойством сильной σ-продолжаемости.

[1]) По поводу определения и основных свойств см., например, Куратовский [3], § 34 и 35.

[2]) Пример А дан Сикорским [14].

§ 38. Булевы ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведения

В этом параграфе $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ будет обозначать некоторое фиксированное индексированное множество невырожденных булевых алгебр, а $\mathfrak{m}$—фиксированное бесконечное кардинальное число.

Пара $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ называется *булевым* ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведением*[1]) (или просто ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведением*) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, если выполнены условия:

а) $\mathfrak{B}$ — булева $\mathfrak{m}$-алгебра;

б) i_t является $\mathfrak{m}$-изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{B}$ для каждого индекса $t\in T$;

в) индексированное множество $\{i_t(\mathfrak{A}_t)\}_{t\in T}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{B}$ есть независимое множество;

г) объединение всех подалгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$ $(t\in T)$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$.

Класс всех ($\mathfrak{m}$, 0)-произведений алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ будем обозначать через $\boldsymbol{P}$.

Пусть

(1) $$\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$$

и

(2) $$\{\{i'_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}'\}$$

— два элемента из класса $\boldsymbol{P}$. Говорят, что пара (2) является $\mathfrak{m}$-*гомоморфным образом* пары (1), если существует такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм f алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{B}'$, что

(3) $$i'_t = hi_t \text{ для каждого } t\in T.$$

Мы пишем в этом случае, что

(4) $$\{\{i'_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}'\} \leqslant \{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}.$$

Заметим, что условие (3) эквивалентно следующему условию:

(5) гомоморфизм h является общим продолжением всех изоморфизмов $i'_t i_t^{-1}$ [алгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$ в алгебры $i'_t(\mathfrak{A}_t)$], $t\in T$.

---

[1]) Такое ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение было рассмотрено в работах Сикорского [13] (для $\mathfrak{m}=\aleph_0$) и [32] (для $\mathfrak{m}\geqslant\aleph_0$).

Значит, если требуемый $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h существует, то он единствен. Более того, гомоморфизм h отображает алгебру $\mathfrak{B}$ на всю алгебру $\mathfrak{B}'$. Эти два последних утверждения вытекают из условия (г).

Если $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h является изоморфизмом, то мы говорим, что пара (2) *изоморфна* паре (1). В этом случае имеет место также неравенство

$$\{\{i_t\}_{t\in T},\ \mathfrak{B}\} \leqslant \{\{i'_t\}_{t\in T},\ \mathfrak{B}'\} \tag{6}$$

и пара (1) изоморфна паре (2), поскольку h^{-1} является изоморфизмом (и $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом) алгебры $\mathfrak{B}'$ на алгебру $\mathfrak{B}$, причем $i_t = h^{-1} i'_t$ для каждого $t \in T$. Таким образом, мы можем просто говорить, что пары (1) и (2) изоморфны.

Легко проверить, что отношение (4) является отношением квазипорядка в классе $\boldsymbol{P}$, т. е. это отношение рефлексивно и транзитивно. Более того, два элемента (1) и (2) из класса $\boldsymbol{P}$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеют место одновременно неравенства (4) и (6) [см. теорему 23.3 и условие (г)]. Иногда удобно отождествлять изоморфные элементы из класса $\boldsymbol{P}$. После такого отождествления множество $\boldsymbol{P}$ становится частично упорядоченным с помощью отношения $\leqslant$.

Пусть пара

$$\{\{i_{0t}\}_{t\in T},\ \mathfrak{A}_0\} \tag{7}$$

— некоторое фиксированное булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ (см. § 13). Напомним, что булево произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ определяется этими алгебрами однозначно с точностью до изоморфизма. Более того, гомоморфизмы i_{0t} являются полными изоморфизмами алгебр $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{A}_0$ (см. пример К § 22), т. е. алгебры $i_{0t}(\mathfrak{A}_t)$ являются регулярными подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}_0$.

Пусть $\mathbf{J}$ является классом всех таких множеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}_0$, что выполнены следующие условия:

$$\overline{\overline{\mathfrak{S}}} \leqslant \mathfrak{m}, \tag{8}$$

(9) существует такой индекс $t \in T$, что $\mathfrak{S} \subset i_{0t}(\mathfrak{A}_t)$,

(10) существует объединение $\bigcup\limits_{A\in\mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}_0} A$.

Пусть далее **M** является классом всех таких множеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{A}_0$, что имеют место условия (8) и (9) и условие

(10′) существует пересечение $\bigcap_{A \in \mathfrak{S}}^{\mathfrak{A}_0} A$.

Следующая теорема гарантирует существование ($\mathfrak{m}$, 0)-произведения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

38.1. *Если пара* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *является* (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-*расширением произведения* (7) *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, *то пара*

(11) $$\{\{ii_{0t}\}_{t \in T}, \mathfrak{B}\}$$

является ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведением алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. *При этом, если* $\{i', \mathfrak{B}'\}$ — *другое* (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-*расширение алгебры* (7), *то*

(12) $\{\{i'i_{0t}\}_{t \in T}, \mathfrak{B}'\} \leqslant \{\{ii_{0t}\}_{t \in T}, \mathfrak{B}\}$ *тогда и только тогда, когда* $\{i', \mathfrak{B}'\} \leqslant \{i, \mathfrak{B}\}$.

Действительно, условие (а) вытекает из условия (а) § 36. Условие (б) следует из условия (б) § 36, поскольку гомоморфизм i_{0t} является полным изоморфизмом. Условие (в) получается из условия (в) § 13. Условие же (г) вытекает из условий (г) § 13 и (в) § 36.

Если h — такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{B}'$, что $i' = hi$, то $i'i_{0t} = hii_{0t}$ для каждого индекса $t \in T$.

Обратно, если h является таким $\mathfrak{m}$-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{B}'$, что $i'i_{0t} = hii_{0t}$ для каждого индекса $t \in T$, то

$$i'(A) = hi(A)$$

для каждого элемента A, принадлежащего объединению всех подалгебр $i_{0t}(\mathfrak{A}_t)$. Поскольку это объединение порождает алгебру $\mathfrak{A}_0$ в силу условия (г) § 13, указанное выше равенство имеет место для всех элементов $A \in \mathfrak{A}_0$, т. е. $i' = hi$.

Таким образом, доказана эквивалентность (12).

38.2. *Для каждого* ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведения* (1) *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ *существует такое* (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-*расширение* $\{i, \mathfrak{B}\}$ *алгебры* (7), *что пара* (11) *идентична с парой* (1).

Пусть $\mathfrak{B}_0$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, которая содержит подалгебры $i_t(\mathfrak{A}_t)$. Из условий (а) — (г) следует, что пара

$$\{\{i_t\}_{t\in T},\ \mathfrak{B}_0\} \tag{13}$$

является булевым произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Поскольку все булевы произведения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ изоморфны (см. § 13, стр. 67), существует такой изоморфизм i алгебры $\mathfrak{A}_0$ на алгебру $\mathfrak{B}_0$, что $i_t = ii_{0t}$ для каждого индекса $t\in T$. Тогда $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширение $(i, \mathfrak{B})$ алгебры $\mathfrak{A}_0$ обладает всеми нужными свойствами.

В силу теорем 38.1 и 38.2 исследование $(\mathfrak{m}, 0)$-произведения алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ можно свести к исследованию $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширений алгебры (7).

Из условия (12) следует, что если $(i, \mathfrak{B})$ — максимальное (т. е. свободное) $(\mathbf{J}, \mathbf{M}, \mathfrak{m})$-расширение алгебры (7), то пара (11) является максимальным элементом в классе $\boldsymbol{P}$, т. е. $(1)\leqslant(11)$ для каждого $(\mathfrak{m}, 0)$-произведения (1) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Поэтому $(\mathfrak{m}, 0)$-произведение (11) и все ему изоморфные будут называться *максимальными* $\mathfrak{m}$-*произведениями* или *свободными* $\mathfrak{m}$-*произведениями алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$.

38.3. *Для того чтобы* $(\mathfrak{m}, 0)$-*произведение* (1) *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ *было максимальным* $\mathfrak{m}$-*произведением этих алгебр, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством:*

(д) *для любого семейства* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмов* h_t *алгебр* $\mathfrak{A}_t$ *в любую булеву* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{C}$ *существует такой* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, *что*

$$h_t = hi_t \text{ для каждого } t\in T. \tag{14}$$

Ясно, что свойство (д) эквивалентно свойству

(д′) *для любого семейства* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмов* h'_t *алгебр* $i_t(\mathfrak{A}_t)$ *в булеву* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{C}$ *существует* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, *являющийся общим продолжением всех гомоморфизмов* h_t, $t\in T$.

Чтобы установить эквивалентность свойств (д) и (д′), достаточно положить $h'_t = h_t i_t^{-1}$ или $h_t = h'_t i_t$.

Для доказательства необходимости свойства (д) достаточно показать, что если пара $\{i, \mathfrak{B}\}$ является максимальным расширением пары (7), то пара (11) удовлетворяет свойству (д). Действительно, в силу теоремы 13.3 существует такой гомоморфизм h_0 алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{C}$, что $h_t = h_0 i_t$ для всех индексов $t \in T$. Следовательно, h_0 является (**J**, **M**)-гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_0$ в алгебру $\mathfrak{C}$. По теореме 36.4 существует такой $\mathfrak{m}$-гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{B}$ в алгебру $\mathfrak{C}$, что $h_0 = hi$. Значит, $h_t = hii_t$ для каждого $t \in T$.

С другой стороны, из теоремы 23.3 следует, что все ($\mathfrak{m}$, 0)-произведения (алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$), обладающие свойством (д), изоморфны друг другу. Поскольку максимальное $\mathfrak{m}$-произведение (11), где пара $(i, \mathfrak{B})$ является максимальным (**J**, **M**, $\mathfrak{m}$)-расширением пары (7), обладает свойством (д), то каждое ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение со свойством (д) изоморфно паре (11), т. е. тоже является максимальным $\mathfrak{m}$-произведением.

Пример. А) Если каждая из алгебр $\mathfrak{A}_t$ состоит из четырех элементов, а пара (1) является максимальным $\mathfrak{m}$-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, то $\mathfrak{B}$ является свободной булевой $\mathfrak{m}$-алгеброй с $\overline{\overline{T}}$ свободными $\mathfrak{m}$-образующими. Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.1.

Из условия (12) вытекает, что если пара $(i, \mathfrak{B})$ является минимальным $\mathfrak{m}$-расширением пары (7), т. е. ее $\mathfrak{m}$-пополнением, то пара (11) является минимальным элементом в $\boldsymbol{P}$, т. е. если ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение (1) удовлетворяет неравенству (1) $\leqslant$ (11), то имеет место и обратное неравенство (11) $\leqslant$ (1). Другими словами, пара (1) становится равной (11) после отождествления в $\boldsymbol{P}$ изоморфных элементов. Это ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение и все ему изоморфные будут называться *минимальными* ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведениями* алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Не известно, является ли минимальное ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение (11) наименьшим элементом в $\boldsymbol{P}$, т. е. выполнено ли неравенство (11) $\leqslant$ (1) для каждого ($\mathfrak{m}$, 0)-произведения (1).

38.4. *Некоторое* ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведение* (1) *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ *минимально тогда и только тогда, когда множество всех*

элементов вида

(15) $$\bigcap_{t \in T'} A_t,$$

где $A_t \in i(\mathfrak{A}_t)$ *для любого* $t \in T'$, *а* T' — *любое конечное подмножество множества* T, *является плотным множеством в алгебре* $\mathfrak{B}$.

Достаточно доказать теорему 38.4 в случае, когда пара (1) имеет вид (11). Поскольку множество всех элементов вида

$$\bigcap_{t \in T'} A_t,$$

где $A_t \in i_t(\mathfrak{A}_t)$, $t \in T'$, а T' конечно, плотно в $\mathfrak{A}_0$ [см. § 13 (9), стр. 68], то их изоморфные образы (15) образуют плотное множество в $i(\mathfrak{A}_0)$. Таким образом, множество всех элементов вида (15) плотно в алгебре $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда алгебра $i(\mathfrak{A}_0)$ плотна в алгебре $\mathfrak{B}$, т. е. когда пара $(i, \mathfrak{B})$ является $\mathfrak{m}$-пополнением алгебры $\mathfrak{A}_0$ (см. теоремы 35.3).

Пусть $\mathfrak{n}$ — бесконечное кардинальное число, не превосходящее $\mathfrak{m}$.

Говорят, что булево $(\mathfrak{m}, 0)$-произведение (1) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*произведением* алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, если ($\mathrm{B}_\mathfrak{n}$) индексированное множество $\{i_t(\mathfrak{A}_t)\}_{t \in T}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{n}$-независимым.

Когда $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, то $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$-произведения называются $\mathfrak{m}$-произведениями[1]).

Класс всех $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведений алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ будем обозначать через $\boldsymbol{P}_\mathfrak{n}$. Заметим, что любая пара, изоморфная $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведению, также является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведением.

По определению

$$\boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}'} \subset \boldsymbol{P}_\mathfrak{n} \quad \text{при } \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}' \leqslant \mathfrak{m}$$

и

$$\boldsymbol{P}_\mathfrak{m} \subset \boldsymbol{P}_\mathfrak{n} \subset \boldsymbol{P} \text{ при } \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}.$$

---

[1]) $\mathfrak{m}$-произведения исследовались в работах Сикорского [13] (случай $\mathfrak{m} = \aleph_0$) и [32] (случай $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$).

38.5. *Если* (1) *является* (m, 0)-*произведением алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, (2) *является* (m, n)-*произведением алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ *и* $(2)\leqslant(1)$, *то пара* (1) *является* (m, n)-*произведением алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$.

Действительно, пусть h — такой m-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}'$, что $i'_t = hi_t$, т. е. h является общим продолжением всех изоморфизмов $i'_t i_t^{-1}$. Если $T'\subset T$, $\overline{\overline{T'}}\leqslant \mathfrak{n}$ и $A_t\in\mathfrak{A}_t$ для $t\in T'$, то

$$h\left(\bigcap_{t\in T'} i_t(A_t)\right)=\bigcap_{t\in T'} i'_t(A_t)\neq\wedge_{\mathfrak{B}'}$$

в силу условия ($\text{в}_{\mathfrak{n}}$). Значит, $\bigcap\limits_{t\in T'} i(A_t)\neq\wedge_{\mathfrak{B}}$.

Для любого $\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}$ класс $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}}$ непуст. Построению примера (m, n)-произведения предпошлем замечание.

Пусть g_t — некоторый изоморфизм алгебры $\mathfrak{A}_t$ на поле $\mathfrak{F}_t$ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X_t алгебры $\mathfrak{A}_t$, X — декартово произведение всех пространств X_t и (согласно обозначениям § 13 и 37) положим

(16) $$g_t^*(A)=g_t(A)^*=\{x\in X;\ t\text{-я координата } x \text{ лежит в } g_t(A)\},$$

для каждого элемента $A\in\mathfrak{A}_t$. Пусть $\mathfrak{F}$ — поле (подмножеств пространства X), порожденное всеми множествами вида

(17) $$\bigcap_{t\in T'} g_t^*(B_t),\ \text{где } B_t\in\mathfrak{A}_t,\ t\in T',\ T'\subset T,\ \overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{n},$$

где $\bigcap$ обозначает теоретико-множественное пересечение. Заметим, что для каждого $t\in T$ отображение g_t^* является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в $\mathfrak{F}$.

Удобно ввести в пространстве X специальную топологию, называемую n-*топологией*, в которой семейство $\mathfrak{F}$ образует базис открытых множеств. Таким образом, в n-топологии открытые множества суть произвольные объединения множеств вида (17). Пространство X с n-топологией не является компактным и не является пространством Стоуна для поля $\mathfrak{F}$ (кроме случая, когда T конечно). Однако оно обладает следующим важным свой-

ством: ни одно непустое открытое множество не является множеством первой категории в пространстве X.

Чтобы доказать последнее утверждение, удобно переписать множества вида (17) в форме произведения

$$(17') \quad \mathop{\mathsf{P}}_{t\in T} G_t, \text{ где } G_t \in \mathfrak{F}_t \text{ для } t \in T \text{ и}$$

$$G_t = X_t \text{ для } t \in T - T', \ \overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{n}.$$

Пусть G — непустое открытое в пространстве X (с $\mathfrak{n}$-топологией) множество, $\{N_n\}$ — последовательность замкнутых нигде не плотных подмножеств в X. Поскольку множество $G - N_1$ непусто, то существует такое непустое открытое множество

$$G_1 = \mathop{\mathsf{P}}_{t\in T} G_{1,t} \subset G - N_1,$$

что $G_{1,t}$ являются открыто-замкнутыми подмножествами пространств X_t. По индукции мы определяем последовательность множеств

$$G_n = \mathop{\mathsf{P}}_{t\in T} G_{n,t} \subset G_{n-1} - N_n,$$

открытых в X, где $G_{n,t}$ являются непустыми открыто-замкнутыми подмножествами пространства X_t. Так как последовательность $G_{1,t}$, $G_{2,t}$ ... является убывающей последовательностью непустых замкнутых подмножеств компактного пространства X_t, то пересечение $\bigcap\limits_{1\leqslant n<\infty} G_{n,t}$ непусто и, следовательно, пересечение

$$\bigcap_{1\leqslant n<\infty} G_n = \mathop{\mathsf{P}}_{t\in T} \bigcap_{1\leqslant n<\infty} G_{n,t}$$

является непустым подмножеством, лежащим в

$$G - \bigcup_{1\leqslant n<\infty} N_n.$$

Это доказывает, что G не является подмножеством никакого объединения нигде не плотных подмножеств N_n, т. е. G не является множеством первой категории в пространстве X.

Пусть теперь $\{i, \mathfrak{B}\}$ — любое $\mathfrak{m}$-пополнение поля $\mathfrak{F}$. Легко проверить, что пара

$$\{\{ig_t^*\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\} \tag{18}$$

является ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Тогда ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведение (18) и все ему изоморфные называются *минимальными* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*произведениями* алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$.

38.6. *Для того чтобы* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*произведение* (1) *было минимальным* ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-*произведением, необходимо и достаточно, чтобы множество всех элементов вида*

$$\bigcap_{t\in T'}^{\mathfrak{B}} A_t, \quad \text{где } A_t \in i(\mathfrak{A}_t) \text{ для } t\in T', \quad T'\subset T, \quad \overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{n}, \tag{19}$$

было плотным в алгебре $\mathfrak{B}$.

Чтобы доказать необходимость этого условия, достаточно показать, что пара (18) обладает свойством, описанным в теореме 38.6. Заметим сначала, что семейство всех множеств вида (17) плотно в $\mathfrak{F}$. Следовательно, множество их изоморфных образов $\bigcap_{t\in T'} ig_t^*(B_t)$ плотно в алгебре $i(\mathfrak{F})$, которая в свою очередь плотна в алгебре $\mathfrak{B}$ по теореме 35.3. Таким образом, это множество плотно в алгебре $\mathfrak{B}$.

Чтобы доказать достаточность условий теоремы 38.6, достаточно показать, что если два ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведения (1) и (2) обладают свойством, описанным в теореме 38.6, то они изоморфны.

Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех ненулевых элементов вида (19) алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}'$ — аналогичное множество в алгебре $\mathfrak{B}'$.

Всякие два элемента $A, B\in\mathfrak{S}$ можно представить в виде

$$A=\bigcap_{t\in T'} A_t, \quad B=\bigcap_{t\in T'} B_t, \quad (A_t, B_t\in i(\mathfrak{A}_t), \quad A_t\neq\wedge\neq B_t)$$

с одинаковым множеством индексов $T'\subset T$, мощность которого не превосходит $\mathfrak{n}$. Заметим, что

$$A\subset B \text{ тогда и только тогда, когда } A_t\subset B_t \text{ для всех } t\in T'. \tag{20}$$

Достаточно только доказать, что если $A_{t_0} \not\subset B_{t_0}$ для некоторого индекса $t_0 \in T'$, то $A \not\subset B$. Действительно, ненулевой элемент

$$C = \bigcap_{t \in T'} C_t, \quad \text{где} \quad C_{t_0} = A_{t_0} - B_{t_0} \quad \text{и} \quad C_t = A_t \quad \text{для} \quad t \neq t_0,$$

является подэлементом элемента A и не пересекается с элементом B.

Поскольку элементы в соответствующем подмножестве $\mathfrak{S}'$ алгебры $\mathfrak{B}'$ обладают тем же свойством (20), то формула

$$f\left(\bigcap_{t \in T'} A_t\right) = \bigcap_{t \in T'} i'_t i_t^{-1}(A_t), \tag{21}$$

где $\wedge \neq A_t \in i(\mathfrak{A}_t)$, $T' \subset T$, $\overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{n}$, определяет отображение множества $\mathfrak{S}$ на множество $\mathfrak{S}'$, причем для любых $A, B \in \mathfrak{S}$

$$A \subset B \text{ тогда и только тогда, когда } f(A) \subset f(B).$$

Так как множества $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ плотны в алгебрах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно, то в силу теоремы 12.5 отображение f можно продолжить до изоморфизма h_0 подалгебры $\mathfrak{B}_0$, порожденной множеством $\mathfrak{S}$, на подалгебру $\mathfrak{B}'_0$, порожденную множеством $\mathfrak{S}'$. Поскольку множества $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ плотны в алгебрах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно, подалгебры $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}'_0$ тоже плотны в алгебрах $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Более того, подалгебры $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}'_0$ $\mathfrak{m}$-порождают алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ соответственно. Таким образом, алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ являются $\mathfrak{m}$-пополнениями алгебр $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}'_0$ соответственно. Так как $\mathfrak{m}$-пополнения алгебр определяются этими алгебрами однозначно с точностью до изоморфизма, то изоморфизм h_0 можно продолжить до изоморфизма h алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$. Поскольку изоморфизм h является продолжением отображения f, то из формулы (21) следует [в случае $T' = (t)$], что $h(A) = i'_t i_t^{-1}(A)$ для $A \in i(\mathfrak{A}_t)$, т. е. изоморфизм h является общим продолжением всех изоморфизмов $i'_t i_t^{-1}$. Это доказывает, что пары (1) и (2) изоморфны.

Следующая теорема дает объяснение термину „минимальное ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведение“.

38.7. *Всякое минимальное* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*произведение* (1) *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ *является минимальным элементом в множестве* $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}}$, *а изоморфизмы* i_t *являются полными изоморфизмами алгебр* $\mathfrak{A}_t$ *в алгебру* $\mathfrak{B}$.

Не известно, являются ли минимальные $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведения наименьшими элементами в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}}$.

Для доказательства первой части теоремы 38.7 предположим, что пара (1) является минимальным $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведением, пара (2) является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведением, а h есть $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на алгебру $\mathfrak{B}'$, причем h является общим продолжением всех изоморфизмов $i'_t i_t^{-1}$, $t \in T$. Так как пара (2) является $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведением, то $h(A) \neq \wedge$ для каждого $A \in \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{S}$ — множество всех ненулевых элементов вида (19) алгебры $\mathfrak{B}$. Поскольку множество $\mathfrak{S}$ плотно в алгебре $\mathfrak{B}$, то $h(A) \neq \wedge$ для каждого ненулевого элемента из $\mathfrak{B}$. Это доказывает, что h является изоморфизмом, т. е. пары (1) и (2) изоморфны.

Вторую часть теоремы 38.7 достаточно доказать в случае, когда пара (1) совпадает с парой (18). Так как g_t^* является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{F}$, а i является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{B}$, то композиция ig_t^* тоже является полным изоморфизмом.

Следующая теорема дает простое топологическое представление для минимальных $(\mathfrak{m}, 0)$-произведений и минимальных $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-произведений. Символы X и g_t^* имеют тот же смысл, что и на стр. 289 [см. (16)].

38.8. *Пусть* $\mathfrak{F}'$ — *поле всех борелевских подмножеств в произведении* X *пространств Стоуна алгебр* $\mathfrak{A}_t$, $t \in T$, *с обычной топологией произведения (с топологией* $\mathfrak{n}$-*произведения)*, а Δ — *идеал всех множеств* $A \in \mathfrak{F}'$ *первой категории в топологическом пространстве* X. *Пусть* $\mathfrak{B}$ — *такая наименьшая* $\mathfrak{m}$-*подалгебра полной булевой алгебры* $\mathfrak{F}'/\Delta$, *что все элементы вида* $[g_t^*(A)]_\Delta$, *где* $t \in T$ *и* $A \in \mathfrak{A}_t$, *принадлежат алгебре* $\mathfrak{F}$, *и, наконец, пусть*

$$i_t(A) = [g_t^*(A)]_\Delta, \quad t \in T, \quad A \in \mathfrak{A}_t.$$

Тогда пара

$$\{\{i_t\}_{t \in T}, \mathfrak{B}\}$$

является минимальным $(\mathfrak{m}, 0)$-*произведением* [*минимальным* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$-*произведением*] *алгебр* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

Гомоморфизм i_t является изоморфизмом, поскольку для любого ненулевого элемента $A \in \mathfrak{A}_t$ множество $g_t^*(A)$ непусто и открыто в пространстве X и, следовательно, не является множеством первой категории в пространстве X, а это означает, что $i_t(A) \neq \wedge$.

Гомоморфизм i_t является полным изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{F}'/\Delta$, ибо если $A = \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{A}_t} A_s$, то $g_t^*(A) \supset \supset g_t^*(A_s)$ для всех $s \in S$ и множество $g_t^*(A) - \bigcup_{s \in S} g_t^*(A_s)$ нигде не плотно в пространстве X, что доказывает равенство $i_t(A) = \bigcup_{s \in S}^{\mathfrak{F}'/\Delta} i_t(A_s)$. Поскольку $i_t(\mathfrak{A}_t)$ содержится в $\mathfrak{m}$-подалгебре $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta$, то i_t является $\mathfrak{m}$-изоморфизмом алгебры $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{B}$.

Пусть A_t — ненулевой элемент из алгебры $\mathfrak{A}_t$, $t \in T'$, где $T' \subset T$ и T' конечно ($\overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{n}$). Так как $g_t^*(A_t)$ являются замкнутыми множествами в пространстве X, то в силу формулы (1″) § 21 имеет место равенство

$$\bigcap_{t \in T'} i_t(A_t) = \bigcap_{t \in T'} [g_t^*(A_t)] = [\bigcap_{t \in T'} g_t^*(A_t)].$$

Поскольку пересечение $\bigcap_{t \in T'} g_t^*(A_t)$ является открытым непустым подмножеством пространства X, то оно не является множеством первой категории в X, а это доказывает, что $\bigcap_{t \in T'} i_t(A_t) \neq \wedge$. Таким образом, подалгебры $i_t(\mathfrak{A}_t)$ независимы ($\mathfrak{n}$-независимы).

По определению алгебры $\mathfrak{B}$ объединение всех подалгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$ $\mathfrak{m}$-порождает алгебру $\mathfrak{B}$. Это доказывает, что пара (1) является ($\mathfrak{m}$, 0)-произведением [($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$-)произведением] алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Чтобы доказать минимальность этого произведения, напомним, что каждый элемент A из алгебры $\mathfrak{F}'/\Delta$, а значит, и каждый элемент из алгебры $\mathfrak{B}$ имеют вид $A = [G]$, где G — открытое множество в пространстве X (см. пример В § 21). Если A — ненулевой элемент, то G непусто, и, значит, по определению топологии в пространстве X множество G содержит подмножество вида $\bigcap_{t \in T'} g_t^*(A_t)$, где A_t — ненулевой элемент

алгебры $\mathfrak{A}_t$, а T' конечно (мощность T' не превосходит $\mathfrak{n}$). Следовательно,

$$\bigcap_{t\in T'} i_t(A_t) = [\bigcap_{t\in T'} g_t^*(A_t)] \subset A.$$

Так как пара (1) удовлетворяет условию теоремы 38.4 (теоремы 38.6), то она является минимальным ($\mathfrak{m}$, 0)-произведением [минимальным ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведением].

Заметим, что если $\{i, \mathfrak{B}\}$ — произвольное $\mathfrak{m}$-расширение поля $\mathfrak{F}$, то пара (18) является ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Не известно, справедливо ли обратное утверждение.

По теореме 38.5 максимальное $\mathfrak{m}$-произведение является максимальным элементом в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}}$ для любого $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ (в частности, оно принадлежит множеству $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$, т. е. является $\mathfrak{m}$-произведением в смысле определения на стр. 288). Мы не знаем никакого топологического представления для максимальных $\mathfrak{m}$-произведений, кроме случая $\mathfrak{m} = \sigma$ (тогда рассматриваемое представление является частным случаем теоремы 38.9).

Если пара (1) есть ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, а алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-представимой, то все алгебры $\mathfrak{A}_t$ являются $\mathfrak{m}$-представимыми в силу свойств (а) и (б). Обратно, если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ являются $\mathfrak{m}$-представимыми, то класс $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$ всех таких ($\mathfrak{m}$, 0)-произведений (1), что алгебра $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{m}$-представима, непуст. Пример элемента из $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$ дается следующей теоремой, где X_t, X, g_t и g_t^* имеют тот же смысл, что и на стр. 289 (топология в декартовом произведении X пространств X_t рассматривается обычная).

38.9. *Пусть* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ *есть* $\mathfrak{m}$-*поле*, $\mathfrak{m}$-*порожденное полем всех открыто-замкнутых подмножеств пространства* X, Δ^* — *наименьший* $\mathfrak{m}$-*идеал в поле* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, *содержащий все множества вида*

$$(22)\quad g^*(A) - \bigcup_{s\in S} g_t^*(A_s), \text{ где } A = \bigcup_{s\in S}^{\mathfrak{A}_t} A_s,\ \overline{\overline{S}} \leqslant \mathfrak{m},\ t\in T,$$

и пусть

$$i_t(A) = [g_t^*(A)]\ \Delta^* \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}_t\ (t\in T).$$

Если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-представимы, то пара

(23) $$\{\{i_t\}_{t\in T},\ \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*\}$$

является $\mathfrak{m}$-произведением в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$.

В теореме 38.9 и в ее доказательстве, следующем ниже, знаки $\bigcup$, $\bigcap$ (без индексов) обозначают теоретико-множественные операции.

Согласно обозначениям, введенным на стр. 66 и стр. 280, если B есть подмножество пространства X_t, то B^* обозначает множество всех точек в декартовом произведении X пространств X_t, у которых координата с номером t лежит в множестве B. Таким образом, идеал Δ^* является идеалом, $\mathfrak{m}$-порожденным всеми множествами вида B^*, где B — произвольное подмножество $\mathfrak{m}$-категории пространства X_t, т. е. всякое множество из идеала Δ^* является подмножеством множества вида $\bigcup\limits_{t\in T'} B_t^*$, где $T'\subset T$, $\overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{m}$, а для каждого $t\in T'$ множество B_t является подмножеством $\mathfrak{m}$-категории в пространстве X_t.

Заметим сначала, что если $\wedge\neq A_t\in\mathfrak{A}_t$ и $B_t\subset X_t$ — множества $\mathfrak{m}$-категории в пространстве X_t при $t\in T'$, $T'\subset T$, $\overline{\overline{T'}}\leqslant\mathfrak{m}$, то включение

(24) $$\bigcap_{t\in T'} g_t^*(A_t)\subset\bigcup_{t\in T'} B_t^*$$

никогда не имеет места. Действительно, множество $g_t(A_t)-B_t$ непусто, поскольку алгебра $\mathfrak{A}_t$ является $\mathfrak{m}$-представимой [см. теорему 29.3 ($\mathfrak{r}_4$)]. Таким образом, множество $\bigcap\limits_{t\in T'}(g_t^*(A_t)-B_t^*)$ является непустым подмножеством множества, стоящего в левой части включения (24), и не пересекается с множеством, стоящим в правой части этого включения.

Поскольку соотношение (24) никогда не выполняется, то отображения i_t являются изоморфизмами, а подалгебры $i_t(\mathfrak{A}_t)$ $\mathfrak{m}$-независимы. Из определения отображений i_t и идеала Δ^* немедленно следует, что отображения i_t являются $\mathfrak{m}$-гомоморфизмами алгебр $\mathfrak{A}_t$ в алгебру $\mathfrak{B}$. Так как поле $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ $\mathfrak{m}$-порождено объединением всех полей $g_t^*(\mathfrak{A}_t)$, то объединение всех алгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$ $\mathfrak{m}$-порождает $\mathfrak{m}$-пред-

ставимую $\mathfrak{m}$-алгебру $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*$. Таким образом, пара (23) является $\mathfrak{m}$-произведением в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$.

Заданное парой (23) $\mathfrak{m}$-произведение, а также все ему изоморфные пары называются *максимальными представимыми $\mathfrak{m}$-произведениями*. Это название оправдывается второй частью следующей ниже теоремы.

38.10. *Для того чтобы* ($\mathfrak{m}$, 0)-*произведение* (1) $\mathfrak{m}$-*представимых алгебр* $\mathfrak{A}_t$ $(t \in T)$ *было максимальным представимым* $\mathfrak{m}$-*произведением этих алгебр, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством:*

($\text{д}_{\mathfrak{r}}$) *для каждого семейства* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмов* h_t *алгебр* $\mathfrak{A}_t$ *в произвольную* $\mathfrak{m}$-*представимую* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{C}$ *существует такой* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, *что*

$$h_t = hi_t \quad \text{для всех} \quad t \in T.$$

Следовательно, любое максимальное представимое произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$ *является наибольшим элементом в классе* $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$.

Ясно, что свойство ($\text{д}_{\mathfrak{r}}$) эквивалентно следующему свойству:

($\text{д}'_{\mathfrak{r}}$) *для каждого семейства* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизмов* h'_t *алгебр* $i(\mathfrak{A}_t)$ *в* $\mathfrak{m}$-*представимую* $\mathfrak{m}$-*алгебру* $\mathfrak{C}$ *существует* $\mathfrak{m}$-*гомоморфизм* h *алгебры* $\mathfrak{B}$ *в алгебру* $\mathfrak{C}$, *являющийся общим продолжением всех гомоморфизмов* h'_t, $t \in T$.

Чтобы доказать необходимость выполнения свойства ($\text{д}_{\mathfrak{r}}$), достаточно доказать существование требуемого гомоморфизма h в случае, когда пара (1) является $\mathfrak{m}$-произведением (23), алгебра $\mathfrak{C} = \mathfrak{F}_0/\Delta_0$ есть каноническое $\mathfrak{m}$-представление $\mathfrak{m}$-представимой $\mathfrak{m}$-алгебры. В этом случае $\mathfrak{m}$-гомоморфизмы h_t индуцированы $\mathfrak{m}$-непрерывными отображениями φ_t (см. теорему 22.5). Поскольку отображения φ_t $\mathfrak{m}$-непрерывны, то отображение

$$\varphi(x) = \{\varphi_t(x)\} \in X$$

удовлетворяет условию

$$\varphi^{-1}(A) \in \Delta_0 \text{ для каждого множества } A \in \Delta^*$$

(проверяем сначала случай, когда $A = B^*$, а B есть множество $\mathfrak{m}$-категории в X_t!). Значит, отсюда вытекает,

что формула

$$h([A]_{\Delta^*}) = [\varphi^{-1}(A)]_{\Delta_0} \text{ для любого } A \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$$

определяет $\mathfrak{m}$-гомоморфизм алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta^*$ в алгебру $\mathfrak{F}_0/\Delta_0$. Более того, для любого $A \in \mathfrak{A}_t$ имеет место равенство

$$h_t(A) = [\varphi_t^{-1}(g_t(A))]_{\Delta_0} = [\varphi^{-1}(g_t^*(A))]_{\Delta_0} = h(i_t(A)),$$

т. е. $h_t = h_{i_t}$ для каждого $t \in T$.

Чтобы доказать достаточность, заметим, что все ($\mathfrak{m}$, 0)-произведения из $\boldsymbol{P}_{\mathrm{г}}$, обладающие свойством ($\text{д}_{\mathrm{г}}$), в силу теоремы 23.3 изоморфны между собой. Так как пара (23) обладает свойством ($\text{д}_{\mathrm{г}}$), то все ($\mathfrak{m}$, 0)-произведения из $\boldsymbol{P}_{\mathrm{г}}$, обладающие свойством ($\text{д}_{\mathrm{г}}$), изоморфны паре (23), т. е. все они являются максимальными представимыми $\mathfrak{m}$-произведениями.

Вторая часть теоремы 38.10 непосредственно вытекает из первой части; если пара (2) — произвольное ($\mathfrak{m}$, 0)-произведение из $\boldsymbol{P}_{\mathrm{г}}$, то, положив $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}'$, $h_t = i'_t$, мы получим из свойства ($\text{д}_{\mathrm{г}}$), что $(2) \leqslant (1)$.

Пусть $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$ и Δ^* имеют тот же смысл, что и в теореме 38.9. Пусть $\boldsymbol{I}_{\mathrm{г}}$ — класс всех таких $\mathfrak{m}$-идеалов Δ алгебры $\mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}$, что

(г_1) $\Delta^* \subset \Delta$,

(г_2) ни одно из множеств вида $\bigcap\limits_{t \in T'} g_t^*(A_t)$, где $\wedge \neq A_t \in \mathfrak{A}_t$, $T' \subset T$, $\overline{\overline{T}}' \leqslant \mathfrak{n}$, не принадлежит идеалу Δ.

Для всякого идеала $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathrm{г}}$ положим

$$i_t^{\Delta}(A) = [g_t^*(A)]_{\Delta} \text{ для любого } A \in \mathfrak{A}_t.$$

38.11. *Для любого идеала $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathrm{г}}$ пара*

$$\{\{i_t^{\Delta}\}_{t \in T},\ \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta\}$$

является элементом из пересечения $\boldsymbol{P}_{\mathrm{г}} \cap \boldsymbol{P}_{\mathrm{п}}$. Следовательно, каждый элемент из $\boldsymbol{P}_{\mathrm{г}} \cap \boldsymbol{P}_{\mathrm{п}}$ изоморфен элементу указанного выше вида для некоторого идеала $\Delta \in \boldsymbol{I}_{\mathrm{г}}$.

Для любых двух идеалов Δ', $\Delta'' \in \boldsymbol{I}_{\mathrm{г}}$ неравенство

$$\{\{i_t^{\Delta'}\}_{t \in T},\ \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta'\} \leqslant \{\{i_t^{\Delta''}\}_{t \in T},\ \mathfrak{F}_{\mathfrak{m}}/\Delta''\}$$

эквивалентно включению

$$\Delta'' \subset \Delta'.$$

Доказательство теоремы 38.11 подобно доказательству теорем 36.8, 36.11, 36.12.

Теорема 38.11 дает нам топологическое представление для любого представимого ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведения. Отождествляя изоморфные элементы, мы на основании последней части теоремы 38.11 замечаем, что частично упорядоченное множество $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}} \cap \boldsymbol{P}_{\mathfrak{n}}$ всех представимых ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведений изоморфно (в смысле теории частично упорядоченных множеств) множеству $\boldsymbol{I}_{\mathfrak{r}}$, частично упорядоченному при помощи включения, обратного теоретико-множественному.

Не известно, находится ли в классе $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}$ минимальное ($\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$)-произведение $\mathfrak{m}$-представимых алгебр $\mathfrak{A}_t$.

Если пара (1) является ($\mathfrak{m}$, 0)-произведением $\mathfrak{m}$-алгебр $\mathfrak{A}_t$ и $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{m}$-полю множеств, то, согласно условию (б), каждая алгебра $\mathfrak{A}_t$ изоморфна некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств. Верно также и обратное утверждение: если каждая алгебра $\mathfrak{A}_t$ изоморфна $\mathfrak{m}$-полю множеств, то существует такое $\mathfrak{m}$-произведение (1), что $\mathfrak{B}$ изоморфно некоторому $\mathfrak{m}$-полю множеств.

Достаточно доказать это утверждение в случае, когда алгебра $\mathfrak{A}_t$ для каждого $t \in T$ является $\mathfrak{m}$-полем подмножеств пространства X_t. Пусть X — декартово произведение всех пространств X_t. Положим для любого $A \in \mathfrak{A}_t$

$$i_t(A) = A^* =$$
$$= \{x \in X;\ \text{координата } x \text{ с номером } t \text{ принадлежит } A\},$$

и пусть $\mathfrak{F}$ есть $\mathfrak{m}$-F-произведение алгебр $\mathfrak{A}_t$, т. е. $\mathfrak{m}$-поле (подмножеств пространства X), порожденное объединением всех подалгебр $i_t(\mathfrak{A}_t)$, $t \in T$. Тогда пара

$$\{\{i_t\}_{t \in T},\ \mathfrak{F}\} \tag{25}$$

является $\mathfrak{m}$-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Согласно определению § 37, стр. 280, пару (25) мы будем называть $\mathfrak{m}$-F-*произведением семейства* $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

38.12. *Если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ являются $\mathfrak{m}$-полями множеств, пара* (1) *является $\mathfrak{m}$-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, а алгебра $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{m}$-полю множеств, то пара* (1) *является наименьшим элементом в классе $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$ и, следовательно, минимальным $\mathfrak{m}$-произведением, причем пара* (1) *изоморфна паре* (25).

Неравенство (1) $\leqslant$ (2) для всякого $\mathfrak{m}$-произведения (2) непосредственно вытекает из теоремы 34.3. Таким образом, пара (1) является наименьшим элементом в классе $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$ и, значит, минимальным элементом в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$. В силу тех же аргументов пара (25) является наименьшим и минимальным элементом в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$. Поскольку все минимальные элементы в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$ изоморфны, то пара (1) изоморфна паре (25).

Таким образом, после отождествления изоморфных $\mathfrak{m}$-произведений мы можем сказать, что если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ являются $\mathfrak{m}$-полями множеств, то существует в точности одно такое $\mathfrak{m}$-произведение (1), что $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-полем, а именно $\mathfrak{m}$-F-произведение (25).

Если $(\mathfrak{m}, 0)$-произведение (1) $\mathfrak{m}$-алгебр $\mathfrak{A}_t$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивным, то, согласно условию (б), каждая алгебра $\mathfrak{A}_t$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной. Верно также и обратное утверждение: если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ $\mathfrak{m}$-дистрибутивны, то $\mathfrak{m}$-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивным. Именно,

38.13. *Пусть $\mathfrak{A}_t$ есть $\mathfrak{m}$-дистрибутивная $\mathfrak{m}$-алгебра для каждого $t\in T$, а пара* (1) *есть $\mathfrak{m}$-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. При этих предположениях $\mathfrak{m}$-алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной тогда и только тогда, когда пара* (1) *является минимальным $\mathfrak{m}$-произведением. В этом случае пара* (1) *является наименьшим элементом в $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$*[1]).

Предположим, что пара (1) является минимальным $\mathfrak{m}$-произведением. Чтобы доказать, что алгебра $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной, мы должны показать (см. теорему 24.6), что каждая $\mathfrak{m}$-подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{m}$-порожденная не

---

[1]) Теорема 38.13 доказана Христенсеном и Пирсом [1]. Здесь приведено доказательство, предложенное Сикорским и Трачиком [2].

более чем m элементами, изоморфна некоторому m-полю множеств. Достаточно показать, что каждая m-подалгебра $\mathfrak{B}_0$, m-порожденная объединением m-алгебр $\mathfrak{B}_t \subset i_t(\mathfrak{A}_t)$, $t \in T'$ $(T' \subset T)$, является атомной, если $\overline{\overline{T'}} \leqslant \mathfrak{m}$, а каждая алгебра $\mathfrak{B}_t$ m-порождена не более чем m элементами. Действительно, каждая подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$, m-порожденная не более чем m элементами, является m-подалгеброй некоторой m-подалгебры $\mathfrak{B}_0$ указанного выше вида.

Поскольку алгебра $\mathfrak{A}_t$ является m-дистрибутивной, то m-дистрибутивной будет также и алгебра $\mathfrak{B}_t$. Пусть $\{A_{t,s}\}_{s \in S_t}$ индексированное множество всех атомов алгебры $\mathfrak{B}_t$ и

(26) $$A_{t,s} \cap A_{t,s'} = \wedge \text{ при } s \neq s'.$$

Согласно пунктам (i), (ii) теоремы 24.6,

$$\bigcup_{s \in S_t}^{i(\mathfrak{A}_t)} A_{t,s} = \vee.$$

По второму утверждению теоремы 38.7 алгебра $i(\mathfrak{A}_t)$ является регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$. Таким образом,

(27) $$\bigcup_{s \in S_t}^{\mathfrak{B}} A_{t,s} = \vee.$$

Пусть S — множество всех таких функций f, определенных на T', что $f(t) \in S_t$ для всех $t \in T'$. Для каждой функции $f \in S$ положим

$$A_f = \bigcap_{t \in T'}^{\mathfrak{B}} A_{t,f(t)} \in \mathfrak{B}_0.$$

Из формулы (26) вытекает, что

(28) $$A_f \cap A_{f'} = \wedge \text{ для } f \neq f'.$$

Мы докажем, что

(29) $$\bigcup_{f \in S}^{\mathfrak{B}} A_f = \vee.$$

Поскольку множество всех элементов вида

(29′) $$A = \bigcap_{t \in T''}^{\mathfrak{B}} A_t, \text{ где } \wedge \neq A_t \in i(\mathfrak{A}_t) \text{ для } t \in T'',$$

$$T'' \subset T, \ \overline{\overline{T''}} \leqslant \mathfrak{m},$$

плотно в алгебре $\mathfrak{B}$ (см. теорему 38.6), то достаточно доказать, что для любого элемента A вида (29′) существует такая функция $f \in S$, что $A \cap A_f \neq \wedge$. Согласно формуле (27), для любого индекса $t \in T' \cap T''$ существует такой элемент $s_t \in S_t$, что $A_t \cap A_{t, s_t} \neq \wedge$. Пусть f — некоторое отображение из S, такое, что $f(t) = s_t$ для $t \in T' \cap T''$. Тогда

$$A \cap A_f = \bigcap_{t \in T' \cap T''}^{\mathfrak{B}} (A_t \cap A_{t, s_t}) \cap \bigcap_{t \in T'' - T'}^{\mathfrak{B}} A_t \cap \bigcap_{t \in T' - T''}^{\mathfrak{B}} A_{t, f(t)} \neq \wedge,$$

так как подалгебры $i_t(\mathfrak{A}_t)$ $\mathfrak{m}$-независимы.

Из формул (28) и (29) следует, что множество всех элементов $A \in \mathfrak{B}$, таких, что как A, так и $-A$ является объединением (в $\mathfrak{B}$) некоторых элементов A_f, образует $\mathfrak{m}$-подалгебру алгебры $\mathfrak{B}$. Умножая обе части равенства (29) на произвольный элемент $A \in \mathfrak{B}_t$, мы получаем, что эта $\mathfrak{m}$-подалгебра содержит все подалгебры $\mathfrak{B}_t$, $t \in T'$. Таким образом, она содержит алгебру $\mathfrak{B}_0$. Это доказывает, что каждый ненулевой элемент алгебры $\mathfrak{B}_0$ содержит по крайней мере один элемент A_f в качестве подэлемента. Итак, алгебра $\mathfrak{B}_0$ атомна, а элементы $A_f (f \in S)$ суть все атомы алгебры $\mathfrak{B}_0$.

Предположим теперь, что пара (1) есть $\mathfrak{m}$-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$, а $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{m}$-дистрибутивной алгеброй. Из теоремы 34.3 непосредственно вытекает, что (1) $\leqslant$ (2) для каждого $\mathfrak{m}$-произведения (2) алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$. Таким образом, пара (1) является наименьшим элементом в классе $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}$ и, значит, минимальным $\mathfrak{m}$-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t \in T}$.

С помощью критерия 38.3 можно доказать, что операция образования максимального $\mathfrak{m}$-произведения ассоциативна, т. е. если пара $\{\{i_{s,t}\}_{t \in T_s}, \mathfrak{B}_s\}$ есть максимальное $\mathfrak{m}$-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_{t,s}\}_{t \in T_s}$, а $\{\{i_s\}_{s \in S}, \mathfrak{B}\}$ — максимальное $\mathfrak{m}$-произведение алгебр $\{\mathfrak{B}_s\}_{s \in S}$, то пара $\{\{i_s i_{s,t}\}_{t \in T_s, s \in S}, \mathfrak{B}\}$ является максимальным $\mathfrak{m}$-произведением алгебр $\{\mathfrak{A}_{t,s}\}_{t \in T_s, s \in S}$. Аналогичное замечание справедливо для максимальных представимых $\mathfrak{m}$-произведений $\mathfrak{m}$-представимых алгебр. Подобным же образом

можно доказать с помощью критериев 38.4 и 38.6, что операция образования минимального (m, 0)-произведения или минимального (m, n)-произведения является ассоциативной операцией [1]).

Теперь мы рассмотрим случай $\mathfrak{m}=\sigma$. Тогда $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{r}}=\boldsymbol{P}$, поскольку все булевы алгебры являются σ-представимыми. Теорема 38.11 дает топологическое представление всех σ-произведений. Поскольку максимальное представимое σ-произведение совпадает с максимальным σ-произведением, то теорема 38.9 дает топологическое представление максимальных σ-представлений.

Следующая теорема является булевым аналогом теоремы о построении произведений σ-мер на σ-полях множеств [см. § 37, (2)].

38.14. *Пусть m_t — такая σ-мера, определенная на $\mathfrak{A}_t$, что $m_t(\vee)=1$, и пусть пара (1) — максимальное σ-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$. Тогда существует такая σ-мера m, определенная на алгебре $\mathfrak{B}$, что*

$$m\left(\bigcap_{1\leqslant n\leqslant k} i_{t_n}(A_n)\right)=\prod_{1\leqslant n\leqslant k} m_{t_n}(A_n) \tag{30}$$

для любой последовательности $A_n\in\mathfrak{A}_{t_n}$, $t_l\neq t_j$ при $l\neq j$.

Поскольку максимальные σ-произведения совпадают с представимыми максимальными σ-произведениями, то достаточно доказать теорему 38.14 в случае, когда пара (1) является σ-произведением (23). Ниже мы используем обозначения теоремы 38.9 (при $\mathfrak{m}=\sigma$), а также ее доказательство. Формула

$$\mu_{0,t}(g_t(A))=m_t(A) \text{ для } A\in\mathfrak{B}_t$$

определяет меру $\mu_{0,t}$ на поле всех открыто-замкнутых множеств бикомпактного пространства X_t. Из метода внешних мер Каратеодори вытекает, что мера $\mu_{0,t}$ может быть продолжена до σ-меры μ_t на σ-поле $\mathfrak{F}_t$ [2]) Если

[1]) Подробные доказательства этих утверждений см. в работе Сикорского [13].

[2]) Более детальное объяснение см. в § 42 на стр. 324.

$B \in \mathfrak{F}_t$ — нигде не плотное σ-замкнутое подмножество пространства X_t, т. е. если $B \bigcap_{1 \leqslant n < \infty} g_t(A_n)$, где $\bigcap_{1 \leqslant n < \infty}^{\mathfrak{A}_t} A_n = \wedge$ ($A_{n+1} \subset A_n$ для $n = 1, 2, \ldots$), то

$$0 \leqslant \mu_t(B) = \lim_{n \to \infty} \mu_t(g_t(A_n)) = \lim_{n \to \infty} m_t(A_n) = m_t(\wedge) = 0,$$

поскольку μ_t и m_t суть σ-меры[1]). Это доказывает, что

$$\mu_t(B) = 0$$

для каждого множества B, нигде не плотного и σ-замкнутого в X_t.

Пусть μ есть σ-произведение всех мер μ_t. По определению μ является σ-мерой на поле $\mathfrak{F}_\sigma$, причем

$$\mu\left(\bigcap_{1 \leqslant n \leqslant k} g_t^*(A_n)\right) = \prod_{1 \leqslant n \leqslant k} m_{t_n}(A_n)$$

для каждой последовательности $A_n \in \mathfrak{B}_{t_n}$ ($t_l \neq t_j$ при $l \neq j$), и

$$\mu(B^*) = 0$$

для каждого $B \in \mathfrak{F}_t$, нигде не плотного и σ-замкнутого в пространстве X_t. Следовательно,

$$\mu(B) = 0$$

для каждого множества $B \in \Delta^*$. Тогда формула

$$m([B]_{\Delta^*}) = \mu(B)$$

определяет σ-меру на алгебре $\mathfrak{F}_\sigma/\Delta^*$, причем имеет место равенство 30.

Легко видеть, что существует только одна σ-мера m на алгебре $\mathfrak{A}$, такая, что выполняется равенство (30). Мы назовем меру m *булевым σ-произведением мер* $\{m_t\}_{t \in T}$.

Примеры. Б) Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — два σ-поля множеств, определенные в примере А § 37. Из этого же примера следует, что σ-произведение (25) полей $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ не обладает свойством продолжаемости (д) из теоремы

[1]) См., например, Халмош [1], стр. 42.

38.3 [по теореме 37.3 (iii) оно обладает этим свойством только в случае, когда рассматриваемые σ-гомоморфизмы отображают в σ-поле множеств], поэтому пара (25) не является максимальным σ-произведением алгебр $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. В силу теоремы 38.11 σ-произведение полей $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ является минимальным σ-произведением алгебр $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Значит, отсюда вытекает, что максимальное и минимальное σ-произведения алгебр $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ не изоморфны.

B) Теорема 38.14 не имеет места, вообще говоря, если максимальное σ-произведение заменить на минимальное σ-произведение (однако эта модификация теоремы 38.14 справедлива, если все алгебры $\mathfrak{A}_t$ являются σ-полями множеств — см. теорему 38.12).

Действительно, пусть $\mathfrak{F}'$ есть σ-поле всех борелевских подмножеств единичного интервала U, μ' — лебегова мера на $\mathfrak{F}_1$, а Δ' — σ-идеал всех множеств (поля $\mathfrak{F}'$), мера μ' которых равна нулю. Пусть $T=(1, 2)$, $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2=\mathfrak{F}'/\Delta'$, $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}_0\}$ — булево произведение алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ (см. § 13) и, наконец, пусть $\mathfrak{B}$ есть σ-пополнение алгебры $\mathfrak{B}_0$. По определению пара $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ является минимальным σ-произведением $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Формулы

$$m_t([A])=\mu'(A) \text{ для любого } A\in\mathfrak{F}' \ (t=1, 2)$$

определяют σ-меры m_t на алгебрах $\mathfrak{A}_t$. Согласно замечанию в конце § 13, существует произведение m_0 мер m_1 и m_2 на $\mathfrak{B}_0$. Однако не существует σ-произведения m мер m_1 и m_2 на $\mathfrak{B}$. Действительно, если бы такое σ-произведение m существовало, то m было бы продолжением меры m_0. Поскольку m есть σ-мера, то выполнялось бы равенство[1]) $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)=0$ для каждой такой последовательности $A_n\in\mathfrak{B}$, что $A_{n+1}\subset A_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ и

$$\bigcap_{1\leqslant n<\infty}^{\mathfrak{B}} A_n=\wedge.$$

С другой стороны, существует такая последовательность $B_n\in\mathfrak{B}_0$, что $B_{n+1}\subset B_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, $\bigcap\limits_{1\leqslant n<\infty}^{\mathfrak{B}} B_n=\bigcap\limits_{1\leqslant n<\infty}^{\mathfrak{B}_0} B_n=\wedge$, а

$$\lim_{n\to\infty} m_0(B_n)=\lim_{n\to\infty} m(B_n)>0.$$

[1]) См., например, Халмош [1], стр. 42.

Противоречие.

Чтобы определить эту последовательность $\{B_n\}$, предположим, что $\mathfrak{B}_0$ имеет вид $\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ — наименьшее поле (борелевских подмножеств единичного квадрата $U\times U$), содержащее все множества

$$A\times U,\ U\times A,\ \text{где}\ A\in\mathfrak{F}',$$

а Δ — идеал всех множеств (поля $\mathfrak{F}$) лебеговой меры нуль на плоскости. Обозначим эту меру через μ. Действительно, подалгебры элементов вида $[A\times U]_\Delta$ и вида $[U\times A]_\Delta$ независимы, изоморфны алгебрам $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ соответственно и порождают $\mathfrak{F}/\Delta$. Поэтому $\mathfrak{F}/\Delta$ изоморфно алгебре $\mathfrak{B}_0$ (см. § 13).

Мера m_0 на алгебре $\mathfrak{B}_0$ определяется формулой

$$m_0([A])=\mu(A)\ \text{для}\ A\in\mathfrak{F}. \tag{31}$$

Теперь пусть N — нигде не плотное замкнутое подмножество интервала U и $\mu'(N)>0$, а S — множество всех таких точек $(x_1, x_2)\in U\times U$, что $|x_1-x_2|\in N$. Неравенство $\mu'(N)>0$ влечет за собой неравенство

$$\mu(S)>0. \tag{32}$$

Теперь мы докажем, что

(33) если $A_1'\times A_2'\in\mathfrak{F}$ и $\mu(A_1'\times A_2')>0$, то $A_1'\times A_2'-S\neq\wedge$.

Предположим, что $A_1'\times A_2'\subset S$ для некоторых множеств $A_1', A_2'\in\mathfrak{F}$ положительной меры μ'. Согласно известной теореме[1]), множество N_0 чисел $|x_1-x_2|$, где $x_t\in A_t'$ $(t=1, 2)$, будет содержать интервал. Это невозможно, так как N_0 является подмножеством нигде не плотного множества N.

Свойство (33) можно усилить следующим образом:

(34) если $A_1\times A_2\in\mathfrak{F}$ и $\mu(A_1\times A_2)>0$,
то $\mu(A_1\times A_2-S)>0$.

Действительно, A_t содержит такое подмножество A_t' положительной меры μ', что соотношение $A_t'\cap G\neq\wedge$ влечет за собой неравенство $\mu'(A_t'\cap G)>0$ для каждого откры-

---

[1]) Штейнгауз [1].

того множества G в U $(t=1, 2)$. Следовательно, если H — открытое множество в $U\times U$, то соотношение $H\cap(A_1'\times\times A_2')\neq\wedge$ влечет за собой неравенство $\mu(H\cap(A_1'\times A_2'))>0$. Множество $H=U\times U-S$ открыто в $U\times U$ и $H\cap(A_1'\times\times A_2')\neq\wedge$ в силу свойства (33). Следовательно,

$$0<\mu(A_1'\times A_2'-S)\leqslant\mu(A_1\times A_2-S),$$

что доказывает свойство (34).

Так как множество S замкнуто, то существует убывающая последовательность множеств $S_n\in\mathfrak{F}$, таких, что пересечение всех S_n равно S. Из формул (31), (32) и (34) вытекает, что последовательность $B_n=[S_n]_\Delta$ обладает требуемыми свойствами [1]).

Г) Пусть пара (1) — булево σ-произведение булевых алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, а $\mathfrak{B}_0$ — наименьшая подалгебра, содержащая все алгебры $i(\mathfrak{A}_t)$ $(t\in T)$. Тогда $\mathfrak{B}_0$ является булевым произведением алгебр $\{\mathfrak{B}_t\}_{t\in T}$. Если пара (1) не есть минимальное σ-произведение алгебр $\{\mathfrak{A}_t\}_{t\in T}$, то подалгебра $\mathfrak{B}_0$ не является, вообще говоря, σ-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — булевы алгебры, определенные в примере В, $T=(1, 2)$, а $\{\{i_t\}_{t\in T}, \mathfrak{B}\}$ — максимальное σ-произведение алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Тогда подалгебра $\mathfrak{B}_0$, порожденная алгебрами $i_1(\mathfrak{A}_1)$ и $i_2(\mathfrak{A}_2)$, не является σ-регулярной подалгеброй алгебры $\mathfrak{B}$, ибо предположив, что $\mathfrak{B}_0$ σ-регулярна, мы получим, что булево σ-произведение m σ-мер m_1 и m_2, определенное в примере В, является продолжением произведения m_0 мер m_1 и m_2. Пусть $B_n\in\mathfrak{B}_0$ — последовательность, определенная в примере В. Согласно определению, $\bigcap\limits_{1\leqslant n<\infty}^{\mathfrak{B}_0} B_n=\wedge$, $B_{n+1}\subset B_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m_0(B_n)>0$. С другой стороны, поскольку $\bigcap\limits_{1\leqslant n<\infty}^{\mathfrak{B}} B_n=\wedge$, а m есть σ-мера на $\mathfrak{B}$, то

$$\lim_{n\to\infty} m_0(B_n)=\lim_{n\to\infty} m(B_n)=0.$$

Противоречие.

---

[1]) Пример В был предложен Сикорским [15]. Часть доказательства является небольшим видоизменением рассуждений Хелсона [2].

ДОПОЛНЕНИЕ

§ 39. Связь с другими алгебрами

Булевы алгебры являются частным случаем *абстрактных алгебр* (с конечным числом конечноместных операций). Много понятий, введенных в гл. I, принадлежит общей теории абстрактных алгебр. Приведем здесь такие понятия, как гомоморфизм, изоморфизм, подалгебра, образующая, свободная алгебра и т. д. Булевы $\mathfrak{m}$-алгебры, исследованные в гл. II, можно интерпретировать как частный случай абстрактных алгебр, но с некоторыми бесконечноместными операциями, а именно алгебр со следующими операциями: дополнением — A, бесконечным объединением $\bigcup_{t \in T} A_t$ и бесконечным пересечением $\bigcap_{t \in T} A_t$, где T — множество индексов мощности $\mathfrak{m}$. Таким образом, такие понятия, как $\mathfrak{m}$-подалгебра, $\mathfrak{m}$-гомоморфизм (двух $\mathfrak{m}$-алгебр), $\mathfrak{m}$-образующая, свободная булева $\mathfrak{m}$-алгебра и т. д., принадлежат общей теории абстрактных алгебр. Большая часть замечаний в I и II главах, а также некоторые теоремы принадлежат теории абстрактных алгебр. Понятия F-произведения и $\mathfrak{m}$-F-произведения, булева произведения и максимального $\mathfrak{m}$-произведения, а также максимального представимого $\mathfrak{m}$-произведения являются частными случаями общего понятия произведения абстрактных алгебр[1]).

---

[1]) Сикорский [19]. См. также Христенсен и Пирс [1]. С точки зрения общей теории категорий булевы произведения и максимальные $\mathfrak{m}$-произведения являются свободными объединениями в категории булевых $\mathfrak{m}$-алгебр (см., например, Курош, Лившиц, Шульгейфер [1], Семадени [4,5]).

К теории булевых алгебр можно также применить и некоторые другие общие алгебраические понятия, которые не рассматривались в гл. I и II. В качестве примера мы приведем здесь понятие обратной и прямой систем[1]) и понятие проективности и инъективности[2]) из общей теории категорий.

Из принятой в § 1 системы аксиом немедленно вытекает, что булевы алгебры являются дистрибутивными *структурами*. Более точно, понятие булевой алгебры совпадает с понятием дистрибутивной структуры с дополнениями[3]). Некоторые теоремы, доказанные здесь для булевых алгебр, можно обобщить на дистрибутивные структуры. В частности, основную теорему 8.2 о представлении можно рассматривать как частный случай теоремы о представлении для дистрибутивных структур[4]).

Как мы видели в § 17, теория булевых алгебр совпадает (если рассматриваются конечные объединения и пересечения) с частью теории алгебраических колец. Термин „идеал" заимствован из этой теории. Действительно, легко проверить, что множество Δ элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ является идеалом в смысле § 3 тогда и только тогда, когда оно является идеалом булева кольца $\mathfrak{A}$ в смысле общей теории алгебраических колец. Описанное в § 10 построение факторалгебр является частным случаем построения алгебраических факторколец. Это построение является также частным случаем построения факторалгебр по отношению конгруэнтности в общей теории абстрактных алгебр.

Следует заметить, что метод гомоморфизмов с двумя значениями, использованный в доказательстве основной теоремы[5]) 8.2 о представлении, является частным случаем общего метода исследования более сложных алгебр с по-

---

[1]) См. Энгелькинг, Куратовский [1], Хаимо [1], Уоллес [1].

[2]) О проективных и инъективных булевых алгебрах см. Халмош [8, 10].

[3]) По поводу других характеристик булевых алгебр, выделяющих их в классе структур, см. Балачандран [1, 2, 3], Биркгоф и Вард [1], Дилуорс [2], Мичиура [1], Начбин [1].

[4]) Доказана Биркгофом [1] и Стоуном [9]. См. также Ригер [2].

[5]) В доказательстве теоремы 8.2 мы использовали понятие максимального фильтра вместо двузначного гомоморфизма, но эти понятия эквивалентны (см. стр. 32).

мощью гомоморфизмов в некоторые специальные простые алгебры с тем же набором операций. Примером использования этого метода является понятие пространства, двойственного к данному банахову пространству. Это пространство состоит из всех непрерывных линейных функционалов, т. е. гомоморфизмов (в смысле теории банаховых пространств) в простейшее банахово пространство, именно поле скаляров (вещественных или комплексных).

Другой пример применения этого метода представляет теория нормированных колец в функциональном анализе. В этом случае под двойственным пространством $\mathfrak{A}^*$ данного нормированного кольца $\mathfrak{A}$ понимается множество всех непрерывных мультипликативных линейных функционалов, т. е. гомоморфизмов χ в простейшее нормированное кольцо, именно кольцо скаляров. Если фиксирован элемент $A \in \mathfrak{A}$, то формула

$$\Phi_A(\chi) = \chi(A) \qquad (\chi \in \mathfrak{A}^*)$$

определяет непрерывное отображение пространства $\mathfrak{A}^*$ в скаляры. Если выполнены некоторые дополнительные условия, то отображение h, определенное равенством

$$h(A) = \Phi_A, \tag{1}$$

является взаимно однозначным. В этом случае кольцо $\mathfrak{A}$ можно представить как кольцо непрерывных функций на двойственном пространстве $\mathfrak{A}^*$.

Последний пример имеет аналогию с теорией булевых алгебр. Каждая булева алгебра $\mathfrak{A}$ является не только алгебраическим кольцом, но и линейной алгеброй над двухэлементным алгебраическим полем $\mathfrak{R}$ (см. § 17, стр. 84). Согласно замечанию на стр. 32 и определению в доказательстве теоремы 8.2, пространство Стоуна X данной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ можно интерпретировать как множество всех двузначных гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ в поле $\mathfrak{R}$, т. е. множество всех мультипликативных линейных функционалов со значениями в поле скаляров $\mathfrak{R}$. Множество всех непрерывных отображений пространства Стоуна X в двухэлементное хаусдорфово пространство $\mathfrak{R}$ можно отождествить с множеством всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X, поскольку каждое отображение этого типа однозначно определяется (открыто-

замкнутым) множеством точек, в которых рассматриваемое отображение принимает значение единица. Таким образом, изоморфизм h в доказательстве основной теоремы 8.2 о представлении можно рассматривать как частный случай отображения (1). Поэтому пространство Стоуна алгебры $\mathfrak{A}$ иногда называют *двойственным пространством* к алгебре $\mathfrak{A}$ [1]).

Аналогия между теорией представлений нормированных колец и булевых алгебр настолько глубока, что оказывается возможным развить общую теорию максимальных идеалов, которая дает как частный случай две теоремы о представлении [2]).

Понятие булевой σ-алгебры является частным случаем понятия *кардинальной алгебры* [3]). Кардинальные алгебры суть абстрактные алгебры с бесконечноместной операцией, которая является одновременно обобщением булева объединения счетных последовательностей элементов и суммы счетных последовательностей кардинальных чисел. Аксиомы, характеризующие эту операцию, таковы, что из них можно вывести бо́льшую часть аддитивной арифметики кардинальных чисел. Однако они также выполняются и для булевых алгебр, изоморфных типов булевых σ-алгебр, множества неотрицательных целых или вещественных чисел (включая $+\infty$), множества всех неотрицательных функций на некотором множестве и для других систем. Теоремы для кардинальных алгебр имеют место и для булевых алгебр, но в этой книге они не приводились. Следует заметить, что некоторые из этих теорем для булевых алгебр являются обобщением хорошо известных фундаментальных теорем для кардинальных чисел. Например, основная теорема Кантора — Бернштейна для кардинальных чисел:

$$\text{если } \mathfrak{n}_1 \leqslant \mathfrak{n}_2 \text{ и } \mathfrak{n}_2 \leqslant \mathfrak{n}_1, \text{ то } \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$$

есть частный случай следующей теоремы для булевых σ-алгебр $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, являющейся перефразировкой теоремы 22.4:

---

[1]) См. Халмош [4, 8].

[2]) Славиковский и Заводовский [1].

[3]) Понятие и теория кардинальных алгебр предложены Тарским [8]. См. также Джонсон и Тарский [2].

если $\mathfrak{B}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}\,|\,A\,(A \in \mathfrak{A})$, а $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{B}\,|\,B\,(B \in \mathfrak{B})$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.

Чтобы получить теорему Кантора — Бернштейна, достаточно взять в качестве алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ поля всех подмножеств некоторых X, Y мощностей $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ соответственно.

Тем же самым способом мы убеждаемся, что теорема Бернштейна:

$$\text{если } 2\mathfrak{n}_1 = 2\mathfrak{n}_2, \text{ то } \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2,$$

является частным случаем следующей теоремы, справедливой для любой булевой σ-алгебры $\mathfrak{A}$:

если A, $B \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\,|\,A$ изоморфна $\mathfrak{A}\,|-A$, а $\mathfrak{A}\,|\,B$ изоморфна алгебре $\mathfrak{A}\,|-B$, то алгебры $\mathfrak{A}\,|\,A$ и $\mathfrak{A}\,|\,B$ изоморфны [1]).

Много работ посвящено изучению булевых алгебр с некоторыми дополнительными операциями, а также различным обобщениям булевых алгебр и колец [2]).

§ 40. Применение к математической логике. Классические исчисления

Самым важным применением теории булевых алгебр является ее применение к математической логике. Это не удивительно, поскольку понятие булевой алгебры было создано в результате исследований Булем алгебраической структуры „законов мышления“ [3]). На первом этапе развития теория булевых алгебр называлась также алгеброй логики.

Рассмотрим сначала случай (двузначного) исчисления высказываний. Обозначим логические связки „или“, „и“, „не“, „если..., то ...“ через $\cup$, $\cap$, $-$, $\rightarrow$ соответственно.

---

[1]) Тарский [8]. Предположение, что алгебра $\mathfrak{A}$ σ-полна, является существенным. См. Ханф [1].

[2]) Бялыницкий-Бируля [1], Бялыницкий-Бируля и Расёва [1] Чанг и Хорн [1], Чоудхури [1], Копланд [1], Копланд и Харари [1, 2], Кроули [1], С. Дэвис [1], Эпштейн [1], Эверетт и Улам [1], Фелл и Тарский [1], Фостер [1], Харари [1], Джонсон и Тарский [1], Лаббе [1], Маккой [1], Маккой и Монтгомери [1], Маккинси [5], Рибейро [1, 2], Словиковский и Завадовский [1], Зусман [1], Трачик [3, 4, 6] Вуенака [1]. См. также алгебры, упомянутые в § 40 и 41.

[3]) Буль [1, 2].

Множество всех формул исчисления высказываний становится булевой алгеброй, если отождествить эквивалентные формулы (см. аналогичное замечание в примере Г § 1). Мы напомним, что формулы α, β называются эквивалентными, если выводимы обе импликации $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$. Так полученная булева алгебра называется *алгеброй Линденбаума — Тарского* рассматриваемого исчисления высказываний. Обозначим через $|\alpha|$ элемент алгебры $\mathfrak{A}$, определяемый формулой α. Имеют место основные тождества

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
|\alpha| \cup |\beta| &= |\alpha \cup \beta| \\
|\alpha| \cap |\beta| &= |\alpha \cap \beta| \\
-|\alpha| &= |-\alpha| \\
|\alpha| \to |\beta| &= |\alpha \to \beta|.
\end{aligned}
$$

Первые три тождества определяют булевы операции в алгебре Линденбаума — Тарского $\mathfrak{A}$. Булева операция $\to$ в левой части четвертого тождества совпадает с операцией, определенной на стр. 21. Мы видим, что булевы операции $\cup$, $\cap$, $-$, $\to$ являются булевым аналогом логических связок $\cup$, $\cap$, $-$, $\to$ соответственно.

Основная теорема полноты в исчислении высказываний утверждает, что класс всех выводимых формул (т. е. формул, полученных из принятой системы аксиом исчисления высказываний с помощью правил вывода) совпадает с классом всех тавтологий, т. е. интуитивно истинных формул. Используя понятие алгебры Линденбаума — Тарского, эту теорему легко перефразировать на языке теории булевых алгебр. Ее эквивалентная булева формулировка заключается в том, что каждый ненулевой элемент алгебры Линденбаума — Тарского $\mathfrak{A}$ принадлежит некоторому максимальному фильтру. Поэтому теорему полноты можно легко получить из теоремы о существовании максимальных фильтров в булевой алгебре $\mathfrak{A}$ (см. теорему 6.1) или же основной теоремы о представлении, утверждающей, что каждая булева алгебра изоморфна некоторому полю множеств (см. теорему 8.2). Роль системы аксиом исчисления высказываний сводится к тому, чтобы показать, что алгебра Линденбаума — Тарского является булевой алгеброй.

Обратно, основная теорема о представлении для булевых алгебр может быть также легко выведена прямо из теоремы полноты, сформулированной в несколько более сильной форме. Таким образом, обе теоремы выражают одно и то же математическое содержание, но на разных языках [1]).

Рассмотрим теперь случай (двузначного) исчисления предикатов первой ступени. Так же, как и в предыдущем случае, множество всех формул становится булевой алгеброй $\mathfrak{A}$ (называемой *алгеброй Линденбаума — Тарского* для исчисления предикатов), если отождествить эквивалентные формулы. Справедливы также и тождества (1), причем три первых тождества служат определением булевых операций в алгебре $\mathfrak{A}$. Предположим, что знаки $\bigcup_\tau$ и $\bigcap_\tau$ обозначают кванторы „существует такое τ, что... “и„ для любого τ ...“. Тогда для каждой формулы α выполняются тождества (см. пример Е § 18)

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\left|\bigcup_\tau \alpha(\tau)\right| &= \bigcup_{t\in T}^{\mathfrak{A}} |\alpha(t)|,\\
\left|\bigcap_\tau \alpha(\tau)\right| &= \bigcap_{t\in T}^{\mathfrak{A}} |\alpha(t)|,
\end{aligned}
$$

где T обозначает множество всех термов принятого формализованного языка рассматриваемого исчисления предикатов.

Простой анализ показывает, что аналогичная теорема полноты для исчисления предикатов совпадает с теоремой, утверждающей, что существует такой изоморфизм h алгебры Линденбаума — Тарского $\mathfrak{A}$ на некоторое поле множеств, который преобразует все объединения и пересечения (2) в соответствующие теоретико-множественные объединения и пересечения. Таким образом, теорему полноты для исчисления предикатов можно легко вывести (в предположении, что множество всех символов в исчислении предикатов счетно) из теоремы о существовании максимальных фильтров, сохраняющих данное счетное множество бесконечных объединений и пересечений (на последней теореме, в действительности, основано доказательство теоремы 24.10).

---

[1]) См. Хенкин [2] и Лось [1, 3].

Теорему о представлении 24.10 можно также использовать, чтобы легко доказать теорему о существовании счетного или конечного числа семантических моделей для любого непротиворечивого счетного множества формул [1]).

Булевым методом исследования некоторых подходящих алгебр Линденбаума—Тарского можно легко получить и другие фундаментальные теоремы об исчислении предикатов и формализованных элементарных теориях. Мы напомним здесь теорему о существовании моделей для любого (не обязательно счетного) непротиворечивого множества формул, первую и вторую ε-теоремы [2]) и теорему Хербранда [3]). Первоначальные доказательства упомянутых выше теорем были сложными. Булев метод позволяет проще доказывать эти теоремы. Булев метод позволяет также лучше объяснять математическое содержание метаматематических теорем, а также открывать новые теоремы [4]).

Под булевым методом мы понимаем систематический перевод логических проблем на язык булевых алгебр, исследование алгебр Линденбаума—Тарского вместо исследования множества формул. С этой точки зрения изучение исчисления предикатов совпадает с изучением булевых алгебр с отмеченным множеством бесконечных объединений и пересечений, соответствующих логическим кванторам [см. (2)]. Класс таких булевых алгебр лежит между булевыми алгебрами, рассмотренными в гл. I, и булевыми $\mathfrak{m}$-алгебрами, рассмотренными в гл. II. Алгебры Линденбаума—Тарского исчислений предикатов играют особую роль в исследовании этого класса булевых алгебр, поскольку с точки зрения общей теории абстрактных алгебр они являются свободными алгебрами в этом

---

[1]) Этот метод доказательства теоремы полноты и теоремы существования семантических моделей для непротиворечивого счетного множества формул предложен Расёвой и Сикорским [1,2]. См. также Бет [1], Хасеньягер [1], Хенкин [1, 3, 4], Лось [1, 3], Рейхбах [1], Ригер [4, 5, 7]. Для подробного изучения связи между существованием семантических моделей и представлением алгебр Линденбаума—Тарского см. Расёва и Сикорский [7].

[2]) Расёва [5, 6].

[3]) Лось, Мостовский и Расёва [1, 2], Сикорский [23].

[4]) См., например, топологическую характеристику открытых теорий, данную Сикорским [28, 29, 30].

классе[1]). Заметим, что алгебры Линденбаума—Тарского исчисления высказываний совпадают со свободными булевыми алгебрами (см. § 14) с соответствующим числом свободных образующих (именно, свободными образующими в этих алгебрах Линденбаума—Тарского являются элементы вида $|p|$, где p—переменные высказывания[2])).

Алгебры Линденбаума—Тарского исчисления предикатов формализованных теорий (см. пример Г § 1) являются частным случаем *полиадических булевых алгебр*[3]), теория которых была развита в последние годы. Полиадическая алгебра—это по определению булева алгебра $\mathfrak{A}$ с дополнительным множеством операций, каждая из которых, грубо говоря, есть абстрактная формулировка операции, сопоставляющей каждому элементу $|\alpha|$ алгебры Линденбаума—Тарского элемент $\left|\bigcup_{\tau} \alpha\right|$, где τ—фиксированная индивидная переменная. Отмечено подмножество множества эндоморфизмов (т. е. гомоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}$). Эти эндоморфизмы являются абстрактными аналогами операций подстановки в математической логике. Более точно, они являются абстрактными аналогами эндоморфизмов h в алгебре $\mathfrak{A}$ Линденбаума—Тарского, задаваемых формулой

$$h(|\alpha|) = |\alpha^*|,$$

где α^* обозначает формулу, полученную из формулы α путем одновременной подстановки термов $t_1, t_2, \ldots$ вместо индивидных переменных $\tau_1, \tau_2, \ldots$ для двух фиксированных последовательностей $t_1, t_2, \ldots$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots$. Дополнительные операции, аналогичные логическим кванторам, и множество эндоморфизмов, соответствующее выполнению подстановок, характеризуются подходящей системой аксиом.

---

[1]) Это замечание сделал Ригер [5]. См. также Расёва и Сикорский [7].

[2]) Или пропозициональные переменные.—*Прим. перев.*

[3]) Понятия и теория полиадических булевых алгебр созданы Халмошем [3, 4, 5, 6, 7, 9]. См. также Басс [1], Копланд [2], Дейньо и Монк [1], Галлер [1], Лебланк [4, 5], Варшавский [1], Райт [1]. Другая алгебраизация исчисления предикатов (с помощью цилиндрических алгебр) сделана Хенкином и Тарским [1, 2]. См. также Копланд [2], Галлер [1], Каснер [1], Монк [1].

Важным примером полиадической алгебры (называемой *функциональной полиадической алгеброй*) является булева алгебра $\mathfrak{A}$ всех отображений множества X^V в полную булеву алгебру $\mathfrak{B}$. Символ X^V обозначает здесь множество всех отображений $x=\{x_v\}$ непустого множества V в непустое множество X. Каждый элемент $v' \in V$ определяет операцию $\left(\text{соответствующую логическому квантору } \bigcup_{\tau}\right)$, которая каждому $\beta \in \mathfrak{A}$ ставит в соответствие элемент $\beta \in \mathfrak{A}$, задаваемый формулой

$$\beta'(x) = \bigcup \beta(x'),$$

где объединение $\bigcup$ берется по всем таким точкам $x' = \{x'_v\} \in X^V$, что $x_{v'} = x_v$ для всех $v \neq v'$. Множество выделенных эндоморфизмов, соответствующих подстановкам, определяется множеством отображений φ множества V в себя. Именно, эндоморфизм, соответствующий фиксированному отображению φ, переводит любой элемент $\beta \in \mathfrak{A}$ в элемент $\beta' \in \mathfrak{A}$ по формуле

$$\beta'(\{x_v\}) = \beta(\{x_{\varphi(v)}\}).$$

Полиадические алгебры, грубо говоря, являются алгебраизацией исчисления предикатов первой ступени, в которой исключено понятие формулы. Проблема представления для полиадических алгебр состоит в установлении связи между общими полиадическими алгебрами и определенными выше функциональными полиадическими алгебрами. Одна из основных теорем о представлении непосредственно вытекает из теоремы полноты для исчисления предикатов первой ступени и теоремы о существовании семантических моделей для непротиворечивых множеств формул.

Понятие булевых алгебр и некоторые булевы методы являются также полезными в алгебраизации других разделов математической логики. Мы напомним здесь только *алгебры отношений*. Рассмотрим множество всех бинарных отношений R, R', ... между элементами данного пространства X. Это множество образует булеву алгебру $\mathfrak{A}$ по отношению к логическим операциям „R' или R“ (объединение), „R' и R“ (пересечение), „не R„ (дополнение). Если R — отношение, то $R^{\cup}$ будет обозна-

чать его инверсию, т. е. отношение, определенное условием: $xR^{\cup}y$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо yRx. Символ $R;R'$ будет обозначать новую операцию, называемую *относительным произведением* и определяемую следующим образом: $R;R'$ есть такое бинарное отношение в X, что $xR;R'y$ имеет место тогда и только тогда, когда существует такое $z \in X$, что справедливы как xRz, так и $zR'y$. Алгебры отношений являются обобщением описанных выше алгебр $\mathfrak{A}$. По определению это булевы алгебры с двумя дополнительными операциями „$^{\cup}$“ и „;“, которые характеризуются некоторой системой аксиом, так что они являются булевыми аналогами соответствующих операций для бинарных отношений [1]).

§ 41. Топология в булевых алгебрах. Применения к неклассической логике

Алгебра с замыканием есть по определению булева алгебра $\mathfrak{A}$ с некоторой операцией, которая каждому элементу $A \in \mathfrak{A}$ ставит в соответствие элемент $\mathbf{C}A \in \mathfrak{A}$, называемый *замыканием* элемента A, причем выполняются следующие аксиомы [2]):

$$\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B, \quad A \subset \mathbf{C}A,$$
$$\mathbf{C}\mathbf{C}A = \mathbf{C}A, \quad \mathbf{C}\wedge = \wedge.$$

Понятие алгебры с замыканием является обобщением топологического пространства. Действительно, если X — топологическое пространство, то поле всех подмножеств пространства X является алгеброй с замыканием.

Многими авторами [3]) рассматривались алгебры с замыканием с топологической точки зрения. На алгебры

---

[1]) Теорию алгебр отношений см. Бернайс [1], Чин и Тарский [1], Джонсон и Тарский [1], Камел [1], Киди [1], Линдон [1, 2], Моисил [2], Тарский [10, 13].

[2]) Определение дал Куратовский [1].

[3]) Дэвис [1], Гофман [1], Монтейро и Рибейро [1], Нёбелинг [1], Риддер [2, 3], Ригер [9], Рубин [1], Рупрехт [1], Сикорский [2, 3, 7, 16, 20, 24], Тарасока [1, 2], Зарицкий [1]. Книга Нёбелинга [2] содержит систематическое изложение теории алгебр с замыканием, но совершенно не содержит ссылок на ранее опубликованные работы по алгебрам с замыканием.

с замыканием можно распространить много топологических понятий. Например, внутренность $\mathbf{I}A$ элемента $A \in \mathfrak{A}$ определяется как дополнение замыкания его дополнения

$$\mathbf{I}A = -\mathbf{C} - A,$$

как это делается и в теоретико-множественной топологии. Элемент A называется замкнутым (открытым), если $A = \mathbf{C}A$ (если $A = \mathbf{I}A$). Он называется граничным элементом, если $\mathbf{I}A = \wedge$. Он называется нигде не плотным, если $\mathbf{IC}A = \wedge$ и т. д. Для алгебр с замыканием справедливы многие топологические теоремы.

В топологии существенную роль играют бесконечные теоретико-множественные операции. Чтобы распространить эту часть топологии на алгебры с замыканием, нужно требовать σ-полноту алгебр. На σ-алгебры с замыканием распространяется очень большая часть топологии[1]). Так же как и в теоретико-множественной топологии, иногда необходимо ограничиваться специальными классами алгебр с замыканием. Например, чтобы воспроизвести теорию сепарабельных метрических пространств, необходимо ограничивать исследования классом алгебр с замыканием, которые удовлетворяют следующей аксиоме, являющейся комбинацией известных аксиом регулярности, нормальности и сепарабельности:

(а) существует такая последовательность $\{G_n\}$ открытых элементов (открытый базис), что каждый открытый элемент G является объединением всех тех элементов G_n, для которых $\mathbf{C}G_n \subset G$[2]).

На класс σ-алгебр с замыканием, удовлетворяющих аксиоме (а), можно распространить некоторые, довольно неэлементарные разделы теоретико-множественной топологии, такие, как теория размерности[3]), теория функций Бэра[4]) и т. д. Этот класс является существенным обобщением класса всех метрических пространств. Например, если $\mathfrak{B}$ — алгебра с замыканием всех подмножеств сепарабельного метрического пространства, а Δ — σ-идеал в алгебре $\mathfrak{B}$, то операция замыкания в алгебре $\mathfrak{B}$ есте-

[1]) Сикорский [7].
[2]) Сикорский [7].
[3]) Гофман [1], Сикорский [16].
[4]) Сикорский [7].

ственным образом индуцирует операцию замыкания в алгебре $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}/\Delta$ [1]). Алгебра с замыканием $\mathfrak{A}$ удовлетворяет аксиоме (а), но если Δ — не главный идеал, то существенно отличается от топологических пространств.

Понятие алгебр с замыканием имеет важное применение в теории некоторых неклассических исчислений высказываний и предикатов в математической логике.

Рассмотрим сначала случай модального исчисления высказываний S4 *Льюиса*, которое в дальнейшем для краткости будет называться исчислением высказываний *Льюиса*. Это исчисление кроме обычных логических связок $\cup$, $\cap$, $\rightarrow$, $-$ содержит также одноместную связку **C**. Если α — формула, то формулу $\mathbf{C}\alpha$ следует читать так: возможно, что α (справедливо). Связка **C** обладает свойствами операции замыкания. Более точно, если мы образуем алгебру Линденбаума — Тарского $\mathfrak{A}$ для исчисления высказываний Льюиса описанным в § 40 методом, то мы получим булеву алгебру с замыканием, которое определяется формулой

$$\mathbf{C}|\alpha| = |\mathbf{C}\alpha|. \tag{1}$$

Таким образом, изучение исчислений высказываний Льюиса можно свести к изучению алгебр с замыканием. Конечно, алгебра Линденбаума — Тарского для исчисления высказываний Льюиса является свободной алгеброй с замыканием, причем свободными образующими являются элементы $|p|$ (где p — любая пропозициональная переменная). Такой метод исследования исчисления высказываний Льюиса является удобным аппаратом в этой области логики. Например, он позволяет легко доказывать разрешимость для исчислений высказываний Льюиса [2]).

Этот метод можно также применить и к исчислению предикатов Льюиса [3]).

Понятие алгебры с замыканием очень полезно при изучении интуиционистских исчислений и высказываний, и предикатов. В этом случае алгебры Линденбаума —

---

[1]) Сикорский [7].

[2]) Открытие и развитие этого метода принадлежит Маккинси и Тарскому. См. Маккинси [4], Маккинси и Тарский [1, 3]. См. также Дэвис [1].

[3]) Расёва [1], Расёва и Сикорский [3, 4, 5].

Тарского не являются булевыми алгебрами. Алгебры с операциями, соответствующими интуиционистским связкам (дизъюнкции $\cup$, конъюнкции $\cap$, импликации $\twoheadrightarrow$ и отрицанию $\neg$), являются дистрибутивными структурами специального типа. Однако каждая структура этого типа может быть представлена в виде алгебры всех открытых элементов некоторой алгебры с замыканием $\mathfrak{A}$ с тем же самым объединением и пересечением и со следующим определением операций $\twoheadrightarrow$, $\neg$, которое соответствует интуиционистским импликации $\twoheadrightarrow$ и отрицанию $\neg$:

$$A \twoheadrightarrow B = \mathbf{I}(-A \cup B) = \mathbf{I}(A \rightarrow B), \quad \neg A = \mathbf{I} - A.$$

Поэтому исследование интуиционистской логики можно свести к исследованию алгебр открытых элементов в алгебрах с замыканием. Таким образом, в этой области понятие алгебры с замыканием является адекватным и мощным инструментом. Например, теорема о разрешимости для интуиционистского исчисления высказываний легко может быть получена этим методом[1]).

Те же замечания, что и в случае интуиционистской логики, можно применить к позитивной логике.

Заметим, что в этом случае тоже можно ввести понятия полиадических алгебр Льюиса и интуиционистских алгебр.

В теории алгебр с замыканием элементы булевых алгебр играют роль, аналогичную подмножествам топологического пространства. Однако возможна и другая точка зрения; булеву алгебру $\mathfrak{A}$ можно интерпретировать как топологическое пространство, а элементы алгебры $\mathfrak{A}$ — как точки этого пространства. Топология, введенная

---

[1]) Открытие связи между интуиционистской логикой и структурами принадлежит Стоуну [9] и Тарскому [4]. Развитие упомянутого метода для интуиционистского исчисления высказываний принадлежит Маккинси [4]. См. также Маккинси и Тарский [2, 3], Риггер [1, 3]. Впервые этот метод применялся к проблеме интуиционистского исчисления высказываний Мостовским [3] и систематически развивался Расёвой [1, 3, 4], Расёвой и Сикорским [3, 4, 5, 8], Сикорским [22, 24, 26]. Об аналогичном исследовании интуиционистского исчисления высказываний и исчисления высказываний Льюиса с кванторами, см. Расёва и Сикорский [6].

Систематическое развитие булевых методов в математической логике является предметом монографии Расёвой и Сикорского [9].

в алгебре $\mathfrak{A}$, может быть, например, топологией (окрестностей или Фреше), определенной частичным булевым порядком $\subset$ или другим путем, связанным с булевыми операциями в $\mathfrak{A}$. Известны некоторые теоремы подобного рода[1]).

§ 42. Применения к теории меры

Пусть μ — мера на σ-поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X. В соответствии с обычной терминологией в теории меры множества из поля $\mathfrak{F}$ будут называться *измеримыми*. Пусть далее Δ есть σ-идеал множеств меры нуль.

Два множества A, $B \in \mathfrak{F}$, отличающихся на множество меры нуль [т. е. такие, что $(A-B) \cup (B-A) \in \Delta$], с точки зрения теории меры обладают одинаковыми свойствами и на практике отождествляются друг с другом. Таким образом, в действительности мы рассматриваем булеву алгебру

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{F}/\Delta \tag{1}$$

и σ-меру $\bar{\mu}$, определенную на алгебре $\mathfrak{A}$ равенством

$$\bar{\mu}([B]_\Delta) = \mu(B) \quad (B \in \mathfrak{F}). \tag{2}$$

Так определенная мера $\bar{\mu}$ является строго положительной, т. е. она равна нулю только на нулевом элементе. Булеву σ-алгебру со строго положительной σ-мерой будем называть *алгеброй с мерой*. Алгебру (1), снабженную мерой (2), мы будем называть *алгеброй с мерой, соответствующей мере* μ.

Основное понятие в теории меры есть понятие σ-меры на σ-поле множеств. Изложенная выше точка зрения приводит к более общему определению σ-меры на булевой σ-алгебре. Такое расширенное определение и имелось

---

[1]) См., например, Амемия и Мори [1], Антоновский, Болтянский и Сарымсаков [1], Флойд [1], Новак и Новотный [1], Вард [1]. См. также матричные пространства мер, рассмотренные в § 42.

О применениях булевых понятий к топологии см. у Стоуна [6], Спекера [1].

Недавно Тарским [9] для структур была доказана теорема, аналогичная топологическим теоремам о неподвижной точке. См. также Дэвис [1], Волк [1].

в виду в этой книге[1]) (см. пример Н § 20). Теорию σ-мер на булевых σ-алгебрах можно без существенных изменений развивать как теорию σ-мер на σ-полях множеств. Расширенное понятие σ-меры на булевой σ-алгебре $\mathfrak{A}$ является несущественным обобщением понятия σ-меры на σ-поле множеств. В самом деле, из основной теоремы 29.1 о представлении для булевых σ-алгебр следует, что алгебру $\mathfrak{A}$ можно представить в виде (1), где $\mathfrak{F}$ есть σ-поле множеств, а Δ — σ-идеал поля $\mathfrak{F}$. Если $\bar{\mu}$ является σ-мерой на алгебре $\mathfrak{A}$, то равенство (2) определяет σ-меру μ на поле $\mathfrak{F}$, и изучение меры $\bar{\mu}$ можно свести к изучению меры μ.

Однако в некоторых вопросах теории меры возможность пренебрегать множествами меры нуль и переход к соответствующей строго положительной σ-мере оказывается более удобным и адекватным. Здесь введение понятия булевых алгебр является существенным, поскольку ни одна σ-мера на σ-поле множеств не является строго положительной, за исключением нескольких тривиальных случаев.

Применением такой процедуры является построение метрического пространства измеримых множеств. Под метрическим пространством, соответствующим σ-мере μ, заданной на σ-поле $\mathfrak{F}$, мы понимаем алгебру с мерой $\mathfrak{A}$, определяемую равенством (1), где расстояние вводится по формуле

$$(3) \qquad \rho(A, B) = \bar{\mu}(A - B) + \bar{\mu}(B - A) \text{ для } A, B \in \mathfrak{A}.$$

Можно доказать, что это метрическое пространство является полным[2]). Иногда мы рассматриваем только подпространства всех элементов конечной меры. Это под-

[1]) Многие авторы рассматривают меры и σ-меры на булевых алгебрах. См., например, Ауман [3], Бауэр [1, 2], Каратеодори [1, 2, 3, 4], Дубинс [1], Хаупт и Паус [1, 2, 3, 4], Хейдер [2], Хьюит [1], Ходжес и Хорн [1], Хорн и Тарский [1], Каппос [2, 3, 4, 5], Кавада [1], Келли [2], Крикберг [1, 2, 3, 4], Колмогоров [2], Макки [1], Махарам [1, 2, 3, 4, 5], Марчевский [4], Марчевский и Сикорский [3], Мибу [1], Никодим [2, 3, 4, 5, 7], Новак и Новотный [1], Огасавара [1], Олмстед [1], Ониценку [1], Паук [1, 4], Петтис [1], Риддер [1, 3], Ривкинд [1], Сегал [1], Томита [1], Винокуров [1], Владимиров [1], Веккен [1].

[2]) См., например, Никодим [1].

пространство является замкнутым подмножеством всего пространства и поэтому тоже полно. Полнота метрического пространства $\mathfrak{A}$ и его подпространства элементов конечной меры позволяет ввести в теорию меры топологические методы, основанные на теореме Бэра для множеств первой категории (так называемый *категорный метод*). В качестве примера мы упомянем здесь некоторые доказательства теоремы Хана — Витали [1]).

Другое применение этой процедуры дает понятие изоморфизма σ-мер. Это понятие можно ввести различными способами. Например, две σ-меры μ_1 и μ_2 (на полях $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ подмножеств пространств X_1 и X_2 соответственно) называются изоморфными, если существует изоморфизм h поля $\mathfrak{F}_1$ на поле $\mathfrak{F}_2$, сохраняющий меру, т. е. такой булев изоморфизм, что

$$\mu_2(h(A)) = \mu_1(A)$$

для каждого $A \in \mathfrak{F}_1$. Другое определение таково: меры μ_1 и μ_2 называются изоморфными, если существуют такие множества $X_{1,0} \in \mathfrak{F}_1$ и $X_{2,0} \in \mathfrak{F}_2$, что $\mu_1(X_{1,0}) = 0 = \mu_2(X_{2,0})$ и существует сохраняющий меру изоморфизм поля $\mathfrak{F}_1 | X_1 - X_{1,0}$ на поле $\mathfrak{F}_2 | X_2 - X_{2,0}$. Однако эти определения недостаточно удобны, потому что с помощью несущественного прибавления класса множеств меры нуль мы можем нарушить существующий изоморфизм (например, лебегова мера на всех борелевских множествах и лебегова мера на всех измеримых по Лебегу множествах не изоморфны в смысле двух приведенных выше определений). В обоих определениях слишком большую роль играют структурные свойства полей $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$.

Следующее определение обходит эти трудности. Говорят, что σ-меры μ_1 и μ_2 *изоморфны*, если существует сохраняющий меру изоморфизм между их алгебрами с мерой [см. (1) и (2)]. Это определение позволяет дать полную классификацию изоморфных типов для конечных σ-мер [2]).

Преимущество рассмотрения σ-меры на булевых σ-алгебрах состоит в возможности перехода к соответ-

---

[1]) Предложенные Саксом [1].

[2]) Махарам [1]. См. также Зинк [1].

ствующим алгебрам с мерой. Возникает проблема, какие булевы алгебры являются алгебрами с мерой (с точностью до изоморфизмов), соответствующими некоторой конечной мере. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра с мерой, соответствующая конечной σ-мере, то $\mathfrak{A}$ является полной булевой алгеброй (см. пример Г § 21). Однако полнота не является достаточным условием, потому что существуют полные булевы алгебры, на которых все σ-меры тождественно равны нулю (см. пример Е § 21). Необходимое и достаточное условие существования конечной строго положительной σ-меры будет рассмотрено в конце этого параграфа.

Важным вспомогательным понятием в теории меры является понятие меры, определенное в примере В § 3. Как известно, не каждая мера μ, определенная на данном поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X, продолжается до σ-меры μ' на σ-поле $\mathfrak{F}'$, σ-порожденном полем $\mathfrak{F}$. Следующее условие является необходимым и достаточным для существования такого продолжения:

(c) если $\{A_n\}$ — произвольная последовательность непересекающихся множеств поля $\mathfrak{F}$ и если теоретико-множественное объединение $\bigcup\limits_{1 \leqslant n < \infty} A_n$ принадлежит полю $\mathfrak{F}$, то $\mu\left(\bigcup\limits_{1 \leqslant n < \infty} A_n\right) = \sum\limits_{1 \leqslant n < \infty} \mu(A_n)$.

Это условие не всегда выполняется. Булевы методы показывают, что причина этой трудности, грубо говоря, заключается в том, что рассматриваемое пространство X может иметь слишком мало точек. Если поле $\mathfrak{F}$ совершенно, то каждую меру поля $\mathfrak{F}$ можно продолжить до σ-меры. В самом деле, объединение любой последовательности непересекающихся непустых множеств в совершенном поле $\mathfrak{F}$ никогда не принадлежит полю $\mathfrak{F}$ (см. пример К § 7), что влечет выполнение условия (c). С другой стороны, каждое поле множеств изоморфно некоторому совершенному полю множеств (см. теорему 8.2) и, конечно, этот изоморфизм можно реализовать прибавлением некоторого числа точек к пространству X (см. пример Ж § 8).

Таким образом, заменяя рассматриваемое поле $\mathfrak{F}$ на изоморфное ему совершенное поле, мы получаем, что каждая мера μ имеет естественное продолжение μ', являющееся σ-мерой. Изоморфный тип меры μ' одно-

значно определяется мерой μ и может быть получен другим способом без перехода к изоморфному совершенному полю при условии, что мера μ конечна. В самом деле, пусть Δ — идеал всех множеств, мера μ которых равна нулю. Тогда формула (2) определяет строго положительную меру $\bar{\mu}$ на алгебре $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}/\Delta$. Так же, как и в случае σ-мер, алгебру $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как метрическое пространство. Это пространство, вообще говоря, неполное. Согласно известному методу пополнения метрических пространств, мы можем определить такое полное пространство $\mathfrak{A}'$, что пространство $\mathfrak{A}$ плотно в пространстве $\mathfrak{A}'$. Мера $\bar{\mu}$ удовлетворяет условию

$$|\bar{\mu}(A)-\bar{\mu}(B)|\leqslant\rho(A,\ B).$$

Поэтому ее можно продолжить до вещественной непрерывной функции $\bar{\mu}'$ на пространстве $\mathfrak{A}'$. Можно доказать, что булевы операции в алгебре $\mathfrak{A}$ можно продолжить на пространство $\mathfrak{A}'$, причем $\mathfrak{A}'$ станет булевой σ-алгеброй. Мера $\bar{\mu}'$ является строго положительной σ-мерой на алгебре $\mathfrak{A}'$ и изоморфна определенному ранее продолжению μ' меры μ.

Возникает следующий вопрос: при каких условиях на данной алгебре $\mathfrak{A}$ существует строго положительная конечная мера[1])? Конечно, необходимым условием является σ-цепное условие. Однако оно не является достаточным. Существует булева алгебра $\mathfrak{A}$, не имеющая строго положительных мер, которая является объединением счетной последовательности таких множеств, что n-е множество содержит не более чем n непересекающихся элементов[2]). Из последнего свойства вытекает σ-цепное условие.

---

[1]) Подробное исследование этого вопроса см. у Хорна и Тарского [1]. Положительный ответ для сепарабельных булевых алгебр дан Марчевским. См. Тарский [14], сноску [16]) и Хорн и Тарский [1]. Ответ отрицателен для алгебры всех подмножеств счетного множества по модулю идеала конечных множеств. Это следует, например, из теоремы Серпинского (см. Хорн и Тарский [1]). Проблема существования строго положительной меры тесно связана с так называемой гипотезой Суслина. См. Хорн и Тарский [1], Келли [2], Махарам [2].

[2]) Этот результат принадлежит Гейфману [1, 2].

Чтобы сформулировать необходимое и достаточное условие, введем следующее определение. Для каждой конечной последовательности $\mathfrak{f}=\{A_1, \ldots, A_n\}$, элементов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ положим $i(\mathfrak{f})=m/n$, где m — наибольшее целое число, обладающее тем свойством, что существует последовательность $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$, для которой $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_m} \neq \wedge$. Для каждого множества $\mathfrak{S}$ элементов алгебры $\mathfrak{A}$ под *числом пересечения множества* $\mathfrak{S}$ понимается точная нижняя грань чисел $i(\mathfrak{f})$, где $\mathfrak{f}$ — любая последовательность элементов из $\mathfrak{S}$ (допускаются последовательности с повторениями).

Следующее условие является необходимым и достаточным для существования конечной строго положительной меры на булевой алгебре $\mathfrak{A}$:

(k) множество $\mathfrak{A}-(\wedge)$ является объединением счетной последовательности множеств, каждое из которых имеет положительное число пересечения [1]).

Для того чтобы существовала конечная строго положительная σ-мера на полной булевой алгебре $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была слабо σ-дистрибутивной (см. пример А § 30) и выполнялось условие (k) [2]).

Можно дать другое необходимое и достаточное условие существования конечной строго положительной σ-меры на булевой σ-алгебре $\mathfrak{A}$:

(k′) множество $\mathfrak{A}-(\wedge)$ является объединением счетной последовательности множеств $\{\mathfrak{S}_m\}$, каждое из которых имеет положительное число пересечения и обладает следующим свойством: если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{1 \leqslant i < \infty} A_i \in \mathfrak{S}_m$, то существует такое целое число n, что $A_n \in \mathfrak{S}_m$ [3]).

Заметим, что на каждой булевой алгебре существует строго положительная мера, значение которой принадлежит некоторому неархимедову упорядоченному алгебраическому полю [4]).

[1]) Условие (k) и вся теорема принадлежат Келли [2].

[2]) Эта теорема принадлежит Келли [2] (другое доказательство этой теоремы дано С. Рыль-Нардзевским). Другое более сложное необходимое и достаточное условие дано Махарам [2]. Ходжес и Хорн [1] упростили условие Махарам.

[3]) Эта модификация теоремы Келли предложена Рыль-Нардзевским (не опубликовано).

[4]) Никодим [7, 8]. См. также Люксембург [1, 2].

§ 43. Измеримые функции и вещественные гомоморфизмы

Пусть $\mathfrak{F}$ есть σ-поле подмножеств пространства X. Напомним, что вещественная функция φ (принимающая, возможно, значения $\pm\infty$), определенная на пространстве X, называется *$\mathfrak{F}$-измеримой*, или, кратко, *измеримой*, если для каждого вещественного числа a множество всех $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $\varphi(x) < a$, принадлежит полю $\mathfrak{F}$. В некоторых исследованиях необходимо отождествлять измеримые функции по модулю некоторого σ-идеала Δ поля $\mathfrak{F}$. Более точно, мы отождествляем две измеримые функции φ_1 и φ_2 тогда и только тогда, когда множество всех таких $x \in X$, что $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, принадлежит идеалу Δ. Мы говорим тогда, что функции φ_1 и φ_2 являются *Δ-эквивалентными*, или просто *эквивалентными*. Эта процедура производится, например, в теории меры и интегрирования, причем Δ является σ-идеалом множеств меры нуль.

Вместо рассмотрения абстрактных классов Δ-эквивалентностей мы можем выполнить отождествление следующим образом.

Пусть $\mathfrak{B}$ обозначает σ-поле всех борелевских множеств вещественных чисел (включая $\pm\infty$). Каждый σ-гомоморфизм h поля $\mathfrak{B}$ в любую булеву алгебру $\mathfrak{A}$ мы будем называть *вещественным гомоморфизмом* на алгебру $\mathfrak{A}$. Говорят, что гомоморфизм h *конечен*, если $h((\infty)) = \wedge = h((-\infty))$. Он называется *ограниченным*, если существует такой конечный интервал B, что $h(B) = \vee$. По теореме 29.1 мы всегда можем представить алгебру $\mathfrak{A}$ как факторалгебру некоторого σ-поля по σ-идеалу. Тогда по теореме 32.5 гомоморфизм h индуцируется некоторой вещественной функцией φ. Легко проверить, что h является конечным (ограниченным) тогда и только тогда, когда гомоморфизм h индуцируется конечной (ограниченной) функцией φ.

Пусть $\mathfrak{F}$ и Δ имеют тот же смысл, что и выше. Каждая $\mathfrak{F}$-измеримая функция индуцирует вещественный гомоморфизм в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$. Две $\mathfrak{F}$-измеримые функции индуцируют один и тот же вещественный гомоморфизм в том и только том случае, когда эти функции Δ-эквивалентны. Обратно, каждый вещественный гомоморфизм h

в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$ индуцируется некоторой $\mathfrak{F}$-измеримой функцией и каждая функция, индуцируемая h, является $\mathfrak{F}$-измеримой.

Следовательно, вместо $\mathfrak{F}$-измеримых функций по модулю σ-идеала Δ мы можем рассматривать вещественные гомоморфизмы в алгебру $\mathfrak{F}/\Delta$. Эти понятия имеют одно и то же математическое содержание. Вещественные гомоморфизмы являются булевым аналогом теоретико-множественного понятия измеримых вещественных функций.

Обычные операции над измеримыми функциями можно производить и над вещественными гомоморфизмами в любую булеву σ-алгебру $\mathfrak{A}$.

Например, если h, h_1, h_2 — конечные вещественные гомоморфизмы в алгебру $\mathfrak{A}$, а c — конечное вещественное число, то легко определить ch, h_1+h_2, h_1-h_2, $h_1\cdot h_2$ так, чтобы они были булевыми аналогами соответствующих операций для измеримых функций. В самом деле, мы можем считать, что (см. теорему 29.1) $\mathfrak{A}=\mathfrak{F}/\Delta$, где $\mathfrak{F}$ и Δ удовлетворяют упомянутым выше условиям. Мы можем также считать (см. теорему 32.5), что h, h_1 и h_2 индуцируются конечными измеримыми функциями φ, φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда по определению ch, h_1+h_2, h_1-h_2, $h_1\cdot h_2$ являются вещественными гомоморфизмами (в алгебру $\mathfrak{A}$), индуцированными измеримыми функциями $c\varphi$, $\varphi_1+\varphi_2$, $\varphi_1-\varphi_2$, $\varphi_1\cdot\varphi_2$ соответственно. Легко проверить, что так определенные вещественные гомоморфизмы не зависят от представления алгебры $\mathfrak{A}$ в виде $\mathfrak{F}/\Delta$ и от выбора индуцирующих функций φ, φ_1, φ_2. Подобным же образом мы можем определить отношение h_1/h_2, если $h_2((0))=\wedge$.

Мы пишем, что $h_1\leqslant h_2$, если существуют такие функции φ_1, φ_2, индуцирующие h_1 и h_2, что $\varphi_1\leqslant\varphi_2$.

Говорят, что последовательность $\{h_n\}$ вещественных гомоморфизмов в алгебру $\mathfrak{A}$ *сходится (равномерно сходится)* к вещественному гомоморфизму h (в алгебру $\mathfrak{A}$), если существуют такие функции φ, φ_n, индуцирующие h и h_n $(n=1, 2, \ldots)$ соответственно, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится (равномерно сходится) к функции φ.

Определение указанных выше операций над вещественными гомоморфизмами можно также сформулировать, не

используя индуцирующие функции. Мы можем, например, использовать тот факт, что каждый вещественный гомоморфизм однозначно определяется своими значениями на бесконечных интервалах B_a: $-\infty \leqslant x < a$. Тогда сумма $h_1 + h_2$ — это такой вещественный гомоморфизм h, что

$$h(B_a) = \bigcup_{w \in W} (h_1(B_w) \cap h_2(B_{a-w}))$$

для каждого вещественного числа a,

где W обозначает множество всех рациональных чисел. Подобным же образом можно сформулировать и определения других операций. Однако доказательство эквивалентности этих определений исходным будет более сложным.

После того как основные операции над вещественными гомоморфизмами построены, мы можем с ними оперировать так же, как и с измеримыми функциями, не испытывая никаких трудностей[1]).

Мы также можем построить некоторые более сложные операции над вещественными гомоморфизмами. Например, допустим, что $\bar{\mu}$ есть σ-мера на алгебре $\mathfrak{A}$, а h — вещественный гомоморфизм в алгебру $\mathfrak{A}$. Тогда интеграл $\int h d\bar{\mu}$ можно определить формулой

$$\int h d\bar{\mu} = \int \varphi d\mu$$

(при условии, что интеграл в правой части равенства существует), где φ — функция, индуцирующая гомоморфизм h, а μ — мера (на поле $\mathfrak{F}$), определяемая мерой $\bar{\mu}$ [см. соотношения (1) и (2) из § 42][2]).

---

[1]) О других определениях булевых аналогов поточечных отображений см. Бернштейн [1], Каратеодори [1,4], Гётц [1], Каппос [1], Никодим [3], Олмстед [1], Поспишил [1, 2, 4], Риддер [1], Веккен [1].

[2]) Сикорский [9]. О других определениях, основанных на других обобщениях точечных функций, см. Бишоф [1], Каратеодори [1, 2, 4], Форадори [1], Каппос [2], Олмстед [1], Риддер [1], Веккен [1].

§ 44. Измеримые функции. Редукция к непрерывным функциям.

Другую модель для пространства всех измеримых функций по модулю некоторого σ-идеала можно получить следующим образом.

Так же как и в § 43, пусть $\mathfrak{F}$ будет σ-полем подмножеств пространства X, а Δ—σ-идеалом поля $\mathfrak{F}$. Пусть X'—пространство Стоуна факторалгебры $\mathfrak{F}/\Delta$, а h_0—фиксированный изоморфизм алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ на поле всех открыто-замкнутых подмножеств пространства X'.

Для каждой $\mathfrak{F}$-измеримой функции φ на пространстве X пусть φ' обозначает функцию на пространстве X', однозначно определяемую следующим условием:

$$\varphi'^{-1}(B_a) = \bigcup_{b<a} h_0(\varphi^{-1}(B_b))$$

для каждого вещественного числа a,

где B_a—бесконечный интервал, введенный в конце § 43. Другими словами,

$$\varphi'(x') = \sup_{x' \in h_0(\varphi^{-1}(B_a))} a \text{ для каждого } x' \in X'.$$

Функция φ' всегда является непрерывной (она может принимать бесконечные значения). Каноническое преобразование, отображающее функцию φ на функцию φ', является взаимно однозначным, если мы отождествляем Δ-эквивалентные функции. Более точно, $\varphi_1' = \varphi_2'$ тогда и только тогда, когда функции φ_1 и φ_2 являются Δ-эквивалентными.

Каноническое преобразование сохраняет естественный частичный порядок функций и алгебраические операции. Более точно, $\varphi_1'(x') \leqslant \varphi_2'(x')$ для каждого $x' \in X'$ в том и только том случае, когда $\varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x)$ для каждого $x \in X$, за исключением некоторого множества из идеала Δ. Если φ—конечная функция, то $\varphi'(x')$ конечно для всех $x' \in X'$, за исключением нигде не плотного множества, где функция φ' принимает бесконечное значение. Если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ и φ_1, φ_2 конечны, то $\varphi'(x') = \varphi_1'(x') + \varphi_2'(x')$ для всех $x' \in X'$, за исключением нигде не плотного множества, на котором сложение в правой

части не имеет смысла. Аналогичные утверждения имеют место для разности и т. п.

Таким образом, пространство всех $\mathfrak{F}$-измеримых функций по модулю идеала Δ можно отождествить с пространством всех непрерывных функций (включая и функции, принимающие бесконечные значения) на пространстве Стоуна X' алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$.

Такое представление играет особую роль для ограниченных измеримых функций φ[1]). В этом случае класс всех соответствующих функций φ' совпадает с классом всех конечных непрерывных функций на пространстве X'. Более того,

$$\sup_{x' \in X'} \varphi'(x') = \inf_{A \in \Delta} \sup_{x \in X - A} \varphi(x), \tag{1}$$

$$\inf_{x' \in X'} \varphi'(x') = \sup_{A \in \Delta} \inf_{x \in X - A} \varphi(x). \tag{2}$$

Заметим, что каноническое преобразование сохраняет равномерную сходимость. Аналогичное утверждение для поточечной сходимости, вообще говоря, несправедливо.

§ 45. Применения к функциональному анализу

Пусть μ есть σ-конечная σ-мера на σ-поле $\mathfrak{F}$ подмножеств пространства X, а Δ есть σ-идеал всех множеств, мера μ которых равна нулю. Рассмотрим банахово пространство $\boldsymbol{L}$ (с обычной нормой) всех интегрируемых функций (отождествленных по модулю идеала Δ) на пространстве X. Известно, что пространство, сопряженное к $\boldsymbol{L}$ (т. е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\boldsymbol{L}$), совпадает с пространством $\boldsymbol{M}$ (с обычной нормой, которая задается правой частью равенства (1) § 44, где φ следует заменить на его абсолютное значение) всех ограниченных $\mathfrak{F}$-измеримых функций (отождествленных по модулю идеала Δ) на пространстве X. Учебники по функциональному анализу часто не останавливаются на описании пространства, сопряженного к пространству $\boldsymbol{M}$. Это легко сделать, используя

---

[1]) Применения, см., например, у Дьедоне [1], Семадени [2, 3, 7], см. также § 45.

булевы исследования § 44. В самом деле, M можно рассматривать, как пространство всех конечных непрерывных функций (с обычной нормой) на пространстве Стоуна X' алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$ [см. соотношение (1) из § 44]. Согласно основной теореме функционального анализа[1]), пространство, сопряженное к пространству всех конечных непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X', совпадает с множеством всех конечных (не обязательно неотрицательных) σ-мер на σ-поле всех бэровских подмножеств пространства X'. Таким образом, пространство, сопряженное к M, совпадает с пространством всех σ-мер (не обязательно неотрицательных) (с обычной нормой) на σ-поле, порожденном всеми открыто-замкнутыми подмножествами пространства Стоуна алгебры $\mathfrak{F}/\Delta$.

Иногда булевы понятия появляются и в других разделах функционального анализа. Мы упомянем здесь, например, проблему, удовлетворяет ли данное пространство Банаха E' следующему условию:

(р) для каждого банахова пространства E каждый непрерывный линейный оператор из пространства $E_0 \subset E$ в пространство E' можно продолжить до непрерывного линейного оператора из пространства E в пространство E' с той же нормой.

Решение дается следующей теоремой: пространство E' обладает свойством (р) тогда и только тогда, когда E' изометрично пространству всех конечных непрерывных функций на некотором экстремально несвязном компактном топологическом пространстве, т. е. пространству всех ограниченных вещественных гомоморфизмов в некоторую полную алгебру[2]).

Понятие полных булевых алгебр существенным образом присутствует также в теории частично упорядоченных линейных пространств[3]). В частности, экстремально несвязные пространства появляются в проблеме, связанной с полнотой структуры пространства непрерывных функ-

---

[1]) Какутани [3].

[2]) См. Келли [1]. Ранее частичные решения были предложены Гуднером [1], Начбином [3].

[3]) См. Канторович, Вулих и Пинскер [1].

ций[1]). Пространства Стоуна появляются также в доказательстве основной теоремы о представлении для абстрактных (L)-пространств[2]).

§ 46. Применения к основаниям теории вероятностей

Основными понятиями в теории вероятностей являются *событие*, *вероятность события* и *случайная величина*.

Как мы уже отмечали в примере В § 1, всегда предполагается, что множество всех событий образует булеву алгебру $\mathfrak{A}_0$. Вероятность есть *нормированная* мера μ_0 на алгебре $\mathfrak{A}_0$, т. е. мера, принимающая значение единица на единичном элементе алгебры $\mathfrak{A}_0$. Согласно теореме 8.2, мы всегда можем считать, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ является полем множеств. Таким образом, исследование событий и их вероятностей можно свести к изучению нормированной меры на поле множеств. Однако по чисто техническим причинам более удобно сводить изучение к случаю σ-мер на σ-полях, поскольку σ-аддитивность имеет важные математические следствия. Такое сведéние также можно реализовать. Например, по теореме 8.2 мы можем считать, что алгебра $\mathfrak{A}_0$ является совершенным приведенным полем подмножеств всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Стоуна X. Тогда меру μ_0 можно однозначно продолжить до некоторой σ-меры μ на σ-поле $\mathfrak{A}$, порожденном алгеброй $\mathfrak{A}_0$ (см. § 42). Заметим, что точки пространства X имеют простую вероятностную интерпретацию. В самом деле, с интуитивной точки зрения событие есть нечто, что может наблюдаться или нет; это можно проверить, например, с помощью надлежащего испытания. Допустим, что такое испытание было проведено. Тогда класс всех событий, которые наблюдались в этом испытании, является максимальным фильтром в алгебре $\mathfrak{A}_0$, т. е. точкой пространства X (см. замечание на стр. 37). Таким образом, точки в пространстве X

[1]) См. Накано [1], Дилиорс [3], Стоун [13].

[2]) См. Какутани [2]. О других применениях к функциональному анализу см. также Амемия и Мори [1], Фогель [1], Маеда [2], Махарам [9], Маккарти [1].

Отметим также, что теорему Стоуна о представлении для булевых алгебр можно получить как следствие теоремы Какутани [3] о представлении для абстрактных M-пространств.

можно интерпретировать как все теоретически возможные результаты испытаний[1]).

Согласно изложенным выше рассуждениям, наперед заданное множество $\mathfrak{A}_0$ событий можно всегда расширить до некоторого σ-поля $\mathfrak{A}$, элементы которого (т. е. множества $A \in \mathfrak{A}$) можно тоже интерпретировать как события. Функция вероятностей μ_0 на алгебре $\mathfrak{A}_0$ может быть продолжена до функции вероятностей μ на алгебре $\mathfrak{A}$, причем μ будет σ-мерой. Поэтому изучение можно свести к случаю нормированных σ-мер на полях множеств.

Согласно устаревшему неточному определению, „случайная величина" — это такая величина ξ, что для каждого вещественного числа a определена вероятность события $\xi < a$. Таким образом, выражение $\xi < a$ следует интерпретировать как событие, т. е. множество $A_a \in \mathfrak{A}$. Естественно считать, что событие $\xi < a$ является объединением всех событий $\xi < b$, где $b < a$. Таким образом, $\{A_a\}$ является индексированным множеством множеств из алгебры $\mathfrak{A}$, причем

(1) $A_a = \bigcup\limits_{b<a} A_b$ для каждого вещественного числа a.

С другой стороны, для каждого индексированного множества множеств $A_a \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющих условию (1), существует точно одна вещественная $\mathfrak{A}$-измеримая функция φ на пространстве X, обладающая свойством:

(2) A_0 есть множество всех таких $x \in X$, что $\varphi(x) < a$.

Обратно, если φ — $\mathfrak{A}$-измеримая функция на пространстве X, то условие (2) определяет такое индексированное множество $\{A_a\}$ множеств алгебры $\mathfrak{A}$, что справедливо условие (1). Значит, случайные величины совпадают с $\mathfrak{A}$-измеримыми функциями на пространстве X. Так мы очень естественным образом получаем известную теоретико-множественную модель для теории вероятностей[2]).

Возникает вопрос, может быть лучше или естественнее изучать более общие нормированные σ-меры на булевых

---

[1]) Эта интерпретация принадлежит Лосю [2, 4]. Указанные работы содержат исчерпывающий обзор проблем, обсуждаемых в § 46.

[2]) Предложенную Колмогоровым [1].

σ-алгебрах вместо σ-полей множеств[1]). Тогда случайные величины следует интерпретировать как вещественные гомоморфизмы в соответствии с § 43. Такое обобщение в самом деле возможно. В частности, понятие булева σ-произведения (см. § 38) дает математическое основание для исследования независимости событий, которое в теоретико-множественной модели основано на образовании произведения σ-мер в декартовом произведении. Однако, с другой стороны, основная теорема 29.1 о представлении для булевых σ-алгебр показывает, что такое обобщение является несущественным, и описанным в § 42 и 43 методом булеву модель для теории вероятностей можно всегда заменить на теоретико-множественную модель.

§ 47. Проблемы эффективности

Как читатель уже заметил, основная теорема 8.2 о представлении является основной теоремой для всей теории булевых алгебр. Эта теорема получена как следствие теоремы 6.1 о существовании максимальных идеалов и фильтров. Доказательство теоремы 6.1 не эффективно, поскольку оно основано на следующем принципе:

(a_1) каждое множество можно вполне упорядочить,

который, как это хорошо известно, эквивалентен аксиоме выбора, приведенной ниже в самом общем виде.

(a_2) для каждого индексированного множества $\{A_t\}_{t \in T}$ непустых множеств существует такое индексированное множество $\{a_t\}_{t \in T}$, что $a_t \in A_t$ для каждого $t \in T$.

Возникает проблема, можно ли доказать основную теорему 8.2 о представлении эффективным образом, т. е. не используя аксиом выбора. Некоторые приводимые ниже результаты показывают, что ответ, по-видимому, отрицателен.

---

[1]) Такое отношение к вероятности поддерживалось Халмошем [2], Колмогоровым [2], Сегалом [1]. Она позволяет рассматривать вероятность как строго положительную меру и избегать трудностей, связанных с существованием непустых измеримых множеств меры нуль, которые не имеют вероятностной интерпретации. О применениях булевых понятий к теории вероятностей см. Дубинс [1], Крикберг [2, 3], Сегал [1], Теодореску [1]. О других подходах к основаниям теории вероятностей см. у Лося [6].

Легко проверить, что следующие утверждения для булевых алгебр эффективно эквивалентны (т. е. каждое из них можно вывести из другого, не используя аксиомы выбора):

($б_1$) каждый собственный идеал (фильтр) можно расширить до максимального идеала (фильтра);

($б_2$) каждая невырожденная булева алгебра имеет по крайней мере один максимальный идеал (фильтр);

($б_3$) каждую двузначную меру на подалгебре можно продолжить до двузначной меры на всей булевой алгебре;

($б_4$) каждая булева алгебра изоморфна некоторому полю множеств;

($б_5$) каждая булева алгебра изоморфна полю открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного компактного пространства;

($б_6$) каждый собственный идеал (фильтр) является пересечением некоторого класса максимальных идеалов (фильтров).

Можно доказать, что каждое из утверждений ($б_1$)—($б_6$) эффективно эквивалентно каждому из следующих утверждений:

($б_7$) каждая конечная мера m_0 на подалгебре может быть продолжена до некоторой меры m на всей булевой алгебре, причем множество всех значений меры m содержится в замыкании множества всех значений меры m_0;

($б_8$) декартово произведение любого числа непустых компактных хаусдорфовых пространств является непустым компактным пространством.

Из каждого из утверждений ($б_1$)—($б_8$) эффективно вытекает следующее утверждение:

(в) каждый частичный порядок можно продолжить до линейного порядка.

Очевидно, что из (в) эффективно вытекает принцип упорядочения, т. е. утверждение

(г) каждое множество можно линейно упорядочить,

и что из (г) эффективно вытекает аксиома выбора для конечных множеств, т. е. утверждение

(д) для каждого индексированного множества $\{A_t\}_{t\in T}$ непустых конечных множеств существует такое индексированное множество $\{a_t\}_{t\in T}$, что $a_t \in A_t$ для всех $t \in T$.

Таким образом, мы имеем эффективные импликации

$$(а) \to (б) \to (в) \to (г) \to (д),$$

где (а) и (б) обозначают соответственно одно из утверждений $(а_1)$—$(а_2)$ или $(б_1)$—$(б_8)$ [1]). Импликацию (а) → (б) нельзя заменить эффективной эквивалентностью [2]). Однако утверждение $(б_1)$, сформулированное для произвольных структур, эффективно эквивалентно аксиоме выбора [3]). Импликацию (г) → (д) нельзя заменить на эффективную эквивалентность [4]).

Поле $\mathfrak{F}$ всех подмножеств счетного множества X является одной из простейших булевых алгебр. Из (б) следует, что существует двузначная мера, определенная на поле $\mathfrak{F}$ и равная нулю на всех конечных подмножествах пространства X. Однако мы не знаем никакого эффективного доказательства этого утверждения, и возможность отыскать доказательство при современном состоянии математического знания является сомнительной, ибо существование требуемой меры влечет за собой эффективное существование неизмеримого множества вещественных чисел. В самом деле, допустим, что X — множество всех положительных целых чисел, а m — двузначная мера на всех подмножествах множества X и $m(A)=0$ для каждого конечного подмножества $A \subset X$. Любое вещественное

---

[1]) Все упомянутые результаты принадлежат Лосю и Рыль-Нардзевскому [1]. Некоторые из этих результатов, а также многие другие эффективные эквивалентности и импликации были одновременно анонсированы Хенкином [5], Рубином и Скоттом [1], Скоттом [2], Тарским [15], [16, 17]. Импликация (б)—(д) была ранее замечена А. Дэвисом.

[2]) Этот результат недавно получил Халперн [1, 2, 3]. Ранее Мостовский доказал, что (г) не вытекает эффективно из (а). См. также Спеккер [2]. Все доказательства неэквивалентности относятся к системе аксиом Цермело — Френкеля теории множеств, которая не исключает существования объектов, не являющихся множествами, и не содержит аксиомы регулярности.

[3]) Этот результат анонсирован Скоттом [2]. См. также Мрувка [1, 2]. Работы Мрувки содержат также другие аналогичные утверждения (для дистрибутивных структур), эквивалентные аксиоме выбора.

[4]) Лейхли [1].

число можно однозначно представить в виде

$$x = k + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n_j},$$

где k — целое число, а $\{n_j\}$ — бесконечная возрастающая последовательность положительных целых чисел. Пусть A_x обозначает множество всех целых чисел n_j. Тогда множество B всех таких x, что $m(A_x) = 1$, неизмеримо (в смысле Лебега)[1]).

Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов, которая является одной из наиболее важных теорем в функциональном анализе, доказывается в каждом учебнике с помощью трансфинитной индукции или другого эквивалентного аксиоме выбора утверждения. Интересно отметить, что из утверждения (б) эффективно вытекает теорема Хана — Банаха[2]).

Отметим, что из аксиомы выбора (а) вытекает теорема 33.1 о продолжении гомоморфизмов, а из этой теоремы эффективно вытекает утверждение (б) (см. замечание на стр. 230). Не известно, можно ли какую-нибудь из этих импликаций заменить на эффективную эквивалентность[3]).

---

[1]) Серпинский [1]. См. также Марчевский [13].

[2]) Этот результат принадлежит Лосю и Рыль-Нардзевскому [1, 2]. Другое доказательство было предложено Люксембургом [1, 2], который также доказал, что из утверждения (б) эффективно вытекает теорема Никодима о существовании строго положительных мер со значениями в неархимедовых упорядоченных алгебраических полях (см. стр. 327). Результаты Люксембурга используются в построении произведений моделей для математических теорий, принадлежащем Лосю [5].

[3]) Исследование этой проблемы см. у Люксембурга [3].

ЛИТЕРАТУРА

лександров и Хопф (Alexandrof P. S., Hopf H.)
1. Topologie I, Berlin, 1935.

лександров П. С. и Урысон П. С.
1. О компактных топологических пространствах, в книге: Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики, т. 2, М.—Л., 1951.

мемия и Мори (Amemiya I., Mori T.)
1. Topological structures in ordered linear spaces, *J. math. Soc. Japan*, 9 (1957), 131—142.

ндреоли (Andreoli G.)
1. Struttura delle algebre di Boole e loro estensione quale calcolo delle classi (in senso ordinario oppure probabilistico), *Giorn. Mat. Battaglini*, 5 (1957), 141—171.
2. Proprietà delle funzioni simmetriche elementari nelle algebre di Boole e nelle algebre dei livelli, *Ricerca (Napoli)*, 10 (1959), 1—10.
3. Algebre di Boole-algebre di insieme-algebre di livelli, *Giorn. Mat. Battaglini*, 7 (1959), 3—22.
4. Matrici; reticoli booleani di sottomatrici e loro valutazione per caratteristiche, *Ricerca, Rivista Math. pur. appl.*, II Ser., 11 (1960), 6—14.

нтоновский М. Я., Болтянский В. Г. и Сарымсаов Т. А.
1. Топологические алгебры Буля, Ташкент, 1963.

уберт (Aubert K. E.)
1. A generalization of the ideal theory of commutative rings without finiteness assumptions, *Math. Scand.*, 4, (1956), 209—230.

уман (Aumann G.)
1. Ein Beweis des Loomisschen Darstellungssatzes für σ-Somenringe, *Arch. Math.*, 2 (1950), 321—324.
2. Alternative-Zerlegungen in Booleschen Verbänden, *Math. Z.*, 55 (1951), 109—113.
3. Reelle Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.

алачандран (Balachandran V. K.)
1. A characterization for complete Boolean algebras, *J. Madras Univ.*, Sect. B 24 (1954), 273—278; *J. Osaka Inst. Sci. Tech.*, 4 (1952), 39—44.

2. On certain BS-representations and a characterization of complete Boolean algebras, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A. **34** (1957), 35—46.
3. On isomorphic BS-representations preserving arbitrary joins, *Math. Japan*, **4** (1956), 55—61.

Банах (Banach S.)
1. Über additive Maßfunktionen in abstrakten Mengen, *Fund. Math.*, **15** (1930), 97—101.
2. On measures in independent fields of sets (edited by S. Hartman), *Stud. Math.*, **10** (1948), 159—177.
3. Théorème sur les ensembles de première catégorie, *Fund. Math.*, **16** (1930), 395—398.

Банах и Куратовский (Banach S., Kuratowski C.)
1. Sur une généralisation du problème de la mesure, *Fund. Math.*, **14** (1929), 127—131.

Басс (Bass H.)
1. Finite monadic algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **9** (1958), 258—268.

Бауэр (Bauer H.)
1. Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einem Vektorverband, welche der Funktionalgleichung $f(x \cup y) + f(x \cap y) = f(x) + f(y)$ genügen, *J. reine angew. Math.*, **194** (1955), 141—179.
2. Darstellung additiver Funktionen auf Booleschen Algebren als Mengenfunktionen, *Arch. Math.*, **6** (1955), 215—222.

Белл (Bell C. B.)
1. On the structure of algebras and homomorphisms, *Proc. Amer. math. Soc.*, **7** (1956), 483—492.

Бенадо (Benado M.)
1. Sur une caractérisation abstraite des algébres de Boole, (I) *C. R. Acad. Sci.*, **251** (1960), 622—623; (II) *C. R. Acad. Sci.* **251** (1960), 835—836.

Беннет (Bennett A. A.)
1. Solution of Huntington's "unsolved problem in Boolean algebra", *Bull. Amer. math. Soc.*, **39** (1933), 289—295.

Бернайс (Bernays P.)
1. Über eine natürliche Erweiterung des Relationenkalküls, Constructivity in Mathematics, Proc. Coll. Amsterdam, 1957, 1—14.

Бернштейн (Bernstein B. A.)
1. Simplification of the set of four postulates for Boolean algebras in terms of rejection, *Bull. Amer. math. Soc.*, **39** (1933), 783—787.
2. A set of four postulates for Boolean algebra in terms of the "implicative" operation, *Trans. Amer. math. Soc.*, **36** (1934), 876—884.
3. On finite Boolean algebras, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 733—742.
4. Postulates for Boolean algebras involving the operation of complete disjunction, *Ann. of Math.*, **37** (1936), 317—325.
5. Sets of postulates for Boolean groups, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 420—422.
6. Postulate-sets for Boolean rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, **55** (1944), 393—400.

7. A dual-symmetric definition of Boolean algebra free from postulated special elements, *Scripta Math.*, **16** (1950), 157—160.
8. Operations with respect to which the elements of a Boolean algebra form a group, *Trans. Amer. math. Soc.*, **26** (1924), 171—175.
9. On the existence of fields in Boolean Algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **28** (1926), 645—657.

Берштейн (Berstein I.)
1. Sur les classes des fonctions équivalentes et sur les fonctions définies dans une algèbre de Boole, *Acad. R. P. Romine*, **7** (1955), 565—581 (Rumanian).

Бет (Beth E. W.)
1. A topological proof of the theorem of Löwenheim—Skolem—Gödel, *Ind. Math.*, **13** (1951), 436—444.

Бирн (Byrne L.)
1. Two brief formulations of Boolean algebra, *Bull. Amer. math. Soc.*, **52** (1946), 269—272.
2. Boolean algebra in terms of inclusion, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 139—143.
3. Short formulations of Boolean algebra using ring operations, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 31—33.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.)
1. Rings of sets, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 443—454.
2. Lattice Theory, New York, 1940; second edition 1948, 1961. (Русский перевод: Теория структур, М., 1952.)
3. Order and the inclusion relation, Proc. Oslo Congress, 1936, vol. 2, p. 37.

Биркгоф Г. и Биркгоф Г. Д. (Birkhoff G., Birkhoff G. D.)
1. Distributive postulates for systems like Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **60** (1946), 3—11.

Биркгоф Г. и Вард (Birkhoff G., Ward M.)
1. A characterization of Boolean algebras, *Ann. of Math.*, **40** (1939), 609—610.

Бишоф (Bischof A.)
1. Beiträge zur Carathéodoryschen Algebraisierung des Integralbegriffs, *Schr. Math. Inst. u Inst. angew. Math. Univ. Berlin*, **5** (1941), 237—262.

Блэйк (Blake A.)
1. Canonical expressions in Boolean algebra, Chicago, Diss., 1938; correction *J. Symb. Logic*, **3** (1938), 112—113.

Блюменталь (Blumenthal L. M.)
1. Boolean geometry, (I) *Rend. Coirc. Math. Palermo*, **1** (1952), 1—18; (II) Proc. Intern. Congress of Math., 2 (1954), 205.
2. Theory and applications of distance geometry, Oxford, 1953.

Брейнерд и Ламбек (Brainerd B., Lambek J.)
1. On the ring of quotients of a Boolean ring, *Canad. Math. Bull.*, **2** (1959), 25—29.

Брейсвейт (Braithwaite R. B.)
1. Characterization of finite Boolean lattices and related algebras, *J. Lond. math. Soc.*, **17** (1942), 180—192.

Брюнс (Bruns G.)
1. On the representation of Boolean algebras, *Canad. Math. Bull.*, **5** (1962), 37—41.
2. Darstellungen und Erweiterungen geordneter Mengen, *J. reine angew. Math.*, (I), **209** (1962), 167—200; (II), **210** (1962), 1—23.

Брюнс и Шмидт (Bruns G., Schmidt J.)
1. Ein Zerlegungssatz für gewisse Boolesche Verbände, *Abh. math. Seminar Univ. Hamburg*, **22** (1958), 191—200.
2. Eine Verschärfung des Bernsteinschen Äquivalenzsatzes, *Math. Ann.*, **135** (1958), 257—262.

Буль (Boole G.)
1. The mathematical analysis of logic, Cambridge, 1847.
2. An investigation of the laws of thought, Cambridge, 1854.

Бюхи (Büchi J. R.)
1. Die Boolesche Partialordnung und die Paarung von Gefügen, *Portugal. Math.*, **7** (1948), 119—190.

Бялыницкий-Бируля (Białynicki-Birula A.)
1. Remarks on quasi-Boolean algebras, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **5** (1957), 615—619.

Бялыницкий-Бируля и Расёва (Białynicki-Birula A., Rasiowa H.)
1. On the representation of quasi-Boolean algebras, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **5** (1957), 259—261.

Вайдьянатасвами (Vaidyanathaswamy R.)
1. On the group-operations of a Boolean algebra, *J. Indian math. Soc.*, N. S. **2** (1937), 250—254.

Вард (Ward A. J.)
1. On relations between certain intrisic topologies in partially ordered sets, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **51** (1955), 254—261.

Варшавский (Varsavsky O.)
1. Quantifiers and equivalence relations, *Rev. Mat. Guyana*, **2** (1958), 29—51.

Веккен (Wecken F.)
1. Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen, *Math. Z.*, **45** (1939), 377—404.

Вилль (Ville J.)
1. Eléments de l'algèbre de Boole, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **4** (1955), 107—140.

Винокуров В. Г.
1. Представление булевых алгебр и пространств с мерой, *Мат. сб.*, **56**, № 3 (1962), 375—391.

Винха Новэ (Vinha Novais J. A.)
1. Introduction to Boolean algebras, *Gaz. Mat. Lisboa*, **18** (1957), 1—8.

Владимиров Д. А.
1. О счетной аддитивности булевой меры, *Вестн. Ленинградского ун-та*, **19**, вып. 4 (1961), 5—15.

Волк (Wolk E. S.)
1. Dedekind completeness and a fixed-point theorem, *Ganad. J. of Math.*, **9** (1957), 400—405.

Вредендойн (Vredenduin P. G.)
1. Verbände, Euclides, Groningen 33, 129—152 (1958) (Dutch).
Вуенака (Wooyenaka Y.)
1. On Newman algebra, *Proc. Japan Acad.*, **30** (1954), 170—175; **30** (1954), 562—565; **31** (1955), 66—69.
Галлер (Galler B. A.)
1. Cylindric and polyadic algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **8** (1957), 176—183.
Гейфман (Gaifman H.)
1. Two contributions to the theory of Boolean algebras (doctoral dissertation), University of California, Berkeley, 1962.
2. Strictly positive measures in Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **14**, № 1 (1964), 61—73.
3. Infinite Boolean polynomials, *Fund. Math.*, **54**, № 3 (1964), 229—250.
Гёдель (Gödel K.)
1. The consistency of the Continuum Hypothesis, Princeton, 1940.
Гермс (Hermes H.)
1. Einführung in die Verbandstheorie, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.
Гётц (Götz A.)
1. Analogues to the notion of point functions in Boolean algebras, *Prace Mat.*, **1** (1954), 145—161 (Polish).
Гийом М. (Guillaume M.)
1. Calculs de conséquences et tableaux d'épreuve pour les classes algébriques génerales d'anneaux boolèins à opérateurs, *C. R. Acad. Sci.*, **247** (1958), 1542—1544.
Гилман и Джерисон (Gillman L., and Jerison M.)
1. Rings of continuous functions, Toronto—London—New York, 1960.
Гинзбург (Gingsburg S.)
1. A class of everywhere branching sets, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 521—526.
2. On the existence of complete Boolean algebras whose principal ideals are isomorphic to each other, *Proc. Amer. math. Soc.*, **9** (1958), 130—132.
Гливенко В. И.
1. Sur quelques points de la logique de Brouwer, *Bull. Acad. Sci. Belg.*, **15** (1929), 183—188.
Глисон (Gleason A. M.)
1. Projective topological spaces, *Ill. J. Math.*, **2** (1958), 482—489.
Гофман (Hofmann H.)
1. Über eine Dimensionstheorie in topologischen Verbänden, *Fund. Math.*, **42** (1955), 289—311.
Грау (Grau A. A.)
1. A ternary operation related to the complete disjunction of Boolean algebra, *Univ. Nac. Tucuman Rev.*, A. **8**, (1951), 121—126.
2. Ternary Boolean algebra, *Bull. Amer. math. Soc.*, **53** (1947), 567—572.
Грэтцер и Шмидт (Grätzer G., Schmidt E. T.).
1. Two notes on lattice congruences, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös*, Sect. Math., **1** (1958), 83—87.

2. Characterizations of relatively complemented distributive lattices, *Publ. math. Debrecen*, **5** (1958), 275—287.
3. On the generalized Boolean algebras generated by a distributive lattice, *Nederl. Akad. Wet. Proc.*, *Ser.* A, **61** (1958), 547—553.

Гуднер (Goodner D. B.)
1. Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. math. Soc.* **69** (1950), 89—108.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J. T.)
1. Linear operators, Part. I: General theory, New York, 1958. (Русский перевод: Линейные операторы. Часть I. Общая теория, ИЛ, М., 1962).

Данфорд и Стоун (Dunford N., Stone M. H.)
1. On the representation theorem for Boolean algebras, *Rev. Ci. Lima*, **43** (1941), 743—749.

Двингер (Dwinger Ph.)
1. On the completeness of the quotient algebras of a complete Boolean algebra, (I) *Indag. Math.*, **20** (1958), 448—456; (II) *Indag. Math.*, **21** (1959), 26—35.
2. Remarks on the field representation of Boolean algebras, *Indag. Math.*, **22** (1960), 213—217.
3. A note on the normal β-completion of a Boolean algebra, *Nieuw Arch. Wiskunde*, **8** (1960), 83—88.
4. Introduction to Boolean algebras, Würzburg, 1961.
5. Retracts in Boolean algebras, *Proc. Symp. Pure Math.*, II, *Amer. math. Soc.*, 1961.
6. A note on the completeness of factor algebras of α-complete Boolean algebras, *Indag. Math.*, **21** (1959), 376—383.

Дейньо и Монк (Daigneault A., Monk D.)
1. Representation theory for polyadic algebras, *Fund. Math.*, **52** (1963), 151—176.

Деккер (Dekker J. C. E.)
1. The constructivity of maximal dual ideals in certain Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **3** (1953), 73—101.

Джонсон (Jónsson B.)
1. Boolean algebra without proper automorphisms, *Proc. Amer. math. Soc.*, **2** (1951), 766—770.

Джонсон и Тарский (Jónsson B. and Tarski A.)
1. Boolean algebras with operators, (I) *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 891—939; (II) *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 127—162.
2. Cardinal products of isomorphism types, Добавление к Тарский [8].

Диамонд А. Х. (Diamond A. H.)
1. The complete existential theory of the Whitehead-Huntington set of postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. math. Soc.*, **35** (1933), 940—948.
2. Simplification of the Whitehead-Huntington set of postulates for the algebra of logic, *Bull. Amer. math. Soc.*, **40** (1934), 599—601.

Диамонди Маккинси (Diamond A. H., McKinsey J. C. C.)
1. Algebras and their subalgebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **53** (1947), 959—962.

Дилуорс (Dilworth R. P.)
1. Ideals in Birkhoff lattices, *Trans. Amer. math. Soc.*, **49** (1941), 325—353.
2. Lattices with unique complements, *Trans. Amer. math. Soc.*, **57** (1945), 123—154.
3. The normal completion of the lattice of continuous functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, **68** (1950), 427—438.

Дубинс (Dubins L. É.)
1. Generalized random variables, *Trans. Amer. math. Soc.*, **84** (1957), 273—309.

Дурст (Durst L. K.)
1. On certain subsets of finite Boolean algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **6** (1955), 695—697.

Дьедоне (Dieudonné J.)
1. Sur le théorème de Lebesgue—Nikodym, III, *Ann. Univ. Grenoble*, Sect. Sci. Math. Phys. (N. S.), **23** (1948), 25—53.

Дэвис С. (Davis C.)
1. Modal operators, equivalence relations, and projective algebras, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 747—762.

Дэвис А. С. (Davis A. C.)
1. A characterization of complete lattices, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 311—319.

Дэй (Day G. W.)
1. Superatomic Boolean algebras, *Notices Amer. math. Soc.*, **8** (1961), 279; **8** (1961), 602.

Дэй и Якуб (Day G. W., Yaqub F. M.)
1. On free α-extensions of Boolean algebras, *Notices Amer. math. Soc.*, **8** (1961), 255.

Зарицкий М. А.
1. Алгебра Буля с замыканием и алгебра Буля с производной, *Доповіді АН Укр. ССР*, № 1, 1955, 3—6.

Земмер (Zemmer J. L.)
1. Some remarks on p-rings and their Boolean geometry, *Pacific J. Math.*, **29** (1956), 193—208.

Зинк (Zink R. E.)
1. On the structure of measure spaces, *Acta Math.*, **107** (1962), 53—71.

Зусман (Sussman I.)
1. A generalization of Boolean rings, *Math. Ann.*, **136** (1958), 326—338.

Исбелл и Семадени (Isbell J. R., Semadeni Z.)
1. Projection constants and spaces of continuous functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, **107** (1963), 38—48.

Исеки (Iseki K.)
1. A construction of two-valued measure on Boolean algebra, *J. Osaka Inst. Sci. Techn.*, Part I, **2** (1950), 43—45.

Ито (Itoh M.)
1. On Boolean equation with many known elements and generalized Poretzky's formula, *Univ. Nac. Tucumán Rev.*, Ser. A **12** (1959), 107—112.

Кавада (Kawada Y.)
1. Über die Existenz der invarianten Integrale, *Japan. J. Math.*, **19** (1949), 81—95.

Какутани (Kakutani S.)
1. Weak topology, bicompact set and the principle of duality, *Proc. Imp. Acad. Japan*, **16** (1940), 63—67.
2. Concrete representation of abstract (L)-spaces ant the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 523—537.
3. Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 994—1024.

Калицкий (Kalicki J.)
1. On the axioms of Grau's ternary algebra. *Proc. Leeds Phil. Lit. Soc. Sci.* Sect. **6** (1952), 12—13.

Камел (Kamel H.)
1. Relational algebra and Uniform spaces. *J. London math. Soc.*, **29** (1954), 342—344.

Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г.
1. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950.

Каппос (Kappos D. A.)
1. Ein Beitrag zur Carathéodoryschen Definition der Ortsfunktion in Booleschen Algebren *Math. Z.*, **51** (1949), 616—634.
2. Die Cartesischen Produkte und die Multiplikation von Maßfunktionen in Booleschen Algebren, (I) *Math. Ann.*, **120** (1947), 43—74; (II) *Math. Ann.*, **121** (1949), 223—333.
3. Baire and Borel theory for the Carathéodory "Ortsfunktionen", *Bull. Soc. Math. Grèce*, **25** (1951), 130—152.
4. Erweiterung von Massverbänden, *J. reine angew. Math.*, **191** (1953), 97—109.
5. Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und-räume Berlin—Göttingen—Heidelberg, Springer Verlag, 1960.

Каратеодори (Carathéodory C.)
1. Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs, S.-B. bayer. Akad. Wiss., 1938, 27—69.
2. Maßtheorie und Integral, *Reale Acad. Ital. Atti Convegni*, **9** (1939), 195—208.
3. Bemerkungen zum Ergodensatz von G. Birkhoff, S.-B. math. nat. Abt. bayer. Akad. Wiss, 1944, 189—208.
4. Über die Differentiation von Maßfunktionen, *Math. Z.*, **46** (1940), 181—189.

Карп (Karp C. R.)
1. A note on the representation of α-complete Boolean algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **14** (1963), 705—707.

Каснер (Kasner M.)
1. Les algèbres cylindriques, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 315—319.

Катетов (Katětov M.)
1. Remarks on Boolean algebras, *Coll. Math.*, **2** (1951), 229—235.
2. Measures in fully normal spaces, *Fund. Math.*, **38** (1951), 73—84.

Кейслер (Keisler H. J.)
1. Some applications of the theory of models to set theory; Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford 1962, 80—86.
Кейслер и Тарский (Keisler H. J., Tarski A.)
1. From accessible to inaccessible cardinals. Results holding for whole accessible cardinal numbers and the problem of their extension for inaccessible ones, *Fund. Math.* **53** (1964), 225—308.
Келли (Kelley J. L.)
1. Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. math. Soc.*, **72** (1952), 323—326.
2. Measures in Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 1165—1177.
Керстан (Kerstan J.)
1. Tensorielle Erweiterungen distributiver Verbände, *Math. Nachr.*, **22** (1960), 1—20.
2. Zur topologischen Invarianz der Hausdorffschen $Q^{(\alpha)}$-Mengen, *Z. math. Logik u. Grundl. Math.*, **7** (1961), 259—277.
Кётэ (Köthe G.)
1. Die Theorie der Verbände, ein neuer Versuch zur Grundlegung der Algebra und der projektiven Geometrie, *Jber. Dtsch. Math. Ver.*, **47** (1937), 125—144.
Киди (Keedy M. L.)
1. On a theorem of Jónsson and Tarski, *Portugal. Math.*, **16** (1957), 11—14.
Киносита (Kinoshita S.)
1. A solution of a problem of R. Sikorski, *Fund. Math.*, **40** (1953), 39—41.
Клейн (Klein F.)
1. Boole-Schrödersche Verbände, *Dtsch. Math.*, **1** (1936), 528—537.
Ковальский (Kowalsky H. J.)
1. Distributivität in atomaren Booleschen Verbänden, *Arch Math.*, **6** (1954), 9—12.
Колмогоров А. Н.
1. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Berlin, 1933.
2. Algèbres de Boole métriques complètes, VI Zjazd Matematyków Polskich 1948, Appendix to *Ann. Soc. Pol. Math.*, **20** (1948), 21—30.
Константинеску (Constantinescu P.)
1. Sur la classification des fonctions booléennes symétriques, *Acad. R. P. Romine. Stud., Cerc. Mat.*, **11** (1960), 193—206 (Rumanian).
Копланд ст. (Copeland A. H. sr.)
1. Implicative Boolean algebra, *Math. Z.*, **53** (1950), 285—290.
2. Note on cylindric algebras and polyadic algebras, *Michigan math. J.*, **3** (1955—1956), 155—157.
Копланд ст. и Харари (Copeland A. H., Harary F.)
1. A characterization of implicative Boolean rings, *Canad. J. math.* **5** (1953), 465—469.
2. The extension of an arbitrary Boolean algebra to an implica-

tive Boolean algebra, *Proc. Amer. math. Soc.*, **4** (1953), 751—758.

Крикберг (Krickeberg Kl.)
1. Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration, Bayer. Akad. Wiss., mat.-nat. Kl. 1955, 217—279.
2. Convergence of martingales with a directed index set, *Trans. Amer. math. Soc.*, **83** (1956), 313—337.
3. Stochastische Konvergenz von Semimartingalen, *Math. Z.*, **66** (1957), 470—486.
4. Stochastische Derivierte, *Math. Nachr.*, **18** (1958), 203—217.

Кроули (Crawley P.)
1. Lattices whose congruences form a Boolean algebra, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 787—795.

Круазо (Croisot R.)
1. Axiomatique des lattices distributives, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 24—27.

Кункль (Cunkle C. H.)
1. A note on Boolean operations. *Portugal. Math.*, **18** (1959), 177—179.

Куратовский (Kuratowski C.)
1. Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis situs, *Fund. Math.*, **3** (1922), 181—199.
2. Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, *Fund. Math.*, **25** (1935), 534—535.
3. Topologie I (second edition), Warszawa—Wrocław, 1948.
4. Topologie II, Warszawa—Wrocław, 1950.

Куратовский и Позамент (Kuratowski C. et Posament T.)
1. Sur l'isomorphie algébro-logique et les ensembles relativement boréliens, *Fund. Math.*, **22** (1934), 281—286.

Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г.
1. Основы теории категорий, *УМН*, XV, **6** (1960), 3—52.

Куэста (Cuesta N.)
1. On an article of MacNeille, *Rev. Mat. Hisp.-Am.*, **18** (1958), 3—9.

Лаббе (L'Abbé M.)
1. Structures algébriques suggérées par la logique mathématique, *Bull. Soc. Math. France*, **86** (1958), 299—314.

Лалан (Lalan V.)
1. Définition de deux structures d'anneaux dans une algèbre de Boole, *C. R. Acad. Sci.*, **223** (1946), 1086—1087.
2. Equations fonctionelles dans un anneau booléien, *C. R. Acad. Sci.*, **230** (1950), 603—605.

Ламперти (Lamperti J.)
1. A note on autometrized Boolean algebras, *Amer. Math. Monthly*, **64** (1957), 188—189.

Лебланк (Leblanc L.)
1. Dualité pour égalités booliennes, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 3552—3553.

2. Les algèbres boolènnes topologiques bornées, *C. R. Acad. Sci.*. **250** (1960), 3766—3768.
3. Les algèbres de transformation, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 3928—3930.
4. Représentation des algèbres polyadiques pour anneau, *C. R. Acad. Sci.*, **250** (1960), 4092—4094.
5. Nonhomogenous polyadic algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **13** (1962), 59—65.
6. Duality for Boolean equalities, *Proc. Amer. math. Soc.*, **13** (1962), 74—79.

Лёвиг (Löwig H.)
1. On transitive Boolean relations, *Czechoslovak math. J.*, **1** (1951), 199—201.
2. Instrisic topology and completion of Boolean rings, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 1138—1196.

Лейхли (Läuchli H.)
1. The independence of the ordering principle from a restricted axiom of choise, *Fund. Math.*, **54**, № 1 (1964), 31—43.

Ливенсон Е. М.
1. On the realization of Boolean algebras by algebras of sets, *Мат. сб.*, **7** (1940), 309—312.

Линдон (Lyndon R. C.)
1. The representation of relational algebras, (I) *Ann. of Math.*, **51** (1950), 707—709; (II) *Ann. of Math.*, **63** (1956), 294—307.
2. Relation algebras and projective geometries, *Michigan Math. J.*, **8** (1961), 21—28.

Лось (Łoś J.)
1. Sur le théorème de Gödel pour les théories indénombrables, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **2** (1954), 319—320.
2. On the axiomatic treatment of probability, *Coll. Math.*, **3** (1955), 125—137.
3. Remarks on Henkin's paper: Bolean representation through propositional calculus, *Fund. Math.*, **44** (1957), 82—83.
4. O ciałach zdarzén i ich definicji w aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa (On fields of events and their definition in the axiomatic Theory of Probability), *Studia Logica*, **9** (1960), 95—115 (Polish; English summary 125—132).
5. Quelques remarques, théorémes et problèmes sur les classes définissables d'algèbres. Mathematical Interpretatation of Formal Systems, Amsterdam 1955, p. 98.
6. Remarks on foundations of probability. Semantic interpretation of the probability of formulas, Proc. Internat. Congress Math. 1962, 225—229.

Лось и Марчевский (Łoś J., Marczewski E.)
1. Extensions of measure, *Fund. Math.*, **36** (1949), 267—276.

Лось, Мостовский и Расёва (Łoś J., Mostowski A., Rasiowa H.)
1. A proof of Herbrand's theorem, *J. Math. Pur. Appl.*, **35** (1956), 19—24.

2. Addition au travail "A proof of Herbrand's theorem", *J. Math. Pur. Appl.*, **40** (1961), 129—134.

Лось и Рыль-Нардзевский (Łoś J., Ryll-Nardzewski C.)
1. Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras, *Fund Math.*, **41** (1954), 49—56.
2. On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs, *Fund. Math.*, **38** (1951), 233—237.

Лумис (Loomis L. H.)
1. On the representation of σ-complete Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **53** (1947), 757—760.

Любченко Г. Г.
1. Представление булевских функций формулами, *Доповіді АН УРСР*, № 8, 1960, 1011—1015.
2. Логический синтез схем устройств, реализующих булевские функции одного класса, *Доповіді АН УРСР* № **10**, 1960, 1331—1333.

Люксембург (Luxemburg W. A. J.)
1. Non-standard analysis, California Institute of Technology, Pasadena, 1962.
2. Two applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis, *Bull. Amer. math. Soc.*, **68** (1962), 416—419.
3. A remark on Sikorski's extension theorem for homomorphisms in the theory of Boolean algebras, *Fund. Math.*, **55**, № 3 (1964), 239—247.

Маеда (Maeda F.)
1. Ideals in a Boolean algebra with transfinite chain condition, *J. Sci, Hiroshima Univ.*, A **10** (1940), 7—36.
2. Partially ordered linear spaces, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, A **10** (1940), 137—150.

Мазур (Mazur S.)
1. On continuous mappings on Cartesian products, *Fund. Math.* **39** (1952), 229—238.

Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)
1. Podstawy rachunku prawdopodobieństwa (Foundation of the calculus of probability), prepared for print from the late author's manuscript by J. Łoś, Warszawa, 1956 (Polish).

Мазуркевич и Серпинский (Mazurkiewicz S. et Sierpiński W.)
1. Contribution à la topologie des ensembles dénombrables, *Fund. Math.*, **1** (1920), 17—27.

Маккарти (McCarthy C. A.).
1. Commuting Boolean algebras of projections, *Pacific J. Math.*, **2** (1961), 295—307.

Макки (Mackey G. W.)
1. Point realizations of transformation groups, *Ill.. J. Math.*, **6** (1962), 327—335.

Маккинси (McKinsey J.C.C.)
1. Boolean functions and points, *Duke math. J.*, **2** (1936), 465—471.
2. On Boolean functions of many variables, *Trans. Amer. math. Soc.*, **40** (1936), 343—362.

3. A condition that a first Boolean function vanish whenever a second does not, *Bull. Amer. Mat. Soc.*, **43** (1937), 694—696.
4. A solution of the decision problem for the Lewis system S2 and S4 with an application to topology, *J. Symb. Logic*, **4** (1939), 115—158.
5. On the representation of projective algebras, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 375—384.

Маккинси и Тарский (McKinsey J.C.C., Tarski A.)
1. The algebra of topology, *Ann. of Math.*, **45** (1944), 141—191.
2. On closed elements in closure algebras, *Ann. of Mat.*, **47** (1946), 122—162.
3. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting, *J. Symb. Logic*, **13** (1948), 1—15.

Маккой (McCoy N. H.)
1. Subrings of direct sums, *Amer. J. Math.*, **60** (1938), 374—382.

Маккой и Монтгомери (McCoy N. H., Montgomery)
1. A representation of generalized Boolean rings, *Duke math. J.*, **3** (1937), 455—459.

Макнейл (MacNeille H.)
1. Partially ordered sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, **42** (1937), 416—460.
2. Extension of a distributive lattice to a Boolean ring, *Bull. Amer. math. Soc.*, **45** (1939), 452—455.

Марков А. А.
1. Об инверсионной сложности систем функций, *ДАН СССР*, **116**, № 6 (1957), 917—919.

Марчевский (Marczewski E. (Szpilrajn)).
1. Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire, *Fund. Math.*, **22** (1934), 303—311.
2. The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications, *Fund. Math.*, **31** (1938), 207—223.
3. On the isomorphism and the equivalence of classes and sequences of sets, *Fund. Math.*, **32** (1939), 133—148.
4. Mesures dans les corps de Boole, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **19** (1946), 243—244.
5. Indépendance d'ensembles et prolongement de mesures, *Coll. Math.*, **1** (1948), 122—132.
6. Ensembles indépendants, et leurs applications à la thèorie de la mesure, *Fund. Math.*, **35** (1948), 1—28.
7. Concerning the symmetric difference in the theory of sets and in Boolean algebras, *Coll, Math.*, **1** (1948), 199—202.
8. Measures in almost independent fields, *Fund. Math.*, **38** (1951), 217—229.
9. Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques, *Fund. Math.*, **34** (1947), 127—143.
10. Sur l'équivalence des suites d'ensembles et l'équivalence des fonctions, *Fund. Math.*, **26** (1936), 302—326.
11. On the equivalence of some classes of sets, *Fund. Math.* **30** (1938), 235—241.

12. Sur les mesures à deux valeurs et les idéaux premiers dans les corps d'ensembles, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **19** (1947), 232—233.
13. Two-valued measures and prime ideals in fields of sets, *Compt. rend. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, Cl. III (1947), 11—17.
14. Ensembles indépendants et mesures non-séparables, *C. R. Acad. Sci.*, **207** (1938), 768—770.
15. Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables. *Compt. rend. Soc. Sci. Lett. Varsovie*, Cl. III, **30** (1937), 1—30 (Polish).
16. Independence in algebras of sets and Boolean algebras, *Fund. Math.*, **48** (1959/60), 135—145.

Марчевский и Серпинский (Marczewski E., Sierpinski W.)
1. Remarque sur le problème de la mesure, *Fund. Math.*, **26** (1936), 256—261.

Марчевский и Сикорский (Marczewski E., Sikorski R.)
1. Measures in non-separable metric spaces, *Coll. Math.*, **1** (1948), 133—139.
2. Remarks on measures and category, *Coll. Math.*, **2** (1949), 13—19.
3. On isomorphism types of measure algebras, *Fund. Math.*, **38** (1951), 92—98.

Марчевский и Трачик (Marczewski E., Traczyk T.)
1. On developable sets and almost-limit points, *Coll. Math.*, **8** (1961), 55—56.

Маттес (Matthes K.)
1. Über eine Schar von Regularitätsbedingungen für Verbände, *Math. Nachr.*, **22** (1960), 93—128.
2. Über die Ausdehnung von &-Homomorphismen Boolescher Algebren, *Z. math. Logik u. Grundl. Math.*, **6** (1960), 97—105 (II), **7** (1961), 16—19.

Махарам (Maharam D.)
1. On homogeneous measure algebras, *Proc. nat. Acad. Sci.* (Wash.), **28** (1942), 108—111.
2. An algebraic characterization of measure algebras, *Ann of Math.*, **48** (1947), 154—167.
3. Set functions and Souslin's hypothesis, *Bull. Amer. math. Soc.*, **54** (1948), 587—590.
4. The representation of abstract measure functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, **65** (1949), 279—330.
5. Decomposition of measure algebras and spaces, *Trans. Amer. math. Soc.*, **69** (1950), 142—160.
6. The representation of abstract integrals, *Trans. Amer. math. Soc.*, **75** (1953), 154—184.
7. Automorphisms of product of measure spaces, *Proc. Amer. math. Soc.*, **9** (1958), 702—707.
8. On a theorem of von Neumann, *Proc. Amer. math. Soc.*, **9** (1958), 987—994.
9. Homogenous extensions of positive linear operators, *Trans. Amer. math. Soc.*, **99** (1961), 62—82.

Мацусита (Matsushita S.)
1. The algebra of topological operations, I. *Math. Jap.*, **1** (1948), 28—35; II. *J. Osaka Inst. Sci. Techn.*, Part I, **1** (1949), 77—80.
Мейер и Пирсе (Mayer R. D., Pierce R. S.)
1. Boolean algebras with ordered bases, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 925—942.
Миби (Mibu Y.)
1. Relations between measures and topology in some Boolean spaces., *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **20** (1944), 454—458.
Миллер (Miller D. G.)
1. Postulates for Boolean algebras, *Amer. Math. Monthly*, **59** (1952), 93—96.
Михеев В. М.
1. О множествах, содержащих наибольшее число попарно несравнимых булевых векторов. Проблемы кибернетики, вып. 2, 1959, 69—72.
Мичиура (Michiura T.)
1. On characteristic properties of Boolean algebras, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.*, Part I, **1** (1949), 129—133.
Моисил (Moisil G. C.)
1. Sur les anneaux de caractéristique 2 ou 3 et leurs applications, *Bull. Ecole Polytech. Bucurest*, **12** (1941), 66—90.
2. Sur l'algèbre des relations binaires (I), *Com, Acad. R. P. Romine*, **8** (1958), 1251—1254.
Монк (Monk D.)
1. On the representation theory for cylindric algebras, *Pacific J. Math.*, **11** (1961) 1447—1457.
Монтгомери (Montgomery D.)
1. Non-separable metric spaces, *Fund. Math.*, **25** (1935), 527—533.
Монтегю и Тарский (Montague R., Tarski J.)
1. On Bernstein's selfdual set of postulates for Boolean algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **5** (1954), 310—311.
Монтейро (Monteiro A.)
1. Propriedades caracterìsticas de los filtros de un algebra de Boole (Characteristic properties of the filters of a Boolean algebra), *Acta Guyana Ingen.*, **1**, № 5 (1954) (Spanish).
2. L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. De Segundo Symposium de Matematicas, Buenos Aires, 1954.
Монтейро и Рибейро (Monteiro A., Ribeiro H.)
1. L'opération de fermeture et ses invariants dans les systèmes partiellement ordonnés, *Portugal. Math.*, **3** (1942), 171—184.
Мори (Mori S.)
1. Prime ideals in Boolean rings, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, A **9** (1939), 67—71.
2. On the group structure of Boolean lattices, *Proc. Japan Acad.*, **32** (1956), 423—425.
Мостовский (Mostowski A.)
1. Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendungen auf die allgemeine Metamathematik, *Fund. Math.*, **29** (1937), 34—53.
2. Über die unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip, *Fund. Math.*, **32** (1939), 201—252.

3. Proofs of nordeducibility in intuitionistic functional calculus, *J. Symp. Logic*, **13** (1948), 204—207.

Мостовский, Тарский (Mostowski A., Tarski A.)

1. Boolesche Ringe mit geordneter Basis, *Fund. Math.*, **32** (1939), 69—86.

Мрувка (Mrówka S.)

1. On the ideal's extension theorem and its equivalence to the axiom of choice, *Fund. Math.*, **43** (1956), 46—49.
2. Two remarks to my paper: „On the ideal's extension theorem and its equivalence to the axiom of choice", *Fund. Math.*, **46** (1958), 165—166.

Накано (Nakano H.)

1. Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raume, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **17** (1941), 308—310.

Начбин (Nachbin L.)

1. Une propriéte caractéristique des algèbres booléiennes, *Portugal. Math.*, **6** (1947), 115—188.
2. On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring, *Fund. Math.*, **36** (1949), 137—142.
3. A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, *Trans. Amer. math. Soc.*, **68** (1950), 28—46.

фон Нейман (Neumann J. von)

1. Einige Sätze über messbare Abbildungen, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 574—586.
2. Lectures on continuous geometry, Princeton, 1937.

фон Нейман и Стоун (Neuman J., von Stone M. H.)

1. The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra, *Fund. Math.*, **25** (1935), 353—376.

Нёбелинг (Nöbeling G.)

1. Topologie der Vereine und Verbände, *Arch. Mat.*, **1** (1949), 154—159.
2. Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

Никодим (Nikodym O.)

1. Sur une généralisation des integrales de M. J. Radon, *Fund. Math.*, **15** (1930), 131—179.
2. Sur la mesure vectorielle parfaitement additive dans un corps abstrait de Boole, *Acad. roy. Belg. Cl. Sci. Mem.*, **17** (1938), 1—40.
3. Sur les êtres fonctionnoides, *C. R. Acad. Sci.*, **226** (1948), 375—377, 458—460, 541—543.
4. Tribus de Boole et fonctions mesurables, *C. R. Acad. Sci.* **228** (1949), 37—38, 150—151.
5. Remarks on the Lebesgue's measure extension device for finitely additive Boolean lattices, *Proc. nat. Acad. Sci.* (Wash.), **37** (1951), 533—537.
6. Critical remarks on some basic notions in Boolean lattices, (I) *Ann. Acad. Brasil. Ci.*, **24** (1952), 113—136; (II) *Rend. Sem. Mat. d'Univ. Padova*, **27** (1957), 193—217.
7. Sur l'extension d'une mesure non Archimédienne sur une tribu

de Boole simplement additive, à une autre tribu plus extendue. *C. R. Acad. Sci.*, **241** (1955), 1439—1440, 1544—1545, 1695—1696; **242** (1956), 864—866.
8. On extension of a given finitely additive field-valued non-negative measure on a finitely additive Boolean tribe to another tribe more ample, *Rend. Sem. Mat. Univ. de Padova*, **26** (1956), 232—327.
9. Sur le mesure nonarchimédienne affective sur une tribu de Boole arbitraire, *C. R. Acad. Sci.*, **251** (1960), 2113—2115.

Новак (Novák J.)
1. On the Cartesian product of two compact spaces, *Fund. Math.*, **40** (1953), 106—112.

Новак и Новотный (Novák J. and M. Novotný)
1. On the convergence in σ-algebras of point-sets, *Czechoslovack. Mat. Z.*, **3** (1953), 291—296.

Нолин (Nolin L.)
1. Sur les classes d'algèbres équationnelles et les théorèmes de représentation, *C. R. Acad. Sci.*, **244** (1957), 1862—1863.
2. Algèbres de Boole et calcul des propositions, *C. R. Acad. Sci.*, **244** (1957), 1999—2002.

Огасавара (Ogasawara T.)
1. Compact metric Boolean algebras and vector lattices, *J. Sci. Hiroshima Univ.*, Ser. A, **11** (1942), 125—128.

Окстоби и Улам (Oxtoby J. C., Ulam S.)
1. On the equivalence of any set of first category to a set of measure zero, *Fund. Math.*, **31** (1938), 201—206.

Олмстед (Olmsted J. M. H.)
1. Lebesgue theory on a Boolean algebra, *Trans. Amer. math. Soc.*, **51** (1942), 164—193.

Оническу (Onicescu O.)
1. Notes sur les *b*-algèbres, *An. Univ. „C. I. Parhon" Bucuresti*, Ser. Şti Nat., **22** (1959), 17—22; *Rev. Math. pures Appl.*, **4** (1959), 345—350.

Панкаям (Pankajam S.)
1. On symmetric functions of *n* elements in a Boolean algebra, *J. Indian Math. Soc.*, N. s., **2** (1937), 198—210.
2. On symmetric functions of *m* symmetric functions in a Boolean algebra, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A, **9** (1939), 95—102.
3. Ideal theory in Boolean algebra and its application to deductive systems, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A, **14** (1941), 670—684.

Паук (Pauc Ch.)
1. Construction de mesures. *C. R. Acad. Sci.*, **222** (1946), 123—125.
2. Compléments à la représentation ensembliste d'une algèbre et d'une σ-algèbre booléennes, *C. R. Acad. Sci.*, **225** (1947), 219—221.
3. Darstellungs- und Struktursätze für Boolesche Verbände und σ-Verbände, *Arch. Math.*, **1** (1948), 29—41.
4. Les théorèmes fort et faible de Vitali et les conditions d'évanescence de halos, *C. R. Acad. Sci.*, **232** (1951), 1727—1729.

Пелчинский и Семадени (Pełczynski A., Semadeni Z.)
1. Spaces of continuous functions (III) (Spaces $C(\Omega)$ for (Ω without perfect subsets), *Studia Math.*, **18** (1959), 211—222.

Пеннинг (Penning Gh. J.)
1. Boolean metric spaces, doctoral dissertation, Technische Hogeschool te Delft, 1960.
Переманс (Peremans W.)
1. Embedding of a distributive lattice into a Boolean algebra, *Ind. Math.*, **19** (1957), 73—81.
Петтис (Pettis B. J.)
1. On the extension of measures, *Ann. of Math.*, **54** (1951), 186—197.
Пирс (Pierce R. S.)
1. The Boolean algebra of regular open sets, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 95—100.
2. Representation theorems for certain Boolean algebras, *Proc. Amer. Math. Soc*, **10** (1959), 42—50.
3. Distributivity in Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **7** (1957), 983—992.
4. A note on complete Boolean algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 892—896.
5. A generalization of atomic Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 175—182.
6. Distributivity and the normal completion of Boolean algebras, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 133—140.
7. Some questions about complete Boolean algebras, Proc. Symp. pure Math., v. 2 (1961), 129—140.
8. A note on free algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14** (1963), 845—846.
Поваров Г. Н.
1. О функциональной сепарабельности булевых функций, *ДАН СССР*, **94** (1954), 801—803.
2. Sur l'invariance des fonctions booleiennes par rapport à des groupes, *An St. Univ. „Al. I. Cuza"* Iasi, Sect. I (N. S.), **4** (1958), 39—44.
Поме и Руспа (Pomé R., Ruspa G.)
1. Un teorema di algebra logica, *Atti accad. sci. Torino Classe sci fis. mat. e nat.*, **95** (1960/61), 336—342
Поспишил (Pospíšil B.)
1. Von den Verteilungen auf Booleschen Ringen, *Math. Ann.*, **118** (1941), 32—40.
2. Eine Bemerkung über stetige Verteilungen, *Čas. mat. fys.*, **70** (1941), 68—72.
3. Wesentliche Primideale in vollständigen Ringen, *Fund. Math.*, **33** (1945), 66—74.
4. Über die meßbaren Funktionen, *Math. Ann.*, **117** (1939—1941), 327—355.
5. Remark on bicompact spaces, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 845—846.
6. On bicompact spaces, *Publ. Faculté Sci. Univ. Masaryk*, **270** (1939), 11—16.
Райт (Wright F. B.)
1. Ideals in a polyadic algebra, *Proc. Amer. math. Soc.*, **8** (1957), 544—546.

2. Some remarks on Boolean duality, *Portugal. Math.*, **16** (1957), 109—117.
3. Recurrence theorems and operators on Boolean algebras, *Proc. London Math Soc.*, **11** (1961), 385—401.
4. Polarity and duality, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 723—730.

Расёва (Rasiowa H.)
1. Algebraic treatment of the functional calculi of Heyting and Lewis, *Fund Math.*, **38** (1951), 99—126.
2. A proof of the compactness theorem for arithmetical classes, *Fund. Math.*, **39** (1952), 8—14.
3. Construktive theories, *Bull Acad. Polon. Sci.*, Cl. III, **2** (1954), 121—124.
4. Algebraic models of axiomatic theories, *Fund. Math.*, **41** (1955), 291—310.
5. A proof of ε-theorems, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **3** (1955), 299—302.
6. On the ε-theorems, *Fund. Math.*, **43** (1956), 156—165; Errata: *Fund. Math.*, **44** (1957), 333.

Расёва и Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)
1. A proof of the completeness theorem of Gödel, *Fund. Math.*, **37** (1950) 193—200.
2. A proof of the Skolem-Löwenheim theorem, *Fund. Math.*, **38** (1951), 230—232.
3. On satisfiability and decidability in nonclassical functional calculi, *Bull. Acad. Pol. Sci., Cl.* III, **1** (1953), 229—231.
4. Algebraic treatment of the notion of satisfiability, *Fund. Math.*, **40** (1953), 62—95.
5. On existential theorems in non-classical functional calculi, *Fund. Math.*, **41** (1954), 21—28.
6. An application of lattices to logic, *Fund. Math.*, **42** (1955), 83—100.
7. On the isomorphism of Lindenbaum algebras with fields of sets, *Coll. Math.*, **5** (1958), 143—158.
8. Formalisierte intuitionistische elementare Theorien. „Constructivity in Mathematics, Proc. Colloquium at Amsterdam 1957, Amsterdam 1959, 241—249.
9. The Mathematics of Metamathematics, Monografien Matematyczne, Warszawa, 1963.

Рейнватер (Rainwater J.)
1. A note on projective resolutions. *Proc. Amer. math. Soc.* **10** (1959), 734—735.

Рейхбах (Reichbach J.)
1. Completeness of the functional calculus of first order. *Studia Log.*, **2**, 229—250 (1955).

Рибейро (Ribeiro H.)
1. A remark on Boolean algebras with operators, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 163—167.
2. Topological groups and Boolean algebras with operators, *Univ Lisboa Rev. Fac. Ci.* A. **4** (1955), 195—200.

Ривкинд Я. И.
1. Плотные подструктуры нормированных булевых алгебр, *Уч. зап. Гродненского пед. ин-та*, **1**, 59—66 (1955).

2. Вещественные функции на булевых алгебрах с мерой, *Уч зап. Гродненского пед. ин-та*, 2, 89—101 (1957).

Ригер (Rieger L.)

1. On the lattice theory of Brouwerian propositional logic, *Acta Fac. Nat. Univ. Carol. Prague*, № 2, 189 (1949).
2. A note on topological representations of distributive lattices, *Časopis pest. mat. fys.*, 74 (1949), 51—61.
3. On the lattice theory of Brouwerian propositional logic *Spisy vyd. prirod. fak. Univ. Karlovy*, 189 (1949), 1—40.
4. On countable generalised σ-algebras, with a new proof of Gödel's completeness theorem, *Czech. math. J.*, 1 (1951), 29—40.
5. On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras *Fund. Math.*, 38 (1951), 35—52.
6. Some remarks on automorphisms of Boolean algebras, *Fund. Math.*, 38 (1951), 209—216.
7. On a fundamental theorem of mathematical logic, *Časopis pest mat.*, 80 (1955), 217—231.
8. Об алгебрах Суслина и их представлениях, *Czech. Math. J.*, 5 (1955), 99—142.
9. Заметки о так называемых свободных алгебрах с замыканием, *Czech. Math. J.*, 7 (1957), 16—20.

Риддер (Ridder J.)

1. Zur Maß-und Integrationstheorie in Strukturen, *Ind. Math.*, 8 (1946), 64—81.
2. Einige Anwendungen des Dualitätsprinzips in topologischen Strukturen, *Ind. Math.*, 9 (1947), 341—350.
3. Eine Bemerkung über Maß in Strukturen, *Ind. Math.*, 9 (1947), 315—319.

Роуз (Rose A.)

1. A lattice-theoretic characterization of three-valued logic, *J. London Math. Soc.*, 25 (1950), 255—259.

Рубин (Rubin J. E.)

1. Remarks about a closure algebra in which closed elements are open, *Proc. Amer. math. Soc.*, 7 (1956), 30—34.

Рубин и Скотт (Rubin J. E., Scott D.)

1. Some topological theorems equivalent to the Boolean prime ideal theorem, *Bull. Amer. math. Soc.*, 60 (1954), 389.

Рудеану (Rudeanu S.)

1. Boolean equations and their applications to the study of dridgecircuits, (I) *Bull. Math. Soc. Math. Phys. R.P.R.* 3 (1959), 447—473; (II), *Communic. Acad. R.P.R.*, 6 (1961), 611—618 (Rumanian).
2. On definition of Boolean algebras by means of binary operations. *Rev. Math. pur. Appl.*, 6 (1961), 171—183 (Rumanian).

Рудин (Rudin W.)

1. Continuous functions on compact sets without perfect subsets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 39—42.
2. Homogeneity problems in the theory of Cech compactification, *Duke Math. J.*, 23 (1956), 409—419.

Рупрехт (Ruprecht E.)
1. Über die Charakterisierung normaler und vollständig regulärer topologischer Boole-Verbände mit Hilfe quasis-tetiger Ortsfunktionen, *Math. Nachr.*, **13** (1955), 289—308.

Сагалович Ю Л.
1. О групповой инвариантности булевых функций. *УМН*, **14**, вып. 6 (1959), 191—195.

Сакс (Saks S.)
1. On some functionals, *Trans. Amer. math. Soc.*, **35** (1933), 549—556; addition, 965—970.

Сас (Szasz G.)
1. Bevezetés a háleólméletbe (Introduction to lattice theory), Budapest, 1959.

Сахс (Sachs S.)
1. The lattice of subalgebras of a Boolean algebra, *Canad. J Math.*, **14**, 451—460.

Сегал (Segal I. E.)
1. Abstract probability spaces and a theorem of Kolmogoroff, *Amer. J. Math.*, **76**, 721—732.

Семадени (Semadeni Z.)
1. Sur les ensembles clairsemés, *Rozprawy Matematyczne*, **19** (1939), 1—39.
2. Functions with sets of points of discontinuity belonging to a fixed ideal, *Fund Math.*, **52** (1963), 25—39.
3. Spaces of continuous functions (VI) (Localization of multiplicative linear functionals), *Studia Math.*, **23** (1963) 51—84.
4. Free and direct objects, *Bull. Amer. math. Soc.*, **69** (1963), 63—66.
5. Projectivity, injectivity and duality, *Rozprawy Matematyczne*, **35** (1963), 1—47.
6. On weak convergence of measures and σ-complete Boolean algebras, *Coll. Math.*, **12**, № 2 (1964), 229—233.

Серпинский (Sierpiński W.)
1. Fonctions additives non complèments additives et fonctions non mesurables, *Fund. Math.*, **30** (1938), 96—99.
2. Hypothèse du continu, Warszawa-Lwów, 1934.
3. Sur les ensembles presque contenus les uns dans les autres, *Fund. Math.*, **35** (1948), 141—150.
4. Sur les projections des ensembles complémentaires aux ensembles (A), *Fund. Math.*, **11** (1928), 117—120.
5. Sur une suite transfinie d'ensembles de nombres naturals, *Fund. Math.*, **33** (1945), 9—11.
6. Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle, *Fund. Math.*, **22** (1934), 276—280.

Сикорский (Sikorski R.)
1. A generalization of theorem of Banach and Cantor-Bernstein, *Coll. Math.*, **1** (1948), 140—144.
2. Sur les corps de Boole topologiques. *C. R. Acad. Sci*, **226** (1948), 1675—1676.
3. Sur la convergence des suites d'homomorphies, *C. R. Acad. Sci.*, **226** (1948), 1792—1793.

4. On the representation of Boolean algebras as fields of sets, *Fund. Math.*, **35** (1948), 247—256.
5. A theorem on extension of homomorphisms, *Ann. Soc. Pol, Math.*, **21** (1948), 332—335.
6. On the inducting of homomorphisms by mappings, *Fund, Math.*, **36** (1949), 7—22.
7. Closure algebras, *Fund. Math.*, **36** (1949), 165—206.
8. A theorem on the structure of homomorphisms, *Fund. Math.*, **36** (1949), 245—247.
9. The integral in a Boolean algebra, *Coll. Math.*, **2** (1949). 20—26.
10. On an unsolved problem from the theory of Boolean algebras, *Coll. Math.*, **2** (1949), 27—29.
11. Independent fields and Cartesian products, *Studia Math.*, **11** (1950), 171—184.
12. Remarks on some topological spaces of high power, *Fund. Math.*, **37** (1950), 125—136.
13. Cartesian products of Boolean algebras, *Fund. Math.*, **37** (1950), 25—54.
14. On an analogy between measures and homomorphisms, *Ann. Soc. Pol. Math.*, **23** (1950), 1—20.
15. On measures in Cartesian products of Boolean algebras, *Coll. Math.*, **2** (1951). 124—129.
16. Dimension theory in closure algebras, *Fund. Math.*, **38** (1951), 153—166.
17. A note to Ringer's paper: On free $\aleph_\xi$-complete Boolean algebras, *Fund. Math.*, **38** (1951), 53—54,
18. Homomorphisms, mappings and retracts, *Coll. Math.*, **2** (1951), 202—211.
19. Products of abstract algebras, *Fund. Math.*, **39** (1952), 211—228.
20. Closure homomorphisms and interior mappings, *Fund. Math.*, **41** (1954), 12—20.
21. On σ-complete Boolean algebras, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Cl. **III**, **3** (1955), 7—9. О σ-полных булевых алгебрах.
22. A theorem on non-classical functional calculi, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, Cl III, **4** (1956), 649—650.
23. On the Herbrand theorem, *Coll. Math.*, **6** (1958), 55—59.
24. Some applications of interior mapping, *Fund. Math.*, **45**, (1958), 200—212.
25. Distributivity and representability, *Fund. Math.*, **48** (1959), 105—117.
26. Der Heytingsche Prädikatenkalkül und metrische Räume. Constructivity in Mathematics, Proc. Coll. Amsterdam, 1957, 250—253.
27. Representation and distributivity of Boolean algebras, *Coll. Math.*, **8** (1961), 1—13.
28. A topological characterization of open theories, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **9** (1961), 259—260.
29. On open theories, *Coll. Math.*, **9** (1962), 171—182.
30. On representations of Lindenbaum algebras, *Prace Matematyczne*, **7** (1962), 97—105.

31. On dense subsets of Boolean algebras, *Coll. Math.*, **10** (1963), 189—192.
32. On extensions and products of Boolean algebras, *Fund. Math.*, **53** (1963), 99—116.
33. A few problems on Boolean algebras, *Coll. Math.*, **11** (1963), 25—28

Сикорский и Трачик (Sikorski R., Traczyk T.)
1. On some Boolean algebras. *Bull. Acad. Pol. Sci.* Cl. III, **4** (1956), 489—492. О некоторых булевых алгебрах.
2. On free products of σ-distributive Boolean algebras, *Coll. Math.*, **11** (1963), 13—16.

Скотт (Scott D.)
1. The independence of certain distributive laws in Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **84** (1957), 258—261.
2. Prime ideal theorems for rings, lattices and Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **60** (1954), 390.
3. A new characterization of α-representable Boolean algebras. *Bull. Am. Soc.*, **61** (1955), 522—523.
4. Measurable cardinals and constructible sets, *Bull. Acad. Pol. Sci*, **9** (1961), 521—524.

Скотт и Тарский (Scott D., Tarski A.)
1. The sentential calculus with infinitely long expressions, *Coll.* Math., **6** (1958), 165—170.

Словиковский и Завадовский (Slowikowski W., Zawadowski W.)
1. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand, *Fund. Math.*, **42** (1955), 215—231.

Смит мл. (Smith E. C. jr.)
1. A distributivity condition for Boolean algebras, *Ann. of Math.*, **64** (1956), 551—561.

Смит мл. и Тарский (Smith E. C. jr., Tarski A.)
1. Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **84**. (1957), 230—257.

Спеккер (Specker E.)
1. Endenverbände von Räumen und Gruppen, *Math. Ann.*, **122** (1950), 167—174.
2. Zur Axiomatik der Mengenlehre, *Z. math. Logik u. Grundl. Math.*, **3** (1957), 173—210.

Стаблер (Stabler E. R.)
1. Sets of postulates for Boolean rings, *Am. Math. Monthly*, **48** (1941), 20—28.
2. Boolean representation theory, *Am. Math. Monthly*, **51** (1944), 129—132.

Стамм (Stamm E.)
1. Beitrag zur Algebra der Logik, Monatsh. *Math. Phys.*, **22** (1911), 137—149.

Стоун (Stone M. H.)
1. Boolean algebras and their application to topology, *Proc. nat. Acad. Sci.* (Wash.), **20** (1934), 197—202.
2. Subsumption of the theory of Boolean algebras under the theory of rings, *Proc. nat. Acad. Sci.* (Wash.), **21** (1935), 103—105.

3. Postulates for Boolean algebras and generalized Boolean algebras, *Amer. J. Math.*, **57** (1935), 703—732.
4. Applications of Boolean algebras to topology, *Мат. сб.*, Н.с., **1** (1936), 765—771.
5. The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **40** (1936), 37—111.
6. Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. math. Soc.*, **41** (1937), 321—364.
7. Algebraic characterization of special Boolean rings, *Fund. Math.*, **29** (1937), 223—303.
8. Note on formal logic, *Amer. J. Math.*, **59** (1937), 506—514.
9. Topological representation of distributive lattices and Brouwerian logics, *Čas. mat. fys.*, **67** (1937), 1—25.
10. The representation of Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **44** (1938), 807—816.
11. On characteristic functions of families of sets, *Fund. Math.*, **33** (1945), 27—33.
12. Free Boolean rings and algebras, *An. Acad. Brasil. Ci.*, **26** (1954). 9—17.
13. Boundedness properties in function-lattices, *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 176—186.

Субрахманьян (Subrahmanyan N. V.)
1. Structure theory for a generalized Boolean ring, *Math. Ann.*, **141** (1960), 297—310.

Такеучи (Takeuchi K.)
1. The free Booleen σ-algebra with countable generators, *Math. J. Tokyo*, **1** (1953), 77—79.

Тарский (Tarski A.)
1. Une contribution a la théorie de la mesure, *Fund. Math.*, **15** (1930), 42—50.
2. Zur Grundlegung der Booleschen Algebra, *Fund. Math.*, **24** (1935), 177—198.
3. Über additive und multiplikative Mengenkörper und Mengenfunktionen, *C. R. Soc. Sci. Letter. Varsovie*, Cl. III, **30** (1937), 151—181.
4. Der Aussagenkalkül und die Topologie, *Fund. Math.*, **31** (1938), 103—134.
5. Einige Bemerkungen zur Axiomatik der Booleschen Algebra, *C. R. Soc. Sci. Lettr. Varsovie*, **31** (1938), 33—35.
6. Ideale in vollständigen Mengenkörpern, *Fund. Math.*, **32** (1939), 45—63; (II), **33** (1945), 51—65.
7. Über unßerreichbare Kardinalzahlen, *Fund. Math.*, **30** (1938), 68—89.
8. Cardinal algebras, New York, 1949.
9. A lattice-theoretical fix-point theorem and its applications, *Pacific J Math.*, **5** (1955), 285—309.
10. Equationally complete rings and relation algebras, *Ind. Math.*, **18** (1956), 39—46.
11 Algebraische Fassung des Massproblems, *Fund. Math.*, **31** (1938), 47—66.

12. Metamathematical proofs of some representation theorems for Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **61** (1955), 523.
13. On the calculus of relations, *J. Symb. Logic*, **6** (1941), 73—89.
14. Über das absolute Maß linearer Punktmengen, *Fund. Math.*, **30** (1938), 218—234.
15. Prime ideal theorems for Boolean algebras and the axioms of choice, *Bull. Amer. math. Soc.*, **60** (1954), 390—391.
16. Prime ideal theorems for set algebras and ordering principles, *Bull Amer. math. Soc.*, **60** (1954), 391.
17. Prime ideal theorems for set algebras and the axiom of choice, *Bull. Amer.* math. Soc., **60** (1954), 391.
18. Some problems and results relevant to the foundations of set theory. Logic, Methodology and Philosophy of Sciences, Proceedings of the 1960 International Congress, Stanford, 1962, 126—136.

Теодореску (Theodorescu R.)
1. Remarques sur les homomorphismes aléatoires, *Ann. Univ. „C. I. Parhon" Bucuresti*, Ser. Sti. Nat., **22** (1959), 55—58.

Терасака (Terasaka H.)
1. Theorie der topologischen Verbände: Ein Versuch zur Formalisierung der allgemeinen Topologie und der Theorie der reellen Funktionen, *Proc. Imp. Acad.* Jap., **13** (1937), 401—405.
2. Die Theorie der topologischen Verbände, Reprint of *Fund. Math.*, **33** (1939); *Coll. Papers Fac. Sci. Osaka Univ.*, Ser. A, **8** (1940).

Томита (Tomita M.)
1. Measure theory of complete Boolean algebras, *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.*, A. **7** (1952), 51—60.

Трачик (Traczyk T.)
1. On homomorphisms not induced by mappings, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **6** (1938), 103—106.
2. On the approximations of mappings by Baire mappings, *Coll. Math.*, **8** (1961), 67—70.
3. On axioms and some properties of Post algebras, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **10** (1962), 509—512.
4. Axioms and some properties of Post algebras, *Coll. Math.*, **10** (1963), 193—209.
5. Minimal extensions of weakly distributive Boolean algebras, *Coll. Math.*, **11** (1963), 17—24.
6. Some theorems on independence in Post algebras, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, **11** (1963), 3—8.

Уайтмен (Whiteman A.)
1. Postulates for Boolean algebra in terms of ternary rejection, *Bull. Amer. math. Soc.*, **43** (1937), 293—298.
2. Postulates for Boolean algebras involving the operations of complete disjunction, *Bull. Amer. math. Soc.*, **43** (1937), 293—298.

Улам (Ulam S.)
1. Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre, *Fund. Math.*, **16** (1930), 140—150.
2. Concerning functions of sets, *Fund. Math.*, **14** (1929), 231—233.

Уоллес (Wallace A. D.)
1. Boolean rings and cohomology, *Proc. Amer. math. Soc.*, **4** (1953), 475.
Фадини (Fadini A.)
1. Algoritmi tra operzione unarie e binarie in un'algebra di Boole, *Ricerca (Napoli)*, **11** (1960), 16—34.
Фелл и Тарский (Fell J. M. G. and A. Tarski)
1. On algebras whose factor algebras are Boolean, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 297—318.
Фихтенгольц и Канторович (Fichtenholz G. et Kantorovitch L.)
1. Sur les opérations dans l'espace des fonctions bornées, *Studia Math.*, **5** (1934), 69—98.
Флойд (Floyd E. E.)
1. Boolean algebras with pathological orger topologies, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 687—689.
Фогель (Foguel S. R.)
1. Boolean algebras of projections of finite multiplicity, *Pacific J. Math.*, **9** (1959), 681—693.
Форадори (Foradori E.)
1. Zur Theorie des Carathéodoryschen Integrals, *Dtsch. Math.*, **4** (1939), 578—582.
Фортет (Fortet R.)
1. L'Algèbre de Boole et des applications en recherche opérationelle, *Cahiers Centre Etudes Rech. Oper.*, **4** (1959), 5—36.
Фостер (Foster A. L.)
1. The theory of Boolean-like rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, **59** (1946), 166—187.
2. *p*-rings and their Boolean vector representation, *Acta Math.* **84** (1951), 231—261.
3. The idempotent elements of a commutative ring, *Duke Math. J.* **12** (1945), 143—152.
Фринк мл. (Frink O. jr.)
1. Representations of Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **47** (1941), 755—756.
2. On the existence of linear algebras in Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **34** (1933), 329—333.
Фунаяма (Funayama N.)
1. Imbedding infinitely distributive lattices completely isomorphically into Boolean algebras, *Nagoya Math. J.*, **15** (1959), 71—81.
Хаимо (Haimo F.)
1. Some limits of Boolean algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **2** (1951), 566—576.
2. A representation for Boolean algebras, *Amer. J. Math.*, **73** (1951), 725—740.
Халмош (Halmos P. R.)
1. Measure Theory. New York, 1950 (Есть русский перевод: Халмош, Теория меры, ИЛ, М., 1953.)
2. The foundations of probability, *Amer. Math. Monthly*, **51** (1944), 497—510.

3. Polyadic Boolean algebras, *Proc. nat. Acad. Sci.* (Wash.), **40** (1954), 296—301.
4. Algebraic logic, (I), Monadic Boolean algebras, *Comp. Math.*, **12** (1955), 217—249; (II) Homogeneous locally finite polyadic Boolean algebras of infinite degree, *Fund. Math.*, **53** (1956), 255—325; (III), Predicates, terms and operations in polyadic algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **83** (1956), 430—470; (IV) Equality in polyadic algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **86** (1957), 1—27.
5. The basic concepts of algebraic logic, *Amer. Math. Monthly*, **63** (1956), 365—387.
6. The representation of monadic Boolean algebras, *Duke Math. J.*, **26** (1959), 447—454.
7. Free monadic algebras, *Proc. Amer. math. Soc.*, **10** (1959), 219—227.
8. Lectures on Boolean algebras, Toronto-New York-London, 1963.
9. Algebraic logic, New York, 1962.
10. Injective and projective Boolean algebras, *Proc. Sympos. Pure Math.* II (1961), 114—122.

Халперн (Halpern J. D.)
1. The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem, *Notices Amer. math. Soc.*, **8** (1961), 641.
2. Contributions to the study of the independence of the axiom of choice doctoral dissertation, University of California, 1962.
3. The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem, *Fund. Math.*, **55**, № 1 (1964), 57—66.

Хаммер (Hammer L. P.)
1. Shefferian algebras, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R.*, **3** (1959).

Хантингтон (Huntington E. V.)
1. Sets of independent postulates for the algebra of logic, *Trans. Amer. math. Soc.*, **5** (1904), 288—309.
2. A new set independent postulates for the algebra of logic with special reference to Whitehead and Russel's Principia Mathematica, *Proc. nat. Acad. Sci. (Wash.)*, **18** (1932) 179—180.

Ханф (Hanf W.)
1. On some fundamental problems concerning isomorphism of Boolean algebras, *Math. scand.*, **5** (1957), 205—217.
2. Models of languages with infinitely long expressions, International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Sciences; Abstract of contributed Papers, Stanford University, 1960 (mimeographed), p. 24.
3. Incompactness in languages with infinitely long expressions, *Fund. Math.*, **53** (1964), 309—324.
4. On a problem of Erdös and Tarski, *Fund. Math.*, **53** (1964), 325—334.

Харари (Harary F.)
1. Atomic Boolean-like rings with finite radical, *Duke Math. J*, **17** (1950), 273—276.

Хасеньягер (Hasenjaeger G.)
1. Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollstädigkeit

des Prädikatenkalküls der ersten Stufe, *J. of Symbolic Logic*, **18** (1953), 42—48.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch. *Stud. Math.*, **6** (1936), 18—19.

Хаупт и Пауk (Haupt O. u. Ch. Y. Pauc)
1. Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Masse, S.-B. math.-nat. Kl. bayer. Akad, Wiss. (1948), 247—253.
2. Vitalische Systeme in Booleschen σ-Verbänden, S.-B. math.—nat. Kl. bayer. Akad. Wiss. (1950), 187—207.
3. Holabedingungen und Vitalische Eigenschaft von Somensystem, *Arch. Math.*, **4** (1953), 107—114.
4. Über Adjunktion von Idealen in Booleschen Verbänden, Akad. Wiss. Mainz. Abh. Math.-Nat. Kl. (1957), 177—193.

Хейдер (Heider L. J.)
1. Prime dual ideals in Boolean algebras, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 397—408.
2. A representation theorem for measures on Boolean algebras, *Mich. Math. J.*, **5** (1958), 213—221.

Хейлс (Hales A. W.)
1. On the nonexistence of free complete Boolean algebras, doctoral dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, 1962.
2. On the nonexistence of free complete Boolean algebras, *Fund. Math.*, **54**, № 1 (1964), 45—66.

Хелсон (Helson H.)
1. On the symmetric difference of sets as a group operation, *Coll. Math.*, **1** (1948), 203—205.
2. Remark on measures in almost independent fields, *Studia Math.*, **10** (1948), 182—183.

Хенкин (Henkin L.)
1. The completeness of the first-order functional calculus, *J. Symb. Logic*, **14** (1949), 159—166.
2. Boolean representation through propositional calculus, *Fund. Math.*, **41** (1955), 89—96.
3. The algebraic structure of mathematical theories, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **7** (1955), 131—136.
4. La structure algébrique des théories mathématigues, *Paris*, 1956.
5. Metamathematical theorems equivalent to the prime ideals theorems for Boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, **60** (1954), 387—388.

Хенкин и Тарский (Henkin L., Tarski A.)
1. Cylindric algebras. *Proc. of symposia in pure math.*, **II** (1960), 83—113.
2. Cylindric algebras, Summaries of talks presented at the Summer Institute of Symbolic Logic, **3** (1957), 332—340.

Хоберман и Маккинси (Hoberman S., McKinsey J. C.C)
1. A set of postulates for Boolean algebra, *Bull. Amer. math. Soc.*, **43** (1937), 588—592.

Ходжес и Хорн (Hodges J. L., Horn A.)
1. On Maharam's conditions for measure, *Trans. Amer. math. Soc.*, **64** (1948), 594—595.

Хорн и Тарский (Horn A., Tarski A.)
1. Measures in Boolean algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **64** (1948), 467—497.
Христенсен и Пирс (Christensen D. J., Pierce R. S.)
1. Free products of α-distributive Boolean algebras, *Math. Scand.*, **7** (1959), 81—105.
Хьюит (Hewitt E.)
1. A note on measures in Boolean algebras, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 253—256.
2. A remark on density characters, *Bull. Amer. math. Soc.*, **52** (1946), 641—643.
Чанг (Chang C. C.)
1. On the representation of α-complete Boole an algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **85** (1957), 208—218.
Чанг и Хорн (Chang C. C., Horn A.)
1. Prime ideal characterization of generalized Post algebras, *Proc. Symp.* pure *Math.*, II, 43—48 (1961).
Чех (Čech E.)
1. On bicompact spaces, *Ann. ofMath.*, **38** (1937), 823—844.
Чин и Тарский (Chin L. H. and Tarski A.)
1. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras, *Univ. California Publ. Math.*, N. S., **1** (1951), 341—384.
Чоудхури (Choudhury A. C.)
1. On Boolean narings, *Bull. Calcutta math. Soc.*, **46** (1954), 41—46.
Шанин Н. А.
1. О произведении топологических пространств. *Тр. мат. ин-та АН СССР*, т. **24** (1948).
Шерман (Sherman S.)
1. On denumerably independent families of Borel fields, *Amer. J. Math.*, **72** (1950), 612—614.
Шеффер (Sheffer H. M.)
1. A set of five independent postulates for Boolean algebras with application to logical constants, *Trans. Am. math. Soc.*, **14** (1913), 481—488.
Шоландер (Sholander M.)
1. Postulates for distributive lattices, *Canad. J. Math.*, **3** (1951), 28—30.
2. Postulates for Boolean algebras, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 460—464.
Штейнгауз (Steinhaus H.)
1. Sur les distances des points des ensembles de mesure positive, *Fund. Math.*, **1** (1920), 93—104.
Эверетт и Улам (Everet C. J., Ulam S.)
1. Projective algebra, *Amer. J. Math.*, **68** (1946), 77—88.
Эллиот (Elliot J. C.)
1. Autometrization and the symmetric difference, *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 324—331.
Энгелькинг и Куратовский (Engelking R., Kuratowski K.)
1. Quelques théorèmes de l'Algèbre de Boole et leurs applications topologiques, *Fund. Math.*, **50** (1962), 519—535.

Энгелькинг и Пелчинский (Engelking R., Pełczyński A.)
1. Remarks on dyadic spaces, *Coll. Math.*, **11** (1963), 55—63.
Эномото (Enomoto S.)
1. Boolean algebras and field of sets, *Osaka Math. J.*, **5** (1953), 99—115.
Эпштейн (Epstein G.)
1. The lattice theory of Post algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, **95** (1960), 300—317.
Эрдёш (Erdös P., Tarski A.)
1. On families of mutually exclusive sets, *Ann. of Math.*, **44** (1953), 315—329.
2. On some problems involving inaccessible cardinals, Essays on foundations of mathematics, Jerusalem, 1961, 50—82.
Якуб (Yaqub F. M.)
1. Free extensions of Boolean algebras, Doctoral dissertation Purdue University, 1962.
Якубик (Jakubik J.)
1. Remarks on the Jordan — Dedekind condition in Boolean algebras, *Časopis. Pest. Mat.*, **82** (1957), 44—46 (Slovak).
2. Über Ketten in Booleschen Verbänden, *Math.-Fys. Časopis. Slovensk. Akad. Vied.*, **8**, 193—202 (russian).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р. СИКОРСКИЙ

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Редактор *Г. М. Цукерман*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шиповалов*
Технический редактор *Н. А. Турсукова*
Корректор *О. Ф. Иванова*

Сдано в производство 23/VII 1968 г.
Подписано к печати 15/XI 1968 г.
Бумага тип. № 2 $84\times108^1/_{32}=5{,}88$ бум. л.
19,74 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 18,03
Изд. № $^1/_{4126}$. Цена 1 р. 44 к. Зак. 2977
Тем. план 1968 г. изд-ва «Мир» пор. № 19

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Москва Ж-54, Валовая, 28.