

В. П. СИЛИН

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ
ВОЗДЕЙСТВИЕ
ИЗЛУЧЕНИЯ
БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ
НА ПЛАЗМУ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1973

530.1
С 36
УДК 533.9

Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму, Силин В. П. Монография, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1973.

Монография посвящена новой быстро развивающейся области физики, изучающей взаимодействие мощного электромагнитного излучения с плазмой. Изложены основные представления нелинейного параметрического воздействия излучения на плазму, для которого характерна резонансная неустойчивость, приводящая к возникновению возмущений плазменных колебаний, сопровождающихся нарастанием флуктуаций внутренних полей и образованием турбулентного состояния. Освещены лабораторные исследования, приведшие к экспериментальному открытию предсказанного теорией явления аномально быстрой передачи энергии электромагнитного поля плазме, отвечающего аномально большому высокочастотному сопротивлению турбулентного состояния плазмы. Все эти закономерности относятся как к радио-, так и лазерному диапазону излучения, что делает их в значительной мере универсальными.

Таблиц 2. Рис. 50. Библ. названий 215.

© Издательство «Наука», 1973.

С $\frac{0232-1826}{042(02)-73}$ 119-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Введение	7
Г л а в а I. Неустойчивость плазмы в сильном переменном электрическом поле относительно раскачки в ней потенциальных возмущений	15
§ 1. Дисперсионное уравнение потенциальных возмущений в холодной плазме	15
§ 2. Спектры потенциальных колебаний холодной плазмы в переменном электрическом поле высокой частоты	20
§ 3. Параметрический резонанс относительно раскачки потенциальных возмущений в холодной плазме	23
§ 4. Кинетическая теория дисперсионного уравнения потенциальных возмущений в сильном переменном электрическом поле	29
§ 5. Влияние теплового движения частиц плазмы на спектры потенциальных колебаний в электрическом поле высокой частоты	34
§ 6. Кинетическая параметрическая неустойчивость плазмы относительно раскачки потенциальных колебаний	37
Г л а в а II. Параметрическое возбуждение продольных колебаний плазмы в слабом высокочастотном электрическом поле	48
§ 7. Дисперсионное уравнение продольных возмущений в резонансной области около порога неустойчивости	48
§ 8. Аперiodическая неустойчивость для околопороговых значений напряженности внешнего поля	52
§ 9. Параметрическое возбуждение почти периодических продольных колебаний в околопороговой резонансной области. Основные соотношения	57
§ 10. Параметрическое возбуждение в околопороговой резонансной области почти периодических продольных колебаний со спектром (9.4)	63
§ 11. Параметрическое возбуждение в околопороговой резонансной области почти периодических потенциальных колебаний со спектром (9.3)	71

Г л а в а III. Параметрическая неустойчивость плазмы в сильном переменном электрическом и постоянном магнитном полях относительно возбуждения потенциальных возмущений	74
§ 12. Дисперсионные уравнения потенциальных возмущений плазмы, находящейся в переменном электрическом и сильном постоянном магнитном полях	74
§ 13. Влияние сильного переменного электрического поля высокой частоты на продольные колебания плазмы в постоянном магнитном поле (низкие температуры)	81
§ 14. Влияние сильного переменного электрического поля высокой частоты на продольные колебания плазмы в постоянном магнитном поле (высокие температуры)	85
§ 15. Параметрический резонанс относительно раскачки потенциальных возмущений в холодной плазме, находящейся в магнитном поле	88
§ 16. Сумматорный параметрический резонанс	92
§ 17. Ионно-циклотронная неустойчивость плазмы в высокочастотном электрическом поле	96
§ 18. Параметрическая аperiodическая неустойчивость плазмы в магнитном поле в околопороговой области	98
§ 19. Возбуждение колебаний в околопороговой области параметрической неустойчивости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле	103
§ 20. Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле, на высших гармониках частоты внешнего поля (околопороговая область)	112
Г л а в а IV. Взаимодействие электромагнитного поля с плазмой, приводящее к раскачке непотенциальных возмущений поля	121
§ 21. Параметрическая неустойчивость плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле, связанная с развитием непотенциальных возмущений	121
§ 22. Параметрическая непотенциальная неустойчивость плазмы в сильном высокочастотном электрическом и постоянном магнитном полях	130
§ 23. Дисперсионное уравнение ϵ возмущений в плазме, находящейся в монохроматическом электромагнитном поле конечной длины волны	134
§ 24. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ), комбинационное рассеяние с участием высокочастотной плазменной волны и сильная связь электромагнитного поля с плазмой	141

Глава V. Параметрический резонанс в пространственно неоднородной плазме	150
§ 25. Параметрическое возбуждение поверхностных плазменных волн	150
§ 26. Параметрический резонанс в окрестности удвоенной собственной частоты плазменных колебаний	161
§ 27. Параметрическая неустойчивость при резонансе поля накачки с электронными ленгмюровскими колебаниями, обусловленная осцилляциями плотности заряда на удвоенной частоте внешнего поля	169
§ 28. Стабилизирующее влияние пространственной неоднородности плазмы на параметрическую неустойчивость. Аперiodическая неустойчивость	174
§ 29. Стабилизирующее влияние пространственной неоднородности плазмы на параметрическую неустойчивость. Периодическая неустойчивость	180
Глава VI. Нелинейная теория параметрического воздействия излучения большой мощности на плазму	186
§ 30. Уравнения квазилинейного приближения для распределений частиц и неравновесного поля в турбулентном состоянии плазмы, возникающем при параметрическом воздействии переменного электрического поля	186
§ 31. Релаксация распределения электронов плазмы в сильном поле волны накачки	202
§ 32. Нагрев плазмы и возрастание высокочастотной проводимости плазмы в сильном переменном электрическом поле	211
§ 33. Стационарный уровень плазменных колебаний в параметрически неустойчивой плазме, обусловленный нелинейным взаимодействием волн, и аномальная проводимость плазмы	216
§ 34. Численный эксперимент и аномальная высокочастотная проводимость плазмы	227
Глава VII. Результаты экспериментального исследования воздействия излучения большой мощности на плазму	233
§ 35. Лабораторные эксперименты по исследованию явлений параметрического воздействия на плазму мощного электромагнитного излучения	233
§ 36. Ионосферные эксперименты по исследованию явлений параметрического воздействия на плазму мощного электромагнитного излучения	269
Заключение	273
Литература	275

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга возникла в результате проведения цикла теоретических исследований, которые велись в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР в течение последних семи лет. Наши работы первоначально были начаты в связи с задачами радиационного ускорения плазмы, которые ставились в пятидесятых годах В. И. Векслером. В таком подходе плазма должна была подвергаться воздействию сильного электромагнитного поля, что в то время представляло мало изученное явление. Сформулированные в 1965 г. первые наши представления о параметрическом воздействии электромагнитного излучения на плазму привели к тому, что экспериментаторы начали проведение исследований по проверке предсказаний теории и по отысканию явлений, которые в первоначальном состоянии теории можно было ожидать на пути аналогий с другими проявлениями турбулентности плазмы. За прошедшие годы теория получила значительное развитие, возник целый ряд экспериментальных результатов, подтвердивших теоретические представления. В последние два-три года существенно возрос приток работающих в этой области физики, возрос интерес как в Советском Союзе, так и за рубежом. Сейчас ясна применимость представлений о параметрическом воздействии излучения на плазму как в области СВЧ-диапазона, так и в области светового диапазона. Делаются первые шаги по перенесению таких представлений на взаимодействие излучения с твердым телом. Все это позволяет думать о целесообразности концентрации имеющегося на сегодняшний день материала в одной книге, что, как хотелось бы надеяться, может способствовать ускорению развития исследований по воздействию электромагнитного излучения большой мощности на плазму и другие среды.

Март 1971 г.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

Воздействие электромагнитного излучения на плазму привлекает внимание физиков в течение длительного времени. Такой интерес обусловлен необходимостью понимания явлений распространения и поглощения электромагнитных волн в ионосфере и плазме космического пространства, явлений нагрева плазмы в устройствах, предлагаемых на пути решения проблемы управляемого термоядерного синтеза, явлений, в которых плазма служит для преобразования различных волн. Многочисленными исследователями сравнительно хорошо изучены эффекты воздействия слабых волн на плазму, когда такие явления соответствуют линейной электродинамике. Электромагнитные волны с большой напряженностью поля приводят к различным нелинейным явлениям в плазме. Можно сказать, что своеобразной особенностью воздействия излучения большой мощности на плазму оказывается зачастую резонансный характер такого воздействия, о котором в более широком плане можно сказать как о параметрическом воздействии поля на плазму.

Под влиянием сильного электромагнитного поля изменяются во времени — осциллируют — параметры, характеризующие плазму. Так, например, из-за различия знаков зарядов и масс электронов и ионов осциллирует их относительная скорость, а поэтому, очевидно, осциллирует плотность электрического тока в плазме. Изменение во времени параметров плазмы приводит, вообще говоря, как и в хорошо изученном случае механических незамкнутых колебательных систем, к возможности параметрического резонанса, когда под действием электрического поля достаточно мощного электромагнитного излучения в плазме нарастает со временем внутреннее поле флуктуаций. Развитие такой параметрической неустойчивости меняет свойства плазмы и может явиться определяющим

для всего характера воздействия излучения на плазму. Сказанное здесь очевидно связано с представлениями о турбулентности плазмы, которая, как это сейчас широко известно, возникает во многих экспериментальных плазменных устройствах и в целом ряде случаев качественно меняет состояние плазмы. Важной особенностью параметрического воздействия излучения на плазму оказывается то, что спектр нарастающего внутреннего плазменного поля лежит в области частот, сравнимых с частотой мощного поля излучения накачки, или же в области меньших частот.

Отсюда можно понять причину, приводящую к широкому кругу специфических особенностей воздействия поля высокой частоты на плазму, усложняющих как теоретическое, так и экспериментальное исследование возникающих при этом явлений.

Коснемся кратко тех представлений о взаимодействии излучения с плазмой, на которых базируется линейная электродинамика. Обычно в теории линейного воздействия излучения на плазму пользуются представлениями о комплексной диэлектрической постоянной, которая в отсутствие сильного постоянного поля является скалярной функцией

$$\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon'' \quad (\text{B.1})$$

Для полностью ионизированной плазмы и высокой частоты ω_0 электромагнитного поля, когда такая частота существенно превышает частоту столкновений электронов с ионами ν_{ei} , действительная часть диэлектрической постоянной значительно превышает мнимую. При этом

$$\varepsilon' = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2}, \quad \omega_{Le}^2 = \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \approx 3 \cdot 10^9 n_e, \quad (\text{B.2})$$

где ω_{Le} — ленгмюровская частота электронов, e и m_e — заряд и масса электрона, а n_e — число электронов плазмы в 1 см^3 . Это выражение для действительной части диэлектрической постоянной позволяет, в частности, говорить о непрозрачности плазмы при $\omega_0 < \omega_{Le}$. Мнимая часть диэлектрической постоянной

$$\varepsilon'' \equiv \frac{4\pi\sigma}{\omega_0} = \frac{\omega_{Le}^2 \nu_{ei}}{\omega_0^3} \quad \left(\nu_{ei} = \frac{4}{3} \frac{V\sqrt{2\pi} e^2 e_i^2 n_i \Lambda}{m_e^2 v_{Te}^2} \right) \quad (\text{B.3})$$

характеризует поглощение электромагнитного поля плазмой, причем здесь e_i - заряд ионов, n_i - число ионов в единице объема, Λ - кулоновский логарифм, а $v_{Te} = \sqrt{\frac{\kappa T_e}{m_e}}$ - тепловая скорость электронов (κ - постоянная Больцмана, а T_e - температура электронов).

Для плазмы с параметрами $n_e \approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $\kappa T_e \sim 1 \text{ эв}$, $\Lambda = 10$ имеем

$$\omega_{Le} \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}, \quad v_{ei} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}.$$

Поэтому для частот ω_0 внешнего поля, близких к ω_{Le} , имеем $\epsilon'' \sim 10^{-4}$, что соответствует сравнительно малому поглощению плазмой энергии электромагнитного поля.

Необходимость определенного пересмотра линейной теории взаимодействия излучения с плазмой легко может быть понята при рассмотрении условий, в которых давление плазмы оказывается значительно меньшим давления электрического поля волны:

$$n_e \kappa T_e \ll \frac{E_0^2}{4\pi}. \quad (\text{B.4})$$

Для $\omega_0 \sim \omega_{Le}$ это неравенство соответствует тому, что тепловая скорость электронов v_{Te} оказывается малой по сравнению со скоростью осцилляций v_E электрона в электрическом поле волны:

$$v_{Te} \ll v_E = \frac{|e| E_0}{m_e \omega_0}. \quad (\text{B.5})$$

Следует заметить, что в условиях частот ω_0 , сравнимых с ω_{Le} , напряженность магнитного поля по порядку величины сравнима с напряженностью электрического поля. Поэтому в нерелятивистских условиях ($v_{Te} \ll c$, $v_E \ll c$), о которых ниже только и будет идти речь, основным в силе Лоренца

$$e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right), \quad (\text{B.6})$$

действующей на частицы плазмы, является электрическое поле ($\mathbf{E} = E_0 \sin \omega_0 t$).

В сильном электрическом поле, когда выполняется неравенство (B. 5), частота столкновений электронов с ионами становится определяющей скоростью осцилляций

электронов и соответственно с ростом напряженности электрического поля убывает как v_E^3 . Этот результат об уменьшении частоты электрон-ионных соударений и соответственно об уменьшении обычной диссипации электромагнитного излучения плазмы заставил по-новому взглянуть на физические явления в плазме, находящейся в сильном электрическом поле высокой частоты. Уже в работе [1] было указано, что такая причина нелинейности свойств плазмы, какой является зависящая от времени и от напряженности электрического поля скорость осцилляций заряженных частиц, будет проявляться в целом ряде кинетических характеристик плазмы, а возможные в этом направлении исследования смогут составить новый раздел кинетической теории плазмы. Значительную часть исследований такого направления составили работы по изучению параметрической неустойчивости плазмы и эффектов, связанных с такой неустойчивостью и проявляющихся в воздействии мощного электромагнитного излучения на плазму. Такие работы легли в основу содержания этой книги.

Сильное электрическое поле излучения меняет дисперсионные свойства плазмы. Важным проявлением такого изменения является параметрическая неустойчивость плазмы.

В первой главе книги будет изложена теория параметрической неустойчивости плазмы, находящейся в сильном высокочастотном поле, относительно раскачки в ней возмущений, электрическое поле которых является потенциальным. При этом речь идет о влиянии на плазму таких полей, в которых скорость электронных осцилляций значительно превышает тепловую скорость или сравнима с ней. В области частот $\omega_0 \approx \omega_{Le}$ и $\omega_0 \lesssim \omega_{Le}$ воздействие такого поля на плазму приводит к параметрическому резонансу, причем в окрестности $n\omega_0 = \omega_{Le}$ возмущения продольного поля возрастают с максимальным инкрементом

$$\gamma \sim \omega_{Le} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}, \quad (B.7)$$

а при $\omega_0 < \omega_{Le}$ вне области

$$|n\omega_0 - \omega_{Le}| \sim \omega_{Le} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3}$$

порядок величины максимального инкремента нарастающих

возмущений дается формулой

$$\gamma \sim \omega_{Le} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2}. \quad (\text{В.8})$$

При этом наиболее быстро растут возмущения с длиной волны, сравнимой с амплитудой осцилляций электронов в поле волны накачки мощного излучения, воздействующего на плазму.

Испускание и поглощение плазменных волн частицами плазмы благодаря эффекту Черенкова делает возможной, как это показано в первой главе, параметрическую неустойчивость неизотермической плазмы относительно развития потенциальных возмущений при частотах внешнего поля, значительно превышающих частоту плазменных колебаний ($\sim \omega_{Le}$). При этом нарастающие возмущения представляют собой как высокочастотные плазменные волны, так и низкочастотные волны ионного звука.

В окрестности резонанса внешнего поля с плазменными колебаниями ($\omega_0 \approx \omega_{Le}$) возможно значительное снижение величины напряженности электрического поля накачки, при котором начинается развиваться параметрическая неустойчивость плазмы. Теория параметрического возбуждения потенциальных колебаний плазмы в сравнительно слабом высокочастотном поле для резонансной области вблизи порога неустойчивости излагается во второй главе книги. Следует подчеркнуть, что для оптической области спектра, когда источниками мощного излучения являются лазеры, по-видимому, именно околопороговая область представляет ближайший интерес. Помимо этого физические представления о воздействии мощного излучения в околопороговой области значительно упрощаются, что позволяет существенно детализировать теорию и надеяться на детальное экспериментальное изучение явлений, возникающих в этой области.

Среди таких физических представлений отметим хорошо известные представления о комбинационном рассеянии электромагнитных волн. Именно среди процессов параметрического нарастания плазменных возмущений могут быть такие, которые соответствуют комбинационному преобразованию внешней поперечной электромагнитной волны накачки в две продольные плазменные волны.

В случае плазмы с температурой электронов, значительно превышающей температуру ионов, такими двумя волнами

являются продольная высокочастотная ленгмюровская волна и продольная низкочастотная ионно-звуковая волна *).

Третья глава посвящена теории параметрической неустойчивости плазмы в сильном высокочастотном электрическом и в сильном постоянном магнитном полях. Также рассматриваются потенциальные колебания, которые сравнительно легко взаимодействуют с частицами плазмы. В сильном магнитном поле спектр плазменных колебаний становится существенно богаче. На такие колебания сильное высокочастотное электрическое поле может оказывать значительное влияние, видоизменяя спектры колебаний и приводя к возникновению параметрических неустойчивостей. Частотная область параметрических резонансов в замагниченной плазме весьма сильно расширяется и развитие неустойчивостей облегчается. Все это позволяет говорить о возможности увеличения эффектов параметрического воздействия излучения на находящуюся в сильном магнитном поле плазму, частными примерами которой является ионосферная плазма и плазма устройств в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу, использующих метод магнитного удержания плазмы.

Теории взаимодействия электромагнитного поля с плазмой, приводящего к неустойчивости, связанной с развитием непотенциальных возмущений поля в плазме, посвящена четвертая глава. Здесь изложены результаты теории неустойчивости плазмы относительно раскачки коротковолновых возмущений, а также возмущений с длинами волн, сравнимыми с длиной волны поля накачки. В последнем случае прослежена связь параметрической неустойчивости с вынужденным рассеянием Мандельштама — Бриллюэна, которая имеет место в околоторговой области.

*) Как обычно, при комбинационном рассеянии при этом выполняются законы сохранения частот и волновых векторов:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad k_1 = k_2 + k_3.$$

В плазме, находящейся в сильном магнитном поле, благодаря увеличению числа возможных колебаний, очевидно, увеличивается число возможных комбинационных процессов преобразования волн. Наконец, комбинационное рассеяние в плазме возможно и без изменения типа рассеиваемой волны, когда, например, поперечная волна преобразуется снова в поперечную волну иной частоты и, скажем, в низкочастотную продольную волну. Если последняя оказывается ионно-звуковой, то такой процесс представляет собой рассеяние Мандельштама — Бриллюэна.

Причиной параметрического резонанса плазмы в определенных условиях становится пространственная неоднородность плазмы, которая проявляется либо в факте тех резонансных собственных частот, которые отличают неоднородную плазму от однородной, либо в новой возможности взаимосвязи различных плазменных колебаний, ведущей к нарастанию возмущения внутреннего плазменного поля под действием поля накачки. Изложению теоретических результатов, освещающих такие стороны параметрического воздействия излучения на плазму, посвящено содержание пятой главы.

Естественно возникновение вопроса о том, что последует за развитием неустойчивости плазмы, при которой на начальной стадии имеет место экспоненциальное нарастание во времени возмущений внутреннего поля и осцилляций величин, характеризующих распределение частиц плазмы. Изложение теоретических представлений и результатов, позволяющих давать ответ на такой вопрос, дается в шестой главе. Здесь изложены общие положения теории влияния возникшего в плазме флуктуационного поля на распределения частиц. Показано, как нарастает во времени энергия электронов плазмы при параметрическом резонансе и как возникает нагрев плазмы, который может быть охарактеризован турбулентной высокочастотной проводимостью, определяющей аномальное поглощение плазмы. Дана теория квазистационарного спектра возмущений в неустойчивой плазме, устанавливающегося благодаря нелинейному взаимодействию плазменных волн.

Возникающие при неустойчивости возмущения плазмы определяют аномальную проводимость, которая (см. формулу (В.3)) может быть охарактеризована эффективной частотой рассеяния электрона на плазменных флуктуациях, существенно превышающей частоту электрон-ионных соударений.

Изложенное в шестой главе содержит интересные иллюстрации численных экспериментов, которые, подтверждая результаты кинетической теории параметрического воздействия на плазму, одновременно расширяют ее применение на задачи, аналитически не рассмотренные.

Последняя, седьмая глава книги посвящена экспериментальным исследованиям параметрического взаимодействия излучения большой мощности с плазмой. В ней

кратко изложены результаты, полученные в последние годы при проведении таких работ в СССР и за рубежом. В экспериментальных работах обнаружено возбуждение колебаний в плазме, аномально сильное поглощение электромагнитного излучения, повышенный нагрев плазмы и появление значительного числа быстрых частиц, свидетельствующих об эффективной передаче плазме энергии электромагнитного излучения.

Содержание книги позволяет говорить о качественно новой картине воздействия высокочастотного излучения большой мощности на плазму. Детальное ознакомление с книгой позволит понять, что раздел кинетической теории плазмы, посвященный параметрическому взаимодействию излучения с плазмой, освещает много сторон такой картины.

ГЛАВА I

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСКАЧКИ В НЕЙ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Дисперсионное уравнение потенциальных возмущений в холодной плазме

Сравнительно полный анализ устойчивости плазмы может быть проведен в условиях, когда внешнее переменное поле можно считать пространственно однородным и одновременно можно пренебречь влиянием переменного во времени магнитного поля. Соответственно этому для электрического поля в плазме примем

$$E_0(t) = E_0 \sin \omega_0 t. \quad (1.1)$$

Такое поле впредь будем также называть внешним полем или полем накачки. Пренебрежение переменным магнитным полем возможно, например, при нерелятивистском движении частиц плазмы и для частоты внешнего поля ω_0 , не слишком малой по сравнению с электронной ленгмюровской частотой плазмы $\omega_{Le} = \sqrt{4\pi e^2 n_e m_e^{-1}}$. В этом случае вклад магнитного поля в силу, действующую на заряженную частицу плазмы, оказывается малым. С другой стороны, пренебрежение неоднородностью электрического поля накладывает ограничение на длины волн возмущений, которые мы будем ниже рассматривать. Именно в этом случае длины таких волн следует считать малыми по сравнению с характерным размером неоднородности внешнего электрического поля в плазме.

В дальнейшем всюду будем считать частоту внешнего поля много большей частоты столкновений электронов с ионами. Поэтому в данном параграфе столкновениями частиц полностью пренебрежем.

Начнем наше изложение с одного из простейших случаев теории, пренебрегающей тепловым движением частиц плазмы. Последнее возможно в сильном электрическом поле, где энергия осциллирующих электронов существенно превышает их тепловую энергию. Тогда плазму можно описывать с помощью уравнений гидродинамики многокомпонентного газа заряженных частиц:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial r_i} \right) \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}] \right\}, \quad (1.2)$$

где n_α и \mathbf{v}_α — плотность и скорость частиц сорта α . В электрическом поле (1.1) и в отсутствие магнитного поля возможно пространственно однородное состояние плазмы, в котором скорость частиц плазмы \mathbf{u}_α определяется следующей формулой:

$$\mathbf{u}_\alpha = - \frac{e_\alpha}{m_\alpha \omega_0} \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t. \quad (1.3)$$

Рассмотрим малые колебания плазмы около такого равновесного состояния. При этом возмущения поля будем считать потенциальными. Считая неравновесные величины пропорциональными $\exp i\mathbf{k}\mathbf{r}$, исключая поле с помощью уравнения Пуассона и используя уравнения (1.2), находим следующее уравнение, описывающее во времени плотность числа частиц δn_α :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha \right)^2 \delta n_\alpha = - \frac{4\pi e_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha^{(0)} \sum_\beta e_\beta \delta n_\beta, \quad (1.4)$$

где $n_\alpha^{(0)}$ — плотность числа частиц в пространственно однородном состоянии, а суммирование ведется по сортам частиц. Введя функции

$$v_\alpha(t) = e_\alpha \delta n_\alpha \exp \left\{ -i \frac{e_\alpha E_0 \mathbf{k}}{m_\alpha \omega_0^2} \sin \omega_0 t \right\}, \quad (1.5)$$

представляющие собой плотности заряда частиц сорта α в системе координат, колеблющейся вместе с таким сор-

том частиц, получаем, например, для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, систему следующих двух уравнений [3]:

$$\left. \begin{aligned} v_e'' + \omega_{Le}^2 [v_e + v_i \exp(-ia \sin \omega_0 t)] &= 0, \\ v_i'' + \omega_{Li}^2 [v_i + v_e \exp(ia \sin \omega_0 t)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Здесь $\omega_{L\alpha} = (4\pi e_\alpha^2 n_\alpha^{(0)} m_\alpha^{-1})^{1/2}$ — ленгмюровская частота частиц сорта α ,

$$a = \left(\frac{e}{m_e} - \frac{e_i}{m_i} \right) \frac{k E_0}{\omega_0^2} \approx \frac{e k E_0}{m_e \omega_0^2}. \quad (1.7)$$

В системе уравнений (1.6) малым параметром является отношение масс электрона и иона. Наличие такого малого параметра позволяет достаточно полно проанализировать следствия, вытекающие из системы уравнений (1.6). Однако, прежде чем использовать приближенный анализ этих уравнений, заметим, что решения уравнений (1.6) в соответствии с общей теорией уравнений типа Хилла [4] могут быть записаны в виде *)

$$v_\alpha(t) = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_\alpha^{(n)} e^{-in\omega_0 t}. \quad (1.8)$$

Используя известное разложение по функциям Бесселя первого рода

$$e^{ia \sin \omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a) e^{in\omega_0 t}, \quad (1.9)$$

можем записать следующую систему уравнений для коэффициентов $u_\alpha^{(n)}$, вытекающую из (1.6):

$$\left. \begin{aligned} u_e^{(n)} + R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(a) u_i^{(m)} &= 0, \\ u_i^{(n)} + R_i^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(a) u_e^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

*) Анализ системы (1.6) см. также в работе Окутани [13].

Здесь!

$$R_{\alpha}^{(n)} = \frac{\delta \varepsilon_{\alpha}(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_{\alpha}(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})}, \quad (1.11)$$

$$\delta \varepsilon_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}. \quad (1.12)$$

Последняя формула (1.12) представляет собой частичный вклад частиц сорта α в обычную продольную диэлектрическую проницаемость, возникающую в теории, пренебрегающей тепловым движением частиц плазмы, что соответствует исходным уравнениям (1.2)*.

Имея в виду определенную общность свойств, которыми обладает система уравнений (1.10), остановимся подробнее на ее исследовании. При этом удобно пользоваться понятием о резонансных частотах электронов и ионов (ω_{re} и ω_{ri}), которые соответственно определяются уравнениями

$$1 + \delta \varepsilon_e(\omega_{re}, \mathbf{k}) = 0, \quad (1.13)$$

$$1 + \delta \varepsilon_i(\omega_{ri}, \mathbf{k}) = 0. \quad (1.14)$$

Ограничимся рассмотрением частот внешнего поля, много больших резонансных частот ионов. Тогда в соответствии с (1.11)

$$R_i^{(n)} \ll 1 \quad \text{при} \quad n \neq 0. \quad (1.15)$$

Это неравенство возможно благодаря малому отношению масс электрона и иона.

Далее будем различать резонансный и нерезонансный случаи. Под резонансным будем понимать случай, возникающий в условиях близости обертона внешней частоты к резонансной частоте электронов, когда выполняется неравенство

$$|n^2\omega_0^2 - \omega_{re}^2| \ll \omega_{re}^2. \quad (1.16)$$

В нерезонансном случае обе части этого неравенства сравнимы.

С другой стороны, можно различать две ветви возмущений: высокочастотную, для которой $|\omega| \sim \omega_{re}$, и низкочастотную, для которой $|\omega| \ll \omega_{re}$.

*) Написание в формулах (1.11) и (1.12) аргумента \mathbf{k} полезно с точки зрения общности последующего изложения.

Для высокочастотной ветви возмущений неравенство (1.15) выполняется также и при $n = 0$. В связи с этим решения системы (1.10) возможны лишь тогда, когда для некоторого значения $m = n$ величина $R_e^{(n)}$ оказывается много большей единицы, в то время как для остальных значений $m \neq 0$ величина $R_e^{(m)}$ по порядку величины близка к единице. Соответственно этому все коэффициенты $u_i^{(m)}$ сравнимы по величине, а среди коэффициентов $u_e^{(m)}$ наибольшим является $u_e^{(n)}$. Очевидно, что это соответствует резонансному случаю, лишь если $n \neq 0$. Тогда с точностью до членов первого порядка по отношению квадратов ионной и электронной резонансных частот получаем следующее условие разрешимости системы (1.10):

$$1 = R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}^2(a) R_i^{(m)}. \quad (1.17)$$

Это уравнение является дисперсионным уравнением высокочастотных потенциальных возмущений плазмы в переменном электрическом поле.

Обратимся теперь к низкочастотным колебаниям, для которых в нерезонансном случае все $R_e^{(m)} \sim 1$. Поэтому, имея в виду неравенство (1.15), можем записать как следствие уравнений (1.10):

$$u_{e_{\pm}}^{(n)} = [R_e^{(n)} R_i^{(0)} J_n(a) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) u_e^{(l)}]. \quad (1.18)$$

Отсюда, как условие разрешимости, вытекает следующее дисперсионное уравнение низкочастотных возбуждений:

$$1 = R_i^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) R_e^{(n)}. \quad (1.19)$$

В резонансном случае, когда выполнено неравенство (1.16), для низкочастотных возбуждений ($|\omega| \ll \omega_0$), как это очевидно, велики $R_e^{(n)}$ и $R_e^{(-n)}$. При этом из (1.10) следует, что $u_e^{(\pm n)} \gg u_e^{(m)}$ ($m \neq \pm n$). Поэтому после исключения $u_i^{(l)}$ из уравнений (1.10) можно использовать

следующее приближенное уравнение:

$$u_e^{(k)} = R_e^{(k)} \left\{ J_k(a) R_i^{(0)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) u_l^{(l)} + \right. \\ \left. + \sum_{m \neq 0} J_{k-m}(a) R_i^{(m)} [J_{n-m}(a) u_e^{(m)} + J_{-n-m}(a) u_e^{(-n)}] \right\}. \quad (1.20)$$

Отсюда при учете $R_e^{(\pm n)} \gg R_e^{(m)}$ ($m \neq \pm n$) получаем

$$1 = R_i^{(0)} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(a) R_e^{(m)} + \right. \\ \left. + 2R_e^{(n)} R_e^{(-n)} J_n^2(a) \sum_{m \neq 0} R_i^{(m)} [-J_{n-m}^2(a) + \right. \\ \left. + (-1)^n J_{n-m}(a) J_{-n-m}(a)] \right\}. \quad (1.21)$$

Дополнительное слагаемое в правой части (1.21) уточняет в резонансной области дисперсионное уравнение низкочастотных колебаний (ср. (1.19)). Благодаря наличию электрического поля в аргументах функций Бесселя дисперсионные уравнения (1.17), (1.19) и (1.21) содержат нелинейную зависимость спектров потенциальных возмущений от напряженности внешнего переменного поля. В этом смысле полученные дисперсионные уравнения описывают нелинейный эффект воздействия внешнего электрического поля на плазму.

§ 2. Спектры потенциальных колебаний холодной плазмы в переменном электрическом поле высокой частоты

Дисперсионные уравнения потенциальных колебаний плазмы, полученные в предыдущем параграфе, позволяют выявить влияние внешнего переменного электромагнитного поля на плазменные колебания с длиной волны, много меньшей характерного размера неоднородности внешнего поля. В силу того, что переменное электрическое поле меняет такие параметры основного состояния плазмы, как скорости заряженных частиц, то можно говорить, что внешнее поле оказывает параметрическое воздействие на плазму, а в плазменных колебаниях будут проявляться эффекты такого параметрического воздействия.

Обращаясь теперь к анализу следствий полученных дисперсионных уравнений, рассмотрим прежде всего предел высоких частот внешнего поля, много большей электронной ленгмюровской частоты. В таком пределе частота внешнего поля существенно превышает собственную частоту плазменных колебаний. В связи с последним уравнение (1.17) имеет решение при $n = 0$. Одновременно можно утверждать, что $R_i^{(0)} \gg R_i^{(m)}$ с $m \neq 0$. Поэтому дисперсионное уравнение высокочастотных колебаний принимает вид

$$1 = R_e^{(0)} J_0^2(a) R_i^{(0)}. \quad (2.1)$$

В точности такой же вид принимает и дисперсионное уравнение низкочастотных возбуждений (1.19). Поэтому обе ветви возбуждений могут рассматриваться с помощью уравнения (2.1), которое для холодной плазмы имеет следующий явный вид:

$$(\omega^2 - \omega_{Le}^2)(\omega^2 - \omega_{Li}^2) = \omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2 J_0^2(a). \quad (2.2)$$

Имея в виду малость отношения масс электрона и иона, получаем отсюда следующие два спектра колебаний плазмы [3]:

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 J_0^2(a), \quad (2.3)$$

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 [1 - J_0^2(a)]. \quad (2.4)$$

Первый из этих спектров мало отличается от обычного спектра электронных ленгмюровских колебаний. Проявление электрического поля здесь сказывается в малых членах и приводит к зависимости частоты от волнового вектора. Подобная зависимость соответствует пространственной дисперсии, обусловленной движением частиц в электрическом поле. Такое движение частиц оказывается весьма существенным для второго низкочастотного спектра (2.4). Это особенно ясно в пределе $a \ll 1$, когда формула (2.4) принимает следующий вид [3]:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{Li}^2 \left(\frac{k e E_0}{m_e \omega_0^2} \right)^2 \equiv (k w_s)^2, \quad (2.5)$$

где

$$w_s = \frac{e E_0 \omega_{Li}}{\sqrt{2} m_e \omega_0^2}. \quad (2.6)$$

Спектр колебаний (2.5) соответствует звуковым волнам с анизотропной скоростью звука (2.6). Такая анизотропия является следствием того, что анизотропный звук со спектром (2.5) обусловлен не тепловым давлением электронов, как это имеет место в случае обычного ионного звука в

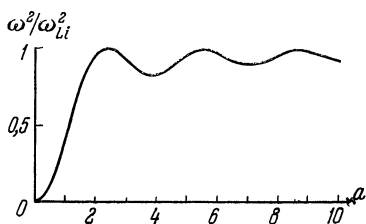


Рис. 1.

бесстолкновительной плазме, а тем эффективным давлением, которое возникает благодаря осцилляторному движению электронов в переменном электрическом поле, анизотропному в силу определенной ориентации электрического поля *).

С уменьшением длины волны согласно формуле (2.4) частота колебаний осциллирует (рис. 1), принимая максимальное значение, равное ленгмюровской частоте ионов в точках обращения в нуль функции Бесселя J_0 . К этому же значению частота стремится по асимптотическому закону

$$\omega = \omega_{Li} \left\{ 1 - \frac{1}{|\pi| |a|} \cos^2 \left(|a| - \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \quad a \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Из формулы (2.4) очевидно, что при отсутствии внешнего электрического поля отсутствуют обсуждаемые здесь низкочастотные колебания. Поэтому именно внешнее электрическое поле является причиной возникновения новой ветви плазменных волн. Предсказание такого результата воздействия внешнего переменного поля на плазму, сделанное Алиевым и автором [3], в известном смысле основано на перенесении результатов параметрической теории колебаний осцилляторов [5] на такую распределенную систему, какой является плазма, и соответствует тому фак-

*) В случае круговой поляризации внешнего электрического поля вместо (2.5) имеем

$$\omega = \frac{e E_0 \omega_{Li}}{m_e \omega_0^2 \sqrt{2}} k_{\perp},$$

где k_{\perp} представляет собой проекцию волнового вектора плазменного колебания на плоскость, перпендикулярную направлению распространения внешнего поля.

ту, что параметрическое воздействие с высокой частотой на осциллятор увеличивает его жесткость. В нашем случае плазмы аналогом такого увеличения жесткости является появление анизотропного давления, приводящего, например, к анизотропному звуку (2.5).

§ 3. Параметрический резонанс относительно раскачки потенциальных возмущений в холодной плазме

Продолжим наше рассмотрение тех следствий, которые вытекают из дисперсионных уравнений для возмущений холодной плазмы, полученных в первом параграфе, причем теперь будем интересоваться менее высокими частотами внешнего поля по сравнению с принятыми в предыдущем параграфе. Именно теперь будем считать, что частота внешнего электрического поля сравнима с электронной ленгмюровской.

Для высокочастотной ветви колебаний плазмы, спектр которых определяется дисперсионным уравнением (1.17), находим [2, 6]

$$\omega = \omega_{Le} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{(n\omega_0 + \omega_{Le})^2} \right\}. \quad (3.1)$$

В пределе $\omega_0 \gg \omega_{Le}$ эта формула переходит в (2.3). Здесь также влияние переменного электрического поля проявляется в малых поправочных членах и обуславливает зависимость частоты от волнового вектора. В то же время следует заметить, что такие поправочные члены являются малыми лишь в нерезонансной области, когда $n\omega_0 + \omega_{Le}$ не мало по сравнению с электронной ленгмюровской частотой.

Физически более существенные результаты дает анализ дисперсионного уравнения низкочастотной ветви (1.19), которое для холодной плазмы имеет вид

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{(\omega + n\omega_0)^2}{(\omega + n\omega_0)^2 - \omega_{Le}^2}. \quad (3.2)$$

Это дисперсионное уравнение позволяет рассмотреть не только нерезонансную область, но также позволяет продвинуться и в рассмотрении резонансного случая.

Прежде всего вдали от резонанса обертона внешней частоты с электронной ленгмюровской, имея в виду малость ω , можно записать следующее приближенное

решение уравнения (3.2) [2]:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{(n\omega_0)^2}{(n\omega_0)^2 - \omega_{Le}^2} = \omega_{Li}^2 \left\{ 1 - \Phi_{\frac{\omega_{Le}}{\omega_0}}(a) \right\}, \quad (3.3)$$

где

$$\Phi_x(a) = \frac{\pi x}{\sin \pi x} J_x(a) J_{-x}(a). \quad (3.3a)$$

Для длин волн, много больших амплитуды осцилляций электрона в электрическом поле ($a \ll 1$), из формулы (3.3) получаем

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 \omega_{Li}^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}. \quad (3.4)$$

Ясно, что формула (3.4) описывает действительную частоту колебаний лишь в том случае, когда частота внешнего поля превышает ленгмюровскую частоту электронов. При меньших значениях частота потенциальных возмущений в плазме становится чисто мнимой ($\omega = \pm i\gamma$) [2]:

$$\gamma^2 = \frac{1}{2} \frac{a^2 \omega_{Li}^2 \omega_0^2}{\omega_{Le}^2 - \omega_0^2}, \quad (3.5)$$

что соответствует аperiodическому возрастанию возмущения. Таким образом, мы видим, что в результате воздействия внешнего переменного электрического поля в плазме становятся возможными нарастающие во времени возмущения. Иными словами, плазма становится неустойчивой.

Возникновение неустойчивости, естественно, может быть усмотрено не только в пределе длинных волн, но и непосредственно из формулы (3.3), что иллюстрируется табл. 1 значений функции $\Phi_x(a)$. При этом по порядку величины инкремент нарастающих колебаний может сравниваться с электронной ленгмюровской частотой. Заметим, что из найденного выше решения (3.3) видно, что изменение знака ω^2 может происходить при переходе через резонансные точки $n\omega_0 = \omega_{Le}$. Окрестности резонансов интересны также потому, что, как это видно из формул (3.5), инкремент нарастающих потенциальных колебаний плазмы увеличивается при приближении к резонансной точке. Подобное увеличение ограничено, ибо функция (3.3) и вытекающая из нее (3.5) получены в предположении

Таблица 1

x	$\Phi_x(1)$	$\Phi_x(2)$	$\Phi_x(5)$	x	$\Phi_x(1)$	$\Phi_x(2)$	$\Phi_x(5)$
1/6	0,573	0,0293	0,0238	5/3	1,131	0,508	0,154
1/4	0,558	0,00159	0,0136	7/4	1,081	0,207	0,103
1/3	0,537	-0,0405	-0,00161	11/6	0,996	-0,334	0,0488
1/2	0,454	-0,190	-0,0542	13/6	1,261	2,541	-0,121
2/3	0,271	-0,515	-0,166	9/4	1,190	2,019	-0,204
3/4	+0,0833	-0,850	-0,278	7/3	1,147	1,732	-0,295
5/6	-0,305	-1,515	-0,496	5/2	1,115	1,453	-0,554
7/6	2,037	2,427	0,232	8/3	1,056	1,269	-1,017
5/4	1,644	1,733	0,525	11/4	1,246	1,171	-1,466
4/3	1,499	1,363	0,401	17/6	1,089	1,023	-2,292
3/2	1,249	0,914	0,258				

малости ω . Естественно, что область, в которой инкремент нарастающих колебаний максимален, представляет особый интерес. Поэтому вернемся к уравнению (3.2) и рассмотрим вытекающие из него следствия в окрестности резонанса обертона внешней частоты с электронной ленгмюровской.

Интересуясь такой резонансной областью, ограничимся сначала значениями параметра a , не малыми по сравнению с единицей. Тогда при решении уравнения (3.2) в правой его части достаточно ограничиться лишь теми резонансными слагаемыми, для которых $|(\omega + n\omega_0)^2 - \omega_{Le}^2| \ll \ll \omega_{Le}^2$. Имея в виду также малость частоты ω по сравнению с электронной ленгмюровской, из (3.2) получаем следующее биквадратное уравнение:

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{[n^2\omega_0^2 - \omega_{Le}^2]^2 - 2\omega_{Li}^2\omega_{Le}^2 J_n^2(a)}{2[n^2\omega_0^2 + \omega_{Le}^2]} + \frac{\omega_{Li}^2\omega_{Le}^2 [n^2\omega_0^2 - \omega_{Le}^2] J_n^2(a)}{n^2\omega_0^2 + \omega_{Le}^2} = 0, \quad (3.6)$$

решение которого в окрестности резонанса обертона внешней частоты с электронной ленгмюровской имеет вид [2,6]

$$\omega^2 = \frac{1}{8} \Delta_n^2 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{32}{\Delta_n^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} \right\} \omega_{Le}^2. \quad (3.7)$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta_n = \left(\frac{\omega_{Le}}{n\omega_0} \right)^2 - 1 \quad (3.8)$$

и учтен тот факт, что Δ_n мало по сравнению с единицей.

При знаке плюс в формуле (3.7) нарастание колебаний возможно, если выполнены следующие неравенства:

$$0 > \Delta_n > -2 \left[4J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Отсюда, в частности, следует, что при приближении n -го обертона частоты внешнего электрического поля со стороны больших значений к электронной ленгмюровской частоте плазма становится неустойчивой относительно раскачки в ней потенциальных колебаний при

$$n\omega_0 = \omega_{Le} \left\{ 1 + \left[4J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.10)$$

При этом для максимального порогового значения частоты внешнего поля получаем [7]

$$\omega_0 = \omega_{Le} \left\{ 1 + 1,1 \left(\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \right)^{2/3} \right\}. \quad (3.11)$$

В области (3.9) формула (3.7) дает

$$\frac{\omega}{\omega_{Le}} = \pm \frac{|\Delta_n|}{4} \left\{ \left[1 + \sqrt{\frac{32}{|\Delta_n|^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} \right]^{1/2} \pm \right. \\ \left. \pm i \left[-1 + \sqrt{\frac{32}{|\Delta_n|^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.12)$$

Согласно формуле (3.12) после прохождения порогового значения частоты (3.10) с уменьшением частоты внешнего поля инкремент нарастания колебаний плазмы увеличивается и при

$$n\omega_0 = \omega_{Le} \left\{ 1 + \left[\frac{1}{4} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.13)$$

достигает максимума, равного

$$\gamma = \omega_{Le} \left\{ \frac{\sqrt{27}}{32} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right\}^{1/3}. \quad (3.14)$$

При дальнейшем уменьшении частоты внешнего поля согласно формуле (3.12) инкремент убывает.

После того как оборот внешней частоты становится меньше электронной ленгмюровской частоты, инкремент нарастающих плазменных колебаний снова начинает увеличиваться. Соответственно для положительных значений Δ_n формула (3.7) описывает нарастание колебаний при знаке минус, а инкремент имеет вид

$$\gamma = \omega_{Le} \frac{\Delta_n}{2\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{32}{\Delta_n^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} - 1 \right\}^{1/2}. \quad (3.15)$$

В соответствии с этой формулой максимальное значение инкремента

$$\gamma = \omega_{Le} \left[\frac{1}{2} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/3} \quad (3.16)$$

достигается при

$$n\omega_0 = \omega_{Le} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/3} \right\}. \quad (3.17)$$

Затем инкремент убывает и при удалении от резонанса обертона внешней частоты с электронной ленгмюровской для инкремента (или частоты) можно использовать формулу (3.3). При этом вдали от резонанса инкремент по порядку величины совпадает с ионной ленгмюровской частотой.

Следует сказать несколько слов об узкой области в окрестности резонанса обертона внешней частоты и электронной ленгмюровской, ширина которой по порядку величины равна ионной ленгмюровской частоте и в которой спектр продольных возмущений следует рассматривать с помощью дисперсионного уравнения (1.21). В этой области для значений $a \sim 1$ инкремент по порядку величины сравним с ионной ленгмюровской частотой и при

$$|\Delta_n| \ll \omega_{Li}^2 / \omega_{Le}^2$$

получаем [6]

$$\begin{aligned} \Upsilon^2 = \frac{1}{2} \omega_{Li}^2 \left\{ 1 - D_n - \frac{1}{2} J_n^2(a) \pm \right. \\ \left. \pm \left[\left(1 - D_n - \frac{1}{2} J_n^2(a) \right)^2 - 2J_n^2(a) (A_n - (-1)^n B_n) \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} A_n = n^2 \sum_{l \neq 0} l^{-2} J_{l+n}^2(a), \quad B_n = -n^2 \sum_{l \neq 0} l^{-2} J_{l+n}(a) J_{l-n}(a), \\ D_n = n^2 \sum_{l \neq \pm n} \frac{J_l^2(a)}{n^2 - l^2}. \end{aligned}$$

Соответствующие формулы для длинных волн выписаны в работе [6].

В пределе коротких волн, много меньших амплитуды осцилляций электрона в электрическом поле ($a \gg 1$), функции Бесселя $J_n(a)$ становятся малыми. Это приводит к сужению области неустойчивости (3.9) и уменьшению инкрементов (3.14) и (3.16). Поэтому максимальные значения инкрементов имеют место для возмущений с длиной волны, сравнимой с амплитудой осцилляций электрона в электрическом поле.

Формулы для инкрементов нарастающих возмущений зависят от ионной ленгмюровской частоты, амплитуды электронных осцилляций и от соотношения между частотой внешнего поля и электронной ленгмюровской. Причиной возникновения рассмотренной здесь неустойчивости является относительное движение электронов и ионов. Хорошо известно, что упорядоченное относительное движение разных сортов заряженных частиц плазмы в целом ряде случаев приводит к неустойчивостям плазмы [8, 9]. Можно говорить об известной аналогии между рассмотренными здесь закономерностями и теми, которые определяют гидродинамическую токовую неустойчивость плазмы, в которой скорость равномерного движения электронов относительно ионов существенно превышает тепловую скорость. Действительно, в области максимума инкремента его порядок величины определяется ленгмюровской частотой ионов, умноженной на $(m_e/m_i)^{1/3}$, а в остальной области неустойчивости инкремент потенциальных возмущений по порядку величины равен ионной ленгмюровской частоте. Отличие возникает благодаря имеющейся в нашем

случае зависимости от частоты внешнего поля. Обнаруженная при этом резонансная частотная зависимость отвечает зависимости параметров траекторий частиц плазмы (электронов) от внешнего электрического поля*). Поэтому резонансная зависимость инкрементов вблизи резонансов обертонов внешней частоты с электронной ленгмюровской, являющейся собственной частотой в отсутствие внешнего переменного поля, позволяет говорить о параметрическом резонансе плазмы. Менее резкая, но в определенном смысле также резонансная, зависимость инкремента возникает при сравнении длины волны возмущений с амплитудой осцилляций электрона в электрическом поле. В пределе длинных волн ($a \ll 1$), когда амплитуда осцилляций относительно мала, инкременты также оказываются малыми. Также становятся малыми инкременты и в пределе коротких волн.

§ 4. Кинетическая теория дисперсионного уравнения потенциальных возмущений в сильном переменном электрическом поле

При выводе дисперсионного уравнения потенциальных колебаний холодной плазмы, находящейся в сильном переменном электрическом поле, выше мы полностью пренебрегали эффектами, связанными с тепловым движением частиц. Тем самым мы весьма ограничили себя условиями, в которых осцилляции электронов в электрическом поле существенно превышают тепловое движение. В этом параграфе мы освободимся от такого ограничения и дадим вывод дисперсионного уравнения потенциальных колебаний, основанный на кинетическом уравнении с самосогласованным взаимодействием, последовательно учитывающим тепловое движение электронов и ионов.

Влияние поля потенциальных возмущений в плазме полным образом может быть учтено при ограничении лишь

*) Возможность развития параметрической неустойчивости в плазме благодаря релятивистскому эффекту зависимости массы от скорости обсуждалась в работах [123, 124]. При этом в работе [123] говорится об образовании вынужденной продольной плазменной волны с частотой, равной удвоенной частоте электромагнитной волны, и с удвоенным волновым вектором. В работе [124] пренебрегается зависимостью электрического поля волны накачки от координат и получается резонансный рост возмущений поля вблизи $\omega_0 = \omega_{Le}$, обусловленный релятивистскими осцилляциями массы электрона [201, 206].

кулоновским взаимодействием частиц плазмы. Соответствующее кинетическое уравнение с самосогласованным полем записывается в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \sum_\beta \int d\mathbf{r}_\beta d\mathbf{p}_\beta \frac{e_\alpha e_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} f_\beta = \\ = -e_\alpha \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ — функция распределения α -го сорта частиц, $\mathbf{E}(t)$ — переменное внешнее электрическое поле. Заметим, что при записи этого кинетического уравнения полностью пренебрежено столкновениями частиц, что отвечает приближению высоких частот, много больших частот столкновений частиц плазмы.

Равновесная функция распределения частиц пространственно однородной плазмы, находящейся во внешнем однородном электрическом поле, имеет вид

$$f_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\alpha, t) = f_{\alpha 0} \left(\mathbf{p}_\alpha - e_\alpha \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}(t') \right). \quad (4.2)$$

Для рассмотрения слабых возмущений состояния (4.2) представим функции распределения в виде $f_\alpha = f_\alpha^{(0)} + \delta f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ и линеаризуем уравнение (4.1). В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial t} + i\mathbf{k}v_\alpha \delta f_\alpha - i\mathbf{k} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \sum_\beta \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} \int d\mathbf{p}_\beta \delta f_\beta = \\ = -\frac{\partial \delta f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} e_\alpha \mathbf{E}(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем новую функцию

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(t, \mathbf{p}_\alpha) = \exp \left\{ i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{k} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \mathbf{E}(t'') \right\} \times \\ \times \delta f_\alpha \left(\mathbf{p}_\alpha + e_\alpha \int_{-\infty}^t dt' \mathbf{E}(t'), t \right), \end{aligned} \quad (4.3a)$$

которая в случае монохроматического внешнего поля подчиняется уравнению

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + ikv_\alpha \psi_\alpha - ik \frac{\partial f_{\alpha 0}(p_\alpha)}{\partial p_\alpha} \times \\ \times \sum_\beta \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} \int d\mathbf{p}_\beta \psi_\beta(t, \mathbf{p}_\beta) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_0 t} J_l(a_{\alpha\beta}) = 0, \quad (4.4)$$

где учтено разложение (1.9) и использовано обозначение

$$a = \frac{kE}{\omega_0} \left(\frac{e_\alpha}{m_\alpha} - \frac{e_\beta}{m_\beta} \right)_{\text{из}}$$

Рассмотрим сначала решение этого уравнения в пределе высоких частот внешнего поля [3], когда ω_0 значительно превышает частоты собственных колебаний плазмы, а также $\omega_0^2 \gg (kv_\alpha)^2$. Тогда для движений плазмы, меняющихся медленно по сравнению с колебаниями внешнего поля, можно пользоваться функцией $\langle \psi_\alpha \rangle$, возникающей в результате усреднения по периоду высокочастотного внешнего поля:

$$\langle \psi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) \rangle = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} dt \psi_\alpha(t, \mathbf{p}_\alpha). \quad (4.5)$$

Соответственно усредняя уравнение (4.4), получаем

$$\frac{\partial \langle \psi_\alpha \rangle}{\partial t} + ikv_\alpha \langle \psi_\alpha \rangle - \\ - ik \frac{\partial f_{\alpha 0}(p_\alpha)}{\partial p_\alpha} \sum_\beta \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} \int d\mathbf{p}_\beta \langle \psi_\beta \rangle J_0(a_{\alpha\beta}) = 0. \quad (4.6)$$

Это уравнение отличается от обычного для теории колебаний плазмы без электрического поля лишь наличием функции Бесселя, а поэтому может быть решено обычным образом [8,9]. При этом дисперсионное уравнение потенциальных колебаний плазмы в поле весьма высокой частоты оказывается возможным записать в виде следующего детерминанта [3]:

$$\left| \delta_{\beta\alpha} + \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} J_0(a_{\alpha\beta}) \int \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{\omega + i0 - kv_\alpha} k \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_\alpha} \right| = 0. \quad (4.7)$$

Здесь io — бесконечно малая добавка с положительной мнимой частью, определяющая обход особенности при интегрировании по импульсам.

Для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, дисперсионное уравнение (4.7) имеет вид [3]

$$1 = \frac{\delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})} J_0^2(a) \frac{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}, \quad (4.8)$$

где вклад частиц сорта α в обычную продольную комплексную диэлектрическую проницаемость определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) &= \delta\varepsilon'_\alpha(\omega, \mathbf{k}) + i\delta\varepsilon''_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \\ &= \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int \frac{d\mathbf{p}_\alpha}{\omega + io - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{p}_\alpha)}{\partial \mathbf{p}_\alpha}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\delta\varepsilon'_\alpha$ и $\delta\varepsilon''_\alpha$ — соответственно действительная и мнимая части. Заметим, что уравнение (4.8) отличается от дисперсионного уравнения (2.1) холодной плазмы лишь изменением $\delta\varepsilon_\alpha$, которое теперь учитывает факт распределения частиц по скоростям.

Обратимся теперь снова к уравнению (4.4), но уже не считая частоту внешнего поля значительно превышающей частоты собственных колебаний плазмы. Представим функцию $\psi_\alpha(t, \mathbf{p}_\alpha)$ в виде следующего разложения:

$$\psi_\alpha(t, \mathbf{p}_\alpha) = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega_0 t} \psi_{\alpha, n}(\mathbf{p}_\alpha). \quad (4.10)$$

Тогда для плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, в соответствии с уравнением (4.4) получаем следующие уравнения, определяющие функции $\psi_{\alpha, n}$:

$$\left. \begin{aligned} &\omega + s\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v} \psi_{e, s}(\mathbf{p}) + \mathbf{k} \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{p}} \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p}' \times \\ &\times \left\{ \psi_{e, s}(\mathbf{p}') + \frac{e_i}{e} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(a) \psi_{i, s-r}(\mathbf{p}') \right\} = 0, \\ &(\omega + s\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}) \psi_{i, s}(\mathbf{p}) + \mathbf{k} \frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{p}} \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \int d\mathbf{p}' \times \\ &\times \left\{ \psi_{i, s}(\mathbf{p}') + \frac{e}{e_i} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} J_r(a) \psi_{e, s+r}(\mathbf{p}') \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Бесконечная система интегральных уравнений (4.11) позволяет для функций

$$u_e^{(n)} = e \int d\rho \Psi_{e,n}(\rho), \quad u_i^{(n)} = e_i \int d\rho \Psi_{i,n}(\rho) \quad (4.12)$$

получить следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} u_e^{(n)} + R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(a) u_i^{(m)} &= 0, \\ u_i^{(n)} + R_i^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(a) u_e^{(m)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Эта система по виду совпадает с системой уравнений (1.10) с тем лишь отличием, что в функциях

$$R_\alpha^{(n)} \equiv \frac{\delta \varepsilon_\alpha(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_\alpha(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})}$$

в качестве $\delta \varepsilon_\alpha$ вместо (1.12) возникают выражения (4.9). Поэтому дисперсионные уравнения колебаний могут быть получены так же, как и в § 1.

Используя понятие о резонансных частотах электронов и ионов, определенных уравнениями

$$1 + \delta \varepsilon_e(\omega_{re}, \mathbf{k}) = 0, \quad 1 + \delta \varepsilon_i(\omega_{ri}, \mathbf{k}) = 0,$$

в предположении, что частота внешнего поля велика по сравнению с ионной резонансной частотой, можем записать следующие дисперсионные соотношения для высокочастотных потенциальных возмущений:

$$1 = R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}^2(a) R_i^{(m)}, \quad (4.14)$$

и низкочастотных возмущений [2]:

$$1 = R_i^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) R_e^{(n)}. \quad (4.15)$$

Эти уравнения, как это и следует из аналогий уравнений (1.10) и (4.13), по форме совпадают с уравнениями (1.17) (и 1.19) соответственно. В центральной резонансной области дисперсионное уравнение имеет вид формулы (1.21),

в которой диэлектрические проницаемости учитывают тепловое движение частиц.

Дисперсионные уравнения (4.14) и (4.15) позволяют не только учесть влияние теплового движения частиц плазмы, но также и выявить эффекты упорядоченного движения потоков частиц, которые, очевидно, можно охарактеризовать подходящим выбором функций распределения равновесной плазмы.

Для максвелловского распределения частиц имеем следующее выражение для парциального вклада в комплексную проницаемость:

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 r_{D\alpha}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{T\alpha}} \right) \right], \quad (4.16)$$

где тепловая скорость и дебаевский радиус определены соответственно формулами

$$v_{T\alpha} = \sqrt{\frac{\kappa T_\alpha}{m_\alpha}}, \quad r_{D\alpha} = \sqrt{\frac{\kappa T_\alpha}{4\pi e^2 n_\alpha^{(0)}}} \quad (4.17)$$

и использовано обозначение [8]

$$J_+(x) = x e^{-x^2/2} \int_{+i\infty}^x d\tau e^{\tau^2/2}. \quad (4.18)$$

Заметим, что для максвелловского распределения частиц с дрейфом, соответствующим скорости u направленного движения, вместо формулы (4.16) следует пользоваться выражением, в котором в аргументе J_+ -функции вместо ω возникает $\omega - ku$.

Используя подобные выражения для парциальных вкладов в продольную диэлектрическую проницаемость, ниже мы получим ряд следствий, вытекающих из дисперсионных уравнений, полученных в этом параграфе.

§ 5. Влияние теплового движения частиц плазмы на спектры потенциальных колебаний в электрическом поле высокой частоты

Выявим влияние теплового движения на колебания плазмы в сильном электрическом поле, частота которого ω_0 существенно превышает электронную ленгмюровскую частоту [3]. В то же время будем считать, что длина волны

колебаний мала по сравнению с характерным масштабом изменения внешнего поля и одновременно велика по сравнению с расстоянием, которое в результате теплового движения проходит электрон за период изменения внешнего поля. Тогда спектр колебаний описывается дисперсионным уравнением (4.8), которое в соответствии с (4.16) для максвелловского распределения частиц имеет следующий вид:

$$1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right) \right] + \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Ti}} \right) \right] + [1 - J_0^2(a)] \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right) \right] \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{kv_{Ti}} \right) \right] = 0. \quad (5.1)$$

Отсюда, в частности, может быть получен спектр высокочастотных колебаний, которые слабо затухают в условиях, когда фазовая скорость колебаний велика по сравнению с тепловой скоростью частиц. При этом из уравнения (5.1) для действительной частоты ω и декремента затухания $-\gamma$ таких колебаний получаем

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 + 3v_{Te}^2 k^2 + \omega_{Li}^2 J_0^2(a), \quad (5.2)$$

$$-\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}^4}{k^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right). \quad (5.3)$$

Очевидно, что влияние внешнего электрического поля на высокочастотные колебания приводит к малым эффектам, а тепловое движение, как и в отсутствие внешнего поля, определяет зависимость частоты от волнового вектора и приводит к затуханию плазменных колебаний, связанному с эффектом Черенкова на электронах, скорость которых совпадает с фазовой скоростью волны.

Спектр низкочастотных колебаний, являющийся обобщением спектра (2.4) и слабозатухающий в пределе фазовых скоростей волн, значительно превышающих тепловые скорости частиц, как это следует из дисперсионного уравнения (5.1), описывается следующими формулами:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 [1 - J_0^2(a)] + 3k^2 [v_{Ti}^2 + v_{Te}^2 J_0^2(a)], \quad (5.4)$$

$$-\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3} \left\{ \frac{\omega_{Li}^2 J_0^2(a)}{\omega_{Le}^2 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) + \frac{1}{v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) \right\}, \quad (5.5)$$

где $v_s^2 = e_i \kappa T_e / |e| m_i$. Здесь влияние теплового движения в зависимости частоты от волнового вектора соответствует малым поправкам. Затухание колебаний обусловлено эффектом Черенкова и по своей природе является существенно кинетическим.

Как известно, тепловое движение электронов является определяющим для такого явления, как ионно-звуковые колебания полностью ионизованной плазмы (см., например, [8, 9]). Такой звук возможен в условиях, когда температура электронов значительно превышает температуру ионов $T_e \gg T_i$. С помощью дисперсионного уравнения (5.1) можно выявить влияние внешнего электрического поля на ионно-звуковые колебания. При этом, как и обычно, будем считать, что их фазовая скорость велика по сравнению с тепловой скоростью ионов и в то же время мала по сравнению с тепловой скоростью электронов. Тогда из (5.1) получаем для слабо затухающих колебаний:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ 1 - \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right\} + 3k^2 v_{Ti}^2, \quad (5.6)$$

$$-\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^2}{k^3} \left\{ \frac{1}{v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2 J_0^2(a)}{\omega^4 v_{Te}^3 [1 + (kr_{De})^2]^2} \right\}. \quad (5.7)$$

В пределе длинных волн, много больших дебаевского радиуса электронов, формула (5.6) принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 [1 - J_0^2(a)] + k^2 [v_s^2 J_0^2(a) + 3v_{Ti}^2]. \quad (5.8)$$

Если амплитуда осцилляций электрона во внешнем переменном электрическом поле превышает длину волны возмущений, то частота колебаний (5.8) близка к ионной ленгмюровской. В противоположном пределе длинных волн формула (5.8) принимает вид

$$\omega^2 = (k w_s)^2 + k^2 v_s^2 + 3k^2 v_{Ti}^2. \quad (5.9)$$

Последнее слагаемое в правой части формулы (5.9) является малой поправкой. В пределе малости напряженности внешнего электрического поля спектр (5.9) переходит в длинноволновый спектр обычного ионного звука, а в пределе сильного поля, когда энергия осцилляций электрона

во внешнем поле существенно превышает его тепловую энергию, формула (5.9) переходит в спектр анизотропного звука (2.5) плазмы в переменном электрическом поле высокой частоты.

§ 6. Кинетическая параметрическая неустойчивость плазмы относительно раскачки] потенциальных колебаний

Развитие неустойчивости плазмы, выражающееся в нарастании во времени колебаний потенциального поля и обусловленное параметрическим воздействием внешнего электрического поля, в определенных условиях может быть связано также с эффектами теплового разброса частиц по скоростям. В этом смысле, в отличие от неустойчивости холодной плазмы, которую можно называть гидродинамической, обсуждаемую ниже неустойчивость, связанную с черенковским эффектом, будем называть кинетической [10, 6]*). Как будет показано, развитие такой неустойчивости возможно в условиях, когда частота внешнего электрического поля заметно превышает электронную ленгмюровскую, что отвечает прозрачности плазмы относительно проникновения в нее внешнего переменного поля.

В основу изложения этого параграфа положим дисперсионное уравнение низкочастотных возмущений (4.15), которое может быть записано в виде

$$1 + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{\delta\epsilon_e(n\omega_0 + \omega + i\gamma, \mathbf{k})}{1 + \delta\epsilon_e(n\omega_0 + \omega + i\gamma, \mathbf{k})}. \quad (6.4)$$

Здесь явно выделена действительная частота ω и инкремент γ колебаний плазмы. Всюду ниже в этом параграфе будем считать инкремент малым по сравнению с частотой колебаний.

Выявим прежде всего возможность неустойчивости, связанной с эффектом Черенкова на электронах. Для этого прежде всего заметим, что для малости затухания волн следует считать фазовую скорость ω/k колебаний большой

*) Кинетическая теория параметрической неустойчивости плазмы в сильном однородном высокочастотном электрическом поле развивалась также в работах [11, 12]. При этом в работе [12] было показано, что расхождение результатов работы [11] с результатами теории параметрического резонанса [2] явилось плодом недоразумения.

по сравнению с тепловой скоростью ионов. Тогда левая часть уравнения (6.1) может быть приближенно представлена в следующем виде:

$$1 - \frac{\omega^2 + 2i\gamma\omega}{\omega_{Li}^2} + i \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \frac{\omega^4}{\omega_{Li}^4} \int d\mathbf{p} \mathbf{k} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (6.2)$$

Правая часть уравнения (6.1) принимает особенно простой вид для коротких волн, значительно меньших электронного радиуса дебаевского экранирования, когда $\delta\epsilon_e$ мало по сравнению с единицей. Тогда для правой части (6.1) можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \delta\epsilon_e(n\omega_0 + \omega + i\gamma, \mathbf{k}) \equiv \\ & \equiv \frac{4\pi e^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d\mathbf{p} \frac{J_n^2(a)}{\omega + i\gamma + n\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Имея в виду малость этого выражения в пределе коротких волн, из дисперсионного уравнения (6.1) для частоты колебаний получаем

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{k^2 r_{De}^2}\right) \right]. \quad (6.4)$$

Черенковский эффект на ионах, описываемый последним слагаемым формулы (6.2), приводит к поглощению энергии колебаний. При этом соответствующий вклад в инкремент для максвелловского распределения ионов (которым мы будем пользоваться в этом параграфе) отрицателен. т. е. соответствует затуханию, и имеет вид

$$\gamma_i = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{(kr_{Di})^2} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right). \quad (6.5)$$

Это выражение мало по сравнению с частотой колебаний лишь в том случае, когда длина волны значительно превышает ионный дебаевский радиус. Поэтому имеет место совокупность неравенств $kr_{De} \gg 1 \gg kr_{Di}$, которая возможна лишь в условиях сильной неизотермичности плазмы, когда температура электронов существенно превышает температуру ионов ($T_e \gg T_i$).

Для выяснения возможности возникновения неустойчивости следует рассмотреть вклад в инкремент, обуслов-

ленный электронами и характеризуемый мнимой частью формулы (6.3). Это можно проделать в общем виде, считая фазовую скорость колебаний малой по сравнению с тепловой скоростью электронов. Будем считать функцию распределения электронов изотропной функцией импульса, памятуя, что анизотропия распределений может быть собой причиной неустойчивости плазмы, которую нам следует отделить от неустойчивости, обусловленной внешним переменным электрическим полем. Тогда, разлагая выражение (6.3) по степеням ω , в первом исчезающем приближении для мнимой части этого выражения получаем

$$\text{Im} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \delta\varepsilon_e(n\omega_0 + \omega, k) \approx \approx \omega \frac{4\pi e}{m_e k^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \left. \frac{d\bar{f}_e}{dv^2} \right|_{v=\frac{n\omega_0}{k}}. \quad (6.6)$$

Для возникновения положительного вклада электронов в инкремент колебаний необходимо, чтобы при положительном ω выражение (6.6) было отрицательным. Это означает, что вторая производная по скорости от электронной функции распределения \bar{f}_e , проинтегрированной по импульсам, перпендикулярным волновому вектору k , должна быть отрицательной. Такое необходимое условие неустойчивости выполняется для большого числа функций распределения. На примере конкретной функции распределения электронов по импульсам мы далее более детально рассмотрим расквачку потенциальных колебаний, возникающую благодаря черенковскому эффекту на электронах.

Считая распределение по скоростям максвелловским и учтя (4.16), запишем дисперсионное уравнение (6.1) в следующем виде:

$$\frac{1}{\delta\varepsilon_i(\omega + i\gamma, k)} = = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \left\{ 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{n\omega_0 + \omega + i\gamma}{kv_{Te}} \right) \right] \right\}^{-1}. \quad (6.7)$$

Дальнейшее содержание этого параграфа посвятим изложению следствий, вытекающих из уравнения (6.7).

Прежде всего обратимся к случаю длинных волн, $kv_{Te} \ll \ll \omega_0$, одновременно считая, что частота внешнего поля не

близка к электронной ленгмюровской. Тогда возможная область неустойчивости оказывается вблизи нулей функции Бесселя: $J_0(a_r) = 0$. В окрестности таких нулей дисперсионное уравнение (6.7) для частоты и инкремента колебаний дает

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ 1 + \frac{J_1^2(a_r)(a - a_r)^2}{1 + (kr_{De})^{-2}} - \frac{\pi(\omega_{Le}/\omega_0)}{\sin(\pi\omega_{Le}/\omega_0)} J_{\omega_{Le}}(a_r) J_{-\frac{\omega_{Le}}{\omega_0}}(a_r) \right\}, \quad (6.8)$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{(kr_{Di})^3} \left(\exp \left[-\frac{\omega^2}{2k^2v_{Ti}^2} \right] + \frac{r_{Di}^3 \omega_{Li}}{r_{De}^3 \omega_{Le}} J_1^2(a_r) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{(a - a_r)^2}{[1 + (kr_{De})^{-2}]^2} - \frac{2\omega_0^6}{k^2v_{Te}^2 [\omega_0^2 - \omega_{Le}^2]^2} \exp \left[-\frac{\omega_0^2}{2k^2v_{Te}^2} \right] \right\} \right). \quad (6.9)$$

Из (6.9) следует, что неустойчивость возникает при выполнении неравенства

$$1 \gg k^2 r_{Di}^2 \gg \left[\frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2} \left| \frac{e}{e_i} \right| \frac{T_i}{T_e} - 1 \right] \left\{ \ln \frac{2r_{Di}^5 \omega_0^2 \omega_{Li} J_1^2(a_r)}{r_{De}^5 \omega_{Le}^3 (k^2 r_{Di}^2)} \right\}^{-1},$$

которое сравнительно легко выполняется в неизотермической плазме с температурой электронов, значительно превышающей температуру ионов. Следует помнить, что формулы (6.9) описывают колебания с длиной волны, меньшей амплитуды осцилляций электрона во внешнем поле. Это, в частности, соответствует тому, что скорость v_E таких осцилляций электрона должна значительно превышать его тепловую скорость.

Рассмотрим теперь следствия, вытекающие из дисперсионного уравнения (6.7) в пределе коротких длин волн, много меньших дебаевского радиуса электронов. Тогда это уравнение может быть представлено в виде

$$1 + \frac{1}{\delta\epsilon_i(\omega + i\gamma, k)} = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \int_0^\infty dt \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2} t^2} J_0 \left(2a \sin \frac{\omega_0 t}{2kv_{Te}} \right) \left(1 + \frac{i\omega t}{kv_{Te}} \right). \quad (6.10)$$

Здесь учтено, что выполняется неравенство $\omega \ll kv_{Te}$. Простые аналитические закономерности могут быть найдены отсюда после приближенного интегрирования правой части, возможного в пределе $\omega_0 \ll kv_{Te}$. Тогда получаем

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ 1 + 3k^2 r_{Di}^2 - O\left(\frac{1}{k^2 r_{De}^2}\right) \right\}, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{(kr_{De})^3} & \left(\frac{r_{De}^3}{r_{Di}^3} \exp\left[-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right] + \right. \\ & + \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \left\{ \left[1 - \frac{a^2 \omega_0^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right] I_0\left(\frac{a^2 \omega_0^2}{4k^2 v_{Te}^2}\right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{a^2 \omega_0^2}{k^2 v_{Te}^2} I_1\left(\frac{a^2 \omega_0^2}{4k^2 v_{Te}^2}\right) \right\} \exp\left[-\frac{\omega_0^2 a^2}{4k^2 v_{Te}^2}\right] \right). \quad (6.12) \end{aligned}$$

Формула (6.12) в пределе равной нулю напряженности внешнего электрического поля дает обычное выражение для декремента ионно-звуковых колебаний. В противоположном пределе сильных полей, когда $a^2 \omega_0^2 \equiv (kv_E)^2 \gg \gg k^2 v_{Te}^2$, из формулы (6.12) получаем

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{(kr_{Di})^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2}{|kv_E|^3}. \quad (6.13)$$

Второе положительное слагаемое правой части этой формулы, обусловленное черенковским эффектом на электродах, оказывается больше первого слагаемого, а поэтому приводит к нарастанию колебаний, если

$$\frac{1}{k} > r_{Di} \left\{ 2 \ln \left[\left| \frac{kv_E}{kv_{Te}} \right|^3 \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right] \right\}^{1/2}.$$

Согласно более общей формуле (6.12) можно получить более слабое условие на длины волн колебаний, определяющее область неустойчивости. Это связано с тем фактом, что согласно (6.12) электронная часть инкремента становится положительной при

$$|a\omega_0| \equiv |kv_E| \approx 1,8 kv_{Te}. \quad (6.14)$$

Это означает, что при напряженностях электрического поля, больших

$$\approx 1,8 \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \sqrt{4\pi n_e \kappa T_e}, \quad (6.15)$$

или, что то же самое, при частотах внешнего поля, меньших

$$\approx 0,55 \left| \frac{eE}{m_e v_{Te}} \right| \equiv 0,55 \omega_{Le} \left(\frac{E^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \right)^{1/2}, \quad (6.16)$$

черенковский эффект на электронах ведет к нарастанию колебаний. Соответствующее условие для длин волн нарастающих колебаний имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{k} > r_{Di} \left\{ \ln \left[\frac{T_e^3 e_i^2 m_i}{T_i^3 e_i^2 m_e} \right] \right\}^{1/2}. \quad (6.17)$$

Это неравенство совместно с использованным при получении выражения (6.12) предположением о малости длины волны может быть выполнено лишь, если имеет место неравенство

$$\frac{T_e}{T_i} \gg \frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2}. \quad (6.18)$$

Заметим, что общее выражение для вклада электронов в инкремент, вытекающее из дисперсионного уравнения (6.10), имеет вид

$$\gamma_e = - \frac{\omega_{Li}^2}{2k v_{Te}} \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \int_0^\infty dt t^2 e^{-\frac{1}{2} t^2} J_0 \left(2a \sin \frac{\omega t}{2k v_{Te}} \right). \quad (6.19)$$

На рис. 2 сплошная кривая определяет линию, на которой выражение (6.19) меняет знак. По оси ординат отложено $k v_{Te} |k v_E|^{-1}$, а по оси абсцисс — величина a . Верхняя горизонтальная линия соответствует формуле (6.14). Заметим, что поскольку, с одной стороны, ионное черенковское затухание сравнительно невелико лишь для длин волн, много больших дебаевского радиуса ионов, а с другой стороны, согласно рис. 2 раскачка колебаний в условиях пригодности дис-

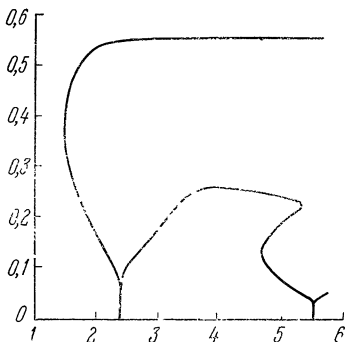


Рис. 2.

персионного уравнения (6.10) возможна лишь при немалых значениях a , то для неустойчивости необходимо, чтобы амплитуда колебаний электронов была много больше ионного дебаевского радиуса. Последнее соответствует

следующему неравенству:

$$\frac{E^2}{4\pi} \gg n_e \mathcal{K} T_e \frac{\omega_0^4}{\omega_{Le}^4}. \quad (6.20)$$

Подчеркнем, что область раскачки волн на электронах, очерченная на рис. 2 сплошной кривой, соответствует длинам волн, много меньшим электронного дебаевского радиуса. При этом левый край границы области раскачки соответствует сравнительно небольшим значениям (kv_{Te}/ω_0) . Последнее возможно лишь тогда, когда частота внешнего поля значительно превышает электронную ленгмюровскую частоту.

Для ответа на вопрос о том, куда смещается граница области раскачки колебаний при уменьшении частоты внешнего поля, необходим дополнительный анализ дисперсионного уравнения (6.7), годный не только в случае длин волн, меньших электронного дебаевского радиуса. С этой целью в предположении $\omega \ll kv_{Te}$ разложим уравнение (6.7) по степеням собственной частоты ω . Имея в виду малость тепловой скорости ионов по сравнению с фазовой скоростью колебаний, получаем тогда следующее выражение для частоты и инкремента плазменных колебаний:

$$\omega^2 = k^2 v_s^2 \left\{ \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} + 2 \sum_{n=1} J_n^2(a) \times \right. \\ \left. \times \frac{k^2 r_{De}^2 + 1 - \operatorname{Re} J_+(n\omega_0/kv_{Te})}{[k^2 r_{De}^2 + 1 - \operatorname{Re} J_+(n\omega_0/kv_{Te})]^2 + [\operatorname{Im} J_+(n\omega_0/kv_{Te})]^2} \right\}, \quad (6.24)$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{k^3 r_{Di}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) - \\ - \frac{\omega_{Li}^2}{2\omega_{Le}^2} k v_{Te} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \{ [k^2 r_{De}^2 + 1 - \operatorname{Re} J_+(n\omega_0/kv_{Te})]^2 + \\ + [\operatorname{Im} J_+(n\omega_0/kv_{Te})]^2 \}^{-2} \left\{ 2 \left[k^2 r_{De}^2 + 1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{Re} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) \right] \operatorname{Im} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) \operatorname{Re} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) + \right. \\ \left. + \operatorname{Im} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) \left(\left[k^2 r_{De}^2 + 1 - \operatorname{Re} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) \right]^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left[\operatorname{Im} J_+\left(\frac{n\omega_0}{kv_{Te}}\right) \right]^2 \right) \right\}, \quad (6.22)$$

где $v_s = \omega_{Li} r_{De}$ — скорость ионного звука и

$$\operatorname{Re} J_+(x) = x e^{-x^2/2} \int_0^x dt e^{t^2/2},$$

$$\operatorname{Im} J_+(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} x e^{-x^2/2}.$$

При малых по сравнению с единицей значениях (kv_{Te}/ω_0) в формуле (6.21) после пренебрежения малыми членами можно провести суммирование, приводящее к следующему результату:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ \frac{J_0^2(a)}{1 + (kr_{De})^{-2}} + 1 - \Phi_{\omega_{Le}/\omega_0}(a) \right\}. \quad (6.23)$$

Здесь использована функция, значения которой приведены в табл. 1 (см. также формулу (3.3а)). Аналогично этому в формуле (6.22) можно пренебречь всеми слагаемыми с $n > 1$. Важно, что последнее возможно также тогда, когда kv_{Te}/ω_0 становится сравнимо с единицей. При этом $\gamma = \gamma_i + \gamma_e$, где γ_i дается формулой (6.5), а

$$\gamma_e = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2 kv_{Te}}{\omega_{Le}^2 (1 + kr_{De}^2)} \left\{ J_0^2(a) - J_1^2(a) F \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2}, \frac{\omega_0}{kv_{Te}} \right) \right\}. \quad (6.24)$$

Здесь

$$F(x, z \sqrt{2}) = 2 \left(z^2 + \frac{1}{2} x \right)^2 e^{-z^2} \varphi(x, z) (2z^2 - 1 + 2z^3 \varphi(x, z) \times$$

$$\times \left\{ \pi z^3 [1 - 2z^2] e^{-2z^2} - 2 \left[\frac{1}{2} x + z^2 - 2z^3 \int_0^z dt e^{t^2 - z^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[z + (1 - 2z^2) \int_0^z dt e^{t^2 - z^2} \right] \right\}, \quad (6.25)$$

где

$$\varphi(x, z) = \left\{ \left[\frac{1}{2} x + z^2 - 2z^3 \int_0^z dt \cdot e^{t^2 - z^2} \right]^2 + \pi z^6 e^{-2z^2} \right\}^{-1}.$$

Значения функции $F(x, z \sqrt{2})$ приведены в табл. 2. На рис. 3 штриховая линия дает границу области положительных значений электронного инкремента γ_e , определенную уравнением

$$\frac{J_0^2(a)}{J_1^2(a)} = F \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2}, \frac{\omega}{kv_{Te}} \right) \quad (6.26)$$

для случая частоты внешнего поля, вдвое большей ленгмюровской частоты электронов плазмы.

Сравнение рис. 2 и 3 показывает, что с приближением частоты внешнего поля к электронной ленгмюровской со стороны больших значений граница области неустойчивости смещается в сторону больших длин волн и меньших

Таблица 2

$z \backslash x$	2	3	4	6	9
0,8	-1,65	-0,932	-0,562	-0,22	-0,02
1,0	-2,30	-0,79	-0,109	+0,42	+0,61
1,2	-3,61	-0,40	+0,736	1,25	1,28
1,4	-6,012	+1,05	2,50	2,38	1,88
1,6	-9,30	5,46	5,44	3,44	2,19
1,8	-7,76	14,37	8,32	3,78	2,04
2,0	+34,1	20,14	8,27	3,11	1,52
2,2	125,6	16,04	5,81	2,06	0,97
2,4	92,8	8,90	3,25	1,16	0,54
2,6	40,0	3,95	1,64	0,58	0,28
2,8	14,93	1,95	0,76	0,28	0,13
3,0	3,50	0,66	0,28	0,11	0,05

скоростей осцилляций электронов во внешнем поле. Последнее также соответствует тому факту, что согласно табл. 2 растут значения длин волн, для которых функция F оказывается положительной. При отрицательных значениях этой функции выражение (6.24), очевидно, всегда отрицательно и колебания не нарастают.

Детальный численный анализ уравнения (6.7) для максвелловского распределения ионов при различных отношениях температур электронов и ионов был проведен Андреевым [130], что естественно расширяет рассмотрение по сравнению с изложенным в этом параграфе асимптотическим подходом. На рис. 4

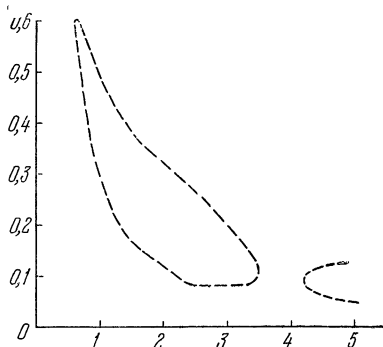


Рис. 3.

приведены кривые зависимости порогового поля накачки в зависимости от плотности плазмы для нескольких значений T_e/T_i .

Кривой 1 соответствует $T_e/T_i=100$, кривой 2— $T_e/T_i=10$, кривой 3— $T_e/T_i=8$, кривой 4— $T_e/T_i=4$. По оси ординат отложено в логарифмическом масштабе отношение

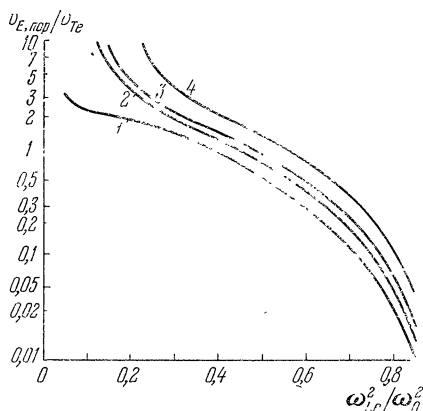


Рис. 4.

$v_{E, пор}/v_{Te}$, а по оси абсцисс отложено отношение $\omega_{ce}^2/\omega_{ci}^2$. На рис. 5 представлены результаты численного счета для водородной плазмы максимального инкремента кинетической параметрической неустойчивости в случае $T_e/T_i=100$ для различных значений напряженности электрического поля волны накачки.

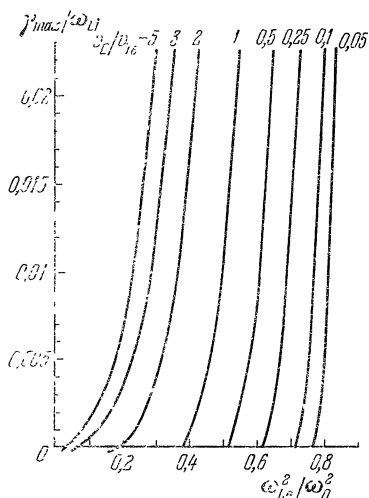


Рис. 5.

В заключение параграфа подведем итоги изложенной здесь кинетической теории параметрической неустойчивости плазмы.

Мы видим, что при частоте внешнего поля, большей электронной ленгмюровской, оказывается возможным нарастание колебаний потенциального поля. Частота таких колебаний близка к обычной ионно-звуковой частоте,

имеющей место в неизотермической плазме. Развитие подобной неустойчивости определяется черенковским взаимодействием волн с электронами. При этом сравнение по-

глощения и излучения волн, обусловленных эффектом Черенкова, приводит к определению порогового значения напряженности внешнего переменного электрического поля. В условиях, когда частота внешнего поля значительно превышает электронную ленгмюровскую, пороговая плотность энергии внешнего поля, при которой возникает неустойчивость, значительно превышает плотность тепловой энергии плазмы. С приближением частоты ω_0 к электронной ленгмюровской пороговое значение внешнего поля уменьшается. Это означает, что облегчается раскачка колебаний при приближении к резонансу внешней частоты с собственной частотой плазмы. В то же время одновременно с уменьшением порогового значения поля возрастают длины волн колебаний, нарастающих при возникновении неустойчивости плазмы, а поэтому такие колебания практически совпадают с ионно-звуковыми. Следовательно, возникает представление о том, что при приближении к резонансу ($\omega_0 = \omega_{Le}$) имеется возможность определенного упрощения теории, связанного с меньшими напряженностями внешнего поля и простотой спектра плазменных колебаний. Такие причины упрощения рассмотрения одновременно представляют возможность большей детализации явления. Поэтому области сравнительно слабых внешних полей мы посвятим отдельную главу.

ГЛАВА II

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В СЛАБОМ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 7. Дисперсионное уравнение продольных возмущений в резонансной области около порога неустойчивости

Теории параметрического резонанса в плазме, связанного с раскачкой продольных возмущений, в предположении слабого внешнего поля был посвящен целый ряд работ, использовавших ту или иную форму метода возмущений по амплитуде внешнего поля. Одной из первых здесь явилась работа Дюбуа и Гольдмана [21], основанная на сравнительно громоздкой диаграммной технике квантовой статистики [22]. Впоследствии эти авторы от такой техники отказались и использовали кинетический подход [20, 23] к теории параметрического взаимодействия поля с плазмой. Ли и Су [24] воспользовались в своем подходе уравнениями гидродинамики заряженной жидкости без столкновений. Важный учет столкновений заряженных частиц, определяющих закономерности параметрического резонанса при сравнительно слабых полях, был предпринят в работе Нишикавы [17]. Детальная теория параметрической неустойчивости полностью ионизированной плазмы относительно раскачки продольных возмущений при малых напряженностях внешних полей была построена в работе Андреева, Кирия и автора [14], которой ниже в значительной мере мы следуем в своем изложении.

Будем интересоваться ситуацией, в которой частота внешнего поля (1.1) близка к ленгмюровской частоте электронов плазмы ($|\omega_0 - \omega_{Le}| \ll \omega_{Le}$). Как мы уже видели

выше, при подходе к такой резонансной области растут длины волн, раскачиваемых при неустойчивости продольных колебаний плазмы, связанных с возрастанием потенциального поля. Кроме того, уменьшаются значения напряженности внешнего электрического поля, при которых становится возможной неустойчивость. Поэтому в этой главе всюду ниже будем считать длины волн продольных колебаний много большими дебаевского радиуса электронов, а плотность энергии внешнего поля — малой по сравнению с плотностью энергии плазмы. Последнее, в частности, означает, что амплитуда колебаний электрона во внешнем поле мала по сравнению с длиной волны продольных колебаний плазмы.

Учтя все это, а также тот факт, что собственная частота ω и инкремент γ малы по сравнению с частотой внешнего поля (частотой накачки), для амплитуд плотности зарядов можно ограничиться следующим приближением [14]:

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t} \left\{ u_e^{(0)} - \frac{1}{2} (\mathbf{k}\mathbf{r}_E) [u_e^{(-1)} - u_e^{(1)}] + \left[u_e^{(1)} - \frac{1}{2} (\mathbf{k}\mathbf{r}_E) u_e^{(0)} \right] e^{-i\omega_0 t} + \left[u_e^{(-1)} + \frac{1}{2} (\mathbf{k}\mathbf{r}_E) u_e^{(0)} \right] e^{i\omega_0 t} \right\}, \quad (7.1)$$

$$\rho_i(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t + \gamma t} u_i^{(0)}, \quad (7.2)$$

где $\mathbf{r}_E = e\mathbf{E}_0 m_e^{-1} \omega_0^{-2}$ — амплитуда осцилляций электрона в высокочастотном электрическом поле.

Условие разрешимости системы уравнений для гармоник амплитуд плотности зарядов электронов ρ_e и ионов ρ_i разложений (7.1) и (7.2) с точностью до членов, квадратных по напряженности внешнего электрического поля, приводит к следующему дисперсионному уравнению продольных колебаний плазмы [15]:

$$\frac{\varepsilon(\omega + i\gamma, \mathbf{k})}{\delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k}) [1 + \delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})]} + \frac{1}{4} (\mathbf{k}\mathbf{r}_E)^2 \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_0 + i\gamma, \mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_0 + i\gamma, \mathbf{k})} \right] = 0. \quad (7.3)$$

Здесь, как и ранее, $\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k})$ — вклад частиц сорта α в обычную линейную продольную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}). \quad (7.4)$$

В резонансной области около порога неустойчивости по напряженности электрического поля помимо эффекта

теплового движения мы будем учитывать также столкновения частиц плазмы, приводящие к диссипативным эффектам, дополнительным к черенковскому взаимодействию частиц с волнами. Полностью ионизированная плазма характеризуется, в частности, электрон-ионной (v_{ei}) и ион-ионной (v_{ii}) частотами столкновений, для которых имеют место следующие выражения [8, 9]:

$$v_{ei} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2\pi} e^2 n_i \Lambda}{(\kappa T_e)^{1/2} m_e^{1/2}}, \quad v_{ii} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{\pi} e^4 n_i \Lambda}{(\kappa T_i)^{3/2} m_i^{1/2}}, \quad (7.5)$$

где Λ — кулоновский логарифм, принимающий для типичных плазм значения $5 \div 20$.

Приведем здесь те выражения для парциальных диэлектрических проницаемостей, которыми мы будем пользоваться ниже при получении следствий из дисперсионного уравнения (7.3).

Ниже будет показано, что для нарастающих при малой амплитуде внешнего поля колебаний плазмы с частотой, много большей инкремента, выполняются неравенства

$$kv_{Ti} \ll |\omega + i\gamma| \ll kv_{Te}. \quad (7.6)$$

Кроме того, будем считать, что длина волны возбуждаемых колебаний мала по сравнению с электронной длиной свободного пробега:

$$kv_{Te} \gg v_{ei}, \quad (7.7)$$

а частота ион-ионных столкновений также относительно мала:

$$|\omega + i\gamma|^3 \gg v_{ii} k^2 v_{Ti}^2. \quad (7.8)$$

В соответствии с неравенствами (7.6), (7.7) и (7.8), а также имея в виду, что $|\omega \pm \omega_0| \gg kv_{Te}$, можно записать следующие выражения для парциальных вкладов в диэлектрическую проницаемость [14] (см. также [16]):

$$\delta\varepsilon_e(\omega, k) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{kv_{Te}} \right), \quad (7.9)$$

$$\delta\varepsilon_e(\omega \pm \omega_0, k) = - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega \pm \omega_0)^2} \left[1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{(\omega \pm \omega)^2} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(\omega \pm \omega_0)^3}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left\{ - \frac{(\omega + \omega)^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\} - i \frac{v_{ei}}{\omega \pm \omega_0} \right], \quad (7.10)$$

$$\delta z_i(\omega, k) = -\frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \left[1 - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega^3}{k^3 v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) - i \frac{8}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2 v_{ii}}{\omega^3} \right]. \quad (7.14)$$

В условиях, когда речь пойдет о возмущениях плазмы с инкрементами, значительно превышающими частоты ($\gamma \gg \omega$), необходимо будет рассматривать область, в которой

$$|\omega + i\gamma| \ll kv_{Ti}. \quad (7.12)$$

При выполнении этого неравенства и соотношений (4.8) и (4.9) для парциальных проницаемостей можно будет пользоваться выражениями вида (7.9).

Наряду с дисперсионным уравнением (7.3) можно записать следующие соотношения, связывающие амплитуды гармоник плотности зарядов [14]:

$$\frac{u_e^{(0)} + u_i^{(0)}}{u_i^{(0)}} = \frac{1}{1 + \delta z_e(\omega + i\gamma, k)} \approx k^2 r_{De}^2 \ll 1, \quad (7.13)$$

$$\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Li}^2} u_i^{(\pm 1)} = u_e^{(\pm 1)} = \mp u_e^{(0)} \frac{\mathbf{k} r_E}{2\varepsilon(\omega \pm i\gamma \pm \omega_0, k)}. \quad (7.14)$$

Соотношение (7.13) отвечает факту квазинейтральности низкочастотных длинноволновых колебаний плазмы. В соответствии с формулой (7.14) можно определить относительную величину амплитуд гармоник, изменяющихся во времени с частотами $\omega \pm \omega_0$.

Уравнение Пуассона

$$i\mathbf{k} E_{\mathbf{k}}(t) = 4\pi(\rho_e + \rho_i) \quad (7.15)$$

позволяет выразить амплитуды осцилляций напряженности продольного нарастающего во времени электрического поля через амплитуды осцилляций плотности заряда электронов и ионов. Записав

$$E_{\mathbf{k}}(t) = e^{-i\omega t + \gamma t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_{\mathbf{k}}^{(n)} e^{-in\omega t} \quad (7.16)$$

и учитывая формулы (7.1) и (7.2), получаем тогда

$$i\mathbf{k} E_{\mathbf{k}}^{(\pm 1)} = 4\pi u_e^{(\pm 1)}, \quad (7.17)$$

$$i\mathbf{k} E_{\mathbf{k}}^{(0)} = 4\pi \left\{ u_e^{(0)} + u_i^{(0)} + \frac{1}{2} \mathbf{k} r_E [u_e^{(+1)} - u_e^{(-1)}] \right\}. \quad (7.18)$$

Используя соотношения (7.13), (7.14) и дисперсионное уравнение (7.3), можно записать уравнение (7.18) в виде

$$i\mathcal{K} E_k^{(0)} = 4\pi u_e^{(0)} \left\{ \frac{1}{\delta\varepsilon_i(\omega + i\gamma, k)} - \frac{1}{\delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, k) [1 + \delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, k)]} \right\}. \quad (7.19)$$

§ 8. Аперриодическая неустойчивость для околпороговых значений напряженности внешнего поля

Выше в гидродинамической теории параметрического резонанса в плазме (§ 3) было обнаружено существование аперриодически нарастающих во времени возмущений плазмы. Такая аперриодическая неустойчивость оказалась возможной при частотах внешнего поля, меньших электронной ленгмюровской. Подобно этому дисперсионное уравнение (7.3), учитывающее такие кинетические эффекты, как тепловое движение частиц плазмы, черенковское взаимодействие волн с частицами и столкновения частиц плазмы, также приводит к аперриодической неустойчивости. Условием существования такой неустойчивости оказывается требование, налагаемое на разность частоты внешнего поля и частоты обычной продольной плазменной волны:

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 - (v_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 + 3k^2 r_{De}^2 \omega_{Le}^2)^{1/2} \approx \frac{1}{2\omega_0} \{ \omega_0^2 - \omega_{Le}^2 - \omega_{Li}^2 - 3k^2 r_{De}^2 \omega_{Le}^2 \}. \quad (8.1)$$

Для возникновения аперриодической неустойчивости необходимо выполнение условия

$$\Delta\omega_0 < 0. \quad (8.2)$$

Считая неравенство (8.2) выполненным, с помощью дисперсионного уравнения (7.3) находим следующие выражения для инкремента нарастания возмущений [14]:

$$\gamma = -\tilde{\gamma} + \left[-(\Delta\omega_0)^2 - \frac{(kr_E)^2 \omega_{Le} \Delta\omega_0}{4(k^2 r_{De}^2 + k^2 r_{Di}^2)} \right] \text{ при } \gamma < kv_{Ti}, \quad (8.3)$$

$$\gamma = -\tilde{\gamma} + \left\{ \frac{1}{2} \left[((\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2)^2 + \frac{(kr_E)^2}{k^2 r_{De}^2} \omega_s^2 \omega_{Le} \Delta\omega_0 \right]^{1/2} + \tilde{\gamma}^2 - \frac{1}{2} ((\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 + \omega_s^2) \right\}^{1/2} \text{ при } kv_{Ti} < \gamma < kv_{Te}. \quad (8.4)$$

Здесь $\omega_s = kr_{De}\omega_{Li}$ — обычная частота ионно-звуковых колебаний неизотермической плазмы, а

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) + \frac{1}{2} \nu_{ei}. \quad (8.5)$$

Граница аперiodической неустойчивости, позволяющая судить о значении волновых векторов нарастающих колебаний при заданном значении напряженности внешнего электрического поля, получается приравниванием нулю выражения для инкремента (8.3). В результате получаем [14]

$$\frac{(k\mathbf{r}E)_{\text{гр}}^2}{k^2(r_{De}^2 + r_{Di}^2)} \equiv \frac{(k\mathbf{E}_0)_{\text{гр}}^2}{4\pi k^2 \kappa \left(T_e + T_i \left|\frac{e}{e_i}\right|\right) n_e} = 4 \frac{(\Delta\omega)^2 + \tilde{\gamma}^2}{\omega_{Le} |\Delta\omega|}. \quad (8.6)$$

$(\Delta\omega_0 < 0).$

Для неизотермической плазмы, когда можно пренебречь дебаевским радиусом ионов, такой результат получил Нишикава [17].

В реальных условиях возможно положение, когда пороговое значение волнового вектора, т. е. такое значение, которому отвечает наименьшее значение граничной напряженности электрического поля, определяется размером плазмы или характерным масштабом неоднородности электрического поля накачки (1.1). Тогда в правую часть соотношения (8.6) следует подставить $k = (1/l)$, что тем самым непосредственно определит пороговое значение напряженности внешнего поля накачки.

Для длин волн, меньших характерного масштаба неоднородности, пороговые значения поля и волнового вектора определяются минимумом правой части формулы (8.6) и зависят от величины расстройки, под которой мы будем понимать разность частоты внешнего поля ω_0 и плазменной частоты $\omega_p = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}$.

Обсуждая следствия, вытекающие из формул (8.3)—(8.6), обратимся сначала к случаю положительной расстройки ($\omega_0 > \omega_p$). Имея в виду зависимость от частоты резонанского вклада в декремент (8.5), обозначим k_{sl} значение волнового вектора, при котором такой вклад сравнивается с вкладом в декремент (8.5), обусловленный

электрон-ионными столкновениями. Тогда для достаточно длинных волн ($k < k_{sl}$), когда роль черенковского эффекта на электронах для высокочастотной диссипации, описываемой формулой (8.5), оказывается пренебрежимо малой, а также при достаточно малых расстройках:

$$0 < \omega_0 - \omega_p < \frac{3}{2} \omega_p k_{sl}^2 r_{De}^2, \quad (8.7)$$

из формулы (8.6) находим следующие простые выражения, определяющие значение волнового вектора нарастающих колебаний и значение напряженности электрического поля накачки, при котором становится возможной неустойчивость (пороговое поле)*

$$k_{\text{пор}}^2 r_{De}^2 = \frac{v_{ei} + 2(\omega_0 - \omega_p)}{3\omega_p}, \quad (8.8)$$

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi(n_e \chi_e' + n_i \chi_i')} = \frac{r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2} = 4 \frac{v_{ei}}{\omega_{Le}}. \quad (8.9)$$

При небольших превышениях напряженности поля порогового значения, определенного формулой (8.9), когда выполняется неравенство $\gamma \ll \tilde{\gamma}$, для амплитуд осцилляций электронной плотности заряда имеем

$$u_e^{(1)} = i'v_e^{(-1)}. \quad (8.10)$$

Поэтому высокочастотная часть осцилляций электронной плотности заряда имеет вид

$$\frac{2u_e^{(1)}}{\sqrt{i}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + \gamma t} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right). \quad (8.11)$$

Отсюда следует, что быстропеременная зависимость возмущений имеет фазовый сдвиг 45° относительно фазы поля накачки.

Инкремент плазменных колебаний (8.3) достигает максимального значения

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{\omega_{Le}}{8} \frac{r_E^2 - r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2} \quad (8.12)$$

* Формула (8.9) с заменой электрон-ионной частоты на частоту столкновений электронов с нейтральными частицами неполностью ионизированной плазмы была получена Ншпикавой [18]. Для полностью ионизированной плазмы см. работы [17, 14, 19].

при значении волнового вектора, определяющегося соотношением

$$k_{\max}^2 r_{De}^2 = \frac{2}{3} \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} + \frac{r_E^2}{12(r_{De}^2 + r_{Di}^2)}. \quad (8.13)$$

Аналогично для максимального инкремента в случае формулы (8.4) при $\omega_0 - \omega_p \ll \omega_p \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^{-2}$ получаем

$$\gamma_{\max} \approx \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{6}} \frac{r_E}{r_{De}}. \quad (8.14)$$

В области более коротких волн, когда $k > k_{st}$, вкладом столкновений в диссипативный декремент (8.5) можно пренебречь. Для аperiodической неустойчивости в силу условия (8.2) это одновременно означает, что речь должна идти о достаточно больших расстройках

$$\omega_p \gg \omega_0 - \omega_p \gg \frac{3}{2} \omega_p k_{st}^2 r_{De}^2. \quad (8.15)$$

Соответственно этому для пороговых значений напряженности внешнего электрического поля накачки и волнового вектора колебаний плазмы получаем следующие формулы:

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi(n_e \chi'_{Te} + n_i \chi'_{Ti})} \equiv \frac{r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{k_{\text{пор}}^{10} r_{De}^{10}} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2k_{\text{пор}}^2 v_{Te}^2}\right), \quad (8.16)$$

$$k_{\text{пор}}^2 r_{De}^2 = \frac{2(\omega_0 - \omega_p)}{3\omega_p}. \quad (8.17)$$

Из этих формул, в частности, следует, что с увеличением расстройки пороговая напряженность электрического поля экспоненциально растет.

Для небольших превышений над порогом (8.16) для амплитуд осцилляций электронной плотности заряда имеем следующее соотношение амплитуд: $u_e^{(+1)} \approx u_e^{(-1)}$. Следовательно, высокочастотная часть осцилляций электронной плотности имеет вид

$$2u_e^{(1)} e^{ikr + \gamma t} \cos \omega_0 t, \quad (8.18)$$

что отвечает сдвигу фазы таких осцилляций во времени на 90° относительно фазы внешнего поля.

До сих пор речь шла о следствиях, вытекающих из формул (8.3) и (8.4), в случае частот внешнего поля, больших

плазменной. Рассмотрим теперь случая меньших частот ($\omega_0 < \omega_p$). Если при этом $\omega_p - \omega_0 < 1/2 v_{ei}$, то для порога и максимального инкремента применимы формулы (8.8), (8.9) и (8.12), (8.13). С дальнейшим уменьшением частоты внешнего поля пороговая напряженность поля растет пропорционально корню расстройки частоты:

$$E_{\text{пор}} = 4 \left[\frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_p} \pi (n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i) \right]^{1/2}. \quad (8.19)$$

Приведем, наконец, выражение для инкремента аperiodической неустойчивости в окрестности $\omega_0 \approx \omega_{Le}$, учитывая тепловое движение в пределе сильного поля ($(\mathbf{k} r_E)^2 \gg 1$) [35]:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ -(\Delta\omega)^2 + [(\Delta\omega)^4 - 4\omega_{Le}\omega_{Li}^2\Delta\omega J_1^2(\mathbf{k} r_E)]^{1/2} \}^{1/2}, \quad (8.20)$$

где

$$\Delta\omega = \omega_0 - (\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 J_0^2(\mathbf{k} r_E) + 3k^2 v_{Te}^2)^{1/2}. \quad (8.21)$$

Максимальное значение инкремента, определяемое формулой (3.15) и равное

$$\gamma_{\text{max}} \approx 0,55 \omega_{Le}^{1/3} \omega_{Li}^{2/3}, \quad (8.22)$$

достигается при волновом векторе, определяемом соотношениями

$$k^2 r_{De}^2 = \frac{2}{3} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{Le}}{\omega_{Le}} + 0,55 \left(\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \right)^{2/3} \right], \quad |\mathbf{k} r_E| \approx 1,8. \quad (8.23)$$

Заметим, что для применимости теории холодной плазмы (§ 3) необходимо также, чтобы инкремент нарастающих возмущений был велик по сравнению с высокочастотным декрементом затухания. Это выполняется при расстройках

$$\frac{\omega_0 - \omega_{Le}}{\omega_{Le}} < \frac{9}{8} \left[\ln \frac{\omega_{Le}}{\omega_{Li}} \right]^{-1} \quad (8.24)$$

и при напряженности внешнего поля, большей

$$\sqrt{4\pi n_e \kappa T_e} \left(\ln \frac{\omega_{Le}}{\omega_{Li}} \right)^{1/2}. \quad (8.25)$$

Аналогичное (см. [35]) переопределение расстройки (8.24), а также оценка области расстройки и величины поля (8.25) имеют место и для периодической неустойчивости*).

§ 9. Параметрическое возбуждение почти периодических продольных колебаний в околопороговой резонансной области. Основные соотношения

В этом параграфе мы начнем рассматривать следствия, вытекающие из дисперсионного уравнения (7.3), для параметрической неустойчивости плазмы, связанной с нарастающими почти периодическими колебаниями, частота которых ω значительно превышает инкремент γ [14]. Ниже будет показано, что такие колебания могут быть нарастающими лишь в области частот внешнего поля ω_0 , превышающих плазменную ω_p . О такой области частот будем говорить как об области прозрачности плазмы. Заметим, что существование в этой области нарастающих колебаний с частотой, большей инкремента, имеет своей аналогией результат гидродинамической теории параметрического резонанса, описываемый формулой (3.12) при $n = 1$.

Предполагая выполненными неравенства (7.6)–(7.8) и подставляя в дисперсионное уравнение (7.3) выражения (7.9) — (7.11) для парциальных диэлектрических проницаемостей, получаем систему биквадратных уравнений, определяющих частоту колебаний и их инкремент. Общие формулы для границы неустойчивости могут быть непосредственно получены, если при этом принять $\gamma = 0$. Тогда это уравнение принимает следующий вид:

$$1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{16\pi n_e \kappa T_e} \frac{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2] \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\} + \frac{2i}{\omega} \left\{ \gamma_s - \frac{E_0^2 \cos^2 \theta}{16\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\} = 0.$$

* В частности, максимум инкремента $\gamma_{\max} \approx 0,38 \omega_{Le}^{1/3} \omega_s^{2/3}$ достигается при

$$k^2 r_{De}^2 \approx \frac{2}{3} \left[\frac{\omega_0 - \omega_{Le}}{\omega_{Le}} - 0,38 \left(\frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \right)^{2/3} \right], \quad |k r_E| \approx 1,8.$$

Отсюда для граничного значения напряженности внешнего электрического поля накачки получаем

$$\frac{E_{\text{гp}}^2 \cos^2 \theta}{16\pi\lambda_e \kappa I'_e} = \frac{\gamma_s}{\tilde{\gamma}} \frac{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2\tilde{\gamma}^2}{\omega_s^2 \omega \Delta\omega_0}. \quad (9.1)$$

Одновременно для частоты колебаний, нарастающих на границе области неустойчивости, имеем

$$\omega^2 = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma} + \gamma_s} \left\{ \omega_s^2 + \frac{\gamma_s}{\tilde{\gamma}} (\Delta\omega_0)^2 + \gamma_s \tilde{\gamma} \right\}. \quad (9.2)$$

Для напряженности поля накачки, превышающей значение, определяющееся выражением (9.1), решения дисперсионного уравнения определяют спектры двух ветвей колебаний [14]:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_+^2 \equiv (\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \frac{1}{2}(1 - f_+) [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2], \\ \gamma &= \gamma_+ = \frac{1}{2f_+} [\gamma_s(1 - f_+) - \tilde{\gamma}(1 + f_+)], \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \omega_-^2 \equiv \omega_s^2 + \frac{1}{2}(1 - f_-) [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2], \\ \gamma &= \gamma_- \equiv \frac{1}{2f_-} [\tilde{\gamma}(1 - f_-) - \gamma_s(1 + f_-)]. \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Возникшая в этих формулах функция f_{\pm} может быть представлена в виде

$$f_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{(\alpha + \beta_{\pm})x}{(1-x)^2} + \left| \left[1 - \frac{(\alpha + \beta_{\pm})x}{(1-x)^2} \right]^2 + \frac{4\beta_{\pm}x}{(1-x)^2} \right|^{1/2} \right\}^{1/2} > 0, \quad (9.5)$$

где

$$x = \frac{\omega_s^2}{(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2}, \quad \alpha = \left(\frac{\kappa r_E}{\kappa r_{De}} \right)^2 \frac{\omega_0 \Delta\omega_0}{(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2},$$

$$\beta_{\pm} = 2 \left(\frac{\gamma_s - \tilde{\gamma}}{\omega_s} \right)^2 [2 - (1-x)(1 \mp f_{\pm})].$$

При этом входящие сюда низкочастотный γ_s и высокочастотный $\tilde{\gamma}$ декременты затухания имеют следующий вид:

$$\gamma_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \omega_s + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4 r_{Di}^3}{\omega_s^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{4}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2 \nu_{ii}}{\omega^2}, \quad (9.6)$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left[-\frac{(\omega_0 - |\omega|)^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right] + \frac{1}{2} \nu_{ei}. \quad (9.7)$$

Слагаемые правой части формулы (9.6) в выписанной последовательности соответственно обусловлены черенковским эффектом на электронах, черенковским эффектом на ионах, ион-ионными столкновениями. Формула (9.7) подобна формуле (8.5) и отвечает черенковскому взаимодействию волн с электронами и электрон-ионным столкновениям.

Заметим, что в пределе малой величины напряженности внешнего электрического поля формулы (9.4) отвечают частоте и декременту затухания обычных ионно-звуковых волн неизотермической плазмы. В этом же пределе формулы (9.3) соответствуют электронным ленгмювским колебаниям.

Инкременты, описываемые формулами (9.3) и (9.4), оказываются положительными, т. е. соответствуют нарастающим колебаниям лишь при $f_{\perp} < 0$. Последнее требует выполнения неравенства $\Delta\omega_0 > 0$, которое согласно определению (8.4) приводит к ограничению области допустимых волновых векторов нарастающих колебаний:

$$k^2 r_{De}^2 < \frac{2}{3} \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p}. \quad (9.8)$$

Далее необходимо заметить, что ветвь ω_+ оказывается нарастающей лишь в той области длин волн, в которой низкочастотный инкремент γ_s превышает высокочастотный $\tilde{\gamma}$ ($\gamma_s > \tilde{\gamma}$). Напротив, ветвь колебаний с частотой ω_- нарастает для длин волн, при которых низкочастотная диссипация мала ($\gamma_s < \tilde{\gamma}$).

В околопороговой области формулы (9.3)—(9.5) позволяют записать более простые, но в то же время весьма общие соотношения, позволяющие, в частности, определить границы области неустойчивости.

Рассматривая ветвь ω_- вблизи границы неустойчивости, примем, что $\tilde{\gamma} \gg \gamma_s$. Тогда из формулы (9.4) с очевидностью следует, что вблизи порога раскачки таких колебаний должно выполняться неравенство $1 - f_- \ll 1$. Соответственно этому, разлагая правую часть формулы (9.5) по степеням r_E , получаем

$$\omega_-^2 = \omega_s^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{kr_E}{kr_{De}} \right)^2 \frac{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2] \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\omega_s^2 \tilde{\gamma}^2}, \quad (9.9)$$

$$\gamma_- = \frac{1}{4} \left(\frac{kr_E}{kr_{De}} \right)^2 \frac{\tilde{\gamma} \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\omega_s^2 \tilde{\gamma}^2} - \gamma_s. \quad (9.10)$$

Приравнявая инкремент γ_- нулю, получаем из этих двух уравнений следующие уравнения границы области неустойчивости:

$$\left(\frac{kr_E}{kr_{De}} \right)_{\text{гр}}^2 = \frac{4\gamma_s \{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\omega_s^2 \tilde{\gamma}^2\}}{\tilde{\gamma} \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}, \quad (9.11)$$

$$(\omega_-^2)_{\text{гр}} = \omega_s^2 + \gamma_s \tilde{\gamma} + \frac{\gamma_s}{\tilde{\gamma}} (\Delta\omega_0)^2. \quad (9.12)$$

Последние два уравнения определяют границу области неустойчивости в плоскости (E, k) . Отсюда, в частности, может быть найдено минимальное пороговое значение напряженности внешнего электрического поля и соответствующее ему значение волнового вектора ($k_{\text{пор}}$), которое также будем называть пороговым.

Принимая в околопороговой области для ветви ω_+ выполнение неравенства $\tilde{\gamma} \ll \gamma_s$, в соответствии с формулой (9.3) видим, что при этом должно быть выполнено соотношение $1 - f_+ \ll 1$. Имея это в виду и разлагая правую часть формулы (9.5) по степеням r_E , находим

$$\omega_+^2 = (\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{kr_E}{kr_{De}} \right)^2 \frac{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2] \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\gamma_s^2 [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2]}, \quad (9.13)$$

$$\gamma_+ = \frac{1}{4} \left(\frac{kr_E}{kr_{De}} \right)^2 \frac{\gamma_s \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\gamma_s^2 [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2]} - \tilde{\gamma}. \quad (9.14)$$

Эти формулы, в частности, для границы области неустойчивости приводят к следующим уравнениям:

$$\left(\frac{kr_E}{kr_{De}}\right)_{\text{гр}}^2 = \frac{4\tilde{\gamma} \{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + 4\gamma_s^2 [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2]\}}{\gamma_s \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0}, \quad (9.15)$$

$$(\omega_+^2)_{\text{гр}} = (\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 + \omega_s^2 \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma_s}. \quad (9.16)$$

Граничные формулы (9.11) и (9.15) в частном случае $\Delta\omega = \omega_s \gg \tilde{\gamma}$ совпадают друг с другом. Если же, кроме того, пренебречь ион-ионными столкновениями, то эти формулы дают результаты работы Дюбуа и Гольдмана [20] *). Формула (9.11) при $\tilde{\gamma} \gg \omega_s$ подобна полученной в работе [17].

Следует подчеркнуть, что случай выполнения равенства $\Delta\omega_0 = \omega_s$, или в явном виде:

$$\omega_0 = (\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2 + 3k^2 v_{Te}^2)^{1/2} + \omega_s, \quad (9.17)$$

как это следует из равенства (9.17), представляет собой процесс такого взаимодействия трех волн: внешней высокочастотной волны, продольной высокочастотной ленгмюровской плазменной волны и волны ионного звука, о котором можно говорить на языке хорошо развитых представлений комбинационного рассеяния. При этом в теории комбинационного рассеяния волн в плазме [30, 115, 126] подобные процессы называют трансформацией внешней поперечной волны в продольные плазменные. Такая трансформация подобна квантовому распаду элементарного возбуждения — кванта поперечного электромагнитного поля — на два возбуждения продольного поля. Соответственно этим представлениям скорость нарастания возмущений в плазме определяется вероятностью трансформации поперечной волны в продольные — электронную ленгмюровскую и ионно-звуковую **).

*) См. также работы [21—23].

**) Заметим здесь, что высокочастотная ленгмюровская продольная волна благодаря комбинационному рассеянию может превращаться в такую же волну другой частоты и ионно-звуковую. Этот процесс, рассмотренный Ораевским и Сагдеевым [25] и получивший название распадной неустойчивости плазменных волн, может быть интересным с точки зрения нелинейной теории развития продольных возмущений параметрически неустойчивой плазмы. Целый ряд распадных процессов в плазме рассмотрен Ораевским [26] и [200].

Основное содержание последующего изложения этой главы связано с детальным анализом границы области неустойчивости, а также с изучением закономерностей, характерных для околопороговой области. Однако, прежде чем переходить к такому изложению, следует заметить, что формулы (9.3) — (9.5) позволяют отойти сравнительно далеко от порога. Например, при достаточно сильном поле, когда $\beta_+ < \alpha < 1$ и $\alpha x > (1-x)^2$, из формул (9.3) получаем

$$\omega_+^2 = \frac{1}{2} [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 + \omega_s^2], \quad (9.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_+ = & -\frac{1}{2}(\gamma_s + \tilde{\gamma}) + \\ & + \frac{\omega_s}{2^{3/2}} \left\{ \frac{\left(\frac{\mathbf{k}r_E}{kr_{De}}\right)^2 \omega_0 \omega_s^2 \Delta\omega_0 - [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2}{\omega_s^2 [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 + \omega_s^2]} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.19)$$

При еще бóльших полях возрастает инкремент и нарушается условие $\omega \gg \gamma$, положенное в основу формул (9.3) — (9.5).

Из формулы (9.19) вытекает, что при значительном превышении напряженности внешнего поля над пороговым значением и при достаточно большом значении $\Delta\omega_0$ частота колебаний и инкремент их нарастания становятся не зависящими от диссипативных эффектов, поскольку при этом вклад $\tilde{\gamma}$ и γ_s оказывается пренебрежимо малым. В таком пределе малости диссипативных эффектов может быть получено более общее решение дисперсионного уравнения (7.3), которое имеет следующий вид:

$$\omega^2 = \frac{1}{4} \left\{ (\Delta\omega_0)^2 + \omega_s^2 + \omega_s \Delta\omega_0 \sqrt{4 + \left(\frac{\mathbf{k}r_E}{kr_{De}}\right)^2 \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}} \right\}, \quad (9.20)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left\{ \omega_s \Delta\omega_0 \sqrt{4 + \left(\frac{\mathbf{k}r_E}{kr_{De}}\right)^2 \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}} - \omega_s^2 - (\Delta\omega_0)^2 \right\}^{1/2}. \quad (9.21)$$

Согласно формуле (9.21) при относительно малых напряженностях внешнего поля неустойчивость имеет место для колебаний с волновыми векторами, для которых выполняется условие (9.17), подобное отвечающему распадной неустойчивости (ср. [25, 26]). В то же время согласно этой формуле ясно, что с увеличением напряженности внешнего поля физическая картина существенно меняется. Так,

если $(kr_E)^2 \omega_0 > 16k^2 r_{De}^2 \Delta \omega_0$, то при выполнении распад-ного условия (9.17) оказывается, что

$$\gamma \sim \omega \sim \omega_s \left[\frac{(kr_E)^2 \omega_0}{k^2 r_{De}^2 \Delta \omega_0} \right]^{1/4}. \quad (9.22)$$

Сравнение инкремента по величине с частотой, которая оказывается существенно определяющей напряженностью внешнего поля, показывает, что в условиях выполнения формулы (9.22) говорить об аналогии с распадной неустойчивостью уже не имеет смысла.

В заключение этого параграфа приведем значения максимального инкремента и соответствующие ему значения волнового вектора, получаемые с помощью формулы (9.21):

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{3}{5}} \omega(k_{\max}) = \frac{3^{1/2}}{4} [\omega_{Li}^2 (\omega_0 - \omega_p)]^{1/2} \left(\frac{E_0^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \right)^{1/4},$$

$$k_{\max}^2 r_{De}^2 \approx \frac{2}{3} \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p}$$

при

$$\frac{256}{9} \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{2} \omega_{Le}} \left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} \right)^{1/2} < \frac{E_0^2}{4\pi n_e \kappa T_e} < 24 \left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} \right)^2$$

и

$$\gamma_{\max} \approx \omega(k_{\max}) = \frac{1}{2 \cdot 6^{1/4}} [\omega_{Li} (\omega_0 - \omega_p)]^{1/2} \left(\frac{E_0^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \right)^{1/4},$$

$$k_{\max}^2 r_{De}^2 \approx \frac{\omega_0 - \omega_p}{3\omega_p}$$

при

$$\frac{32}{3} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}, 24 \left(\frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_{Li}} \right)^2 < \frac{E_0^2}{4\pi n_e \kappa T_e} < \frac{\omega_p}{\omega_0 - \omega_p}.$$

§ 10. Параметрическое возбуждение в околопороговой резонансной области почти периодических продольных колебаний со спектром (9.4)

В этом параграфе мы детально рассмотрим следствия, вытекающие из общих формул предыдущего параграфа, касающиеся параметрической раскачки колебаний со спектром $\omega_{[14]}$, который при уменьшении напряженности внешнего электрического поля накачки переходит в обычный спектр ионно-звуковых волн неизотермической плазмы.

Считая, что температура электронов не слишком сильно превышает температуру ионов

$$e_i^2 T_e m_e \ll e^2 T_i m_i, \quad (10.1)$$

а также имея в виду, что согласно формуле (9.4) ветвь колебаний ω_- нарастает с увеличением времени при условии $\tilde{\gamma} > \gamma_s$, можно указать следующее неравенство, при выполнении которого неустойчивость плазмы оказывается связанной с раскачкой лишь этой ветви:

$$v_{ei} > \sqrt{\frac{\pi}{2}} k_{st} r_{De} \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} Y_-. \quad (10.2)$$

Здесь $k_{st} \sim r_{De}^{-1} [2 \ln (\omega_{Le}/v_{ei})]^{-1/2}$, — как и в § 8, волновой вектор, при котором сравниваются вклады в $\tilde{\gamma}$, обусловленные эффектом Черенкова и электронными столкновениями. В формуле (10.2) и ниже будет использовано обозначение

$$Y_{\pm} = 1 + \frac{\omega_{\pm}^4 r_{De}^2 v_{Te}}{\omega_s^4 r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\omega_{\pm}^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right). \quad (10.3)$$

Если неравенство (10.2) нарушено, то в области длин волн, определяющихся неравенствами

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_{ei} \omega_{Le}}{\omega_{Li}^2 r_{De}} Y_+^{-1} < k < k_1 \sim \frac{1}{r_{De}} \left[2 \ln \frac{\omega_{Le}}{\omega_{Li}}\right]^{-1/2} \quad (10.4)$$

(где k_1 — волновое число, при котором низкочастотный декремент γ_s (9.6) сравнивается с вкладом в $\tilde{\gamma}$, обусловленным черенковским эффектом), неустойчивость связана с раскачкой ветви колебаний со спектром ω_+ . Напротив, вне этой области (где $\tilde{\gamma} > \gamma_s$) нарастающими оказываются колебания со спектром (9.4).

Поскольку величина расстройки резонанса $\omega_0 - \omega_p > \frac{3}{2} \omega_p k^2 r_{De}^2$ определяет ограничение для волнового вектора колебаний, то, обсуждая далее неустойчивость для различных длин волн, мы тем самым будем рассматривать различные расстройки. Наше обсуждение начнем со случая длинных волн $k < k_{st}$, когда можно пренебречь вкладом в высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}$, обусловленным черенковским эффектом.

В широкой области длинных волн обратимся сперва к подобласти значений волновых векторов, для которых выполняется неравенство

$$\omega_0 - \omega_p \left[1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right] \ll v_{ei}. \quad (10.5)$$

При этом формулы (9.11) и (9.12), определяющие границу области раскачки волн со спектром ω_- , принимают вид

$$\left(\frac{k r_E}{k r_{De}} \right)_{\text{гр}}^2 = \frac{\gamma_s (v_{ei}^2 + 4\omega_s^2)^2}{2v_{ei}\omega_s^2\omega_0\Delta\omega_0}, \quad (10.6)$$

$$(\omega_-^2)_{\text{гр}} = \omega_s^2 + \frac{1}{2} v_{ei}\gamma_s. \quad (10.7)$$

Особо детализировать формулы (10.6) и (10.7) можно в двух предельных случаях. Во-первых, в пределе $8r_{Di}^2 \cdot v_{ei}v_{ii} \gg 5r_{De}^2 \omega_s^2$ имеем

$$(\omega_-^4)_{\text{гр}} = \frac{2}{5} k^2 v_{Ti}^2 v_{ei}v_{ii}, \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k r_E}{k r_{De}} \right)_{\text{гр}}^2 &= \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{v_{ei}^{5/2} v_{ii}^{1/2} r_{Di}}{\omega_s \omega_0 \Delta\omega_0 r_{De}} \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{4} \frac{r_{Di} v_{ii}^{1/2} v_{ei}^{3/2}}{r_{De} k^2 v_{Ti}^2} \exp \left[- \left(\frac{v_{ei} v_{ii}}{10k^2 v_{Ti}^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (10.9)$$

и, во-вторых, в обратном пределе $8r_{Di}^2 v_{ei} v_{ii} \ll 5r_{De}^2 \omega_s^2$ получаем

$$(\omega_-)_{\text{гр}} = \omega_s, \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{k r_E}{k r_{De}} \right)_{\text{гр}}^2 &= \frac{[v_{ei}^2 + 4\omega_s^2]^2}{v_{ei}\omega_s^2\omega_0\Delta\omega_0} \left\{ \frac{2}{5} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2} v_{ii} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\frac{\pi}{32}} \frac{\omega_{Li}\omega_s}{\omega_{Le}} \left[1 + \frac{r_{De}^2 v_{Te}}{r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp \left(- \frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Подчеркнем, что возникновение в (10.10) ионно-звуковой частоты требует выполнения неизотермичности $|e_i| T_e \gg |e| T_i$.

Формулы (10.9) и (10.11) позволяют найти пороговые значения напряженности внешнего электрического поля накачки. Это особенно легко сделать тогда, когда можно пренебречь вкладом в низкочастотный декремент γ_s , обусловленным черенковским взаимодействием волн с ионами,

что во всяком случае возможно при $(|e_i|T_e/|e|T_i) > > \ln(e_i^2 T_e^3 m_i / e^2 T_i^3 m_e)$. При этом минимум граничной напряженности поля, определяемый формулой (10.9), имеет место при $k_{\text{пор}} = r_{De}^{-1} [2(\omega_0 - \omega_p)/9\omega_p]^{1/2}$ и дается выражением

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \left[\frac{81}{20} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}^5}{r_{De}^2 \omega_{Le} \omega_{Li}^2 (\omega_0 - \omega_p)^3} \right]^{1/2}, \quad (10.12)$$

причем для расстройки выполняются неравенства

$$\omega_0 - \omega_p < v_{ei}, \quad \omega_0 - \omega_p < \frac{6}{5} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2} \frac{v_{ei} v_{ii} \omega_{Le}}{\omega_{Li}^2}.$$

Аналогично с помощью (10.11) для порогового значения поля накачки находим

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{32}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ei} v_{ii}}{r_{De}^2 (\omega_0 - \omega_p)^2} \left[\frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} + \frac{3}{8} \frac{v_{ei}^2}{\omega_{Li}^2} \right], \quad (10.13)$$

$$\frac{6}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ei} v_{ii} \omega_{Le}}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2} < \omega_0 - \omega_p < v_{ei}.$$

Выражение (9.10) для инкремента нарастающих колебаний со спектром ω_- может быть использовано для нахождения максимальных значений инкремента в околопороговой области и соответствующих значений волнового вектора колебаний. Заметим, что выражением (9.10) можно воспользоваться для полей, при которых $\gamma_{\text{max}} < \omega$ и $\gamma_{\text{max}} < \frac{1}{8} v_{ei}$. Сравнительно несложный анализ показывает, что для расстроек, приводящих к порогу, определяемому формулой (10.13), максимум достигается при $k_{\text{max}} = k_{\text{пор}}$ и равен

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{r_E^2 - r_{E, \text{пор}}^2}{8r_{De}^2} \frac{(\omega_0 - \omega_p)^2}{v_{ei}} \left[\frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} + \frac{3}{8} \frac{v_{ei}^2}{\omega_{Li}^2} \right]^{-1}. \quad (10.14)$$

Этим же выражением можно пользоваться и для расстроек, соответствующих порогу (10.12), но для напряженностей поля накачки, значительно превосходящих пороговое, имея в виду, что

$$\omega_0 - \omega_p \ll 3v_{ei} \omega_{Le} / 8\omega_{Li}^2 \quad \text{и} \quad k_{\text{max}} \approx r_{De}^{-1} [(\omega_0 - \omega_p) / 3\omega_p]^{1/2}.$$

Определим теперь в условиях выполнения неравенства (10.5) соотношение между амплитудами $u_e^{(\pm 1)}$ в разложении (7.4). Согласно формуле (7.14) и учитывая (10.5), находим, что $u_e^{(+1)} = u_e^{(-1)}$. Поэтому для высокочастотной части осцилляций электронной плотности можно записать выражение, подобное формуле (8.18), позволяющее говорить о сдвиге фазы таких осцилляций во времени на 90° относительно фазы внешнего поля.

Переходя к подобласти длин волн, более коротких, чем определяемые соотношением (10.5), но все еще оставаясь в области длинных волн $k < k_{st}$, следует иметь в виду, что расстройка будет определяться неравенствами

$$v_{ei} < \omega_0 - \omega_p < \frac{3}{2} \omega_p k_{st}^2 r_{De}^2. \quad (10.15)$$

Обратимся сначала к случаю, когда при пороговых значениях нарастающих волновых векторов звуковая частота мала по сравнению с декрементом $\tilde{\gamma}$, а вкладом черенковского эффекта на ионах в γ_s можно пренебречь. Тогда с помощью (9.11) и (9.12) находим

$$\frac{E_{пор}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{16}{5} \left[\frac{3}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}^3}{r_{De}^2 \omega_{Le} \omega_{Li}^2 (\omega_0 - \omega_p)} \right]^{1/2}, \quad (10.16)$$

$$\omega_-(k_{пор}) = \frac{8}{15} \omega_s^2(k_{пор}) v_{ei} v_{ii} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2} \quad (10.17)$$

при

$$v_{ei} < (\omega_0 - \omega_p) < \frac{6}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2} \omega_{Le}, \quad \frac{3}{2} k_{st}^2 r_{De}^2 \omega_{Le}$$

и

$$\omega_-(k_{пор}) = \omega_s(k_{пор}), \quad (10.18)$$

$$\frac{E_{пор}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{32}{5 \sqrt{3}} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}^2}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2 (\omega_0 - \omega_p)} \quad (10.19)$$

при

$$v_{ei}, \quad \frac{6}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2} \omega_{Le} < \omega_0 - \omega_p < \frac{3}{8} \frac{v_{ei}^2}{\omega_{Li}^2} \omega_{Le}, \quad \frac{3}{2} k_{st}^2 r_{De}^2 \omega_{Le}.$$

Пороговые значения (10.16) и (10.19) достигаются для волнового числа, удовлетворяющего условию $\Delta\omega_0 = v_{ei}/2\sqrt{3}$ при одновременном выполнении неравенства $\omega_0 - \omega_p \gg v_{ei}$.

При превышении порога для полей, приводящих к инкременту, малому по сравнению с ω и $v_{ei}/8$, в области расстройек (10.15) и в условиях достижения порогов (10.16) и (10.19) находим с помощью (9.10) следующее выражение для максимального инкремента:

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{E^2 - E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \frac{(\omega_0 - \omega_p) \omega_{Li}^2}{v_{ei}^2}, \quad (10.20)$$

где $E_{\text{пор}}$ определяется соответственно значениям расстройки формулами (10.16) и (10.19), а $k_{\max} \approx k_{\text{пор}}$. Поскольку при этом $\omega_- \ll \tilde{\gamma}$, то гармоники осцилляций электронной плотности заряда с частотами $\pm \omega_0 + \omega_-$ имеют равные амплитуды, а фаза таких осцилляций (с точностью до $\omega_- t$) сдвинута во времени на $\pi/2$ по отношению к фазе поля накачки.

Отметим, что формулы (10.16)–(10.20), являющиеся продолжением формул (10.8)–(10.14) в область больших расстройек (при $\omega_0 - \omega_p < 3v_{ei}^2 \omega_{Le} / 8\omega_{Li}^2$), показывают, что с увеличением расстройки порог раскачки колебаний уменьшается, а максимальный инкремент возрастает.

Рассмотрим теперь в подобласти расстройек (10.15) противоположный рассмотренному случай, когда в околороговой области частота ω_s значительно превышает декремент $\tilde{\gamma} = 1/2 v_{ei}$. Тогда, как это непосредственно следует из формулы (9.11), можно утверждать, что порог неустойчивости возникает в распадных условиях, т. е. для $k_{\text{пор}} = k_0$, где значение волнового вектора k_0 определяется уравнением

$$\omega_s(k_0) \equiv k_0 r_{De} \omega_{Li} = \Delta \omega_0(k_0) \equiv \omega_0 - \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k_0^2 r_{De}^2 \right). \quad (10.21)$$

При этом из (9.12) следует, что $\omega_- = \omega_s$, а для пороговой напряженности внешнего электрического поля накачки согласно (9.11) получаем следующие зависимости от k_0 :

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{32}{5} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} v_{ei}}{r_{De}^2 \omega_0 \omega_s(k_0)} \quad (10.22)$$

при

$$\frac{v_{ei}}{2\omega_{Li}} < k_0 r_{De} <$$

$$< \frac{8}{5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} \omega_{Le}}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2} \left\{ 1 + \frac{r_{De}^2 v_{Te}}{r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp\left(-\frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\right) \right\}^{-1},$$

что является продолжением формулы (10.19) в области больших расстройек при $\omega_0 - \omega_p > 3v_{ei}^2 \omega_{Le} / 8\omega_{Li}^2$, и

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \sqrt{8\pi} \frac{v_{ei} \omega_{Li}}{\omega_{Le}^2} \left\{ 1 + \frac{r_{De}^2 v_{Te}}{r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp\left(-\frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\right) \right\} \quad (10.23)$$

при

$$\frac{v_{ei}}{2\omega_{Li}}, \quad \frac{8}{5} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r_{Di}^2 v_{ii} \omega_{Le}}{r_{De}^2 \omega_{Li}^2 Z} < k_0 r_{De} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v_{ei} \omega_{Le}}{\omega_{Li}^2 Z}, \quad k_{si} r_{De},$$

где

$$Z = 1 + \frac{r_{De}^2 v_{Te}}{r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp\left(-\frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\right). \quad (10.24)$$

Порог (10.23) является наименьшим для неустойчивости относительно раскачки периодических потенциальных колебаний. Подчеркнем, что такой порог возможен лишь при достаточно небольших частотах столкновений.

В области около порогов (10.22) и (10.23) максимальное значение инкремента получается также в распадном условии (10.21), причем

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{E^2 - E_{\text{пор}}^2}{32\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_0 \omega_s(k_0)}{v_{ei}}, \quad (10.25)$$

если инкремент не превышает $\frac{1}{8} v_{ei}$, и

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{r_E}{4r_{De}} [\omega_0 \omega_s(k_0)]^{1/2} \quad \text{при} \quad \tilde{\gamma} < \gamma_{\text{max}} < \omega_s(k_0). \quad (10.26)$$

В условиях выполнения распадных условий (10.21) $\Delta\omega_0 = \omega_s = \omega_-$ для амплитуд гармоник осцилляций электронной плотности заряда согласно общему соотношению (7.14) можно записать следующие равенства:

$$\left| \frac{u_e^{(+1)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{[\gamma_- + \tilde{\gamma}(k_0)]^2}{4\omega_s^2(k_0)} \ll 1, \quad (10.27)$$

$$k_0^2 r_{De}^2 \left| \frac{u_e^{(0)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{\tilde{\gamma}(k_0)}{\gamma_- + \gamma_s(k_0)} \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Li}}, \quad \frac{r_E^2}{r_{De}^2} < 4 \frac{\tilde{\gamma}^2(k_0)}{\omega_{Le} \omega_s(k_0)}, \quad (10.28)$$

$$k_0^2 r_{De}^2 \left| \frac{u_e^{(0)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Le}}, \quad \frac{16\tilde{\gamma}(k_0)}{\omega_{Le} \omega_s(k_0)} < \frac{r_E^2}{r_{De}^2} < 16 \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Le}}. \quad (10.29)$$

Соотношения (10.27)–(10.29) позволяют сделать ряд утверждений об энергии параметрически возбуждаемых колебаний. Для этого воспользуемся следующим обычным выражением для плотности энергии монохроматических продольных волн [8]:

$$W_k = \frac{1}{4\pi} |E_k|^2 \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, k)]. \quad (10.30)$$

Используя формулы (7.17) и (7.19) для колебаний поля с частотами $\omega = \omega_s(k_0)$ и $\omega \pm \omega_0$ соответственно, получаем следующие выражения плотности энергии:

$$W^{(0)} = 8\pi |u_e^{(0)}|^2 r_{De}^2, \quad W^{(\pm 1)} = 8\pi |u_e^{(\pm 1)}|^2 k_0^{-2}. \quad (10.31)$$

Поэтому левая часть формулы (10.27) равна отношению $W^{(+1)}/W^{(-1)}$. Аналогично (10.28) и (10.29) дают отношение $W^{(0)}/W^{(-1)}$. Очевидно, что теперь эти соотношения позволяют сказать, что число квантов с частотой $\omega_0 + \omega_-$ мало по сравнению с числом квантов, возбуждаемых с частотой $\omega_0 - \omega_-$. В то же время формула (10.29) означает, что, когда в распадных условиях диссипативные процессы становятся несущественными, число возбуждаемых квантов с частотами ω_- и $\omega_0 - \omega_-$ оказывается равным.

Рассмотрим теперь область коротких волн $k > k_{st}$, когда вклад столкновений в высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}$ пренебрежимо мал. Соответственно этому для расстройек имеем $\omega_0 - \omega_p > \frac{3}{2} \omega_p k_{st}^2 r_{De}^2$.

Здесь следует говорить о двух возможностях в зависимости от того, превышает ли звуковая частота декремент $\tilde{\gamma}$ или нет. Пусть $\tilde{\gamma} > \omega_s$. Это выполняется всегда, если $v_{ei} > 2\omega_{Li} k_{st} r_{De}$. При нарушении последнего неравенства имеет смысл ввести значение волнового вектора k_2 , при котором

$$\tilde{\gamma}(k_2) = \omega_s(k_2). \quad (10.32)$$

При этом для $k > k_2$ (следовательно, $\omega_0 - \omega_p > \frac{3}{2} \omega_p k_2^2 r_{De}^2$), так же как и при $v_{ei} > 2\omega_s(k_{st})$, порог неустойчивости, как это следует из (9.11), имеет место при $k_{пор} = k_\gamma$, определяемом уравнением $\Delta\omega_0(k_\gamma) = \tilde{\gamma}(k_\gamma)$, где столкновениями можно пренебречь, и для порогового значения напряженности внешнего электрического поля накачки

Получаем

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \approx 16 \frac{\gamma_s(k_\gamma)}{\omega_0} \left[\frac{\Delta\omega_0(k_\gamma)}{\omega_s(k_\gamma)} \right]^2. \quad (10.33)$$

Формула (9.10) позволяет найти максимальное значение инкремента, которое соответствует $k_{\text{max}} \sim k_\gamma$ и равно

$$\gamma_{\text{max}} \approx \frac{E^2 - E_{\text{пор}}^2}{64\pi n_e \kappa T_e} \omega_0 \left[\frac{\omega_s(k_\gamma)}{\Delta\omega_0(k_\gamma)} \right]^2. \quad (10.34)$$

Поскольку при этом $\omega_- \ll \tilde{\gamma}$, то амплитуды $u_e^{(+1)}$ и $u_e^{(-1)}$ осциллирующей электронной плотности зарада оказываются одинаковыми.

Наконец, если частота столкновений значительно меньше $\omega_s(k_{st})$ и в то же время $k_{st} < k < k_2$, то здесь всюду ионно-звуковая частота превосходит высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}$. Тогда согласно (9.12) $\omega_- = \omega_s$, а порог достигается в распадных условиях ($k = k_0$) и

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = 16 \frac{\gamma_s(k_0) \tilde{\gamma}(k_0)}{\omega_0 \omega_s(k_0)}, \quad \frac{3}{2} k_{st}^2 r_{De}^2 < \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} < \frac{3}{2} k_2^2 r_{De}^2. \quad (10.35)$$

Максимум инкремента имеет место при том же волновом векторе и равен

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{E^2 - E_{\text{пор}}^2}{64\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_0 \omega_s(k_0)}{\tilde{\gamma}(k_0)} \equiv \gamma_s(k_0) \left(\frac{E^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right) < \frac{1}{4} \tilde{\gamma}(k_0). \quad (10.36)$$

Для амплитуд электронной плотности имеем при этом соотношения (10.27) — (10.29).

§ 11. Параметрическое возбуждение в околороговой резонансной области почти периодических потенциальных колебаний со спектром (9.3)

Раскачка ветви ω_+ со спектром (9.3), как это было показано в § 9, возможна лишь при волновых числах, для которых выполняется неравенство $\gamma_s > \tilde{\gamma}$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \omega_s + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{r_{De}}^4}{\omega_{s_{Di}}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{4}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2 \nu_{ii}}{\omega^2} > \\ & > \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{[\omega_0 - |\omega|]^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right) + \frac{1}{2} \nu_{ei}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Это возможно при выполнении неравенства, обратного (10.2). Поскольку почти периодические колебания нарастают при $\Delta\omega_0 > 0$, то расстройки, приводящие к нарастанию колебаний ветви ω_+ , должны быть достаточно велики:

$$\omega_0 - \omega_p > \frac{3\omega_p^3 v_{ei}^2}{\pi\omega_{Li}^2 Y_+^2}. \quad (11.2)$$

При этом для пороговой напряженности из формулы (9.15) следует выражение (10.23)

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \sqrt{8\pi} \frac{v_{ei} \omega_{Li}}{\omega_{Le}^2} \left\{ 1 + \frac{r_{De}^2 v_{Te}}{r_{Di}^2 v_{Ti}} \exp\left(-\frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\right) \right\} \quad (11.3)$$

и пороговое значение волнового вектора отвечает распадному значению ($k_{\text{пор}} = k_0$). Эти результаты возникают при

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{v_{ei}}{\omega_{Li}} Y_+^{-1}}, \quad \frac{3}{\pi} \left(\frac{v_{ei} \omega_{Le}}{\omega_{Li}^2 Y_+} \right)^2 < \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} < \frac{3}{2} k_{st}^2 r_{De}^2, \quad (11.4)$$

когда можно пренебречь вкладом черенковского эффекта на электронах в высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}(k_0)$ и вкладом ион-ионных соударений в декремент $\gamma_s(k_0)$.

В окрестности порога (11.3) при значениях инкремента, меньших $1/4\gamma_s(k_0)$, максимальное значение γ_+ достигается при $\Delta\omega_0 = \omega_s$ и $k_{\text{max}} = k_0$ и имеет следующий вид:

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{E^2 - E_{\text{пор}}^2}{64\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_{Le} \omega_s(k_0)}{\gamma_s(k_0)}; \quad \left(\frac{E^2}{4\pi n_e \kappa T_e} < 4 \frac{\gamma_s^2(k_0)}{\omega_{Le} \omega_s(k_0)} \right). \quad (11.5)$$

При еще большем увеличении напряженности внешнего поля накачки, когда $\omega_s(k_0) > \gamma_{\text{max}} > \gamma_s$, для максимального значения инкремента имеет место выражение (10.26). Частота колебаний ω_+ мало отличается от ионно-звуковой. Для отношения амплитуд гармоник электронной плотности заряда имеем соотношения

$$\left| \frac{u_e^{(+1)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{[\tilde{\gamma}(k_0) + \gamma_+]^2}{4\omega_s^2(k_0)} \ll 1, \quad (11.6)$$

$$k_0^2 r_{De}^2 \left| \frac{u_e^{(0)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{\tilde{\gamma}(k_0) + \gamma_+}{\gamma_s(k_0)} \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Le}}, \quad \frac{r_E^2}{r_{De}^2} < 4 \frac{\gamma_s^2(k_0)}{\omega_{Le} \omega_s(k_0)}, \quad (11.7)$$

$$k_0^2 r_{De}^2 \left| \frac{u_e^{(0)}}{u_e^{(-1)}} \right|^2 = \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Le}}, \quad \frac{16\gamma_s^2(k_0)}{\omega_{Le} \omega_s(k_0)} < \frac{r_E^2}{r_{De}^2} < 16 \frac{\omega_s(k_0)}{\omega_{Le}}. \quad (11.8)$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям (10.27) — (10.29) и также позволяют характеризовать числа колебаний с различными частотами.

Из формулы (11.5) следует, что вблизи порога с увеличением напряженности поля инкремент возрастает как E^2 . При больших напряженностях, когда $\gamma_s(k_0)$ и $\tilde{\gamma}(k_0) < \omega_s(k_0)$, в распадных условиях инкремент пропорционален первой степени напряженности внешнего поля и не зависит от диссипативных свойств плазмы. Последняя закономерность была получена Ораевским и Сагдеевым [25, 26] в теории распада электронной плазменной волны на электронную плазменную и ионно-звуковую. Заметим, что наше рассмотрение в этом случае непригодно, поскольку при распаде электронной плазменной волны нельзя пренебрегать конечной величиной волнового вектора внешнего поля.

Для значений расстройек внешнего поля, больших (11.4), когда

$$\frac{3}{2} k_{st}^2 r_{De}^2 < \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} < \frac{3}{2} k_1^2 r_{De}^2 \quad (11.9)$$

(k_1 — волновой вектор, при котором γ_s сравнивается с вкладом $\tilde{\gamma}$, обусловленным черенковским эффектом), граница области нарастания колебаний с частотой ω_+ имеет два минимальных значения для напряженности внешнего поля. Одно из них отвечает распадному условию и отличается от рассмотренного выше в этом параграфе лишь тем, что при этом следует учитывать вклад в декремент $\tilde{\gamma}$ от черенковского эффекта на электронах. Второе минимальное значение напряженности возникает при $k_{\min} \sim k_{st}$ и определяется соотношением

$$\frac{E_{\min}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \approx \frac{4v_{ei}(\omega_0 - \omega_p)^3}{\omega_{Le} \omega_s^2(k_{\min}) \gamma_s(k_{\min})}. \quad (11.10)$$

Это же выражение пригодно и при больших волновых числах и соответственно больших расстройках.

ГЛАВА III

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СИЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЯХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 12. Дисперсионные уравнения потенциальных возмущений плазмы, находящейся в переменном электрическом и сильном постоянном магнитном полях

Сильное постоянное во времени и однородное в пространстве магнитное поле оказывает существенное влияние на спектры колебаний плазмы. Это хорошо известно для колебаний плазмы без внешнего переменного электрического поля. Подобное же влияние обнаруживается и в интересующей нас задаче колебаний и устойчивости плазмы, находящейся в переменном электрическом поле. Для построения необходимой теории воспользуемся приближением самосогласованного поля, которое, в отличие от уравнения (4.1), также учитывает наличие сильного магнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \sum_\beta \int d\mathbf{r}_\beta d\mathbf{p}_\beta \frac{e_\alpha e_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|} f_\beta = \\ = -e_\alpha \left\{ \mathbf{E}(t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha}. \quad (12.1) \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{B} — постоянное и однородное магнитное поле. Так же как и в случае уравнения (4.1), мы ограничиваемся учетом лишь кулоновского взаимодействия частиц, что соответствует учету лишь потенциальных возмущений в неравновесной плазме.

Основное пространственно однородное состояние плазмы характеризуется функциями распределения частиц, подчиняющимися уравнениям

$$\frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial t} + e_{\alpha} \left(\mathbf{E}(t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} = 0. \quad (12.2)$$

Установившееся решение этого уравнения может быть записано в виде

$$f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t) = f_{\alpha 0} \left(\mathbf{p}_{\alpha} - e_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \{ \mathbf{b}(\mathbf{b} \mathbf{E}(t')) + [\mathbf{E}(t') \mathbf{b}] \sin \Omega_{\alpha}(t - t') + [\mathbf{b} [\mathbf{E}(t') \mathbf{b}]] \cos \Omega_{\alpha}(t - t') \} \right), \quad (12.3)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, а функция $f_{\alpha 0}(\mathbf{p}_{\alpha})$ может быть принята в виде максвелловского распределения по импульсам.

Для состояний, функции распределения частиц которых мало отличаются от (12.3) ($f_{\alpha} = f_{\alpha 0} + \delta f_{\alpha}$), из уравнения (12.1), считая пространственную зависимость вида $\exp i\mathbf{k} \mathbf{r}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial t} + i\mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha} \delta f_{\alpha} + e_{\alpha} \left(\mathbf{E}(t) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_{\alpha} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} = \\ = i\mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t)}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}} \sum_{\beta} \frac{4\pi e_{\alpha} e_{\beta}}{k^2} \int d\mathbf{p}_{\beta} \delta f_{\beta}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Введем функцию

$$\Psi_{\alpha}(t, \mathbf{p}_{\alpha}) = \delta f_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha} + \delta \mathbf{p}_{\alpha}(t), t) e^{i\mathbf{k} \delta \mathbf{r}_{\alpha}(t)}, \quad (12.5)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{\alpha}(t) = e_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' \{ \mathbf{b}(\mathbf{b} \mathbf{E}(t')) + \\ + [\mathbf{E}(t') \mathbf{b}] \sin \Omega_{\alpha}(t - t') + [\mathbf{b} [\mathbf{E}(t') \mathbf{b}]] \cos \Omega_{\alpha}(t - t') \}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

$$\delta \mathbf{r}_{\alpha}(t) = \frac{1}{m_{\alpha}} \int_{-\infty}^t dt' \delta \mathbf{p}_{\alpha}(t'). \quad (12.7)$$

Согласно (12.4) для функции (12.5) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha\psi_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} [\mathbf{v}_\alpha\mathbf{B}] \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \\ = i\mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{p}_\alpha)}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \sum_\beta \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{k^2} \exp\{i\mathbf{k}, \delta \mathbf{r}_\alpha(t) - \delta \mathbf{r}_\beta(t)\} \int d\mathbf{p}_\beta \psi_\beta. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, и электрического поля $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \sin \omega_0 t$ зависимость от электрического поля входит в уравнения (12.8) в виде

$$\begin{aligned} \exp(i\mathbf{k}, \delta \mathbf{r}_e(t) - \delta \mathbf{r}_i(t)) = \exp\{i a_B \sin(\omega_0 t + \varphi_E)\} = \\ = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a_B) \exp\{il(\omega_0 t + \varphi_E)\}, \end{aligned} \quad (12.9)$$

где J_l — функция Бесселя. Ориентируя ось z вдоль постоянного магнитного поля, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_E = (E_x k_y - E_y k_x) \left[\frac{e \Omega_e}{m(\Omega_e^2 - \omega_0^2)} - \frac{e_i \Omega_i}{m_i(\Omega_i^2 - \omega_0^2)} \right] \times \\ \times \left[\frac{k_z E_z}{\omega_0^2} \left(\frac{e}{m} - \frac{e_i}{m_i} \right) + (E_x k_x + E_y k_y) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{e}{m(\omega_0^2 - \Omega_e^2)} - \frac{e_i}{m_i(\omega_0^2 - \Omega_i^2)} \right] \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (12.10)$$

$$\begin{aligned} a_B^2 = \left[\frac{k_z E_z}{\omega_0^2} \left(\frac{e}{m} - \frac{e_i}{m_i} \right) + (E_x k_x + E_y k_y) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{e}{m(\omega_0^2 - \Omega_e^2)} - \frac{e_i}{m_i(\omega_0^2 - \Omega_i^2)} \right) \right]^2 + \\ + \frac{(E_x k_y - E_y k_x)^2}{\omega_0^2} \left[\frac{e \Omega_e}{m(\Omega_e^2 - \omega_0^2)} - \frac{e_i \Omega_i}{m_i(\Omega_i^2 - \omega_0^2)} \right]^2; \end{aligned} \quad (12.11)$$

$\Omega_\alpha = e_\alpha B / m_\alpha c$ — гироскопическая (ларморовская) частота частицы сорта α .

Решение системы уравнений (12.8) для электронов и ионов представим в виде

$$\psi_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha) \exp\{-in(\omega_0 t + \varphi_E) - i\omega t\}. \quad (12.12)$$

Кроме того, в пространстве импульсов (скоростей) будем пользоваться полярной системой координат. Тогда для амплитуд $\psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha)$ можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -i[n\omega_0 + \omega - k_{\parallel} v_e \cos \theta_e - k_{\perp} v_e \sin \theta_e \cos(\varphi_e - \varphi_k)] \psi_e^{(n)} - \\
 & - \Omega_e \frac{\partial \psi_e^{(n)}}{\partial \varphi_e} = i\mathbf{k} \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{p}_e} \left\{ \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p}'_e \psi_e^{(n)}(\mathbf{p}'_e) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4\pi e e_i}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{n-l}(a_B) \int d\mathbf{p}'_i \psi_i^{(l)}(\mathbf{p}'_i) \right\}, \quad (12.13) \\
 & -i[n\omega_0 + \omega - k_{\parallel} v_i \cos \theta_i - k_{\perp} v_i \sin \theta_i \cos(\varphi_i - \varphi_k)] \psi_i^{(n)} - \\
 & - \Omega_i \frac{\partial \psi_i^{(n)}}{\partial \varphi_i} = i\mathbf{k} \frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{p}_i} \left\{ \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \int d\mathbf{p}'_i \psi_i^{(n)}(\mathbf{p}'_i) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4\pi e e_i}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{-\infty} J_{l-n}(a_B) \int d\mathbf{p}'_e \psi_e^{(l)}(\mathbf{p}'_e) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь k_{\parallel} и k_{\perp} — проекции волнового вектора на направление магнитного поля и соответственно на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, φ_k — азимутальный угол вектора \mathbf{k} в этой плоскости, v_α , θ_α и φ_α — абсолютная величина скорости, полярный и азимутальный углы вектора \mathbf{v}_α .

В предположении, что $f_{\alpha 0}(\mathbf{p}_\alpha)$ зависит лишь от проекции импульса на направление магнитного поля и от абсолютной величины поперечной проекции импульса, систему интегродифференциальных уравнений (12.13) можно сначала свести к системе интегральных уравнений. При этом следует использовать условие периодичности функций $\psi_\alpha^{(n)}$ при изменении значения аргумента φ_α на 2π . Тогда получаем

$$\left. \begin{aligned}
 & \psi_e^{(n)}(\mathbf{p}_e) = \\
 & = -\frac{1}{\Omega_e} \int_{-\infty}^{\varphi_e} d\varphi'_e \exp \left\{ -\frac{i}{\Omega_e} [(n\omega_0 + \omega - k_{\parallel} v_e \cos \theta_e) \times \right. \\
 & \quad \times (\varphi_e - \varphi'_e) - k_{\perp} v_e \sin \theta_e (\sin(\varphi_e - \varphi_k) - \\
 & \quad \left. - \sin(\varphi'_e - \varphi_k))] \right\} i\mathbf{k} \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{p}'_e} \left\{ \frac{4\pi e^2}{k^2} \int d\mathbf{p}''_e \psi_e^{(n)}(\mathbf{p}''_e) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{4\pi e e_i}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{n-l}(a_B) \int d\mathbf{p}''_i \psi_i^{(l)}(\mathbf{p}''_i) \right\}, \quad (12.14)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \Psi_i^{(n)}(\mathbf{p}_i)_i = \\
& = -\frac{1}{\Omega_i} \int_{+\infty}^{\varphi_i} d\varphi'_i \exp \left\{ -\frac{i}{\Omega_i} [(n\omega_0 + \omega - \right. \\
& - k_{\parallel} v_i \cos \theta_i)(\varphi_i - \varphi'_i) - k_{\perp} v_i \sin \theta_i (\sin(\varphi_i - \varphi_k) - \\
& \left. - \sin(\varphi'_i - \varphi_k))] \right\} i k \frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{p}'_i} \left\{ \frac{4\pi e_i^2}{k^2} \int d\mathbf{p}''_i \Psi_i^{(n)}(\mathbf{p}''_i) + \right. \\
& \left. + \frac{4\pi e_i}{k^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{l-n}(a_B) \int d\mathbf{p}''_i \Psi_i^{(l)}(\mathbf{p}''_i) \right\}. \quad (12.14)
\end{aligned}$$

Здесь учтен тот факт, что $\Omega_e < 0$ и $\Omega_i > 0$.

Нетрудно усмотреть, что система интегральных уравнений (12.14) сводится к системе алгебраических уравнений для амплитуд плотностей зарядов

$$u_{\alpha}^{(n)} = e_{\alpha} \int d\mathbf{p}_{\alpha} \Psi_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_{\alpha}). \quad (12.15)$$

Используем обозначение

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{\alpha}(\omega, k) = \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{p}_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\alpha\perp}}{\Omega_{\alpha}} \right) \frac{1}{\omega + i0 - n\Omega_{\alpha} - k_{\parallel} v_{\alpha}} \times \\
\times \left(k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\alpha\parallel}} + \frac{n\Omega_{\alpha}}{v_{\alpha\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_{\alpha\perp}} \right), \quad (12.16)
\end{aligned}$$

где $p_{\alpha\parallel} = p_{\alpha} \cos \theta_{\alpha}$, $p_{\alpha\perp} = p_{\alpha} \sin \theta_{\alpha}$, o — положительная бесконечно малая, определяющая обход особенности. Выражение (12.16) совпадает с обычно используемым в теории плазмы парциальным вкладом частиц сорта α в продольную диэлектрическую проницаемость. С помощью этого выражения система уравнений для амплитуд плотности заряда записывается в виде

$$\left. \begin{aligned}
u_e^{(n)} + R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(a_B) u_i^{(m)} = 0, \\
u_i^{(n)} + R_i^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(a_B) u_e^{(m)} = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

Здесь $R_\alpha^{(n)}$ определяется так же, как и в (1.24):

$$R_\alpha^{(n)} = \frac{\delta\varepsilon_\alpha(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_\alpha(n\omega_0 + \omega, \mathbf{k})},$$

с тем лишь отличием, что $\delta\varepsilon_\alpha$ определено формулой (12.16). Другое отличие уравнений (12.17) от (1.10) и (4.13), которое обусловлено магнитным полем, заключается в том, что аргументом функций Бесселя является a_B (см. (12.11)).

Имея в виду глубокую аналогию уравнений (12.17) с рассмотренными ранее (1.10) и (4.13), можно так же, как и ранее, воспользоваться понятием резонансных частот, определенных уравнениями

$$1 + \delta\varepsilon_e(\omega_{re}, \mathbf{k}) = 0, \quad 1 + \delta\varepsilon_i(\omega_{ri}, \mathbf{k}) = 0,$$

и записать дисперсионные уравнения для высокочастотных возмущений (ср. (4.14)):

$$1 = R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}^2(a_B) R_i^{(m)} \quad (12.18)$$

и низкочастотных возмущений (ср. (4.15)):

$$1 = R_i^{(0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a_B) R_e^{(n)}. \quad (12.19)$$

Эти дисперсионные уравнения для плазмы в магнитном поле получены в работе Алиева, Уотсона и автора [27] и теперь широко используются при анализе параметрической неустойчивости плазмы (см., например, обзор [125] и [188 — 194, 215]).

Новая возможность возникает благодаря тому факту, что электронных резонансных частот может быть две: ω_{re}^\pm . При этом может иметь место такая ситуация, когда обертона внешней частоты $n\omega_0$ близок к сумме электронных резонансных частот $\omega_{re}^+ + \omega_{re}^-$, а частота ω близка к одной из электронных частот (например, ω_{re}^+). Тогда в уравнениях для гармоник электронной плотности заряда, получающихся из системы (12.17) исключением $u_i^{(n)}$:

$$u_e^{(n)} = R_e^{(n)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(a_B) R_i^{(m)} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{l-m}(a_B) u_e^{(l)}, \quad (12.20)$$

можно ограничиться учетом лишь $u_e^{(0)}$ и $u_e^{(-n)}$. В результате чего возникает следующее дисперсионное

уравнение [28]:

$$\left[\frac{1}{R_e^{(0)}} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(a_B) R_i^{(m)} \right] \left[\frac{1}{R_e^{(-n)}} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m+n}^2(a_B) R_i^{(m)} \right] = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a_B) J_{m+n}(a_B) R_i^{(m)} \right]^2. \quad (12.21)$$

В случае максвелловского распределения частиц по скоростям парциальный вклад α -го сорта частиц в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы, находящейся в магнитном поле, имеет вид (см., например, [16]):

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \delta\varepsilon'_\alpha(\omega, \mathbf{k}) + i\delta\varepsilon''_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 r_{D\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha} A_{|n|}(z_\alpha) J_+(\beta_n^{(\alpha)}) \right\}. \quad (12.22)$$

Здесь функция J_+ определена формулой (4.18) и

$$z_\alpha = \frac{k_\perp^2 v_{T\alpha}^2}{\Omega_\alpha^2} = k_\perp^2 \rho_\alpha^2, \quad \beta_n^{(\alpha)} = \frac{\omega - n\Omega_\alpha}{|k_z| v_{T\alpha}}, \quad A_n(z) = I_n(z) e^{-z},$$

I_n — модифицированная функция Бесселя первого рода, $\rho_\alpha = v_{T\alpha} / |\Omega_\alpha|$ — ларморовский радиус гироскопического вращения частицы сорта α .

В условиях, когда тепловое движение частиц плазмы является пренебрежимо малым эффектом, формула (12.22) упрощается и принимает следующий вид:

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \delta\varepsilon'_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{\omega_{L\alpha}^2 \cos^2 \theta}{\omega^2} - \frac{\omega_{L\alpha}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2}, \quad (12.23)$$

где θ — угол между направлениями волнового вектора и постоянного однородного магнитного поля.

Для электронного вклада $\delta\varepsilon_e$ в предположении, что $z_e \ll 1$ и $\beta_e^{(e)} \gg 1$, формула (12.22) приводит к следующей мнимой части:

$$\delta\varepsilon_e''(\omega, k) = \frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \exp \left[-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Te}^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \left(\exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega + \Omega_e}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] + \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \Omega_e}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \right) \right\}. \quad (12.24)$$

§ 13. Влияние сильного переменного электрического поля высокой частоты на продольные колебания плазмы в постоянном магнитном поле (низкие температуры)

Рассмотрим прежде всего влияние на колебания плазмы электрического поля, частота которого значительно превышает характерные плазменные частоты ($\omega_0 \gg \omega_{Le}$, $\omega_0 \gg \Omega_e$) [3, 29]. В этом случае в соответствии с дисперсионными уравнениями предыдущего параграфа или согласно методу усреднения [3], изложенному в § 4, можно записать следующее дисперсионное уравнение продольных колебаний [3]:

$$\left| \delta_{\alpha\beta} + \delta\epsilon_{\alpha}(\omega, k) \frac{e_{\beta}}{e_{\alpha}} J_0(a_{\alpha\beta}) \right| = 0. \quad (13.1)$$

Здесь $\delta\epsilon_{\alpha}$ определено формулой (12.16) и

$$a_{\alpha\beta} = \left(\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} - \frac{e_{\beta}}{m_{\beta}} \right) \frac{kE}{\omega_0^2}.$$

Для плазмы, состоящей из электронов и одного сорта ионов, дисперсионное уравнение (13.1) принимает вид

$$1 + \delta\epsilon_e(\omega, k) + \delta\epsilon_i(\omega, k) + [1 - J_0^2(a)] \times \\ \times \delta\epsilon_e(\omega, k) \delta\epsilon_i(\omega, k) = 0, \quad (13.2)$$

аналогичный (2.1), с тем лишь отличием, что парциальные вклады диэлектрических проницаемостей теперь имеют вид (12.16). Заметим, что в формулу (13.2) входит величина a , не зависящая от магнитного поля. Это связано с тем, что в пределе высокой частоты в соответствии с формулой (12.11) $a_B \rightarrow a$.

Решения дисперсионного уравнения (13.2) в целом ряде случаев приводят к существенной зависимости частоты плазменных колебаний от напряженности внешнего электрического поля. Для того чтобы показать это, рассмотрим колебания с большой длиной волны, когда тепловым движением можно пренебречь. Иными словами, будем считать выполненными следующие неравенства:

$$k_{\perp} \rho_{\alpha} \ll 1, \quad (13.3)$$

$$|k_z| v_{T\alpha} \ll |\omega - n\Omega_{\alpha}| \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (13.4)$$

При этом дисперсионное уравнение (13.2) принимает следующий вид:

$$1 + \sin^2 \theta \left[\frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} \right] - \cos^2 \theta \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega^2} + \\ + [1 - J_0^2(a)] \left[\sin^2 \theta \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right] \times \\ \times \left[\sin^2 \theta \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right] = 0, \quad (13.5)$$

где θ — угол между направлением волнового вектора \mathbf{k} и направлением постоянного магнитного поля \mathbf{B} . Рассмотрим решение этого дисперсионного уравнения прежде всего в предположении, что для частоты колебаний вполне не равно нулю неравенство $\omega \ll \Omega_i$. При этом из (13.5) получаем [29]

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \cos^2 \theta [1 - J_0^2(a)] \left\{ 1 + \frac{c^2}{v_A^2} [1 - J_0^2(a)] \sin^2 \theta \right\}^{-1}, \quad (13.6)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Le}^2 \cos^2 \theta}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} \sin^2 \theta} \left\{ 1 + \frac{c^2}{v_A^2} [1 - J_0^2(a)] \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + \frac{m_e}{m_i} \frac{J_0^2(a)}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} [1 - J_0^2(a)] \sin^2 \theta} \right\}, \quad (13.7)$$

где $v_A = (B^2/4\pi n_i m_i)^{1/2}$ — альфвеновская скорость.

В достаточно плотной плазме, когда $c \gg v_A$ и удовлетворяется неравенство

$$\sin^2 \theta [1 - J_0^2(a)] \gg \frac{v_A^2}{c^2}, \quad (13.8)$$

спектр (13.6) от электрического поля не зависит, а спектр колебаний (13.7) принимает вид [29]

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 (1 - J_0^2(a)) \cos^2 \theta. \quad (13.9)$$

Поскольку частота должна быть малой по сравнению с гироскопической частотой ионов, то колебания со спектром (13.9) возможны лишь при распространении почти

поперек магнитного поля, когда

$$\omega_{Li}^2 \gg \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta.$$

При выполнении неравенства, обратного неравенству (13.8), спектр (13.7) не зависит от напряженности электрического поля, а формула (13.6) принимает вид

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 [1 - J_0^2(a)] \cos^2 \theta. \quad (13.10)$$

Продвинемся теперь дальше и рассмотрим дисперсионное уравнение (13.5) в предположении, что частота плазменных колебаний удовлетворяет неравенствам

$$\sqrt{m_e/m_i} \Omega_e \gg \omega \gg \Omega_i. \quad (13.11)$$

При этом, как показано Домриним [29], имеют место следующие спектры колебаний:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left\{ \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \right) + \right. \\ & + \left[1 + (1 - J_0^2(a)) \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \right] \omega_{Li}^2 \sin^2 \theta + \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta - \\ & - \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta (1 + [1 - J_0^2(a)] \frac{c^2}{v_A^2} \sin^2 \theta) \times \\ & \times \left[1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta + \frac{c^2}{v_A^2} \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} [1 - J_0^2(a)] \sin^2 \theta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_i c^2}{m_e v_A^2} \cos^2 \theta \right]^{-1} \Big\}, \quad (13.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \omega_{Le}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta \left(1 + [1 - J_0^2(a)] \frac{c^2}{v_A^2} \sin^2 \theta \right) \times \\ & \times \left\{ \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta + \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \sin^2 \theta \right) + \right. \\ & \left. + \omega_{Li}^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} [1 - J_0^2(a)] \sin^2 \theta \right) \right\}^{-1}. \quad (13.13) \end{aligned}$$

Формула (13.12) в случае плотной плазмы, когда $c^2 \gg v_A^2$, пригодна для углов θ , близких к $\pi/2$, а если $v_A^2 \ll c^2$, то для произвольных углов. Формула (13.13) упрощается

при $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$ и $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$, причем

$$\omega^2 = \frac{\Omega_e^2 + \omega_{Li}^2 \sin^2 \theta [1 - J_0^2(a)]}{1 + \frac{m_e}{m_i} \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (13.14)$$

При дальнейшем увеличении частоты в области

$$\frac{m_e}{m_i} \Omega_e^2 \leq \omega^2 \leq \Omega_e^2 \quad (13.15)$$

полученное выше дисперсионное уравнение (13.5)

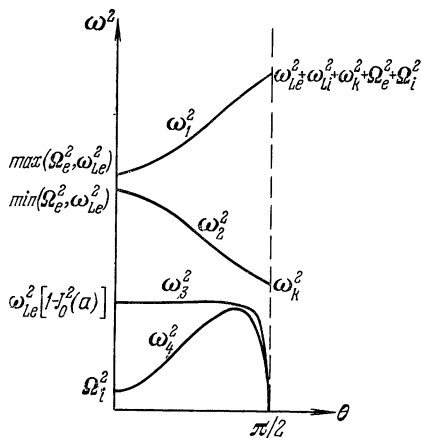


Рис. 6.

приводит к следующим спектрам плазменных колебаний:

$$\omega^2 = F(\theta) [\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta]^{-1}, \quad (13.16)$$

$$\omega^2 = F^{-1}(\theta) \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta [1 - J_0^2(a)], \quad (13.17)$$

где

$$F(\theta) = \frac{1}{2} (\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta + \omega_{Li}^2 [\Omega_e^2 + (1 - J_0^2(a)) \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta] + \{(\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta + \omega_{Li}^2 [\Omega_e^2 + (1 - J_0^2(a)) \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta]^2 - 4 (\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta) \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2 \Omega_e^2 (1 - J_0^2(a)) \cos^2 \theta\}^{1/2}).$$

Эти выражения пригодны в условиях, когда $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_e^2$, и для углов, удовлетворяющих условию $\cos^2 \theta \gg (m_e/m_i)$.

Для области еще бóльших частот, когда $\omega \sim \Omega_e \sim \omega_{Le}$, влияние ионов становится пренебрежимо малым, а поэтому спектр плазменных волн становится не зависящим от относительного движения электронов и ионов и, следовательно, не зависящим от напряженности внешнего электрического поля накачки. Именно при этом получаем хорошо известное выражение (см., например, [8, 9, 30]):

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta} \}. \quad (13.18)$$

Заметим, что при знаке минус эта формула справедлива при углах, удовлетворяющих условию $\cos^2 \theta \gg (m_e/m_i)$. При строго поперечном распространении для этой ветви колебаний с учетом влияния электрического поля имеем

$$\omega^2 = \frac{\Omega_e^2 (\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2) + [1 - J_0^2(a)] \omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} \equiv \omega_k^2. \quad (13.19)$$

На рис. 6 приведены схематические зависимости квадрата частоты плазменных волн от угла между направлением волнового вектора и постоянного магнитного поля [29].

§ 14. Влияние сильного переменного электрического поля высокой частоты на продольные колебания плазмы в постоянном магнитном поле (высокие температуры)

Обратимся теперь к рассмотрению таких волновых векторов плазменных колебаний, для которых в дисперсионном уравнении (13.2) необходимо учитывать тепловое движение частиц, именно в таком смысле понимая предел высоких температур частиц плазмы [3, 29]. При этом сначала будем интересоваться колебаниями с частотой, много меньшей ионной гироскопической ($\omega \ll \Omega_i$) при условиях $|k_z| v_{T\alpha} \ll \Omega_\alpha$. Тогда дисперсионное уравнение (13.2) может быть записано в виде [3]

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} [1 - A_0(z_e) J_+(\beta_0^{(e)})] + \frac{1}{k^2 r_{Di}^2} [1 - A_0(z_i) J_+(\beta_0^{(i)})] + \\ + \frac{1}{k^4 r_{De}^2 r_{Di}^2} [1 - J_0^2(a)] [1 - A_0(z_e) J_+(\beta_0^{(e)})] \times \\ \times [1 - A_0(z_i) J_+(\beta_0^{(i)})] = 0. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Для длин волн, малых по сравнению с ларморовскими радиусами гироскопического вращения частиц ($z_\alpha \gg 1$), и малых фазовых скоростей волн ($\omega \ll |k_z| v_{Ti}$) уравнение (14.1) не имеет решений, соответствующих волнам. В обратном пределе $z_\alpha \ll 1$ и $\beta_0^{(\alpha)} \gg 1$ мы уже получили спектры (13.6) и (13.7). Поэтому теперь получим из (14.1) следствия в остальных возможных областях длин волн.

Считая поперечную длину волны плазменных колебаний малой по сравнению с ионным гироскопическим радиусом ($z_i \gg 1$) и большой по сравнению с электронным ($z_e \ll \ll 1$), а продольную фазовую скорость большой по сравнению с тепловыми скоростями частиц, из (14.1) получаем [29]

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos^2 \theta [1 + (kr_{Di})^{-2} [1 - J_0^2(a)] [1 - A_0(z_i)]]}{\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta + (kr_{De})^{-2} [1 - A_0(z_i)] \{\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2 \sin^2 \theta [1 - J_0^2(a)]\}}. \quad (14.2)$$

Другое простое следствие дисперсионного уравнения (14.1) может быть записано в пределе больших поперечных длин волн ($z_\alpha \ll 1$) и промежуточных значений продольных фазовых скоростей $v_{Ti} \ll \frac{\omega}{|k_z|} \ll v_{Te}$. Тогда для частоты и декремента затухания плазменных волн имеем следующие выражения [29]:

$$\omega^2 = \cos^2 \theta \left\{ \frac{\omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right]}{1 + \frac{\omega_{Li}^2}{\Omega_i^2} \sin^2 \theta \left[1 - \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right]} + 3k^2 v_{Ti}^2 \right\}, \quad (14.3)$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{|k_z|^3} \left\{ \frac{1}{v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2 J_0^2(a) \cos^2 \theta}{\omega^4 v_{Te}^3 [1 + k^2 r_{De}^2]^2} \right\}. \quad (14.4)$$

Формула (14.3) упрощается для разреженной плазмы ($\omega_{Li}^2 \ll \Omega_i^2$) [3]:

$$\omega^2 = \cos^2 \theta \left\{ \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right] + 3k^2 v_{Ti}^2 \right\}. \quad (14.5)$$

Колебания со спектрами (14.3) и (14.5) представляют собой модификацию ионно-звуковых колебаний плазмы. Заметим, что в пределе сильного электрического поля ($a \gg \gg 1$) частота колебаний (14.3) асимптотически стремится к предельному значению, определяемому соотношением

$$\omega^2 = \cos^2 \theta \left\{ \frac{\omega_{Li}^2 v_A^2}{v_A^2 + c^2 \sin^2 \theta} + 3k^2 v_{Ti}^2 \right\}. \quad (14.6)$$

Перейдем теперь к рассмотрению плазменных волн с частотой, большей гироскопической ионной, но меньшей гироскопической электронной частоты. Считая при этом выполненными условия $\omega \gg |k_z| v_{Ti}$, $1 \gg |k_z| \rho_e$, можно представить дисперсионное уравнение (13.2) в виде [29]

$$1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} [1 - A_0(z_e) J_+(\beta_0^{(e)})] - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} - [1 - J_0^2(a)] \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2 k^2 r_{De}^2} [1 - A_0(z_e) J_+(\beta_0^{(e)})] = 0. \quad (14.7)$$

В пределе длинных волн имеем отсюда спектры (13.16) и (13.17). Если же $|k_z| v_{Te} \gg \omega$ и $z_e \sim 1$, то для спектра плазменных колебаний и декремента их затухания находим [29]

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left[1 - \frac{J_0^2(a)}{1 + k^2 r_{De}^2} \right], \quad (14.8)$$

$$\gamma = - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Li}^2 k^2 r_{De}^2}{[1 + k^2 r_{De}^2]^2} \frac{A_0(z_e) J_0^2(a)}{|k_z| v_{Te}}. \quad (14.9)$$

Сравнение этих формул с выражениями (5.6) и (5.7), полученными в отсутствие магнитного поля, выявляет зависимость декремента затухания от ориентации волнового вектора плазменных волн относительно направления магнитного поля.

Продольные колебания плазмы возможны также в окрестности гармоник гироскопических частот. Это так называемые циклотронные колебания. Как показано Домриним [29], влияние внешнего электрического поля может быть существенным и на ионные циклотронные колебания ($\omega \approx n\Omega_i$).

**§ 15. Параметрический резонанс относительно
раскачки потенциальных возмущений
в холодной плазме, находящейся
в магнитном поле**

Подобно тому, как это имело место для плазмы без внешнего магнитного поля, при понижении частоты внешнего электрического поля и при приближении ее значения к резонансным значениям влияние электрического поля не только меняет значения собственных частот продольных плазменных колебаний и их инкрементов, но и качественно меняет свойства колебаний, делая их нарастающими. Прежде всего мы здесь рассмотрим такое влияние в случае сильного электрического поля, когда можно полностью пренебречь диссипативными эффектами в плазме и эффектами теплового движения частиц [27]. Тогда для парциальных вкладов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы можно пользоваться выражением (12.23)

$$\delta\epsilon_\alpha(\omega, k) = -\omega_{L\alpha}^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{\omega^2} + \frac{\sin^2 \theta}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} \right). \quad (15.1)$$

С помощью такого выражения для резонансных электронных частот ω_{re} с помощью уравнения $1 + \delta\epsilon_e = 0$ находим (ср. (13.18)) выражение

$$(\omega_{re}^\pm)^2 = \frac{1}{2} \{ \omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm [(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \}, \quad (15.2)$$

которое определяет так называемые гибридные частоты.

Спектр низкочастотных плазменных колебаний в соответствии с (12.19) описывается дисперсионным уравнением

$$1 = \frac{\delta\epsilon_i(\omega, k)}{1 + \delta\epsilon_i(\omega, k)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a_B) \frac{\delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0, k)}{1 + \delta\epsilon_e(\omega + n\omega_0, k)}. \quad (15.3)$$

Вдали от резонанса обертонов внешней частоты, т. е. при заметном отличии $n\omega_0$ от ω_{re} , высокочастотные колебания плазмы в электрическом поле мало отличаются от частот (15.2), а для низкочастотных колебаний, характеризуемых уравнением (15.3) для углов θ , не лежащих в узкой окрестности $\pi/2$, имеем

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \{ \Omega_i^2 + \omega_{Li}^2 A(\omega_0, \mathbf{k}) \pm [(\Omega_i^2 + \omega_{Li}^2 A(\omega_0, \mathbf{k}))^2 - 4\Omega_i^2 \omega_{Li}^2 A(\omega_0, \mathbf{k}) \cos^2 \theta]^{1/2} \}, \quad (15.4)$$

где

$$\begin{aligned}
 A(\omega_0, \mathbf{k}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n^2 \omega_0^2 (n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2) J_n^2(a_B)}{[n^2 \omega_0^2 - (\omega_{re}^+)^2] [n^2 \omega_0^2 - (\omega_{re}^-)^2]} \equiv \\
 &\equiv 1 - \frac{(\omega_{re}^-)^2 - \omega_{Le}^2}{(\omega_{re}^-)^2 - (\omega_{re}^+)^2} \Phi_{\omega_{re}^+/\omega_0}^+(a_B) + \frac{(\omega_{re}^+)^2 - \omega_{Le}^2}{(\omega_{re}^-)^2 - (\omega_{re}^+)^2} \Phi_{\omega_{re}^-/\omega_0}^-(a_B).
 \end{aligned} \tag{15.5}$$

Функция $\Phi_x(a)$ определена формулой (3.3а)

$$\Phi_x(a) = \frac{\pi x}{\sin \pi x} J_x(a) J_{-x}(a), \tag{15.6}$$

а значения ее приведены в табл. 1 на стр. 25.

Формула (15.4) при знаке минус и $A(\omega_0, \mathbf{k}) < 0$ дает $\omega^2 < 0$, что соответствует нарастанию колебаний. Для длинноволновых возмущений ($a_B \ll 1$) эта формула принимает особо простой вид, ибо при этом

$$A(\omega_0, \mathbf{k}) = \frac{a_B^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \Omega_e^2)}{2 [\omega_0^4 - \omega_0^2 (\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2) + \Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta]}. \tag{15.7}$$

Отсюда легко видеть, что при частоте внешнего поля, меньшей электронной гироскопической, возмущения плазмы могут нарастать во времени, если $\omega_0 < \omega_{Le}$. Если же $\omega_0 > > |\Omega_e|$, то для нарастания возмущений должно быть выполнено неравенство $\omega_0^2 < \omega_{Le}^2 + \Omega_e^2$. В окрестности верхнего значения частоты, определяющего область неустойчивых возмущений, нарастающими являются возмущения с волновыми векторами, почти перпендикулярными направлению постоянного магнитного поля.

Инкременты нарастающих плазменных колебаний возрастают при приближении обертона внешней частоты к резонансным электронным частотам (15.2). Наиболее быстро растут возмущения с длиной волны порядка амплитуды относительных осцилляций электрона и иона ($a_B \sim 1$). Область, в которой уравнение (15.3) приводит к наибольшему инкрементам, определяется равенством

$$\Delta_n \equiv \left(\frac{\omega_{re}^\pm}{n\omega_0} \right)^2 - 1 = 4 |g_n|^{1/3} \eta, \tag{15.8}$$

где η — действительное число порядка единицы и

$$g_n = \frac{\omega_{Li}^2 (n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2) J_n^2(a_B)}{n^2 \omega_0^2 (2n^2 \omega_0^2 - \Omega_e^2 - \omega_{Le}^2)}. \tag{15.9}$$

Считая $|\omega^2| \gg \Omega_i^2$, в этой области решение дисперсионного уравнения (15.3) может быть записано в следующем виде:

$$\left(\frac{\omega}{n\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{8} |4g_n|^{2/3} \{\eta^2 \pm \sqrt{\eta^4 + 8\eta}\}. \quad (15.10)$$

Заметим, что при $|\omega^2| \ll \Omega_i^2$ правые части формул (15.9) и (15.10) домножаются соответственно на $(\cos \theta)^{2/3}$ и $(\cos \theta)^{4/3}$.

При знаке минус в (15.10) максимальный инкремент нарастающих возмущений имеет место при $\eta = 1$. При знаке плюс колебания нарастают, если $0 > \eta > -2$, причем

$$\frac{\omega}{n\omega_0} = \pm \left(\frac{g_n}{16}\right)^{1/3} \{[\sqrt{8|\eta|} + \eta^2]^{1/2} \pm i[\sqrt{8|\eta|} - \eta^2]^{1/2}\}. \quad (15.11)$$

Последняя формула приводит к максимальному инкременту при $\eta = -2^{-1/3}$. В силу того, что электронные резонансные частоты зависят от угла θ , область частот внешнего электрического поля, для которой имеет место резонанс обертона внешней частоты с электронной резонансной, оказывается весьма широкой по сравнению с тем, что имело место для плазмы в отсутствие магнитного поля (см. § 3). В окрестности резонанса угол θ удобно представить как функцию Δ_n и

$$\alpha = \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2}, \quad \beta = \frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2}.$$

Тогда

$$\cos^2 \theta_r = n^2 \frac{\beta}{\alpha} (1 + \Delta_n) [1 + \alpha - n^2 \beta (1 + \Delta_n)]. \quad (15.12)$$

Малой величиной Δ_n в этом выражении вблизи резонанса можно пренебречь. Тогда значения параметров α и β , при которых возможна резонансная раскачка колебаний, описываемая формулами (15.10) и (15.11), определяются из условия $0 \leq \cos^2 \theta_r \leq 1$, которое сводится к следующим неравенствам:

$$n^2 \beta < \min(1, \alpha), \quad \max(1, \alpha) < n^2 \beta < 1 + \alpha. \quad (15.13)$$

Формулы (15.10) и (15.11) дают для инкрементов $\gamma \equiv \text{Im } \omega$:

$$\frac{\gamma^2}{\omega_{Le}^2} = \frac{1}{8} \left[4nJ_n^2(a_B) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \beta^{1/2} \left(\frac{n^2\beta - \alpha}{2n^2\beta - \alpha - 1} \right) \right]^{2/3} (\sqrt{\eta^4 + 8\eta} - \eta^2), \quad (15.14)$$

$$\frac{\gamma^2}{\omega^2} = \frac{1}{16} \left[4nJ_n^2(a_B) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \beta^{1/2} \left(\frac{n^2\beta - \alpha}{2n^2\beta - \alpha - 1} \right) \right]^{2/3} (\sqrt{8|\eta|} - \eta^2). \quad (15.15)$$

Вблизи значений θ_r , близких к нулю или $\pi/2$, возможные значения η ограничены условиями

$$n^2\beta (1 + \Delta_n) < \min(1, \alpha), \quad \max(1, \alpha) < n^2\beta (1 + \Delta_n) < 1 + \alpha. \quad (15.16)$$

Отсюда, в частности, следует, что вблизи верхних пределов значений $n^2\beta$, когда $n^2\beta \geq \min(1, \alpha)$ или $n^2\beta \geq 1 + \alpha$

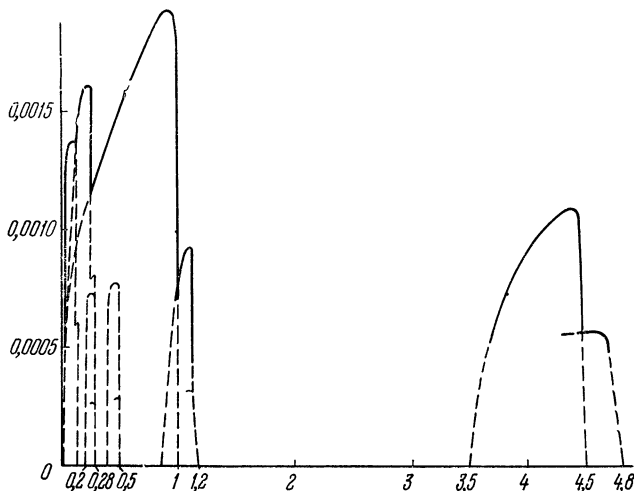


Рис. 7.

(что отвечает началу со стороны высоких частот раскачки колебаний при резонансе n -й гармоники внешней частоты), раскачка начинается с ветви (15.11). При этом наибольшее значение частоты внешнего поля, при которой возникает неустойчивость, дается значением $\eta = -2$ и $n = 1$:

$$\omega_0 = (\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^{1/2} \left[1 + 1,1 \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2}{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^{2/3}} \right]. \quad (15.17)$$

Нарастающие возмущения с инкрементом (15.14) имеют место при $\eta > 0$, что возможно при $n^2\beta < \min(1, \alpha)$ или $n^2\beta < 1 + \alpha$.

Для иллюстрации полученных результатов на рис. 7 приведена зависимость максимального инкремента нарастающих колебаний от частоты внешнего электронного поля. При этом принято $\alpha = \Omega_e^2 \omega_{Le}^{-2} = 3,5$. Правая область ($3,5 < \beta < 4,8$) соответствует резонансу $\omega_0 = \omega_{re}^+$. При этом в области $4,5 < \beta < 4,8$ инкремент дается формулой (15.15), а в области $3,5 < \beta < 4,5$ — формулой (15.14) при $n = 1$. Левая область ($\beta < 1,2$) соответствует резонансам обертонов внешней частоты $n\omega_0 = \omega_{re}^+$ и резонансам на ветви ω_{re}^- . По оси ординат отложено γ^2/ω_{Le}^2 , а по оси абсцисс $\beta = \omega_0^2/\omega_{Le}^2$.

§ 16. Сумматорный параметрический резонанс

Как уже говорилось в § 12, для плазмы, находящейся в магнитном поле, возможна такая ситуация, когда обертон внешней частоты близок к сумме двух электронных резонансных (гибридных) частот. При этом, как показали Алиев и Зюндер [28], нарастание колебаний возможно, если частота колебаний плазмы близка к одной из резонансных частот. Для такого случая было получено дисперсионное уравнение (12.21)

$$\left[\frac{1}{R_e^{(0)}} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(a_B) R_i^{(m)} \right] \left[\frac{1}{R_e^{(-n)}} - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m+n}^2(a_B) R_i^{(m)} \right] = \\ = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a_B) J_{m+n}(a_B) R_i^{(m)} \right]^2. \quad (16.1)$$

Поскольку ω_{re}^\pm велико по сравнению с ионными резонансными частотами, определяемыми уравнением $1 + \delta\epsilon_i = 0$, то в (16.1) можно пренебречь $\delta\epsilon_i$ по сравнению с единицей, а также пренебречь малой диссипативной частью $\delta\epsilon_i'$ и для действительного ионного вклада в диэлектрическую проницаемость использовать выражение (1.12). Тогда

$$R_i^{(m)} \approx \delta\epsilon_i' (\omega_{re}^+ + m\omega_0). \quad (16.2)$$

Далее пусть

$$n\omega_0 = \omega_{re}^+ + \omega_{re}^- + \Delta, \quad \omega = \omega_{re}^+ + \delta\omega, \quad (16.3)$$

где расстройка Δ и сдвиг $\delta\omega$ малы по сравнению с ω_0 . Имея в виду малость этих величин, можно представить дисперсионное уравнение (16.1) в следующем виде:

$$[\delta\omega + \beta(\omega_{re}^+) + i\gamma_0(\omega_{re}^+)] [\delta\omega - \Delta + \beta(-\omega_{re}^-) + i\gamma_0(-\omega_{re}^-)] + \alpha_n \gamma_0(\omega_{re}^+) \gamma_0(-\omega_{re}^-) = 0, \quad (16.4)$$

где $\gamma_0(\omega) = \delta\epsilon_e''(\omega) \left[\frac{\partial \delta\epsilon_e'}{\partial \omega} \right]^{-1}$ — обычное выражение для декремента затухания волны с частотой ω , обусловленного в отсутствие внешнего электрического поля электронами плазмы. Помимо этого использованы обозначения

$$\alpha_n = - \frac{\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a_B) J_{m+n}(a_B) \delta\epsilon_i'(\omega_{re}^+ + n\omega_0, \mathbf{k}) \right]^2}{\delta\epsilon_e''(\omega_{re}^+, \mathbf{k}) \delta\epsilon_e''(-\omega_{re}^-, \mathbf{k})}, \quad (16.5)$$

$$\beta(\omega) = \left[\frac{\partial \delta\epsilon_e'(\omega)}{\partial \omega} \right]^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2(a_B) \delta\epsilon_i'(\omega + m\omega_0). \quad (16.6)$$

Для действительной части электронного вклада в диэлектрическую проницаемость в соответствии с формулой (15.2) следует использовать выражение (12.23), а для мнимой диссипативной электронной части $\delta\epsilon_e''$ — выражение (12.24), полученное без учета столкновений. Если же возникает необходимость учета электрон-ионных столкновений, то правая часть формулы (12.24) должна быть дополнена слагаемым

$$\frac{\omega_{Le}^2 \nu_{ei}}{\omega^3} \left[\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \frac{\omega^2 (\omega^2 + \Omega_e^2)}{(\omega^2 - \Omega_e^2)^2} \right], \quad (16.7)$$

где электрон-ионная частота столкновений ν_{ei} определена формулой (7.5).

Решения дисперсионного уравнения (16.4) для сдвига частоты имеют вид

$$\delta\omega = -\beta(\omega_{re}^+) + \frac{1}{2} \{ \Delta' - i[\gamma_0(\omega_{re}^+) + \gamma_0(-\omega_{re}^-)] \pm \pm [(\Delta')^2 - (\Delta'')^2 - 4\alpha_n \gamma_0(\omega_{re}^+) \gamma_0(-\omega_{re}^-) + 2i\Delta' \Delta'']^{1/2} \}, \quad (16.8)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Delta' &= \Delta + \beta(\omega_{re}^+) - \beta(-\omega_{re}^-), \\ \Delta'' &= \gamma_0(\omega_{re}^+) - \gamma_0(-\omega_{re}^-). \end{aligned} \quad (16.9)$$

Для выявления возможности нарастания колебаний следует рассмотреть мнимую часть выражения (16.11), для

которой имеем

$$\begin{aligned} \gamma = \text{Im } \delta\omega = & \frac{1}{2} (-\gamma_0(\omega_{re}^+) - \gamma_0(-\omega_{re}^-) \pm \\ & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\Delta^n)^2 - (\Delta')^2 + 4\alpha_n \gamma_0(\omega_{re}^+) \gamma_0(-\omega_{re}^-) + \\ & + \sqrt{[(\Delta^n)^2 - (\Delta')^2 + 4\alpha_n \gamma_0(\omega_{re}^+) \gamma_0(-\omega_{re}^-)]^2 + 4(\Delta' \Delta^n)^2} \}^{1/2}). \end{aligned} \quad (16.10)$$

Это выражение становится положительным при выполнении условия

$$\begin{aligned} (\alpha_n - 1) [\gamma_0(\omega_{re}^+) + \gamma_0(-\omega_{re}^-)]^2 > \\ > [\Delta + \beta(\omega_{re}^+) - \beta(-\omega_{re}^-)]^2. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Отсюда, в частности, следует, что для возникновения сумматорного резонанса необходимо, чтобы α_n превышало единицу. Поэтому пороговая напряженность электрического поля определяется соотношением

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a_B) J_{m+n}(a_B) \frac{\omega_{Li}^2 n^2}{[(n+m)\omega_{re}^+ + m\omega_{re}^-]^2} \right\}^2 = \\ = \delta\varepsilon_e''(\omega_{re}^+) \delta\varepsilon_e''(\omega_{re}^-). \end{aligned} \quad (16.12)$$

Считая вблизи порога $a_B \ll 1$, получаем отсюда при $n = 1$

$$a_{B, \text{пор}}^2 = \frac{4\omega_{Le}^4 \Omega_e^4 \cos^4 \theta \delta\varepsilon_e''(\omega_{re}^+) \delta\varepsilon_e''(\omega_{re}^-)}{\omega_{Li}^4 [(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta]}. \quad (16.13)$$

Если диссипация определяется электрон-ионными столкновениями, то

$$a_{B, \text{пор}}^2 = \frac{4\omega_{Le}^4 \nu_{ei}^2 |\Omega_e \cos^3 \theta|}{\omega_{Li}^4 \sin^2 \theta} \left[2 + \frac{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta} \right]. \quad (16.14)$$

Соотношение (16.11) при заданной напряженности электрического поля определяет границы области частот внешнего поля, внутри которой имеет место сумматорный резонанс. Поскольку на границе такой области неравенство (16.11) превращается в равенство, то для граничных значений частоты имеем

$$\begin{aligned} n\omega_0 = \omega_{re}^+ + \omega_{re}^- + \beta(\omega_{re}^+) - \beta(-\omega_{re}^-) \pm \\ \pm [\gamma_0(\omega_{re}^+) + \gamma_0(-\omega_{re}^-)] \sqrt{\alpha_n - 1}. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Без учета малых порядка β и γ можно говорить о сумматорном резонансе в области частот

$$\sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2} < n\omega_0 < \omega_{Le} + |\Omega_e|. \quad (16.16)$$

Инкремент (16.10) принимает максимальное значение при

$$n\omega_0 = \omega_{re}^+ + \omega_{re}^- + \beta(-\omega_{re}^-) - \beta(\omega_{re}^+), \quad (16.17)$$

когда он имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_{\max} = & \frac{1}{2}(-\gamma_0(\omega_{re}^+) - \gamma_0(-\omega_{re}^-) + \\ & + \{[\gamma_0(\omega_{re}^+) - \gamma_0(-\omega_{re}^-)]^2 + 4\alpha_n\gamma_0(\omega_{re}^+)\gamma_0(-\omega_{re}^-)\}^{1/2}). \end{aligned} \quad (16.18)$$

При увеличении напряженности электрического поля инкремент нарастает, причем вдаль от порога, когда $\alpha_n \gg 1$, формула (16.18) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{\max}^2 = & \alpha_n\gamma_0(\omega_{re}^+)\gamma_0(-\omega_{re}^-) = \\ = & \frac{\omega_{Le}^3 |\Omega_e^3 \cos \theta| \sin^2 \theta \omega_{Li}^4 n^4}{4 [(\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta]} \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{J_m(a_B) J_{m+n}(a_B)}{[n+m]\omega_{re}^+ + m\omega_{re}^-} \right]^2. \end{aligned} \quad (16.19)$$

В частности, для $n = 1$ и при $a_B \ll 1$ имеем

$$\gamma_{\max}^2 = \frac{a_B^2 \omega_{Li}^4 \operatorname{tg}^2 \theta}{16 |\Omega_e \cos \theta| \omega_{Le}}. \quad (16.20)$$

Отметим, что при приближении к $\theta = \pi/2$ становится неточным выражение (15.2) для ω_{re}^- . При этом для углов, близких к $\pi/2$, следует пользоваться выражением [30]

$$(\omega_{re}^-)^2 = \frac{\Omega_e^2 (\Omega_i^2 + \omega_{Li}^2)}{\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2}, \quad \cos^2 \theta \ll \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \right),$$

в соответствии с чем вместо (16.20) имеем *)

$$\gamma_{\max}^2 \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a_B^2 \omega_{Li}^4}{16 \Omega_i (\Omega_i^2 + \omega_{Li}^2)^{1/2}}. \quad (16.24)$$

Изложенные здесь результаты работы [28] обнаруживают неустойчивость плазмы относительно раскачки в ней потенциальных колебаний в той области частот, где без учета сумматорного параметрического резонанса согласно предыдущему параграфу резонансного нарастания колебаний нет.

*) Этот случай чисто поперечного распространения был также рассмотрен в работе [132]. Об экспериментальном наблюдении возбуждения колебаний с частотой ω_{re}^- ($\theta = \pi/2$) при приближении частоты поля накачки к значению ω_{re}^+ ($\theta = \pi/2$) сообщалось в работе [162].

§ 17. Ионно-циклотронная неустойчивость плазмы в высокочастотном электрическом поле

В плазме, находящейся в магнитном поле, часто оказываются возможными продольные волны с частотами, близкими к гармоникам ларморовской ионной частоты гироскопического вращения [30]. Поэтому имеет смысл поставить вопрос о возможности существования нарастающих колебаний с такими частотами в плазме, находящейся в постоянном магнитном и переменном электрическом полях [31]. Для ответа на такой вопрос обратимся к уравнению (12.19), которое может быть записано в форме

$$\frac{1}{\delta \varepsilon_i(\omega, k)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a_B) \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e(n\omega_0 + \omega, k)} = 0, \quad (17.1)$$

где $\delta \varepsilon_\alpha$ определены формулой (12.22), пригодной для плазмы без столкновений.

Рассмотрим частоты собственных колебаний плазмы, близкие к гармоникам ларморовской частоты ионов (ионно-циклотронным гармоникам):

$$\omega = l\Omega_i + \delta + i\gamma. \quad (17.2)$$

При этом будем считать, что δ и γ малы по сравнению с частотой. Кроме того, ограничимся случаем, когда $\delta \gg |k_z| v_{Ti}$ и $\delta \gg \gamma$.

Тогда, разлагая дисперсионное уравнение (17.1) по степеням γ и δ , для колебаний с поперечной длиной волны, много меньшей ларморовского радиуса ионов ($z_i = \rho_i k_\perp \gg 1$), что соответствует почти прямому углу между волновым вектором и направлением постоянного магнитного поля, получаем [31,6]

$$\delta = \frac{l\Omega_i}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i} \left\{ 1 - \frac{1}{D} (1 + k^2 r_{Di}^2 \operatorname{Re} \Psi) \right\}, \quad (17.3)$$

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta^2}{|k_z| v_{Ti}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2k_z^2 v_{Ti}^2}\right) + \frac{l\Omega_i k^2 r_{Di}^2 \operatorname{Im} \Psi}{\sqrt{2\pi} k_\perp \rho_i D}. \quad (17.4)$$

Здесь

$$D = \{1 + k^2 r_{Di}^2 \operatorname{Re} \Psi\}^2 + k^4 r_{Di}^4 \{\operatorname{Im} \Psi\}^2, \quad (17.5)$$

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(a_B)}{1 + \delta \varepsilon_e(n\omega_0 + l\Omega_i, k)}. \quad (17.6)$$

Возможность существования нарастающих во времени

возмущений с частотами, близкими к ионно-циклотронным гармоникам, связана с возможностью положительных значений инкремента (17.4). Первое слагаемое правой части формулы (17.4) обусловлено черенковским взаимодействием волн с ионами. Оно всегда отрицательно и соответствует затуханию ионно-циклотронных колебаний. Напротив, второе слагаемое правой части этой формулы, связанное с электронами, подверженными воздействию внешнего электрического поля, может менять знак и приводить к нарастанию колебаний. Следует подчеркнуть, что такое положение в определенной мере подобно имеющему место при кинетической параметрической неустойчивости плазмы, связанной с раскачкой потенциальных ионно-звуковых колебаний, рассмотренной в § 6 для плазмы без магнитного поля.

В общем случае те условия, в которых черенковский эффект на электронах может приводить к ионно-циклотронной неустойчивости плазмы в высокочастотном электрическом поле, определяются областью параметров, в которой оказывается положительной функция

$$\begin{aligned} \text{Im } \Psi = & -k^2 r_{De}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a_B) \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{n\omega_0 + I\Omega_i}{|k_z| v_{Te}}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A_r(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \times \\ & \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n\omega_0 + I\Omega_i - r\Omega_e}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \left(\left\{ k^2 r_{De}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[1 - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \frac{n\omega_0 + I\Omega_i}{n\omega_0 + I\Omega_i - s\Omega_e} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times \text{Re } J_+ \left(\frac{n\omega_0 + I\Omega_i - s\Omega_e}{|k_z| v_{Te}} \right) \right] \right\}^2 + \frac{\pi}{2} \left(\frac{n\omega_0 + I\Omega_i}{k_z v_{Te}} \right)^2 \times \\ & \times \left\{ \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{n\omega_0 + I\Omega_i - s\Omega_e}{k_z v_{Te}} \right)^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (17.7) \end{aligned}$$

В качестве примера рассмотрения такой области обратимся к пределу поперечных длин волн, существенно превышающих гироскопический радиус электронов, когда

$$\delta \varepsilon_e(\omega, k) \approx \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \left[1 - J_+ \left(\frac{\omega}{|k_z| v_{Te}} \right) \right]. \quad (17.8)$$

При этом выражение (17.7) существенно упрощается и становится положительным в области положительности электронного вклада в инкремент (6.32), с тем лишь отличием, что вместо kv_{Te}/ω_0 следует теперь использовать

$|k_z| v_{Te}/\omega_0$. Если одновременно считать длины волн малыми по сравнению с электронным дебаевским радиусом ($k r_{De} \gg k r_e \gg 1$), то формула (17.7) может быть записана в виде

$$\text{Im } \Psi \approx \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \int_0^\infty dt \cdot t^2 e^{-t/2} J_0 \left(2a_B \sin \frac{\omega_0 t}{2 |k_z| v_{Te}} \right) \frac{l \Omega_i}{|k_z| v_{Te}}. \quad (17.9)$$

Сравнивая эту формулу с электронным инкрементом (6.29), может теперь утверждать, что в рассматриваемом нами случае граница области, в которой черенковский эффект на электронах может приводить к раскачке ионно-циклотронных колебаний, дается рис. 2, с тем лишь отличием, что теперь по оси ординат отложено $|k_z| v_{Te} \omega_0^{-1} a_B^{-1}$, а по оси абсцисс — величина a_B .

§ 18. Параметрическая аperiodическая неустойчивость плазмы в магнитном поле в околопороговой области

Рассмотрим теперь закономерности, характеризующие параметрическую неустойчивость плазмы, вблизи порога такой неустойчивости. При этом частоту внешнего поля накачки будем считать близкой к какому-либо значению резонансной гибридной частоты потенциальных колебаний плазмы в магнитном поле (ср. (13.18)):

$$\begin{aligned} \omega^{(j)} &\equiv \omega_{re}^{(\pm)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm [(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\Omega_e^2 \omega_{Le}^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}, \quad (18.1) \end{aligned}$$

так что для расстройки частоты

$$\Delta \omega_0^{(j)} = \omega_0 - \omega^{(j)} \quad (18.2)$$

будем считать выполненным неравенство

$$|\Delta \omega_0^{(j)}| \ll \omega_0. \quad (18.3)$$

Тогда при записи дисперсионного уравнения возмущений вблизи порога, когда можно провести разложение по степеням напряженности электрического поля накачки, следует обратить внимание на аналогичную форму записи дисперсионных уравнений возмущений для плазмы без магнитного поля. Такая аналогия позволяет сразу записать

следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{\varepsilon(\omega + i\gamma, \mathbf{k})}{\delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k}) [1 + \delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})]} + \frac{a_B^2}{4} \left[\frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_0 + i\gamma, \mathbf{k})} + \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_0 + i\gamma, \mathbf{k})} \right] = 0. \quad (18.4)$$

Это уравнение подобно уравнению (7.3) для плазмы без магнитного поля, учитывающего в диэлектрических проницаемостях тепловое движение частиц и их соударения. Отличие уравнения (18.4) заключается в последовательном учете магнитного поля. При этом влияние магнитного поля на осцилляции электронов в электрическом поле накачки отражает возникновение a_B :

$$a_B^2 = \left(\frac{eE_0k}{m_e\omega_0^2} \right)^2 f(\theta, \varphi, \chi_0), \quad (18.5)$$

$$f(\theta, \varphi, \chi_0) = \left[\cos\theta \cos\chi_0 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \sin\theta \sin\chi_0 \cos\varphi \right]^2 + \left[\sin\theta \sin\chi_0 \sin\varphi \frac{\omega_0\Omega_e}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \right]^2, \quad (18.6)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{k} , χ_0 — угол между векторами магнитного и электрического поля, а φ — угол между плоскостями, образуемыми соответственно парами векторов \mathbf{k} , \mathbf{B} и \mathbf{B} , \mathbf{E}_0 . Влияние магнитного поля также проявляется в комплексных диэлектрических проницаемостях.

Дисперсионное уравнение (18.4) допускает дальнейшее упрощение при учете условия малости расстройки (18.3), а также того, что нас интересуют низкочастотные возмущения ($|\omega + i\gamma| \ll \omega_0$). Тогда, используя также относительную малость мнимых частей диэлектрических проницаемостей, получаем [32]

$$\frac{1}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} + \frac{1}{\delta\varepsilon_e(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} + \left(\frac{eE_0k}{2m_e\omega_0^2} \right)^2 \frac{f(\theta, \varphi, \chi_0) \omega_0 \Delta\omega_0^{(j)}}{\kappa^{(j)} \{ [\Delta\omega_0^{(j)}]^2 - [\omega + i(\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)})]^2 \}} = 0. \quad (18.7)$$

Здесь $\tilde{\gamma}^{(j)}$ — декремент затухания высокочастотных плазменных колебаний (18.1), определенный формулой

$$\tilde{\gamma}^{(j)} = \frac{\omega^{(j)} \varepsilon''(\omega^{(j)}, \mathbf{k})}{2\kappa^{(j)}}, \quad (18.8)$$

где $\varepsilon''(\omega, \mathbf{k})$ — мнимая часть продольной диэлектрической

проницаемости плазмы, а

$$\kappa^{(j)} = \frac{1}{2} \omega^{(j)} \frac{\partial \varepsilon'(\omega^{(j)}, \mathbf{k})}{\partial \omega^{(j)}} \approx \frac{\omega_{Le}^2}{[\omega^{(j)}]^2} \left\{ \cos^2 \theta + \frac{[\omega^{(j)}]^4 \sin^2 \theta}{([\omega^{(j)}]^2 - \Omega_e^2)^2} \right\}. \quad (18.9)$$

Заметим здесь, что формулы (18.1) и (18.9) записаны нами при пренебрежении вкладом ионов, а также в предположении, что длина волны возмущений велика по сравнению с электронным ларморовским радиусом ($k\rho_e \ll 1$). Для диссипативной мнимой части высокочастотной диэлектрической проницаемости, определяющей согласно (18.8) высокочастотный декремент затухания, имеем [8] (ср. (12.24) и (16.10))

$$\begin{aligned} \varepsilon''(\omega_0, \mathbf{k}) = & \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^3} v_{ei} \left\{ \cos^2 \theta + \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 + \Omega_e^2)}{(\omega_0^2 - \Omega_e^2)^2} \sin^2 \theta \right\} + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega_0}{k^3 v_{Te}^3 |\cos \theta|} \left\{ \exp \left[-\frac{\omega_0^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{k^2 v_{Te}^2 \sin^2 \theta}{2\omega_0^2} \exp \left[-\frac{(|\Omega_e| - \omega_0)^2}{2k^2 v_{Te}^2 \cos^2 \theta} \right] \right\}. \quad (18.10) \end{aligned}$$

Для низкочастотных парциальных вкладов $\delta \varepsilon_\alpha$ в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы мы будем использовать конкретные выражения, соответствующие тем конкретным задачам, которые будут рассматриваться ниже.

Сделаем здесь еще несколько общих замечаний. Имея в виду условие малости расстройки (18.3), можно утверждать, что направление распространения возмущений в плазме определяется резонансным углом, для которого согласно (15.12) имеем *)

$$\cos^2 \theta_r = \frac{\omega_0^2 (\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 - \omega_0^2)}{\omega_{Le}^2 \Omega_e^2}. \quad (18.11)$$

Далее нетрудно видеть из уравнения (18.7), что для определения порога неустойчивости и максимального инкремента важно знать максимум f . Поскольку χ_0 задано, а также задан угол θ_r , под которым направлен волновой век-

*) При этом $\kappa^{(j)}(\theta_r) = \frac{2\omega_0^2 - \Omega_e^2 - \omega_{Le}^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2}$.

тор возмущения, то максимум находится для некоторого значения угла $\varphi = \varphi_{\max}$. Обозначая $f(\theta, \varphi_{\max}, \chi_0) = f_{\max}(\theta)$, имеем при $\omega_0 > |\Omega_e|$

$$f_{\max}(\theta) = \left[\cos \theta \cos \chi_0 \pm \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \sin \theta \sin \chi_0 \right]^2, \\ \cos \varphi_{\max} = \text{sign} [\text{ctg } \theta \cdot \text{ctg } \chi_0], \quad (18.12)$$

а при $\omega_0 < |\Omega_e|$, когда имеются два максимума, получаем

$$f_{\max}(\theta) = \frac{\Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega_0^2} \left[\cos^2 \theta \cos^2 \chi_0 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \sin^2 \theta \sin^2 \chi_0 \right], \\ \cos \varphi_{\max} = -\text{ctg } \theta \cdot \text{ctg } \chi_0, \quad (18.13)$$

$$f_{\max}(\theta) = \left[\cos \theta \cos \chi_0 \pm \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \sin \theta \sin \chi_0 \right]^2, \\ \cos \varphi_{\max} = -\text{sign} [\text{ctg } \theta \cdot \text{ctg } \chi_0]. \quad (18.14)$$

Поскольку нас будут интересовать минимальные пороговые значения напряженности поля накачки и выражения для максимальных инкрементов, то ниже будем рассматривать возмущения, распространяющиеся под углами $(\varphi_{\max}, \theta_r)$.

В этом параграфе мы обсудим следствия, вытекающие из дисперсионного уравнения (18.7) для аperiodической неустойчивости [32], когда в этом уравнении можно пренебречь частотой. При этом на границе области неустойчивости, когда $\gamma = 0$, имеем

$$\delta \varepsilon_{\alpha} = \frac{1}{k^2 r_{D\alpha}^2}. \quad (18.15)$$

В соответствии с этим для длин волн возмущений, больших электронного радиуса дебаевского экранирования, уравнение (18.7) дает

$$\frac{\Re E_{0, \text{гр}}^2}{4\pi (n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} = - \frac{4\omega_0^3 \kappa^{(j)} \{ [\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 \}}{\omega_{Le}^4 \Delta \omega_0^{(j)} f(\theta, \varphi, \chi_0)}. \quad (18.16)$$

Отсюда ясно, что аperiodическая неустойчивость имеет место лишь при $\Delta \omega_0^{(j)} < 0$. Для получения порогового значения напряженности электрического поля следует найти минимум правой части (18.16). Нетрудно видеть, что такой минимум будет иметь место при

$$\Delta \omega_0^{(j)} = -\tilde{\gamma}^{(j)}, \quad (18.17)$$

что выполняется вблизи $\theta = \theta_r$. Поэтому получаем

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi(n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} = \frac{4}{f_{\text{max}}(\theta_r)} \frac{\omega_0^4}{\omega_{Le}^4} \varepsilon''(\omega_0, k, \theta_r). \quad (18.18)$$

Значение волнового вектора k_{st} , определенное соотношением

$$k_{st}^2 D_e \approx \frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 - \omega_0^2} \left\{ \ln \frac{\omega_0^2}{v_{ei}^2} \right\}^{-1}, \quad (18.19)$$

разделяет всю область волновых векторов на две, в одной из которых ($k < k_{st}$) существенный вклад в мнимую часть высокочастотной диэлектрической проницаемости дают лишь столкновения, а в другой ($k > k_{st}$) столкновениями можно пренебречь. В том случае, когда высокочастотная диссипация определяется столкновениями, формула (18.18) принимает вид [32]

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi(n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} = \frac{4}{f_{\text{max}}(\theta_r)} \frac{v_{ei} \omega_0^3}{\omega_{Le}^4} \left\{ 1 + \frac{2(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \right\}. \quad (18.20)$$

Это выражение не зависит от волнового вектора. Поэтому при достижении порогового значения напряженности электрического поля (18.20) неустойчивость развивается для длин возмущений, меньших размеров неоднородности основного состояния плазмы и больших ($2\pi/k_{st}$).

С уменьшением частоты ω_0 поля накачки в соответствии с формулой (18.19) расширяется область, в которой пригодно выражение (18.20). Одновременно с этим резонансный угол θ_r приближается к 90° , причем для малых ω_0 согласно (18.11) $\cos^2 \theta_r \sim \omega_0^2$. По такому же закону убывает $f_{\text{max}}(\theta_r)$. Поэтому, становится ясно, что с уменьшением частоты поля накачки уменьшается пороговое значение напряженности внешнего электрического поля. Поскольку меньшая из резонансных частот при учете вклада ионов в пределе $\theta \rightarrow \pi/2$ остается конечной [30]:

$$\omega_{re}^- = \omega^{(2)} = \sqrt{\frac{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2}{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}} |\Omega_e| \left(\cos^2 \theta \ll \frac{m_e}{m_i} \right), \quad (18.21)$$

то ω_0 снизу ограничено. Отметим, что еще одно ограничение снизу на частоту внешнего поля дает условие малости расстояния, проходимого электроном за период колебания поля накачки по сравнению с размером его неоднородности (скин-слой), которое имеет вид $\omega_0 \gg \frac{v_{Te}}{c} \omega_{Le}$.

С помощью формулы (18.7) может быть найдено выражение для максимального инкремента. Если напряженность поля слабо превышает пороговую (18.18), так что $\gamma \ll kv_{Ti}$, то из (18.7) имеем

$$\gamma = -\tilde{\gamma}^{(j)} + \sqrt{-\frac{2E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} \Delta\omega_0^{(j)} \tilde{\gamma}^{(j)} - [\Delta\omega_0^{(j)}]^2}. \quad (18.22)$$

Это выражение достигает максимума при

$$\Delta\omega_0^{(j)} = -\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} \tilde{\gamma}^{(j)}, \quad (18.23)$$

что выполняется практически для $\theta = \theta_7$. При этом [32]

$$\gamma_{\text{max}} = \tilde{\gamma}^{(j)} \left[\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right]. \quad (18.24)$$

В условиях, когда высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}^{(j)}$ определяется столкновениями, отсюда имеем

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{1}{2} v_{ei} \left[\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2 \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \Omega_e^2)^2 \cos^2 \theta + \omega_0^4 \sin^2 \theta} \right\}. \quad (18.25)$$

Отметим, что уравнение (18.7) имеет простое решение в пределе $kv_{Te} \gg \gamma \gg kv_{Ti}$ и $\gamma \gg \tilde{\gamma}^{(j)}$. При этом в предположении, что ионы немагнитны ($kr_i \gg 1$ и $\gamma \gg \Omega_i$), получаем

$$\gamma = \frac{1}{2} ([\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + \omega_s^2) \pm \pm \frac{1}{2} \left[\{[\Delta\omega_0^{(j)}]^2 - \omega_s^2\}^2 - \frac{E_0^2 \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0^{(j)}}{4\pi n_e \chi T_e \chi^{(j)}} f(\theta, \varphi, \chi_0) \right]^{1/2}. \quad (18.26)$$

Если же $kr_i \ll 1$ и $\gamma \ll \Omega_i$, то в формуле (18.26) следует заменить ω_s на $\omega_s \cos \theta$.

§ 19. Возбуждение колебаний в околопороговой области параметрической неустойчивости плазмы, находящейся в сильном магнитном поле

Для того чтобы понять свойства параметрической неустойчивости плазмы в магнитном поле, приводящей к развитию почти периодических колебаний, рассмотрим здесь некоторые следствия, вытекающие из дисперсионного уравнения (18.7) в предположении, что $\gamma \ll \omega$ [33, 34].

Одновременно будем считать малыми мнимые части парциальных продольных проницаемостей:

$$\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k}) \ll \delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k}), \quad \delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k}) \ll \delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k}). \quad (19.1)$$

Тогда из уравнения (18.7) могут быть записаны следующие два уравнения, определяющие частоты ω и инкремент γ колебаний плазмы, находящейся в постоянном магнитном поле и переменном электрическом поле волны накачки:

$$0 = \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})} + \\ + \left(\frac{eE_0 k}{2m_e \omega_0^2} \right)^2 \frac{f(\theta, \varphi, \chi_0) \omega_0 \Delta \omega_0^{(j)} \{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2\}}{\kappa^{(j)} \{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2\}^2 + 4\omega^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2}, \quad (19.2)$$

$$[\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}] \left\{ 1 + 2\omega \left(\frac{eE_0 k}{2m_e \omega_0^2} \right)^2 \frac{\omega_0 \Delta \omega_0^{(j)}}{\kappa^{(j)}} f(\theta, \varphi, \chi_0) \times \right. \\ \left. \times \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})} \right] \right)^{-1}}{\{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2\}^2 + 4\omega^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2} \right\} = \tilde{\gamma}^{(j)} - \gamma_0. \quad (19.3)$$

Здесь

$$\gamma_0 = \left(\frac{\delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})]^2} + \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k})}{[1 + \delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})]^2} \right) \times \\ \times \left(- \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{1}{\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})} \right] \right)^{-1}. \quad (19.4)$$

При анализе уравнений (19.2) и (19.3) будем далее считать, что фазовая скорость волн вдоль постоянного магнитного поля велика по сравнению с тепловой скоростью ионов и мала по сравнению с тепловой скоростью электронов:

$$kv_{Ti} |\cos \theta| \ll \omega \ll kv_{Te} |\cos \theta|. \quad (19.5)$$

Кроме того, примем, что частота плазменных колебаний достаточно сильно отличается от гармоник гироскопической частоты ионов:

$$|\omega - n\Omega_i| \ll kv_{Ti} |\cos \theta|. \quad (19.6)$$

Тогда для длин волн, больших ионного радиуса

гироскопического вращения ($k\rho_i \ll 1$), имеем

$$\delta\varepsilon'_e(\omega, k) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2}, \quad \delta\varepsilon'_i(\omega, k) = \frac{\omega_{Li}^2 [\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta]}{\omega^2 [\Omega_i^2 - \omega^2]}. \quad (19.7)$$

Соответственно этому из уравнения (19.2) при пренебрежении внешним электрическим полем накачки и при $kr_{De} \ll \ll 1$ получаем следующее выражение для спектров собственных колебаний плазмы:

$$\omega = \frac{1}{2^{1/2}} \left\{ \omega_s^2 + \Omega_i^2 \pm \sqrt{(\omega_s^2 + \Omega_i^2)^2 - 4\omega_s^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta} \right\}^{1/2}, \quad (19.8)$$

где $\omega_s = kr_{De} \omega_{Li}$ — частота ионно-звуковых колебаний плазмы.

С другой стороны, нули знаменателя слагаемого уравнения (19.2), пропорционального квадрату поля, соответствуют резонансу на электронных частотах $\omega^{(j)}$, определенных формулой (18.1). Поэтому уравнение (19.2) описывает связь высокочастотных колебаний (18.1) и низкочастотных (19.8), а уравнение (19.3) определяет инкремент нарастающих во времени возмущений, обусловленный параметрической связью плазменных колебаний. Используя формулы (19.7), можем записать эти уравнения в следующем виде:

$$1 + \frac{\omega^2 (\Omega_i^2 - \omega^2)}{\omega_s^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta)} + \left(\frac{eE_0}{2m_e \omega_0 v_{Te}} \right)^2 \times \\ \times \frac{f(\theta, \varphi, \chi_0) \omega_0 \Delta \omega_0^{(j)} \{ [\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2 \}}{\kappa^{(j)} \{ [\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2 \}^2 + 4\omega^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2} = 0, \quad (19.9)$$

$$[\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}] \left(1 - \frac{E_0^2}{16\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_{Le}^2 \Delta \omega_0^{(j)}}{\omega_0 \kappa^{(j)}} f(\theta, \varphi, \chi_0) \right) \times \\ \times \frac{\omega_s^2 [\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta]^2}{\omega^4 - 2\omega^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta + \Omega_i^4 \cos^2 \theta} \times \\ \times \frac{1}{\{ [\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2 \}^2 + 4\omega^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2} = \tilde{\gamma}^{(j)} - \gamma_0, \quad (19.10)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\omega^4 (\Omega_i^2 - \omega^2)^2 \delta\varepsilon''_i(\omega, k) + \omega_s^4 (\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta)^2 \delta\varepsilon''_e(\omega, k)}{2\omega \omega_{Li}^2 [\omega^4 - 2\omega^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta + \Omega_i^4 \cos^2 \theta]}. \quad (19.11)$$

Рассмотрим вытекающие из этих уравнений следствия для границы области неустойчивости, на которой следует положить $\gamma = 0$. Тогда согласно (19.10) имеем

$$\frac{E_0^2 f(\theta_r, \Phi, \chi_0)}{16\pi n_e \kappa T_e} \Big|_{\text{гп}} = \frac{\kappa^{(j)} \omega_0}{2\omega \tilde{\gamma}^{(j)} \omega_{Le}^2} \left\{ \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})]^2} + \frac{\delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})]^2} \right\} \times \\ \times \frac{\{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \omega^2\}^2 + 4\omega^2 [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2}{\Delta \omega_0^{(j)} k^2 r_{De}^2}, \quad (19.12)$$

$$1 + \frac{\omega^2 (\Omega_i^2 - \omega^2)}{\omega_s^2 (\omega^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r)} + \\ + \frac{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \omega^2}{2\tilde{\gamma}^{(j)} k^2 r_{De}^2 \omega} \left\{ \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})]^2} + \frac{\delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})]^2} \right\} = 0. \quad (19.13)$$

Здесь $\tilde{\gamma}^{(j)}$ также берется при резонансном угле $\theta = \theta_r$, соответствующем направлению распространения возмущений в плазме (см. (18.11)).

В том случае, когда определяющей является электронная диссипация

$$\frac{\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_e'(\omega, \mathbf{k})]^2} \gg \frac{\delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k})}{[\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k})]^2}, \quad (19.14)$$

а, кроме того, столкновениями можно пренебречь, так что

$$\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{k^2 r_{De}^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{Te} |\cos \theta|}, \quad (19.15)$$

из уравнения (19.13) получаем

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^2}{k v_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}} \right]^{-1} \left(\omega_s^2 + \Omega_i^2 + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^2}{k v_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}} \{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 + \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r\} \pm \right. \\ \left. \pm \left[\left(\omega_s^2 + \Omega_i^2 + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^2}{k v_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 + \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r\} \right]^2 - \right. \\ \left. - 4 \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^2}{k v_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{[\Delta \omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2}{k v_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}} \right\} \omega_s^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r \right]^{1/2} \Big|_j. \quad (19.16)$$

Отсюда, в частности, в пределе

$$\omega_s^2, [\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2, \quad [\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \\ - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r \gg kv_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)} \quad (19.17)$$

получаем следующие выражения, определяющие частоту плазменных колебаний:

$$\omega_+^2 = [\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 + \\ + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{kv_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)}}{\omega_s^2 ([\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r)} \times \\ \times \{([\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r) (\omega_s^2 + \Omega_i^2 [\sin^2 \theta_r - \cos^2 \theta_r]) + \\ + \Omega_i^4 \sin^2 \theta_r \cos^2 \theta_r - ([\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r)^2\}, \quad (19.18)$$

$$\omega_- = \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r \left(1 - \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{kv_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)} \Omega_i^2 \sin^2 \theta_r}{\omega_s^2 \{[\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r\}} \right). \quad (19.19)$$

Соответственно этим формулам соотношение (19.12) для граничного значения напряженности внешнего поля накачки записывается в виде

$$\frac{E_0^{2f}(\theta_r, \varphi, \chi_0)}{16\pi n_e \kappa T'_e} \Big|_{\text{гр}}^{(+)} = \frac{\sqrt{2\pi} \kappa^{(j)} \tilde{\gamma}^{(j)} \omega_0}{kv_{Te} |\cos \theta_r| \omega_{Le}^2 \Delta\omega_0^{(j)}} ([\Delta\omega_0^{(j)}]^2 + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2), \quad (19.20)$$

$$\frac{E_0^{2f}(\theta_r, \varphi, \chi_0)}{16\pi n_e \kappa T'_e} \Big|_{\text{гр}}^{(-)} = \\ = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\kappa^{(j)} \omega_0 \{([\omega_0^{(j)}]^2 - \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r + [\tilde{\gamma}^{(j)}]^2)^2 + 4[\tilde{\gamma}^{(j)}]^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta_r\}}{kv_{Te} |\cos \theta_r| \tilde{\gamma}^{(j)} \omega_{Le}^2 \Delta\omega_0^{(j)}}. \quad (19.21)$$

Заметим, что формула (19.18) отвечает случаю возбуждения в плазме колебаний со спектром, близким к спектру собственных высокочастотных колебаний замагниченной плазмы (18.1). Если же оказываются выполненными неравенства, противоположные неравенствам (19.17), то из (19.16) получаем формулу (19.8). Иными словами, в этом случае речь идет о возбуждении низкочастотных продольных колебаний.

Рассмотрим теперь несколько детальнее параметрическую неустойчивость относительно раскачки ионно-звуковых колебаний в области длин волн, для которых

выполнено неравенство *)

$$\omega_s \gg \Omega_i. \quad (19.22)$$

Тогда из формулы (19.8) следует, что в отсутствие поля накачки $\omega = \omega_s$. В окрестности такого значения частоты возбуждаемых колебаний формулы (19.9) и (19.10) соответственно принимают вид

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left\{ 1 + \frac{E_0^2 f(\theta, \varphi, \chi_0) \omega_{Le}^2 \Delta \omega_0 ([\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega_s^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2)}{16\pi n_e \kappa T_e \omega_0^{(j)} \omega_0 ([\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega_s^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2)^2 + 4\omega_s^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2} \right\}, \quad (19.23)$$

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma_0 &= \\ &= \frac{E_0^2 \omega_{Le}^2 \Delta \omega_0^{(j)} \omega_s^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}] f(\theta, \varphi, \chi_0)}{16\pi n_e \kappa T_e \omega_0^{(j)} ([\Delta \omega_0^{(j)}]^2 - \omega_s^2 + [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2)^2 + 4\omega_s^2 [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}]^2}, \end{aligned} \quad (19.24)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{2} \omega_s k^2 r_{De}^2 [\delta \epsilon_e''(\omega_s, \mathbf{k}) + \delta \epsilon_i''(\omega, \mathbf{k})] = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s \omega_{Li}}{\omega_{Le} |\cos \theta|} + \frac{4}{5} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2} \nu_{ii}. \end{aligned} \quad (19.25)$$

Здесь принято, что $T_e \gg T_i$, а ν_{ii} обозначает частоту ионных соударений

$$\nu_{ii} = \frac{4 \sqrt{\pi} e_i^4 n_i \Lambda}{3m_i^{1/2} (\kappa T_i)^{3/2}}. \quad (19.26)$$

Пусть $\tilde{\gamma}^{(j)} \ll \omega_s$. Тогда порог неустойчивости, вытекающий из (19.24), а также максимум инкремента в околопороговой области (где $\gamma \ll \omega_s$) осуществляются при выполнении распадного условия

$$\omega_s = \Delta \omega_0^{(j)} = \omega_0 - \omega^{(j)}, \quad (19.27)$$

отвечающего возможности распада волны поля накачки

*) Изучение параметрической неустойчивости в замагниченной плазме с возбуждением ионного звука проведено также в работе [125], где рассматривалась околопороговая область и область сильных полей, значительно превышающих пороговые значения. В промежуточной области проведены численные расчеты. В области малых частот см. [188—194, 198, 205].

на ионно-звуковую и на высокочастотную плазменную частоту (18.1). Учтя (19.27), имеем из (19.24)

$$\frac{E_0^2}{64\pi n_e \kappa T_e} = \frac{\omega_0^3 [\gamma + \gamma_0(\theta_r)] [\gamma + \tilde{\gamma}^{(j)}(\theta_r)] \kappa^{(j)}(\theta_r)}{\omega_{Le}^4 \omega_s f(\theta_r)}. \quad (19.28)$$

Мы учли при этом тот факт, что в силу малости $\Delta\omega_0^{(j)}$ нарастающая волна распространяется под углом, близким к θ_r , определенным формулой (18.11). При этом

$$\kappa^{(j)}(\theta_r) = 1 + \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2}. \quad (19.29)$$

Пороговое значение напряженности электрического поля волны накачки определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{пор}}^2}{64\pi n_e \kappa T_e} &= \\ &= \frac{\omega_0^3}{\omega_{Le}^4 \omega_s} \left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \right) \frac{1}{f_{\text{max}}(\theta_r)} \min [\gamma_0(\theta_r), \tilde{\gamma}^{(j)}(\theta_r)], \end{aligned} \quad (19.30)$$

где минимальное значение определяется волновым числом k . Для значений инкремента в околопороговой области ($\gamma \ll \gamma_0 + \tilde{\gamma}^{(j)}$) из (19.28) получаем

$$\gamma = \frac{\gamma_0 \tilde{\gamma}^{(j)}}{\gamma_0 + \tilde{\gamma}^{(j)}} \left\{ \frac{E_0^2}{64\pi n_e \kappa T_e} \frac{\omega_{Le}^4 \omega_s f(\theta)}{\omega_0^3 \kappa^{(j)} \gamma_0 \tilde{\gamma}^{(j)}} - 1 \right\}. \quad (19.31)$$

При нахождении значения волнового вектора, при котором инкремент максимален, так же как при нахождении порога (19.30), ограничением снизу на k является (19.22). Если это ограничение не нарушается, то возможна ситуация, когда искомое значение волнового вектора определяется тем диссипативным вкладом в γ_0 и $\tilde{\gamma}^{(j)}$, который дается столкновениями частиц.

Изложенные выше в этом параграфе результаты работ [33, 34] связаны с анализом уравнения (18.7), при получении которого мы исходили из предположения о слабости электрического поля волны накачки. Это предположение нарушается при значительной расстройке резонанса поля накачки с электронными плазменными колебаниями. В условиях такой расстройки анализ околопороговой области параметрической периодической неустойчивости

требует изучения общего уравнения (12.19). Соответствующий анализ, подобный изложенному в § 6, был проведен Андреевым [131]. Следуя работе [131], рассмотрим здесь нерезонансную кинетическую параметрическую неустойчивость относительно возбуждения низкочастотных возмущений с фазовой скоростью, превышающей тепловую скорость ионов, и с частотой, большей частоты гироскопического вращения ионов. В то же время будем считать, что фазовая скорость низкочастотных колебаний мала по сравнению с тепловой скоростью электронов. Тогда из дисперсионного уравнения (12.19) при использовании парциальных диэлектрических проницаемостей (12.22) плазмы без столкновений, дополненных учетом ион-ионных соударений, вытекают следующие выражения для частоты низкочастотных плазменных колебаний и инкремента их нарастания:

$$\omega = \omega_s \left\{ J_0^2(a_B) \frac{1}{B_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n J_n^2(a_B)}{B_n^2 + n^2 C_n^2} \right\}, \quad (19.32)$$

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\omega_s^2}{\omega_0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(a_B) \frac{(n^2 C_n^2 + B_n^2) E_n + 2B_n C_n D_n}{(B_n^2 + n^2 C_n^2)^2} - \right. \\ \left. - \frac{C_0}{2B_0^2} J_0^2(a_B) - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega^4}{k^3 v_{Ti}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Ti}^2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{4}{5} \frac{k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \nu_{ii} \right\}. \quad (19.33) \end{aligned}$$

Здесь

$$B_n = k^2 r_{De}^2 [1 + \delta \varepsilon_e'(n\omega_0, \mathbf{k})] = k^2 r_{De}^2 + 1 - \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{n\omega_0}{n\omega_0 - l\Omega_e} A_l(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \operatorname{Re} J_+ \left(\frac{n\omega_0 - l\Omega_e}{|k_z| v_{Te}} \right),$$

$$C_n = k^2 r_{De}^2 \frac{1}{n} \delta \varepsilon_e''(n\omega_0, \mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0}{|k_z| v_{Te}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} A_l(k_{\perp}^2 \rho_e^2) \exp\left[-\frac{(n\omega_0 - l\Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right],$$

$$D_n = n\omega_0 \frac{\partial B_n}{\partial(n\omega_0)}, \quad E_n = n\omega_0 \frac{\partial C_n}{\partial(n\omega_0)},$$

$$A_l(z) = I_l(z) e^{-z}, \quad \operatorname{Re} J_+(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x dt e^{t^2/2}.$$

При этом предполагалось, что инкремент меньше частоты.

Из условия равенства нулю инкремента определяется граница неустойчивости. Соответствующее определение порога параметрической неустойчивости было проведено в работе [131] с помощью численных методов. На рис. 8 для случая водородной плазмы приведена зависимость пороговой напряженности электрического поля E_0 волны накачки от постоянного магнитного поля в предположении, что они ориентированы взаимно перпендикулярно ($E_0 \perp B_0$). По оси ординат отложено $v_{E,пор}/v_{Te}$, а по оси

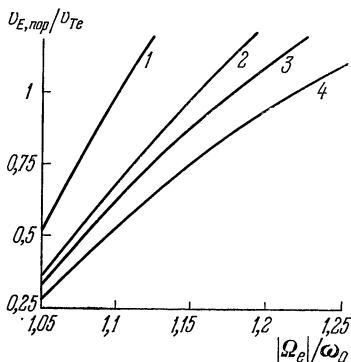


Рис. 8.

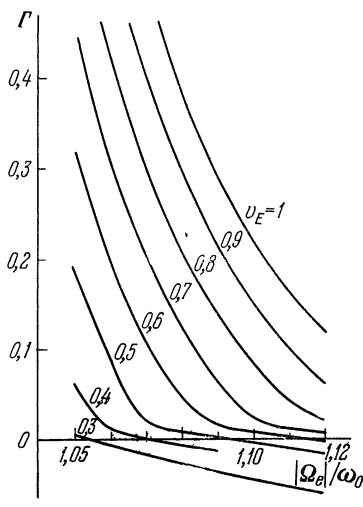


Рис. 9.

абсцисс $|\Omega_e|/\omega_0$. Принято, что $\kappa T_e = 6 \text{ эв}$, $\omega_0 = 2 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$ и $\omega_{Le}^2/\omega_0^2 = 0,4$. Кривая 1 соответствует отношению температур электронов и ионов, равному $T_e/T_i = 10$, кривая 2 — $T_e/T_i = 20$, кривая 3 — $T_e/T_i = 40$, кривая 4 — $T_e/T_i = 100$. С ростом неизотермичности плазмы уменьшается пороговое поле. Это обусловлено уменьшением черенковского взаимодействия волн с ионами. При больших неизотермичностях такое уменьшение прекращается, ибо при выбранной температуре электронов уже при температуре ионов $\kappa T_i \lesssim 0,1 \text{ эв}$ диссипация становится определяющей ион-ионными столкновениями. Заметим, что в условиях рис. 8 волновой вектор пороговых возмущений по порядку величины равен ω_0/v_{Te} , а частота колебаний близка к ионной ленгмюровской частоте ω_{Li} .

Численный анализ формулы (19.33), проведенный в работе [131], позволил для тех же параметров плазмы,

которые были использованы для кривых рис. 8 и $T_e/T_i = 100$ построить зависимость максимального инкремента неустойчивости как функции магнитного поля. На рис. 9 по оси ординат отложено $\omega_0 \gamma_{\max} / \omega_{Li}^2 = \Gamma$, а по оси абсцисс $|\Omega_e| / \omega_0$. Построенное семейство кривых отражает закономерность увеличения инкремента с ростом напряженности электрического поля волны накачки.

§ 20. Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле, на высших гармониках частоты внешнего поля (околопороговая область)

Рассматривая параметрический резонанс в холодной плазме без учета диссипативных эффектов (§ 15), мы видели, что параметрическая неустойчивость развивается не только при совпадении частоты внешнего поля с высокочастотными собственными частотами плазмы, но и при соответствующем совпадении гармоник-обертонов частоты внешнего поля накачки с собственными плазменными частотами. В этом параграфе мы обсудим ряд свойств такого резонанса в околопороговой области, теория которого развивалась в работах [47, 125, 127]. При этом мы будем интересоваться резонансом высших гармоник частоты внешнего поля с собственными частотами колебаний замагниченной плазмы с волновыми векторами, перпендикулярными постоянному магнитному полю. Для таких колебаний отсутствует диссипация, обусловленная черенковским эффектом [30, 48]. Это определяет возможность существенного снижения порогов возникновения неустойчивости.

Действительно, согласно формуле (12.22) для плазмы без столкновений с максвелловским распределением частиц по скоростям имеем ($k \perp B$)

$$\delta \varepsilon_\alpha(\omega, k) = \frac{1}{k^2 r_{D\alpha}^2} \left\{ 1 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_\alpha} I_n(k^2 \rho_\alpha^2) e^{-k^2 \rho_\alpha^2} \right\}. \quad (20.1)$$

Отсутствие у этого выражения мнимой части отвечает отсутствию диссипации продольных волн, распространяющихся поперек магнитного поля.

Следуя работе [127], рассмотрим такую область частот поля накачки, в которой обертоны $n\omega$, близки к гармоникам циклотронных частот гироскопического вращения

электронов:

$$p\omega_0 = l |\Omega_e| (1 + \delta), \quad (20.2)$$

где p и l — несократимые целые числа, а $|\delta| \ll 1$.

При этом мы будем иметь в виду, что использование парциальных диэлектрических постоянных (20.1) позволяет найти следующие выражения для собственных частот высокочастотных продольных плазменных колебаний:

$$\omega_+^{(l)}(k) = l |\Omega_e| \left\{ 1 + \frac{I_l(k^2 \rho_e^2)}{k^2 r_{De}^2} e^{-k^2 \rho_e^2} \right\}, \quad (20.3)$$

пригодные для всех значений l в случае сильно замагниченных электронов, когда их радиус гироскопического вращения оказывается меньше дебаевского радиуса ($\rho_e \ll \ll r_{De}$). Если такое неравенство не выполняется, то спектр собственных колебаний (20.3) точен при больших значениях l , причем в таком практически интересном случае, когда $\rho_e \sim r_{De}$, формула (20.3) пригодна для $l \geq 2$. Следует подчеркнуть, что правая часть формулы (20.3) во всех этих случаях слабо отличается от $l |\Omega_e|$. Это позволяет в интересующей нас области (20.2) говорить о резонансе гармоник частоты поля накачки с собственными частотами плазменных колебаний (20.3).

Прежде чем переходить к детальному анализу параметрического резонанса на частотах (20.3), заметим, что согласно формуле (12.11) в нашем случае поперечного распространения ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$) продольных плазменных возмущений можно записать'

$$a_B^2 = k^2 v_E^2 \frac{\omega_0^2 \cos^2 \varphi + \Omega_e^2 \sin^2 \varphi}{(\omega_0^2 - \Omega_e^2)} \equiv k^2 r_{BE}^2. \quad (20.4)$$

Здесь $v_E = |e| E_0 / m_e \omega_0$ и φ — угол между волновым вектором и проекцией вектора \mathbf{E}_0 на плоскость, перпендикулярную постоянному магнитному полю. Используя далее соотношение (20.2), в котором δ мало, можно записать следующую приближенную формулу:

$$r_{BE}^2 = \rho_e^2 \frac{v_E^2}{v_{Te}^2} \frac{p^2 (l^2 \cos^2 \varphi + p^2 \sin^2 \varphi)}{(l^2 - p^2)^2}. \quad (20.5)$$

Отсюда можно сделать некоторые выводы об ориентации волнового вектора относительно направления \mathbf{E}_0 в околопороговой области развития параметрического резонанса.

При этом можно исходить из того, что на пороге неустойчивости, при соответствующем минимальном значении ν_E , правая часть формулы (20.5) как функция угла φ должна быть максимальной. Ясно, что максимальное значение выражения $p^2 \sin^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi$ равно большему из значений l^2 или p^2 и осуществляется соответственно при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi/2$.

Поэтому можно утверждать, что при $l^2 > p^2$, или, что то же самое, при частоте поля накачки, большей электронной частоты гироскопического вращения, на пороге неустойчивости развиваются возмущения с волновым вектором, параллельным проекции E_0 на плоскость, перпендикулярную магнитному полю. Напротив, при частотах поля накачки, меньших электронной гироскопической, когда $p^2 > l^2$, волновой вектор продольных плазменных возмущений перпендикулярен проекции вектора напряженности электрического поля волны накачки. Ниже в этом параграфе при обсуждении пороговых соотношений будем иметь в виду эти свойства, а находить будем формулы, определяющие пороговые значения r_{BE} .

Хотя нас и интересуют пороговые значения полей волны накачки, однако в рассматриваемом случае резонанса (20.2) не всегда можно пользоваться разложениями функции Бесселя по степеням a_B . Поэтому ниже будем пользоваться общим дисперсионным соотношением (12.19)

$$\frac{1}{\delta \epsilon_i(\omega, k)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a_B) \frac{1}{1 + \delta \epsilon_e(\omega + n\omega_0, k)} = 0. \quad (20.6)$$

Наш анализ начнем со случая аperiodической неустойчивости, когда на пороге можно положить в формуле (20.6) $\omega = 0$. Тогда это уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} k^2 r_{Di}^2 + \frac{k^2 r_{De}^2}{1 + k^2 r_{De}^2} J_0^2(a_B) = \\ = -2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(a_B) \frac{1 + \delta \epsilon_e'(n\omega_0, k)}{[1 + \delta \epsilon_e'(n\omega_0, k)]^2 + [\delta \epsilon_e''(n\omega_0, k)]^2}. \end{aligned} \quad (20.7)$$

Отсюда при заданном значении частоты поля накачки, или, что то же самое, при заданной величине относительной расстройке δ , может быть найдено значение напряженности электрического поля волны накачки, отвечающее

порогу параметрического нарастания плазменных возмущений с волновым вектором k .

Рассмотрим прежде всего следствия, вытекающие из уравнения (20.7) в пределе длин волн возмущений, значительно превосходящих радиус гироскопического вращения электрона ($k\rho_e \ll 1$). Тогда, учитывая диссипацию, обусловленную столкновениями электронов, для электронного вклада в диэлектрическую проницаемость имеем (см., например, [128])

$$\delta\epsilon_e(\omega) = -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} - \frac{2\omega^2}{k^2 r_{De}^2} \frac{1}{\omega^2 - l^2 \Omega_e^2} \left\{ 1 - \frac{iv_{ei}}{\omega - l\Omega_e} \right\} \frac{(k\rho_e)^{2l}}{2^l l!}. \quad (20.8)$$

Используя выражения (20.8) и разлагая функции Бесселя в уравнении (20.7) по степеням a_B , находим ($l > 1$)

$$\left(\frac{r_{BE}}{\rho_e} \right)_{\text{пор}} = 2 \frac{p^{l-2p+l}}{2^{p(l-1)}} \frac{1}{(p!)^p} (l!)^{\frac{1-p}{2p(l-1)}} \left(\frac{r_{De}^2 + r_{Di}^2}{r_{De}^2} \right)^{\frac{1}{2p}} \times \\ \times \left| \frac{v_{ei}}{l\Omega_e} \right|^{\frac{1}{2p}} \left[\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} - \frac{1}{l^2 - 1} \right]^{\frac{l-p}{2p(l-1)}} \delta^{-\frac{p+l-2}{2p(l-1)}}. \quad (20.9)$$

Характеризующая диссипацию частота электронных столкновений определена формулой (7.5). Волновой вектор продольных плазменных возмущений, нарастающих вблизи порога (20.9), определяется величиной расстройки резонанса:

$$k_{\text{пор}}\rho_e = \left[\left(\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} - \frac{1}{l^2 - 1} \right) 2^l l! \delta \right]^{\frac{1}{2(l-1)}}. \quad (20.10)$$

Отсюда следует, что с увеличением расстройки резонанса уменьшается длина волны плазменных возмущений и в то же время уменьшается значение пороговой напряженности электрического поля накачки [47]. Следует помнить, что величина расстройки в этом длинноволновом пределе ограничена условием $k\rho_e \ll 1$ *). Поэтому представляет интерес и другой предел коротких волн.

*) Длинноволновый случай ($p = 1, l = 2$) вдали от порога рассмотрен в работе [132].

В пределе длин волн плазменных возмущений, много меньших радиуса гироскопического вращения электрона ($k\rho_e \gg 1$), парциальная комплексная диэлектрическая постоянная электронов характеризуется выражениями [129]

$$\left. \begin{aligned} \delta\varepsilon'_e(n\omega_0, k) &= -\frac{1}{\delta \sqrt{2\pi} k^3 r_{De}^2 \rho_e}, \\ \delta\varepsilon''_e(n\omega_0, k) &= \frac{v_{ei} \omega_{Le}^2 3(\pi+1)}{\delta^2 |\Omega_e|^3 8 \sqrt{\pi} s l k \rho_e}. \end{aligned} \right\} \quad (20.11)$$

Здесь учтено резонансное условие (20.2) и принято, что $n = s \cdot p$, где $s = 1, 2, \dots$ — целые числа.

Используя выражения (20.11), примем также, что длина волны возмущений велика по сравнению с амплитудой осцилляций электрона r_{BE} . Тогда из уравнения (20.7) вытекает следующая формула для порога параметрической неустойчивости:

$$\left(\frac{r_{BE}}{\rho}\right)_{\text{пор}} = 2(p!)^{1/p} \left(\frac{T_i}{4T_e}\right)^{1/2p} \left|\frac{\Omega_e}{\omega_{Le}}\right|^{(2p-4)/3p} \times \\ \times \left[3\sqrt{\pi}(\pi+1)\frac{v_{ei}}{l|\Omega_e|}\right]^{1/2p} (V\sqrt{2\pi}\delta)^{(2p-7),6p}. \quad (20.12)$$

Такому порогу неустойчивости соответствует следующее значение волнового вектора плазменных возмущений:

$$k_{\text{пор}\rho_e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \frac{1}{\delta}\right)^{1/3}. \quad (20.13)$$

Прежде всего заметим, что согласно формуле (20.12) пороговое значение напряженности электрического поля волны накачки уменьшается с увеличением расстройки, если p принимает значения 1, 2, 3. В то же время растет длина волны пороговых плазменных возмущений. Сравнивая этот вывод с выводами, полученными из формул (20.9) и (20.10), можно теперь утверждать, что для значений частот волны накачки, близких к $l\Omega_e$, $1/2 l\Omega_e$, $1/3 l\Omega_e$, минимальному значению порогового поля среди всех возможных расстроек отвечают такие, для которых длина волны пороговых возмущений сравнима с радиусом гироскопического вращения электронов ($k\rho_e \sim 1$).

Иное положение имеет место для значений $p=4, 5, 6, \dots$, для которых согласно формуле (20.12) порог уменьша-

ется с уменьшением величины расстройки, а также одновременно уменьшается длина волны пороговых плазменных возмущений. Последнее говорит о том, что при достаточно малых расстройках нарушится использованное при выводе формулы (20.12) предположение о малости амплитуды осцилляций электрона по сравнению с длиной волны плазменных возмущений. При этом, только отказавшись от такого предположения, можно ответить на вопрос об определении значения расстройки, при котором пороговая напряженность поля накачки окажется минимальной. Именно наименьшему значению порога, определяемому формулой

$$\left(\frac{r_{BE}}{\rho_e}\right)_{\text{пор}} = \left[\frac{3}{4} V \pi (\pi + 1) \frac{v_{ei} |\Omega_e| r_{Di}^2}{\omega_{Le}^2 c_e^2} \right]^{1/7} \frac{1}{\max f_p(u, w)}, \quad (20.14)$$

соответствуют возмущения с пороговым волновым вектором

$$k_{\text{пор}} = \frac{u_0}{(r_{BE})_{\text{пор}}}, \quad (20.15)$$

где u_0 — значение аргумента u , при котором оказывается максимальной функция

$$f_p(u, w) = \frac{1}{u} \left\{ 2w \sum_{s=1}^{\infty} \frac{s^2 J_{sp}^2(u)}{s^2 + w^2} \right\}^{1/7}. \quad (20.16)$$

Порогу (20.14) соответствует величина расстройки, равная

$$\delta_{\text{опт}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{Le}^2}{\Omega_e^2} \left(\frac{r_{BE}}{\rho_e} \right)_{\text{пор}}^3 \frac{1}{u_0^3}. \quad (20.17)$$

Имея в виду быстрое убывание функций Бесселя с ростом индекса, в правой части формулы (20.16) можно ограничиться лишь одним слагаемым ($s = 1$). Поскольку тогда по переменной w максимум достигается при $w = 1$, то порог (20.14) определяется максимальным значением функции

$$\max f_p(u, w) \approx \max f_p(u, 1) \approx \max \frac{J_p^{2,7}(u)}{u}.$$

При этом, например, $\max f_4 \approx 0,19$ при $u_0 \approx 2,3$, $\max f_5 \approx 0,14$ при $u_0 \approx 4,0$ и $\max f_6 \approx 0,11$ при $u_0 \approx 5,5$.

Отсюда ясно, что длина волны пороговых возмущений оказывается по порядку величины сравнимой и даже меньшей амплитуды осцилляций электрона в поле волны накачки.

Изложенные здесь результаты работы [127] характеризуют общие закономерности аperiодической параметрической неустойчивости плазмы при резонансе обертонов частоты поля накачки с гармониками циклотронных частот гироскопического вращения электронов. Перейдем теперь к рассмотрению периодической параметрической неустойчивости, при которой одновременно с нарастанием высокочастотных плазменных колебаний со спектром (20.3) возбуждаются также низкочастотные плазменные колебания, связанные с движением ионов. Обратимся при этом к случаю разреженной плазмы, когда циклотронная частота гироскопического вращения ионов велика по сравнению с их ленгмюровской частотой ($n_i m_i c^2 \ll B^2/4\pi$). В такой плазме частота низкочастотных плазменных колебаний, распространяющихся поперек магнитного поля, близка к гироскопической частоте ионов. Диссипация таких колебаний определяется частотой ион-ионных соударений ν_{ii} (см. (7.5)). Так, в длинноволновом пределе, когда длина волны колебаний велика по сравнению с ларморовским радиусом гироскопического вращения ионов ($k\rho_i \ll 1$), для спектра низкочастотных колебаний имеем

$$\omega_-(k) = \Omega_i \left[1 + \frac{\omega_{Li}^2}{2\Omega_i^2} (1 - k^2 \rho_i^2) \right]. \quad (20.18)$$

Соответствующий диссипативный вклад ионов в мнимую часть диэлектрической проницаемости имеет вид [34]

$$\delta\epsilon_i'' = \frac{56}{5} \frac{\Omega_i \nu_{ii}}{\omega_{Li}^2} k^2 \rho_i^2. \quad (20.19)$$

В противоположном коротковолновом пределе, когда $k\rho_i \gg 1$, аналогично имеем

$$\omega_-(k) = \Omega_i \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi} k^3 r_{Di}^2} \right], \quad (20.20)$$

$$\delta\epsilon_i'' = \frac{3\sqrt{\pi}(\pi+1)\nu_{ii}\Omega_i}{4\omega_{Li}^2} k^5 \rho_i^5. \quad (20.21)$$

Условие развития периодической неустойчивости определяется близостью обертона частоты поля волны накачки сумме частот высокочастотного и низкочастотного колебаний. При этом равенство

$$p\omega_0 = \omega_+(k) + \omega_-(k) \quad (20.22)$$

определяет при заданной соотношением (20.2) расстройке величину волнового вектора плазменных колебаний. Соотношение (20.22) позволяет сказать, что в рассматриваемых условиях параметрическая неустойчивость плазмы соответствует преобразованию обертонов поперечного поля волны накачки в пару продольных (высокочастотную и низкочастотную) плазменных волн.

Следуя работе [127], рассмотрим пороги периодической неустойчивости. Примем в уравнении (20.6), что длины волн колебаний велики по сравнению с амплитудой осцилляций электрона ($a_B \ll 1$). Тогда пороговая напряженность электрического поля периодической параметрической неустойчивости определяется формулой

$$\left(\frac{r_{BE}}{\rho_e}\right)_{\text{пор}} = \frac{2}{k\rho_e} (p!)^{\frac{1}{p}} [\delta\varepsilon_e''(\omega_+, k) \delta\varepsilon_e''(\omega_-, k)]^{\frac{1}{2p}}. \quad (20.23)$$

Подставляя в эту формулу выражения (20.8) и (20.19), получаем следующую формулу для порога возбуждения длинноволновых колебаний:

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_{BE}}{\rho_e}\right)_{\text{пор}} &= \\ &= 2 \left[2^l (l-1) \frac{56m_e v_{ei} v_{ii}}{5m_i \omega_{Li}^2} \right]^{\frac{1}{2p}} \left[p! \left(\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} - \frac{1}{l^2 - 1} \right) \right]^{\frac{1}{2p}} \times \\ &\quad \times (k\rho_e)^{-\frac{p+l-2}{p}}. \quad (20.24) \end{aligned}$$

Величина соответствующего волнового вектора колебаний, возбуждающихся на пороге неустойчивости, следующим образом определяется расстройкой:

$$\delta = \frac{(k\rho_e)^{2l}}{2^l l! (kr_{De})^2} + \frac{\Omega_i}{l|\Omega_e|}. \quad (20.25)$$

Отсюда видно, что с увеличением расстройки растет волновой вектор плазменных колебаний. Согласно формуле

(20.24) это означает, что с увеличением расстройки уменьшается пороговое значение напряженности электрического поля накачки.

В противоположном пределе ($k\rho_i \gg 1$) с помощью соотношений (20.11), (20.21) и (20.23) получаем

$$\left(\frac{r_{BE}}{\rho_e}\right)_{\text{пор}} = 2 \left[2^l (l-1) \frac{3 \sqrt{\pi} (\pi+1) m_e v_{ei} v_{ii}}{4 m_i \omega_{Li}^2} \right]^{\frac{1}{2p}} \times \\ \times \left[p! \left(\frac{\Omega_e^2}{\omega_{Le}^2} - \frac{1}{l^2 - 1} \right) \right]^{\frac{1}{p}} (k\rho_e)^{\frac{7-2p-2l}{2p}}. \quad (20.26)$$

Простые формулы (20.24) — (20.26) позволяют сделать качественные высказывания о свойствах параметрической периодической неустойчивости при расстройке, приводящей к минимальному порогу. Так, в этом случае при резонансе основного тона волны накачки со второй электронной циклотронной гармоникой ($\omega_0 \approx 2 |\Omega_e|$) возбуждаются колебания с длиной волны порядка радиуса гироскопического вращения ионов и в то же время много большей амплитуды осцилляций электрона. Соответственно для резонанса высших обертонов поля накачки длина волны плазменных колебаний оказывается сравнимой с амплитудой осцилляций электрона.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ПЛАЗМОЙ, ПРИВОДЯЩЕЕ К РАСКАЧКЕ НЕПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛЯ

§ 21. Параметрическая неустойчивость плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле, связанная с развитием непотенциальных возмущений

Из теории устойчивости плазмы, в которой электроны равномерно движутся относительно ионов, известно, что помимо неустойчивости относительно нарастания потенциальных колебаний возможна также неустойчивость, приводящая к развитию возмущений непотенциального электромагнитного поля [30, 36—39]. Естественно ожидать возникновения непотенциальной неустойчивости и в рассматриваемом нами случае, когда внешнее поле приводит в относительное движение электроны и ионы плазмы. При этом, поскольку в интересующей нас ситуации электроны плазмы движутся неравномерно, осциллируя во внешнем поле, физическая картина, вообще говоря, усложняется. Однако раскачка непотенциального поля, как это впервые для одного частного случая было показано Волковым [40], оказывается возможной и в плазме, находящейся в высокочастотном поле.

В этом параграфе, следуя главным образом работе Горбунова и автора [35] (см. также обзор [6]), мы изложим теорию параметрической неустойчивости плазмы (в отсутствие внешнего магнитного поля), связанной с развитием непотенциальных возмущений.

Подобно тому, как это делалось в предыдущих главах, ограничимся рассмотрением возмущений с длиной волны,

значительно меньшей характерных размеров неоднородности плазмы. Будем также полагать, что для частоты внешнего поля выполнено неравенство

$$\omega_0 \gg \frac{v_{Te}}{c} \omega_{Le},$$

которое означает, что в условиях проникновения внешнего поля только внутрь скин-слоя имеет место нормальный скин-эффект [8]. В соответствии с этим внешнее поле можно считать пространственно однородным, причем внешнее электрическое поле в плазме можно принять в виде (1.1) $E(t) = E_0 \sin \omega_0 t$, а высокочастотным магнитным полем можно пренебречь (ср. [204]).

В нашем подходе следует рассматривать устойчивость плазмы с распределениями частиц в основном состоянии:

$$f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t) = f_{\alpha 0} \left(\mathbf{p}_{\alpha} - e_{\alpha} \int_{-\infty}^t dt' E(t') \right) = f_{\alpha 0} \left(\mathbf{p}_{\alpha} + \frac{e_{\alpha} E_0}{\omega_0} \cos \omega_0 t \right), \quad (21.1)$$

которые будут приниматься нами, вообще говоря, изотропными в системах координат, где соответствующие частицы не осциллируют. При детальном анализе теплового движения $f_{\alpha 0}(\mathbf{p}_{\alpha})$, как это делалось и выше, будет браться в виде максвелловского распределения.

Для возмущений функций распределения частиц δf_{α} , соответствующих слабому отклонению от равновесного состояния (21.1) плазмы без столкновений, можно записать кинетическое уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \mathbf{E}_0(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \delta f_{\alpha} + e_{\alpha} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}, t)}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (21.2)$$

Возмущения электромагнитного поля описываются уравнениями Максвелла

$$\text{rot } \delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \delta \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \delta \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} \mathbf{p} \delta f_{\alpha}, \quad (21.3)$$

$$\text{div } \delta \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p} \delta f_{\alpha}.$$

Подобно (4.3) решение кинетического уравнения (21.2) будем искать в виде

$$\delta f_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + ia_\alpha \sin \omega_0 t) \psi_\alpha \left(\mathbf{p} + \frac{e_\alpha}{\omega_0} \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t \right), \quad (21.4)$$

где $a_\alpha = e_\alpha E_0 k (m_\alpha \omega_0^2)^{-1} \equiv \mathbf{k} \mathbf{r}_{E,\alpha}$ и $r_{E,\alpha}$ — амплитуда осцилляций частицы сорта α во внешнем электрическом поле.

Представляя неравновесные электрическое и магнитное поля в виде рядов

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{E}^{(n)} e^{-in\omega_0 t}, \quad (21.5)$$

$$\delta \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{B}^{(n)} e^{-in\omega_0 t} \quad (21.6)$$

и имея в виду вытекающую из уравнений поля связь

$$\frac{\omega + n\omega_0}{c} \delta \mathbf{B}^{(n)} = [\mathbf{k} \delta \mathbf{E}^{(n)}], \quad (21.7)$$

нетрудно получить из кинетического уравнения (21.2) следующее решение:

$$\psi_\alpha(\mathbf{p}, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_\alpha^{(n)} e^{-i(\omega + n\omega_0)t}, \quad (21.8)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}) = & - \frac{ie_\alpha}{n\omega_0 + \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{n-l}(a_\alpha) \times \\ & \times \left[\delta_{ij} + \frac{(n-l)\omega_0}{l\omega_0 + \omega} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i E_{0j}}{\mathbf{k} \mathbf{E}_0} \right) \right] \delta E_j^{(l)}. \end{aligned} \quad (21.9)$$

Найденное решение кинетического уравнения позволяет выразить плотность тока через неравновесное поле. В результате с помощью уравнений Максвелла получаем следующую систему уравнений для компонент электрического поля:

$$\begin{aligned} \{c^2 (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + (\omega + [n\omega_0]^2 \delta_{ij})\} \delta E_j^{(n)} + \\ + \sum_{\alpha} \sum_{m,r=-\infty}^{+\infty} \frac{n\omega_0 + \omega}{m\omega_0 + \omega} \delta E_j^{(m)} J_{r-n}(a_\alpha) J_{r-m}(a_\alpha) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ (\omega + r\omega_0)^2 \delta \varepsilon_\alpha^{tr} (\omega + r\omega_0, \mathbf{k}) \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] + \right. \\ & \quad + \delta \varepsilon_\alpha^l (\omega + r\omega_0, \mathbf{k}) \left[\frac{\mathbf{k}}{k} (n\omega_0 + \omega) + \frac{(r-n)\omega_0}{k(\mathbf{k}E_0)} [\mathbf{k} [\mathbf{k}E_0]] \right]_i \times \\ & \quad \left. \times \left[\frac{\mathbf{k}}{k} (m\omega_0 + \omega) + \frac{(r-m)\omega_0}{k(\mathbf{k}E_0)} [\mathbf{k} [\mathbf{k}E_0]] \right]_j \right\} = 0, \quad (21.10) \end{aligned}$$

$$\delta \varepsilon_\alpha^l (\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\mathbf{p} \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (21.11)$$

$$\delta \varepsilon_\alpha^{tr} (\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi e_\alpha^2}{\omega k^2} \int d\mathbf{p} \frac{[\mathbf{k} [v\mathbf{k}]]}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (21.12)$$

Здесь помимо уже использовавшейся продольной диэлектрической проницаемости ($\delta \varepsilon_\alpha^l \equiv \delta \varepsilon_\alpha$) (ср. (4.9)) возникает также $\delta \varepsilon_\alpha^{tr}$ — вклад частиц сорта α в поперечную комплексную диэлектрическую проницаемость.

Из уравнений (21.10) для потенциального неравновесного электрического поля вытекают дисперсионные уравнения, изученные в главах II и III. Заметим, что для потенциальных колебаний влияние внешнего электрического поля существенно лишь тогда, когда угол между ним и волновым вектором плазменных колебаний отличен от 90° . Поэтому прежде всего рассмотрим здесь случай поперечного распространения, когда волновой вектор \mathbf{k} ортогонален внешнему электрическому полю, так что на соответствующие потенциальные колебания внешнее поле не влияет. В таком случае система уравнений (21.10) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left\{ c^2 (k_i k_j - k^2 \delta_{ij}) + (n\omega_0 + \omega)^2 \left[\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr} (n\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l (n\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) \right] \right\} \frac{\delta E_j^{(n)}}{n\omega_0 + \omega} - (n\omega_0 + \omega) k_i E_{0j} \times \\ & \quad \times \left[\frac{\delta E_j^{(n-1)}}{(n-1)\omega_0 + \omega} + \frac{\delta E_j^{(n+1)}}{(n+1)\omega_0 + \omega} \right] \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{2m_\alpha \omega_0} \delta \varepsilon_\alpha^l (n\omega_0 + \\ & \quad + \omega, \mathbf{k}) - k_j E_{0i} \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{2m_\alpha \omega_0} \{ \delta \varepsilon_\alpha^l ([n+1]\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) \delta E_j^{(n+1)} + \\ & \quad + \delta \varepsilon_\alpha^l ([n-1]\omega_0 + \omega, \mathbf{k}) \delta E_j^{(n-1)} \} + E_{0i} E_{0j} \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2 k^2}{4m_\alpha^2 \omega_0^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \delta_{\alpha}^l ([n+1] \omega_0 + \omega, k) \left[\frac{\delta E_j^{(n)}}{n\omega_0 + \omega} + \frac{\delta E_j^{(n+2)}}{(n+2)\omega_0 + \omega} \right] + \right. \\ & \left. + \delta_{\alpha}^l ([n-1] \omega_0 + \omega, k) \left[\frac{\delta E_j^{(n-2)}}{(n-2)\omega_0 + \omega} + \frac{\delta E_j^{(n)}}{n\omega_0 + \omega} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (21.13)$$

где $\varepsilon^l = 1 + \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^l$, $\varepsilon^{tr} = 1 + \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^{tr}$. Для колебаний, электрический вектор $\delta \mathbf{E}$ которых поляризован перпендикулярно плоскости, образуемой векторами \mathbf{k} и \mathbf{E}_0 , из системы (21.13) имеем обычное дисперсионное уравнение нарастающих поперечных колебаний

$$(n\omega_0 + \omega)^2 \varepsilon^{tr} (n\omega_0 + \omega, k) - c^2 k^2 = 0. \quad (21.14)$$

Поэтому для выявления неустойчивости следует рассмотреть случай такой поляризации, когда электрический вектор волны $\delta \mathbf{E}$ лежит в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{E}_0 . Тогда из системы (21.13) для компонент неравновесного электрического поля, ориентированных вдоль внешнего поля, может быть записана следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} & \{(n\omega_0 + \omega)^2 \varepsilon^{tr} (n\omega_0 + \omega, k) - c^2 k^2\} \varphi^{(n)} + \\ & + \frac{1}{4} \beta^2 c^2 k^2 \left\{ [\varphi^{(n)} + \varphi^{(n+2)}] \delta_e^l ([n+1] \omega_0 + \omega, k) \left[1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\delta \varepsilon_e^l ([n+1] \omega_0 + \omega, k)}{\varepsilon^l ([n+1] \omega_0 + \omega, k)} \right] + [\varphi^{(n)} + \varphi^{(n-2)}] \times \right. \\ & \left. \times \delta_e^l ([n-1] \omega_0 + \omega, k) \left[1 - \frac{\delta \varepsilon_e^l ([n-1] \omega_0 + \omega, k)}{\varepsilon^l ([n-1] \omega_0 + \omega, k)} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (21.15)$$

где

$$\beta = \frac{v_E}{c}, \quad v_E = \frac{eE_0}{m_e \omega_0}, \quad \varphi^{(n)} = \frac{\mathbf{E}_0 \delta \mathbf{E}^{(n)}}{m \omega_0 + \omega}.$$

При получении (21.15) мы пренебрегли малыми поправками порядка отношения масс электрона и иона.

Для того чтобы в обозримой форме записать дисперсионное уравнение возмущений, соответствующее системе (21.15), заметим, что скорость осциллирующего электрона во внешнем поле мала по сравнению со скоростью света.

Поэтому, используя малость β , можем записать условие разрешимости системы (21.15) в виде

$$1 - \beta^2 B(\omega) [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] - \\ - \frac{\beta^4 B(\omega) B(\omega + 2\omega_0) [F(\omega + \omega_0)]^2}{1 - \beta^2 B(\omega + 2\omega_0) [F(\omega + \omega_0) + F(\omega + 3\omega_0)] + O(\beta^4)} - \\ - \frac{\beta^4 B(\omega) B(\omega - 2\omega_0) [F(\omega - \omega_0)]^2}{1 - \beta^2 B(\omega - 2\omega_0) [F(\omega - 3\omega_0) + F(\omega - \omega_0)] + O(\beta^4)} = 0, \quad (21.16)$$

где

$$B(\omega) = - \frac{\delta \varepsilon_e^l(\omega)}{4\varepsilon^l(\omega)} [1 + \delta \varepsilon_i^l(\omega)], \quad (21.17)$$

$$F(\omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon^{tr}(\omega) - c^2 k^2}. \quad (21.18)$$

При анализе следствий, вытекающих из дисперсионного уравнения (21.16), имея в виду малость β^2 , рассмотрим решения, возникающие в том случае, когда $B(\omega)$ велико по сравнению с единицей. Это возможно либо при $\delta \varepsilon_e^l \gg \delta \varepsilon_i^l \gg 1$ (низкочастотный случай), либо при $\delta \varepsilon_e^l \ll \delta \varepsilon_i^l \sim 1$ (высокочастотный случай).

Прежде всего рассмотрим те следствия, которые возникают в условиях, когда $B(\omega)$ оказывается много больше $B(\omega + n\omega_0)$ и $F(\omega + m\omega_0)$ (где $n = 2, 4, \dots$ и $m = 3, 5, \dots$). При этом уравнение (21.16) упрощается и может быть представлено в виде

$$1 = \frac{\beta^2 \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\varepsilon^l(\omega, k)} [1 + \delta \varepsilon_i^l(\omega, k)] \left[\frac{k^2 c^2}{k^2 c^2 - (\omega - \omega_0)^2 \varepsilon^{tr}(\omega - \omega_0, k)} + \right. \\ \left. + \frac{k^2 c^2}{k^2 c^2 - (\omega + \omega_0)^2 \varepsilon^{tr}(\omega + \omega_0, k)} \right]. \quad (21.19)$$

Одно из низкочастотных решений этого уравнения возникает для плазменных возбуждений с длиной волны, совпадающей с длиной волны внешнего электрического поля, т. е. при

$$k^2 c^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2 \quad (\omega_p^2 = \omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2). \quad (21.20)$$

При этом из (21.19) следует, как показано в работе [41],

$$\omega^2 = -\frac{1}{8} \omega_{Li}^2 k^2 r_E^2 \quad \text{при} \quad \omega_{Li} r_E > v_{Te}, \quad (21.21)$$

$$\omega^2 = -\frac{1}{8} \omega_{Li}^2 k^2 \frac{r_E^2 - 8r_{De}^2}{1 + k^2 r_{De}^2} \quad \text{при} \quad v_{Te} > \omega_{Li} r_E > v_{Ti}, \quad (21.22)$$

где $r_E = eE_0 (m_e \omega_0^2)^{-1}$ — амплитуда осцилляций электрона во внешнем электрическом поле. Из формулы (21.22) видно, что неустойчивость оказывается возможной в сильном поле, когда амплитуда осцилляций электрона становится больше электронного дебаевского радиуса.

Для другого класса низкочастотных решений дисперсионного уравнения (21.19) длина волны существенно отличается от длины волны внешнего поля. При этом из дисперсионного уравнения получаем [35]

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{Li}^2 k^2 v_E^2}{\omega_0^2 - \omega_p^2 - k^2 c^2} \quad \text{при} \quad |\omega| \gg kv_{Te}, \quad (21.23)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_{Li}^2}{1 + k^2 r_{De}^2} \left\{ 2k^2 r_{De}^2 - \frac{k^2 v_E^2}{k^2 c^2 - \omega_0^2 + \omega_p^2} \right\} \quad (21.24)$$

при $kv_{Te} \gg |\omega| \gg kv_{Ti}$,

$$\omega = \frac{i\omega_{Li}}{\sqrt{\pi}} \frac{kv_E}{\sqrt{k^2 c^2 - \omega_0^2 + \omega_p^2}} \sqrt{1 + \frac{r_{De}^2}{r_{Di}^2}} \times \\ \times \left[1 - 2 \frac{k^2 c^2 - \omega_0^2 + \omega_p^2}{v_E^2 (r_{Di}^2 + r_{De}^2)^{-1}} \right] \quad \text{при} \quad kv_{Ti} \gg |\omega|. \quad (21.25)$$

Заметим, что аналогом неустойчивости, соответствующей формуле (21.23), в случае плазмы с пучком является изученная Ловецким и Рухадзе [36]*), что легко видеть непосредственно из сравнения инкрементов, если в (21.23) принять легко выполняющееся условие малости длины волны возмущений по сравнению с длиной волны внешнего поля, когда формула (21.23) дает

$$\gamma = \frac{\omega_{Li}}{\sqrt{\pi}} \frac{v_E}{c}. \quad (21.26)$$

Неустойчивость, описываемая формулой (21.25), имеет своим аналогом неустойчивость в пучковой плазме, найденную Шолоховым [39].

*) См. также работы [37, 38].

Обратимся теперь к высокочастотным решениям дисперсионного уравнения (21.19), для которых $\delta\epsilon_e^l \approx -1$. Это означает, что частота таких колебаний близка к ленгмюровской

$$\omega = \omega_p + \delta, \quad |\delta| \ll \omega_p. \quad (21.27)$$

Соответствующее решение возможно для волновых векторов, удовлетворяющих соотношению

$$k^2 c^2 = (\omega_{Le} - \omega_0)^2 - \omega_{Le}^2, \quad (21.28)$$

причем

$$|\delta|^2 = -\frac{v_E^2}{16c^2} \omega_{Le}^2 \left\{ \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \right]^{-1} - \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_{Le}} \right] \right\}. \quad (21.29)$$

Эта неустойчивость, предсказанная в работе [42], возможна, во-первых, как это следует из (21.28), при $\omega_0 > 2\omega_{Le}$ а, во-вторых, для плазменных объектов с малыми размерами в направлении изменения внешнего поля, что может служить оправданием предположения о его однородности.

Еще одна неустойчивость, связанная с раскачкой непотенциальных колебаний, имеет место при приближении частоты внешнего поля к электронной ленгмюровской ($\omega_0 = \omega_{Le} - \Delta$), причем частота нарастающих колебаний также близка к этому значению ($\omega = \omega_{Le} + \delta\omega$). Тогда в уравнении (21.16) оказывается, что $B(\omega) \approx \approx B(\omega - 2\omega_0) \gg 1$. В результате для коротковолновых возмущений и холодной плазмы дисперсионное уравнение (21.16) дает

$$(\delta\omega)^2 + 2\delta\omega\Delta + \left[\frac{1}{2} \beta^2 \omega_{Le} \Delta - \frac{3}{64} \beta^4 \omega_{Le}^2 \right] = 0. \quad (21.30)$$

Отсюда следует, что при

$$\frac{1}{8} \frac{v_E^2}{c^2} \omega_{Le} < \Delta < \frac{3}{8} \frac{v_E^2}{c^2} \omega_{Le} \quad (21.31)$$

имеет место неустойчивость [35], а максимальный инкремент возникает при $\omega_0 \approx \omega_{Le} \left[1 - \frac{v_E^2}{4c^2} \right]$ и равен

$$\gamma = \text{Im } \Delta = \frac{1}{8} \frac{v_E^2}{c^2} \omega_{Le}. \quad (21.32)$$

Если последняя неустойчивость возникает при резонансе частоты внешнего поля с плазменной, то неустойчи-

вость, описываемая формулами (21.23) — (21.25), имеет место в широкой области частот и в этом смысле является нерезонансной. Эта неустойчивость также не является резонансной по условию длин волн, что требуется для неустойчивостей, описываемых формулами (21.21), (21.22) и (21.29). Такой нерезонансный характер полученной неустойчивости делает ее проявление возможным в сравнительно широкой области частот. В то же время следует подчеркнуть, что в нерезонансной области неустойчивость возникает в электрическом поле большой напряженности, когда амплитуда электронных осцилляций превышает дебаевский радиус электронов.

До сих пор в этом параграфе речь шла о возмущениях, распространяющихся поперек внешнего электрического поля. При обсуждении общего случая направления распространения возмущений мы не станем проводить всю цепь рассуждений, во многом аналогичных изложенному. Соответствующее подробное рассмотрение проведено в работе [35]. Здесь же заметим, что, пренебрегая малой амплитудой a_i осцилляций ионов во внешнем поле по сравнению с электронной амплитудой ($a_e = a$), используя предположение о малости длины волны возмущений по сравнению с (c/ω_0) и считая $\omega_0 \gg \omega_{Li}$, а инкремент нарастающих возмущений малым по сравнению с ленгмюровской частотой ионов, как показано в [35], можно получить дисперсионное уравнение, представляющее собой обобщение дисперсионных уравнений (21.19) и (4.15). При этом заметное изменение уже детально рассмотренного ранее спектра потенциальных колебаний возникает лишь при малых значениях параметра a , когда дисперсионное уравнение принимает вид [35]

$$\frac{\varepsilon^l(\omega, k)}{\delta\varepsilon_i^l(\omega, k) [1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega, k)]} + \frac{1}{2} \frac{(kv_E)^2}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2} - \frac{[kv_E]^2}{2k^2c^2} \frac{\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)}{1 + \delta\varepsilon_e^l(\omega, k)} = 0. \quad (21.33)$$

Решение этого уравнения может быть охарактеризовано следующими приближенными формулами:

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ \frac{1}{2} \frac{(kv_E)^2}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2} - \frac{1}{2} \frac{[kv_E]^2}{c^2k^2} \right\}, \quad |\omega| \gg kv_{Te}, \quad (21.34)$$

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 \left\{ k^2 r_{De}^2 + \frac{1}{2} \frac{(kv_E)^2}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2} - \frac{1}{2} \frac{[kv_E]^2}{c^2 k^2} \right\}, \quad \omega_{Le} \gg kv_{Te} \gg |\omega|, \quad (21.35)$$

$$\omega = -i \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\omega_{Li}^2}{kv_{Ti}} \left\{ k^2 r_{De}^2 + k^2 r_{Di}^2 + \frac{1}{2} \frac{(kv_E)^2}{\omega_0^2 - \omega_{Le}^2} - \frac{1}{2} \frac{[kv_E]^2}{c^2 k^2} \right\}, \quad |\omega| \ll kv_{Ti}. \quad (21.36)$$

Последняя формула имеет место для значений волновых векторов, для которых мала фигурная скобка правой части (21.36). Из формул (21.34) — (21.36) вытекает, что влияние непотенциальности возмущений сказывается лишь для волновых векторов, распространяющихся в направлении, почти перпендикулярном амплитуде внешнего электрического поля. Непотенциальная неустойчивость, могущая проявляться при $\omega_0 \gg \omega_{Le}$, например, для частот внешнего поля, значительно превышающих ленгмюровскую частоту электронов, будет иметь место для колебаний с волновыми векторами, лежащими в малой области углов $\delta\theta \lesssim \omega_0/(ck) \ll 1$ почти поперек внешнего поля E_0 . Аналогичное заключение может быть получено и при рассмотрении, обобщающем приведенное к резонансной неустойчивости, описываемой формулами (21.30) — (21.32).

В заключение этого параграфа подчеркнем, что если при рассмотрении неустойчивости относительно развития потенциальных возмущений параметрическая неустойчивость прозрачной плазмы ($\omega_0 > \omega_{Le}$) в сравнительно широкой области частот оказывалась возможной лишь при $T_e > T_i$ (см. § 6), то, как теперь мы видим, параметрическая неустойчивость относительно раскачки непотенциальных возмущений возможна и в изотермической прозрачной плазме.

§ 22. Параметрическая непотенциальная неустойчивость плазмы в сильном высокочастотном электрическом и постоянном магнитном полях

Теория, обобщающая результаты, изложенные в предыдущем параграфе на случай плазмы, находящейся в магнитном поле, была сформулирована в работах [41] и [43]. Эта теория, естественно, оказывается более громоздкой из-за необходимости учета влияния магнитного поля. Однако в принципе ее построение подобно тому, что из-

лагалось в § 21. Определенная аналогия может быть усмотрена и в результатах. Это особенно легко видно тогда, когда как это было принято в работе [41], высокочастотное электрическое поле перпендикулярно постоянному магнитному полю \mathbf{B} , а волновые векторы возмущений ориентированы вдоль \mathbf{B} . Тогда, в частности для нерезонансной непотенциальной неустойчивости, имеем [41]

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{4} \left(\frac{eE_0}{m_e c} \right)^2 \frac{C(k)}{\omega_0^2 - \Omega_e^2}, \quad |\omega| \gg kv_{Te}, \quad (22.1)$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_{Li}^2}{4} \frac{1}{1 + k^2 r_{De}^2} \left[4k^2 r_{De}^2 + \left(\frac{eE_0}{m_e c} \right)^2 \frac{C(k)}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \right],$$

$$kv_{Te} \gg |\omega| \gg kv_{Ti}, \quad (22.2)$$

где

$$C(k) = \frac{(\omega_1 - \Omega_e) c^2 k^2}{(\omega_0^2 - c^2 k^2)(\omega_1 + \Omega_e) - \omega_1 \omega_{Le}^2} + \frac{(\omega_1 + \Omega_e) c^2 k^2}{(\omega_0^2 - c^2 k^2)(\omega_1 - \Omega_e) - \omega_1 \omega_{Le}^2}, \quad (22.3)$$

Далее, для резонансной неустойчивости, возникающей при приближении значения частоты внешнего электрического поля к электронной ленгмюровской ($\omega_0 = \omega_{Le} - \Delta$), оказывается, что при наличии магнитного поля область расстройек, в которой имеет место нарастание непотенциальных возмущений, определяется следующими неравенствами:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{eE_0}{m_e c} \right)^2 \frac{\omega_{Le}}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \left(\frac{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}{\omega_{Le}^2 - \Omega_e^2} - \frac{1}{2} \right) <$$

$$< \Delta < \frac{1}{4} \left(\frac{eE_0}{m_e c} \right)^2 \frac{\omega_{Le}}{\omega_0^2 - \Omega_e^2} \left(\frac{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}{\omega_{Le}^2 - \Omega_e^2} + \frac{1}{2} \right). \quad (22.4)$$

При этом максимальный инкремент имеет место при частоте

$$\omega_0 = \omega_{Le} \left\{ 1 - \left(\frac{eE_0}{2m_e c} \right)^2 \frac{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}{(\omega_{Le}^2 - \Omega_e^2)^2} \right\} \quad (22.5)$$

и равен [41]

$$\gamma = \frac{1}{8} \left| \frac{eE_0}{m_e c} \right| \frac{\omega_{Le}}{\omega_{Le}^2 - \Omega_e^2}. \quad (22.6)$$

Для длинноволновой неустойчивости, аналог которой в отсутствие магнитного поля описывается формулами

(21.27) — (21.29), теперь можно утверждать [41], что нарастающими будут возмущения с волновыми векторами, определяющимися уравнением

$$k^2 c^2 = (\omega_{Le} - \omega_0)^2 - \frac{\omega_{Le}^2 (\omega_{Le} - \omega_0)}{\omega_{Le} - \omega_0 + \Omega_e}, \quad (22.7)$$

При этом для частоты возникающих колебаний имеем

$$\omega = \omega_p + \Delta, \quad |\Delta| \ll \omega_p, \quad (22.8)$$

$$\Delta^2 = -\frac{1}{16} \left(\frac{eE_0}{m_e c} \right)^2 \frac{\omega_{Le} \left[(\omega_{Le} - \omega_0)^2 - \frac{\omega_{Le}^2 (\omega_{Le} - \omega_0)}{\omega_{Le} - \omega_0 + \Omega_e} \right]}{(\omega_0 - \Omega_e)^2 \left[2(\omega_{Le} - \omega_0) - \frac{\Omega_e \omega_{Le}^2}{(\omega_{Le} - \omega_0 + \Omega_e)^2} \right]}. \quad (22.9)$$

Отметим, что наличие резонансной зависимости формул (22.1) — (22.9), отвечающей электронному циклотронному резонансу, облегчает возникновение неустойчивости в плазме, находящейся в магнитном поле.

Коснемся результата, полученного в работе [43], относящегося к возмущениям, распространяющимся поперек сильного магнитного поля ($|\Omega_e| \gg \omega_0$). При этом было показано, что непотенциальная неустойчивость возможна для колебаний с волновыми векторами, удовлетворяющими соотношению

$$\omega_{Le}^2 + c^2 k^2 = (\omega_0 - \omega_A)^2. \quad (22.10)$$

Здесь частота альфвеновских волн имеет обычный вид

$$\omega_A^2 = k^2 v_A^2 \left(1 + \frac{v_A^2}{c^2} \right)^{-1} \quad (22.11)$$

и $v_A^2 = B^2 / (4\pi n_i m_i)$. Соответственно для частоты и инкремента нарастающих колебаний имеем ($\gamma \ll \omega_A$)

$$\omega = \frac{k v_A}{\sqrt{1 + \frac{v_A^2}{c^2}}}, \quad (22.12)$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \left| \frac{eE_0}{m_e c} \right| \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0 |\Omega_e|} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \right) \frac{c^2}{v_A^2} - 1}}{1 + \frac{c^2}{v_A^2} - \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \right) \frac{c^2}{v_A^2}}} \right\}^{1/2}. \quad (22.13)$$

Такая неустойчивость, как это нетрудно понять из формулы (22.10), соответствует возникновению из волны внешнего поля двух волн с одинаковыми длинами, одна из которых представляет собой поперечную волну со спектром $\sqrt{\omega_{Le}^2 + c^2 k^2}$, а вторая является альфвеновской волной. Очевидно, что аналогичная распадная трактовка может быть дана и в случае (22.7).

Остановимся также на результате работы Андреева [131], связанном с параметрическим резонансом плазмы для частоты поля накачки в области $\omega_{Le} < \omega_0 < |\Omega_e|$, когда в плазме возникает собственная высокочастотная непотенциальная волна и низкочастотная ионная потенциальная, распространяющиеся вдоль магнитного поля. При этом для порога неустойчивости получено [131]:

$$\frac{v_{E, \text{пор}}^2}{v_{Te}^2} = 2 \sqrt{8\pi} \frac{v_{ei} \omega_{Li}}{\omega_0 \omega_{Le}}. \quad (22.14)$$

На пороге возникают волны с волновым вектором

$$k_0^2 \approx \frac{\omega_n^2}{c^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{c^2} \frac{\omega_n}{|\Omega_e| - \omega_0}. \quad (22.15)$$

Это же значение соответствует максимуму инкремента, для которого имеем

$$\gamma_{\text{max}} = \frac{v_E^2 - v_{E, \text{пор}}^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega_s \omega_s(k_0)}{\Gamma}. \quad (22.16)$$

Здесь Γ — наибольший из декрементов затухания ионно-звуковой волны или высокочастотной.

С увеличением интенсивности поля накачки зависимость максимального инкремента меняется:

$$\gamma_{\text{max}} \approx \frac{1}{4} \frac{v_E - v_{E, \text{пор}}}{v_{Te}} \sqrt{\omega_0 \omega_s(k_0)} \gg \Gamma, \quad (22.17)$$

а при $v_E / v_{Te} \gg 4 \sqrt{\omega_s(k_0) / \omega_0}$ получаем

$$\gamma_{\text{max}} \approx \frac{\sqrt{3}}{4^{3/4}} \omega_0 \left[\frac{v_E}{v_{Te}} \frac{\omega_s(k_{\text{max}})}{\omega_0} \right]^{2/3}, \quad \omega = \sqrt{\frac{5}{3}} \gamma_{\text{max}}, \quad (22.18)$$

где $k_{\text{max}} \approx k_0$.

Помимо этого, как показано в работе [131], возможно развитие аperiодического потенциального возмущения совместно с собственной непотенциальной волной. Для порога такой неустойчивости имеет место выражение

$$\frac{v_E^2}{v_{Te}^2} = 8 \left(1 + \left| \frac{e}{e_i} \right| \left| \frac{T_i}{T_e} \right| \frac{\gamma_{ei}}{\omega} \right). \quad (22.19)$$

Соответственно пороговый волновой вектор дается формулой (22.15), а для максимального инкремента в околопороговой области имеем

$$\gamma_{\max} = (v_E^2 - v_{E, \text{пор}}^2) \omega_0 \{8v_{Te}^2 (1 + |eT_i/e_iT_e|)\}^{-1}.$$

С ростом интенсивности поля накачки максимальный инкремент возрастает, переходя в область изменения по закону $E_0^{2/3}$.

§ 23. Дисперсионное уравнение возмущений в плазме, находящейся в монохроматическом электромагнитном поле конечной длины волны

Всюду в предшествующем тексте мы пренебрегали неоднородностью внешнего поля в плазме. Такое пренебрежение позволило нам рассматривать предел сильного внешнего поля. В то же время необходимость в рассмотрении эффектов, связанных с неоднородностью поля накачки при его параметрическом взаимодействии с плазмой, практически не возникает в задачах возбуждения продольного поля, прежде всего потому, что соответствующие длины продольных волн оказываются сравнительно малыми. Напротив, в ряде случаев параметрического воздействия электромагнитного поля на плазму, связанных с возбуждением поперечных волн, как это было видно в предыдущих двух параграфах, возбуждаемые колебания могут иметь длины волн, сравнимые с длинами волн внешнего поля. Поэтому имеет смысл тщательнее рассмотреть роль эффектов конечной длины волны поля накачки. Заметим здесь, что Волков [40], рассматривая неустойчивость плазмы в поле монохроматической волны, обнаружил существенное резонансное увеличение инкремента непотенциальной неустойчивости, связанное с ко-

нечной длиной волны внешнего поля. Последовательная теория подобных эффектов стала возможна после работы Горбунова [44], в которой было получено общее дисперсионное уравнение возбуждений плазмы, находящейся в монохроматическом поле конечной длины волны, учитывающее влияние такого поля с точностью до квадратичных членов. Аналогичное уравнение, но лишь для продольных возмущений, дано в работе [15]. Однако, как уже говорилось, основные эффекты конечной длины волны поля накачки проявляются именно для поперечных возмущений плазмы. Ниже в этом параграфе мы изложим результаты Горбунова [44] по выводу дисперсионного уравнения плазменных возбуждений, учитывающего конечную длину волны внешнего поля.

Будем исходить из того, что в основном состоянии плазмы имеется электромагнитное поле монохроматической волны

$$\left. \begin{aligned} E^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \\ B^{(0)}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{\omega_0} [\mathbf{k}_0 E_0] \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (23.1)$$

Пренебрегая столкновениями, для функций распределения частиц плазмы в основном состоянии $f_\alpha^{(0)}$ имеем

$$\frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left(\mathbf{E}^{(0)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}^{(0)}] \right) \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = 0. \quad (23.2)$$

При решении такого уравнения будем считать, что поле (23.1) слабо возмущает не зависящее от времени пространственно однородное распределение $f_{\alpha 0}(|\mathbf{p}|)$. (Ниже в конкретных приложениях это распределение будет считаться максвелловским.) Тогда для установившегося распределения (чему соответствует предположение адиабатического включения поля накачки при $t = -\infty$) с точностью до квадратичных по внешнему полю слагаемых находим

$$f_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = f_{\alpha 0}(|\mathbf{p}|) + \Delta f_\alpha(\mathbf{p}) - \frac{e_\alpha \alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} E_{0j} \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad (23.3)$$

где

$$\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \equiv \frac{1}{\omega} \{k_i v_j + (\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) \delta_{ij}\}, \quad (23.4)$$

$$\Delta f_{\alpha}(\mathbf{p}) = \frac{e_{\alpha}^2}{4\omega_0} E_{0j} E_{0n} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_j} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) k_{0m} v_n}{(\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v})^2} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_m} \right] \right\}. \quad (23.5)$$

Здесь нами отброшены поправки к функции распределения, квадратичные по внешнему полю и изменяющиеся во времени с удвоенной частотой поля накачки, поскольку в дисперсионном уравнении они приводят к поправкам высшего порядка по степеням поля.

Малые отклонения функций распределения от установившихся (23.3) подчиняются кинетическим уравнениям

$$\frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) E_{0j} \frac{\partial \delta f_{\alpha}}{\partial p_i} \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + \\ + e_{\alpha} \left(\delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left\{ f_{\alpha 0} + \Delta f_{\alpha} - e_{\alpha} \frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} E_{0j} \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}) \right\} = 0. \quad (23.6)$$

Для компонент разложения Фурье отсюда имеем

$$(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}) \delta f_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) + \\ + \frac{i}{2} e_{\alpha} \alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) E_{0j} \frac{\partial}{\partial p_i} [\delta f_{\alpha}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{p}) + \\ + \delta f_{\alpha}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{p})] + i e_{\alpha} \alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p_i} [f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) + \Delta f_{\alpha}(\mathbf{p})] - \frac{1}{2} e_{\alpha}^2 \{ \alpha_{nl}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \times \\ \times \delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) - \alpha_{nl}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \times \\ \times \delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \} E_{0j} \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 \mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \right] = 0. \quad (23.7)$$

Уравнение (23.6) позволяет найти δf_{α} с точностью до степеней, квадратичных по внешнему полю и линейных по неравновесному полю. При этом можно записать следующее приближенное решение:

$$\delta f_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) = - i e_{\alpha} \frac{\alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) + \\ + \frac{e_{\alpha}^2 E_{0j}}{2(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v})} \left\{ (\alpha_{nl}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \right] - \alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v) \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\alpha_{nl}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0, v)}{\omega + \omega_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_n} \right] \delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) - \\
& - \left(\alpha_{nl}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, v) \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial p_i} \right] + \right. \\
& + \alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v) \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\alpha_{nl}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, v)}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_n} \right] \times \\
& \times \delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \left. \right\} - \frac{i e_{\alpha} \alpha_{ij}(\omega, \mathbf{k}, v)}{\omega - \mathbf{k} v} \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial \Delta f_{\alpha}(p)}{\partial p_i} + \\
& + \frac{i e_{\alpha}^3 \alpha_{rs}(\omega, \mathbf{k}, v)}{4 \omega - \mathbf{k} v} E_{0s} E_{0j} \delta E_l(\omega, \mathbf{k}) \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial p_r} \left\{ \frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega + \omega_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\alpha_{nl}(\omega, \mathbf{k}, v)}{\omega - \mathbf{k} v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_n} \right] + \right. \\
& + \frac{\alpha_{nl}(\omega, \mathbf{k}, v)}{\omega + \omega_0 - (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \right] + \\
& + \frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\alpha_{nl}(\omega, \mathbf{k}, v)}{\omega - \mathbf{k} v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_n} \right] - \\
& \left. - \frac{\alpha_{nl}(\omega, \mathbf{k}, v)}{\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v} \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\alpha_{ij}(\omega_0, \mathbf{k}_0, v)}{\omega_0 - \mathbf{k}_0 v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \right] \right\}. \quad (23.8)
\end{aligned}$$

Вычисляя с помощью этого выражения плотность электрического тока, получаем

$$\begin{aligned}
j_k = & - \frac{i \omega}{4\pi} \left([\varepsilon_{kj}(\omega, \mathbf{k}) + \Delta \varepsilon_{kj}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ij}] \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) + \right. \\
& + \frac{1}{2} E_{0j} [S_{klj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\
& + S_{klj}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)] + \\
& + \frac{1}{4} E_{0s} E_{0j} \delta E_l(\omega, \mathbf{k}) [V_{kslj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \\
& \left. + V_{kslj}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0)] \right). \quad (23.9)
\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения (ср. [61]):

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon^{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}), \quad (23.10)$$

$$\begin{aligned}
S_{klj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = & \varepsilon_{klj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \\
& + \varepsilon_{kjl}(\omega, \mathbf{k}; \omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0), \quad (23.11)
\end{aligned}$$

$$V_{kslj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \varepsilon_{kslj}(\omega, \mathbf{k}; \omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \varepsilon_{ksjl}(\omega, \mathbf{k}; \omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0; \omega, \mathbf{k}), \quad (23.12)$$

$$\Delta \varepsilon_{kj}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_k}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \alpha_{nj}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v}) \frac{\partial \Delta f_{\alpha}}{\partial p_n}, \quad (23.13)$$

$$\varepsilon_{klij}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = -i \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^3}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_k}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \times \\ \times \alpha_{nl}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\frac{\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_i} \right], \quad (23.14)$$

$$\varepsilon_{krjl}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; \omega_1, \mathbf{k}_1) = \\ = - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^4}{\omega} \int d\mathbf{p} \frac{v_k}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \alpha_{nr}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial p_n} \left\{ \frac{\alpha_{ij}(\omega_0 - \omega_1, \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1, \mathbf{v})}{\omega_0 - \mathbf{k}_0\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{\sigma_{sl}(\omega_1, \mathbf{k}_1, \mathbf{v})}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial p_s} \right] \right\}. \quad (23.15)$$

Для фурье-компонент электрического поля уравнения Максвелла могут быть теперь записаны в виде

$$T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \delta E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} E_{0j} [S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) + S_{ilj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \delta E_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)],$$

где

$$T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] + \Delta \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{4} E_{0s} E_{0r} [V_{isrj}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + V_{isrj}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0)]. \quad (23.17)$$

С рассматриваемой нами точностью до квадратичных членов по степеням напряженности E_0 внешнего электрического поля получаем из (23.16) следующее дисперсионное уравнение [44] *):

$$\text{Det} \left\{ T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{1}{4} E_{0n} E_{0r} [S_{imn}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \right. \\ \times T_{mk}^{-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) S_{kjr}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) + \\ + S_{imn}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) T_{mk}^{-1}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \times \\ \left. \times S_{kjr}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \right\} = 0. \quad (23.18)$$

*) Отличие от уравнения (1.13) работы [44] в перестановке индексов m, n и j, r в каждой паре,

Это дисперсионное уравнение мы используем ниже для изучения свойств низкочастотных возмущений плазмы, когда $\omega_0 \gg |\omega|$. Кроме того, будем считать, что фазовая скорость волны поля накачки (23.1) много больше тепловой скорости частиц, а также $\omega_0 \gg |\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha|$. Тогда в нелинейных тензорах ε_{ikj} и ε_{ikjl} можно ограничиться лишь вкладом электронов. При этом несложное упрощение дает

$$S_{irn}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = -S_{nir}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \approx \\ \approx -i \frac{e}{m_e \omega_0^2} \delta_{rn} k_i \delta \varepsilon_e^l(\omega, k), \quad (23.19)$$

$$V_{kslj}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) + V_{kslj}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \\ \pm \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \approx \delta_{ks} \delta_{lj} \frac{e^2 k^2}{m_e^2 \omega_0^4} \left(1 - \frac{\omega \mathbf{k} \mathbf{k}_0}{\omega_c k^2}\right) \delta \varepsilon_e^l(\omega, k). \quad (23.20)$$

В сравнении с последним выражением вклад $\Delta \varepsilon$ в тензор T оказывается пренебрежимо малым. Поэтому

$$T_{ij}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) = \left[\delta_{ij} - \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2} \right] \times \\ \times \left[\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}{(\omega \pm \omega_0)^2} \right] + \\ + \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2} \varepsilon^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) + \\ + (\mathbf{v}_E)_i (\mathbf{v}_E)_j \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega \mathbf{k} \mathbf{k}_0}{\omega_0 k^2}\right) \delta \varepsilon_e^l(\omega, k). \quad (23.21)$$

Соответственно этому имеем

$$T_{ij}^{-1}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) = \frac{1}{\varepsilon^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)} \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2} + \\ + \frac{\delta_{ij} - \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}}{\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}{(\omega \pm \omega_0)^2}} - \\ - \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega \mathbf{k} \mathbf{k}_0}{\omega_0 k^2}\right) \delta \varepsilon_e^l(\omega, k) \times \\ \times \left\{ \frac{(\mathbf{v}_E)_i (\mathbf{v}_E)_j}{\left[\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}{(\omega \pm \omega_0)^2} \right]^2} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (v_E)_j + (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j (v_E)_i}{\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} + \mathbf{k})^2}{(\omega \pm \omega_0)^2}} \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, v_E)}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2} \times \\
& \times \left[\frac{1}{\varepsilon^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)} - \frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}{(\omega \pm \omega_0)^2}} \right] + \\
& + \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_i (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)_j}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2} \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}, v_E)^2}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k})^2} \times \\
& \times \left[\frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k})^2}{(\omega \pm \omega_0)^2}} - \frac{1}{\varepsilon^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k})} \right]^2 \times \\
& \times \left\{ 1 + \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega \mathbf{k} \mathbf{k}_0}{\omega_0 k^2} \right) \delta \varepsilon_e^l(\omega, k) \left[\frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}, v_E]^2}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k})^2} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \frac{1}{\varepsilon^{tr}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) - \frac{c^2 (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2}{(\omega \pm \omega_0)^2}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}, v_E)^2}{(\mathbf{k} \pm \mathbf{k})^2} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)} \right] \right\}^{-1}. \quad (23.22)
\end{aligned}$$

Это выражение по форме отличается от приведенного в работе [44]. Используя формулы (23.10) и (23.19), нетрудно убедиться, что дисперсионное уравнение (23.18) распадается на уравнение для поперечных волн, на которые внешнее поле волны не оказывает влияния, и на дисперсионное уравнение продольных низкочастотных возмущений, имеющее следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^l(\omega, k) = \frac{k^2}{4\omega_0^2} [\delta \varepsilon_e^l(\omega, k)]^2 v_{E,i} v_{E,j} [T_{ij}^{-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\
+ T_{ij}^{-1}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)], \quad (23.23)
\end{aligned}$$

где T_{ij}^{-1} определено формулой (23.22). В явном виде это дисперсионное уравнение записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \delta \varepsilon_i^l(\omega, k)}{\delta \varepsilon_e^l(\omega, k)} - 1 + \left(1 + \frac{k^2 \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\omega_0^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \left\{ \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, v_E)^2}{\varepsilon^l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, v_E]^2 (\omega - \omega_0)^2}{(\omega - \omega_0)^2 \varepsilon^{tr}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - c^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \right\} \right)^{-1} + \\
+ \left(1 + \frac{k^2 \delta \varepsilon_e^l(\omega, k)}{4\omega_0^2 (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \left\{ \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, v_E)^2}{\varepsilon^l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, v_E]^2 (\omega + \omega_0)^2}{(\omega + \omega_0)^2 \varepsilon^{tr}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) - c^2 (\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \right\} \right)^{-1} = 0 \quad (23.24)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^l(\omega, k) + [1 + \delta\varepsilon_i^l(\omega, k)] \delta\varepsilon_e^l(\omega, k) \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left\{ \frac{(k - k_0, v_E)^2}{(k - k)^2} \times \right. \\
 & \times \frac{1}{\varepsilon^l(\omega - \omega_0, k - k)} + \\
 & + \frac{[k - k_0, v_E]^2 (\omega - \omega_0)^2}{(k - k)^2 [(\omega - \omega_0)^2 e^{tr}(\omega - \omega_0, k - k) - c^2 (k - k)^2]} + \\
 & + \frac{(k + k, v_E)^2}{(k + k)^2} \frac{1}{\varepsilon^l(\omega + \omega_0, k + k_0)} + \\
 & + \left. \frac{[k + k_0, v_E]^2 (\omega + \omega_0)^2}{(k + k)^2 [(\omega + \omega_0)^2 e^{tr}(\omega + \omega_0, k + k) - c^2 (k + k)^2]} \right\} + \\
 & + [1 + \delta\varepsilon_i^l(\omega, k) - \delta\varepsilon_e^l(\omega, k)] \frac{k^4 [\delta\varepsilon_e^l(\omega, k)]^2}{16\omega_0^4 (k - k_0)^2 (k + k)^2} \times \\
 & \times \left\{ \frac{(k - k, v_E)^2}{\varepsilon^l(\omega - \omega_0, k - k)} + \right. \\
 & + \left. \frac{[k - k_0, v_E]^2 (\omega - \omega_0)^2}{(\omega - \omega_0)^2 e^{tr}(\omega - \omega_0, k - k) - c^2 (k - k)^2} \right\} \times \\
 & \times \left\{ \frac{(k + k, v_E)^2}{\varepsilon^l(\omega + \omega_0, k + k)} + \right. \\
 & + \left. \frac{[k + k_0, v_E]^2 (\omega + \omega_0)^2}{(\omega + \omega_0)^2 e^{tr}(\omega + \omega_0, k + k) - c^2 (k + k)^2} \right\} = 0. \quad (23.25)
 \end{aligned}$$

Наличие слагаемых $\sim \frac{4}{v_E}$ отличает это дисперсионное уравнение от полученного Горбуновым [44]. Такие слагаемые существенны, например, тогда, когда возможны одновременно возмущения ω, k и $\omega \pm \omega_0, k \pm k_0$.

Подобный изложенному в этом параграфе вывод дисперсионного уравнения возмущений в плазме, находящейся помимо поля монохроматической волны также в постоянном магнитном поле, дан Пустоваловым и Романовым [134] (см. также [135—139]).

§ 24. Вынужденное рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (ВРМБ), комбинационное рассеяние с участием высокочастотной плазменной волны и сильная связь электромагнитного поля с плазмой

В качестве приложения дисперсионного уравнения (23.25) для возмущений в плазме, находящейся в монохроматическом поле конечной длины волны, рассмотрим вытекающие из него следствия в том случае, когда волна

накачки имеет поперечную поляризацию ($\mathbf{k}_0 \mathbf{E}_0 = \hat{0}$), а ее частота превышает плазменную ($\omega_0 > \omega_p$).

Прежде всего, следуя работам [44, 45], рассмотрим такой хорошо изученный в обычной теории рассеяния света процесс, который связан с возникновением в рассеянном поперечном излучении сателлита, обусловленного звуковой волной. Это — рассеяние Манделъштама — Бриллюэна. Плазму будем считать неизотермической ($T_e \gg T_i$), что отвечает возможности распространения в отсутствие волны накачки ионно-звуковых волн со спектром

$$\omega_s = \frac{\omega_{Li} \cdot kr_{De}}{\sqrt{1 + k^2 r_{De}^2}}.$$

Имея в виду, что для волны накачки можно использовать соотношение $\omega_0^2 = \omega_{Le}^2 + c^2 k_0^2$, считая при этом, что частота поля накачки заметно отличается от электронной ленгмюровской, и предполагая малость ω по сравнению с ω_0 , можно записать уравнение (23.25) в следующем виде:

$$\begin{aligned} k^2 r_{De}^2 + \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{Li}^2} - i \left[k^4 r_{De}^4 \delta \epsilon_e''(\omega, k) + \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_{Li}^2)^2} \delta \epsilon_i''(\omega, k) \right] = \\ = \frac{k^2}{4} \left\{ \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \frac{1}{2\omega\omega_0 + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0) + i\omega_0^2 e^{i\tau''}(\omega_0)} - \right. \\ \left. - \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \frac{1}{2\omega\omega_0 - c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0) + i\omega_0^2 e^{i\tau''}(\omega_0)} \right\}. \quad (24.1) \end{aligned}$$

Здесь учтена возможность пренебрежения пространственной дисперсией поперечной диэлектрической постоянной. Кроме того, считаем, что (ω/k) , велико по сравнению с тепловой скоростью ионов и мало по сравнению с тепловой скоростью электронов.

Отметим, что удержанные слагаемые в правой части формулы (24.1) отвечают относительной малости знаменателей, что имеет место в окрестности выполнения уравнений

$$(\omega \pm \omega_0)^2 e^{i\tau}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) = c^2(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0)^2. \quad (24.2)$$

Выполнение этого уравнения соответственно для двух волн означает возможность их распространения в плазме. Имея в виду согласно (24.1), что при малой напряженности поля волны накачки частота мало отличается от ионно-звуковой, можно утверждать, что в этом случае

уравнение (24.2) соответствует возможности распространения волны с частотой $\omega_0 - \omega_s$, представляющей собой стоксову («красную») компоненту рассеяния Манделъштама — Бриллюэна, и волны с частотой $\omega_0 + \omega_s$, представляющей антистоксову («фиолетовую») компоненту. Рассмотрим подробнее область околопороговых полей. При этом пусть

$$\omega = \pm (\omega_s + \delta\omega) + i\gamma, \quad |\delta\omega| \text{ и } \gamma \ll \omega_s. \quad (24.3)$$

Тогда, пренебрегая малыми порядка (ω/ω_0) , получаем из (24.1)

$$\begin{aligned} \delta\omega = \mp & \frac{\omega_s}{8r_{De}^2(1+k^2r_{De}^2)} \left\{ \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \times \right. \\ & \times \frac{2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)}{[2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)]^2 + 4\omega_0^2(\gamma + \tilde{\gamma})^2} + \\ & \left. + \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \frac{-2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)}{[-2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)]^2 + 4\omega_0^2(\gamma + \tilde{\gamma})^2} \right\}, \end{aligned} \quad (24.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma_s = & \frac{\omega_s\omega_0(\gamma + \tilde{\gamma})}{4(1+k^2r_{De}^2)r_{De}^2} \left\{ \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \times \right. \\ & \times \frac{1}{[2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)]^2 + 4\omega_0^2(\gamma + \tilde{\gamma})^2} - \\ & \left. - \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \frac{1}{[-2\omega_0(\omega_s + \delta\omega) + c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)]^2 + 4\omega_0^2(\gamma + \tilde{\gamma})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (24.5)$$

Здесь $\tilde{\gamma} = (v_{ei}\omega_{Le}^2/2\omega_0^2)$ — декремент затухания поперечных волн, а γ_s — декремент затухания ионно-звуковых волн.

Согласно этим формулам влияние поля волны накачки становится особенно сильным при $k^2 \approx \pm 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0$. Поэтому представляется важным детально рассмотреть следствия формул (24.4) и (24.5), возникающие в таком резонансном случае. При этом, имея в виду симметрию этих формул, достаточно рассмотреть случай

$$k^2 = 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0, \quad (24.6)$$

для которого формула (24.5) дает

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(\gamma_s - \tilde{\gamma})^2 + \frac{\omega_s\omega_0}{4r_{De}^2(1+k^2r_{De}^2)} \left[r_E^2 - \frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{k_0^2} \right]} - \right. \\ \left. - (\gamma_s + \tilde{\gamma}) \right\}. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Отсюда следует, что на границе неустойчивости ($\gamma = 0$) имеет место следующее соотношение:

$$\frac{r_E^2}{r_{De}^2} - \frac{(kr_E)^2}{k_0^2 r_{De}^2} = 16 \frac{\gamma_s \tilde{\gamma}}{\omega_s \omega_0} (1 + k^2 r_{De}^2).$$

Очевидно, что на пороге неустойчивости $kr_E = 0$, а пороговое значение поля определяется формулой [44]

$$\frac{r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2} = 16 \frac{\gamma_s \tilde{\gamma}}{\omega_s \omega_0} (1 + k^2 r_{De}^2), \quad (24.8)$$

правая часть которой должна быть минимизирована.

Будем считать далее, что диссипация ионного звука обусловлена черенковским эффектом на электронах и ионах. Тогда

$$\gamma_s = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}^2 r_{De} k}{\omega_{Le} [1 + k^2 r_{De}^2]^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_{Li}^2 v_{Te}^3}{\omega_{Le}^2 v_{Ti}^3} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{1}{2(k^2 r_{Di}^2 + r_{Di}^2 / r_{De}^2)} \right] \right\}. \quad (24.9)$$

Используя это выражение, рассмотрим прежде всего случай длин волн нарастающих возмущений, больших дебаевского радиуса электронов ($kr_{De} \ll 1$), когда $\omega_s = kv_s$. Тогда, например, формула (24.8) принимает следующий вид:

$$\frac{r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2} = \sqrt{8\pi} \frac{v_{ei} \omega_{Li} \omega_{Le}}{\omega_0^3}. \quad (24.10)$$

Правая часть формулы (24.10) не зависит от волнового вектора нарастающих ионно-звуковых колебаний. Поэтому порог оказывается одинаковым для всех волн, удовлетворяющих соотношениям

$$k = 2k_0 \cos \theta, \quad \sin \theta \cos \varphi = 0. \quad (24.11)$$

Здесь θ — угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 , а φ — угол между вектором \mathbf{E}_0 и проекцией вектора \mathbf{k} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{k}_0 . Очевидно, что на пороге неустойчивости могут возбуждаться ионно-звуковые волны, распространяющиеся в плоскости, перпендикулярной вектору напряженности электрического поля волны накачки. При этом максимальное значение волнового вектора

оказывается равным $2k_0$. Такому максимальному значению соответствует рассеяние назад, когда красный (стоксов) сателлит распространяется в обратном направлении по сравнению с волной накачки ($\exp\{i(\omega_0 - \omega_s)t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}\}$)

Вблизи порога неустойчивости правая часть формулы (24.7) может быть разложена по степеням r_E^2 . При этом могут реализоваться два простых предельных случая. Пусть $\gamma_s \gg \tilde{\gamma}$, тогда согласно (24.7) вблизи порога имеем

$$\gamma = \tilde{\gamma} \left\{ \left[\frac{r_E^2}{r_{E, \text{пор}}^2} - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{r}_E)^2}{k_0^2 r_{E, \text{пор}}^2} \right] - 1 \right\}, \quad (24.12)$$

в противоположном пределе ($\tilde{\gamma} \gg \gamma_s$)

$$\gamma = \gamma_s \left\{ \left[\frac{r_E^2}{r_{E, \text{пор}}^2} - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{r}_E)^2}{k_0^2 r_{E, \text{пор}}^2} \right] - 1 \right\}. \quad (24.13)$$

Поскольку

$$\frac{\gamma_s}{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{Te} \omega_{Li}^2 \omega_0^3}{c v_{et} \omega_{Le}^4} \frac{kc}{\omega_0}, \quad (24.14)$$

а $kc \sim \omega_0$, то нетрудно понять, что оба случая (24.12) и (24.13) могут отвечать реальным условиям. Здесь следует заметить, что в обоих случаях максимум инкремента имеет место для ионно-звуковых волн, распространяющихся поперек электрического поля накачки. С другой стороны, в случае (24.12) максимальное значение инкремента имеет место в сравнительно широкой области волновых векторов, в то время как формула (24.12) соответствует максимальному значению инкремента при максимальном значении волнового вектора $k = 2k_0$, что отвечает рассеянию назад.

Для того чтобы проиллюстрировать зависимость инкремента, обусловленную нарушением равенства (24.6), рассмотрим следствия, вытекающие из уравнения (24.5) в пределе $\tilde{\gamma} \gg \gamma_s$. Тогда имеем

$$\gamma = \gamma_s \left\{ \left[\frac{r_E^2}{r_{E, \text{пор}}^2} - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{r}_E)^2}{(k - k_0)^2 r_{E, \text{пор}}^2} \right] \left[1 + \frac{c^4 (k^2 - 2k_0 k)^2}{4\omega_0^2 \tilde{\gamma}^2} \right]^{-1} - 1 \right\}. \quad (24.15)$$

Отсюда ясно, что изменение $\cos^2 \theta [(k/2k_0)^2 - \cos^2 \theta]^2$ на величину порядка $(\tilde{\gamma}/\omega_0)^2 [(r_E/r_{E, \text{пор}})^2 - 1]$ выводит ионно-

звуковые волны из области нарастания возмущений. Малость отношения $\tilde{\gamma}/\omega_0$ позволяет говорить об узкой окрестности резонанса (24.6). Принятое нами предположение о длинных волнах ионно-звуковых волн ($kr_{De} \ll 1$), использованное при получении формул (24.10) — (24.15), соответствует ограничению на плотность плазмы. Действительно, это условие может быть записано в виде $k^2 r_{De}^2 \cos^2 \theta \ll 1$, что эквивалентно неравенству

$$\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} \gg \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{c^2 h_0^2}{\omega_0^2} \cos^2 \theta. \quad (24.16)$$

Это означает, что в достаточно плотной плазме, когда плотность плазмы больше значения, определяемого равенством

$$\frac{\omega_{Le}^2}{\omega_0^2} = \frac{v_{Te}^2}{c^2}, \quad (24.17)$$

возбуждаются только длинноволновые ионно-звуковые колебания. Напротив, при меньшей плотности плазмы становится возможным параметрическое нарастание коротковолновых ионно-звуковых возбуждений. С уменьшением плотности плазмы расширяется область значений kr_{De} , для которых возможно нарастание ионно-звуковых волн. В то же время следует заметить, что с ростом волнового вектора (при $kr_{De} > 1$) правая часть формулы (24.8) убывает. Однако такое убывание продолжается лишь до тех пор, пока не становится важным черенковское взаимодействие с ионами, описываемое вторым слагаемым в фигурной скобке (24.9). Иными словами, до тех пор, пока волновой вектор не достигнет значения k_1 , определяемого формулой

$$1 \gg k_1^2 r_{Di}^2 = \frac{1}{\Lambda_0} \equiv \left[\ln \frac{\omega_{Li}^4 v_{Te}^6}{\omega_{Le}^4 v_{Ti}^6} \right]^{-1} \gg \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2}. \quad (24.18)$$

Возбуждение ионно-звуковых волн с волновым вектором k_1 становится возможным при значении плотности плазмы, определяющейся соотношением

$$\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_0^2} = 4 \frac{v_{Ti}^2}{c^2} \Lambda_0. \quad (24.19)$$

Таким образом, если плотность плазмы лежит между значениями, определяемыми формулами (24.17) и (24.19), то

в околопороговой области волновой вектор наиболее быстро нарастающих возмущений равен $2\mathbf{k}_0$, что отвечает рассеянию назад. Соответственно пороговое значение поля накачки дается формулой

$$\frac{r_{E, \text{пор}}^2}{r_{De}^2} = \frac{4 \sqrt{2\pi} v_{ei} \omega_{Li} \omega_{Le}}{\omega_0^3 [1 + 4k_0^2 r_{De}^2]^{1/2}}. \quad (24.20)$$

Если плотность плазмы становится меньше значения (24.19), то в околопороговой области наиболее быстро растут волны с $k = k_1 = \Lambda_0^{-1/2} r_{Di}^{-1}$ и $\cos \theta = (2k_0 r_{Di} \Lambda_0^{1/2})^{-1}$. Эти значения убывают с уменьшением плотности плазмы*). Для порогового поля имеем соотношение

$$\frac{m v_{E, \text{пор}}^2}{\kappa \Gamma_e} = \sqrt{8\pi \Lambda_0} \frac{v_{Ti} v_{ei}}{v_{Te} \omega_0}. \quad (24.21)$$

Согласно формуле (24.7) при достаточно сильном поле накачки, когда $\sqrt{\omega_s \omega_0 / (1 + k^2 r_{De}^2)}$ (r_E / r_{De}) превышает γ_s и $\tilde{\gamma}$, инкремент неустойчивости линейно растет с увеличением напряженности поля накачки. Согласно уравнению (24.5) можно записать следующее выражение:

$$\gamma = \frac{1}{4} \times \quad (24.22)$$

$$\times \sqrt{\frac{\omega_s \omega_0}{1 + k^2 r_{De}^2} \left[\frac{r_E^2}{r_{De}^2} - \frac{(\mathbf{k} \mathbf{r}_E)^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 r_{De}^2} \right] - 4 \frac{[2\omega_0 \omega_s + c^2 (k^2 - 2\mathbf{k} \mathbf{k}_0)]^2}{\omega_0^2}}.$$

Это выражение получено при полном пренебрежении малыми диссипативными эффектами, но в то же время при учете расстройки резонанса (24.6). Из формулы (24.22) следует, что область расстройки резонанса, в которой имеется возможность нарастания ионно-звуковых возмущений, по порядку величины определяется соотношением

$$\cos^2 \theta \left(\frac{k}{2k_0} - \cos \theta \right)^2 \sim \frac{\omega_s}{\omega_0} \frac{r_E^2}{r_{De}^2}. \quad (24.23)$$

Правая часть этого соотношения мала по сравнению с единицей.

Заметим здесь, что согласно (24.3) инкремент должен быть мал по сравнению с частотой. Это означает, что

*) Заметим, что $\cos \theta > \sqrt{2\omega_{Li}/\omega_0}$. Это ограничивает рассматриваемую область плотностей плазмы снизу: $\omega_{Li}^2/\omega_0^2 > 16 (v_{Ti}^4/c^4) \Lambda_0^2$.

формула (24.4) может быть использована лишь для полей накачки, удовлетворяющих неравенству $(r_E/r_{De}) < \sqrt{16\omega_s/\omega_0}$, которое отвечает слабому влиянию поля накачки на ионно-звуковые колебания. При этом говорят о слабой связи с электромагнитным полем. В противоположном пределе влияние поля накачки может существенно изменить спектр плазменных колебаний. В этом случае сильной связи, пренебрегая малой диссипацией, можно получить необходимые закономерности с помощью уравнения (24.1), которое тогда принимает следующий вид:

$$\frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_{Li}^2} = \frac{k^2}{4(1 + k^2 r_{De}^2)} \left\{ \frac{[v_E, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0]^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \frac{1}{c^2(k^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0) + 2\omega\omega_0} + \frac{[v_E, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0]^2}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \frac{1}{c^2(k^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0) - 2\omega\omega_0} \right\}. \quad (24.24)$$

Для нерезонансного случая, когда $c^4(k^2 \pm 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2 \gg 4|\omega|^2 \times \omega_0^2$, обозначив $k^2 + k_0^2 = k'^2$ отсюда получаем

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left\{ 1 - \frac{k^2 k'^2 [k'^2 v_E^2 - (\mathbf{k}v_E)^2] - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2 [k^2 v_E^2 + (\mathbf{k}v_E)^2]}{2r_{De}^2 c^2 [(k')^2 - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2] [k^4 - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2]} \right\} \times \left\{ 1 - \frac{k^4 k'^2 [k'^2 v_E^2 - (\mathbf{k}v_E)^2] - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2 [k^2 v_E^2 + (\mathbf{k}v_E)^2]}{2c^2 (1 + k^2 r_{De}^2) [(k')^2 - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2] [k^4 - 4(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2]} \right\}^{-1}. \quad (24.25)$$

В простейшем случае $(\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2 = k^2 k_0^2$ эта формула имеет вид

$$\omega^2 = \omega_s^2 \left\{ 1 - \frac{v_E^2}{2c^2 r_{De}^2 (k^2 - 4k_0^2)} \right\} \left\{ 1 - \frac{v_E^2 k^2}{2c^2 (1 + k^2 r_{De}^2) (k^2 - 4k_0^2)} \right\}^{-1}. \quad (24.26)$$

Отсюда следует, что при выполнении двух следующих соотношений:

$$v_E^2 > 2c^2 r_{De}^2 (k^2 - 4k_0^2) > v_E^2 k^2 r_{De}^2 (1 + k^2 r_{De}^2)^{-1}, \quad (24.27)$$

имеет место аperiодическое нарастание возмущений, что, очевидно, качественно отличается от возбуждения ионно-звуковых волн, имеющего место в приближении слабой связи. Неустойчивость, описываемая формулой (24.26), впервые была теоретически обнаружена Волковым [40].

Инкремент неустойчивости еще более увеличивается в резонансной области и в пределе $|2\omega_0\omega|^2 \gg c^4(k^2 \pm 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2$,

$\omega_{Li}^2 \gg |\omega^2| \gg \omega_s^2$ уравнение (24.24) дает [44]

$$\omega = \frac{1}{4} (\pm 1 + i\sqrt{3}) (\omega_{Li}\omega_0)^{1/3} \left(\frac{k^2 [k \pm k_0, r_E]^2}{(k \pm k_0)^2} \right)^{1/3}. \quad (24.28)$$

Ширина резонансной области дается неравенством

$$\cos \theta \left| \frac{k}{2k_0} - \cos \theta \right| \ll \left(\frac{\omega_{Li} v_E}{\omega_0 c} \right)^{2/3}.$$

Для рассеяния красного спутника назад инкремент и сдвиг частоты даются соответственно мнимой и действительной частями выражения (24.28) при $k = 2k_0$.

Андреев [133] рассмотрел задачу о параметрическом преобразовании поперечной волны накачки в две плазменные волны, одна из которых также является поперечной, а вторая — продольной ленгмюровской электронной волной. Это рассмотрение пригодно и для изотермической плазмы. Используя уравнение (23.25) для случая $k \parallel k_0$, в работе [133] показано, что максимальный инкремент и пороговое значение напряженности электрического поля накачки при $2\omega_{Le} < \omega_0 < \omega_{Le} c/v_{Te}$ определяются формулами

$$\gamma = \frac{v_E^2 - v_{E, \text{пор}}^2}{2c^2} \frac{\omega_0 \omega_{Le}}{v_{ei}} \quad \text{при} \quad \gamma \ll v_{ei}, \quad (24.29)$$

$$\gamma = \frac{v_E}{2c} \sqrt{\omega_0 \omega_{Le}} \quad \text{при} \quad v_{ei} \ll \gamma \ll \omega_{Le}, \quad (24.30)$$

$$v_{E, \text{пор}} = c \frac{2v_{ei}}{\omega_0} \sqrt{\frac{\omega_{Le}}{\omega_0}}. \quad (24.31)$$

Соответственно для волнового вектора нарастающих колебаний имеем $k = 2k_0 = 2\omega_0/c$. Отличие от результатов работы [42] обусловлено учетом конечной длины волны поля накачки. В то же время должно быть ясно, что обсуждаемый в работе Андреева [133] случай параметрического преобразования соответствует комбинационному рассеянию поперечной волны накачки с образованием стоксовой линии $\omega_0 - \omega$ и возбуждением продольной волны с частотой $\omega = \omega_{Le} (1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2)$.

С увеличением интенсивности поля накачки связь между волнами становится сильной. При этом из уравнения (23.25) соответственно [40] имеем

$$\omega^2 = \omega_{Le}^2 \left(1 - \frac{v_E^2}{c^2} \frac{k^2}{k^2 - 4k_0^2} \right). \quad (24.32)$$

ГЛАВА V

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

§ 25. Параметрическое возбуждение поверхностных плазменных волн

В этой главе мы обсудим некоторые свойства плазмы, обусловленные пространственной неоднородностью и проявляющиеся при параметрическом воздействии на плазму мощного электромагнитного поля. Одним из простейших факторов неоднородности является ограниченность плазмы в пространстве и ее отграниченность поверхностями раздела. Следуя работе Алиева и Ферленги [70], рассмотрим в этом параграфе параметрический резонанс в пространственно однородной плазме, но, в отличие от изложенного в предыдущих главах, будем считать, что плазма ограничена поверхностями. Из электродинамики известно, что вблизи границы раздела сред могут локализоваться поверхностные волны [71]. Последнее может в определенных условиях привести к дополнительной возможности параметрического резонанса плазмы.

Пренебрегая тепловым движением частиц плазмы, воспользуемся гидродинамикой холодной плазмы (см. уравнения (1.2)). Границу плазмы будем считать резкой, а плотность плазмы в электрическом поле однородной ($n_\alpha = \text{const}$). Ограничимся рассмотрением того случая, когда вектор однородного электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \times \times \sin \omega_0 t$ ориентирован вдоль границы плазмы, и в этом же направлении ниже будем считать направленной ось координат x . Имея в виду, что под действием поля накачки частицы в отсутствие внешнего магнитного поля колеб-

лются со скоростями $u_\alpha = -(e_\alpha/m_\alpha\omega_0) \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t$, можно записать следующую линеаризованную систему уравнений для малых возмущений холодной плазмы:

$$\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial x} = -\operatorname{div} (n_\alpha \delta v_\alpha), \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial \delta v_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \delta v_\alpha}{\partial x} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_\alpha \mathbf{B}] \right), \quad (25.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (25.3)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} — возмущенные поля, а

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha e_\alpha (n_\alpha \delta v_\alpha + u_\alpha \delta n_\alpha). \quad (25.4)$$

Решение уравнений (25.1) и (25.2) позволяет найти плотность электрического тока

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\alpha x \sin \omega_0 t} \left\{ \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\alpha x \sin \omega_0 t'} \left(\mathbf{E}(t', \mathbf{k}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e_\alpha}{m_\alpha c \omega_0} \cos \omega_0 t' [\mathbf{E}_0, \mathbf{B}(t', \mathbf{k})] \right) + \right. \\ \left. + \frac{i e_\alpha}{m_\alpha \omega_0} \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-i\alpha x \sin \omega_0 t''} \left(\mathbf{k} \mathbf{E}(t', \mathbf{k}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{e_\alpha}{m_\alpha c \omega_0} \cos \omega_0 t'' (\mathbf{k} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}(t', \mathbf{k})]) \right) \right\}. \quad (25.5) \end{aligned}$$

Электрическое и магнитное поля представим в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+n\omega_0)t} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{E}^{(n)}(\mathbf{k}), \quad (25.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{B}(t, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+n\omega_0)t} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathbf{B}^{(n)}(\mathbf{k}). \quad (25.7)$$

Тогда, имея в виду, что в плазме и в вакууме при этом будут реализоваться различные волновые векторы \mathbf{k} , различающиеся значениями нормальных к поверхности

раздела компонент (k_z), в то время как тангенциальные k_x и k_y компоненты в силу непрерывности являются одинаковыми, можем записать систему уравнений Максвелла в плазме ($k_z = k_{zi}$) в следующем виде:

$$k_x E_y^{(s)} = \frac{1}{c} (\omega + s\omega_0) B_z^{(s)} + k_y E_x^{(s)}, \quad (25.8)$$

$$k_x E_z^{(s)} = -\frac{1}{c} (\omega + s\omega_0) B_y^{(s)} + k_{zi} E_x^{(s)}, \quad (25.9)$$

$$k_x B_x^{(s)} + k_y B_y^{(s)} + k_{zi} B_z^{(s)} = 0, \quad (25.10)$$

$$i(k_y B_z^{(s)} - k_{zi} B_y^{(s)}) c = -i(\omega + s\omega_0) E_x^{(s)} + 4\pi j_x^{(s)}, \quad (25.11)$$

$$i(k_{zi} B_x^{(s)} - k_x B_z^{(s)}) c = -i(\omega + s\omega_0) E_y^{(s)} + 4\pi j_y^{(s)}, \quad (25.12)$$

$$i(k_x B_y^{(s)} - k_y B_x^{(s)}) c = -i(\omega + s\omega_0) E_z^{(s)} + 4\pi j_z^{(s)}. \quad (25.13)$$

Здесь

$$4\pi j_x^{(s)} = \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\omega + p\omega_0} J_{p-r}(a_{\alpha}) J_{p-s}(a_{\alpha}) \times \\ \times \left\{ E_x^{(r)} - \frac{(p-s)\omega_0}{k_x(\omega + p\omega_0)} \left[k_x E_x^{(r)} + k_y E_y^{(r)} + \right. \right. \\ \left. \left. + k_{zi} E_z^{(r)} - \frac{(p-r)\omega_0}{k_x c} (k_{zi} B_y^{(r)} - k_y B_z^{(r)}) \right] \right\}, \quad (25.14)$$

$$4\pi j_y^{(s)} = \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\omega + p\omega_0} J_{p-r}(a_{\alpha}) J_{p-s}(a_{\alpha}) \times \\ \times \left\{ E_y^{(r)} + \frac{(p-s)\omega_0}{ck_x} B_z^{(r)} \right\}, \quad (25.15)$$

$$4\pi j_z^{(s)} = \sum_{\alpha} \omega_{L\alpha}^2 \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} \frac{i}{\omega + p\omega_0} J_{p-r}(a_{\alpha}) J_{p-s}(a_{\alpha}) \times \\ \times \left\{ E_z^{(r)} - \frac{(p-s)\omega_0}{ck_x} B_y^{(r)} \right\}. \quad (25.16)$$

Условие разрешимости системы уравнений (25.8) — (25.13) определяет собственные значения волновых векторов k_i внутри плазмы. Аналогичная система уравнений вне плазмы, когда $j = 0$, определяет соответствующие волновые векторы k_e в вакууме. Такие системы уравнений дополняются граничными условиями на поверхности плазмы. Граничные условия могут быть получены из уравнений поля интегрированием по физически бесконечно малому

переходному слою. В результате этого получаем соответственно из (25.9), (25.10), (25.11), (25.12) на границе плазма — вакуум:

$$\sum_{k_{ze}} E_x^{(s)}|_e = \sum_{k_{zi}} E_x^{(s)}|_i, \quad (25.17)$$

$$\sum_{k_{ze}} B_z^{(s)}|_e = \sum_{k_{zi}} B_z^{(s)}|_i, \quad (25.18)$$

$$\sum_{k_{ze}} B_y^{(s)}|_e - \sum_{k_{zi}} B_y^{(s)}|_i = - \sum_{k_{zi}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{c} \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} \frac{(p-s)\omega_0}{k_x(\omega + p\omega_0)^2} \times \\ \times J_{p-r}(a_\alpha) J_{p-s}(a_\alpha) \left[E_z^{(r)} - \frac{(p-r)\omega_0}{k_x c} B_y^{(r)} \right] \Big|_i, \quad (25.19)$$

$$\sum_{k_{ze}} B_x^{(s)}|_e - \sum_{k_{zi}} B_x^{(s)}|_i = 0. \quad (25.20)$$

Система уравнений для амплитуд поля и граничные условия позволяют определить спектр возмущений плазмы с резкой границей, находящейся в сильном переменном электрическом поле.

Следуя работе [70], рассмотрим коротковолновые возмущения, для которых выполнены неравенства

$$(k_y^2 + k_x^2)c^2 \gg \omega^2, \quad \omega_{Le}^2, \quad \omega_0^2. \quad (25.21)$$

В этом случае поле плазменных колебаний оказывается почти потенциальным. Тогда уравнения (25.8) — (25.13) дают

$$E_y^{(s)} = \frac{k_y}{k_x} E_x^{(s)}, \quad E_z^{(s)} = \frac{k_{zi}}{k_x} E_x^{(s)}, \quad (25.22)$$

$$(\omega + s\omega_0) k_i E^{(s)} + 4\pi i k_i j^{(s)} = 0. \quad (25.23)$$

При учете (25.22) уравнение (25.23) принимает вид

$$k_i^2 (\omega + s\omega_0) \times \\ \times \left\{ E_x^{(s)} - \sum_{\alpha} \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + p\omega_0)^2} J_{p-r}(a_\alpha) J_{p-s}(a_\alpha) E_x^{(r)} \right\} = 0. \quad (25.24)$$

Соответственно вне плазмы получаем

$$k_e^2 E_x^{(s)} = 0. \quad (25.25)$$

Граничное условие в соответствии с (25.22) сводится к непрерывности $E_x^{(s)}$ - и $E_y^{(s)}$ -компонент электрического поля и к условию

$$\sum_{k_{ze}} E_z^{(s)}|_e = \quad (25.26)$$

$$= \sum_{k_{zi}} \left\{ E_z^{(s)} - \sum_{\alpha} \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} J_{p-r}(a_{\alpha}) J_{p-s}(a_{\alpha}) \frac{\omega_{L\alpha}^2}{(\omega + p\omega_0)^2} E_z^{(r)} \right\} \Big|_i.$$

Приравнивание нулю множителя в фигурной скобке уравнения (25.24) приводит к спектру объемных потенциальных колебаний холодной плазмы, рассмотренных в §§ 1—3. Поверхностные возмущения соответствуют второму решению уравнения (25.24)

$$k_i^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_{zi}^2 = 0. \quad (25.27)$$

Отсюда следует, что

$$k_{zi} = \pm i\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \equiv \pm ik_{\parallel}. \quad (25.28)$$

Аналогично из (25.25) для волнового вектора вне плазмы имеем также не зависящее от номера гармоники s выражение

$$k_{ze} = \pm ik_{\parallel}. \quad (25.29)$$

Эти результаты позволяют теперь записать явную зависимость поля от координаты z . Так, для слоя плазмы толщиной d для напряженности электрического поля имеем

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} [E_{xi}^{(s)}(k_{\parallel}) e^{k_{\parallel} z} + E_{xi}^{(s)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} z}] \times \\ &\quad \times \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + ik_x x + ik_y y], \\ E_z &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{ik_{\parallel}}{k_x} [-E_{xi}^{(s)}(k_{\parallel}) e^{k_{\parallel} z} + E_{xi}^{(s)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} z}] \times \\ &\quad \times \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + ik_x x + ik_y y], \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} &0 < z < d; \\ &(25.30) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + \\ &\quad + ik_x x + ik_y y] E_{xe}^{(s)}(k_{\parallel}) e^{k_{\parallel} z}, \\ E_z &= -\frac{ik_{\parallel}}{k_x} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + \\ &\quad + ik_x x + ik_y y] E_{xe}^{(s)}(k_{\parallel}) e^{k_{\parallel} z}, \end{aligned} \right\} z < 0; \quad (25.31)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + \\ &\quad + ik_x x + ik_y y] E_{xe}^{(s)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} z}, \\ E_z &= \frac{ik_{\parallel}}{k_x} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\omega + s\omega_0)t + \\ &\quad + ik_x x + ik_y y] E_{xe}^{(s)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} z}, \end{aligned} \right\} z > d. \quad (25.32)$$

Граничные условия непрерывности x -компоненты напряженности электрического поля позволяют выразить амплитуды поля вне плазмы через амплитуды электрического поля возмущений плазменного слоя:

$$\left. \begin{aligned} E_{xe}^{(s)}(k_{\parallel}) &= E_{xi}^{(s)}(k_{\parallel}) + E_{xi}^{(s)}(-k_{\parallel}), \\ E_{xe}^{(s)}(-k_{\parallel}) &= E_{xi}^{(s)}(k_{\parallel}) e^{2k_{\parallel} d} + E_{xi}^{(s)}(-k_{\parallel}). \end{aligned} \right\} \quad (25.33)$$

Граничные условия (25.26) дают

$$\begin{aligned} E_{xi}^{(s)}(k_{\parallel}) \pm E_{xi}^{(s)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} d} + \sum_{\alpha} \sum_{r, p=-\infty}^{+\infty} J_{p-r}(a_{\alpha}) J_{p-s}(a_{\alpha}) \times \\ \times \Delta \varepsilon_{\alpha}(\omega + p\omega_0) [E_{xi}^{(r)}(k_{\parallel}) \pm E_{xi}^{(r)}(-k_{\parallel}) e^{-k_{\parallel} d}] = 0, \end{aligned} \quad (25.34)$$

где

$$\Delta \varepsilon_{\alpha}(\omega) = -\frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2} \frac{1 \pm e^{-k_{\parallel} d}}{2}. \quad (25.35)$$

Сравнение уравнения (25.34) с выражением, стоящим в фигурной скобке (25.24), показывает, что их отличие заключается лишь в перенормировке ленгмюровских частот:

$$\omega_{L\alpha}^2 \rightarrow \overline{\omega_{L\alpha}^2} \equiv \frac{1}{2} \omega_{L\alpha}^2 (1 \pm e^{-k_{\parallel} d}), \quad (25.36)$$

Поэтому можно сделать вывод о том, что теория параметрического резонанса в плазме относительно возбуждения поверхностных волн оказывается во многом подобной теории параметрического резонанса в неограниченной плазме относительно возбуждения объемных волн. Имея в виду замену (25.36), мы можем теперь непосредственно использовать результаты § 3 по теории параметрической неустойчивости холодной плазмы. Соответственно этому дисперсионное уравнение низкочастотных ($|\omega| \ll \omega_0$) возбуждений (ср. (1.19) и (3.2)) электронно-ионной плазмы в электрическом поле накачки представляется в виде

$$\omega^2 = \overline{\omega_{Li}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{(\omega + n\omega_0)^2}{(\omega + n\omega_0)^2 - \omega_{Le}^2}. \quad (25.37)$$

Резонансные частоты слоя плазмы определяются формулой *)

$$\overline{\omega_{Le}^2} = \frac{1}{2} \omega_{Le}^2 (1 \pm e^{-k \parallel d}). \quad (25.38)$$

Для толстого слоя плазмы ($k \parallel d \gg 1$) эта формула дает $\overline{\omega_{Le}^2} = 1/2 \omega_{Le}^2$, что соответствует частоте поверхностных колебаний плазмы. В другом пределе тонкого слоя ($k \parallel d \ll 1$) при знаке плюс формула (25.38) дает ленгмюровскую частоту электронов, что соответствует обычным объемным продольным колебаниям плазмы, а при знаке минус резонансная частота равна $\sqrt{1/2} k \parallel d \omega_{Le}$.

Вдали от резонанса обертона внешней частоты с резонансной частотой (25.38) в соответствии с формулой (3.3) можем записать следующее приближенное решение дисперсионного уравнения (25.37):

$$\omega^2 = \omega_{Li}^2 (1 \pm e^{-k \parallel d}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2(a) \frac{n^2 \omega_0^2}{2n^2 \omega_0^2 - \omega_{Le}^2 (1 \pm e^{-k \parallel d})}. \quad (25.39)$$

*) Заметим здесь, что проведенное Алиевым и Ферленги рассмотрение поведения плазменного цилиндра радиусом R в поле, электрический вектор которого ориентирован вдоль оси цилиндра, показало, что низкочастотные возмущения вида $\exp(ik_x x + im\varphi)$ описываются дисперсионным уравнением (25.37), в котором $\overline{\omega_{La}^2} = k_x R \omega_{La}^2 K_m(k_x R) I'_m(k_x R)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, K_m — функция Макдональда, а I'_m — производная функция Бесселя мнимого аргумента.

Отсюда следует, что при приближении обертона внешней частоты поля накачки правая часть этой формулы становится отрицательной, что отвечает аperiodическому нарастанию плазменных колебаний. В окрестности резонанса обертона ω_0 с частотой (25.38) в соответствии с результатами § 3 можно утверждать, что при приближении к такому резонансу со стороны больших значений частоты поля накачки в плазме возникают нарастающие возмущения при

$$n\omega_0 = \frac{1}{2^{1/2}} \omega_{Le} (1 \pm e^{-k \parallel d})^{1/2} \left\{ 1 + \left[4J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (25.40)$$

При этом в области расстройк частоты внешнего поля

$$0 > \bar{\Delta}_n > -2 \left[4J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2}, \quad (25.41)$$

где

$$\bar{\Delta}_n = \frac{\omega_{Le}^2}{2n^2 \omega_0^2} (1 \pm e^{-k \parallel d}) - 1, \quad (25.42)$$

для плазменных колебаний имеем

$$\frac{\omega}{\omega_{Le}} = \pm \frac{\bar{\Delta}_n}{4} \left\{ \left[1 + \sqrt{\frac{32}{|\bar{\Delta}_n|^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + i \left[-1 + \sqrt{\frac{32}{|\bar{\Delta}_n|^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} \right]^{1/2} \right\}. \quad (25.43)$$

Максимальное значение инкремента в области расстройк (25.41) достигает значения

$$\gamma = \frac{1}{2^{1/2}} \omega_{Le} (1 \pm e^{-k \parallel d})^{1/2} \left\{ \frac{\sqrt{27}}{32} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right\}^{1/2}. \quad (25.44)$$

Для положительных значений расстройки $\bar{\Delta}_n$ нарастающие в плазме возмущения имеют равную нулю действительную часть частоты ω , а их инкремент дается формулой

$$\gamma = \frac{1}{4} \omega_{Le} (1 \pm e^{-k \parallel d})^{1/2} \bar{\Delta}_n \left[\sqrt{1 + \frac{32}{\bar{\Delta}_n^3} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} - 1 \right]. \quad (25.45)$$

Это выражение достигает максимума

$$\text{при } \gamma = \frac{\omega_{Le}}{2^{1/2}} (1 \pm e^{-k \parallel d})^{1/2} \left[\frac{1}{2} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} \quad (25.46)$$

$$n\omega_0 = \frac{1}{2^{1/2}} \omega_{Le} (1 \pm e^{-k \parallel d})^{1/2} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{2} J_n^2(a) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (25.47)$$

Необходимо подчеркнуть, что параметрическая неустойчивость относительно раскачки поверхностных плазменных волн имеет место в области частот, для которой плазма параметрически неустойчива относительно раскачки объемных колебаний. При этом как поверхностные, так и объемные возмущения нарастают лишь в конечной области проникновения внешнего поля накачки в плазму. Смещение резонанса внешней частоты, связанное с возбуждением поверхностных волн, делает их рассмотрение важным, поскольку в области максимума раскачки поверхностных волн их инкремент существенно превышает нерезонансное значение инкремента объемных возбуждений.

Эти соображения указывают также на необходимость теоретического рассмотрения порогов параметрической неустойчивости относительно развития поверхностных возмущений. Такая теория, требующая применения кинетического рассмотрения, была построена Алиевым, Градовым и Кирием [108] для случая полностью ионизированной плазмы. Геометрия ориентации внешнего поля накачки при этом считалась совпадающей с рассмотренной выше в этом параграфе. Для столкновений частиц плазмы с поверхностью принималась модель зеркального отражения. При этом для коротковолновых ($k \parallel c \gg \omega_{Le}$) почти потенциальных возмущений в предположении слабости поля волны накачки имеет место дисперсионное уравнение [108]

$$D_0 = \frac{a^2}{4} \frac{k \parallel}{\pi} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_{-1}} \right) \left\{ 1 + \frac{k \parallel}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{k^2 \varepsilon(\omega + i\gamma, k)} - \right. \\ \left. - \frac{k \parallel}{\pi} \frac{1}{\delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z \delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, k)}{k^2 \varepsilon(\omega + i\gamma, k)} \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_z}{k^2} \frac{\delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, k)}{\varepsilon(\omega + i\gamma, k)} [2 + \delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma, k)]. \quad (25.48)$$

Здесь

$$D_n = 1 + \frac{c}{\pi \sqrt{k_{\parallel}^2 c^2 - (\omega + i\gamma + n\omega_0)^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \times \\ \times \left\{ \frac{k_{\parallel}^2}{k^2 \varepsilon (\omega + i\gamma + n\omega_0)} - \frac{k_z^2 (\omega + i\gamma + n\omega_0)^2}{c^2 k^4} \right\}. \quad (25.49)$$

Аналогично теории пороговых явлений в неограниченной параметрически неустойчивой плазме дисперсионное уравнение (25.48) дает как аperiодическую, так и периодическую неустойчивость. При этом согласно работе [108] для аperiодической неустойчивости граничное значение напряженности электрического поля накачки, при котором возникает неустойчивость, определяется соотношением

$$\frac{(\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{E}_0)_{\text{гр}}^2}{4\pi k_{\parallel}^2 (n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} = -4 \frac{\Delta^2 + \tilde{\gamma}_{\Pi}^2}{\Delta \omega_0}. \quad (25.50)$$

Здесь

$$\Delta = \omega_0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p \left(1 + C_1 k_{\parallel} r_{De} - \frac{\omega_p^2}{8k_{\parallel}^2 c^2} \right), \quad (25.51)$$

$$\tilde{\gamma}_{\Pi} = C_2 \frac{\omega_p}{\sqrt{2}} k_{\parallel} r_{De} + \frac{1}{2} v_{ei} \quad (25.52)$$

и $C_1 \approx 1,22$, $C_2 \approx 0,176$. Соответственно для инкремента аperiодической неустойчивости вблизи границы неустойчивости имеем [108]

$$\gamma = \frac{\omega_0}{32\pi k_{\parallel}^2} \frac{(\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{E}_0)^2 - (\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{E}_0)_{\text{гр}}^2}{n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i} \left\{ 1 + \frac{4}{3} \frac{\tilde{\gamma}_{\Pi}}{\sqrt{2\pi} k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{r_{Di}^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2} \right\}^{-1}. \quad (25.53)$$

Заметим, что с уменьшением k_{\parallel} также уменьшается пороговое значение напряженности электрического поля. При этом для $k_{\parallel} \sim \omega_{Le}/c$ имеем

$$\frac{E_{0, \text{пор}}^2}{16\pi (n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} \sim C_2 \frac{v_{Te}}{c} + \frac{v_{ei}}{\omega_0}. \quad (25.54)$$

Для периодической неустойчивости дисперсионное уравнение (25.48) приводит к следующим выражениям

для частоты нарастающих колебаний и их инкремента [108]:

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_E)^2 \omega_0 \omega_{Li}^2 \Delta}{8(\Delta^2 + \tilde{\gamma}_{\Pi}^2)^2}, \quad (25.55)$$

$$\gamma = \frac{(\mathbf{k}_{\parallel} \mathbf{r}_E)^2 \omega_0 \omega_{Li}^2 \Delta \tilde{\gamma}_{\Pi}}{8(\Delta^2 + \tilde{\gamma}_{\Pi}^2)^2} - \frac{\omega_s}{2}. \quad (25.56)$$

Последняя формула позволяет следующим образом определить порог периодической неустойчивости:

$$\frac{E_{0, \text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{\tilde{\gamma}_{\Pi}^2(k_{\parallel, \text{пор}})}{\omega_0 \omega_s (k_{\parallel, \text{пор}})}. \quad (25.57)$$

В частности, если

$$(v_e/\omega_0) > C_2 (v_{Te}/c),$$

то минимальное значение порога имеет вид

$$\frac{E_{0, \text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \frac{C_2 v_{ei}}{\omega_{Li}}. \quad (25.58)$$

Отличие закономерностей, характеризующих в околопороговой области параметрическую неустойчивость плазмы относительно раскачки поверхностных возмущений, по сравнению с соответствующими закономерностями для объемных возмущений обусловлено двумя причинами.

Это, во-первых, отличие возмущений от точно потенциальных и проявление непотенциальности в дисперсии высокочастотных возмущений (ср. формулу (25.51)).

Во-вторых, возникает дополнительная поверхностная диссипация плазменных возмущений. Такая диссипация обусловлена столкновениями частиц с поверхностью. Естественно, что минимальные пороги при этом могут увеличиваться.

При значительном превышении над порогом закономерности параметрической неустойчивости относительно нарастания поверхностных волн подобны неустойчивости относительно нарастания объемных волн и отличаются перенормировкой частоты колебаний.

§ 26. Параметрический резонанс в окрестности удвоенной собственной частоты плазменных колебаний

Обратимся теперь к рассмотрению параметрического резонанса в плазме, развивающегося при приближении частоты поля волны накачки к удвоенной ленгмюровской частоте электронных колебаний ($\omega_0 \approx 2\omega_{Le}$). Теория неустойчивости плазмы при таком резонансе развивалась в работах [72, 73, 11]. Заметим, что возникновение при этом неустойчивости относительно нарастания колебаний потенциального поля существенно обусловлено неоднородностью.

Прежде всего нам следует рассмотреть основное состояние плазмы, устойчивость которого изучаться будет далее. Имея в виду большую инерцию ионов, пренебрежем влиянием электрического поля на их движение. Это позволяет считать пространственное распределение ионов $n_i(r)$ заданным. Примем, что распределение частиц плазмы меняется вдоль направления оси x . Электрический вектор поля волны накачки будем считать направленным вдоль оси y ($E_y(x, t)$). Тогда магнитное поле имеет лишь z -компоненту:

$$B_z(x, t) = -c \int_{-\infty}^t dt' \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, t'). \quad (26.1)$$

Помимо поля волны накачки в условиях неоднородности возникает потенциальное электрическое поле ($E = -\nabla\phi_0$), определяющееся неоднородным зарядом частиц:

$$\Delta\phi_0 = -4\pi e_i n_i(r) - 4\pi e \int dp f_0. \quad (26.2)$$

Здесь f_0 — распределение электронов плазмы в основном состоянии, подчиняющееся уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_0}{\partial x} + e \left(E_y(x, t) - \frac{1}{c} v_x B_z(x, t) \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_y} + \\ + e \left(-\frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{1}{c} v_y B_z(x, t) \right) \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = 0. \end{aligned} \quad (26.3)$$

Для отыскания решения уравнения (26.3) прежде всего сделаем замену переменных, введя функцию

$$F(p_x, p_y, p_z, x, t) = f_0(p_x, p_y - e \int_{-\infty}^t dt' E_y(x, t'), p_z, x, t),$$

подчиняющуюся согласно (26.3) и (26.1) уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p_x} \left\{ \frac{e}{c} v_y B_z(x, t) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left[e\varphi_0 + \frac{e}{2m_e} \left(\int_{-\infty}^t dt' E_y(x, t') \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (26.4)$$

Это уравнение описывает распределение электронов в системе координат, колеблющейся вместе с электронами.

Если электрическое поле волны накачки записать в виде

$$E_y(x, t) = E(x) \sin(\omega_0 t - \int k_0(x) dx), \quad (26.5)$$

то легко видеть, что сила, действующая на электрон и описываемая выражением в фигурной скобке уравнения (26.4), содержит не только быстропеременную, но и стационарную часть, обусловленную электрическим полем волны. Такая стационарная часть соответствует эффективному потенциалу сил:

$$U_E(x) = \frac{e^2 E^2(x)}{4m_e \omega_0^2} \equiv \frac{1}{4} m_e v_E^2(x), \quad (26.6)$$

который носит название высокочастотного потенциала [76, 77].

В соответствии с этим электронную функцию распределения также можно представить в виде стационарной и быстропеременной. При этом благодаря малости амплитуды осцилляций электронов в поле накачки ($r_E(x) = eE(x)/m_e \omega_0^2$) по сравнению с характерным масштабом пространственной неоднородности, а также малости расстояния, проходимого электроном за период поля накачки из-за теплового движения, решения уравнения (26.4) можно искать с помощью метода последовательных приближений. Тогда в нулевом приближении имеем

$$v_x \frac{\partial F_0}{\partial x} - \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} \left[e\varphi_0 + \frac{e^2 E^2(x)}{4m_e \omega_0^2} \right] = 0. \quad (26.7)$$

Отсюда сразу получаем

$$F_0 = \mathcal{F} \left(\frac{p_x^2}{2m_e} + e\varphi_0 + U_E, p_y, p_z \right). \quad (26.8)$$

Вне области действия электрического и высокочастотного потенциалов примем распределение электронов максвелловским. Тогда формула (26.8) принимает вид

$$F_0(p, x) = \frac{n(0)}{(2\pi m_e \kappa T)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{\kappa T} \left[\frac{p^2}{2m_e} + e\varphi_0 + \frac{e^2 E^2(x)}{4m_e \omega_0^2} \right] \right\}. \quad (26.9)$$

Далее уравнение первого приближения имеет вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_0}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p_y v_E(x) \cos \left(\omega_0 t - \int k_0 dx \right) - U_E(x) \cos 2 \left(\omega_0 t - \int k_0 dx \right) \right\} = 0. \quad (26.10)$$

Здесь $v_E(x)$ — амплитуда скорости осцилляций электрона в поле накачки, $U_E(x)$ — высокочастотный потенциал (26.6). Решение уравнения (26.10) дает поправку к распределению электронов первого приближения

$$F_1(p, x, t) = -\frac{\partial F_0}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p_y r_E(x) \sin \left(\omega_0 t - \int k_0 dx \right) - \frac{U_E(x)}{2\omega_0} \sin 2 \left(\omega_0 t - \int k_0 dx \right) \right\}. \quad (26.11)$$

Формулы (26.9) и (26.11) с точностью до первого приближения описывают распределение электронов основного состояния плазмы в неоднородном поле волны накачки. Для изучения устойчивости этого состояния рассмотрим возмущение электронного распределения δf , сопровождающееся неравновесным возмущенным потенциальным полем $\delta\varphi$. Кинетическое уравнение для такого возмущения имеет вид

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \mathbf{v}_\perp \frac{\partial \delta f}{\partial \mathbf{r}_\perp} + v_x \frac{\partial \delta f}{\partial x} + e \left(E_y(x, t) - \frac{1}{c} v_x B_z(x, t) \right) \frac{\partial \delta f}{\partial p_y} + e \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{1}{c} v_y B_z(x, t) \right) \frac{\partial \delta f}{\partial p_x} - \frac{\partial f_0}{\partial p} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (26.12)$$

где

$$\Delta \delta \varphi = -4\pi e \int d\mathbf{p} \delta f. \quad (26.13)$$

Сделаем замену переменных

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi &= \exp\left\{ik_z z + ik_y\left(y - \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' E_y(x, t'')\right)\right\} \varphi(x, t), \\ \delta f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \\ &= \exp\left\{ik_z z + ik_y\left(y - \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' E_y(x, t'')\right)\right\} \times \\ &\quad \times \Psi\left(p_x, p_y - e \int_{-\infty}^t dt' E_y(x, t'), p_z, x, t\right), \end{aligned} \right\} \quad (26.14)$$

соответствующую переходу в систему координат, колеблющуюся вместе с электронами, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi(\mathbf{p}, x, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial\psi}{\partial x} + \\ &+ i\left(k_y v_y + k_z v_z - v_x k_y \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\partial E_y(x, t'')}{\partial x}\right) \psi - \\ &\quad - \frac{\partial\psi}{\partial p_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(e\varphi_0 + ev_y \int_{-\infty}^t dt' E_y(x, t') + \right. \\ &+ \left. \frac{e^2}{2m_e} \left[\int_{-\infty}^t dt' E_y(x, t')\right]^2\right) - ie\left(k_z \frac{\partial}{\partial p_z} + k_y \frac{\partial}{\partial p_y}\right) (F_0 + F_1) \varphi - \\ &- e\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi ik_y \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\partial E_y(x, t'')}{\partial x}\right\} \frac{\partial}{\partial p_x} (F_0 + F_1) = 0, \end{aligned} \quad (26.15)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2ik_y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\partial E_y(x, t'')}{\partial x} - \\ &- \left\{k_z^2 + k_y^2 \left[1 + \left(\frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\partial E_y(x, t'')}{\partial x}\right)^2\right]\right\} + \\ &+ ik_y \frac{e}{m_e} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \frac{\partial^2 E_y(x, t'')}{\partial x^2} \varphi = -4\pi e \int d\mathbf{p} \psi(\mathbf{p}, x, t). \end{aligned} \quad (26.16)$$

Имея в виду зависимость поля накачки от времени, определенную формулой (26.5), представим временную зависимость решений уравнений (26.15) и (26.16) в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi(\mathbf{p}, x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+n\omega_0)t} \psi_n(\mathbf{p}, x), \\ \varphi(x, t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+n\omega_0)t} \phi_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (26.17)$$

Это позволяет записать систему уравнений для амплитуд гармоник ψ_n и ϕ_n , характеризующую неравновесное состояние плазмы в поле накачки.

В интересующем нас случае частоты поля накачки, близкой к удвоенной собственной частоте электронных колебаний плазмы в разложении (26.17), существенны лишь две гармоники с $n = 0$ и $n = 1$, для которых уравнения (26.15) и (26.17) дают

$$k_{\perp}^2 \phi_0 - \frac{d^2 \phi_0}{dx^2} - 2ik_y K \frac{d\phi_{-1}}{dx} - ik_y \frac{dK}{dx} \phi_{-1} = 4\pi e \int d\mathbf{p} \psi_0, \quad (26.18)$$

$$k_{\perp}^2 \phi_{-1} - \frac{d^2 \phi_{-1}}{dx^2} - 2ik_y K^* \frac{d\phi_0}{dx} - ik_y \frac{dK^*}{dx} \phi_0 = 4\pi e \int d\mathbf{p} \psi_{-1}, \quad (26.19)$$

$$\begin{aligned} & -i(\omega - k_{\perp} v_{\perp}) \psi_0 + v_x \frac{\partial \psi_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_0}{\partial p_x} \frac{d[e\varphi_0 + U_E]}{dx} - \\ & -ie\phi_0 k_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial p_{\perp}} - e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} - iK \left\{ -v_x k_y \psi_{-1} + \omega_0 p_y \frac{\partial \psi_{-1}}{\partial p_x} - \right. \\ & \left. - p_y e \phi_{-1} k_{\perp} \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_{\perp} \partial p_x} + i e p_y \frac{\partial \phi_{-1}}{\partial x} \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_x^2} \right\} = 0, \quad (26.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i(\omega - \omega_0 - k_{\perp} v_{\perp}) \psi_{-1} + v_x \frac{\partial \psi_{-1}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{-1}}{\partial p_x} \frac{d[e\varphi_0 + U_E]}{dx} - \\ & -ie\phi_{-1} k_{\perp} \frac{\partial F_0}{\partial p_{\perp}} - e \frac{\partial \phi_{-1}}{\partial x} \frac{\partial F_0}{\partial p_x} + \\ & + iK^* \left\{ v_x k_y \psi_0 + \omega_0 p_y \frac{\partial \psi_0}{\partial p_x} + p_y e \phi_0 k_{\perp} \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_{\perp} \partial p_x} - \right. \\ & \left. - i p_y e \frac{\partial \phi_0}{\partial x} \frac{\partial^2 F_0}{\partial p_x^2} \right\} = 0. \quad (26.21) \end{aligned}$$

Здесь k_{\perp} — вектор с компонентами $(0, k_y, k_z)$ и

$$K = \frac{i}{2} \frac{d}{dx} (r_E(x) e^{i \int k_0 dx}). \quad (26.22)$$

При анализе следствий, вытекающих из системы уравнений (26.18) — (26.21), обратимся прежде всего к такому случаю, когда определяющей неоднородность основного состояния является зависимость от координат поля волны накачки. Кроме того, будем считать длину волны плазменных возмущений малой по сравнению с характерным размером неоднородности. Последнее позволяет искать решение уравнения (26.18) — (26.21) в виде

$$\psi_n = \Psi_n e^{i \int k_x dx}, \quad \phi_n = \Phi_n e^{i \int k_x dx}, \quad (26.23)$$

где $k_x(x)$, $\Phi_n(x)$, $\Psi_n(p, x)$ — медленно меняющиеся функции координаты.

Подставляя выражения (26.23) в уравнения (26.20) и (26.21), можно получить явные решения, если при этом использовать предположение об относительной малости скорости теплового движения по сравнению с фазовой скоростью плазменных возмущений:

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & -e\Phi_0 \frac{1}{\omega - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} - \\ & -e\Phi_{-1} \frac{K}{\omega - kv} \left\{ \frac{v_x k_y}{\omega - \omega_0 - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{\omega_0 p_y}{\omega - \omega_0 - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} \right) - p_y k \frac{\partial^2 F_0}{\partial p \partial p_x} \right\}, \quad (26.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{-1} = & -e\Phi_{-1} \frac{1}{\omega - \omega_0 - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} - e\Phi_0 \frac{K^*}{\omega - \omega_0 - kv} \times \\ & \times \left\{ -\frac{v_x k_y}{\omega - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial p_x} \left(\frac{\omega_0 p_y}{\omega - kv} k \frac{\partial F_0}{\partial p} \right) + p_y k \frac{\partial^2 F_0}{\partial p \partial p_x} \right\}. \quad (26.25) \end{aligned}$$

Эти выражения позволяют записать уравнения для амплитуд возмущений потенциала продольного поля:

$$\Phi_0 [1 + \delta \varepsilon_e(\omega, k)] + 2 \frac{k_x k_y}{k^2} K \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - \omega_0)} \right] \Phi_{-1} = 0, \quad (26.26)$$

$$2 \frac{k_x k_y}{k^2} K^* \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - \omega_0)} \right] \Phi_0 + [1 + \delta \varepsilon_e'(\omega - \omega_0, k)] \Phi_{-1} = 0.$$

Здесь $\delta\epsilon_e$ представляет собой электронный вклад в продольную диэлектрическую постоянную плазмы:

$$\delta\epsilon_e(\omega, k) \approx -\frac{\omega_{Le}^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k^2 \kappa T}{m_e \omega^2} \right) + i\delta\epsilon_e''(\omega, k). \quad (26.27)$$

Мнимая часть $\delta\epsilon_e''$ в приведенном выводе определяется черенковским взаимодействием волн с электронами:

$$\delta\epsilon_e''(\omega, k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Le}^2 \omega}{k^3 v_{Te}^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right). \quad (26.28)$$

Заметим, что учет электрон-ионных соударений может быть сделан добавлением в правую часть формулы (26.28) слагаемого

$$\frac{\omega_{Le}^2 \nu_{ei}}{\omega^3}. \quad (26.29)$$

Дисперсионное уравнение системы (26.26)

$$\begin{aligned} [1 + \delta\epsilon_e(\omega, k)][1 + \delta\epsilon_e(\omega - \omega_0, k)] = \\ = 4 \frac{k_x^2 k_y^2}{k^4} |K|^2 \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2}{\omega(\omega - \omega_0)} \right]^2 \end{aligned} \quad (26.30)$$

решим в предположении, что

$$\omega_0 = 2\omega_{Le}(1 + \Delta), \quad \omega = \omega_{Le}(1 + \Delta) + \delta\omega, \quad (26.31)$$

причем $|\Delta| \ll 1$, а $\delta\omega$ мало по сравнению с ленгмюровской частотой электронных колебаний. Тогда из (26.30) следует

$$\begin{aligned} \delta\omega = \omega_{Le} \left\{ -\frac{i}{2} \delta\epsilon_e''(\omega, k) \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\Delta - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right)^2 - 4 \frac{k_x^2 k_y^2}{k^4} |K|^2} \right\}. \end{aligned}$$

Это означает, что при

$$\frac{k_x^2 k_y^2}{k^4} \left| \frac{d}{dx} (r_E(x) e^{i \int k_0 dx}) \right|^2 > \left(\Delta - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right)^2$$

поправка к частоте оказывается чисто мнимой и

инкремент нарастающих плазменных возмущений имеет вид

$$\gamma = \omega_{Le} \left\{ \sqrt{4 \frac{k_x^2 k_y^2}{k^4} |K|^2 - \left(\Delta - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right)^2} - \frac{1}{2} \delta \varepsilon_e''(\omega, k) \right\}. \quad (26.32)$$

Частоты обоих нарастающих плазменных возмущений оказываются одинаковыми $\omega_0 - \omega = \omega$, а отношение амплитуд потенциала определяется формулой

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_{-1}} = \frac{2 (k_x k_y / k^2) K}{\Delta - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 + i \sqrt{4 (k_x k_y / k^2)^2 |K|^2 - \left(\Delta - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right)^2}}. \quad (26.33)$$

Отсюда, в частности, следует, что при $3/2 k^2 r_{De}^2 = \Delta$, когда оба нарастающих плазменных колебания представляют собой высокочастотные продольные электронные плазменные волны, амплитуды их по модулю оказываются равными. При этом порог неустойчивости определяется равенством

$$2 \left| \frac{k_x k_y}{k^2} \right| \left| \frac{d}{dx} (r_E(x) e^{i \int k_0 dx}) \right|_{\text{пор}} = \delta \varepsilon_e''(\omega, k). \quad (26.34)$$

Очевидно, что для возникающих на пороге возмущений выгодно выполнение условия $k_x^2 = k_y^2 = 1/2 k^2$. Кроме того, ясно, что $\delta \varepsilon_e''$ уменьшается с уменьшением волнового вектора. Поэтому на пороге имеем

$$\left| \frac{d}{dx} (r_E(x) e^{i \int k_0 dx}) \right|_{\text{пор}} = \frac{v_{ei}}{\omega_{Le}}. \quad (26.35)$$

Заметим, что в рамках приближения геометрической оптики (26.23) формула (26.35) может быть использована лишь в том случае, если длина свободного пробега электрона оказывается значительно меньше характерного размера неоднородности плазмы. В противном случае порог параметрической неустойчивости определяется черенковским поглощением высокочастотных волн электронами и превышает определенный формулой (26.35). Из полученных результатов ясно, что параметрическая неустойчивость в окрестности резонанса $\omega_0 \approx 2\omega_{Le}$ отвечает возбуждению поперечной волной накачки двух

продольных электронных плазменных волн, что соответствует комбинационной трансформации поперечной волны в пару высокочастотных продольных или, что то же самое, распаду на пару таких волн [202].

§ 27. Параметрическая неустойчивость при резонансе поля накачки с электронными ленгмюровскими колебаниями, обусловленная осцилляциями плотности заряда на удвоенной частоте внешнего поля

Согласно работе Домрина и Рамазашвили [74] в неоднородном поле волны накачки благодаря ее нелинейному воздействию на электроны возникают осцилляции частиц с частотой, равной удвоенной частоте поля накачки, приводящие к соответствующим осцилляциям неоднородной плотности электронов. Такая осцилляторная зависимость и является той параметрической зависимостью, которая приводит к неустойчивости плазмы.

Считая далее электрическое поле накачки ориентированным поперек направления неоднородности, изложим здесь теорию такой неустойчивости, развитую в работе [74].

Будем считать плазму неоднородной в направлении оси x , влиянием поля накачки на ионы будем пренебрегать, а электроны будем описывать уравнениями движения холодной плазмы. Прежде всего необходимо уточнить описание основного (невозмущенного) состояния плазмы в поле накачки. Считая вектор электрического поля накачки ориентированным вдоль оси y , примем для него зависимость типа стоячей волны:

$$E_y = E_0(x) \cos \omega_0 t. \quad (27.1)$$

В результате воздействия такого поля на плазму в ней устанавливается согласованное пространственное распределение электронов и ионов. Не зависящая от времени часть такого распределения для электронов имеет вид [75, 76]

$$n^0(x) = n \exp \left\{ - \frac{e^2 E_0^2(x)}{8m_e \omega_0^2 \kappa T} \right\}, \quad (27.2)$$

а плотность числа ионов дается условием электронейтральности $en^0 + e_i n_i = 0$. При этом амплитуда поля накачки подчиняется уравнению

$$\frac{d^2 E_0(x)}{dx^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_{Le}^2(x)}{\omega_0^2} \right] E_0(x) = 0, \quad (27.3)$$

где $\omega_{Le}^2(x) = 4\pi e^2 n^0(x) m_e^{-1}$. Анализ решений этого уравнения проводится в ряде работ (см., например, [75, 77, 78]). Явный вид поля нам ниже не потребуется.

В результате воздействия поля (27.1) на электроны они приобретают осциллирующую скорость вдоль оси y :

$$v_y = \frac{eE_0(x)}{m_e \omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (27.4)$$

Помимо этого благодаря неоднородности поля возникают также осцилляции электронов вдоль оси x . Для того чтобы найти такую компоненту скорости, запишем уравнение движения

$$m_e \frac{\partial v_x}{\partial t} = eE_x + \frac{e}{c} v_y B_z. \quad (27.5)$$

Здесь пренебрежено малыми членами, квадратичными по v_x . Поскольку электрическое поле (27.1) сопровождается магнитным

$$B_z = -\frac{c}{\omega_0} \frac{dE_0(x)}{dx} \sin \omega_0 t, \quad (27.6)$$

а E_x определяется уравнением

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi e n^0 v_x = 0, \quad (27.7)$$

то в соответствии с (27.5) можем записать следующее уравнение для v_x :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \omega_{Le}^2(x) v_x = -\frac{e^2}{2m_e^2 \omega_0} \frac{dE_0^2(x)}{dx} \sin 2\omega_0 t. \quad (27.8)$$

Правая часть этого уравнения обусловлена воздействием на электрон силы Лоренца. Отсюда имеем

$$v_x = \frac{e^2}{2m_e^2 \omega_0} \frac{1}{4\omega_0^2 - \omega_{Le}^2(x)} \frac{dE_0^2(x)}{dx} \sin 2\omega_0 t \equiv \Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t. \quad (27.9)$$

Уравнение непрерывности позволяет найти осциллирующую во времени добавку к плотности числа электронов:

$$\Delta n_e(x, t) = \Delta n_0(x) \cos 2\omega_0 t, \quad (27.10)$$

где

$$\Delta n_0(x) = \frac{e^2}{4m_e^2 \omega_0^2} \frac{d}{dx} \left[\frac{n^0(x)}{4\omega_0^2 - \omega_{Le}^2(x)} \frac{dE_0^2(x)}{dx} \right]. \quad (27.11)$$

Нас будет интересовать случай частоты внешнего поля, далекой от $1/2 \omega_{Le}(x)$ (ср. [74]). Заметим, что для малости v_x по сравнению с v_y и для малости осциллирующей добавки к плотности необходима малость амплитуды осциллирующей электрона в поле (27.1) по сравнению с характерным масштабом пространственной неоднородности.

Следуя работе Домрина и Рамазашвили [74], рассмотрим вопрос об устойчивости неоднородного состояния плазмы по отношению к развитию продольных электронных возмущений, распространяющихся в направлении пространственной неоднородности (вдоль оси x). В этом случае линеаризованные уравнения гидродинамики холодной плазмы для малых возмущений, а также уравнения поля имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ \delta v_x [n^0(x) + \Delta n_0(x) \cos 2\omega_0 t] + \\ + [\Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t] \delta n \} = 0, \\ \frac{\partial \delta v_x}{\partial t} + \Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t \frac{\partial \delta v_x}{\partial x} + \delta v_x \frac{d\Delta v_x(x)}{dx} \sin 2\omega_0 t = \\ = \frac{e}{m_e} \delta E_x - \nu \delta v_x, \\ \frac{\partial \delta E_x}{\partial t} + 4\pi e \{ [n^0(x) + \Delta n_0(x) \cos 2\omega_0 t] \delta v_x + \\ + \delta n [\Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t] \} = 0, \\ \frac{\partial \delta E_x}{\partial x} = 4\pi e \delta n. \end{aligned} \quad (27.12)$$

Здесь ν — частота столкновений электронов ($\nu \ll \omega_0$).

Нетрудно видеть, что система уравнений (27.12) сводится к одному дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t \frac{\partial}{\partial x} \right] \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \Delta v_x(x) \sin 2\omega_0 t \frac{\partial}{\partial x} \right] \delta v_x + \right. \\ \left. + \delta v_x \left[\nu + \frac{d\Delta v_x(x)}{dx} \sin 2\omega_0 t \right] \right\} + \\ + \omega_{Le}^2(x) \left[1 + \frac{\Delta n_0(x)}{n^0(x)} \cos 2\omega_0 t \right] \delta v_x = 0. \end{aligned} \quad (27.13)$$

Сделаем в этом уравнении замену переменных:

$$x' = x - \Delta v_x(x) \frac{\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}, \quad (27.14)$$

$$\delta v_x(x, t) = \delta V(x', t), \quad (27.15)$$

а также учтем, что

$$\Delta v_x(x) \approx \Delta v_x(x') + \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \Delta v_x(x') \frac{\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0}, \quad (27.16)$$

$$\omega_{Le}^2(x) \approx \omega_{Le}^2(x') \left\{ 1 - \frac{d \ln n^0(x')}{dx'} \Delta v_x(x') \frac{\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \right\}. \quad (27.17)$$

Тогда в соответствии с (27.13) для функции $\delta V(x', t)$ (27.15) можем записать дифференциальное уравнение [74]

$$\frac{\partial^2 \delta V(x', t)}{\partial t^2} + \left[v + \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \sin 2\omega_0 t \right] \frac{\partial \delta V(x', t)}{\partial t} + \omega_{Le}^2(x') \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\cos 2\omega_0 t}{2\omega_0} \left[1 + \frac{4\omega_0^2}{\omega_{Le}^2(x')} \right] \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \right\} \delta V(x', t) = 0. \quad (27.18)$$

В этом уравнении, так же как и в уравнении (27.13), удержаны лишь члены порядка $(a^{(e)}/L_x)^2$, где L_x — характерный масштаб пространственной неоднородности. Существенным упрощением, достигнутым с помощью преобразований (27.14) и (27.15), является отсутствие в уравнении (27.18) пространственных производных неизвестной функции. Поэтому анализ следствий, вытекающих из уравнения (27.18), для возмущений в неоднородной плазме качественно упрощается. Действительно, приняв

$$\delta V(x', t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V^{(n)} \exp[-i(\omega + n\omega_0)t], \quad (27.19)$$

имеем для амплитуд $V^{(n)}$ следующую систему уравнений:

$$\{\omega_{Le}^2(x') - iv(\omega + n\omega_0) - (\omega + n\omega_0)^2\} V^{(n)} + \\ + \frac{1}{4\omega_0} \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \{[\omega_{Le}^2(x') - 2\omega_0(\omega + n\omega_0)] V^{(n+2)} + \\ + [\omega_{Le}^2(x') + 2\omega_0(\omega + n\omega_0)] V^{(n-2)}\} = 0. \quad (27.20)$$

В окрестности резонанса $\omega_0 \approx \omega_{Le}(x')$, принимая частоту ω малой по сравнению с частотой поля накачки, ограничимся в системе (27.19) учетом лишь двух амплитуд:

$$\{\omega_{Le}^2(x') - iv(\omega + \omega_0) - (\omega + \omega_0)^2\} V^{(1)} + \\ + \frac{1}{4} \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \{\omega_{Le}^2(x') + 2\omega_0(\omega + \omega_0)\} V^{(-1)} = 0, \\ \{\omega_{Le}^2(x') - iv(\omega - \omega_0) - (\omega - \omega_0)^2\} V^{(-1)} + \\ + \frac{1}{4} \frac{d\Delta v_x(x')}{dx'} \{\omega_{Le}^2(x') - 2\omega_0(\omega - \omega_0)\} V^{(1)} = 0. \quad (27.21)$$

Условие разрешимости этой системы уравнений

$$[\omega_{Le}^2(x) - \omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega]^2 - \omega_0^2(2\omega + i\nu)^2 - \frac{1}{16\omega_0^2} \left[\frac{d\Delta v_x(x)}{dx} \right]^2 \{[\omega_{Le}^2(x) + 2\omega_0^2]^2 - 4\omega_0^2\omega^2\} = 0 \quad (27.21)$$

приводит к мнимому значению частоты $\omega = i\gamma$, равному

$$\gamma = -\frac{1}{2}\nu + \sqrt{\frac{9}{64} \left[\frac{d\Delta v_x(x)}{dx} \right]^2 - [\omega_{Le}(x) - \omega_0]^2}. \quad (27.22)$$

В соответствии с формулами (27.9) и (27.2)

$$\frac{d\Delta v_x}{dx} = \frac{e^2}{6m_e^2\omega_0^3} \left[\frac{d^2E_0^2}{dx^2} - \frac{e^2}{24m_e\omega_0^2\kappa T} \left(\frac{dE_0^2}{dx} \right)^2 \right]. \quad (27.23)$$

Поэтому параметрическая неустойчивость плазмы в окрестности резонанса частоты поля накачки с электронной ленгмюровской частотой плазмы $\omega_{Le}(x)$ будет иметь место при выполнении условия

$$\left(\frac{e^2}{16m_e^2\omega_0^3} \right)^2 \left[\frac{d^2E_0^2}{dx^2} - \frac{e^2}{24m_e\omega_0^2\kappa T} \left(\frac{dE_0^2}{dx} \right)^2 \right]^2 > > \frac{\nu^2}{4} + [\omega_{Le}(x) - \omega_0]^2. \quad (27.24)$$

Когда энергия поля мала по сравнению с тепловой энергией плазмы $E_0^2 < 4\pi n_e \kappa T$ (что эквивалентно $\frac{|e|E_0}{m_e\omega_0} = v_E \ll \ll v_{Te}$), то, имея в виду, что характерным масштабом пространственной неоднородности является

$$L_x = \frac{c}{\sqrt{\omega_0 |\omega_{Le} - \omega_0|}}, \quad (27.25)$$

неравенство (27.24) выполнить нельзя, во всяком случае при $v_E \ll c$. В противоположном случае сильного поля, когда $v_E \gg v_{Te}$, неравенство (27.24) можно записать в виде

$$\frac{1}{96} \left(\frac{v_E}{v_{Te}} \right)^2 \left(\frac{dv_E}{dx} \right)^2 > \omega_0 \left\{ \frac{\nu^2}{4} + [\omega_{Le}(x) - \omega_0]^2 \right\}^{1/2}. \quad (27.26)$$

Если при этом для оценки масштаба неоднородности использовать выражение (27.25), то неравенство (27.26)

окажется выполненным при

$$\frac{E^2}{4\pi} \gtrsim 10n_e \sqrt{m_e \kappa T_e} c. \quad (27.27)$$

Для инкремента при этом можно записать выражение [74]

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \frac{3}{8} \left| \frac{d\Delta v_x}{dx} \right| \approx \frac{e^4 E_0^2}{96m_e^3 \omega_0^5 \kappa T_e} \left(\frac{dE_0}{dx} \right)^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{96} \left(\frac{E_0^2}{4\pi n_e \kappa T_e} \right) \left(\frac{d}{dx} \frac{eE_0}{m_e \omega_0^2} \right)^2 \omega_0. \quad (27.28) \end{aligned}$$

Заметим, что инкремент рассматриваемой неустойчивости не зависит от массы ионов. Это качественно отличает такую параметрическую неустойчивость от имеющей место в теории однородной плазмы. Наконец, следует подчеркнуть, что определяющим для развития рассмотренной неустойчивости является возникновение зависящих от времени добавок к плотности электронов (27.10) и x -компоненты электронной скорости (27.9), обусловленных влиянием магнитного поля волны накачки на движение электронов.

§ 28. Стабилизирующее влияние пространственной неоднородности плазмы на параметрическую неустойчивость. Аperiodическая неустойчивость

В предыдущих двух параграфах мы видели, что в пространственно неоднородной плазме оказываются возможными новые параметрические неустойчивости и в этом смысле неоднородность распределения частиц является причиной таких неустойчивостей. С другой стороны, как показано в работах [88, 110—112], под влиянием неоднородности плазмы могут повышаться значения порогов параметрических неустойчивостей, рассмотренных выше в главе II. Для того чтобы выявить подобный эффект, рассмотрим здесь, следуя работе [112], плазму, в которой плотность электронов (и ионов) меняется по линейному закону:

$$n_e(x) = n_0 \left(1 + \frac{x}{H} \right). \quad (28.1)$$

Очевидно, что по такому же закону меняются квадраты ленгмюровских частот электронов и ионов $\omega_{L_e}^2(x)$ и

$\omega_{Li}^2(x)$. Для простоты температуры частиц плазмы будем считать не зависящими от координат. Считая электрическое поле волны накачки также пространственно однородным и ориентируя его перпендикулярно оси x , можем записать следующие сравнительно простые линеаризованные уравнения для неравновесных добавок к плотности числа электронов \tilde{n}_e и ионов \tilde{n}_i :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{n}_e}{\partial t^2} + \nu_e \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} + \omega_{Le}^2(x) \tilde{n}_e - s_e^2 \Delta \tilde{n}_e &= \omega_{Le}^2(x) \tilde{n}_i, \\ \frac{\partial^2 \tilde{n}_i}{\partial t^2} + \nu_i \frac{\partial \tilde{n}_i}{\partial t} + \omega_{Li}^2(x) \tilde{n}_i - s_i^2 \Delta \tilde{n}_i &= \omega_{Li}^2(x) \tilde{n}_e. \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

Здесь ν_e и ν_i описывает диссипативные процессы, обусловленные столкновениями, а также черенковским взаимодействием частиц с волнами, $s_a^2 = \eta_a \kappa T_a / m_a$, где η_a равно трем или единице в зависимости от того, превышает фазовая скорость волны среднюю тепловую скорость или нет. Заметим, что уравнения (28.2) записаны в различных системах, которые соответственно осциллируют со скоростью $(e_a E_0 / m_a \omega_0) \cos \omega_0 t$.

Вблизи порога неустойчивости можно приближенно представить

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_i &= a(x) e^{ik_{\parallel} z - i\omega t}, \\ \tilde{n}_e &= e^{ik_{\parallel} z - i\omega t} [b_0(x) + b_1(x) e^{i\omega_0 t} + b_{-1}(x) e^{-i\omega_0 t}]. \end{aligned} \right\} \quad (28.3)$$

При этом можно считать $|k_{\parallel} r_E| \equiv |e E_0 k_{\parallel} / m_e \omega_0^2| \ll 1$. Тогда из уравнений (28.2) следует

$$\left. \begin{aligned} b_0(x) &\approx \left[1 - \frac{\kappa T_e}{m_e \omega_{Le}^2(x)} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] a(x), \\ \left[-\omega^2 - i\omega \nu_e + \nu_s^2 \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] a &= -\omega_{Li}^2 \frac{1}{2} k_{\parallel} r_E (b_1 - b_{-1}), \\ \left[-(\omega \mp \omega_0)^2 - i\nu_e (\omega \mp \omega_0) + \omega_{Le}^2(x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\kappa T_e}{m_e} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] b_{\pm 1} = \mp \omega_{Le}^2(x) \frac{1}{2} k_{\parallel} r_E a. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

Здесь $\nu_s^2 = (\kappa T_e + \eta_i \kappa T_i) m_i^{-1}$, а при выводе принято во внимание то, что $|\omega| \ll \omega_0$, а также учтены свойства η_e .

Система уравнений (28.4) особенно упрощается для плазмы с температурой ионов, превышающей температуру электронов ($T_i \gg T_e$). Тогда эта система сводится к одному уравнению

$$\frac{d^2 a(x)}{dx^2} + Q(x) a(x) = 0, \quad (28.5)$$

где

$$Q(x) = k_{\parallel}^2 \left[\frac{\omega^2 + i\omega v_i}{k_{\parallel}^2 v_s^2} - 1 + \frac{r_E^2 \omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{2v_s^2} \frac{\omega_{Le}^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - i\omega v_e}{(\omega_{Le}^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - i\omega v_e)^2 - \omega_0^2 (2\omega + i v_e)^2} \right].$$

Рассмотрим далее следствия для аperiodической параметрической неустойчивости, вытекающие из уравнения (28.5), имея в виду далее их обобщение на случай произвольного соотношения температур электронов и ионов.

Для аperiodической неустойчивости $\omega = i\gamma$. Вблизи порога γ мало, что позволяет η_i считать равным единице (и соответственно $v_s = v_{Ti}$). Приняв начало отсчета в точке $\omega_{Le}^2(x=0) = \omega_0^2 - \gamma^2 - \gamma v_e$ и считая $k_{\parallel} H \gg 1$, что отвечает слабой пространственной неоднородности, можно представить выражение Q в следующем виде:

$$Q(x) = \frac{(x_+ - x)(x - x_-)}{x^2 + H^2 (2\gamma + v_e)^2 \omega_0^{-2}} \left(k_{\parallel}^2 + \frac{\gamma^2 + \gamma v_i}{v_{Ti}^2} \right), \quad (28.6)$$

где

$$\frac{x_{\pm}}{H} = \frac{r_E^2}{4r_{Di}^2} \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 + \gamma^2 + \gamma v_i} \pm \sqrt{\left(\frac{r_E^2}{4r_{Di}^2} \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 + \gamma^2 + \gamma v_i} \right)^2 - \left(\frac{2\gamma + v_e}{\omega_0} \right)^2}. \quad (28.7)$$

Формула (28.8) дает квазиклассические точки поворота ($Q = 0$) уравнения (28.5), причем в области $x_- < x < x_+$ могут существовать «запертые» квазиклассические возмущения. Для таких возмущений инкремент находится с помощью квазиклассического правила квантования (см., например, [113, 114]):

$$\int_{x_-}^{x_+} dx \sqrt{Q(x)} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (28.8)$$

Отсюда получаем

$$\frac{r_E^2}{r_{Di}^2} = 4 \frac{v_e + 2\gamma}{\omega_0} \left(1 + \frac{\gamma^2 + \gamma v_i}{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2} \right) + \frac{2n+1}{k_{\parallel} H} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+q^2} M(q)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 + v_i \gamma}{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}}. \quad (28.9)$$

Здесь

$$M(q) = \frac{2}{\pi q^2} \sqrt{1-q^2} \left[\frac{\Pi_1(v, k)}{1-q^2} - E(k) \right],$$

$$q = \frac{\sqrt{x_+} - \sqrt{x_-}}{\sqrt{x_+} + \sqrt{x_-}}, \quad k^2 = \frac{q^2}{1+q^2}, \quad v = \frac{q^2}{1-q^2},$$

а E и Π — полные эллиптические интегралы второго и третьего рода [4]:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi},$$

$$\Pi_1(v, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + v \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Заметим, что функция $M(q)$ в интервале изменения своего аргумента $0 \leq q \leq 1$ изменяется слабо, причем $M_0 = M(1) = 1$. Это позволяет делать простые выводы из уравнения (28.9), что очевидно для порога аперриодической неустойчивости, когда мы имеем [112]

$$\frac{r_E^2}{r_{Di}^2} = \frac{4v_e}{\omega_0} + \frac{2n+1}{k_{\parallel} H} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+q^2} M(q)}. \quad (28.10)$$

Формула (28.10) показывает нам, что в условиях, когда пространственная неоднородность становится определяющей, на пороге неустойчивости развивается низшая мода возмущений ($n = 0$), для которой, строго говоря, квазиклассическое приближение неприменимо.

Однако в действительности формула (28.10) может быть использована для необходимых оценок и в случае неустойчивости относительно раскачки также и основной моды. Покажем это на примере случая сильной неоднородности,

когда влияние столкновений можно считать слабым *). Тогда на пороге неустойчивости ($\gamma = 0$) согласно формуле (28.7) имеем

$$x_- = \frac{2r_{Di}^2 v_e^2 H}{r_E^2 \omega_0^2} \ll x_+ = \frac{r_E^2 H}{2r_{Di}^2}. \quad (28.11)$$

Это позволяет после замены $z = 2k_{\parallel} x$ вместо (28.5) записать следующее уравнение:

$$\frac{d^2 a}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} \right) a = 0, \quad (28.12)$$

где $\lambda = \frac{1}{2} k_{\parallel} x_+$. Решение уравнения (28.12), удовлетворяющее граничному условию убывания при $|z| \rightarrow \infty$, имеет вид [4]

$$a(z) = \begin{cases} AW_{\lambda, 1/2}(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ BW_{-\lambda, 1/2}(z), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases} \quad (28.13)$$

где $W_{\lambda, \mu}(z)$ — функции Уиттекера. Это решение имеет особенность в точке $z = 0$. В связи с этим следует заметить, что уравнение (28.12) применимо только при $z^2 > 3z_+ z_-$ (где $z_{\pm} = 2k_{\parallel} x_{\pm}$). Поэтому решение (28.13) должно быть сшито в окрестности $z = 0$ с помощью другой предельной формы уравнения (28.5), которая при $z^2 < 3z_+ z_-$ имеет вид

$$\frac{d^2 a}{dz^2} + \frac{z - z_-}{4z_-} a = 0. \quad (28.14)$$

Решение уравнения (28.14) не имеет особенности при малых z и выражается через функции Эйри [4]:

$$a(z) = C_1 \operatorname{Ai} \left(\frac{z - z_-}{[4z_-]^{1/3}} \right) + C_2 \operatorname{Bi} \left(\frac{z - z_-}{[4z_-]^{1/3}} \right). \quad (28.15)$$

Сшивая решения (28.13) и (28.15), получаем для спектра колебаний

$$\pi \lambda \operatorname{ctg} \lambda \approx - \sqrt{z_+ z_-} (\lambda \ln \sqrt{z_+ z_-})^2, \quad (28.16)$$

где левая часть представляет собой скачок логарифмических производных от функций Уиттекера (28.13). Имея в виду малость z_- и принимая правую часть уравнения (28.16) равной нулю, имеем следующее явное выражение

*) О слабой пространственной неоднородности см. [112].

для порогового поля волны накачки:

$$\frac{r_E^2}{r_{Di}^2} = \frac{2(2n+1)}{k_{\parallel} H}. \quad (28.17)$$

Сравнение формулы (28.17) с результатом квазиклассического приближения (28.10) позволяет говорить о возможности использования формулы (28.10) и при оценке порога неустойчивости для основных мод (малые значения n). Обобщая эту формулу на случай произвольного соотношения температур электронов и ионов, получаем, что для возникновения параметрической неустойчивости в пространственно неоднородной плазме напряженность электрического поля волны накачки должна удовлетворять условию [112]

$$\frac{E_0^2}{4\pi(n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i)} \geq \frac{4v_e}{\omega_0} + \frac{2n+1}{k_{\parallel} H} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+q^2} M(q)}. \quad (28.18)$$

Эта формула определяет границу неустойчивости соответственно зависимости правой части (28.18) от волнового вектора возмущений, обусловленной черенковским взаимодействием электронов с высокочастотными плазменными волнами. Именно

$$v_e(k_{\parallel}) = \bar{v}_e + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_0}{k^3 r_{De}^3} \exp\left(-\frac{1}{2k_{\parallel}^2 r_{De}^2} - \frac{3}{2}\right), \quad k_{\parallel} r_{De} < 1. \quad (28.19)$$

Здесь первое слагаемое правой части отвечает электронным столкновениям, а второе — черенковскому взаимодействию (затухание Ландау).

Используя формулу (28.19), из условия (28.18) нетрудно видеть, что пространственная неоднородность плазмы оказывается определяющей порог параметрической неустойчивости, если характерный размер неоднородности H оказывается меньше длины свободного пробега электрона $l_e = v_{Te} \bar{v}_e^{-1}$, или более точно при условии [110]

$$\frac{H}{l_e} \ll \ln \frac{\omega_0}{v_e}. \quad (28.20)$$

Отметим, что в экспериментальных устройствах, используемых в лабораторных исследованиях, условие (28.20) легко выполнимо.

§ 29. Стабилизирующее влияние пространственной неоднородности плазмы на параметрическую неустойчивость. Периодическая неустойчивость

Рассмотренное в предыдущем параграфе влияние пространственной неоднородности распределения частиц плазмы на аperiodическую неустойчивость является одним из простейших явлений. В то же время подобное, но и более богатое по своим проявлениям стабилизирующее свойство неоднородности плазмы можно усмотреть и в явлении периодической параметрической неустойчивости [88, 110—112]. Для того чтобы это увидеть, начнем наше рассмотрение в условиях, близких к использованным в предыдущем параграфе, когда распределение частиц плазмы дается формулой (28.1). Изложим здесь прежде всего подробно, следуя работе [112], результаты, относящиеся к случаю $T_e \ll T_i$. В плазме с такой неизотермичностью, как известно (см., например, [9, 10]), в отсутствие поля накачки не существуют ионно-звуковые слабо затухающие плазменные волны. Воздействие поля волны накачки на плазму делает, как мы увидим ниже, возможным существование ионно-звуковых волн. Однако вблизи порога параметрической неустойчивости фазовая скорость таких волн сравнима с тепловой скоростью ионов. Последнее делает необходимым использовать для описания ионов плазмы кинетическое рассмотрение. Для простоты воспользуемся не зависящим от скорости модельным интегралом столкновений ионов:

$$v_i \left\{ f_i - \frac{1}{4\pi} \int d\omega' f_i(p') \right\}. \quad (29.1)$$

Тогда для описания возмущений в плазме можно снова использовать систему уравнений (28.4), заменив левую часть второго уравнения этой системы следующим операторным выражением:

$$\hat{F}a = k^2 v_{Ti}^2 \frac{1 - \frac{iv_i}{\bar{\omega}} J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{kv_{Ti}} \right)}{1 - J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{kv_{Ti}} \right)} a. \quad (29.2)$$

Здесь $\bar{\omega} = \omega + iv_i$, v_i — частота столкновений ионов, $k^2 = k_{\parallel}^2 - \frac{d^2}{dx^2}$, а функция J_+ определена формулой (4.18).

Интегральный оператор становится сравнительно простым дифференциальным в практически наиболее интересном случае, которым мы далее и ограничимся, когда поперечная длина волны возмущений мала по сравнению с характерными длинами вдоль неоднородности плазмы, что требует выполнения условия $k_{\parallel} H \gg 1$. Тогда

$$\hat{F} = -\xi v_{Ti}^2 \frac{d^2}{dx^2} + k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \frac{1 - \frac{iv_i}{\omega} J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{1 - J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}, \quad (29.3)$$

где

$$\xi = \frac{1 - \frac{iv_i}{\omega} J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{1 - J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)} - \frac{\omega}{2k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{J'_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{\left[1 - J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) \right]^2}, \quad (29.4)$$

а штрих означает производную по аргументу функции. Выражение (29.3) в пределе $|\omega| \gg k_{\parallel} v_{Ti}$ принимает следующий вид:

$$\hat{F} \simeq -\omega(\omega + iv_i) + k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \frac{3\omega + iv_i}{\omega + iv_i} + \frac{6\omega k_{\parallel}^4 v_{Ti}^4}{(\omega + iv_i)^3} - v_{Ti}^2 \left[\frac{3\omega + iv_i}{\omega + iv_i} + \frac{12\omega k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{(\omega + iv_i)^3} \right] \frac{d^2}{dx^2} + \dots \quad (29.5)$$

Приближение (29.3) ($k_{\parallel}^2 \gg \frac{d^2}{dx^2}$) позволяет и при кинетическом описании ионов использовать дифференциальное уравнение (28.5), в котором теперь

$$Q(x) = \frac{k_{\parallel}^2}{\xi} \left[\frac{1 - \frac{iv_i}{\omega} J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) - 1} + \frac{r_E^2 \omega_{Le}^2}{2r_{Di}^2} \frac{\omega_{Le}^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - i\omega v_e}{(\omega_{Le}^2 - \omega^2 - \omega_0^2 - i\omega v_e)^2 - \omega_0^2 (2\omega + iv_e)^2} \right]. \quad (29.6)$$

Минимум знаменателя второго слагаемого правой части формулы (29.6) соответствует условию комбинационного

взаимодействия волн. Выберем начало отсчета в точке такого минимума, который существует при выполнении неравенств

$$v_e < \omega \ll \omega_0 \sim \omega_{Le}.$$

Заметим, что при этом оказываются возможными два вида комбинационного взаимодействия волн:

$$\omega_{Le} = \omega_0 \pm \omega \left(1 - \frac{v_e^2}{8\omega^2} \right). \quad (29.7)$$

В заданном поле волны накачки нарастание колебаний возможно при знаке минус, что соответствует трансформации (распаду) волны накачки в высокочастотное ленгмюровское колебание и низкочастотную волну [30, 115]. В соответствии с этим выберем начало отсчета в точке, определяемой соотношением

$$\omega_{Le}(x=0) = \omega_0 - \omega \left(1 - \frac{v_e^2}{8\omega^2} \right), \quad (29.8)$$

и в ее окрестности рассмотрим возможность параметрического нарастания плазменных возмущений. Для этого сделаем замену переменных

$$\chi = \frac{\omega_0}{2\omega} \frac{x}{H} - 1$$

и, интересуясь областью слабых полей ($r_E \ll r_{Di}$), запишем уравнение (28.5) в виде

$$\frac{d^2 a}{d\chi^2} + \frac{4\omega^2}{\xi\omega_0^2} k_{\parallel}^2 H^2 \Lambda e^{i\varphi} \left[1 + \frac{b\chi}{\chi^2 - 1 - iv_e/\omega} \right] a = 0. \quad (29.9)$$

Здесь

$$b = \frac{r_E^2}{4r_{Di}^2} \frac{\omega_0}{\omega\Lambda} e^{-i\varphi}, \quad (29.10)$$

$$\Lambda e^{i\varphi} = \frac{1 - \frac{iv_i}{\omega} J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{J_+ \left(\frac{\bar{\omega}}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) - 1}, \quad (29.11)$$

где Λ и φ — соответственно модуль и фаза комплексного выражения, стоящего в правой части формулы (29.11).

Рассмотрим предварительно следствия, вытекающие из уравнения (29.9) в случае пространственно однородной плазмы, т. е. в пределе $H = \infty$. Тогда из (29.9), считая $\omega \gg \nu_i$, получаем

$$\frac{\operatorname{Re} J_+ \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) - 1 - i \operatorname{Im} J_+ \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)}{\left[\operatorname{Re} J_+ \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) - 1 \right]^2 + \left[\operatorname{Im} J_+ \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right) \right]^2} = i \frac{r_E^2}{4r_{Di}^2} \frac{\omega_0}{\nu_e}. \quad (29.12)$$

На пороге, где ω действительно, отсюда имеем

$$\operatorname{Re} J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{Ti}} \right) = 1, \quad \frac{r_E^2}{r_{Di}^2} = - \frac{4\nu_e}{\omega_0} \frac{1}{\operatorname{Im} J_+ \left(\frac{\omega}{k_{\parallel} v_{Ti}} \right)},$$

что дает на пороге периодической параметрической неустойчивости в пространственно однородной плазме с холодными электронами

$$\omega = 1,28 k_{\parallel} v_{Ti}, \quad \frac{r_E^2, \text{пор}}{r_{Di}^2} = 5,7 \frac{\nu_e}{\omega_0}. \quad (29.13)$$

Отсюда видно, что для такой плазмы порог периодической неустойчивости оказывается выше порога аperiodической неустойчивости. Этот вывод сохраняется и для плазмы с $T_e \sim T_i$.

Обратимся теперь к следствиям, вытекающим из уравнения (29.9) для неоднородной плазмы. Используем метод геометрической оптики с его правилами квазиклассического квантования [113, 114]. Точки поворота уравнения (29.9) даются формулой

$$\chi_{1,2} = -\frac{1}{2} b \mp \sqrt{1 + \frac{1}{4} b^2 + i \frac{\nu_e}{\omega}}. \quad (29.14)$$

Даже на пороге параметрической неустойчивости точки поворота являются комплексными. Поэтому для существования квазиклассического спектра возмущений, локализованных в ограниченной области пространства, необходимо, чтобы исходящие из точек поворота линии Стокса в плоскости комплексного переменного χ пересекали бы действительную ось [116]. Тогда в приближении

геометрической оптики с помощью (28.8) получаем

$$2 \frac{\omega}{\omega_0} k_{\parallel} H \varepsilon^{-1/2} \Lambda^{1/2} e^{\frac{i}{2} \int_{x_1}^{x_2} \varphi} d\chi \left(1 + \frac{b\chi}{\chi^2 - 1 - i\nu_e/\omega} \right)^{1/2} = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (29.15)$$

Анализ этого уравнения для границы периодической параметрической неустойчивости позволяет записать следующее соотношение [112]:

$$\frac{r_E^2}{r_{Di}^2} = \frac{8 \sqrt{3} (2n + 1) \nu_e}{k_{\parallel}^2 H v_{Ti}} + 5 \frac{k_{\parallel} v_{Ti}}{\omega_0} + 8 \frac{\nu_e}{\omega_0}. \quad (29.16)$$

В отличие от формулы (29.12), относящейся к случаю однородной плазмы, здесь опущено влияние черенковского взаимодействия волн с ионами, поскольку при достаточно сильной неоднородности параметрически возбуждаемые волны имеют фазовую скорость, значительно большую тепловой скорости ионов. Согласно формуле (29.16) минимальный порог осуществляется при

$$k_{\parallel}^3 = \frac{3}{5} (2n + 1) \frac{\omega_0 \nu_e}{H v_{Ti}^2} \quad (29.17)$$

и соответственно

$$\frac{r_E^2}{r_{Di}^2} \text{ пор} \approx 8 \frac{\nu_e}{\omega_0} + 14 (2n + 1)^{1/3} \left(\frac{\nu_e v_{Ti}}{\omega_0^2 H} \right)^{1/3}. \quad (29.18)$$

Отсюда видно, что в неоднородной плазме имеет место резкое увеличение пороговой напряженности электрического поля волны накачки, при котором становится возможной периодическая неустойчивость.

Сравнивая пороги периодической (29.18) и аperiodической (28.18) параметрической неустойчивости, получаем

$$\frac{(r_E^2)_{\text{пер}}}{(r_E^2)_{\text{апер}}} \sim \frac{2 \left[1 + \left(\frac{l_e}{H} \frac{\omega_0}{\nu_e} \frac{v_{Ti}}{v_{Te}} \right)^{1/3} \right]}{1 + \frac{l_e}{H}}. \quad (29.19)$$

Это означает, что порог периодической неустойчивости в плазме с холодными электронами может быть меньше по-

рога аperiodической неустойчивости лишь в очень резко неоднородной плазме, когда $H < l_e \left(\frac{v_e}{\omega_0} \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} \right)^{1/2}$.

Другой эффект стабилизирующего влияния неоднородности распределения частиц плазмы на периодическую параметрическую неустойчивость был выявлен в работах [88, 111] в условиях неизотермической плазмы с горячими электронами ($T_e \gg T_i$), когда без поля накачки существуют слабо затухающие ионно-звуковые волны. При этом в плазме с резким нарастанием плотности в слое толщиной H возможно существование при $k_{\parallel} H \ll 1$ локализованных внутри этого слоя высокочастотных волн с частотой порядка электронной ленгмюровской и распространяющихся вглубь плазмы ионно-звуковых волн. Поскольку параметрическое взаимодействие волны накачки, высокочастотной плазменной волны и ионно-звуковой волны происходит лишь в области размером $\sim \lambda \sim \sim 1/k_{\parallel}$, а затухание ионно-звуковой волны происходит во всем объеме плазмы толщиной $d \gg \lambda$, то эффективный инкремент параметрической неустойчивости состоит из разности инкремента области взаимодействия волны, умноженного на (λ/d) и декремента ионно-звуковых волн. Естественно, что соответственно возрастает значение пороговой напряженности поля волны накачки. Аналогичный эффект повышения порога параметрической неустойчивости обнаружен в работе [111] при взаимодействии волны накачки с локализованной в объеме плазмы высокочастотной ленгмюровской волной и распространяющейся по всей плазме волной ионного звука.

ГЛАВА VI

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ НА ПЛАЗМУ

§ 30. Уравнения квазилинейного приближения для распределений частиц и неравновесного поля в турбулентном состоянии плазмы, возникающем при параметрическом воздействии переменного электрического поля

В изложении предшествующих глав мы рассмотрели воздействие внешнего поля на колебания плазмы. Такое воздействие являлось нелинейным эффектом, причем в случае слабого поля накачки изменение спектров плазменных колебаний характеризовалось квадратичными по амплитуде внешнего поля выражениями, а в случае сильного поля соответствующая зависимость была более сложной. В то же время все такое воздействие мы рассмотрели в рамках линейной теории плазменных колебаний. Это в значительной мере оставляет пока открытым вопрос о последствиях возникновения рассмотренных выше неустойчивостей, влияние которых на плазму представляет собой нелинейный для раскачиваемых возмущений эффект. Настоящая глава излагает теорию нелинейных эффектов, обусловленных возникшим в результате неустойчивости полем плазменных колебаний. Состояние плазмы с таким полем большой интенсивности мы будем называть турбулентным.

В этом параграфе мы получим кинетические уравнения частиц плазмы, учитывающие обратное воздействие возникшего в плазме поля на частицы, а также уравнения,

описывающие изменение поля в результате изменения распределений частиц [50]. Приближение, в котором будут записаны такие уравнения, в теории неустойчивой плазмы было предложено Романовым и Филипповым [51], Веденовым, Велиховым и Сагдеевым [52], Драммондом и Пайнсом [194] и получило название квазилинейного приближения (см. подробнее [53, 9, 195]). В нем, в частности, пренебрегаются эффектами нелинейного взаимодействия плазменных волн.

Будем считать внешнее электрическое поле пространственно однородным и монохроматическим $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega_0 t$. Тогда, имея в виду развитие неустойчивостей, связанных с потенциальным полем возмущений, можно строить теорию плазмы с помощью кинетических уравнений для функций распределения частиц и уравнений для корреляционных функций [54, 55, 9]. Более того, в пренебрежении эффектами нелинейного взаимодействия плазменных волн друг с другом достаточно ограничиться лишь учетом парных корреляций (ср. [56]). Ограничимся рассмотрением пространственно однородных распределений плазмы в отсутствие магнитного поля. Тогда в соответствии со сказанным можно записать следующую систему уравнений для функций распределения и парных корреляционных функций $g_{\alpha\beta}$ частиц плазмы, взаимодействующих по закону Кулона [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial t} + e_\alpha \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{p}_\alpha} &= \left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_{st} \equiv \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta d\mathbf{r}_\beta \frac{\partial U_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|)}{\partial \mathbf{r}_\beta} g_{\alpha\beta}, \quad (30.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \mathbf{v}_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_\beta} + \right. \\ \left. + \mathbf{E}(t) \left(e_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + e_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right) \right\} g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t) = \\ = \frac{\partial U_{\alpha\beta}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|)}{\partial \mathbf{r}_\alpha} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} f_\beta - f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right) + \\ + \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \sum_\gamma \int d\mathbf{r}_\gamma d\mathbf{p}_\gamma g_{\beta\gamma}(\mathbf{r}_\beta, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{r}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, t) \frac{\partial U_{\alpha\gamma}(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\gamma|)}{\partial \mathbf{r}_\alpha} + \\ + \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} \sum_\gamma \int d\mathbf{r}_\gamma d\mathbf{p}_\gamma g_{\alpha\gamma}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{r}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma, t) \frac{\partial U_{\beta\gamma}(|\mathbf{r}_\beta - \mathbf{r}_\gamma|)}{\partial \mathbf{r}_\beta}. \quad (30.2) \end{aligned}$$

Поскольку в пространственно однородном состоянии парная коррелятивная функция зависит от разности координат частиц, то удобно воспользоваться разложением Фурье

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{r}_\beta, \mathbf{p}_\beta, t) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t). \quad (30.3)$$

Кроме того, будем здесь интересоваться таким турбулентным состоянием плазмы, в котором роль обычных кулоновских столкновений пренебрежимо мала, а уровень флуктуаций поля на много превышает тепловой. Это позволяет опустить в правой части уравнения (30.2) неоднородное слагаемое, не содержащее парных корреляционных функций. Тогда наша система уравнений может быть представлена в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + e_\alpha \mathbf{E}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right\} f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \sum_\beta \int d\mathbf{p}_\beta \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi e_\alpha e_\beta}{ik^2} \mathbf{k} G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t), \quad (30.4)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i(\mathbf{k}, \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) + \mathbf{E}(t) \left(e_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} + e_\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\beta} \right) \right\} \times \\ \times G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t) = \\ = i\mathbf{k} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \frac{4\pi e_\alpha}{k^2} \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma G_{\beta\gamma}(-\mathbf{k}, \mathbf{p}_\beta, \mathbf{p}_\gamma, t) - \\ - i\mathbf{k} \frac{\partial f_\beta}{\partial \mathbf{p}_\beta} \frac{4\pi e_\beta}{k^2} \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma G_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\gamma, t). \quad (30.5)$$

Рассмотрим решения уравнений (30.5). Заметим, что эти решения могут быть представлены в виде

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta, t) = \psi_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, t) \psi_\beta(-\mathbf{k}, \mathbf{p}_\beta, t). \quad (30.6)$$

При этом функции ψ удовлетворяют системе уравнений *)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha + e_\alpha \mathbf{E}(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \right\} \psi_\alpha(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\alpha, t) = ie_\alpha \varphi_k(t) \mathbf{k} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{p}_\alpha}, \quad (30.7)$$

где

$$\varphi_k(t) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\gamma e_\gamma \int d\mathbf{p}_\gamma \psi_\gamma(\mathbf{k}, \mathbf{p}_\gamma, t). \quad (30.8)$$

*) Ср. также [57, 58].

Таким образом, для дальнейшего построения кинетической теории турбулентного состояния плазмы требуется получить решение системы (30.7), причем правая часть кинетического уравнения (30.4), представляющая собой обобщенный интеграл столкновений, записывается теперь в виде

$$\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right]_{st} = - \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \int \frac{dk}{(2\pi)^3} e_\alpha i k \varphi_{-k}(t) \psi_\alpha(k, p_\alpha, t). \quad (30.9)$$

Заметим, что как следствие уравнений (30.4) можно записать следующий закон сохранения энергии частиц и потенциального электрического поля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_\alpha \int d p_\alpha f_\alpha(p_\alpha, t) \frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{8\pi} \varphi_{-k}(t) \varphi_k(t) \right\} = \\ = \mathbf{E}(t) \sum_\alpha e_\alpha \int d p_\alpha v_\alpha f_\alpha \equiv \mathbf{E}(t) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (30.10)$$

Легко видеть, что $\varphi_k(t)$ является потенциалом электрического поля возмущений, возникающих в турбулентном состоянии плазмы.

Рассматривая времена, удаленные от начального момента на много периодов колебаний, и пренебрегая начальным значением ψ , можно записать уравнение (30.7) в виде

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(k, p_\alpha, t) = \\ = \int_{-\infty}^t dt' \exp \left\{ i k v_\alpha (t - t') + i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{t'}^t dt'' (t'' - t') \mathbf{E}(t'') \mathbf{k} \right\} \times \\ \times i e_\alpha \varphi_k(t') \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} f_\alpha \left(p_\alpha + e_\alpha \int_{t'}^t dt'' \mathbf{E}(t''), t' \right). \end{aligned} \quad (30.11)$$

Подставив это выражение в (30.8), получаем следующее уравнение для потенциала турбулентного поля:

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) = \int_{-\infty}^t dt' \varphi_k(t') \sum_\alpha \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d p_\alpha i \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \times \\ \times f_\alpha \left(p_\alpha + e_\alpha \int_{t'}^t dt'' \mathbf{E}(t''), t' \right) \exp \left\{ i k v_\alpha (t' - t) + \right. \\ \left. + i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{t'}^t dt''' (t''' - t') \mathbf{k} \mathbf{E}(t''') \right\}. \end{aligned} \quad (30.12)$$

Соответственно для кинетического уравнения получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial t} + e_\alpha \mathbf{E}(t) \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial \mathbf{p}_\alpha} = \\ & = \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, i}} e_\alpha^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \varphi_{-\mathbf{k}}(t) \int_{-\infty}^t dt' \varphi_{\mathbf{k}}(t') \exp \left\{ i \mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha (t' - t) + \right. \\ & \left. + i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \int_{t'}^t dt'' (t'' - t') \mathbf{k} \mathbf{E}(t'') \right\} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, j}} f_\alpha \left(\mathbf{p}_\alpha + e_\alpha \int_{t'}^t dt'' \mathbf{E}(t''), t' \right). \end{aligned} \quad (30.13)$$

Система уравнений (30.12), (30.13) содержит величины, характеризующие турбулентное состояние плазмы в электрическом поле.

Введем вместо f_α распределение F_α :

$$F_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t) = f_\alpha \left(\mathbf{p}_\alpha - \frac{1}{\omega_0} e_\alpha \mathbf{E}_0 \cos \omega_0 t, t \right). \quad (30.14)$$

При этом для монохроматической зависимости внешнего поля от времени можно воспользоваться разложениями

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-in\omega_0 t) \varphi^{(n)}(\mathbf{k}, t), \quad (30.15)$$

$$F_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\omega_0 t} F_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha, t), \quad (30.16)$$

причем амплитуды $\varphi^{(n)}(\mathbf{k}, t)$ и $F_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha, t)$ мало изменяются за период колебания внешнего электрического поля.

Из уравнений (30.12) и (30.13) получаем следующую систему уравнений для амплитуд разложений (30.15) и (30.16):

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\mathbf{k}, t) = & \int_{-\infty}^0 dt' \sum_{l, m, s=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_\alpha^2}{k^2} \int d\mathbf{p}_\alpha e^{i\mathbf{k} \mathbf{v}_\alpha t'} i \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\alpha} \times \\ & \times F_\alpha^{(s)}(\mathbf{p}_\alpha, t + t') J_{l-s}(a_\alpha) J_{l+m-n}(a_\alpha) e^{-i(l+m)\omega_0 t'} \varphi^{(m)}(\mathbf{k}, t + t'), \end{aligned} \quad (30.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t)}{\partial t} - in\omega_0 F_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t) &= \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, i}} e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \times \\ &\times \sum_{m, l, s, u=+\infty}^{+\infty} J_{m+u-n}(a_{\alpha}) J_{u-s-l}(a_{\alpha}) \varphi^{(m)}(-\mathbf{k}, t) \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 dt' e^{-iu\omega_0 t' + i\mathbf{k}v_{\alpha} t'} \varphi^{(s)}(\mathbf{k}, t+t') \frac{\partial F_{\alpha}^{(l)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t+t')}{\partial p_{\alpha, j}}. \end{aligned} \quad (30.18)$$

Заметим, что скорость нагрева плазмы характеризуется средней работой внешнего поля над плазмой. При этом для такой работы имеем

$$\langle \mathbf{E}(t) \mathbf{j}(t) \rangle = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int d\mathbf{p}_{\alpha} E_0 v_{\alpha} \frac{1}{2i} [F_{\alpha}^{(1)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t) - F_{\alpha}^{(-1)}(\mathbf{p}_{\alpha}, t)], \quad (30.19)$$

где усреднение проведено по периоду колебаний внешнего электрического поля.

Приближенное решение уравнения (30.18) для $n \neq 0$ получается при пренебрежении производной по времени. При этом возникновение в знаменателе $n\omega_0$ позволяет высказать предположение об относительной малости в течение длительного времени амплитуд $F_{\alpha}^{(n)}$ по сравнению с $F_{\alpha}^{(0)}$. В соответствии с этим в правых частях формулы (30.17) и формулы (30.18) при $n = 0$ будем оставлять только $F_{\alpha}^{(0)}$.

Проведем дальнейшую детализацию уравнений (25.17) и (25.18) применительно к случаю плазменных колебаний, частота которых значительно превышает инкремент. Такое положение имеет место как в условиях параметрического резонанса в холодной плазме (см. § 3) вблизи порогового значения (3.11) частоты внешнего поля, так и при кинетической параметрической неустойчивости плазмы относительно раскачки ионно-звуковых колебаний (см. §§ 6 и 10).

Обозначим $\omega_r(\mathbf{k}, t)$ частоту плазменных колебаний моды r и представим амплитуду поля $\varphi^{(n)}$ в виде

$$\varphi^{(n)}(\mathbf{k}, t) = \sum_r \exp \left\{ -i \int_0^t dt' \omega_r(\mathbf{k}, t') \right\} \varphi_n(\omega_r(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t), \quad (30.20)$$

где ω_r и φ_n мало меняются за период плазменного колебания. Если $\omega_r \ll \omega_0$, то медленная зависимость $\varphi^{(n)}$ от времени очевидна. Однако при параметрическом резонансе

имеет место положение, когда $\omega_r \approx \omega_0$. В этом случае простым изменением обозначений, очевидно, можно достичь того, что роль плазменной частоты будет играть разность $\omega_r - \omega_0$. Памятуя это, подставим (30.20) в правую часть уравнения (30.18) при $n = 0$. Тогда с точностью до первых производных медленно изменяющихся величин получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, i}} e_\alpha^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_{m, l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l+m}(a_\alpha) J_{l-s}(a_\alpha) \times \\ &\times \sum_{r, u} \exp \left\{ -i \int dt'' [\omega_r(-\mathbf{k}, t'') + \omega_u(\mathbf{k}, t'')] \right\} \times \\ &\times \varphi_m(\omega_r(-\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \times \left\{ \frac{i}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \right] \right\} \times \\ &\times \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \times \\ &\times \left[\frac{\partial^2}{\partial \omega_u^2(\mathbf{k}, t)} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \right] \times \\ &\times \left\{ \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \frac{\partial F_\alpha^{(0)}(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial p_{\alpha, j}} \right\}, \quad (30.21) \end{aligned}$$

где $(x + i0)^{-1} = -i\pi\delta(x) + P/x$ и P означает главное значение. В правую часть входит как медленная зависимость от времени, так и осциллирующая с частотами плазменных колебаний. Поэтому, усреднив (30.21) по периоду таких колебаний, получим для \bar{F}_α — медленно изменяющейся части $F_\alpha^{(0)}$ — следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, i}} e_\alpha^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_{m, l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l-m}(a_\alpha) J_{l-s}(a_\alpha) \times \\ &\times \sum_u \left\{ \varphi_{-m}(-\omega_u(\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \times \right. \\ &\times \left[\pi\delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha) \frac{\partial \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial p_{\alpha, j}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \frac{P}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) - \mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial t \partial p_{\alpha, j}} \right] \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial p_{\alpha, j}} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \frac{P}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) - \mathbf{k}v_\alpha} \right) \times \right. \\
& \quad \times \varphi_{-m}(-\omega_u(\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \left. \right] - \\
& - i \frac{\pi}{2} \frac{\partial \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial p_{\alpha, j}} \frac{\partial \delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) - \mathbf{k}v_\alpha)}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \times \\
& \quad \times \left[\varphi_{-m}(-\omega_u(\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \frac{d}{dt} \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) - \right. \\
& \quad \left. - \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \frac{d}{dt} \varphi_{-m}(-\omega_u(\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \right] \}. \quad (30.22)
\end{aligned}$$

Это уравнение представляет собой аналог кинетического уравнения квазилинейного приближения (см., например, [9, 52, 53]). Аналогично может быть проведено усреднение уравнений для гармоник с $n \neq 0$. В результате получаем

$$\begin{aligned}
\bar{F}_\alpha^{(n)}(\mathbf{p}_\alpha, t) &= \frac{i}{n\omega_0} \frac{\partial}{\partial p_{\alpha, i}} e_\alpha^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_{m, l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l-s}(a_\alpha) \times \\
& \quad \times J_{l-n-m}(a_\alpha) \sum_u \varphi_{-m}(-\omega_u(\mathbf{k}, t), -\mathbf{k}, t) \times \\
& \quad \times \left\{ \frac{i}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + io - \mathbf{k}v_\alpha} - \right. \\
& - \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + io - \mathbf{k}v_\alpha} \right] \frac{d}{dt} - \\
& - \left. \frac{1}{2} \frac{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \left[\frac{\partial^2}{\partial \omega_u(\mathbf{k}, t)^2} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}, t) + io - \mathbf{k}v_\alpha} \right] \right\} \times \\
& \quad \times \left\{ \varphi_s(\omega_u(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \frac{\partial \bar{F}_\alpha(\mathbf{p}_\alpha, t)}{\partial p_{\alpha, j}} \right\}. \quad (30.23)
\end{aligned}$$

Для получения уравнений, определяющих медленно меняющиеся амплитуды продольного поля, подставляем (30.20) в уравнение (30.17) и усредняем по времени. Тогда также с точностью до первых производных по времени получаем

$$\begin{aligned}
\varphi_n(\omega_r(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) &+ \sum_\alpha \sum_{s, l=-\infty}^{+\infty} J_{l-s}(a_\alpha) J_{l-n}(a_\alpha) \times \\
& \quad \times \delta \varepsilon_\alpha(\omega_r(\mathbf{k}, t) + l\omega_0, \mathbf{k}, t) \varphi_s(\omega_r(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) = \\
& = i \sum_{l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l-s}(a_\alpha) J_{l-n}(a_\alpha) \times
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ -\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta \varepsilon_{\alpha}(\omega_r(\mathbf{k}, t) + l\omega_0, \mathbf{k}, t)}{\partial \omega_r(\mathbf{k}, t)} \varphi_s(\omega_r(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_{\alpha}(\omega_r(\mathbf{k}, t) + l\omega_0, \mathbf{k}, t)}{\partial \omega_r^2(\mathbf{k}, t)} \frac{\partial \omega_r(\mathbf{k}, t)}{\partial t} \varphi_s(\omega_r(\mathbf{k}, t), \mathbf{k}, t) \right\},$$

где

$$\delta \varepsilon_{\alpha}(\omega, \mathbf{k}, t) = \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int d\mathbf{p}_{\alpha} \frac{1}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\alpha}} \mathbf{k} \frac{\partial \bar{F}_{\alpha}(\mathbf{p}_{\alpha}, t)}{\partial \mathbf{p}_{\alpha}}. \quad (30.25)$$

Уравнения (30.22)—(30.24) описывают изменение во времени распределений частиц и колебаний плазмы в том случае, когда инкременты колебаний малы по сравнению с их частотой.

В условиях развития кинетической параметрической неустойчивости плазмы относительно раскачки потенциальных колебаний, теория которой изложена в § 6, при частоте внешнего поля, значительно превышающей электронную ленгмюровскую, нарастающие колебания имеют частоту, близкую к ионной ленгмюровской. Ясно, что частота таких колебаний со временем не меняется. Иными словами, в таких условиях пренебрежимо медленно изменяются дисперсионные свойства колебаний. Это позволяет пренебречь в уравнениях (30.22)—(30.24) временными производными частоты плазменных колебаний, а также и производными функции распределения частиц в правой части (30.22). При условии возможности такого пренебрежения рассмотрим теперь полученные уравнения более детально для плазмы, состоящей из электронов ($a_e = a$) и одного сорта ионов, причем влиянием внешнего электрического поля на ионы пренебрежем, имея в виду, что такое влияние обратно пропорционально массе частиц. Тогда уравнение (30.22) принимает вид уравнения Фоккера — Планка, описывающего диффузию в пространстве импульсов:

$$\frac{\partial \bar{F}_{\alpha}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[D_{ij}^{\alpha}(\mathbf{p}, t) \frac{\partial \bar{F}_{\alpha}(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j} \right]. \quad (30.26)$$

Соответственно для электронного коэффициента диффузии имеем следующее выражение:

$$D_{ij}^{(e)}(\mathbf{p}, t) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\pi \delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right) \frac{d}{dt} \right] |\Phi_l(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\Phi_l^*(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{d}{dt} \Phi_l(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) - \right. \\
& \left. - \Phi_l(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{d}{dt} \Phi_l^*(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \right] \times \\
& \quad \times i \frac{\pi}{2} \frac{\partial \delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v)}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \Bigg\}, \quad (30.27)
\end{aligned}$$

где

$$\Phi_l(\omega, \mathbf{k}, t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_{l-s}(a) \varphi_s(\omega, \mathbf{k}, t). \quad (30.28)$$

Ионный коэффициент диффузии отличается от (30.27) заменой Φ_l на φ_l . Отметим, что хотя внешнее электрическое поле не оказывает влияния на движение ионов, все же в ионном коэффициенте диффузии сохраняется суммирование по гармоникам внешнего поля. Необходимость этого может быть понята, например, на основании рассуждений, приведенных выше, об определении частоты плазменных колебаний в связи с разложением (30.20).

Для гармоник $n \neq 0$ электронной функции распределения из (30.23) получаем

$$\bar{F}_e^{(n)}(\mathbf{p}, t) = \frac{i}{n\omega_0} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[D_{ij}(\mathbf{p}, t; n) \frac{\partial \bar{F}_e(\mathbf{p}, t)}{\partial p_j} \right], \quad (30.29)$$

где

$$\begin{aligned}
D_{ij}(\mathbf{p}, t; n) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Phi_{l-n}^*(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \times \\
\times \left\{ \frac{i}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) + i0 - \mathbf{k}v} - \right. \\
\left. - \left(\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) + i0 - \mathbf{k}v} \right) \frac{d}{dt} \right\} \Phi_l(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t). \quad (30.30)
\end{aligned}$$

Наконец, уравнение поля (30.24) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_n \{ 1 + \delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k}) \} + \frac{d\varphi_n}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k}) + \\
+ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{l-n}(a) \left\{ \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}) \Phi_l + \right. \\
\left. + i \frac{d\Phi_l}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \delta\varepsilon_l(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}) \right\} = 0. \quad (30.31)
\end{aligned}$$

Это уравнение может быть упрощено применительно к рассмотрению низкочастотных колебаний поля, возникающих при параметрической раскачке в плазме. Для этого прежде всего умножим уравнение (30.31) на $J_{m-n}(a)$ и просуммируем по n от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \Phi_m \{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + m\omega_0, \mathbf{k})\} + i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta\varepsilon_e(\omega + m\omega_0, \mathbf{k})}{\partial \omega} \Phi_m \right] = \\ = - \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_{m-s}(a) \times \\ \times \left\{ \delta\varepsilon_i(\omega + s\omega_0, \mathbf{k}) \varphi_s + i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta\varepsilon_i(\omega + s\omega_0, \mathbf{k})}{\partial \omega} \varphi_s \right] \right\}. \quad (30.32) \end{aligned}$$

Это соотношение позволяет теперь записать уравнение (30.31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_n \{1 + \delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})\} - \sum_{l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l-n}(a) J_{l-s}(a) \times \\ \times \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}) \delta\varepsilon_i(\omega + s\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \varphi_s = \\ = - i \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})}{\partial \omega} \varphi_n \right] + \\ + i \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_{l-n}(a) \frac{\partial \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}) / \partial \omega}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \frac{d\varphi_l}{dt} + \\ + i \sum_{l, s=-\infty}^{+\infty} J_{l-n}(a) J_{l-s}(a) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \times \\ \times \frac{\partial \delta\varepsilon_i(\omega + s\omega_0, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{d\varphi_s}{dt}. \quad (30.33) \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно непосредственно использовать факт малости частоты колебаний по сравнению с частотой внешнего поля. Действительно, при этом является малой $\delta\varepsilon_i(\omega + s\omega_0, \mathbf{k})$ при $s \neq 0$. Тем самым становится выделенной нулевая гармоника поля φ_0 , причем

$$\Phi_m \approx - \frac{J_m(a) \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + m\omega_0, \mathbf{k})} \varphi_0, \quad (30.34)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n \approx \frac{\varphi_0 \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_i(\omega + n\omega_0, \mathbf{k})} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) J_{l-n}(a) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})}. \quad (30.35) \end{aligned}$$

Для самой нулевой гармоники поля имеем уравнение

$$\left(\varphi_0 + i \frac{d\varphi_0}{dt} \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \left\{ 1 + \delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{J_l^2(a)}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \right\} = 0. \quad (30.36)$$

Удержание в этом уравнении слагаемого с производной по времени, в нашем рассмотрении являющегося малым, оправдано тем, что другое слагаемое содержит малый множитель, поскольку частота (действительная величина) удовлетворяет в условиях малости мнимых частей диэлектрической проницаемости дисперсионному уравнению

$$1 + \delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k}) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{J_l^2(a)}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} = 0, \quad (30.37)$$

которое совпадает с действительной частью уравнения (6.1). Поэтому окончательно уравнение для нулевой гармоники поля записывается в виде

$$\frac{d\varphi_0}{dt} - \gamma(\omega, \mathbf{k}, t) \varphi_0(\omega, \mathbf{k}, t) = 0, \quad (30.38)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\omega, \mathbf{k}, t) = & \left\{ \frac{\delta \varepsilon_i''(\omega, \mathbf{k}, t)}{\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k}, t)} - \right. \\ & \left. - \delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k}, t) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^2(a) \frac{\delta \varepsilon_e''(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}, t)}{[1 + \delta \varepsilon_e'(\omega + l\omega_0, \mathbf{k}, t)]^2} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\delta \varepsilon_i'(\omega, \mathbf{k}, t) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^2(a) \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_e'(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \right] \right\}^{-1}. \quad (30.39) \end{aligned}$$

Соотношения (30.34), (30.35) и уравнение (30.38) позволяют записать электронный и ионный коэффициенты диффузии кинетического уравнения (30.26) в следующем виде:

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(e)}(p, t) = & e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 |\delta \varepsilon_i(\omega_u(\mathbf{k}), t)|^2 \times \\ & \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^2(a) \frac{1}{|1 + \delta \varepsilon_e(\omega_u(\mathbf{k}) + l\omega_0, \mathbf{k})|^2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \pi \delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{P}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v} \right] \right\}, \quad (30.40)$$

$$D_{rj}^{(i)}(\mathbf{p}, t) = e_i^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_r k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\ \times |\delta \varepsilon_i(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k})|^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|1 + \delta \varepsilon_i(\omega_u(\mathbf{k}) + l\omega_0, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(a) J_{m-l}(a) \frac{\delta \varepsilon_e(\omega_u + m\omega_0, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega_u + m\omega_0, \mathbf{k})} \right|^2 \times \\ \times \left\{ \pi \delta(l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{P}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v} \right] \right\}. \quad (30.44)$$

В последней формуле слагаемые с $l \neq 0$ являются в определенном смысле малыми (хотя для ряда проблем они могут быть и определяющими) в силу того, что $\omega_0 \gg kv_{Ti}$. Если такими слагаемыми пренебречь, то имеем

$$D_{ij}^{(i)}(\mathbf{p}, t) = e_i^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\ \times \left\{ \pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{P}{\omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v} \right] \right\}. \quad (30.42)$$

Это выражение совпадает с возникающим обычно в квазилинейной теории, учитывающей обратное влияние колебаний на распределение частиц неустойчивой плазмы [52, 53, 9].

Высшие гармоники электронной функции распределения (30.29) также могут быть выражены через амплитуду нулевой гармоники потенциала продольного поля. При этом для (30.30) получаем

$$D_{ij}(\mathbf{p}, t; n) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) J_{l-n}(a) |\delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})|^2 \times \\ \times \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_l(\omega + l\omega_0, \mathbf{k})} \frac{1}{1 + \delta \varepsilon_l(\omega + [l-n]\omega_0, \mathbf{k})} \times$$

$$\times \left\{ \frac{i}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) + i0 - \mathbf{k}v} - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \left[\frac{\partial}{\partial \omega_u(\mathbf{k})} \frac{1}{l\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k}) + i0 - \mathbf{k}v} \right] \right\} \quad (30.43)$$

С помощью этого выражения и формулы (30.19) для средней работы внешнего поля можем записать следующее выражение [50, 59]:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{j}(t) \rangle &= \frac{\omega_0}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} a \frac{k^2}{4\pi} \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\ &\times |\delta\varepsilon_i(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k})|^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{J_{l-1}(a)}{1 + \delta\varepsilon_e^*(\omega_u + [l-1]\omega_0, \mathbf{k})} + \right. \\ &+ \left. \frac{J_{l+1}(a)}{1 + \delta\varepsilon_e^*(\omega_u + [l+1]\omega_0, \mathbf{k})} \right] \frac{J_l(a)}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega_u + l\omega_0, \mathbf{k})} \times \\ &\times \left\{ -i\delta\varepsilon_e(\omega_u + l\omega_0, \mathbf{k}) + \right. \\ &+ \left. \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \delta\varepsilon_e(\omega_u + l\omega_0, \mathbf{k}) \right\}. \quad (30.44) \end{aligned}$$

Эта формула в соответствии с законом сохранения энергии (30.10) определяет рост энергии частиц плазмы и плазменных волн в результате воздействия внешнего переменного во времени электрического поля. Необходимо заметить, что разложение по степеням малых мнимых частей диэлектрических проницаемостей, использованное нами при записи дисперсионного уравнения (30.37) и выражения для инкремента (30.39), оказывается неудобным при сравнительно слабых полях, когда параметрическая неустойчивость плазмы имеет место в узкой резонансной области вблизи электронной ленгмюровской частоты (см. гл. II). Это не трудно понять, записав выражение, стоящее в фигурной скобке уравнения (30.36), с точностью до членов, квадратичных по напряженности внешнего поля [$(\mathbf{k}r_E)^2 \ll k^2 r_{De}^2 \ll 1$]:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\mathbf{k}r_E}{2kr_{De}} \right)^2 \frac{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2] \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\} + \\ + \frac{2i}{\omega} \left\{ \gamma_s - \left(\frac{\mathbf{k}r_E}{2kr_{De}} \right)^2 \frac{\omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0 \tilde{\gamma}}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\}. \quad (30.45) \end{aligned}$$

Здесь обозначения подобны использованным в главе II (ср. (8.1)) с тем отличием, что в этом параграфе мы пренебрегаем в декрементах затухания столкновениями заряженных частиц и учитываем отличие распределения от максвелловского:

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{2} \omega_0 \delta \varepsilon_e''(\omega_0, \mathbf{k}), \quad \gamma_s = \frac{\omega^3}{2\omega_{Li}^2} [\delta \varepsilon_e''(\omega, \mathbf{k}) + \delta \varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})].$$

Из формулы (30.45) видно, что пренебрежение в знаменателе высокочастотным электронным декрементом $\tilde{\gamma}$ приводит к особенности при равенстве $\Delta\omega_0$ частоте ионно-звуковых волн $\omega_s(\mathbf{k}) = \omega_{Li} \mathbf{k} r_{De}$. Поэтому в случае слабого поля вместо (30.37) удобно использовать дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \omega_s^2) \{[(\Delta\omega_0)^2 + \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2\} = \\ = \left(\frac{\mathbf{k} r_E}{2kr_{De}}\right)^2 \omega_s^2 [(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2] \omega_0 \Delta\omega_0, \end{aligned} \quad (30.46)$$

а в качестве инкремента γ уравнения (30.38) — следующее выражение:

$$\begin{aligned} \gamma(\omega, \mathbf{k}, t) = \frac{\gamma_s - \left(\frac{\mathbf{k} r_E}{2kr_{De}}\right)^2 \frac{\omega_s^2 \omega_0 \tilde{\gamma} \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2}}{\frac{\omega}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\omega_s^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\mathbf{k} r_E}{2kr_{De}}\right)^2 \times \right. \right.} \\ \left. \left. \times \frac{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2] \omega_0 \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\} \right)} = \\ = - \left\{ \gamma_s - \left(\frac{\mathbf{k} r_E}{2kr_{De}}\right)^2 \frac{\omega_s^2 \omega_0 \tilde{\gamma} \Delta\omega_0}{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2} \right\} \times \\ \times \left(1 - \left(\frac{\mathbf{k} r_E}{2kr_{De}}\right)^2 \frac{\omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0 \{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 - 4\tilde{\gamma}^2 [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2]\}}{\{[(\Delta\omega_0)^2 - \omega^2 + \tilde{\gamma}^2]^2 + 4\omega^2 \tilde{\gamma}^2\}^2} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (30.47)$$

Заметим, что в рассматриваемой нами ситуации при детальных расчетах следует внимательно проверять выполнение предположения о пренебрежении временными производными частоты, диэлектрической проницаемости и (в правой части кинетического уравнения) функции распределения. Выпишем здесь также коэффициенты диффузии в пространстве импульсов, получаемые в приближении

слабого поля для резонансной области:

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^{(e)}(p, t) = e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \frac{\omega_s^4(\mathbf{k})}{\omega_u^4(\mathbf{k})} \times \\
 \times \left\{ \pi \delta(\omega_u - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \frac{P}{\omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v} + \right. \\
 + \frac{1}{16} \frac{(\mathbf{k}v_E)^2}{k^4 r_{De}^4} \left(\frac{1}{[\Delta\omega_0 + \omega_u(\mathbf{k})]^2 + \tilde{\gamma}^2} [\pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) + \omega_0 - \mathbf{k}v) - \right. \\
 \left. - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \frac{1}{\omega_u(\mathbf{k}) + \omega_0 - \mathbf{k}v}] + \frac{1}{[\Delta\omega_0 - \omega_u(\mathbf{k})]^2 + \tilde{\gamma}^2} \times \right. \\
 \left. \times \left[\pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) - \omega_0 - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \times \right. \right. \\
 \left. \left. \times \frac{1}{\omega_u(\mathbf{k}) - \omega_0 - \mathbf{k}v} \right] \right\}. \quad (30.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^{(i)}(p, t) = e_i^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\
 \times \left\{ \pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \frac{P}{\omega_u(\mathbf{k}) - \mathbf{k}v} + \right. \\
 + \frac{1}{16} \frac{(\mathbf{k}v_E)^2 \omega_s^4}{k^4 r_{De}^4 \omega_u^4(\mathbf{k})} \left(\frac{1}{[(\Delta\omega_0) + \omega_u(\mathbf{k})]^2 + \tilde{\gamma}^2} \left[\pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) + \omega_0 - \right. \right. \\
 \left. \left. - \mathbf{k}v) - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \frac{1}{\omega_u(\mathbf{k}) + \omega_0 - \mathbf{k}v} \right] + \right. \\
 \left. + \frac{1}{[\Delta\omega_0 - \omega_u(\mathbf{k})]^2 + \tilde{\gamma}^2} \left[\pi \delta(\omega_u(\mathbf{k}) - \omega_0 - \mathbf{k}v) - \right. \right. \\
 \left. \left. - \gamma(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t) \frac{\partial}{\partial \omega_u} \frac{1}{\omega_u(\mathbf{k}) + \omega_0 - \mathbf{k}v} \right] \right\}. \quad (30.49)
 \end{aligned}$$

Наконец, формулу (30.44) можно записать в виде

$$\langle E(t) j(t) \rangle = \frac{1}{2} \sigma E_0^2, \quad (30.50)$$

где турбулентная проводимость определена формулой

$$\begin{aligned}
 \sigma = \frac{1}{4} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(\mathbf{k}v_E)^2}{E_0^2} \frac{k^2}{4\pi} \sum_u |\varphi_0(\omega_u(\mathbf{k}), \mathbf{k}, t)|^2 \times \\
 \times \frac{\omega_{Li}^4}{\omega_u^4} \tilde{\gamma} \left\{ \frac{1}{(\Delta\omega_0 + \omega_u)^2 + \tilde{\gamma}^2} + \frac{1}{(\Delta\omega_0 - \omega_u)^2 + \tilde{\gamma}^2} \right\}. \quad (30.51)
 \end{aligned}$$

§ 31. Релаксация распределения электронов плазмы в сильном поле волны накачки

Уравнения квазилинейного приближения позволяют рассмотреть ряд свойств того турбулентного состояния, которое возникает в результате развития параметрической неустойчивости плазмы под действием внешнего переменного поля накачки. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства начального этапа развития неустойчивости плазмы в сильном поле, когда скорость осцилляции электронов значительно превышает их тепловую скорость. Соответственно последнему в течение определенного времени видоизменение распределения частиц в турбулентном состоянии можно считать несущественным для спектров плазменных возмущений и инкрементов их нарастания. Это означает, что нарастание поля в плазме можно считать идущим по экспоненциальному закону с инкрементом, определяемым линейной теорией. Такое знание изменения во времени поля позволяет нам сосредоточить свое внимание на изучении изменения состояния частиц плазмы под влиянием нарастающих плазменных колебаний. Особенно легко такое влияние проявляется в распределении электронов. Быстрая передача энергии поля электронам плазмы составляет сущность одного из наиболее интересных эффектов, предсказанных теорией параметрического взаимодействия излучения большой мощности с плазмой [2, 120].

В интересующих нас в этом параграфе условиях большой напряженности электрического поля волны накачки, когда одновременно с увеличением разброса по скоростям электронов, характеризующихся единственной отличной от нуля в начальный момент времени нулевой гармоникой $F_e^{(0)}$, происходит также нарастание высших гармоник. Такое явление было указано в работе [2]. Подробному его теоретическому изучению посвящена работа [117], которой в значительной мере мы здесь и будем следовать.

В соответствии с общим рассмотрением гидродинамической теории холодной плазмы применительно к теории параметрического резонанса в сильном поле волны накачки, проведенном в первой главе, не будем считать инкремент нарастающих возмущений малым по сравнению с частотой. С другой стороны, используем то упрощающее обстоятельство, что частота и инкремент в наших условиях гидродинамической стадии развития турбулентного состояния постоянны и не зависят от распределения частиц по

скоростям. Тогда гармоники потенциала поля (30.20) возмущений плазмы связаны соотношением

$$\varphi_n = \varphi_0 \frac{\delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_i(\omega + i\gamma, \mathbf{k})} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(a) J_{l-n}(a) \times \\ \times \frac{\delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma + l\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega + i\gamma + l\omega, \mathbf{k})}. \quad (31.1)$$

Поэтому согласно уравнению (30.18) имеем следующую систему уравнений для гармоник электронной функции распределения:

$$-in\omega_0 F_e^{(n)} + \frac{\partial F_e^{(n)}}{\partial t} = \frac{e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_i} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_i k_j \sum_r |\varphi_0(\omega_r, \mathbf{k}, t=0)|^2 \times \\ \times e^{2\gamma_r(k)t} \sum_{l,p=-\infty}^{+\infty} J_{p-l}(k_z r_E) J_{p-n}(k_z r_E) \frac{1}{\gamma_r - i(p\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}v)} \times \\ \times \frac{\delta \varepsilon_i(\omega_r + i\gamma_r, \mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_e(\omega_r + [p-l]\omega_0 + i\gamma_r, \mathbf{k})} \times \\ \times \frac{\delta \varepsilon_i(-\omega_r + i\gamma_r, -\mathbf{k})}{1 + \delta \varepsilon_e(-\omega_r + [p-l]\omega_0 + i\gamma_r, -\mathbf{k})} \frac{\partial F_e^{(l)}}{\partial v_j}. \quad (31.2)$$

Здесь ось z выбрана вдоль электрического вектора поля волны накачки, а r — нумерует возможные типы возбуждений.

Уравнение (31.2) описывает взаимодействие электронов с флуктуациями нарастающего поля плазменных возмущений. Заметим здесь, что даже в условиях малого уровня таких флуктуаций, вообще говоря, становится неточным утверждение о наличии в начальный момент только лишь нулевой гармоники электронного распределения. Аналогичная ситуация имеет место и для обычных кулоновских столкновений (см. [1]). Поэтому пренебрежение в начальный момент времени всеми высшими гармониками соответствует приближению малости кулоновских столкновений и малости взаимодействия электронов с плазменными флуктуациями начального состояния плазмы. В соответствии с этим ниже мы будем интересоваться асимптотически выраженными, пригодными в условиях значительного возрастания флуктуаций плазменного поля возмущений.

Рассмотрим следствия, вытекающие из системы (31.2) в случае резонансной параметрической неустойчивости,

когда $|1 - (\omega_{Le}/\omega_0)| \lesssim (m_e/m_i)^{1/3}$. Тогда полностью пренебрегая пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости, что отвечает пренебрежению тепловым движением, а также имея в виду разложение по малому параметру $(m_e/m_i)^{1/3}$, можем записать систему уравнений (31.2) в следующем виде:

$$-in\omega_0 F_e^{(n)} + \frac{\partial F_e^{(n)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}(n, \mathbf{v}) \frac{\partial F_e^{(n)}}{\partial v_j} - D_{ij}(n+2, \mathbf{v}) \frac{\partial F_e^{(n+2)}}{\partial v_j} - D_{ij}(n-2, \mathbf{v}) \frac{\partial F_e^{(n-2)}}{\partial v_j} \right\}. \quad (31.3)$$

Здесь тензорные коэффициенты диффузии $D_{ij}(n)$, $D_{ij}(n+2)$ и $D_{ij}(n-2)$ определены формулами

$$\begin{aligned} D_{ij}(n, \mathbf{v}) &= \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j |J_1(\mathbf{k} r_E)|^2 \frac{|\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \omega_0^4 \omega_{Li}^4}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\gamma_r + i([n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\gamma_r^2 + ([n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_r - i([-n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\gamma_r^2 + ([-n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \right\} \frac{1}{[(\omega_0 + \omega_r)^2 - \omega_{Le}^2]^2 + 4\omega_0^2 \gamma_r^2}, \\ D_{ij}(n+2, \mathbf{v}) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j |J_1(\mathbf{k} r_E)|^2 |\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \times \\ &\quad \times \frac{\omega_0^4 \omega_{Li}^4}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2} \frac{\gamma_r + i([n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\gamma_r^2 + ([n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \times \\ &\quad \times \frac{(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2(\omega_r^2 + \gamma_r^2) + 4i\gamma_r \omega_0(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{[(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2(\omega_r^2 + \gamma_r^2)]^2 + 16\gamma_r^2 \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2}, \\ D_{ij}(n-2, \mathbf{v}) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j |J_1(\mathbf{k} r_E)|^2 |\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \times \\ &\quad \times \frac{\omega_0^4 \omega_{Li}^4}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2} \frac{\gamma_r - i([-n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})}{\gamma_r^2 + ([-n+1]\omega_0 + \omega_r - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \times \\ &\quad \times \frac{(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2(\omega_r^2 + \gamma_r^2) - 4i\gamma_r \omega_0(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{[(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2(\omega_r^2 + \gamma_r^2)]^2 + 16\gamma_r^2 \omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2}. \quad (31.4) \end{aligned}$$

Очевидно, что система уравнений (31.3) распадается на две системы соответственно для четных и нечетных гармоник

электронной функции распределения. Это позволяет такие системы рассматривать независимо. Отметим, что, как можно убедиться, нечетные гармоники оказываются в $(m_e/m_i)^{1/3}$ раз меньше четных.

Коэффициенты диффузии (31.4) существенно упрощаются для не очень больших скоростей электронов, когда можно пренебречь $k\mathbf{v}$ по сравнению с ω_0 . Поскольку при развитии параметрической неустойчивости в сильном поле волны накачки $k_z r_E \sim 1$, то такое пренебрежение отвечает малости v_z по сравнению со скоростью осцилляций электрона. Тогда

$$\left. \begin{aligned} D_{ij}(2n, 0) &= \frac{4ni\omega_0}{4n^2 - 1} \Delta_{ij} + \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2} \frac{d\Delta_{ij}}{dt}, \\ D_{ij}(2n + 2, 0) &= \\ &= \frac{\omega_0}{2n + 1} [\Delta_{ij}^{(1)} - i\Delta_{ij}^{(2)}] - \frac{i}{2(2n + 1)^2} \frac{d}{dt} [\Delta_{ij}^{(1)} - i\Delta_{ij}^{(2)}], \\ D_{ij}(2n - 2, 0) &= \\ &= -\frac{\omega_0}{2n - 1} [\Delta_{ij}^{(1)} + i\Delta_{ij}^{(2)}] + \frac{i}{2(2n - 1)^2} \frac{d}{dt} [\Delta_{ij}^{(1)} + i\Delta_{ij}^{(2)}], \end{aligned} \right\} (31.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{ij} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j \frac{|\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \omega_{Li}^4 \omega_0^2 |J_1(\mathbf{k}r_E)|^2}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2 \{[(\omega_0 + \omega_r)^2 - \omega_{Le}^2] + 4\omega_0^2 \gamma_r^2\}}, \\ \Delta_{ij}^{(1)} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j \times \\ &\times \frac{|\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \omega_{Li}^4 |J_1(\mathbf{k}r_E)|^2 4\gamma_r \omega_0^3 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2 \{[(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2 (\omega_r^2 + \gamma_r^2)]^2 + 16\gamma_r^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2\}}, \\ \Delta_{ij}^{(2)} &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_r \frac{e^2}{m_e^2} k_i k_j |\Phi_0|^2 \exp[2\gamma_r(\mathbf{k})t] \omega_{Li}^4 |J_1(\mathbf{k}r_E)|^2 \times \\ &\times \frac{\omega_0^2 [(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2 (\omega_r^2 + \gamma_r^2)]}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2 \{[(\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2 - 4\omega_0^2 (\omega_r^2 + \gamma_r^2)]^2 + 16\gamma_r^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega_{Le}^2)^2\}}. \end{aligned} \right\} (31.6)$$

Представив комплексную гармонику $F_e^{(2n)}$ в виде

$$F_e^{(2n)}(\mathbf{v}, t) = F_1^{(2n)}(\mathbf{v}, t) + iF_2^{(2n)}(\mathbf{v}, t), \quad (31.7)$$

где F_1 и F_2 — действительные, и имея в виду соотношения

$$F_1^{(0)} \equiv F_e^{(0)}, \quad F_1^{(-n)} = F_1^{(n)}, \quad F_2^{(-n)} = -F_2^{(n)}, \quad (31.8)$$

можем записать теперь следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left\{ \frac{d\Delta_{ij}}{dt} F_1^{(0)} + \left(2\omega_0 \Delta_{ij}^{(1)} - \frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} \right) F_1^{(2)} + \right. \\ \left. + \left(2\omega_0 \Delta_{ij}^{(2)} + \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} \right) F_2^{(2)} \right\}, \quad (31.9)$$

$$- 2n\omega_0 F_1^{(2n)} + \frac{\partial F_2^{(2n)}}{\partial t} = \\ = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left\{ \frac{4n\omega_0 \Delta_{ij}}{4n^2 - 1} F_1^{(2n)} + \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2} \frac{d\Delta_{ij}}{dt} F_2^{(2n)} - \right. \\ - \frac{\omega_0}{2n - 1} [\Delta_{ij}^{(1)} F_2^{(2n-2)} + \Delta_{ij}^{(2)} F_1^{(2n-2)}] - \\ - \frac{1}{2(2n - 1)^2} \left[\frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} F_2^{(2n-2)} - \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} F_1^{(2n-2)} \right] + \\ + \frac{\omega_0}{2n + 1} [\Delta_{ij}^{(1)} F_2^{(2n+2)} - \Delta_{ij}^{(2)} F_1^{(2n+2)}] - \\ \left. - \frac{1}{2(2n + 1)^2} \left[\frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} F_2^{(2n+2)} + \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} F_1^{(2n+2)} \right] \right\}, \quad (31.10)$$

$$2n\omega_0 F_2^{(2n)} + \frac{\partial F_1^{(2n)}}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} \left\{ - \frac{4n\omega_0 \Delta_{ij}}{4n^2 - 1} F_2^{(2n)} + \right. \\ + \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2} \frac{d\Delta_{ij}}{dt} F_1^{(2n)} - \frac{\omega_0}{2n - 1} [\Delta_{ij}^{(1)} F_1^{(2n-2)} - \Delta_{ij}^{(2)} F_2^{(2n-2)}] - \\ - \frac{1}{2(2n - 1)^2} \left[\frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} F_1^{(2n-2)} + \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} F_2^{(2n-2)} \right] + \\ + \frac{\omega_0}{2n + 1} [\Delta_{ij}^{(1)} F_1^{(2n+2)} + \Delta_{ij}^{(2)} F_2^{(2n+2)}] - \\ \left. - \frac{1}{2(2n + 1)^2} \left[\frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} F_1^{(2n+2)} - \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} F_2^{(2n+2)} \right] \right\}. \quad (31.11)$$

Эти формулы позволяют записать электронную функцию распределения в следующем виде:

$$F_e(\mathbf{v}, t) = F_1^{(0)}(\mathbf{v}, t) + \\ + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_1^{(2n)}(\mathbf{v}, t) \cos 2n\omega_0 t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} F_2^{(2n)}(\mathbf{v}, t) \sin 2n\omega_0 t. \quad (31.12)$$

С помощью уравнений (31.9) — (31.11) можно изучить свойства моментов электронной функции распределения. Прежде всего имеем сохранение числа электронов:

$$\int d\mathbf{v} F_e^{(0)}(\mathbf{v}, t) = n_e = \text{const}, \quad n \int d\mathbf{v} F_1^{(2n)} = n \int d\mathbf{v} F_2^{(2n)} = 0. \quad (31.13)$$

Для вторых моментов скоростей получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d\mathbf{v} v_i v_j F_e^{(0)}(\mathbf{v}, t) &= 2n_e \frac{d\Delta_{ij}}{dt}, \\ \int d\mathbf{v} v_i v_j F_1^{(2)} &\approx n_e \left[\Delta_{ij}^{(2)} - \frac{1}{\omega_0} \frac{d\Delta_{ij}^{(1)}}{dt} \right], \\ \int d\mathbf{v} v_i v_j F_2^{(2)} &= -n_e \left[\Delta_{ij}^{(1)} + \frac{1}{\omega_0} \frac{d\Delta_{ij}^{(2)}}{dt} \right], \\ \int d\mathbf{v} v_i v_j F_1^{(2n)} &= \int d\mathbf{v} v_i v_j F_2^{(2n)} = 0 \quad \text{при } n > 1. \end{aligned} \quad (31.14)$$

С помощью формул (31.14) получаем

$$\int d\mathbf{v} v_i v_j F_e(\mathbf{v}, t) \approx 2n_e \{ \Delta_{ij}(t) - \Delta_{ij}^{(1)} \sin 2\omega_0 t + \Delta_{ij}^{(2)} \cos 2\omega_0 t \}. \quad (31.15)$$

Соответственно для четвертых моментов можно записать следующее выражение:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v} v_r v_s v_l v_k F_e(\mathbf{v}, t) &= n_e \left\{ 4 [\Delta_{rs} \Delta_{lk} + \Delta_{rl} \Delta_{sk} + \Delta_{rk} \Delta_{sl}] - \right. \\ &- 6 [\Delta_{rs}^{(1)} \Delta_{lk}^{(1)} + \Delta_{rl}^{(1)} \Delta_{sk}^{(1)} + \Delta_{sl}^{(1)} \Delta_{rk}^{(1)} + \Delta_{rs}^{(2)} \Delta_{lk}^{(2)} + \Delta_{sk}^{(2)} \Delta_{rl}^{(2)} + \\ &+ \Delta_{rk}^{(2)} \Delta_{sl}^{(2)}] + \frac{4}{3} \cos 2\omega_0 t [\Delta_{rs} \Delta_{lk}^{(2)} + \Delta_{rl} \Delta_{sk}^{(2)} + \Delta_{rk} \Delta_{sl}^{(2)} + \\ &+ \Delta_{sl} \Delta_{rk}^{(2)} + \Delta_{sk} \Delta_{rl}^{(2)} + \Delta_{lk} \Delta_{rs}^{(2)}] - \frac{4}{3} \sin 2\omega_0 t [\Delta_{rs} \Delta_{lk}^{(1)} + \\ &+ \Delta_{rl} \Delta_{sk}^{(1)} + \Delta_{rk} \Delta_{sl}^{(1)} + \Delta_{sl} \Delta_{rk}^{(1)} + \Delta_{sk} \Delta_{rl}^{(1)} + \Delta_{lk} \Delta_{rs}^{(1)}] + \\ &+ \frac{2}{3} \cos 4\omega_0 t [(\Delta_{rs}^{(2)} \Delta_{lk}^{(2)} + \Delta_{rl}^{(2)} \Delta_{sk}^{(2)} + \Delta_{rk}^{(2)} \Delta_{sl}^{(2)}) - (\Delta_{rs}^{(1)} \Delta_{lk}^{(1)} + \\ &+ \Delta_{rl}^{(1)} \Delta_{sk}^{(1)} + \Delta_{rk}^{(1)} \Delta_{sl}^{(1)})] - \frac{2}{3} \sin 4\omega_0 t [\Delta_{rs}^{(2)} \Delta_{kl}^{(2)} + \Delta_{rl}^{(2)} \Delta_{sk}^{(2)} + \\ &+ \Delta_{rk}^{(2)} \Delta_{sl}^{(2)} + \Delta_{rs}^{(1)} \Delta_{kl}^{(1)} + \Delta_{rl}^{(1)} \Delta_{sk}^{(1)} + \Delta_{rk}^{(1)} \Delta_{sl}^{(1)}] \left. \right\}. \quad (31.16) \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что высшие моменты скоростей электронов определяются высшими гармониками электронной

функции распределения. При этом момент $2n$ -го порядка содержит гармоники вплоть до $2n\omega_0$.

Оценим с помощью формулы (31.15) порядок величины энергии, определяющей второй гармоникой электронного распределения. Учтя $\gamma \sim \omega_0 - \omega_{Li} \sim \omega_0 (m_e/m_i)^{1/3}$, получаем

$$\int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m_e v^2 F_1^{(2)} \approx \int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m_e v^2 F_2^{(2)} \approx \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\varphi_0|^2 \frac{k^2}{4\pi} e^{2\gamma t}. \quad (31.17)$$

Эта формула указывает на то, что на гидродинамической стадии развития турбулентного состояния при параметрическом резонансе плазмы энергия, связанная со второй гармоникой распределения электронов, оказывается сравнимой с плотностью энергии нарастающего поля. Ясно, что эта же величина определяет высшие моменты скоростей и соответственно дисперсию электронного распределения.

Оценим теперь характерное время нарастания плазменных флуктуаций на гидродинамической стадии. Примем в качестве начального значения плотности энергии поля тепловое значение, определяемое электронами:

$$\frac{k^2}{4\pi} |\varphi_0(\mathbf{k}, t=0)|^2 = \kappa T_e. \quad (31.18)$$

Далее учтем, что в формуле (31.17) интегрирование ведется по области волновых векторов $k_z \sim r_E^{-1}$ и $k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2 \sim r_{De}^2$. Тогда

$$\int d\mathbf{v} \frac{1}{2} m_e v^2 F_e^{(2)} \approx \frac{\kappa T_e}{r_E r_{De}^2} e^{2\gamma t}. \quad (31.19)$$

Поскольку $r_E \gg r_{De}$, то предэкспоненциальный множитель в (31.19) составляет малую долю тепловой энергии плазменных колебаний. Однако быстрый рост плазменных флуктуаций при увеличении времени приводит к тому, что при временах порядка

$$\frac{1}{2\gamma} \ln(n_e r_E r_{De}^2) \quad (31.20)$$

энергия, связанная со второй гармоникой, сравнивается с тепловой, а при временах порядка

$$\frac{1}{2\gamma} \ln(n_e r_E^3) \quad (31.21)$$

сравнивается с энергией осцилляций электронов в поле волны накачки. При таких временах распределение электронов по скоростям становится быстропеременным, а кроме того, и анизотропным, что само по себе может быть причиной дальнейшего развития турбулентности и нагрева плазмы.

Говоря об анизотропии распределения электронов по скоростям, следует иметь в виду, что такая анизотропия определяется интегральным коэффициентом диффузии Δ_{ij} , вид которого в значительной мере зависит от начального распределения плазменных флуктуаций в пространстве волновых векторов. Если такое начальное распределение изотропно или же зависит лишь от k_z и k_\perp , то диффузия происходит в двух измерениях, и соответственно этому для характеристики дисперсии электронов по скоростям можно ввести продольную и поперечную эффективные температуры электронов:

$$\left. \begin{aligned} n_e T_{\parallel} \\ n_e T_{\perp} \end{aligned} \right\} = \left(\begin{array}{c} m_e \Delta_{\parallel} \\ \frac{1}{2} m_e \Delta_{\perp} \end{array} \right) = \frac{e^2}{m_e} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\begin{array}{c} k_z^2 \\ \frac{1}{2} k_\perp^2 \end{array} \right) \times \\ \times \sum_r \frac{|\Phi_0|^2 e^{2\gamma_r t} \omega_{Li}^4 \omega_0^2 J_1^2(k_z r_E)}{(\omega_r^2 + \gamma_r^2)^2 \{[(\omega_0 + \omega_r)^2 - \omega_{Le}^2 - \gamma_r^2]^2 + 4\gamma_r^2(\omega_0 + \gamma_r)^2\}}. \quad (31.22)$$

При $\omega_0 < \omega_{Le}$, когда имеет место аперриодическая неустойчивость, формула (31.22) может быть записана в следующем сравнительно простом виде:

$$\left. \begin{aligned} n_e T_{\parallel} \\ n_e T_{\perp} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{20,8\pi^3} \left(\sqrt{1 + \frac{10,4\omega_{Li}^2}{\Delta_1^3 \omega_{Le}^2}} + 1 \right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_\perp dk_\perp \left(\begin{array}{c} 6,8r_E^{-2} \\ k_\perp^2 \end{array} \right) |\Phi_0\left(\frac{1,84}{r_E}, k_\perp, t\right)|^2 e^{2\gamma t}. \quad (31.23)$$

Здесь учтено, что максимум инкремента соответствует максимуму функции $J_1(k_z r_E)$ при $k_z = 1,84r_E^{-1}$, а также использованы обозначения

$$\Delta_1 = (\omega_{Le} / \omega_0)^2 - 1$$

и

$$\gamma^2 = \frac{1}{8} \omega_{Le}^2 \Delta_1^2 \left[\sqrt{1 + \frac{32}{\Delta_1^3} J_1^2(k_z r_E) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2}} - 1 \right].$$

Соответственно при частоте поля волны накачки, большей электронной ленгмюровской ($\omega_0 > \omega_{Le}$), когда

$$0 > \Delta_1 > - \left[32 J_1^2 \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2}$$

и

$$\gamma = \frac{1}{4} |\Delta_1| \omega_{Le} \left(\left[\frac{32}{|\Delta_1|^3} J_1^2 (k_z r_E) \frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} \right]^{1/2} - 1 \right)^{1/2},$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} n_e \mathcal{M} T_{\parallel} \\ n_e \mathcal{M} T_{\perp} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2,72\pi^3} \sqrt{\frac{0,68\omega_{Li}^2}{|\Delta_1|^3 \omega_{Le}^2} + 1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \int_0^{\infty} k_{\perp} dk_{\perp} \left(\frac{6,8r_E^{-2}}{k_{\perp}^2} \right) \left| \varphi_0 \left(\frac{1,84}{r_E}, k_{\perp}, t=0 \right) \right|^2 e^{2\gamma t}. \quad (31.24)$$

Правые части формул (31.23) и (31.24) по порядку величины равны полной плотности энергии нарастающих флуктуаций поля в плазме. В то же время эти формулы позволяют усмотреть возможность анизотропии распределения электронов по скоростям, либо они определяют возможную анизотропию Δ_{ij} . Действительно, поскольку $2k_z^2 \approx 6,8r_E^{-2}$, а для поперечного волнового числа можно принять $k_{\perp}^2 \lesssim \lesssim r_{De}^2$, то очевидно, что средний разброс продольной энергии электронов относится к среднему разбросу поперечной энергии как $\lesssim 6,8v_{Te}^2/v_E^2$.

Обратим теперь внимание на иную возможность релаксации распределения электронов, которая может реализоваться при достаточно узком распределении плазменных флуктуаций по волновым числам. При этом в распределении по k_z максимум инкремента фактически определяет одно значение. Если в то же время мал разброс значений k_{\perp} , то диффузия в пространстве скоростей становится особенно быстрой в резонансной окрестности $|\omega_0 - \mathbf{k}\mathbf{v}| \sim \gamma$. Соответственно этому, пренебрегая в уравнении (31.3) малыми порядка $(m_e/m_i)^{1/2}$, получаем сравнительно простое приближенное уравнение

$$\frac{\partial F_e^{(0)}}{\partial t} = 2 \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij}^{(1)}(0, \mathbf{v}) \frac{\partial F_e^{(0)}}{\partial v_j}. \quad (31.25)$$

Ясно, что в этом случае на релаксацию основной гармоники в резонансной области практически не оказывают влияния высшие гармоники электронной функции распределения. Быстрая релаксация, описываемая уравнением (31.25), ведет к выравниванию распределения электронов в окрестности резонансной области скоростей, что отвечает возможности ступенчатого распределения. В общем случае, когда важно влияние высших гармоник, при этом возможно возникновение многоступенчатого распределения, обусловленного наличием высших резонансных областей $|\omega_0 - kv| \sim \gamma$.

§ 32. Нагрев плазмы и возрастание высокочастотной проводимости плазмы в сильном переменном электрическом поле

Покажем теперь, как кинетическая параметрическая неустойчивость неизотермической плазмы относительно раскачки потенциальных колебаний приводит к аномально сильному взаимодействию электромагнитного поля с плазмой, выражающемуся в сравнительно быстром поглощении энергии поля, связанном с аномальным увеличением диссипативной высокочастотной проводимости плазмы [2, 50].

Будем считать частоту внешнего поля значительно превышающей электронную ленгмюровскую частоту, но ограниченной сверху так, что выполняются неравенства

$$1 \ll \frac{\omega_0^2}{\omega_{Le}^2} \ll \frac{|e| T_e}{e_i T_i} \left/ \ln \left[\frac{T_e^3 e_i^2 m_i}{T_i^3 e^2 m_e} \right] \right. \equiv I. \quad (32.1)$$

Тогда согласно § 6 неустойчивость оказывается возможной, если напряженность внешнего электрического поля высокой частоты становится больше порогового значения, при котором (см. (6.24)) скорость осцилляций электрона во внешнем поле примерно в два раза превышает тепловую. Будем считать v_E больше порогового значения $\sim 2v_{Te}$, но по порядку величины не отличающейся от порогового значения. Тогда согласно рис. 2, нарастающими оказываются колебания в широкой области длин волн, малых по сравнению с электронным дебаевским радиусом, но в то же время не больших $v_E \omega_0^{-1}$. Со стороны коротких длин волн область неустойчивости ограничена неравенством

$$\lambda > k_0^{-1} = r_{De} I^{-1/2}. \quad (32.2)$$

Здесь имеется определенная аналогия с ограничением на длины волн колебаний, дающих существенный вклад в обычной теории устойчивой плазмы, учитывающей вклад взаимодействия с ионно-звуковыми колебаниями при вычислении электрон-электронного интеграла столкновений [9, 55]. Частота (6.21) нарастающих колебаний практически совпадает с ионной ленгмюровской, а для инкремента можно написать в соответствии с (6.23) следующую оценочную формулу:

$$\gamma \sim \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2}{k^3 v_E^3}. \quad (32.3)$$

Нетрудно также записать следующее оценочное выражение для средней работы внешнего поля над плазмой (30.44):

$$\langle \mathbf{E} \mathbf{j} \rangle \sim \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{4\pi} |\varphi_0(\mathbf{k}, t)|^2 \frac{k v_{Te}}{k^2 r_{De}^2}. \quad (32.4)$$

Это же выражение определяет скорость изменения во времени средней кинетической энергии электронов:

$$\frac{d}{dt} \int d\mathbf{p} \frac{p^2}{2m_e} \bar{F}_e \approx \langle \mathbf{E} \mathbf{j} \rangle. \quad (32.5)$$

Последнее связано с тем, что энергия колебаний плазмы составляет малую долю в общем балансе, а скорость изменения энергии ионов существенно меньше скорости изменения энергии электронов (32.5).

Тот факт, что частота и инкремент (32.5) нарастающих колебаний не зависят от детального вида распределения частиц, позволяет утверждать, что экспоненциальное нарастание поля по закону

$$|\varphi_0(\mathbf{k}, t)|^2 = |\varphi(\mathbf{k}, 0)|^2 e^{2\gamma t} \quad (32.6)$$

будет продолжаться до тех пор, пока кинетическая энергия электронов не возрастет на величину, сравнимую с их начальной температурой (после чего неустойчивость, вообще говоря, может стабилизироваться). Приняв согласно (31.18) начальное поле, определяемое тепловым шумом, можно записать теперь уравнение (32.5) в следующем виде:

$$\frac{dn_e \kappa T_e}{dt} \approx \langle \mathbf{E}(t) \mathbf{j}(t) \rangle \sim \kappa T_e \frac{v_{Te}}{r_{De}^2} \int_{\omega_j/v_E}^{k_0} k dk \exp \left\{ 2 \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2}{k^3 v_E^3} t \right\}. \quad (32.7)$$

Для малых времен, соответствующих началу неустойчивости

$$t \approx \frac{\omega_0^3}{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}, \quad (32.8)$$

когда даже для небольших значений волновых векторов $\frac{1}{k} \sim \frac{1}{\omega_0 v_E}$ экспонента в (32.7) практически не отличается от единицы, имеем

$$\frac{dn_e \kappa T_e}{dt} \sim n_e \kappa T_e \nu_0 I \sim E_0^2 \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \nu_0 I, \quad (32.9)$$

где

$$\nu_0 \approx \frac{e^4 n_e}{\sqrt{m_e} (\kappa T_e)^{3/2}}. \quad (32.10)$$

Согласно (32.9) можно утверждать, что на начальной стадии неустойчивости проводимость плазмы по порядку величины равна

$$\sigma \sim \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \nu_0 I. \quad (32.11)$$

Подобное выражение, правда, полученное для области меньших частот электромагнитного поля, содержится в работе Шистера [60], посвященной теории проводимости устойчивой плазмы. Причина такой аналогии заключается в том, что на рассматриваемой нами начальной стадии неустойчивости плотность энергии плазменных колебаний, так же как и в случае устойчивой плазмы, по порядку величины равна $\sim \kappa T_e k_0^3$. Заметим, что выражение (32.11) превышает обычную проводимость полностью ионизированной плазмы, обусловленную парными столкновениями заряженных частиц:

$$\frac{e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \nu_{ei} \quad (32.12)$$

при $T_e > 100 T_i$.

Обратимся теперь к большим временам. Если

$$t \gtrsim \frac{\omega_0^3}{2\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2} \ln \frac{\omega_{Le}^2 I}{\omega_0^2}, \quad (32.13)$$

то формула (32.7) принимает следующий простой вид:

$$\frac{dn_e \kappa T_e}{dt} \approx \frac{\kappa T_e \omega_0^5}{v_{Te}^3 \omega_{Li}^2 t} \exp\left(\frac{2\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2 t}{\omega_0^3}\right). \quad (32.14)$$

В соответствии с этой формулой электронная температура возрастает на величину, сравнимую с начальной, за время порядка

$$t_T \sim \frac{\omega_0^3}{2\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^2} \ln \left[n_e r_{De}^3 \frac{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}^3}{\omega_0^5} \right]. \quad (32.15)$$

По прошествии такого времени правая часть формулы (32.14) оказывается равной

$$\frac{n_e \kappa T_e \omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{\omega_0^5 \ln [n_e r_{De}^3 \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^3 \omega_0^{-5}]}. \quad (32.16)$$

Поскольку в нашей задаче $v_{Te} \sim v_E$, то можно утверждать, что проводимость плазмы достигает значения

$$\sigma_{\text{турб}} \sim \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \frac{\omega_{Le}^2 \omega_{Li}^2}{\omega_0^3 [\ln n_e r_{De}^3 \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^3 \omega_0^{-5}]}. \quad (32.17)$$

Плотность энергии плазменных колебаний составляет ко времени t_T величину

$$\frac{n_e \kappa T_e \omega_{Li}^2}{\omega_{Le} \omega_0 \ln [n_e r_{De}^3 \omega_{Li}^2 \omega_{Le}^3 \omega_0^{-5}]}, \quad (32.18)$$

что представляет собой весьма малую долю энергии электронов.

Заметим, что для времени t_T (32.15) неравенство (32.13) выполняется, если для числа частиц в сфере радиуса дебаевской экранировки выполнено следующее соотношение:

$$n_e r_{De}^3 \gg \frac{\omega_0^3 I}{\omega_{Li}^2 \omega_{Le}}. \quad (32.19)$$

При выполнении этого соотношения турбулентная проводимость плазмы (32.17) становится существенно больше (32.14). Если же в правой части (32.19) вместо I подставить кулоновский логарифм $\Lambda \sim \ln(n_e r_{De}^3)$, возникающий в обычной проводимости, то турбулентная проводимость

(32.17) оказывается много больше обычной, определяемой формулой (32.17). Это легко выполняется для плазм, у которых $\Lambda \gtrsim 15 \div 20$.

На основании проведенного рассмотрения можно сделать определенное качественное обобщение на случай гидродинамической неустойчивости холодной плазмы при параметрическом резонансе $\omega_0 \approx \omega_{Le}$. При этом максимальный инкремент

$$\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/3} \omega_{Le},$$

так же как (32.2), не зависит от детального вида распределения частиц. Поэтому можно ожидать экспоненциального роста колебаний поля вплоть до того, пока тепловая скорость электронов не окажется близкой к скорости осцилляции во внешнем поле.

При этом турбулентная проводимость плазмы по порядку величины достигнет значения, определяющегося выражением, в котором роль эффективной частоты столкновений играет инкремент нарастания колебаний. Таким образом, турбулентная проводимость достигнет значения $\sim (m_e/m_i)^{1/3} \omega_{Le}$.

В заключение этого параграфа коснемся вопроса об обратном влиянии изменения распределения частиц плазмы на релаксацию плазменных флуктуаций и возможность стабилизации параметрической неустойчивости в слабом поле волны накачки. Здесь необходимо заметить, что если в случае сильного поля распределение частиц при развитии неустойчивости изменяется в сравнительно широкой области скоростей, то в слабом поле вблизи порога неустойчивости перераспределение малой группы частиц приводит к резкому изменению хода релаксации плазменных флуктуаций [118]. Последнее обусловлено тем фактом, что вблизи порога неустойчивости нарастающие возмущения лежат в узкой области волновых векторов. Поэтому область скоростей частиц плазмы, для которых существенно черенковское взаимодействие с плазменными волнами, также оказывается сравнительно узкой. Ряд закономерностей релаксации распределения частиц и возмущений поля, описываемых автомодельными решениями квазилинейных уравнений, получены в работе [119], где для плазмы в магнитном поле найдена картина стабилизации параметрической неустойчивости в околороговой области значений напряженности поля волны накачки, характеризующаяся возрастанием числа быстрых частиц (см. также [117, 196]).

§ 33. Стационарный уровень плазменных колебаний в параметрически неустойчивой плазме, обусловленный нелинейным взаимодействием волн, и аномальная проводимость плазмы

Плазменные колебания, возникающие в результате развития неустойчивости плазмы, могут в определенных условиях достигнуть некоторого стационарного уровня. Нелинейное взаимодействие плазменных волн (см. [61]) является одной из причин, которая способствует установлению такого уровня и его сохранению в условиях, пока плазма еще не получит от поля достаточно большую тепловую энергию. В плазме с электронным током подобные задачи обсуждались в работах [62—64]. В этом параграфе мы изложим теорию стационарного шума продольных плазменных колебаний, возникающих благодаря параметрической неустойчивости плазмы в сравнительно слабом внешнем поле накачки. При этом в соответствии с результатами § 10 будем рассматривать ионно-звуковые волны в неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$). Нелинейное взаимодействие таких волн мы связываем с их индуцированным рассеянием на ионах. Получаемое на основании излагаемой ниже теории распределение поля по волновым векторам (стационарный шум) позволяет определить турбулентную проводимость плазмы [65, 104].

Как это часто делается в теории нелинейного взаимодействия плазменных волн, будем далее считать, что влияние изменения распределения частиц на плазменные волны пренебрежимо мало. Тогда в предположении, что для частиц плазмы имеет место максвелловское распределение, все рассмотрение сводится к уравнению поля, которое мы запишем здесь в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\varphi_0(\mathbf{k})|^2 - 2\gamma |\varphi_0(\mathbf{k})|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} 8\pi r_{De}^2 \mathcal{N} T_e k v_s + \\ + |\varphi_0(\mathbf{k})|^2 \int d\mathbf{k}' Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') |\varphi_0(\mathbf{k}')|^2. \end{aligned} \quad (33.1)$$

Это уравнение для низкочастотной амплитуды потенциала продольного поля отличается от вытекающего из (30.38) правой частью. При этом первое слагаемое правой части возникает благодаря спонтанному неиндуцированному излучению плазменных ионно-звуковых волн частицами (электронами) и определяет тепловой уровень шумов. Вто-

рое слагаемое правой части уравнения (33.1) связано с нелинейным взаимодействием волн, обусловленным индуцированным рассеянием волн на частицах плазмы. Согласно [61]

$$Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 2 \left[\frac{\partial \varepsilon^{l'}(\omega(\mathbf{k}), \mathbf{k})}{\partial \omega(\mathbf{k})} \right]^{-1} \int d\omega' \delta[\varepsilon^{l'}(\omega', \mathbf{k}')] \times \\ \times \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^{l'}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')} S(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \times \right. \\ \left. \times S(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) - V(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \right\}. \quad (33.2)$$

Здесь

$$S(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') = \frac{k_i k_j k_s'' k_s'}{k k'' k'} S_{ijs}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'), \quad (33.3)$$

$$V(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') = \frac{k_i k_j k_r k_s'}{(k k')^2} V_{irjs}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'), \quad (33.4)$$

где $\omega = \omega(\mathbf{k})$, $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, $\omega - \omega' = \omega''$, а выражения S_{ijs} и V_{irjs} определены формулами (23.11) и (23.12).

Ограничимся далее такой областью частот внешнего поля, для которой выполняются неравенства (ср. гл. II)

$$k_{st}^2 r_{De}^2 < \frac{2}{3} \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} < k_2^2 r_{De}^2, \quad (33.5)$$

где

$$k_{st}^2 r_{De}^2 \approx \{\ln[\omega_{Le}^2 \nu_{ei}^{-2}]\}^{-1} \text{ и } k_2 r_{De} \approx \left\{ \ln \left(\frac{\pi}{8} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Li}^2} \left[\ln \frac{\pi}{8} \frac{\omega_{Le}^2}{\omega_{Li}^2} \right]^4 \right) \right\}^{-1}.$$

Соответственно этому для волновых векторов, лежащих в области $k_{st} < k < k_2$, во-первых, можно пренебречь вкладом столкновений в высокочастотный декремент $\tilde{\gamma}$, а во-вторых, этот декремент мал по сравнению с ионно-звуковой частотой $\omega_s = k r_{De} \omega_{Li}$.

Далее будем считать напряженность внешнего поля накачки удовлетворяющей неравенству

$$\frac{E_0^2}{64\pi n_e \kappa l'_e} \ll \frac{k v_s}{\omega_0}. \quad (33.6)$$

Тогда, как это, в частности, видно из дисперсионного уравнения (30.46), спектр нарастающих при параметрическом резонансе колебаний совпадает с ионно-звуковым $\omega(\mathbf{k}) = \omega_s$. При этом для инкремента γ в соответствии

с формулой (30.47) имеем¹

$$\begin{aligned} \gamma &= -\gamma_s + \left(\frac{\mathbf{k}r_E}{2kr_{De}} \right)^2 \frac{\omega_s^2 \omega_0 \Delta \omega_0 \tilde{\gamma}}{[(\Delta \omega_0)^2 - k^2 v_s^2]^2 + 4k^2 v_s^2 \tilde{\gamma}} \equiv \\ &\equiv -\gamma_s \{1 - \cos^2 \theta F(k)\}. \end{aligned} \quad (33.7)$$

Здесь в соответствии с обозначениями второй главы принято:

$$\begin{aligned} \gamma_s &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \omega_s + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^2 r_{De}}{r_{Di}^3} \exp\left(-\frac{r_{De}^2}{2r_{Di}^2}\right), \\ \tilde{\gamma} &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{(kr_{De})^3} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right). \end{aligned}$$

Помимо этого θ — угол между направлениями внешнего электрического поля \mathbf{E}_0 и волновым вектором \mathbf{k} ионно-звуковой волны, а

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{v_E^2}{v_{Te}^2} \frac{\omega_0 \Delta \omega_0 \tilde{\gamma}(k) kv_{Te}}{[(\Delta \omega_0)^2 - k^2 v_s^2]^2 + 4k^2 v_s^2 \tilde{\gamma}^2(k)}. \quad (33.8)$$

Инкремент (33.7) становится положительным, если напряженность поля превышает пороговое значение (10.35), определяемое соотношением

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa \Gamma_e} = 16 \frac{\gamma_s(k_0) \tilde{\gamma}(k_0)}{\omega_0 \omega_s(k_0)}. \quad (33.9)$$

Здесь значение волнового вектора k_0 соответствует максимуму $F(k)$, имеющему место при

$$\omega_s(k_0) \equiv k_0 v_s = \Delta \omega_0(k_0) \equiv \omega_0 - \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k_0^2 r_{De}^2\right). \quad (33.10)$$

Правая часть уравнения (33.2) не учитывает влияния поля накачки. Это правильно тогда, когда определяющим оказывается индуцированное рассеяние волн на ионах (ср. [62]). Имея в виду такое предположение выполненным, можем записать следующее выражение для (33.2):

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{kv_s}{4\pi r_{De}^2} \frac{\omega_{Li} v_{Te}}{\omega_{Le} v_{Ti}} \frac{1}{n_e \kappa \Gamma_e} \times \\ &\times \frac{k - k'}{kk'} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'} \right)^2 \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{|k - k'|^2} \exp\left[-\frac{r_{De}^2 (k - k')^2}{2r_{Di}^2 |k - k'|^2}\right]. \end{aligned} \quad (33.11)$$

Это выражение для ядра нелинейной части нашего уравне-

ния (33.4) может быть упрощено при учете факта сильной неизотермичности плазмы ($T_e \gg T_i$), если использовать следующую аппроксимацию (ср. [62]):

$$\frac{k - k'}{|k - k'|^3} \exp \left\{ - \frac{r_{De}^2 (k - k')^2}{2r_{Di}^2 |k - k'|^2} \right\} \approx \sqrt{2\pi} \frac{r_{Di}^3}{r_{De}^3} \frac{\partial}{\partial k'} \delta(k - k'). \quad (33.12)$$

Тогда для стационарного случая уравнение (33.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \kappa T_e = W_s(\mathbf{k}) \{ & 1 - \cos^2 \theta F(k) \} + \\ & + 2 \sqrt{2\pi} \frac{r_{Di}^2 \omega_{Le}}{r_{De}^2 \omega_{Li}} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{W_s(\mathbf{k}')}{n_e \kappa T_e} k k' \frac{\partial \delta(k' - k)}{\partial k'} \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2 (\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{(kk')^4} \}. \end{aligned} \quad (33.13)$$

Здесь

$$W(\mathbf{k}) = \frac{k^2}{4\pi} |\varphi_0(\mathbf{k})|^2 \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} = \frac{|\varphi_0(\mathbf{k})|^2}{4\pi r_{De}^2} \quad (33.14)$$

представляет собой отнесенную к интервалу волновых векторов плотность энергии ионно-звуковых колебаний. При этом полная плотность энергии таких колебаний равна

$$W = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} W_s(\mathbf{k}). \quad (33.15)$$

Вблизи порога неустойчивости, когда напряженность внешнего электрического поля лишь немного превышает пороговое значение, определенное соотношением (33.9), согласно линейной теории устойчивости, развитой в § 10, нарастающими будут волны, распространяющиеся почти параллельно или антипараллельно внешнему полю \mathbf{E}_0 , с волновыми векторами, величина которых близка к значению k_0 , определенному распадным условием (33.10). Поэтому, интересуясь решением уравнения (33.17) вблизи порога неустойчивости, можно упростить коэффициенты этого уравнения, разложив их по степеням угла θ и по малым отклонениям волнового вектора $k - k_0$. При этом, в частности,

$$\begin{aligned} F(k) \approx [F(k_0) - 1] \left\{ -1 + \frac{\theta^2}{F(k_0) - 1} + \right. \\ \left. + \frac{(k - k_0)^2}{2[F(k_0) - 1]} \frac{v_{Te}^2}{\tilde{\gamma}^2(k_0)} \left(\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (33.16)$$

$$\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'} \right)^2 \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{(kk')^2} \approx \theta^2 + \theta'^2 - 2\theta\theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (33.17)$$

где углы θ , φ и θ' , φ' определяют направления волновых векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' , причем φ и φ' — азимутальные углы в плоскости, перпендикулярной вектору E_0 .

Будем интересоваться решениями уравнения (33.13), не зависящими от азимутального угла. Тогда, вводя функцию

$$y(x, \psi) = \frac{W_s(k, \theta)}{n_e \kappa T_e} 2 (2\pi)^{-3/2} \frac{r_{Di}^2 \omega_{Le} b_0}{r_{De}^2 \omega_{Li} \psi_0} k_0^3 \quad (33.18)$$

безразмерных переменных

$$x = \frac{k - k_0}{k_0} b_0 \psi_0, \quad \psi = \theta \psi_0, \quad (33.19)$$

где

$$\psi_0^2 = \frac{1}{F(k_0) - 1}, \quad (33.20)$$

$$b_0 = \frac{k_0 v_{Te}}{\tilde{\gamma}(k_0)} \sqrt{\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p}}, \quad (33.21)$$

$$F(k_0) = \frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} \equiv \frac{E_0^2 \omega_{Le}^2}{8 (2\pi)^{3/2} n_e \kappa T_e \omega_{Li} \tilde{\gamma}(k_0)}, \quad (33.22)$$

получим из (33.18) следующее уравнение:

$$y_0 = y(x, \psi) \left\{ \psi^2 + x^2 - 1 - \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_1}^{x_2} dx' \delta(x - x') \int_0^{\psi_1(x')} \psi' d\psi' (\psi^2 + \psi'^2) y(x', \psi') \right\}. \quad (33.23)$$

Левая часть этого уравнения обусловлена спонтанным черенковским излучением ионного звука и имеет следующий вид:

$$y_0 = 2 (2\pi)^{3/2} \frac{r_{Di}^2 \omega_{Le} k_0^3}{r_{De}^2 \omega_{Li} n_e} b_0 \psi_0. \quad (33.24)$$

Область параметрической раскачки соответствует $\psi^2 + x^2 \leq 1$. Поэтому естественно считать, что величины, характеризующие область сильно надтеплового турбулентного шума:

$$\psi^2 \lesssim \psi_1^2(x), \quad x_1 < x < x_2, \quad (33.25)$$

также оказываются порядка единицы. Это позволяет далее определить порядок величины энергии ионно-звуковых

волн и аномальной высокочастотной проводимости турбулентного состояния плазмы, возникшего в результате параметрической неустойчивости.

Рассмотрим следствия, вытекающие из уравнения (33.23). Очевидно, что

$$y(x, \psi) = \frac{y_0}{A(x) + B(x)\psi^2}. \quad (33.26)$$

Функции $A(x)$ и $B(x)$ подчиняются уравнениями, которые могут быть записаны с помощью уравнения (33.23). При этом учтем, что на границе области турбулентности $\psi = \psi_1(x)$ спектральная плотность энергии ионного звука в $\alpha \gg 1$ раз превышает тепловое значение

$$y(x, \psi_1(x)) = \frac{\alpha y_0}{\psi_0^2}. \quad (33.27)$$

Соответственно формуле (33.26) такой высокий уровень ионно-звукового шума в области (33.25) достигается в условиях малости функции $A(x) \ll 1$. Учтя последнее, получим

$$\frac{y_0}{2} \frac{d}{dx} \frac{\psi_0^2}{\alpha B^2(x)} = x^2 - 1, \quad (33.28)$$

$$\frac{y_0}{2} \frac{d}{dx} \frac{1}{B(x)} \ln \frac{\psi_0^2}{\alpha A(x)} = 1 - B(x). \quad (33.29)$$

Полученные два уравнения легко позволяют получить необходимые оценки уровня турбулентных ионно-звуковых флуктуаций. Так из уравнения (33.28) следует

$$B(x) \sim \psi_0 (y_0/\alpha)^{1/2}. \quad (33.30)$$

Это означает, что при не слишком близкой к пороговому значению напряженности электрического поля волны накачки функция $B(x)$ мала по сравнению с единицей. Соответственно из уравнения (33.29) тогда имеем

$$\frac{y_0}{2} \frac{1}{B(x)} \ln \frac{\psi_0^2}{\alpha A(x)} \sim 1, \quad (33.31)$$

что оправдывает предположение о малости функции $A(x)$, для которой отсюда получаем

$$A(x) \sim \exp\left(-\frac{\psi_0}{V y_0 \alpha}\right). \quad (33.32)$$

Необходимо заметить, что левая часть соотношения (33.31) представляет собой

$$\int_0^{\psi_1(x)} \psi d\psi (x, \psi).$$

Поэтому ясно, что полный безразмерный шум, получаемый интегрированием безразмерной плотности турбулентных флуктуаций (33.26), также оказывается по порядку величины равным единице. В результате для плотности энергии ионно-звуковых волн получаем

$$W \equiv \int \frac{dk}{(2\pi)^3} W_s(k) \approx n_e \kappa T_e \left[\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right] \times \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{r_{De}^2 \omega_{Li} \tilde{\gamma}^2(k_0)}{r_{Di}^2 \omega_{Le} k_0^2 v_{Te}^2} \left[\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_0 - \omega_p}{\omega_p} \right]^{-1}. \quad (33.33)$$

Эта величина должна быть малой по сравнению с тепловой энергией частиц плазмы.

Сделаем здесь замечание о сравнении результатов подходов работ [65] и [104]. В работе [65] при изучении турбулентного шума пренебрегалось левой частью уравнения (33.23), в то время как приведенное здесь решение этого уравнения отвечает работе [104]. Два таких подхода приводят к различному угловому и спектральному распределению турбулентных флуктуаций. Однако полная плотность энергии ионно-звуковых волн получается одинаковой. Последнее представляется существенным для определения турбулентного вклада в высокочастотную проводимость плазмы.

Для того чтобы найти вклад турбулентных ионно-звуковых флуктуаций в высокочастотную проводимость, воспользуемся формулой (30.51), которая в интересующем нас случае близости к порогу неустойчивости, когда имеют место формулы (33.16) и (33.17), дает

$$\sigma_{\text{турб}} = \frac{e^2 n_e}{m_e \omega_0^2} \nu_{\text{турб}}, \quad (33.34)$$

где

$$\nu_{\text{турб}} = \frac{\omega_{Le}^2}{\tilde{\gamma}(k_0)} \frac{W}{n_e \kappa T_e}, \quad (33.35)$$

а W представляет собой полную плотность энергии колебаний, определенную формулой (33.33). Например, для

водородной плазмы и при $\omega_0 - \omega_p \approx \omega_p [\ln(M/m_e)]^{-1}$, что соответствует правому краю области расстройек (33.5), эффективная частота столкновений, обусловленная турбулентными ионно-звуковыми флуктуациями, по порядку величины равна

$$\nu_{\text{турб}} \sim \omega_{Li} \frac{T_e}{T_i} \left(\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right). \quad (33.36)$$

Уточнение вывода турбулентной проводимости при высоком уровне флуктуации может быть проведено с помощью положения о том, что диссипация продольных волн должна определяться декрементом

$$\tilde{\gamma}(k_0) + \frac{1}{2} \nu_{\text{турб}}(E_0). \quad (33.37)$$

Такое переопределение высокочастотного декремента приводит к тому, что вместо формулы (33.9) для определения эффективного порогового поля следует использовать выражение

$$\frac{\tilde{E}_{\text{пор}}^2}{4\pi n_e \kappa T_e} = 16 \frac{\gamma_s(k_0) [\tilde{\gamma}(k_0) + \frac{1}{2} \nu_{\text{турб}}(E_0)]}{\omega_s \omega_s(k_0)}. \quad (33.38)$$

Тогда вместо формулы (33.33) можно записать следующую, определяющую плотность энергии ионно-звуковых флуктуаций:

$$W \approx n_e \kappa T_e \left[\frac{E_0^2}{\tilde{E}_{\text{пор}}^2} - 1 \right] \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{r_{De}^2 \omega_{Li}}{r_{Di}^2 \omega_{Le}} \times \\ \times \frac{[\tilde{\gamma}(k_0) + \frac{1}{2} \nu_{\text{турб}}(E_0)]^2}{k_0^2 \nu_{Te}^2} \left[\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_1 - \omega_p}{\omega_p} \right]^{-1}. \quad (33.39)$$

Теперь, имея в виду формулы (33.38) и (33.39), можем записать вместо (33.35) следующее уравнение:

$$\nu_{\text{турб}} = \frac{\omega_{Le}^2}{1} \frac{W}{n_e \kappa T_e} \frac{1}{\tilde{\gamma}(k_0) + \frac{1}{2} \nu_{\text{турб}}}. \quad (33.40)$$

Отсюда для турбулентной частоты столкновения получаем

$$\nu_{\text{турб}} = 2\tilde{\gamma}(k_0) \left[\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right] \left\{ 1 + \frac{2(2\pi)^{1/2}}{9C} \frac{r_{Di}^2 \omega_{Le}}{r_{De}^2 \omega_{Li}} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_1 - \omega_p}{\omega_p} \right] \left[\sqrt{\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Le}^2} + 6 \frac{\omega_1 - \omega_p}{\omega_p}} - \frac{\omega_{Li}}{\omega_{Le}} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (33.41)$$

где C — безразмерная постоянная порядка единицы.

Из формулы (33.41) с очевидностью следует, что турбулентная эффективная частота столкновений может превосходить обычную частоту кулоновских столкновений электронов полностью ионизированной плазмы в том случае, когда черенковская высокочастотная диссипация продольного, значительно превышает обычную столкновительную. При этом в окрестности правого края области расстройек (33.5) и для $\omega_{Le} r_{Di}^2 < \omega_{Li} r_{De}^2$ формула (33.41) имеет простой вид:

$$v_{\text{турб}} = 2\tilde{\gamma}(k_0) \left[\frac{E_0^2}{E_{\text{пор}}^2} - 1 \right], \quad (33.42)$$

причем $2\tilde{\gamma}(k_0) \sim \omega_{Li} [\ln(M/m)]^{-1}$, а пороговая напряженность электрического поля волны накачки оказывается такой, что скорость осцилляций электрона сравнивается со скоростью ионного звука. Укажем здесь, что для водородной плазмы с плотностью $n_e \sim 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ и температурой $T \sim 4 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ имеем $\omega_{Li} \sim 2 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$ и $v_{ei} \sim 2 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$, если же $n_e \sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$ и $T \sim 10^8 \text{ }^\circ\text{K}$, то $\omega_{Li} \sim 3 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$ и $v_{ei} \sim 4 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$. Очевидно, что при таких значениях плотности числа частиц и температуры электронов формула (33.42) легко может давать значение турбулентной частоты столкновений, на много превышающее частоту кулоновских столкновений плазмы. Таким образом, высокочастотная проводимость плазмы, обусловленная турбулентным шумом ионно-звуковых волн, может стать аномально большой и в околопороговой области параметрической неустойчивости плазмы.

Изложенные в этом параграфе теоретические результаты ограничены случаем возбуждения ионно-звуковых волн, что относится к плазме с $T_e \gg T_i$. Для изотермической плазмы оказывается существенным влияние электрического поля на спонтанные флуктуации высокочастотных плазменных колебаний [105—107]. Нелинейная теория флуктуаций и аномальной проводимости в такой плазме построена в работах [105, 106, 199].

Заметим, что нелинейные процессы, учет которых в работах [65, 104—106] дает возможность получить стационарный уровень турбулентности параметрически неустойчивой плазмы, сводятся к процессам индуцированного рассеяния волн частицами. Другая возможность установления стационарной турбулентности была выявлена в работе

[109]. Именно в этой работе было обращено внимание на роль нелинейного сдвига частоты плазменных колебаний, возникающего благодаря влиянию на спектр высокочастотных колебаний развившихся в плазме флуктуаций [61, 62, 121, 122]. Стабилизирующее влияние такого сдвига частоты продемонстрируем на примере аperiodической параметрической неустойчивости. (Иная возможность изучена в [197].)

Поскольку аperiodические возмущения в параметрически неустойчивой плазме нарастают одновременно с нарастанием плазменных колебаний на частоте ω_0 волны накачки, то для всего явления такой неустойчивости имеют определяющее значение резонансные высокочастотные свойства плазмы. Имея в виду выявить обратное нелинейное влияние интенсивных плазменных флуктуаций на их дисперсионные свойства, используем соответствующее дисперсионное уравнение высокочастотных плазменных колебаний [109]:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} W_l(\mathbf{k}') q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0. \quad (33.43)$$

Здесь $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ — линейная продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, $W_l(\mathbf{k})$ — спектральная плотность энергии высокочастотных плазменных колебаний, а

$$q(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 2\pi \frac{e^2}{m^2} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'} \right)^2 \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2}{(\omega\omega')^2} \times \\ \times \frac{\delta\varepsilon_e(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\varepsilon(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')} [1 + \delta\varepsilon_i(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')]. \quad (33.44)$$

Комплексное уравнение (33.43) определяет частоту и декремент затухания колебаний. Имея в виду малость нелинейного сдвига частоты $\delta\omega(\mathbf{k})$ по сравнению с плазменной частотой ω_p , получаем из действительной части уравнения (30.43):

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \omega_l(\mathbf{k}) + \delta\omega(\mathbf{k}), & \omega_l(\mathbf{k}) &= \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right), \\ \delta\omega(\mathbf{k}) &= -\frac{1}{2} \omega_l(\mathbf{k}) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} W_l(\mathbf{k}') \operatorname{Re} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \end{aligned} \right\} \quad (33.45)$$

Соответственно из мнимой части уравнения (33.43) следует выражение для декремента затухания, который

складывается из обычного линейного декремента высокочастотных продольных волн

$$\tilde{\gamma}(k) = \frac{1}{2} \nu_{ei} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{Le}}{k^3 r_{De}^3} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{k v_{Te}} \right)^2 \right]$$

и нелинейной добавки

$$\delta\gamma(k) = \frac{1}{2} \omega_l(k) \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} W_l(\mathbf{k}') \operatorname{Im} q(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (33.46)$$

Существенно, что благодаря малости линейного декремента нелинейная добавка $\delta\gamma$ может быть сравнимой с $\tilde{\gamma}$.

Для того чтобы выяснить влияние выявляемых уравнением (33.43) нелинейных эффектов на аperiodическую неустойчивость, подставим в формулу (8.3) для инкремента аperiodической неустойчивости измененные под действием возникших флуктуаций выражения для частоты и декремента высокочастотных колебаний, после чего приравняем инкремент нулю. Очевидно, что такая процедура даст условие стационарности возникших плазменных флуктуаций. В результате получаем уравнение

$$\frac{(\mathbf{k}r_E)^2}{k^2 (r_{De}^2 + r_{Di}^2)} = 4 \frac{(\Delta\omega_0 - \delta\omega)^2 + (\tilde{\gamma} + \delta\gamma)^2}{\omega_{Le} (-\Delta\omega_0 + \delta\omega)}, \quad (33.47)$$

являющееся очевидным обобщением уравнения (8.6) линейной теории аperiodической неустойчивости.

Для напряженности электрического поля волны накачки, превышающей пороговое значение, определенное формулой (8.9) линейной теории аperiodической параметрической неустойчивости, согласно (33.47) возможно установление стационарного уровня турбулентных флуктуаций. Обсудим детальнее такую возможность в околопороговой области, когда значение волнового вектора плазменных колебаний близко к пороговому (8.8), а направления волновых векторов лежат в узком конусе около направления колебания электрического вектора волны накачки. При этом нетрудно выполнить условия

$$\omega'' = {}^{3/2} \omega_{Le} (k^2 - k'^2) r_{De}^2 \ll |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{Ti} = k'' v_{Ti}$$

и

$$|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 r_{Di}^2 \ll 1.$$

Тогда оказывается, что

$$(\delta\gamma/\delta\omega) \sim \omega''/k''v_{Ti},$$

а

$$\delta\omega(k) = -\frac{e^2}{8m_e^2\omega_0^3(r_{De}^2 + r_{Di}^2)} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}\right)^2 \times \\ \times W_l(\mathbf{k}') \equiv \frac{1}{8} \omega_{Le} \frac{\left(\frac{eE}{m\omega_0^2}\right)^2}{r_{De}^2 + r_{Di}^2}, \quad (33.48)$$

где E — эффективная напряженность высокочастотного поля плазменных флуктуаций. Соответственно этому можно пренебречь $\delta\gamma$ и с помощью уравнения (33.47) найти величину эффективного продольного поля E стационарной турбулентности. Так, вблизи порога при

$$\Delta\omega_0 = -1/2v_{ei}$$

находим

$$E \approx \sqrt{2} E_{\text{пор}}^{3/4} (E_0 - E_{\text{пор}})^{1/4}, \quad (33.49)$$

где $E_{\text{пор}}$ определено формулой (8.9).

Следует отметить, что при значительном превышении над порогом, когда расширяется область волновых векторов параметрически возбуждаемых плазменных колебаний, в соответствии с уравнением (33.47) могут оказаться существенными не только нелинейный сдвиг частоты, но и нелинейный декремент $\delta\gamma$.

§ 34. Численный эксперимент и аномальная высокочастотная проводимость плазмы

Среди различных путей построения теории воздействия электромагнитного поля на плазму есть путь численного расчета простых моделей, имитирующих свойства реальной газовой плазмы. Одной из таких моделей, сравнительно удобной для численного машинного счета, является одномерная модель заряженных частиц конечного размера. В такой модели взаимодействие частиц определяется кулоновским полем, подчиняющимся уравнению Пуассона, а движение частиц описывается уравнениями Ньютона, учитывающими самосогласованное поле всех частиц плазмы. Методика расчета описана в работе [67].

Такая модель была положена в основу расчетов, результаты которых опубликованы в статье [66]. Численные расчеты простых моделей принято называть численными экспериментами *). Для экспериментов статьи [66] использовалась система, состоящая из десяти тысяч электронов и десяти тысяч ионов. Ионы принимались в сто раз тяжелее электронов, а температура электронов в начальный момент времени считалась в тридцать раз большей температуры ионов. Общий размер такой системы заряженных частиц составлял 256 дебаевских радиусов. Система, моделирующая плазму, считалась помещенной в поле бесконечной длины волны вида $E_0 \cos \omega_0 t$, определяющее внешнюю силу, приложенную к каждой частице.

Результаты численного эксперимента, приведенные на рис. 10 и 11, получены при частоте внешнего поля, совпадающей с электронной ленгмюровской и при $v_E = 0,6 v_{Te}$.

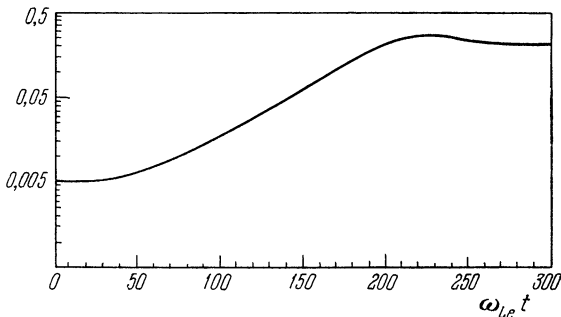


Рис. 10.

На рис. 10 по оси ординат отложено в логарифмическом масштабе отношение энергии волн электрического поля плазмы (без вклада энергии внешнего поля) к начальной тепловой энергии плазмы, а по оси абсцисс отложено $\omega_{Le} t$. Этот рисунок показывает, что с увеличением времени сравнительно быстро возникает экспоненциальное нарастание во времени волновой энергии поля в плазме. После того как волновая энергия воз-

*) Заметим, что имеется определенная аналогия в проведении численных экспериментов по параметрическому резонансу в плазме с соответствующими экспериментами по изучению неустойчивостей в плазме с пучком (ср. [68]).

растет примерно в сто раз, рост энергии поля прекращается. Одновременно с таким увеличением энергии поля происходит нагрев плазмы. Соответствующая зависимость от времени ($\omega_{Le}t$) приведена на рис. 11, где по оси ординат отложено отношение полной энергии плазмы к начальному значению ее тепловой энергии. При этом, если на начальном этапе нагрев плазмы происходит медленно, как это и соответствует, по замечанию авторов работы [66], классической теории нагрева плазмы благодаря кулоновским столкновениям заряженных

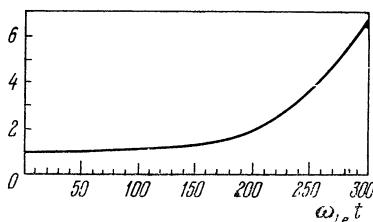


Рис. 11.

частиц, то после достижения волновой энергией поля достаточно большой величины, рост тепловой энергии плазмы ускоряется. Эффективная частота столкновений, соответствующая скорости нагрева у правого края кривой рис. 11, составляет примерно $0,18\omega_{Le}$. Такое весьма большое значение эффективной частоты столкновений говорит об аномально сильном увеличении высокочастотной проводимости плазмы.

Поскольку данные рис. 10 и 11 соответствуют $\omega_0 = \omega_p$, то возникающая при этом неустойчивость отвечает аperiодической параметрической неустойчивости плазмы, рассмотренной в § 8. Согласно формуле (8.4)

$$(\gamma + \tilde{\gamma})^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{[(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 - \omega_s^2]^2 + \left(\frac{kr_E}{kr_{De}}\right)^2 \omega_s^2 \omega_0 \Delta\omega_0} - [(\Delta\omega_0)^2 + \tilde{\gamma}^2 + \omega_s^2] \right\} \quad (34.1)$$

численный расчет при $\omega_0 = \omega_p$ и $v_E = 0,6v_{Te}$ приводит к максимальному значению инкремента $\gamma_{\max} = 0,016\omega_0$, которое имеет место при $kr_{De} = 0,14$. Следует сказать, что приведенные для этих величин значения в работе [66]

равны соответственно $0,018 \omega_0$ и $0,15$. Очевидно, что согласие достаточно хорошее. На рис. 12 приведены точки для γ_{\max} как функции напряженности поля накачки, полученные в результате численного эксперимента, и теоретическая кривая. По оси ординат отложено $\gamma_{\max}/\omega_{Le}$, а по оси абсцисс v_E/v_{Te} .

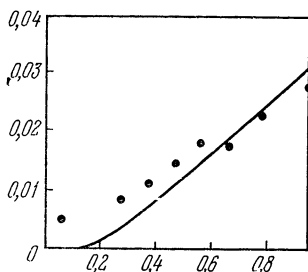


Рис. 12.

Определенный интерес представляет опубликованная в работе [66] зависимость энергии электромагнитного поля в режиме насыщения (ср. рис. 10) от величины поля накачки. Результаты, характеризующие такую зависимость, приведены на рис. 13, а. По оси абсцисс отложено

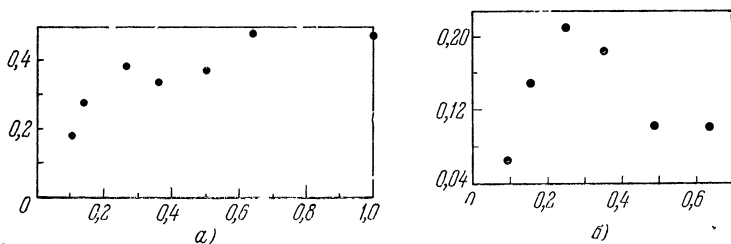


Рис. 13.

$E_0^2/4\ln kT$, а по оси ординат — отношение энергии флуктуирующего поля к тепловой энергии плазмы $\ln kT$ (а) и отношение эффективной частоты столкновений к электронной ленгмюровской (б). При сравнительно небольших полях имеет место монотонное нарастание энергии поля. Приведенная здесь зависимость в определенной мере повторяется на рис. 13, б, где нанесенные точки соответствуют значениям эффективной частоты столкновений в турбулентном состоянии плазмы, возникшем благодаря параметрической не-

устойчивости. Данные этого рисунка получены по скорости нагрева плазмы. С другой стороны, при $v_E = v_{Te}$ после выключения поля было рассмотрено затухание колебаний с большой фазовой скоростью, для которой нет затухания Ландау. При этом оказалось [66], что $v_{турб} \sim 0,07 \omega_{Le}$, что близко к полученному из нагрева.

В определенном смысле дополняющим результаты работы [66] является сообщение [69], в котором говорится о численном эксперименте для случая частоты поля накачки, чуть большей электронной плазменной частоты. При этом, как это следует из глав I и II, оказывается возможной раскачка почти периодических колебаний, на пороге совпадающих с ионно-звуковыми, в то время как в условиях работы [66] оказывалась возможной лишь аperiodическая неустойчивость. Основные результаты работы [69] подобны полученным в [66]. Здесь также экспоненциально нарастают ионные флуктуации, приводящие к возникновению аномальной проводимости. Возникает аномально быстрый нагрев плазмы. Однако аномальная частота столкновений оказывается меньше найденной в работе [66].

Работа Крюера и Доусона [80] (см. также [81]) посвящена численному расчету воздействия на плазму сильной бегущей электромагнитной волны с частотой, близкой к удвоенной плазменной. Здесь также наблюдается рост энергии электронных плазменных колебаний вплоть до насыщения. В распределении электронов возникает значительное число частиц с высокими скоростями, на порядок превышающими тепловую.

В сообщении Каца и Дегрота [82] говорится о результатах численного эксперимента, в котором отношение энергии электромагнитной волны к тепловой энергии плазмы изменялось от 0,72 до 5000. При этом частота поля накачки принималась либо чуть ниже, либо равной, либо чуть выше электронной ленгмюровской частоты плазмы. Было обнаружено, что в результате параметрического воздействия электромагнитного излучения в плазме возникают неустойчивости. Нарастающие возмущения растут с инкрементом, согласующимся с аналитической теорией, а затем имеет место насыщение. Замечено, что в случае сильного поля накачки после насыщения роста возникающих в плазме волн происходит их распад, ведущий к нагреву плазмы.

Еще об одном численном эксперименте сообщает Карлайл [83]. Здесь речь идет о результатах, полученных на

ЭВМ для максвелловской электронной плазмы, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле, в поле волны накачки, волновой вектор и вектор электрического поля которой лежат в плоскости, перпендикулярной постоянно-му магнитному полю. Обнаружено, что когда частота электромагнитной волны оказывается близкой к удвоенному значению верхней гибридной частоты, то становятся нарастающими две продольные плазменные волны, а типичное значение инкремента составляет примерно $0,05 |\Omega_e|$. После того как амплитуды возрастающих волн достигают насыщения, начинается быстрый нагрев электронов плазмы.

Наконец, в работе [84] содержится сообщение о численном эксперименте по аномальному нагреву плазмы для случая частоты поля накачки, значительно превышающей электронную ленгмюровскую. При этом было обнаружено подтверждение теории, развитой в работе [10] и изложенной выше в § 8.

ГЛАВА VII

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ НА ПЛАЗМУ

§ 35. Лабораторные эксперименты по исследованию явлений параметрического воздействия на плазму мощного электромагнитного излучения

Теория параметрического воздействия мощного излучения на плазму возникла в значительной мере в связи с проведением в Физическом институте им. П. Н. Лебедева АН СССР (ФИАН) экспериментальных работ по радиационному ускорению плазмы [86], предпринятых, как это было ясно с самого начала, в малоизученных физических условиях. Уже первые результаты теории, полученные в работе [2] по неустойчивости и возрастанию энергии движения частиц плазмы под действием внешнего высокочастотного электромагнитного поля, позволили с совершенно новых в то время позиций оценить возможности радиационного ускорения плазмы. Этому была посвящена работа Гуревича и автора [87], в которой, в частности, были приведены оценки времени нарастания тепловой энергии электронов, находящихся в поле высокочастотной волны. При этом на основании результатов работы [2] обсуждался нагрев электронов благодаря развитию параметрической неустойчивости относительно раскачки потенциальных колебаний плазмы, а для соответствующего времени увеличения тепловой энергии вплоть до величины порядка энергии внешнего электромагнитного поля приводилось значение $\sim 10 \omega_{Li}^{-1}$. Становилось ясным, что воздействие мощного излучения на плазму должно изу-

чататься детальнее *). Все это явилось причиной определенной переориентации исследований воздействия излучения на плазму, приведших затем в ФИАНе к экспериментальному обнаружению весьма важных явлений параметрического воздействия мощного излучения на плазму. Однако первое подтверждение теоретических представлений связано с работой [90].

Сразу же после опубликования первых теоретических результатов по параметрическому резонансу в плазме Стерн и Тцоар [90] экспериментально обнаружили в результате воздействия внешней электромагнитной волны с частотой, близкой к ленгмюровской, параметрическое возбуждение ионно-акустических и высокочастотных электронно-плазменных колебаний. В этом эксперименте СВЧ-излучение с частотой $\omega_0 = 4,4 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$ падало на цилиндрический плазменный столб, средняя электронная ленгмюровская частота которого примерно равнялась частоте поля накачки ($\omega_{Le} \approx \omega_0$). При низком уровне мощности поля накачки и при высоком, превышающем проявляющееся в эксперименте пороговое значение, соответствующее напряженности электрического поля $\sim 15 \text{ в/см}$, возникали качественно различные картины. Так, при слабом поле плазма отражала лишь волну с частотой ω_0 . Напротив, при превышении порога обнаруживалось дополнительное отражение волн с частотами $\omega_0 - \omega_s$ и $\omega_0 + \omega_s$, причем частота ω_s вблизи порога совпадала с частотой ионно-звуковых колебаний с длиной волны, равной внутреннему диаметру вакуумной трубки, содержащей плазму. Факт возбуждения в плазме высокочастотных плазменных волн был подтвержден с помощью использованной в работе [90] методики рассеяния СВЧ-излучения с частотой $\omega_{in} = 11,4 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$. При этом для мощности поля накачки, превышающей пороговую, в спектре рассеянного излучения наблюдались три линии: $\omega_{in} - \omega_0$, $\omega_{in} - \omega_0 - \omega_s$, $\omega_{in} - \omega_0 + \omega_s$. Далее, факт возбуждения в плазме низкочастотных ионно-звуковых колебаний устанавливался как по спектру

*) Оценки работы [87], связанные с параметрическим воздействием излучения на плазму, выявили существенные ограничения одного из обсуждавшихся методов радиационного ускорения плазмы. Заметим, что критика такого метода содержалась в обзоре Мотца и Уотсона [77]. Однако такая критика не была связана с анализом реальной модели. Можно сослаться, например, на работу [89], в которой необходимый анализ проводился и которая подтвердила физические представления работы [87].

рассеяния, в котором обнаруживались компоненты ω_{in} — ω_s и $\omega_{in} + \omega_s$, так и по флуктуационному току на зонд с частотой флуктуаций ионной плотности ω_s . Наконец, в работе [90] было сообщено, что при большой напряженности поля накачки (~ 200 в/см) было обнаружено излучение из плазмы с широким спектром около ω_{\perp} , обладающим острыми пиками в окрестности обертонов ω_s и ионной ленгмюровской частоты. Авторы работы [90] связали свои результаты с неустойчивостью плазмы, развивающейся в результате воздействия внешнего поля накачки. Впоследствии попытки теоретического анализа результатов работы [90] предпринимались в работах [17, 23]. При этом качественные стороны результатов эксперимента соответствуют теории параметрической неустойчивости плазмы, а количественное согласие порогового значения может быть получено при разумном значении частоты столкновений [17]*).

Совокупность экспериментальных исследований, нацеленных на проверку теории параметрического воздействия излучения большой мощности на плазму, была поставлена и проведена в ФИАНе. Одним из первых явлений, обнаруженных при этом, является аномальный распад плазмы [91—95]**). При этом в первых исследованиях этого направления при изучении взаимодействия плазменного потока с потенциальным барьером сверхвысоко-частотного поля было показано, что в широком интервале значений плотности плазмы, когда плазма является прозрачной для СВЧ-поля, энергетические спектры ионов плазмы, прошедшей через СВЧ-барьер, оказываются идентичными. Однако такое положение нарушалось при приближении плотности плазмы к значению, при котором электронная ленгмюровская частота оказывается сравнимой

*) В работе [158] предложена интерпретация экспериментальных данных работы [90] в предположении, что возникновение ионно-звуковых волн обусловлено распадом возникшей в результате воздействия поля накачки продольной электронной плазменной волны на такую же и ионно-звуковую. Отметим, что развитая в работе [158] теоретическая схема учитывает конечную длину волны всех трех взаимодействующих колебаний плазмы.

***) Еще ранние исследования [147] взаимодействия плазменных сгустков с сильной H_{11} -волной показали, что при $E > 1$ кв/см в отсутствие внешнего магнитного поля происходит разбрасывание как редкой, так и плотной плазмы. Если распад редкой плазмы авторы работы [147] связывали с действием потенциала неоднородного высокочастотного поля [76], то причины распада плотной плазмы не выяснялись.

с частотой СВЧ-поля. Так, в работе Сергейчева [92] сообщалось, что «уже при плотности, определяемой с точностью до 30% и удовлетворяющей условию $\omega_{Le}^2 \approx 0,4\omega_0^2$, наблюдалось резкое изменение характера прохождения струи через СВЧ-барьер». Такое положение имело место как при значениях энергии осциллирующих электронов, на порядок превосходящих их тепловую энергию, так и при близких к тепловой энергии. Сергейчев связал такое изменение характера прохождения плазменной струи с параметрическими неустойчивостями плазмы. Последующие

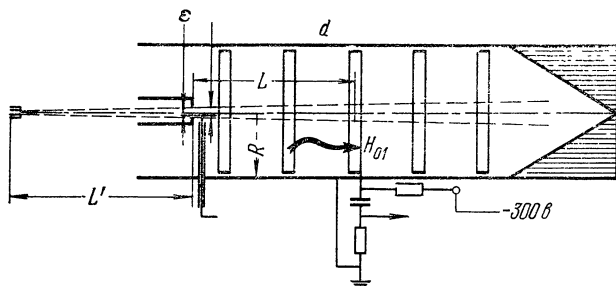


Рис. 14.

экспериментальные исследования подтвердили эту точку зрения. Определенный итог исследованиям по аномальному распаду плазмы в СВЧ-поле дан в работе [94] (см. также [148]). Поэтому остановимся на этой работе несколько подробнее.

Схема установки, использовавшейся в опытах по распаду, изображена на рис. 14. Электромагнитное СВЧ-поле десятисантиметрового диапазона H_{01} -волны варьировалось от десятков ватт до 10^6 вт. Оно включалось перед инжекцией плазмы и поддерживалось в течение всего времени ее протекания. Длительность импульса поля составляла $10 \div 20$ мксек. Инжектируемая плазма содержала в основном ионы водорода H^+ , H_2^+ и углерода C^+ со средней энергией направленного движения 200 эв, а температура электронов составляла 4—5 эв. Поперечные составляющие кинетической энергии ионов после прохождения диафрагмы не превышали 0,2 эв. Эти данные позволяют сказать, что для плазмы с «критической» плотностью

$$n_0 = \frac{\omega_0^2 m_e}{4\pi e^2} \approx 10^{11} \text{ см}^{-3}$$

частота электрон-ионных столкновений оказывается равной $\nu_{ei} = 3 \cdot 10^5 \text{ сек}^{-1}$. Необходимо заметить, что поскольку $v_{Te} = 7 \cdot 10^7 \text{ см/сек}$, то частота $\nu_e = 3,5 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ столкновений электрона с поперечными границами плазменного пучка, размеры которого характеризуются диаметром диафрагмы, равным 2 см, оказывается существенно большей частоты электрон-ионных соударений. Этот факт затрудняет непосредственное применение к такой экспериментальной ситуации теории параметрического воздействия мощного излучения на плазму в том случае, когда результаты такой теории существенно определяются электрон-ионными столкновениями. Основным результатом работы [94] заключается в измерении пороговой величины напряженности электрического СВЧ-поля, при которой в зависимости от плотности плазмы возникает распад, приводящий к появлению тока в коллекторе.

Такого тока нет в отсутствие СВЧ-поля и при малой его напряженности. Результаты измерений приведены на рис. 15, где по оси ординат отложено отношение амплитуды скорости осциллирующих электрона к его тепловой скорости, соответствующей вакуумной напряженности электрического поля, при которой возникает распад. По оси абсцисс отложено отношение максимальной плотности плазмы, измеряемой вблизи входной диафрагмы, к «критическому» значению плотности n_0 . Экспериментальные точки со-

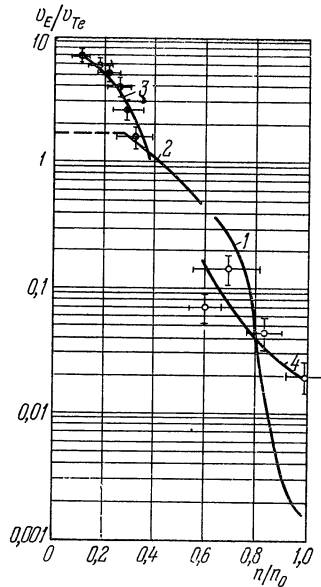


Рис. 15.

ответствуют измерениям работ [91—95]. Кривые 3 и 4 проведены по этим точкам. Пунктирная горизонтальная прямая отвечает формуле (6.24), теоретическая кривая 2 получена в результате расчетов порога по формуле (6.36), наконец, теоретическая кривая 1 получена по формуле порога, обусловленного черенковским эффектом:

$$\frac{v_E}{v_{Te}} = 2(kr_{De})^{-7/2} \exp\left(-\frac{\omega_0^2}{2k^2 v_{Te}^2}\right),$$

где волновой вектор определен соотношением

$$\Delta\omega_0 = \omega_0 - \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right) = \tilde{\gamma} \gg \omega_s .$$

Заметим, что при малых напряженностях поля порог параметрической неустойчивости определяется столкновениями. При этом для распадного порога (10.22) $v_E/v_{Te} \sim 10^{-3}$, а для порога аperiодической неустойчивости непрозрачной плазмы (8.9) $v_E/v_{Te} \sim 10^{-2}$. Если же в таких оценках вместо частоты электрон-ионных соударений использовать частоту соударений электрона с границами плазменного пучка, то эти пороги возрастут на порядок. Рис. 15 позволяет сделать вывод о том, что экспериментальные данные подобны теоретическим предсказаниям.

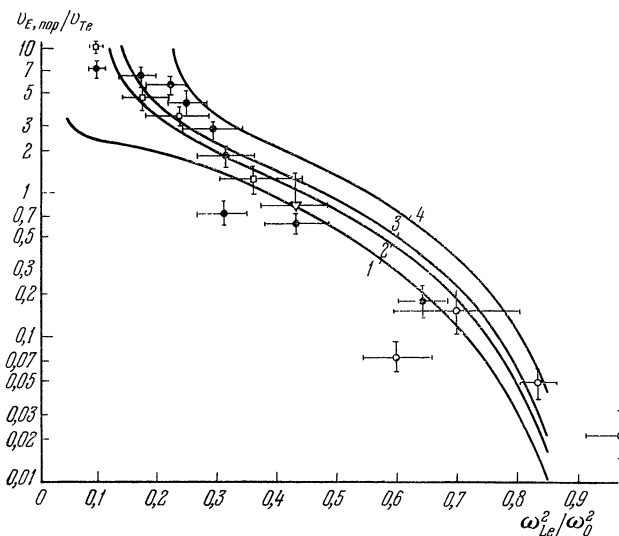


Рис. 16.

Другое сравнение с теорией результатов порогов параметрической неустойчивости, определенных по распаду плазмы, было проведено Андреевым [130]. Построенные им кривые порогов (рис. 4 § 6) и экспериментальные точки, представленные на рис. 16, убедительно подтверждают предположение о том, что причиной распада плазмы является развитие параметрических неустойчивостей,

причем в широкой области такая неустойчивость связана с параметрическим преобразованием поперечной волны накачки в продольную электронную высокочастотную волну и также в продольную низкочастотную ионно-звуковую. Однако для полного согласия теории с опытом необходимо большее число данных о состоянии плазмы, дабы поведение плазмы можно было сравнивать с разносторонними предсказаниями теории.

Среди работ, поставленных в ФИАНе для проверки теории параметрического воздействия на плазму мощного излучения, важное значение имеют экспериментальные исследования поглощения электромагнитных волн. Исследование Геккера и Сизухина [96, 97] (см. также [95, 98]) привело к обнаружению на опыте аномально сильного поглощения в плазме, возникающего при достаточно большой мощности излучения. В работах [96, 97] исследовалось поглощение плазмой мощной H_{11} -волны десятисантиметрового диапазона в круглом волноводе. При этом плазменный столб, инжектируемый навстречу бегущей волне, перекрывал все сечение волновода и имел практически однородное по радиусу распределение частиц. Температура инжектируемой плазмы равнялась 4 эв. Скорость движения фронта инжектируемой в установку плазмы равнялась $\sim 10^7$ см/сек. Градиент плотности числа частиц плазмы на переднем фронте составлял 10^9 — 10^{10} см $^{-4}$, а максимальная плотность плазмы при выходе из области СВЧ-нагрузки (в случае бегущей волны) достигала 10^{12} см $^{-3}$. По мере распространения плазмы вдоль волновода (по оси z) максимальная плотность числа частиц убывала пропорционально z^{-3} . При этом электронная ленгмюровская частота плазмы ω_{Le} при некотором значении z становилась равной частоте электромагнитной волны, закачиваемой в волновод. Если в работе [96] использовался режим бегущей волны (в отсутствие плазмы), когда установка была снабжена согласованной СВЧ-нагрузкой, то в работе [97] приведены также результаты другого режима, когда такой нагрузки нет, и плазма инжектировалась в стоячую H_{11} -волну.

Для слабого поля ($E_0 = 0,1$ в/см), когда скорость осцилляций электрона в поле волны мала по сравнению с тепловой, в работе [96] было получено практически 100-процентное отражение волны. Это соответствует обычным представлениям о взаимодействии высокочастотного поля с плазмой в условиях, когда выполнены неравенства

$\omega_{Le} > \omega_0 \gg \nu_{ei}$, имеющие место в этом эксперименте. Отраженная от плазмы электромагнитная волна регистрировалась

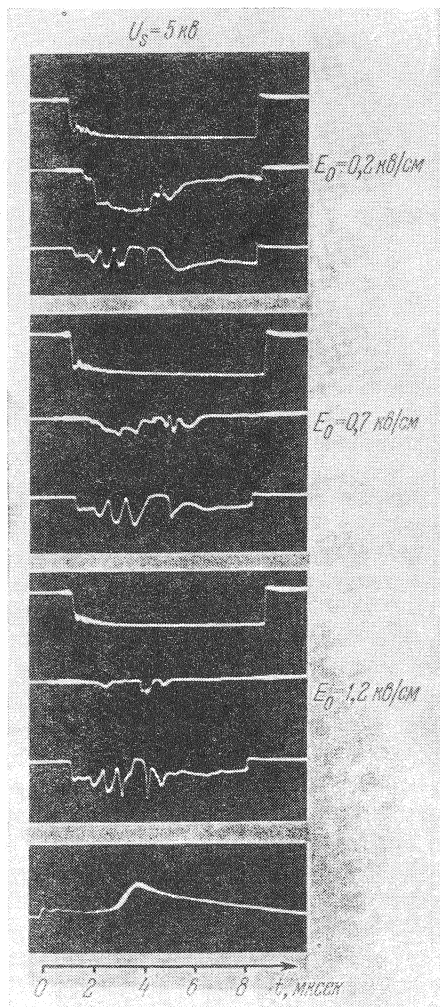


Рис. 17.

с помощью направленного ответвителя, а проходящая через волновод волна регистрировалась с помощью антенн, вводимых через патрубки круглого волновода.

Такие измерения были проведены в интервале значений напряженности электрического поля E_0 от 0,2 до 2 кв/см. Типичные осциллограммы СВЧ-сигналов, приведенные на рис. 17, соответствуют режиму бегущей волны. Для каждого из трех случаев напряженности поля накачки нижняя осциллограмма дает сигнал отраженной волны, средняя — сигнал прошедшей волны, измеряемый антенной на расстоянии $z = 45$ см от источника плазмы, а верхняя осциллограмма представляет собой калибровочный сигнал полного отражения. Отдельно на этом же рисунке приведена осциллограмма ионного тока, определяющегося сигналом с плазменного зонда, введенного в центр круглого волновода при $z = 45$ см.

На рис. 18 построены зависимости коэффициента отражения H_{11} -волны как функции напряженности электрического поля для обоих резонансов бегущей и стоячей волны. Кривая 1 отвечает максимальным усредненным по различным «выстрелам» инжектору плазмы, кривая 2 соответствует максимальным значениям для лучших выстрелов источника плазмы, кривая 3 построена по значениям, полученным по «провалам» осциллограмм отраженных сигналов, наконец, кривая 4 построена авторами работы [97] по определению из осциллограмм коэффициента стоячей волны. Все эти данные указывают на значительное уменьшение коэффициента отражения при большой мощности волны по сравнению с практически неотличающимся от единицы коэффициентом отражения в случае слабого поля.

Поскольку в эксперименте в течение определенного времени электромагнитная волна не проходит за плазменный слой, то уменьшение коэффициента отражения соответствует значительному возрастанию поглощения энергии волны плазмой. При этом, как следует из рис. 18, энергия, поглощаемая плазмой, растет с увеличением

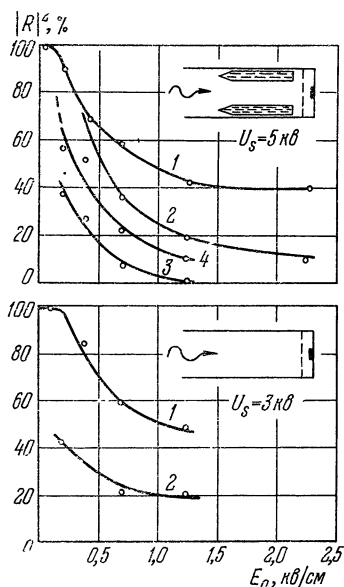


Рис. 18.

напряженности электрического поля волны. В работе [97] показано, что с ростом напряженности поля уменьшается время, в течение которого сохраняется плазма в сгустке, инжектируемом в волновод, т. е. быстрее происходит разбрасывание плазмы под действием внешнего СВЧ-поля. Вся эта совокупность фактов, обнаруженных в работе [96, 97], позволяет утверждать, что аномальное поглощение электромагнитных волн плазмой возникает для напряженности электрического поля, большей 100 в/см ($v_E/v_{Te} \approx 0,1$), и нарастает вплоть до $E_0 = 1 \text{ кв/см}$ ($v_E/v \sim 1$). Заметим здесь, что в волноводе распространение волны становится невозможным при плотности плазмы, большей критического значения n_0 . В экспериментах [96, 97] такое запираение волновода смещено по плотности плазмы значительно в силу использования низких мод волновода. С другой стороны, если иметь в виду такое смещение резонанса, то получаемое в работах [96, 97] значение порога поглощения не противоречит оценкам теории параметрического воздействия излучения на плазму (см. обзор [98]).

Еще одно явление, возникающее при воздействии сильного СВЧ-поля на плазму, обнаруженное Батановым, Сарксяном и В. А. Силиным [99] (см. также [95]) и связанное ими с параметрическим развитием неустойчивости в плазме, представляет собой аномально сильный нагрев электронов полем сильной СВЧ-волны *). Авторы работы [99] использовали круглый волновод, в котором распространялась бегущая TE_{11} -волна. Поперек волновода накладывалось сильное магнитное поле, которое было также перпендикулярно электрическому СВЧ-полю и вдоль которого распространялась струя плазмы, подвергаемая воздействию СВЧ-поля. При этом выполнялись условия $\omega_{Le} \leq \omega_0 < |\Omega_e|$. При увеличении мощности с ростом

$$e\Phi_0 = \frac{e^2 E_0^2}{4m_e (\omega_0^2 - \Omega_e^2)}$$

возникает электронный ток j_{\max} на плазменный зонд, что при отрицательных или равных нулю значениях по-

*) Это явление было описано первоначально в работе [146], в которой авторы пытались объяснить его возникновение как результат возбуждения ионно-звуковых колебаний взаимодействующими плазменными потоками и нагрева электронов на ионно-звуковых колебаниях.

Потенциала электронов зонда отвечает увеличению средней энергии электронов и нагреву плазмы. Меняя отрицательный потенциал U_3 зонда, можно получить представление о распределении электронов плазмы по энергиям. На рис. 19 приведены соответствующие результаты эксперимента [99] (плотность тока быстрых электронов j_{\max} как функция потенциала зонда U_3 при $E_0 = 6,5$ кВ/см, $\omega_0/\Omega_e = 0,4$, τ — время от начала разряда в источнике до момента измерения). Подчеркнем, что нагрев электронов возникает при превышении порогового значения напряженности поля, соответствующего $e\Phi_0 \approx 0,01\kappa T_e$.

В работе [99] были обнаружены электроны, при циклотронном резонансе достигшие энергии движения вдоль магнитного поля 600 эв. Поскольку при этом магнитное поле являлось однородным, то достижение высоких энергий электронов свидетельствует об эффективном механизме перевода энергии осцилляций электронов в их энергию движения вдоль магнитного поля. Эффективная частота столкновений, отвечающая набору энергии электронов 20 ÷ 30 эв вблизи порога аномального нагрева, соответствует значению, на порядок превышающему частоту кулоновских электрон-ионных соударений. При росте мощности излучения такая эффективная частота столкновений растет.

Возникновение быстрых электронов при воздействии СВЧ-волны на плазму было обнаружено в работе Баринава, Геккера, Сизухина, Хачатуряна [100] и в отсутствие магнитного поля, когда эксперименты велись в диапазоне 10 см и H_{11} -волна взаимодействовала с движущейся навстречу ей плазмой, что соответствует условиям экспериментов [96, 97] по аномальному поглощению. При этом ускорение электронов происходит преимущественно вдоль

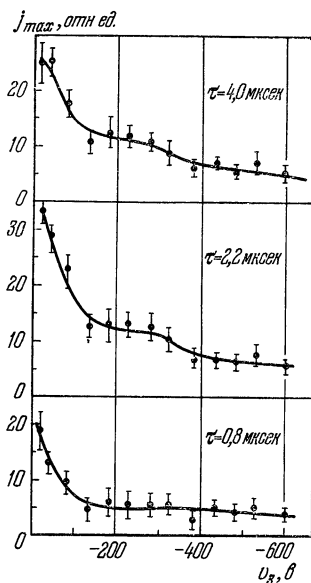


Рис. 19.

направления электрического поля волны. Из распределений электронов по энергиям (рис. 20) авторы работы [100] сделали вывод о появлении ускоренных электронов при пороговом значении напряженности электрического поля $\approx 0,25$ кв/см, что близко к порогам работ [96, 97] для аномального поглощения. С увеличением E_0 , как это

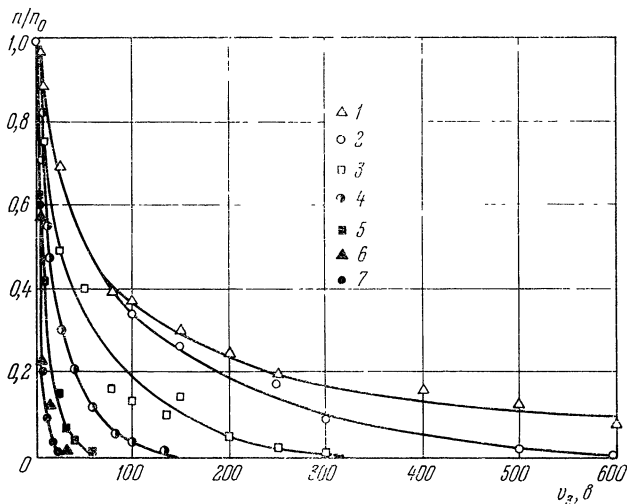


Рис. 20.

видно из рис. 20 (1 — 1,5; 2 — 1,2; 3 — 0,9; 4 — 0,7; 5 — 0,45; 6 — 0,25; 7 — 0 кв/см) резко возрастает максимальная энергия электронов, которая оказывается значительно превышающей энергию осцилляций электрона в поле волны. Данные работы [100] по зависимости энергии ускоренных электронов при $E_0 = 0,7$ кв/см гласят, что энергии ускоренных электронов превосходили 50 эв только при $n = (0,4 \pm 0,2) n_0$, становились более 100 эв при $n = (0,5 \pm 0,2) n_0$ и достигали максимальной энергии 300 эв при $n \approx n_0$. Дальнейшее увеличение плотности плазмы приводило к уменьшению энергии электронов.

Задача одновременного исследования эффектов поглощения электромагнитной волны и нагрева электронов плазмы без магнитного поля была поставлена и решалась в работе Сергейчева и Трофимова [101], в которой однородный по сечению поток плазмы пересекал прямоугольный

волновод. Рис. 21 и 22 дают зависимости коэффициентов отражения $|R|^2$ и поглощения $|D|^2$ энергии волны в плазме от плотности числа частиц плазмы n для различных напряженностей электрического поля волны

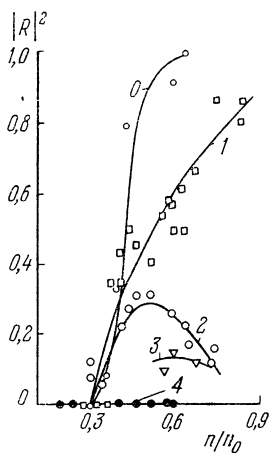


Рис. 21.

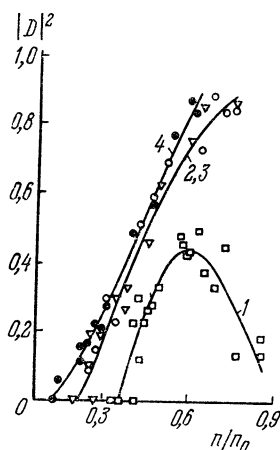


Рис. 22.

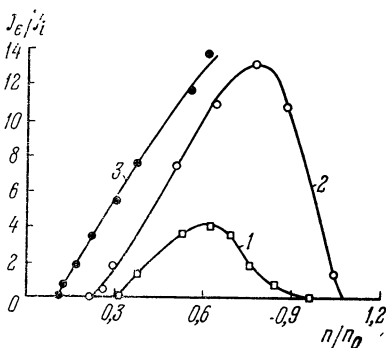


Рис. 23:

E_0 (0 — 3 в/см, 1 — 0,7 кВ/см, 2 — 3,1 кВ/см, 3 — 4,2 кВ/см и 4 — 7 кВ/см. Одновременно с поглощением энергии СВЧ-волны было обнаружено увеличение энергии электронов («нагрев»). На рис. 23 приведена зависимость от плотности тока ускоренных электронов плазмы в направлении силовых линий электрического поля, отнесенного к

ионному току. Кривые соответствуют следующим значениям напряженности поля волны накачки E_0 и потенциала торможения электронов:

$$1 - E_0 = 2,2 \text{ кВ/см}, U_{\text{п}} = -0,7 \text{ кВ};$$

2 — $E_0 = 3,1 \text{ кВ/см}, U_{\text{п}} = -0,7 \text{ кВ};$ 3 — $E_0 = 7 \text{ кВ/см}, U_{\text{п}} = -2 \text{ кВ}.$ Что же касается энергии электронов, то, например, при $E_0 = 7 \text{ кВ/см}$ и $n = 0,6n_0$ средние энергии ускоренных электронов достигали 4 кэВ , а максимальные

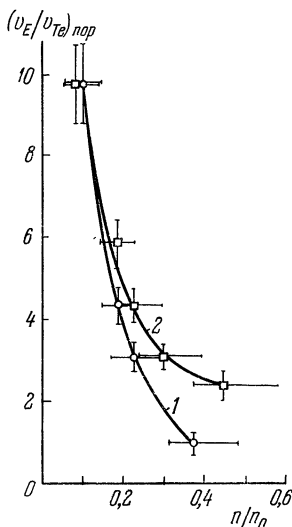


Рис. 24.

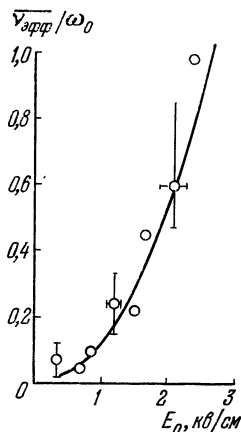


Рис. 25.

достигали 11 кэВ . На рис. 24 приведена зависимость пороговой напряженности поля от концентрации плазмы, построенная по началу аномального поглощения (кривая 1) и по началу тока ускоренных электронов (кривая 2). Расхождение связано с неточностью измерения порога тока ускоренных электронов. Обе кривые имеют качественно одинаковую зависимость, хотя величины порогов заметно превышают определенные в работе [94], правда, относящейся к другой геометрии поля и его взаимодействию с плазмой.

В работе [101] для $n = 0,6n_0$ по измеренным данным для коэффициента отражения вычислена эффективная частота столкновений, зависимость которой от напряжен-

ности поля приведена на рис. 25 и, как очевидно, отвечает нелинейной аномально сильной диссипации электромагнитного поля в плазме.

Продолжение исследований, начатых в работе [99], по экспериментальному изучению воздействия излучения большой мощности на плазму, находящуюся в сильном магнитном поле, позволило получить целую совокупность результатов, определяющих роль эффектов параметрического взаимодействия.

Экспериментальные результаты по аномальному поглощению электромагнитных волн в плазме, находящейся в

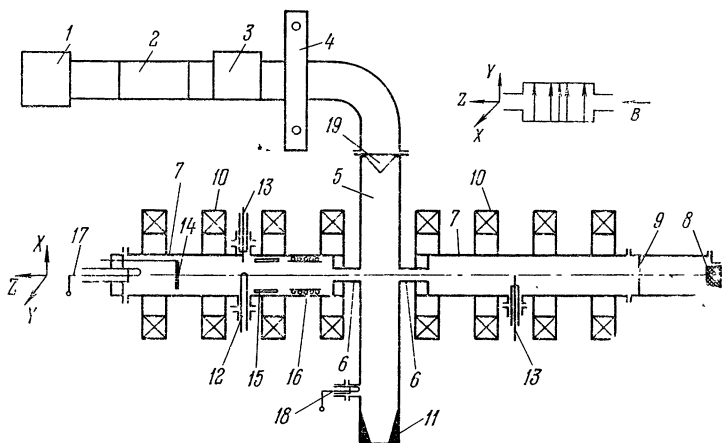


Рис. 26.

сильном магнитном поле, были получены в работе Батанова, Горбунова и Сарксяна [140]. Здесь цилиндрический поток плазмы ($\omega_{Le}^2/\omega_0^2 = 0,3 \div 0,4$, $\kappa T_e = 6 \text{ эВ}$), текущий вдоль постоянного магнитного поля, пропускался поперек прямоугольного волновода с TE_{01} -волной (рис. 26) (1 — магнетронный генератор, 2 — ферритовый вентиль, 3 — аттенюатор, 4 — направленный ответвитель, 5 — вакуумный волновод, 6 — запердельные патрубки, 7 — вакуумные камеры, 8 — искровой инжектор плазмы, 9 — диафрагма, 10 — соленоид, 11 — согласованная нагрузка, 12 — многоэлектродный зонд, 13 — ленгмюровский зонд, 14 — плазмоскоп, 15 — электростатический зонд, 16 — магнитный зонд, 17 — петлевая антенна вне

волновода, 18 — петлевая антенна в волноводе, 19 — диэлектрическое СВЧ-окно). Вектор напряженности электрического поля волны накачки перпендикулярен магнитному полю и условия линейного преобразования волн

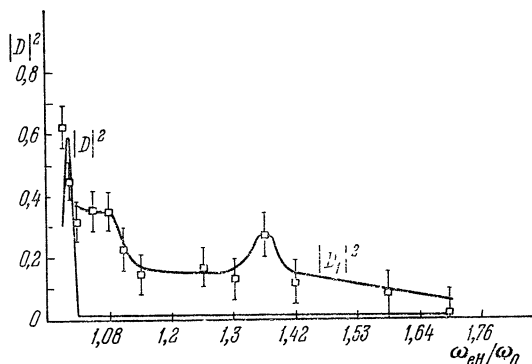


Рис. 27.

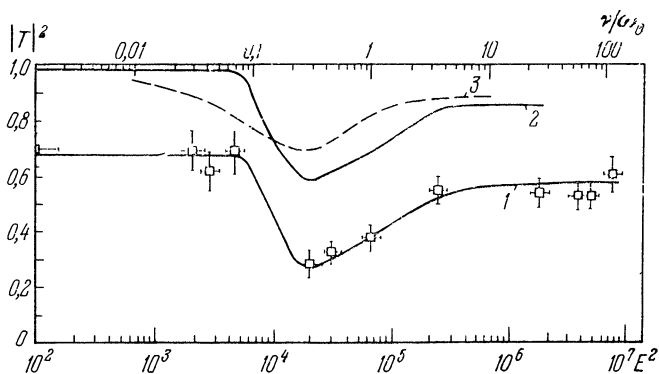


Рис. 28.

в плазме исключены [141, 142]. Были измерены коэффициенты пропускания $|T|^2$ и отражения $|R|^2$ волны накачки в зависимости от постоянного магнитного поля и от напряженности электрического поля TE_{01} -волны. По результатам таких измерений построен коэффициент поглощения. На рис. 27 приведены данные для коэффициента поглощения $|D|^2$ при $E_0 = 0,3$ в/см и $|D_1|^2$ при $E_0 = 250$ в/см, $\omega_{eH} \equiv \Omega_e$.

На рис. 28 приведена зависимость коэффициента пропускания при $\Omega_e = 1,08 \omega_0$ в зависимости от E_0^2 . Вплоть до порогового значения $E_{0, \text{пор}} = 65 \text{ в/см}$ коэффициент пропускания не зависит от напряженности поля волны, затем он уменьшается и, достигая минимума при $E_0 = 130 \text{ в/см}$, вновь возрастает. Кривая 2 на этом рисунке соответствует учету отражения от патрубков экспериментальной установки, а кривая 3 соответствует зависимости коэффициента пропускания от эффективной частоты столкновений, для которой построена на рис. 29 зависимость от напряженности поля волны накачки. В работе Андреева, Батанова и Сарксяна [145], на той же установке, что и в работе [140], было изучено возникновение быстрых частиц плазмы. На рис. 30 приведена зависимость от магнитного поля тока электронов с энергией 70 эв на зонд при $n_i/n_0 = 0,3$, $E_0 = 3 \text{ кв/см}$ (кривая 1) и с энергией 50 эв при $n_i/n_0 = 0,1$, $E_0 = 4,8 \text{ кв/см}$ (кривая 2). Как это следует из сравнения кривых 1 и 2 рис. 30, уменьшение плотности плазмы ведет к смещению пиков в область больших магнитных полей. Так, при $\Omega_e = 2\omega_0$ такое смещение отвечает условию $2\omega_0 = \sqrt{\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2}$, соответствующему резонансу второй гармоники волны накачки с верхней гибридной частотой ω_{re}^2 ($\theta = \pi/2$) (см. формулу (15.2)). Одновременно из кривых задержки (рис. 31), характеризующих энергетический спектр электронов, видно, что отстройка лишь на 10% от резонанса второй гармоники с верхней гибридной частотой приводит к уменьшению максимальной энергии частиц в два раза. В той же экспериментальной ситуации, что и в работах [140, 143], Батановым и Сарксяном [144] (см. также [159—161]), экспериментально исследовалось излучение плазмы, стимулированное мощной волной накачки. Измерения показали, что интенсивность излучения на частоте поля накачки в зависимости от магнитного поля имеет резонансный характер (рис. 32), сходный с резонансами аномальной передачи энергии электронам, характеризруемыми рис. 30. Также имеется пик при $\Omega_e = 1,08\omega_0$ и пики при $\Omega_e \approx 1,5\omega_0$ и $\Omega_e = 2\omega_0$. Изменение наблюдаемой зависимости при изменении мощности поля волны накачки, расщепление и изменение ширины отдельных пиков говорит о нелинейном механизме излучения. Спектр излучения вблизи частоты поля накачки (рис. 33) обнаруживает с ростом мощности накачки уширение, указывающее на возбуждение звуковых

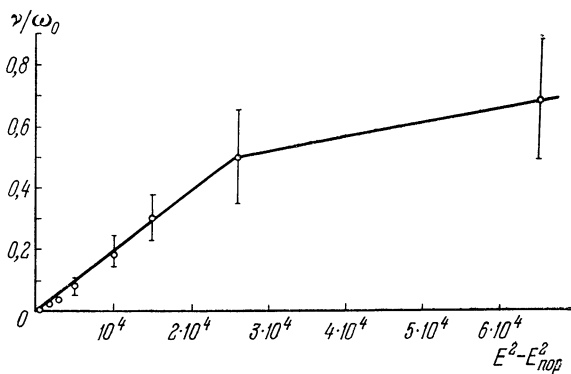


Рис. 29.

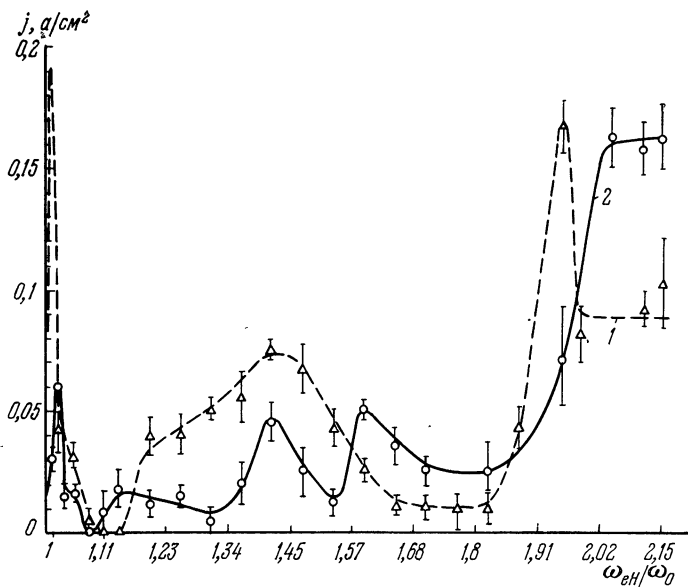


Рис. 30.

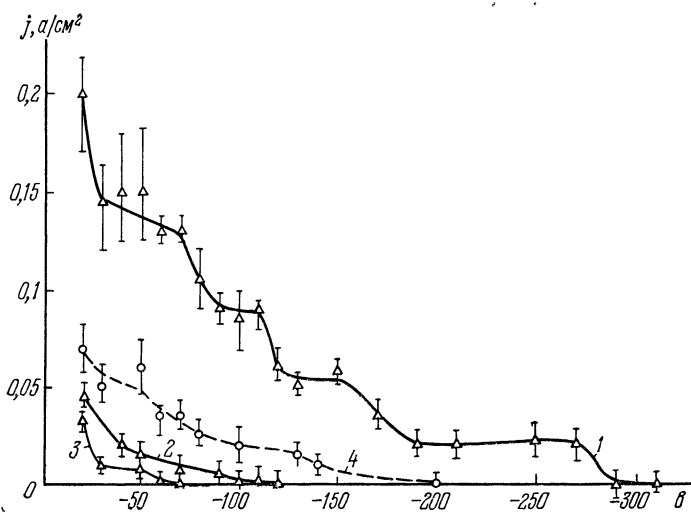


Рис. 31.

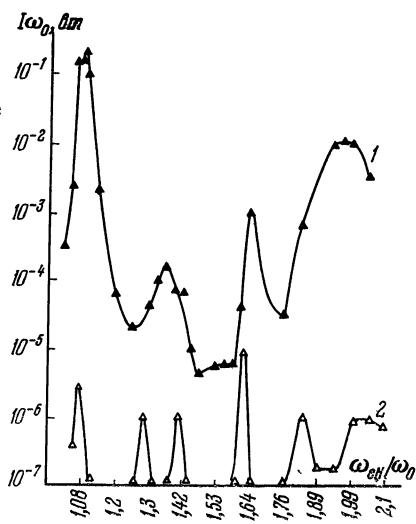


Рис. 32.

колебаний, и появление спутников, сдвинутых на величину, близкую к ионной ленгмюровской частоте. Интенсивность спутников комбинационного рассеяния характеризуется рис. 33. Авторы работы [144] наблюдали также

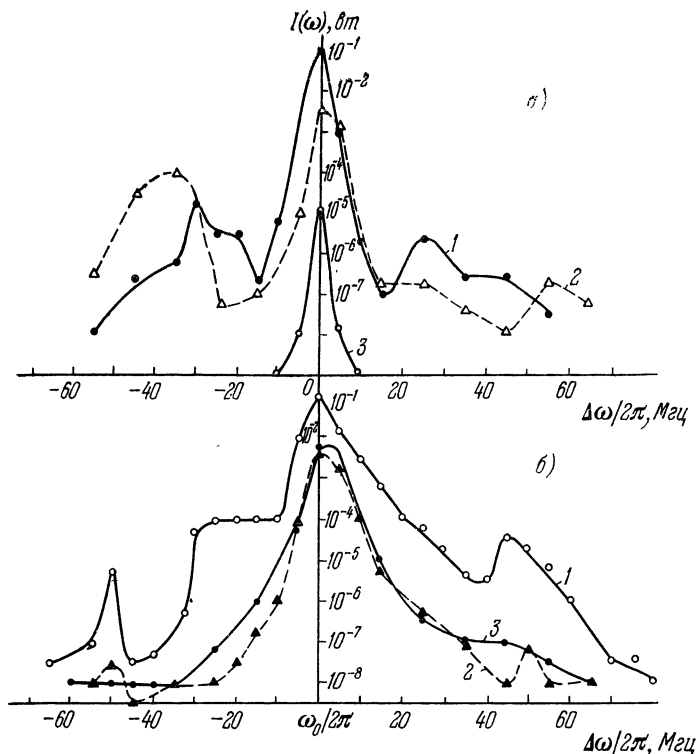


Рис. 33.

излучение и на второй гармонике поля накачки (рис. 34) с существенно меньшей интенсивностью. Различные результаты наблюдений второй гармоники внутри волновода и вне его авторы связали с угловой зависимостью плазменных колебаний. В зависимости от мощности накачки интенсивность излучения на второй гармонике растет экспоненциально.

Результаты работ [140, 143 и 144] позволили сделать предположение о проявлении параметрических эффектов неустойчивости плазмы под влиянием мощного излучения

накачки. При этом было высказано предложение о том, что аномалии при $\Omega_e = 1,08\omega_0$ связаны с параметрической неустойчивостью относительно высокочастотной непотенциальной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля, и низкочастотной потенциальной (см. конец § 22). В интервале магнитных полей $\sqrt{(2\omega_0)^2 - \omega_{Le}^2} \leq \Omega_e \leq 2\omega_0$ резонансные явления обусловлены параметрическим взаимодействием при резонансе второй гармоники с высокочастотными продольными волнами замагниченной плазмы. Пики в окрестности $\Omega_e = 1,5\omega_0$ связываются с резонансом третьей гармоники частоты поля накачки со второй циклотронной гармоникой продольных колебаний, $3\omega_0 \approx \approx 2\Omega_e$ (см. § 20).

Прямой проверке теории параметрической неустойчивости в замагниченной плазме была посвящена работа того же цикла [145], выполненная Андреевым, Батановым и Сарксяном, в которой была поставлена задача установ-

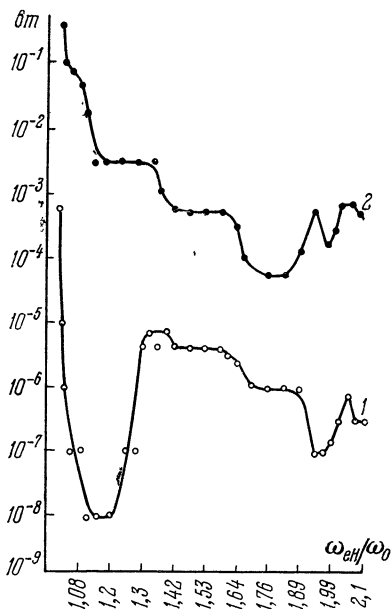


Рис. 34.

ления зависимости спектра стимулированного излучения магнитоактивной плазмы от концентрации заряженных частиц, а также определение порогов возбуждения колебаний. На основании таких данных в работе [145] было проведено сравнение экспериментальных результатов с предсказаниями теории. На рис. 35 приведены результаты, полученные для спектра излучения вблизи частоты накачки ω_0 : $E_0 = 2,5$ кВ/см ($v_E/v_{Te} = 2,5$) (а) частотный масштаб — 1 МГц на метку, б) спектр излучения СВЧ-генератора, в) спектр излучения плазмы $\Omega_e/\omega_0 = 1,08$; $\omega_{Le}^2/\omega_0^2 = 0,65$). По сравнению с сигналом накачки имеет место уширение спектра излучения. Так, при $\Omega_e = 2\omega_0$ уширение достигает $\Delta\omega \approx 12 \div 14$ МГц, а при $\Omega_e = 1,08\omega_0$

и $\omega_{Le}^2 = 0,35\omega_0^2$ имеется пик излучения, смещенный примерно на 4 МГц в сторону меньших частот (кривая ε). Увеличение плотности плазмы при $\Omega_e = 1,08\omega_0$ увеличивает

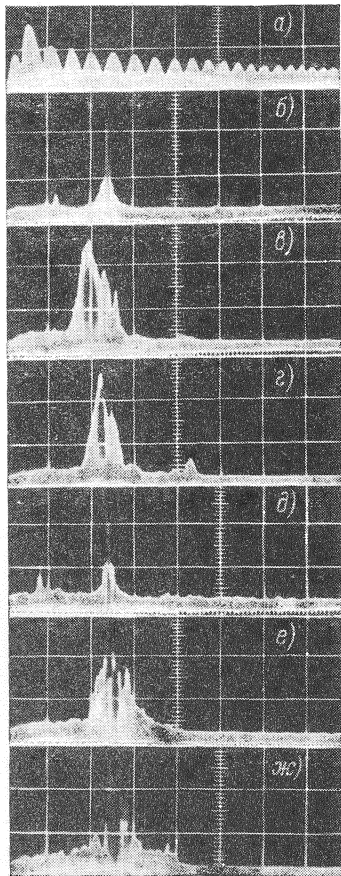


Рис. 35.

смещение пика излучения, а также увеличивает уширение спектра на смещенной частоте. Уменьшение плотности плазмы в этих условиях делает спектр излучения уже (кривая δ , $\omega_{Le}^2/\omega_0^2 = 0,20$), а на смещенной частоте излучение исчезает. В отличие от этого при $\Omega_e = 2\omega_0$ спектр излучения вблизи ω_0 от плотности плазмы не зависит (кривые ε и ζ , $\omega_{Le}^2/\omega_0^2 = 0,65$ и $0,20$ соответственно).

Сопоставление результатов измерений при $\Omega_e = 1,08\omega_0$ с предсказаниями теории параметрического воздействия излучения на плазму проводилось в работах [145] и [131]. Здесь следует заметить, что уширение линии излучения вблизи ω_0 соответствует формуле (22.23) для инкремента и частоты параметрической неустойчивости, связанной с развитием распространяющихся вдоль магнитного поля высокочастотной непотенциальной и низкочастотной потенциальной волн. Излучение на частоте, смещенной относительно частоты накачки на $\Delta\omega_0$, авторы работы [145] свя-

зали с непотенциальной волной. Далее согласно работе [140] порог неустойчивости (для $\omega_{Le}^2 \approx 0,4\omega_0^2$) равнялся 60 в/см ($v_E/v_{Te} \approx 0,06$). При таком значении напряженности поля накачки согласно формуле (22.23) $1/\gamma_{\max}$ примерно на порядок меньше времени эксперимента [140],

что указывает на возможность возникновения такой неустойчивости. В то же время возникновение комбинационного спутника, связанного с ионно-звуковой волной (см. рис. 35), обнаруженной в работе [144] в соответствии с работой [131], может быть связано с кинетической параметрической неустойчивостью (см. конец § 19). Однако теоретический порог такой неустойчивости примерно вдвое превышает порог появления спутника [131].

Обсуждение максимумов излучения на частоте $2\omega_0$ было проведено в работе [145]. В работе [144] наблюдались два максимума: один при $\Omega_e = 1,9\omega_0$, а другой при $\Omega_e = 2\omega_0$, что было связано с параметрическим резонансом второй гармоники частоты поля накачки с электронными потенциальными колебаниями плазмы. Для длинноволновых возмущений ($k r_e \ll 1$) это означает выполнение равенства (см. (15.2)):

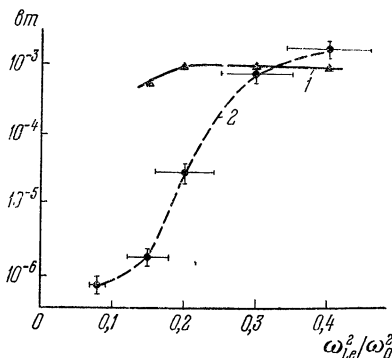


Рис. 36.

$$8\omega_0^2 = \Omega_e^2 + \omega_{Le}^2 + \sqrt{(\Omega_e^2 + \omega_{Le}^2)^2 - 4\Omega_e^2\omega_{Le}^2 \cos^2 \theta}.$$

Пик излучения при $\Omega_e = 1,9\omega_0$ согласно [145] связывается с возбуждениями, распространяющимися перпендикулярно магнитному полю, когда $2\omega_0 \approx \sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}$ (при $\omega_{Le}^2 = 0,35\omega_0^2$ этот резонанс возникает при $\Omega_e = 1,9\omega_0$).

Второй пик излучения при $\Omega_e = 2\omega_0$ согласно работе [145] может соответствовать либо волнам, распространяющимся почти параллельно магнитному полю, для случая длин волн, много больших радиуса гироскопического вращения электронов, либо для коротких волн ($k r_e \gg 1$), распространяющихся перпендикулярно магнитному полю (см. § 20). Эти предположения нашли свое подтверждение в изученной в работе [145] зависимости интенсивности излучения от плотности плазмы (рис. 36). На рис. 36 по оси ординат отложена интенсивность излучения на удвоенной частоте в логарифмическом масштабе ($\delta b/\text{мквт}$),

а по оси абсцисс ω_{Lc}^2/ω_0^2 . Кривая 1 соответствует $\Omega_e = 2\omega_0$, а кривая 2 — $\Omega_e = 1,9\omega_0$. Расстройка резонанса с верхней гибридной частотой

$$\Delta = \frac{\sqrt{\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2}}{2\omega_0} - 1$$

растет с уменьшением частоты. Согласно § 15 рост расстройки резко уменьшает инкремент неустойчивости, что отражается в спаде интенсивности излучения на рис. 36. Напротив, на резонансе $2\omega_0 = \Omega_e$ практически не проявляется зависимость от плотности плазмы, что отвечает предположениям работы [145]. Эти выводы привели авторов работы [145] к заключению об определяющей роли параметрических неустойчивостей в экспериментально наблюдаемых явлениях цикла работ [140, 143—145, 159—161].

Отметим здесь также обнаруженное в работе Батанова и В. А. Силина [149] явление проникновения мощной электромагнитной волны через слой плотной плазмы, когда значение ω_{Le}^2/ω_0^2 достигало пяти. Такое явление имело порог, совпадающий в условиях эксперимента [149] с порогом апериодической параметрической неустойчивости относительно развития потенциальных возмущений (§ 8). Авторы работы [149] связали явление проникновения мощной волны с возникновением сильного поглощения поля накачки при развитии параметрической неустойчивости плазмы.

В целом совокупность экспериментальных работ, поставленных в ФИАНе, показала, что электромагнитное излучение большой мощности воздействует на плазму аномально сильно, приводя к повышенному уходу плазмы, аномально сильному поглощению энергии электромагнитной волны, к возникновению электронов весьма высокой энергии. При этом наблюдаемые явления соответствуют представлениям и предсказаниям теории параметрического воздействия излучения на плазму.

Явление аномального возрастания высокочастотной проводимости плазмы в иной постановке эксперимента наблюдалось Драйсером, Ингрехамом и Хендерсоном [102] (см. также [150—152]). Эти авторы использовали одностороннюю Q-машину, в которой столб термически ионизированной калиевой плазмы удерживается магнитным полем B (рис. 37). Для измерения проводимости плазмы использовался резонатор TM_{101} на частоте $2 \cdot 10^9$ гц.

Для плотности частиц плазмы, значительно меньшей n_0 , измеряемая добротность Q резонатора с плазмой согласуется с теорией поглощения поля благодаря электронным кулоновским соударениям. Вблизи $\omega_{Le}^2 = \omega_0^2$

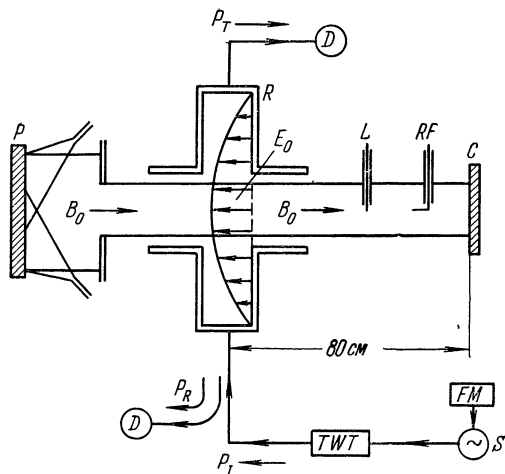


Рис. 37.

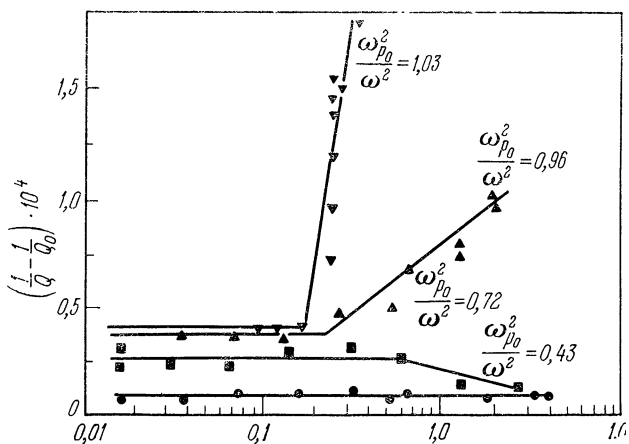


Рис. 38.

такое согласие имеет место лишь для достаточно слабого поля. Если же v_E достигает значения $\sim 0,15v_{Te}$, а затем увеличивается еще больше, то с ростом поля накачки возрастает высокочастотное сопротивление плазмы, что

подобно результатам, полученным в ФИАНе (рис. 38). На рис. 39 приведены значения напряженности электрического поля накачки (точнее, v_E/v_{Te}) в зависимости от изменения

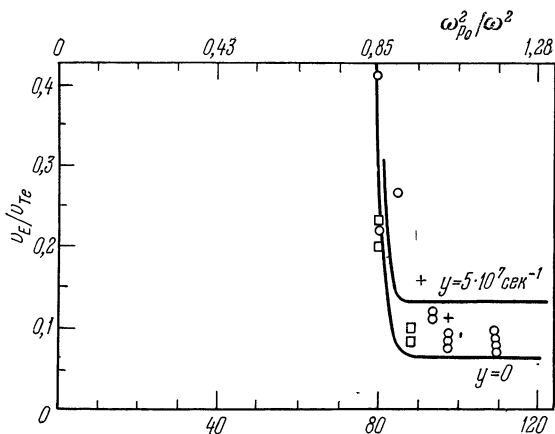


Рис. 39.

$\Delta(1/Q)$ — обратной величины добротности резонатора при наличии плазмы. Эти данные показывают пороговую зависимость изменения добротности. Кривая $\gamma = 0$ на рисунке отвечает порогу аperiodической неустойчивости, а вторая кривая соответствует инкременту γ , равному $5 \cdot 10^7 \text{ c/s}$. Одновременно с измерением высокочастотной проводимости проводилось изучение быстрых электронов. На рис. 40 приведена зависимость тока электронов на холодный коллектор C (рис. 37) в зависимости от мощности накачки P_T . При этом кривые отвечают максимуму I_{ce0} импульса электронного тока I_{ce} , сопутствующего включению накачки.

На рис. 41 приведена зависимость пика тока электронов на холодный коллектор (полулогарифмический масштаб, 1 — $v_E/v_{Te} = 0,274$; 2 — $v_E/v_{Te} = 0,246$ при $\omega_0/2\pi = 2098 \text{ МГц}$, а 3 — $v_E/v_{Te} = 0,18$ при 2079 МГц) в зависимости от тормозящего потенциала. Эффективная температура электронов 6 эВ примерно в двадцать раз превышает температуру горячей пластины P .

Таким образом, и в работах [102, 150—152] в условиях параметрического резонанса плазма сильно поглощает энергию поля накачки, а такое поглощение поля ведет к появлению частиц повышенной энергии.

Аномальная повышенная диссипация электромагнитного поля с частотой, близкой к ленгмюровской частоте электронов, наблюдалась Юбанком [153] в плазме,

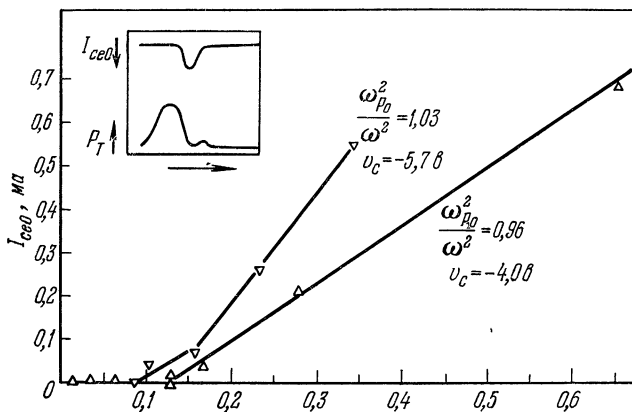


Рис. 40.

находящейся в магнитном поле $2000 \div 4000$ гс. При этом было обнаружено уменьшение коэффициента отражения высокочастотной волны

($\omega_0/2\pi = 10,5 \cdot 10^9$ гц) от плазмы при увеличении ее мощности. Также обнаружено возникновение плазменных осцилляций и увеличение температуры перпендикулярного магнитному полю распределения частиц плазмы. Для последних явлений, как видно из рис. 42, имеет место порог ~ 300 вт ($E_0 \approx 500$ в/см), а при сильных полях накачки возникает насыщение. При насыщении поперечная температура приближается к значению 2 эв.

Продольная температура электронов (вдоль магнитного поля) при насыщении достигает значения $10 \div 15$ эв. Такое соотношение температур

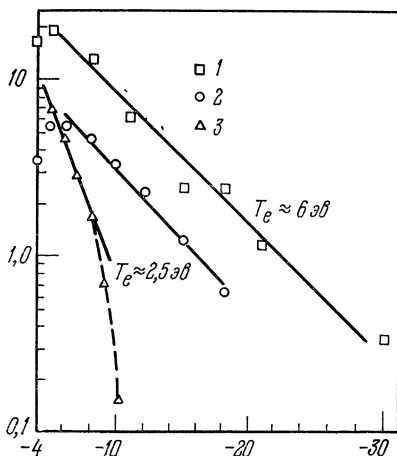


Рис. 41.

позволило сделать в работе [153] вывод о преобладающей роли черенковского взаимодействия электронов с плазменными волнами. Это означает, что электроны поглощают энергию плазменных флуктуаций благодаря бесстолкновительному затуханию Ландау, а роль кулоновских соударений заряженных частиц мала.

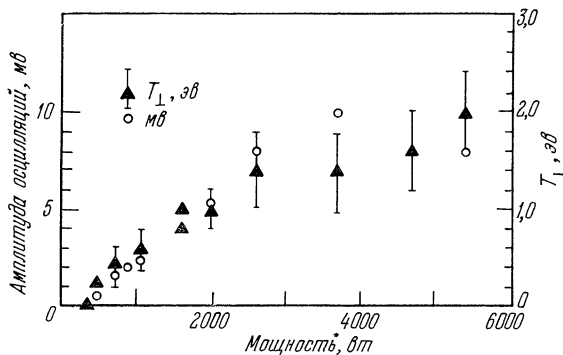


Рис. 42.

Параметрический резонанс в плазме, находящейся в сильном магнитном поле, наблюдался Демирхановым, Хорасановым и Сидоровой [103]. Эти авторы исследовали поведение термически-ионизированной цезиевой плазмы с температурой $\kappa T_e \sim \kappa T_i \sim 0,2$ эВ и с плотностью $n \sim 10^8 \div 10^9$ см⁻³. Степень ионизации составляла 20—30%, а продольное магнитное поле односторонней Q-машины было $(2-5) \cdot 10^3$ эрстед. Радиус плазменного шнура $a = 2$ см, а длина шнура $L = 25$ см. Высокочастотное напряжение прикладывалось к электродам, ограничивающим с торцов плазму. Частота переменного электрического поля менялась в пределах 10^5 гц $< (\omega_0/2\pi) < 3 \cdot 10^7$ гц; $1,5 \cdot 10^8$ гц $< (\omega_0/2\pi) < 10^9$ гц и $(\omega_0/2\pi) \approx 3 \cdot 10^9$ гц. В результате воздействия высокочастотного электрического поля плазма нагревалась. Помимо этого в плазме возбуждались интенсивные низкочастотные колебания плотности с основной гармоникой в диапазоне 1—5 кгц. На рис. 43 приведена зависимость температуры электронов (кривая 1) и амплитуды низкочастотных колебаний плазмы (кривая 2) от частоты электрического поля. Сплошные кривые представляют усредненные экспериментальные данные, штриховые — экстраполяцию; а точки соответствуют данным для $3 \cdot 10^9$ гц.

Авторы работы [103] пришли к выводу, что объяснение приведенных на рис. 43 результатов может быть понято в рамках представлений о параметрическом резонансе замагниченной плазмы. Для собственных частот

$$\omega_{re}^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2} [\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2 \pm \sqrt{(\omega_{Le}^2 + \Omega_e^2)^2 - 4\omega_{Le}^2 \Omega_e^2 \cos\theta}]}$$

в условиях эксперимента работы [103], когда $\Omega_e^2 \gg \omega_{Le}^2$, имеем $\omega_{re}^+ \approx |\Omega_e|$, $\omega_{re}^- = \omega_{Le} \cos \theta$. В предположении,

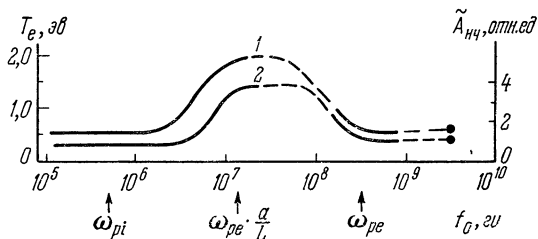


Рис. 43.

что основная мода собственных колебаний определяется геометрией системы, получаем

$$k_z \approx \frac{2\pi}{2L}, \quad k_{\perp} \approx \frac{1}{a}, \quad k_{\perp} \gg k_z.$$

Поэтому

$$\omega_{re}^- = \omega_{Le} \frac{k_z}{k} \approx \frac{\pi a}{L} \omega_{Le}.$$

Именно такого порядка оказывается диапазон частот (5—30 МГц), в котором авторы работы [103] наиболее четко обнаруживают развитие неустойчивости плазмы. Ширина области резонанса может быть связана с развитием волн с различным значением $\cos \theta$. Спад кривых рис. 43 к области частот порядка электронной ленгмюровской соответствует области параметрической неустойчивости, рассмотренной в § 15.

Исследование параметрической неустойчивости плазмы без магнитного поля в околопороговой области с детальным изучением возбуждаемых колебаний провели Стенцель и Уонг [154]. В их эксперименте использовалась аргоновая плазма (длина разряда 50 см, диаметр 40 см). Типичные параметры плазмы при этом были: $kT_e \approx 2$ эв, $kT_i \approx 0,2$ эв, $n_e \approx 10^9$ см⁻³. В отсутствие поля накачки

флуктуации ионной плотности составляли менее десятой процента ($\delta n_i / n_i < 0,1\%$). Также отсутствовали электронные и ионные направленные потоки. Поле накачки прикладывалось с частотой $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 4 \cdot 10^8$ *гц*, что несколько превышает ленгмюровскую электронную частоту; оно возбуждалось двумя сетками диаметром 5 *см* с зазором 3 *см*, расположенными в центре плазмы. В эксперименте наблюдались спектры высокочастотных (с частотой $\sim \omega_{Le}$) и низкочастотных ($0 < \omega < \omega_{Li}$) плазменных колебаний. Ионные низкочастотные волны детектировались передвижными зондами Ленгмюра, а высокочастотные электронные волны детектировались радиочастотными зондами. При этом в условиях малой интенсивности накачки в высокочастотном спектре обнаруживается лишь одна линия ω_0 , а низкочастотный спектр представляет собой шум малой интенсивности в интервале частот вплоть до ионной ленгмюровской. С увеличением интенсивности поля накачки при превышении некоторого порога возникает вторая высокочастотная линия ω_2 с частотой, меньшей поля накачки, и одновременно с этим низкочастотное колебание ω_1 . Сумма частот этих колебаний совпадает с частотой поля накачки ($\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$). С дальнейшим увеличением интенсивности накачки появляются новые высокочастотные линии $\omega_0 - 2\omega_1$, $\omega_0 + \omega_1$. При достаточно большой накачке высокочастотный и низкочастотный спектры расширяются и становятся непрерывными. Выполнение вблизи порога комбинационного условия частот позволяет думать, что в используемой неизотермической плазме при параметрической неустойчивости возникает высокочастотная электронная плазменная волна и низкочастотная ионно-звуковая волна. Измерение волнового вектора низкочастотной волны показало, что ее частота связана с волновым вектором скоростью ионного звука, значение которой совпадает с получаемым по измерениям температуры электронов, т. е. $\omega_1 = \omega_s$. На пороге развития неустойчивости волновое число ионно-звуковой волны равнялось $k_1 = 6,3$ *см*⁻¹. В то время как согласно теоретическим оценкам авторов работы [154] $k_{\text{пор}De} \approx 0,2$, что дает $k_{\text{пор}} = 5,3$ *см*⁻¹. Измеренные значения затухания ионно-звуковой волны и высокочастотной продольной электронной волны дали соответственно значения

$$\frac{\gamma_s}{\omega_s} \approx 10^{-2}, \quad \frac{\tilde{\gamma}}{\omega_{Le}} \approx 1,75 \cdot 10^{-3}.$$

Эти значения с помощью формулы порога (10.35)

$$\frac{E_{\text{пор}}^2}{16\pi n_e \kappa T_e} = 4 \frac{\gamma_s}{\omega_s} \frac{\tilde{\gamma}}{\omega_{Le}}$$

позволяют определить теоретические значения пороговой напряженности поля. Именно правая часть этой формулы оказывается $\sim 10^{-4}$. С другой стороны, прямое экспериментальное определение пороговой напряженности дает $E_0 \approx 2,5$ в/см, что для экспериментального значения левой части формулы порога дает $2,2 \cdot 10^{-4}$. Поскольку в условиях эксперимента [154] $\tilde{\gamma} \sim \omega_s$, то формула (10.35) может использоваться лишь для оценок с точностью до 100%. Согласие, очевидно, хорошее.

Далее, в работе [154] было рассмотрено влияние на порог ионного затухания. Для этого в аргоновый разряд добавлялись примеси легких ионов гелия (до 13%). Соответственно этому γ_s/ω_s возрастало от 10^{-2} до $3,3 \cdot 10^{-2}$ и одновременно по линейному закону возрастала пороговая интенсивность поля накачки. Наклон прямой такого роста дает $\tilde{\gamma}/\omega_{Le} = 1,05 \cdot 10^{-3}$, что близко к полученным прямым измерениям.

Вблизи порога инкремент нарастания неустойчивости изменяется с ростом интенсивности поля накачки по закону (см. формулу (10.36))

$$\frac{\gamma}{\omega_s} = \frac{\omega_{Le}}{\tilde{\gamma}} \frac{E_0^2}{64\pi n_e \kappa T_e} - \frac{\gamma_s}{\omega_s}.$$

Эта зависимость была обнаружена и на опыте при увеличении E_0^2 . При этом из экспериментальных данных следует $\tilde{\gamma}/\omega_{Le} \approx 4 \cdot 10^{-3}$, что несколько больше результата прямого измерения.

Все эти результаты работы [154] дают картину возникновения возбуждений при развитии параметрической неустойчивости, подобную предсказываемой теорией.

Исследование экспериментальных закономерностей параметрического возбуждения ионно-звуковых волн и волн на гармониках циклотронной частоты гироскопического вращения электронов, провели Ченг, Порколаб и Грек [155]. Эксперименты были проведены в гелиевой плазме разряда с горячим катодом. Неоднородность магнитного поля в области измерений доходила до 1%. Типичные параметры плазмы: $\kappa T_e = 5 \div 7$ эв, $B \approx 50 \div 100$ гс,

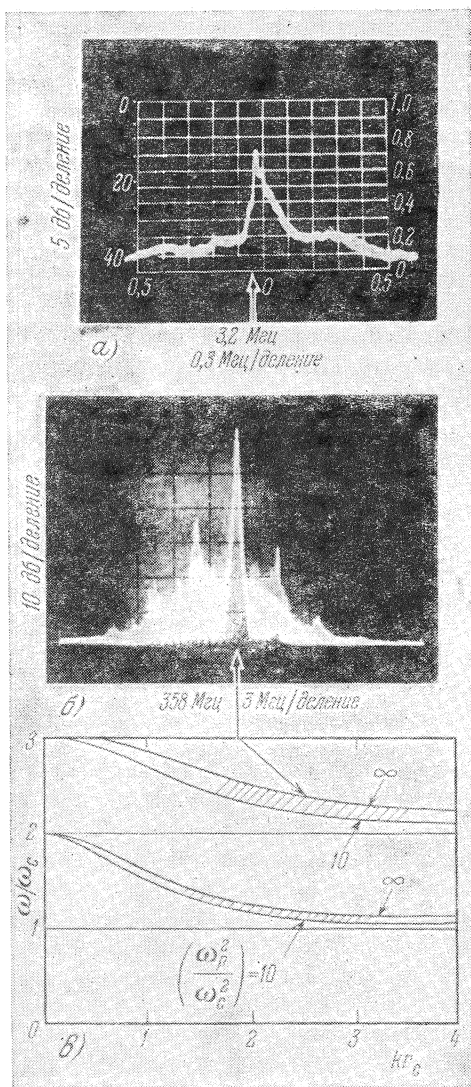


Рис. 44.

$n_e \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Частота столкновений электронов равнялась примерно $5 \cdot 10^6 \text{ сек}^{-1}$. Диаметр плазменного столба составляет 12 см , при этом на расстоянии от оси по радиусу 3 см плазма однородна (подробнее описание эксперимента дано в статье [156]). Высокочастотное поле с частотой $\omega_0 > \Omega_e$ накачивается в плазму так, что вектор напряженности электрического поля накачки E_0 практически перпендикулярен постоянному магнитному полю. Авторы работы [155] наблюдали частотный спектр, изображенный на рис. 44, возникавшей в результате воздействия волны накачки на плазму. На рис. 44, а показан ионно-звуковой спектр с пиком около $3,2 \text{ Мгц}$, на рис. 44, б приведен высокочастотный спектр с спутниками при $f_0 \pm 3,2 \text{ Мгц}$. С увеличением мощности поля накачки возникали дополнительные спутники и спектр размывался, причем при наибольших использованных мощностях оба — и низкочастотный, и высокочастотный — спектра становятся широкими, так что наблюдаются компоненты вплоть до ленгмюровской частоты ионов. Наблюдаемый частотный спектр указывает на выполнение комбинационных условий для частот $\omega_U = \omega_0 + \omega_s$, $\omega_L = \omega_0 - \omega_s$, где ω_0 — частота накачки, а ω_s — ионно-звуковая частота.

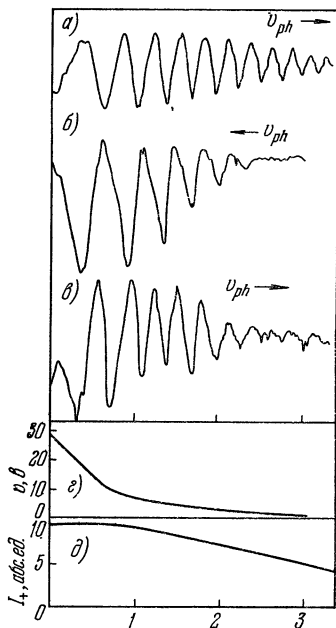


Рис. 45.

Обе частоты спутников ω_U и ω_L авторы работы [155] идентифицируют как волны циклотронных гармоник. Соответственно на рис. 44, в приведено дисперсионное соотношение для волн циклотронных гармоник с $k_{\parallel} \ll k_{\perp}$. Заштрихованная область отвечает области параметрической неустойчивости. Наблюдаемые выше порога неустойчивости интерференционные картины (рис. 45) по измерениям фазового сдвига позволяют определить направление распространения волны, которое на рис. 45 указано

стрелкой. При этом волна нижнего сателлита распространяется в направлении к зонду, возбуждающему поле накачки, а ионно-звуковые волны и волна верхнего сателлита распространяются в противоположном направлении. На рис. 45, *г* показано поле накачки, а на рис. 45, *д* радиальное распределение ионного тока. Неоднородность поля накачки позволяет оценить величину волнового вектора волны накачки $k_0 \approx 1,5 \text{ см}^{-1}$, что составляет около 10% величины волнового вектора ионно-звуковых волн. Из данных рис. 45, *а* — *в* в области взаимодействия

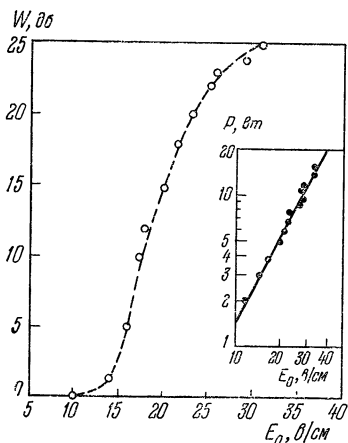


Рис. 46.

волн (на расстоянии 2 см по радиусу) $k_U = 1,1k_s$ и $k_L = 0,9k_s$, что в соответствии с направлениями распространения волн дает $k_U = k_0 + k_s$, $k_L = k_0 - k_s$. Из данных по распространению волн авторы работы [155] сделали вывод, что вне области $\sim 2 \text{ см}$, когда поле накачки становится меньше порогового, волны циклотронных гармоник сильно затухают, а ионно-звуковые волны распространяются сравнительно далеко благодаря их слабому затуханию *).

С помощью техники радиочастотных зондов в работе [155] определялись пороги неустойчивости.

На рис. 46 дана зависимость энергии ионно-звуковых волн W_s (в децибеллах) от поля накачки E_0 . Здесь же приведена зависимость вкладываемой мощности P (в ваттах). Согласно рис. 46 пороговая напряженность электрического поля накачки оказалась приблизительно равной 10 в/см. Это соответствует $a_B = eE_0k_{\perp}/[m(\omega_0^2 - \Omega_0^2)] \approx \approx 0,08$. Расчетное значение, полученное Порколабом для

*) В связи с такими экспериментальными результатами следует указать на теоретическую работу Горбунова [157], посвященную теории параметрических неустойчивостей в условиях, когда поле накачки действует лишь в пространственно ограниченной области, из которой возбуждаемые волны могут уходить, унося с собой энергию.

этого случая, $a_B = 0,05 \div 0,1$. Для соответствующего расчета авторы работы [155] определили значение компоненты волнового вектора вдоль магнитного поля и показали, что доминирующим является черенковская диссипация волн. Найденные в работе [155] экспериментальные закономерности параметрического взаимодействия волн дают непосредственную возможность понять не только их соответствие с теорией, но и делают возможным лучше увидеть перспективы применения параметрического воздействия излучения на плазму, среди которых авторы работы [155] указывают нагрев плазмы излучением вблизи гармоник частоты гироскопического вращения электронов.

Эксперименты, подобные изложенным в работах [154, 155], в той их части, которая соответствует установлению факта выполнения комбинационных соотношений равенства сумм частот и волновых векторов двух возникающих волн соответственно частоте и волновому вектору третьей волны, проводились также и в иных условиях. Здесь для замагниченной плазмы следует отметить работы [156, 163], посвященные исследованию высокочастотных волн. Например, в работе Стерна [163] наблюдалось нелинейное возбуждение внешней волной накачки продольных плазменных волн с частотами, близкими к гармоникам циклотронной частоты гироскопического вращения электронов. При этом линейный механизм взаимодействия с внешним полем обеспечивал возбуждение волны с частотой, близкой к $4\Omega_e$.

Возбужденная таким образом продольная волна благодаря нелинейной параметрической связи затем распадалась на две продольные волны. Частота одной из таких волн несколько превышала $2\Omega_e$, а частота второй волны была несколько меньше. Интенсивность излучения плазмы на частоте одной из волн продуктов распада оказывается нелинейным образом зависящей от мощности поля волны накачки. Здесь следует отметить определенную аналогию описанной в работе [163] картины с той, которая использовалась в работе [158] для интерпретации данных работы [90].

Распад низкочастотных дрейфовых волн наблюдался в работах [164, 165], где внешним источником возбуждалась дрейфовая плазменная волна, которая затем распадалась на две также дрейфовые волны более низкой частоты.

Наконец, распад продольной плазменной волны с частотой, близкой к электронной ленгмюровской, на волну той же ветви колебаний и ионно-звуковую волну, теоретически предсказанный Ораевским и Сагдеевым [25], наблюдался в работах [166, 167]. Все эти исследования распадных (или комбинационных) закономерностей связаны с использованием плазменных волн, внешним линейным образом возбуждаемых полем накачки. В то же время знание таких закономерностей безусловно может способствовать построению теории нелинейного параметрического воздействия излучения большой мощности на плазму.

Здесь следует отметить специальный интерес подобных экспериментов для теории комбинационного взаимодействия трех волн, которая строилась в работах [157, 168].

В связи с этим упомянем работу [169], в которой экспериментально изучалось трехволновое взаимодействие в цилиндрическом волноводе. При этом одна из волн являлась мощной TM -волной накачки. Вторая волна, называемая сигналом и также возбуждаемая внешними источниками, имела малую амплитуду. Как результат взаимодействия таких двух волн регистрировалась третья, возникающая в плазме волна.

Таким образом, были изучены следующие три процесса взаимодействия волн. Это, во-первых, взаимодействие двух TM -волн (накачка TM_{016} $f = 3,28$ ГГц и сигнал TM_{014} $f = 2,66$ ГГц), приводящее к возникновению высокочастотной электронной плазменной волны с частотой $f = 0,63$ ГГц.

Во-вторых, взаимодействие TM_{012} -волны накачки с частотой $f = 2,23$ ГГц и сигнала электронной плазменной волны ($f = 1,14$ ГГц), дающее электронную плазменную волну с частотой $f = 1,09$ ГГц. Наконец, в-третьих, две TM_{014} -волны с частотой $2,59$ ГГц и с шириной линии, более широкой, чем спектр ионно-звуковых волн плазмы, двигаясь в противоположных направлениях, дают ионно-звуковую волну с частотой 40 кГц. Результаты работы [169] не только демонстрируют выполнение законов комбинационного взаимодействия трех волн в плазме, но и показывают, на каком пути возможно детальное экспериментальное изучение того турбулентного состояния, которое возникает в экспериментальных устройствах, использующих технику волноводов.

§ 36. Ионосферные эксперименты по исследованию явлений параметрического воздействия на плазму мощного электромагнитного излучения

Изложим теперь те результаты экспериментов по параметрическому воздействию мощного излучения, которые связаны с выходом из лабораторных условий и с исследованием такого воздействия на ионосферу.

Использование мощных потоков радиоизлучения в экспериментах по нагреву ионосферы [170] по оценкам работы [171] обеспечивает возможность создания такой напряженности электрического поля радиоволн, которая для ионосферной плазмы существенно превышает порог параметрической неустойчивости. Проверке такой возможности посвящена работа Уонга и Тейлора [172]. В этом эксперименте на ионосферу посылалось мощное радиоизлучение с частотой $5,62 \text{ Мгц}$ ($\lambda = 60 \text{ м}$), что соответствует электронной ленгмюровской частоте ионосферной плазмы примерно на высоте 200 км . Возбуждаемые при таком облучении плазменные колебания детектировались с помощью стоксова и антистоксова сателлитов в спектре рассеянного излучения, возникающего при последующем облучении плазмы сигналом существенно большей частоты (430 Мгц , $\lambda = 70 \text{ см}$). Антистоксов сателлит при $435,62 \text{ Мгц}$ имеет примерно в три раза большую амплитуду, чем стоксов (при $424,38 \text{ Мгц}$). Авторы работы [172] связывают последнее с наличием потоков фотоэлектронов в ионосферной плазме, вносящих дополнительное влияние на возбуждение плазменных колебаний. В частности, может быть значительно большим и анизотропным тот уровень шумов в плазме, от которого начинают параметрически нарастать плазменные возбуждения. Если отвлечься от такого влияния, то в ионосферной плазме с примерно равными температурами электронов и ионов аperiodическая и периодически неустойчивости имеют близкие пороги, так что для порогового потока энергии волны накачки можно написать

$$P_{\text{пор}} = c \frac{E_{\text{пор}}^2}{8\pi} = c 8n_e \kappa T_e \frac{\tilde{\gamma}_{1s}}{\omega_s \omega_s}.$$

На рис. 47 приведена по трем экспериментам с несколькими различным состоянием ионосферы зависимость интенсивности сателлита при $(430 + 5,62) \text{ Мгц}$ в зависимости

от интенсивности волны накачки. По оси ординат отложена мощность излучения на частоте спутника, отнесенная к интервалу частоты в градусах Кельвина, а по оси абсцисс — поток энергии волны накачки в $\mu \text{вт}/\text{м}^2$. Из этого рисунка, во-первых, следует, что интенсивность плазменных флуктуаций, обуславливающих рассеяние радиоволн, нелинейно зависит от мощности волн накачки.

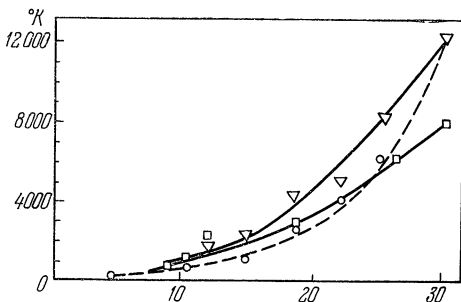


Рис. 47.

Во-вторых, порог возникновения спутника имеет место при $P \sim 10 \mu \text{вт}/\text{м}^2$. Авторы работы [172] проводят сравнение такого порогового значения с теоретическим. Для этого используются результаты по затуханию во времени плазменных флуктуаций ($\sim 0,6$ мсек) и известная температура электронов ($0,2$ эв). Считая $\gamma_s \sim \omega_s$, они получают теоретическую оценку для порогового потока мощности накачки $\sim 1 \text{вт}/\text{м}^2$. Для согласия с теорией в работе [172] привлечено соображение о десятикратном усилении поля накачки в окрестности точки $\omega_0 = \omega_{Le}(x)$. Еще один экспериментальный результат работы [172] состоит в изучении формы линии спутника, которая имеет ширину порядка ионно-звуковой частоты и асимметричную форму.

В сходной по постановке работе Карлсона, Гордона и Шоуэна [187] использованы те же длины волн поля накачки и рассеивающегося сигнала, что и в работе [172]. Авторы этой работы наблюдали одновременное возрастание некогерентного рассеянного сигнала на спутниках, обусловленных ионно-звуковой волной и электронной ленгмюровской, возникающее под действием поля волны накачки. На рис. 48 представлены результаты наблюдения вернувшегося назад рассеянного сигнала как функции

высоты, которая отложена по оси ординат (в км). Соответственно при частоте 430 Мгц видно увеличение, обусловленное ионными флуктуациями, а при частоте 435,6 Мгц показано сильное увеличение рассеянного сигнала, обусловленного полем волны накачки. Для сравнения приведены сигналы при частотах 435,1 и 436,1 Мгц. Эти результаты

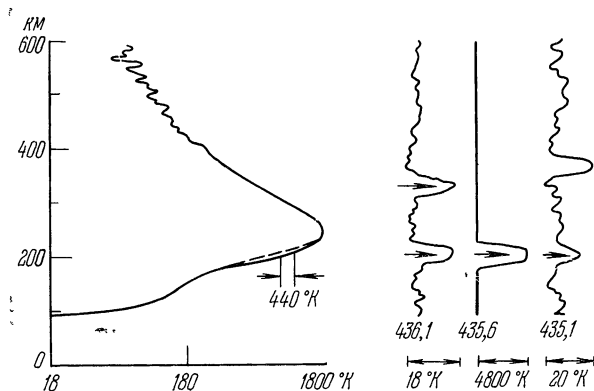


Рис. 48.

говорят об одновременном возбуждении волной накачки в ионосферной плазме ионно-звуковой и электронной ленгмюровской волн. Проведенные в работе [187] измерения относились к дневному времени, поэтому здесь также имело место влияние фотоэлектронов. В этих условиях оказалось, что при мощности излучения волны накачки в пределах от 10 до 1000 кВт отношение усиления стоксова и антистоксова спутников составляет примерно 4, а усиление стоксова спутника в 10 раз превышает усиление ионной компоненты. Большой интерес представляют результаты работы [187] по определению зависимости интенсивности стоксова (424,4 Мгц) и антистоксова (455,6 Мгц) спутников от мощности волны накачки. На рис. 49 виден эффект гистерезиса для обоих спутников. Сплошная линия соответствует антистоксову спутнику, а штриховая—стоксову. При этом с уменьшением мощности волны накачки от 90 до 10 кВт, как показывают стрелки, интенсивность спутников монотонно уменьшается примерно по линейному закону. При росте мощности от 10 до 30 кВт интенсивность спутников также растет по линейному закону, затем от 30 до 50 кВт скорость нарастания увеличивается, а при

мощности, большей 50 *квт*, интенсивность спутников уменьшается.

Наконец, на рис. 50 приведены кривые, характеризующие формы линии Стокса и антистосса спутников.

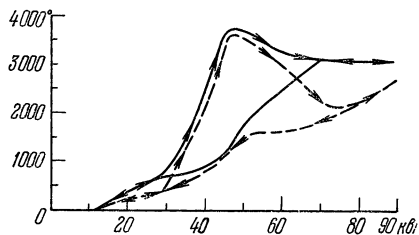


Рис. 49.

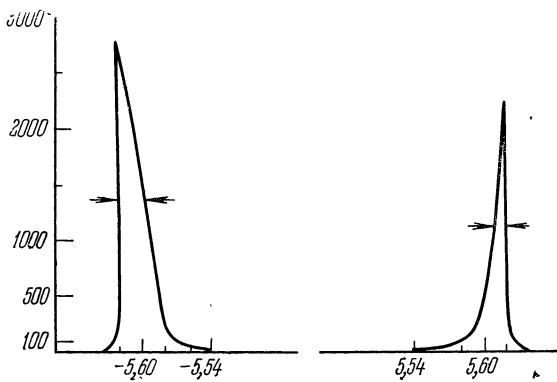


Рис. 50.

По оси ординат отложена температура в градусах Кельвина, а по оси абсцисс сдвиг частоты относительно 430 *Мгц*. Первая из этих линий интенсивнее и шире второй. Следует заметить, что стоксов спутник соответствует электронной ленгмюровской волне, уходящей от наблюдателя, а антистоксов спутник — волне, идущей прямо на наблюдателя. Ионосферные данные по параметрическому воздействию излучения большой мощности на плазму даже при всей их предварительности позволяют говорить о проявлении предсказанных теорией качественных закономерностей. В то же время анализ этих данных указывает на необходимость детализации теории применительно к условиям ионосферных исследований (ср. [203]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя краткий итог содержанию книги, следует в первую очередь сказать, что недавно зародившаяся область физики плазмы, посвященная изучению параметрического воздействия мощного излучения на плазму, быстро накопила достаточно большой объем как теоретических, так и экспериментальных результатов, позволяющих понять ряд основных закономерностей такого воздействия. В настоящее время наибольший интерес вызывают условия взаимодействия излучения с плазмой, в которых под влиянием электромагнитной волны накачки в плазме развивается параметрическая неустойчивость. Такая неустойчивость приводит к возникновению интенсивных плазменных флуктуаций, к сравнительно быстрой передаче энергии излучения плазме, характеризуемой аномально увеличивающейся высокочастотной проводимостью плазмы. При этом происходит своеобразное перераспределение частиц плазмы по скоростям.

Эксперименты по изучению турбулентного состояния параметрически неустойчивой плазмы дают нам различные части общей картины. Экспериментальные результаты убедительно подтверждают основные теоретические представления. В то же время необходимо отметить, что предстоит еще значительная работа по накоплению экспериментальных данных, которые позволили бы иметь возможность говорить о детальной количественной проверке теоретических закономерностей.

Следует отметить, что основные экспериментальные результаты ограничены областью радиоизлучения, а еще лишь только начинает привлекать внимание исследователей перспективная с точки зрения практических приложений область лазерного излучения особенно в связи с

проблемой управляемого термоядерного синтеза [175—177, 207—214].

В книге мы ограничились изложением, затронув помимо вопросов параметрической неустойчивости и возникновения турбулентного состояния лишь вопросы влияния сильного поля накачки на спектры плазменных колебаний. Заметим, что первые эксперименты [175] по изучению влияния высокочастотного поля на колебания плазмы в условиях, когда плазма остается устойчивой, позволяют говорить о подтверждении теоретических предсказаний.

В то же время необходимо упомянуть одно из интересных предсказанных теорией проявлений влияния мощного поля накачки на плазму. Именно поле достаточно высокой частоты, много большей характерных плазменных частот, может стабилизировать плазменные неустойчивости. Теория такой стабилизации электрическим полем волны накачки для токовой неустойчивости была сформулирована в работе [3] и для ряда дрейфовых неустойчивостей в работах [179, 180] и в работе [6].

Предсказанная теорией возможность стабилизирующего действия сильного поля накачки в настоящее время подтверждена экспериментально [181—183].

Укажем, наконец, начатое теоретически изучение влияния сильного поля накачки на потери энергии частиц, проходящих через плазму [184—186].

Уже перечисленные вопросы показывают, что исследования параметрического воздействия излучения большой мощности на плазму не только интенсивно развиваются, но и имеют определенную перспективу для значительного расширения поля исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. С и л и н, Нелинейная высокочастотная проводимость плазмы ЖЭТФ 47, 2254 (1964).
2. В. П. С и л и н, Параметрический резонанс в плазме, ЖЭТФ 48, 1679 (1965).
3. Ю. М. А л и е в, В. П. С и л и н, Теория колебаний плазмы, находящейся в высокочастотном электромагнитном поле, ЖЭТФ 48, 901 (1965).
4. Э. Т. У и т т е к е р, Дж. Н. В а т с о н, Курс современного анализа, Физматгиз, 1963.
5. Н. Н. Б о г о л о в, Ю. А. М и т р о п о л ь с к и й, Асимптотическая теория нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.
6. В. П. С и л и н, Взаимодействие сильного высокочастотного электромагнитного поля с плазмой, Сб. «A Survey of Phenomena in Ionized Gases», International Atomic Energy Agency, Vienna, 1968, p. 205.
7. Ю. М. А л и е в, Л. М. Г о р б у н о в, В. П. С и л и н, Х. У о т с о н, Колебания и устойчивость плазмы, находящейся во внешнем высокочастотном электрическом поле, Сб. «Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research», vol. I, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966, p. 659.
8. В. П. С и л и н, А. А. Р у х а д з е, Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред, Атомиздат, 1961.
9. В. П. С и л и н, Введение в кинетическую теорию газов, «Наука», 1971.
10. В. П. С и л и н, Кинетическая неустойчивость плазмы, находящейся в сильном высокочастотном поле, ЖЭТФ, 51, 1842 (1966).
11. E. A. J a c k s o n, Parametric effects of radiation on a plasma, Phys. Rev. 153, 235 (1967).
12. J. R. S a n m a r t i n, Electrostatic plasma instabilities excited by a highfrequency electric field, MATT-669, Plasma Physics Laboratory, Princeton, University, February 1969.
13. J u n - i c h i O k u t a n i, Parametric excitation of plasma oscillations II, Preprint, Tokyo University, 1969.
14. Н. Е. А н д р е е в, А. Ю. К и р и й, В. П. С и л и н, Параметрическое возбуждение продольных колебаний в плазме слабым высокочастотным электрическим полем, ЖЭТФ 57, 1024 (1969).

15. В. П. С и л и н, Диссипативно-параметрическая раскачка колебаний с аномальной дисперсией в плазме, находящейся в высокочастотном поле, Письма в ЖЭТФ 7, вып. 7, 242 (1968).
16. А. А. Р у х а д з е, В. П. С и л и н, Кинетическая теория дрейфово-диссипативных неустойчивостей плазмы, УФН 96, 87 (1968).
17. К у о j i N i s h i k a w a, Parametric excitation of coupled waves, II, Parametric plasmon-photon interaction, J. Phys. Soc. Japan 24, 1152 (1968).
18. К у о j i N i s h i k a w a, Instability of a weakly ionized plasma induced by an alternating electric field, Progr. Theor. Phys. 37, 769 (1967).
19. Н. Е. А н д р е е в, А. Ю. К и р и й, В. П. С и л и н, О параметрической неустойчивости плазмы в околороговой области, Труды IX Международной конференции по явлениям в ионизированных газах, Бухарест, 1969, стр. 543.
20. D. F. D u B o i s, M. V. G o l d m a n, Parametrically excited plasma fluctuations, Phys. Rev. 164, 207 (1967).
21. D. F. D u B o i s, M. V. G o l d m a n, Radiation-induced instability of electron plasma oscillations, Phys. Rev. Lett. 14, 544 (1965).
22. M. V. G o l d m a n, Parametric plasmon-photon interaction, Part I, Threshold for amplification of plasmons, Part II, Analysis of plasmon propagator and correlation functions, Annals of Phys. (N. Y.) 38, 95 (1966); 38, 117 (1966).
23. D. F. D u B o i s, Nonlinear parametric excitation of plasma fluctuations, 1968 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics, Statistical Physics of Charged Particle Systems, edited by R. Kubo and T. Kihara, p. 87, Tokyo — New York, 1969.
24. Y. C. L e e, C. H. S u. Theory of parametric coupling in plasmas, Phys. Rev. 152, 129 (1966).
25. В. Н. О р а е в с к и й, Р. З. С а г д е е в, Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы, ЖТФ 32, 1291 (1962).
26. В. Н. О р а е в с к и й, Распадные неустойчивости и нелинейные волновые явления в плазме, Докторская диссертация, Харьковский гос. ун-т, 1969.
27. Ю. М. А л и е в, В. П. С и л и н, Х. У о т с о н, Параметрический резонанс в плазме, находящейся в магнитном поле, ЖЭТФ 50, 943 (1966).
28. Ю. М. А л и е в, Д. З ю н д е р, Параметрическое возбуждение верхнего и нижнего гибридных резонансов, ЖЭТФ 57, 1324 (1969).
29. В. И. Д о м р и н, К теории колебаний плазмы, находящейся в постоянном магнитном и высокочастотном электрическом поле, Препринт, ФИАН СССР, № 38, 1967.
30. А. И. А х и е з е р, И. А. А х и е з е р, Р. В. П о л о в и н, А. Г. С и т е н к о, К. Н. С т е п а н о в, Электродинамика плазмы, «Наука» (в печати).
31. В. П. С и л и н, Ионно-циклотронная неустойчивость плазмы, находящейся в сильном высокочастотном поле, ЖТФ 37, 991 (1967).
32. Н. Е. А н д р е е в, А. Ю. К и р и й, Параметрическая аperiодическая неустойчивость замагниченной плазмы в слабом

- ВЧ электрическом поле, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 1, январь 1970, стр. 8.
33. Н. Е. Андреев, Параметрическая неустойчивость плазмы в постоянном магнитном и слабом высокочастотном электрическом полях, Изв. вузов, Радиофизика 14, 1160 (1971).
 34. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирей, К теории параметрической неустойчивости плазмы, находящейся в ВЧ электрическом и постоянном магнитном полях, ЖТФ 41, 1080 (1971).
 35. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, О неустойчивости плазмы в сильном высокочастотном поле, ЖЭТФ 49, 1973 (1965).
 36. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, Об ускорении электронов плазмы, помещенной в сильное электрическое поле, ЖЭТФ 48, 514 (1965).
 37. А. А. Рухадзе, Об одном виде неустойчивости пучков в плазме, Изв. вузов, Радиофизика 6, 401 (1963).
 38. В. Г. Маханьков, А. А. Рухадзе, Возбуждение электромагнитных волн поперек пучка заряженных частиц в плазме, Ядерный синтез 2, 177 (1962).
 39. Н. В. Шолохов, О рассеянии электромагнитных волн неравновесной плазмой, Изв. вузов, Радиофизика 7, 452 (1964).
 40. Т. Ф. Волков, Влияние высокочастотного электромагнитного поля на колебания плазмы, Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» 4, Изд. АН СССР, 1958, стр. 98.
 41. Л. М. Горбунов, В. П. Силин, О неустойчивости замагниченной плазмы в сильном высокочастотном поле, ЖТФ 39, 69 (1969).
 42. D. Montgomery, I. Alexeff, Parametric excitation of transverse waves in plasma, Phys. of Fluids 9, 1363 (1966); 9, 2544 (1966).
 43. Н. Е. Андреев, О неустойчивости замагниченной плазмы, находящейся в высокочастотном поле, ЖТФ 39, 1560 (1969).
 44. Л. М. Горбунов, Возмущение среды полем сильной электромагнитной волны, ЖЭТФ 55, 2298 (1968).
 45. Л. М. Горбунов, Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле, УФН 109, 631 (1973).
 46. А. Ю. Кирей, О неустойчивости плазмы в поле слабой поперечной волны, ЖЭТФ 58, 1002 (1970).
 47. Н. Е. Андреев, Параметрический резонанс в замагниченной плазме на высших гармониках, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 8, 1970, стр. 3.
 48. J. Bernstein, Waves in plasma in magnetic field, Phys. Rev. 109, 10 (1958).
 49. Н. Е. Андреев, А. Ю. Кирей, В. П. Силин, К теории параметрического резонанса в плазме, находящейся в сильном высокочастотном поле, Радиофизика 13, 1321 (1970).
 50. В. П. Силин, К теории параметрического взаимодействия СВЧ поля с плазмой, ЖЭТФ 57, 183 (1969).
 51. Ю. А. Романов, Г. В. Филиппов, Взаимодействие потоков быстрых электронов с продольными плазменными волнами, ЖЭТФ 40, 123 (1961).
 52. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Нелинейные колебания разреженной плазмы, Ядерный синтез 1, 82 (1961).

53. Ю. Л. К л и м о н т о в и ч, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд. МГУ, 1964.
54. Н. Н. Б о г о л ю б о в, Проблемы динамической теории в статистической физике, Избранные труды, том 2, «Наукова думка», Киев, 1970, стр. 99.
55. В. П. С и л и н, Кинетические уравнения для газа заряженных частиц, Добавление к книге Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967.
56. В. П. С и л и н, К кинетической теории взаимодействия плазменных волн, Прикладная механика и техническая физика, вып. 1, 31 (1964).
57. A. K u s z e l l, A. S e n a t o r s k i, Kinetic description of plasma in an external field II, Ring approximation, Physica 40, 453 (1968).
58. С. В. И о р д а н с к и й, А. Г. К у л и к о в с к и й, Квазилинейное приближение и корреляционные функции в плазме, ЖЭТФ 46, 732 (1964).
59. А. Ю. К и р и й, О квазилинейной дестабилизации диссипативной параметрической неустойчивости плазмы в слабом высокочастотном электрическом поле, ЖЭТФ 60, 955 (1970).
60. А. Р. Ш и с т е р, Высокочастотная проводимость неизотермической полностью ионизированной плазмы, Прикладная механика и техническая физика, вып. 6, 50 (1964).
61. В. В. П у с т о в а л о в, В. П. С и л и н, Нелинейная теория взаимодействия волн в плазме, Труды Физич. ин-та им. П. Н. Лебедева 61, 1972, стр. 42.
62. В. И. П е т в и а ш в и л и, О ионно-звуковых колебаниях, возбуждаемых электронным током, ДАН СССР 153, № 6, 1295 (1963).
63. В. Л. С и з о н е н к о, К. Н. С т е п а н о в, О нелинейном рассеянии ионно-звуковых колебаний на электронах, Письма в ЖЭТФ 9, 468 (1969).
64. В. Л. С и з о н е н к о, К. Н. С т е п а н о в, Аномальное сопротивление плазмы в докритических электрических полях, Ядерный синтез 10, 155 (1970).
65. В. В. П у с т о в а л о в, В. П. С и л и н, Об аномальном поглощении плазмой электромагнитной волны, ЖЭТФ 59, 2215 (1970).
66. W. L. K r u e r, P. K. K a w, J. M. D a w s o n, C. O b e r m a n, Anomalous high-frequency resistivity of a plasma, Phys. Rev. Lett. 24, № 18, 987 (1970).
67. C. K. B i r d s a l l, D. F u s s, C l o u d s - i n - c l o u d s, c l o u d s - i n - c e l l s, Physics for many-body plasma simulation, Journal of Computational Physics 3, 494 (1969).
68. R. C. D a v i d s o n, N. A. K r a l l, K. P a r a d o r o u l o s, R. S h a n n y, Electron heating by electron-ion beam instabilities, Preprint, № 912, PO21, University of Maryland, 1970.
69. W. L. K r u e r, P. K. K a w, J. M. D a w s o n, Anomalous plasma heating and the electron-ion decay instability, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. II, 15, № 11, 1407 (1970).
70. Ю. М. А л и е в, Э. Ф е р л е н г и, Параметрическое возбуждение поверхностных колебаний плазмы внешним высокочастотным полем, ЖЭТФ 57, 1623 (1969).

71. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
72. J. H. K r e n z, G. S. K i n o, Harmonic generation and parametric oscillations in a plasma, J. Appl. Phys. 36, 2387 (1965).
73. Р. Р. Рамазашвили, О параметрической раскачке плазменных волн в неоднородной плазме высокочастотным электрическим полем, ЖЭТФ 53, 2168 (1967).
74. В. И. Домрин, Р. Р. Рамазашвили, О параметрической неустойчивости неоднородной плазмы, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 7, 1970, стр. 62.
75. Т. Ф. Волков, О стационарном распределении плотности плазмы в электромагнитном поле, Сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций» 3, Изд. АН СССР, 1958, стр. 336.
76. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
77. H. M o t z, C. J. H. W a t s o n, The radio-frequency confinement and acceleration of plasmas, in «Advances in Electronics and Electron Physics», vol. 23, Academic Press, New York and London, 1967, p. 154.
78. В. П. Силин, Нелинейная теория проникновения высокочастотного поля в проводник, ЖЭТФ 53, 1662 (1967).
79. M. L. K r u e r, J. M. D a w s o n, Anomalous damping of large amplitude electron plasma oscillations, Phys. Rev. Lett. 25, 1174 (1970).
80. W. L. K r u e r, J. M. D a w s o n, Anomalous heating of plasmas driven by a large transverse field at $2\omega_{pe}$, Preprint, Princeton, University, October 1970.
81. J. M. D a w s o n, W. L. K r u e r, P. K. K a w, Anomalous plasma heating by an external field at $2\omega_{pe}$, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. II 15, № 11, 1408 (1970).
82. J. I. K a t z, J. S. D e g r o o t, Numerical simulation of anomalous plasma heating by a strong electromagnetic wave, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. II 15, № 11, 1472 (1970).
83. R. N. C a r l i l e, Parametric excitation of Bernstein modes by an electromagnetic wave, Bull. Amer. Phys. Soc., ser. II 15, № 11, 1429 (1970).
84. Р. К. Кау, Anomalous heating of plasmas by laser irradiation, Доклад на Конференции по лазерной плазме, Москва, ноябрь 1970.
85. Т. Амано, М. Окамото, Parametric effects of an alternating field on inhomogeneous plasmas, J. Phys. Soc. Japan 26, 529 (1969).
86. В. И. Векслер, И. Р. Геккер и др., Радиационное ускорение плазмы, Доклад на Международной конференции по ускорителям, Дубна, август 1963.
87. А. В. Гуревич, В. П. Силин, О радиационном ускорении плазмы, Ядерная физика 2, вып. 2, 250 (1965).
88. Ю. М. Алиев, О. М. Градов, А. Ю. Кирей, Возбуждение объемных ионно-звуковых колебаний в неоднородной плотной плазме полем электромагнитной волны, Письма в ЖЭТФ 15, 694 (1972).
89. R. B. H a l l, R. A. G e r w i n, Electromagnetic confinement and penetration of an overdense plasma, Preprint D1-82-0977,

- Plasma Physics Laboratory, Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington, 98126, USA, May 1970.
90. R. A. Stern, N. Tzoar, Parametric coupling between electron-plasma and ion-acoustic oscillations, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 903 (1966).
 91. К. Ф. Сергейчев, И. Р. Геккер, Instability of plasma stream in the field of an H_{01} travelling wave, Труды XIII Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Вена, 1967, стр. 394.
 92. К. Ф. Сергейчев, Прохождение слабонеоднородного плазменного потока через потенциальный СВЧ барьер, *ЖЭТФ* **52**, 575 (1967).
 93. К. Ф. Сергейчев, Распад потока бесстолкновительной плазмы вблизи критической плотности в СВЧ поле, Труды IX Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Бухарест, 1969, стр. 540.
 94. К. Ф. Сергейчев, Аномальный распад неоднородного потока бесстолкновительной плазмы в СВЧ поле, *ЖЭТФ* **58**, 1157 (1970).
 95. G. M. Batanov, I. R. Gekker, K. A. Sarkisian, K. F. Sergeichev, V. A. Silin, Anomalous absorption of an electromagnetic wave in a collisionless plasma, Plasma Heating in a strong UHF-field, Third European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Symposium on Beam — Plasma Interactions, 103, Utrecht (1969).
 96. И. Р. Геккер, О. В. Сизухин, Аномальное поглощение мощной электромагнитной волны в бесстолкновительной плазме, Письма в *ЖЭТФ* **9**, 408 (1969).
 97. И. Р. Геккер, О. В. Сизухин, Исследование аномального поглощения плотной бесстолкновительной плазмой мощной H_{11} -волны в круглом волноводе, Труды IX Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Бухарест, 1969, стр. 542.
 98. И. Р. Геккер, Аномальное поглощение электромагнитных волн и нагрев бесстолкновительной немагнитной плазмы, стр. 56, *Physik und Technik des Plasmas II, Zusammenfassende Vorträge der Arbeitstagung in Rostock*, 18—23, 10, 1970, *Physikalische Gesellschaft der DDR*.
 99. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, В. А. Силин, Аномальный «нагрев» электронов плазмы в сильном СВЧ поле, Труды IX Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, Бухарест, 1969, стр. 541.
 100. В. И. Баринов, И. Р. Геккер, О. В. Сизухин, Э. Г. Хачатурян, Генерация быстрых электронов при взаимодействии СВЧ волны с бесстолкновительной плазмой, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 3, 1971.
 101. К. Ф. Сергейчев, В. Е. Трофимов, Аномальная диссипация энергии СВЧ волн в бесстолкновительной плазме, Письма в *ЖЭТФ* **13**, 236 (1971).
 102. H. Dreiser, J. C. Ingraham, D. Henderson, Anomalous resistivity for large amplitude electric fields (E) near the electron plasma frequency, *Bull. Amer. Phys. Soc.*, ser. II **15**, № 11, 1427 (1970).
 103. Р. А. Демирханов, Г. Л. Хорасанов, И. К. Сидорова, Резонансные явления в щелочной плазме, находя-

- щейся в переменном электрическом поле, ЖЭТФ 59, 1874 (1970).
104. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Об энергии ионно-звуковых колебаний и высокочастотной проводимости параметрически неустойчивой плазмы, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 8, 1972, стр. 53.
 105. D. F. Dubois, M. V. Goldman, Spectrum and anomalous resistivity for the saturated parametric instability, Phys. Rev. Lett. 28, 218 (1972).
 106. E. Valeo, C. Oberman, F. W. Perkins, Saturation of the decay instability for comparable electronic and ion temperatures, Phys. Rev. Lett. 28, 340 (1972).
 107. В. Ю. Быченков, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Флуктуации в плазме, находящейся в сильном высокочастотном электрическом поле, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 8, 1972, стр. 27.
 108. Ю. М. Алиев, О. М. Градов, А. Ю. Кирий, Кинетическая теория параметрического возбуждения поверхностных волн в полуограниченной плазме, ЖЭТФ 63, 112 (1972).
 109. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, О стационарной турбулентности параметрически неустойчивой плазмы, Письма в ЖЭТФ 16, 308 (1972).
 110. F. W. Perkins, J. Flick, Parametric instabilities in inhomogeneous plasmas, Phys. of Fluids 14, 2012 (1971).
 111. Ю. М. Алиев, О. М. Градов, А. Ю. Кирий, К теории параметрического резонанса в неоднородной плазме, ЖЭТФ 63, 1262 (1972).
 112. И. С. Байков, В. П. Силин, Параметрическая неустойчивость в неоднородной плазме с горячими ионами, ЖТФ 42, 3 (1973).
 113. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд. АН СССР, 1961, стр. 459.
 114. В. П. Силин, Колебания слабонеоднородной плазмы, ЖЭТФ 44, 1271 (1963).
 115. Ф. Г. Басс, А. Я. Бланк, К теории трансформации и рассеяния волн на флуктуациях в плазме, ЖЭТФ 43, 1479 (1962).
 116. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, О задачах на собственные значения для уравнений второго порядка в случае нелинейной зависимости от параметра λ , ДАН СССР 152, 28 (1963).
 117. В. П. Силин, О релаксационных процессах в параметрически неустойчивой плазме, ЖЭТФ 63, 1686 (1972).
 118. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, Быстрые частицы в параметрически неустойчивой плазме, Письма в ЖЭТФ 14, 439 (1971).
 119. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Квазилинейная теория параметрически неустойчивой магнитоактивной плазмы, Препринт, ФИАН СССР, № 133, 1972; ЖЭТФ 64, 843 (1973).
 120. В. П. Силин, Аномальная нелинейная диссипация СВЧ волн в плазме, УФН 104, 677 (1971).
 121. Л. М. Горбунов, А. М. Тимербулатов, О законе дисперсии и нелинейном взаимодействии ленгмюровских волн в слаботурбулентной плазме, ЖЭТФ 53, 1492 (1967).

122. Б. Б. Кадоццев, Турбулентность плазмы, Сб. «Вопросы теории плазмы» под ред. М. А. Леонтовича, том 4, Атомиздат, 1964, стр. 188.
123. А. Л. Берхоер, В. Е. Захаров, Самовоздействие волн с различной поляризацией в нелинейных средах, ЖЭТФ 58, 903 (1970).
124. Н. Л. Цинцадзе, О возможности параметрического резонанса в электронной плазме, ЖЭТФ 59, 1251 (1970).
125. M. P o r k o l a b, Parametric instabilities in a magnetic field and possible applications to heating of plasmas, Nuclear Fusion 12, 329 (1972).
126. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, Изд. Харьковского ун-та, 1965.
127. Ю. М. Алиев, В. П. Силин, Параметрическое воздействие на плазму излучения большой мощности вблизи электронных циклотронных частот, Препринт, ФИАН СССР, № 71, 1972; ЖТФ 42, 2249 (1972).
128. В. Л. Гинзбург, А. А. Рухадзе, Волны в магнитоактивной плазме, «Наука», 1970.
129. Ю. Б. Иванов, А. А. Рухадзе, О высокочастотной проводимости магнитоактивной плазмы, Изв. вузов, Радиофизика 7, 232 (1964).
130. Н. Е. Андреев, Кинетическая неустойчивость плазмы, находящейся в СВЧ поле, ЖТФ 43, 850 (1973).
131. Н. Е. Андреев, К теории параметрического взаимодействия высокочастотного поля с магнитоактивной плазмой, ЖЭТФ 63, 1283 (1972).
132. N. T z o a r, Parametric excitation in plasma in a magnetic field, Phys. Rev. 178, 356 (1969).
133. Н. Е. Андреев, Возбуждение в плазме ленгмюровских колебаний полем поперечной волны, ЖЭТФ 59, 2105 (1970).
134. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, Теория колебаний холодной магнитоактивной плазмы, находящейся в поле электромагнитной волны, Препринт, ФИАН СССР, № 16, 1972.
135. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, Раскачка низкочастотных потенциальных колебаний холодной магнитоактивной плазмы полем электромагнитной волны, ЖЭТФ 62, 253 (1972).
136. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, Параметрическое возбуждение высокочастотных потенциальных колебаний холодной магнитоактивной плазмы полем электромагнитной волны ЖТФ 42, № 8, 1648 (1972).
137. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, Параметрическое возбуждение быстрых магнитозвуковых волн, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 4, 1972, стр. 46.
138. В. В. Пустовалов, А. Б. Романов, Параметрическое возбуждение альфвеновских волн, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 10, 1972, стр. 18.
139. А. Г. Литвак, В. Ю. Трахтенгерц, Об индуцированном рассеянии волн и нагреве плазмы когерентным излучением, ЖЭТФ 60, 1702 (1971).
140. Г. М. Батанов, Л. М. Горбунов, К. А. Сарксян, Аномальное поглощение электромагнитных волн в замагниченной плазме, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 8, 1971, стр. 60.

141. В. Е. Г о л а н т, А. Д. П и л и я, Линейная трансформация и поглощение волн в плазме, УФН 104 (3), 413 (1971).
142. В. Е. Г о л а н т, Сверхвысокочастотные методы нагрева плазмы, УФН 104, 678 (1971).
143. Г. М. Б а т а н о в, К. А. С а р к с я н, Резонансы аномального СВЧ нагрева электронов в замагниченной плазме, Письма в ЖЭТФ 13, 539 (1971).
144. Г. М. Б а т а н о в, К. А. С а р к с я н, Нетепловое излучение магнитоактивной плазмы в поле сверхвысокочастотной волны накачки, Препринт, ФИАН СССР, № 160, 1971.
145. Н. Е. А н д р е е в, Г. М. Б а т а н о в, К. А. С а р к с я н, Возбуждение СВЧ волной накачки параметрических неустойчивостей в магнитоактивной плазме, Препринт, ФИАН СССР, № 78, 1972.
146. Г. М. Б а т а н о в, К. А. С а р к с я н, В. А. С и л и н, О неустойчивости плазмы в неоднородном СВЧ поле, Препринт, ФИАН СССР, № 7, 1968.
147. И. Р. Г е к к е р, Э. Я. Г о л ь ц, Б. П. К о н о н о в, К. А. С а р к с я н, В. А. С и л и н, Л. Э. Ц о п п, Взаимодействие плазменных сгустков с мощной СВЧ волной, Доклад на VII Международной конференции по явлениям в ионизированных газах, Белград, 22—27 августа 1965, Препринт, ФИАН СССР, А-155, 1965.
148. К. Ф. С е р г е й ч е в, Экспериментальное исследование взаимодействия полностью ионизированной бесстолкновительной плазмы с сильными СВЧ полями, Автореферат кандидатской диссертации, ФИАН СССР, 1971.
149. Г. М. Б а т а н о в, В. А. С и л и н, Самовоздействие электромагнитной волны в плотной бесстолкновительной плазме, Письма в ЖЭТФ 14, 445 (1971).
150. H. D r e i c e r, D. B. H e n d e r s o n, J. C. I n g r a h a m, Anomalous microwave absorption near the plasma frequency, Phys. Rev. Lett. 26, 1616 (1971).
151. H. D r e i c e r, D. B. H e n d e r s o n, J. C. I n g r a h a m, F. E. W i t t m a n, Anomalous microwave absorption near the plasma frequency, Status Report of the Los Alamos Scientific Laboratory, Controlled Thermonuclear Research Program for a 12-month period ending october 1971, p. 73. University of California, Los Alamos, New Mexico, 87544, USA.
152. J. C. I n g r a h a m, H. D r e i c e r, F. E. W i t t m a n, Excitation of plasma oscillations and anomalous heating of electrons, p. 76, *ibid*.
153. H. P. E u b a n k, Experimental observation of plasma heating by microwaves with $\omega \approx \omega_{pe}$, Phys. Fluids 14, 2551 (1971).
154. R. S t e n z e l, A. Y. W o n g, Threshold and saturation of the parametric decay instability, Phys. Rev. Lett. 28, 274 (1972).
155. R. P. H. C h a n g, M. P o r k o l a b, B. G r e k, Parametric instability of plasma waves in a magnetic field, due to high-frequency electric fields, Phys. Rev. Lett. 28, 206 (1972).
156. R. P. H. C h a n g, M. P o r k o l a b, Experimental studies of nonlinear Landau damping and growth of plasma waves in a magnetic field, Phys. Fluids 13, 2766 (1970).
157. Л. М. Г о р б у н о в, Переходные процессы в нелинейных параметрически неустойчивых средах, ЖЭТФ 62, 2141 (1972).

158. А. С. Бакай, Взаимодействие высокочастотных и низкочастотных волн в нелинейных дисперсных средах, ЖЭТФ 59, 116 (1970).
159. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, Нетепловое излучение магнитоактивной плазмы в поле сверхвысокочастотной волны накачки, ЖЭТФ 62, 1721 (1972).
160. Г. М. Батанов, К. А. Сарксян, Нелинейное усиление слабой электромагнитной волны в плазме вблизи второй гармоники мощной волны накачки, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 2, 1972, стр. 14.
161. К. А. Сарксян, Аномальная диссипация энергии электромагнитных волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме, Автореферат канд. диссертации, ФИАН СССР, 1972.
162. S. Hiroe, H. Ikegami, Excitation of lower hybrid oscillations at upper hybrid resonance by microwaves, Phys. Rev. Lett. 19, 1414 (1967).
163. R. A. Stern, Radiation-induced decay instabilities of Bernstein modes, Phys. Rev. Lett. 22, 767 (1969).
164. A. Y. Wong, M. V. Goldman, F. Hai, R. Rowberg, Parametric excitation from thermal fluctuation at plasma-drift wave frequencies, Phys. Rev. Lett. 21, 518 (1968).
165. F. Hai, A. Y. Wong, Parametric mode-mode coupling between drift waves in plasmas, Phys. Fluids 13, 672 (1970).
166. А. С. Бакай, Е. А. Корнилов, С. М. Криворучко, Возбуждение ионно-звуковых волн ленгмюровскими и стационарные режимы в системе пучок — плазма, Письма в ЖЭТФ 12, 69 (1970).
167. R. N. Franklin, S. M. Hamburger, G. Lampis, G. J. Smith, Nonlinear damping of electron plasma waves by induced decay into ion waves, Phys. Rev. Lett. 27, 1119 (1971).
168. G. Van Hoven, Kinematics and dynamics of nonlinear mode coupling, Phys. Rev. A3, 153 (1971).
169. D. Phelps, N. Rynn, G. Van Hoven, Observation of direct nonlinear coupling of electromagnetic waves and electrostatic waves in a plasma, Phys. Rev. Lett. 26, 688 (1971).
170. W. F. Utlaut, An ionospheric modification experiment using very high power high frequency transmission. J. Geophys. Res. 75, № 34, 6402 (1970).
171. F. W. Perkins, P. K. Kaw, On the role of plasma instabilities in ionospheric heating by radio waves, Preprint, Princeton University, MATT-812, 1970; J. Geophys. Res. 76, 282 (1971).
172. A. Y. Wong, R. J. Taylor, Parametric excitation in the ionosphere, Phys. Rev. Lett. 27, 644 (1971).
173. D. F. Du Bois, M. V. Goldman, Nonlinear saturation of parametric instability basic theory and application to the ionosphere, Phys. Fluids 15, 919 (1972).
174. В. А. Силин, Вынужденное комбинационное рассеяние СВЧ волн в слое бесстолкновительной плазмы, Письма в ЖЭТФ 16, 153 (1972).
175. Н. Г. Басов, О. Н. Крохин, Условия разогрева плазмы излучением оптического генератора, ЖЭТФ 46, 171 (1964).
176. J. M. Dawson, On the production of plasma by giant pulse lasers, Phys. Fluids, 7, 981 (1964).
177. Ю. В. Афанасьев, Н. Г. Басов, П. П. Волосевич, О. Н. Крехин, Е. И. Леванов, В. Б. Роза-

- нов, А. А. Самарский, Нагрев дейтериево-тритиевой плазмы до термоядерных температур с помощью излучения ОКГ, Препринт, ФИАН СССР, № 66, 1972.
178. S. Takamura, S. Aihara, K. Takayama, Propagation of ion-waves in a radio frequency electric field, *Phys. Fluids* 13, 3052 (1970).
 179. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, О стабилизации низкочастотных неустойчивостей плазмы, Письма в ЖЭТФ 4, 32 (1966).
 180. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, Дрейфовая неустойчивость в плазме, помещенной в высокочастотное электрическое поле, ЖЭТФ 52, 293 (1967).
 181. О. М. Измайлов, Я. Б. Файнберг, В. К. Чечель, В. Д. Шапиро, Экспериментальное исследование дрейфовых неустойчивостей плазмы во внешнем ВЧ поле, Укр. физ. ж. 13, 1215 (1968).
 182. T. Obiki, T. Itatani, Y. Otari, Suppression of a Two-stream interaction in a beam-plasma system by external ac electric fields, *Phys. Rev. Lett.* 20, 184 (1968).
 183. J. F. Decker, A. M. Levine, Parametric suppression of a large-amplitude plasma instability, *Phys. Rev. Lett.* 28, 286 (1972).
 184. Т. Л. Тавдгиридзе, Н. Л. Цинцадзе, Потери энергии заряженной частицы в изотропной плазме, помещенной во внешнее высокочастотное электрическое поле, ЖЭТФ 58, 975 (1970).
 185. Ю. М. Алиев, Л. М. Горбунов, Р. Р. Рамазашвили, Поляризационные потери быстрой тяжести частицы в плазме, находящейся в сильном высокочастотном поле, ЖЭТФ 61, 1478 (1961).
 186. Г. Г. Матевосян, Угловая зависимость поляризационных потерь для быстрой тяжелой частицы в плазме, находящейся в сильном СВЧ поле, Сб. «Краткие сообщения по физике», ФИАН СССР, № 7, 1972, стр. 13.
 187. H. C. Carlson, W. E. Gordon, R. L. Showen, High frequency induced enhancements of the incoherent scatter spectrum at Arecibo, *J. Geophys. Res.* 77, 1242 (1972).
 188. А. Б. Киценко, В. И. Панченко, К. Н. Степанов, В. Ф. Тарасенко, Параметрические неустойчивости и турбулентный нагрев плазмы в поле быстрой магнитозвуковой волны, Ядерный синтез 13, № 4 (1973).
 189. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, Параметрическое возбуждение ионно-звуковых колебаний плазмы в переменном электрическом и постоянном магнитном полях, ЖЭТФ (в печати).
 190. F. M. Nekrasov, Parametric excitation of ion-sound instability in a magnetized plasma located in a high-frequency electric field, *Nuclear Fusion* 9, 291 (1969).
 191. Ф. М. Некрасов, К теории устойчивости плазмы в комбинированных полях, ЖТФ 40, 960 (1970).
 192. Ю. С. Костюкова, Ф. М. Некрасов, О колебаниях замагниченной плазмы в поле стоячей H -волны, ЖТФ 40, 1391 (1970).
 193. Y. S. Kostjukova, F. M. Nekrasov, Effect of high-frequency electric field on the development of ion-acoustic

- instability in a current-carrying plasma, *Nuclear Fusion* **10**, 277 (1970).
194. W. E. Drummond, D. Pines, Non-linear stability of plasma oscillations, *Nuclear Fusion*, Suppl. 3, 1049 (1962).
 195. Б. Б. Кадомацев, Турбулентность плазмы, Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 188.
 196. В. В. Пустовалов, В. П. Силин, В. Т. Тихончук, Об одном точном решении теории квазилинейной релаксации параметрически неустойчивой плазмы в поле мощного излучения, Письма в ЖЭТФ **17**, 120 (1973).
 197. В. С. Львов, А. М. Рубенчик, О нелинейной теории параметрической неустойчивости волн в плазме, ЖЭТФ **64**, 515 (1973).
 198. V. V. Demchenko, I. A. El-Naggar, Parametric instability in the region of low-frequency hybrid resonance, *Nuclear Fusion* **13**, 205 (1973).
 199. Е. Валеев, К. Оберман, Насыщение распадной неустойчивости при сравнимых температурах электронов и ионов, Сб. «Проблемы теории плазмы» под ред. А. Г. Ситенко, Киев, 1972, стр. 307.
 200. В. Н. Ораевский, Распространение и устойчивость волн конечной амплитуды в плазме, *ibid*, стр. 219.
 201. Н. Л. Цинцадзе, Колебания плазмы, находящейся в высокочастотных полях, *ibid*, стр. 238.
 202. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, Аномальное поглощение электромагнитного излучения на двойной плазменной частоте, Письма в ЖЭТФ **16**, 194 (1972).
 203. М. А. Савченко, К теории параметрических процессов в плазме и определение электронной концентрации в полярной ионосфере, Препринт 101, ИКИ АН СССР, Москва, 1972.
 204. R. Prasad, Effect of a high-frequency spatially uniform external electric field on a plasma, *Phys. Fluids* **10**, 2642 (1967); Instabilities in parametric oscillations of a plasma, *Phys. Fluids* **11**, 1768 (1968).
 205. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, Параметрические неустойчивости в плазме, содержащей ионы двух сортов, ЖЭТФ **64**, 1606 (1973).
 206. М. Я. Эль-Ашри, Взаимодействие сильного высокочастотного электрического поля с плазмой, Автореферат кандидатской диссертации. Изд-во Тбилисского гос. ун-та, Тбилиси, 1973.
 207. П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, Получение высокотемпературной плотной плазмы при лазерном нагреве специальной газовой мишени, ЖЭТФ **60**, 1630 (1971).
 208. П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, Получение высокотемпературной дейтериевой плазмы при лазерном нагреве специальной газовой мишени, ЖЭТФ **62**, 189 (1972).
 209. Ф. В. Бункин, П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, Об одной возможности применения ИК лазеров для высокотемпературного нагрева сверхплотной плазмы, Письма в ЖЭТФ **15**, 556 (1972).
 210. И. К. Красюк, П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, Экспериментальное наблюдение вынужденного комптоновского поглощения лазерного излучения в искре, Письма в ЖЭТФ **12**, 439 (1970).

211. И. К. Красюк, П. П. Пашинин, А. М. Прохоров, О роли вынужденного комптоновского рассеяния при взаимодействии лазерного излучения со сверхплотной плазмой, Письма в ЖЭТФ 17, 130 (1973).
212. J. M. Dawson, A. Hertzberg, G. C. Vlases, H. G. Ahlstrom, L. C. Steinhauer, R. E. Kidder, W. L. Krueer, Controlled fusion using long wavelength laser heating with confinement, Proceedings of the Esfahan Symposium on Fundamental and Applied Laser Physics, 1973.
213. К. А. Вруескнер, Laser driven fusion, Plasma Science PS — 1, № 1, 13 (1973).
214. А. А. Рупасов, Г. В. Склизков, В. П. Цапенко, А. С. Шиканов, Исследование отражения лазерного излучения от плотной плазмы (часть I), Препринт 53, ФИАН, Москва, 1973.
215. А. А. Ивапов, Взаимодействие высокочастотных полей с плазмой, Сб. «Вопросы теории плазмы» под ред. М. А. Леонтовича, вып. 6, стр. 139, Атомиздат, 1972.

Виктор Павлович Силин
ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ
ИЗЛУЧЕНИЯ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ
НА ПЛАЗМУ

М., 1973 г., 288 стр. с илл.

Редактор *Л. П. Русакова*

Техн. редактор *Е. П. Земская*

Корректоры *Э. В. Аятснеча, Л. С. Сомова*

Сдано в набор 4/VI-1973 г. Подписано
к печати 30/X 1973 г. Бумэга 84×108,32.
Физ.-печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12.
Уч.-изд. л. 15,59. Тираж 3000 экз. Т-17621.
Цена книги 1 р. 33 к. Заказ № 2664

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической
литературы
117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука».
Москва, Шубинский пер., д. 10

В.П.СИЛИН

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ
ВОЗДЕЙСТВИЕ
ИЗЛУЧЕНИЯ
БОЛЬШОЙ
МОЩНОСТИ
НА ПЛАЗМУ