ACM7179
UL FMT B RT a BL m T/C DT 09/12/88 R/DT 09/12/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B72788
035/2: : |a (CaOTULAS)160436759
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Sintsov, Dmitrii Matvievich, |d 1867-
245:00: |a Teoriia konneksov v prostranstie v sviazi s teoriei differentsial'nykh uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poriadka, |c D. M. Sintsova.
260: : |a Kazan', |b Tipografiia imperatorskago Universiteta, |c 1894.
300/1: : |a 254, 2 p., 1 L. |c 25 cm.
504/1: : |a "Obzor literatury": p. [3]-13.
590/2: : |a Author's presentation copy to A. Ziwet.
650/1: 0: |a Connexes
650/2: 0: |a Differential equations, Partial
998: : |c DMM |s 9124

An Herrn Alexander Ziwet
hochachtungsvoll überreicht
vom Verfasser
Kasan 18 7/I 95 г.

ТЕОРІЯ

Alexander Ziwet

КОННЕКСОВЪ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ

ВЪ СВЯЗИ СЪ ТЕОРІЕЙ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ

въ частныхъ производныхъ

ПЕРВАГО ПОРЯДКА

Д. М. СИНЦОВА

Прив.-доц. Императорскаго Казанскаго Университета.

КАЗАНЬ.
Типо-литографія Императорскаго Университета.
1894.

Печатано по опредѣленію Физико-Математическаго Факультета при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Деканъ Дубяго.

Введенный Декартомъ въ науку методъ изученія геометрическихъ конфигурацій помощью представленія ихъ уравненіями устанавливаетъ связь между аналитическими свойствами этихъ послѣднихъ и геометрическими свойствами изображаемыхъ ими фигуръ. Всякій успѣхъ въ аналитической теоріи— въ теоріи функцій двухъ и трехъ перемѣнныхъ, и въ частности въ области алгебраическихъ функцій, долженъ вести за собою соотвѣтственное расширеніе нашихъ знаній относительно свойствъ геометрическихъ конфигурацій, которыя получаемъ приравнивая нулю подобныя функціи. На самомъ дѣлѣ, однако, такого полнаго соотвѣтствія въ успѣхахъ аналитическихъ теорій и ихъ геометрическихъ приложеній далеко не замѣчается. Прекрасныя работы Кронекера и Вейерштрасса по теоріи билинейныхъ формъ почти не получили до сихъ поръ геометрическаго истолкованія [1]). Теорія инваріантовъ, или новая высшая алгебра, получившая свое начало въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ свойствъ фигуръ, не измѣняющихся при линейныхъ преобразованіяхъ, стала въ настоящее время абстрактною дисциплиной, изучаемою an und für sich, и сравнительно мало сдѣлано для геометрическаго истолкованія результатовъ ею достигнутыхъ, на значеніе которыхъ для геометріи указывалъ Клебшъ въ своихъ послѣднихъ работахъ.

Въ своемъ извѣстномъ мемуарѣ „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Götting. Ges. Wiss. Abhandl. B. XVII) Клебшъ показалъ, что на ряду съ кривыми, поверхностями и комплексами—геометрическими конфигураціями, со-

[1]) Если не считать изслѣдованій Липшица, Кристоффеля, Фробеніуса и пр., примѣнявшихъ къ вопросу о дифференціальныхъ элементахъ результаты теоріи приведенія квадратичныхъ формъ.

ставленными изъ точекъ, плоскостей или прямыхъ, необходимо изучать и такія, въ которыхъ элементомъ является не точка, прямая или плоскость въ отдѣльности, но сочетаніе (точка, прямая), (точка, плоскость), (прямая, плоскость), наконецъ (точка, прямая, плоскость). Понимать это надо такъ, что исходя, напр., изъ какой-нибудь комбинаціи (точка (a,b,c), плоскость (α,β,γ)), мѣняемъ всевозможными способами координаты a,b,c α,β,γ этого элемента, но притомъ такъ, что постоянно выполняется нѣкоторое геометрическое условіе, выражаемое однимъ или нѣсколькими уравненіями между величинами a,b,c, α,β,γ, и такимъ образомъ получаемъ конфигурацію съ элементомъ (точка, плоскость).—Только при изученіи всѣхъ такихъ типовъ геометрическихъ конфигурацій геометрія двухъ и трехъ измѣреній можетъ достигнуть той степени законченности, какою обладаетъ уже геометрія системы одного измѣренія, т. е. аналитически теорія бинарныхъ формъ. Уже въ теоріи коническихъ сѣченій, разсматриваемыхъ какъ геометрическое мѣсто точекъ, мы встрѣчаемъ, кромѣ инваріантовъ, коваріантовъ и контраваріантовъ, такія коваріантныя формы, которыя содержатъ и точечныя координаты (однородныя) $x_1x_2x_3$ и координаты прямой $u_1u_2u_3$. Такія формы—такъ наз. Zwischenformen или диваріанты, будучи приравнены нулю, представляютъ нѣкоторыя геометрическія конфигураціи, и для полноты изученія коническихъ сѣченій необходимо изслѣдовать и эти образованія.

Какъ показалъ Клебшъ въ упомянутомъ мемуарѣ, всѣ коваріантныя образованія данной формы или системы формъ,—съ числомъ перемѣнныхъ болѣе двухъ,—выражаются помощью такихъ формъ, которыя содержатъ по одному ряду перемѣнныхъ каждаго рода, соотвѣтствующихъ каждому роду основныхъ элементовъ разсматриваемаго пространства. Если имѣемъ дѣло съ геометріей двухъ измѣреній, то основными элементами будутъ точка и прямая, и соотвѣтственно два рода перемѣнныхъ—координаты точечныя и тангенціальныя, контрагредіентныя первымъ. Въ пространствѣ трехъ измѣреній имѣемъ три основные элемента—точку, прямую и плоскость, и соотвѣтственно три рода координатъ: координаты точки $x_1x_2x_3x_4$, координаты прямой и координаты плоскости,—за которыя можно принимать миноры 2-го (resp. 3-го порядка) составленные изъ координатъ двухъ (resp. трехъ) точекъ, опредѣляющихъ собою прямую (плоскость). Въ общемъ случаѣ пространства n измѣреній имѣемъ n такихъ основныхъ элементовъ пространства и соотвѣтственно n родовъ координатъ. Для изслѣдованій чисто алгебраическихъ въ извѣстныхъ отношеніяхъ можетъ представлять преимущество другое направленіе,—сводящее всѣ коваріантныя образованія данной системы формъ на такія, которыя содержатъ перемѣнныя одного только рода—точечныя, но по нѣскольку рядовъ. Но это чисто аналитическое направленіе, ведущее свое начало отъ Капелли, [1]), менѣе удобно въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, чѣмъ метода Клебша, носящая болѣе геометрическій характеръ и приводящая къ необходимости изучать каждый изъ 2^n типовъ геометрическихъ образованій, которыя получаются при различной комбинаціи рядовъ перемѣнныхъ. Въ геометріи двухъ измѣреній, аналитически изучаемой съ помощью тернарныхъ формъ, имѣемъ поэтому четыре класса коваріантныхъ образованій: инваріанты, коваріанты въ тѣсномъ смыслѣ слова, контраваріанты и Zwischenformen. Первые три класса приводятъ къ кривымъ, разсматриваемымъ какъ мѣста точекъ или какъ огибающія прямыхъ. Послѣдній классъ приводитъ къ тѣмъ геометрическимъ образованіямъ, аналитическую теорію которыхъ дали Клебшъ и Горданъ въ своемъ мемуарѣ Ueb. biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (Math. Ann. B. I. S. 359—400) и которыя подъ именемъ *коннексовъ* изучалъ Клебшъ въ своей работѣ Ueber ein neues Grundgebilde der analytischeu Geometrie der Ebene (Gött. Nachr. 1872 и Math. Ann. B. V, 203—215). Эта геометрическая конфигурація имѣетъ слѣдующій характеръ. Представимъ себѣ всю совокупность точекъ плоскости и всю совокупность прямыхъ той же плоскости. Какую-нибудь изъ этихъ точекъ x и какую-нибудь изъ этихъ прямыхъ u мы беремъ и соединяемъ въ элементъ (x,u). Всѣхъ такихъ элементовъ имѣется ∞^4, т. е. плоскость какъ система элементовъ (x,u) является многообразіемъ четырехъ измѣреній. Изъ общаго числа этихъ элементовъ отби-

---

[1]) Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche. Mem. Acc Lincei (3) XIX. 1882. См. также J. Deruits. Essai d'une théorie générale des formes algébriques. Mém. Soc. Liége (2) XVII. 1892. Прекрасный обзоръ развитія теоріи формъ принадлежатъ Фр. Мейеру: Bericht üb. d. Fortschritte d. projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. Jahresber. d Deutsch. Mathem. Verein. B. I. 1891.

раемъ тѣ, которые удовлетворяютъ нѣкоторому условію, выражаемому уравненіемъ

$$F(x_1 x_2 x_3; u_1 u_2 u_3) = o,$$

однороднымъ какъ относительно x, такъ и относительно u. Совокупность этихъ элементовъ и называется у Клебша коннексомъ. Если за точку x возьмемъ какую-нибудь опредѣленную точку a плоскости, то не всякая прямая плоскости будетъ вмѣстѣ съ точкою a составлять элементъ коннекса, но только тѣ прямыя, которыя выполняютъ уравненіе $F(a,u) = o$, т. е. огибаютъ кривую, выражаемую этимъ уравненіемъ;—это обстоятельство и выражаютъ говоря, что въ коннексѣ $F(x,u) = o$ точкѣ a соотвѣтствуетъ кривая $F(a,u) = o$; точно также не всѣ точки плоскости даютъ въ соединеніи съ прямою v элементы (x,v), удовлетворяющіе условію $F(x,u) = o$, — но только тѣ точки, которыя лежатъ на кривой $F(x,v) = o$.

Клебшъ успѣлъ опубликовать только вышеуказанный мемуаръ, представлявшій лишь предварительное сообщеніе. Оставшіеся послѣ него матеріалы послужили Ф. Линдеманну основаніемъ при составленіи имъ главы о коннексахъ, занимающей конецъ I-го тома изданныхъ имъ Clebsch'es Vorlesungen über Geometrie (s. 976—1050) и представляющей въ настоящее время наиболѣе полное изложеніе ученія о тернарныхъ коннексахъ. Кромѣ того, мы имѣемъ работу Годта, изучившаго нѣкоторыя свойства коннекса перваго порядка и второго класса (Diss. Götting. 1873),—котораго частный случай изучалъ также Амодео (Giornale Battaglini. XXV 321—332); Баттальини—частный случай коннекса (2,2). Кип. Стефаносъ (Bull. Sciences Mathém. (2) t. IV p. 318—328 Sur la théorie des connexes conjugués) изучилъ нѣкоторыя свойства особеннаго коваріантнаго коннекса—такъ наз. сопряженнаго; Арменанте (Generazione dei connessi di 2° ordine e di 2ª classe. Acc. Lincei, (2) III p. 2ª 123—128) и Пеано (Atti Acc. Torino XVI. 497—507) изучали вопросъ о построеніи коннексовъ (1,2), (2,2), т. е. о нахожденіи прямыхъ, дающихъ элементъ въ соединеніи съ данною точкой, по данному извѣстному числу элементовъ коннекса. Наибольшее число работъ посвящено однако простѣйшему линео-линейному коннексу

$$\sum_{i,k}^{1..3} a_{ik}\, x_i\, u_k = o\ ,$$

который каждый точкѣ x плоскости подчиняетъ другую точку y плоскости: $\varrho y_k = \sum\limits_{i=1}^{i=3} a_{ik}\, x_i$, и каждой прямой u—прямую $v : \sigma v_i = \sum\limits_{k=1}^{k=3} a_{ik}\, u_k$, т. е. опредѣляетъ коллинеарное преобразованіе этой плоскости. Мы имѣемъ рядъ работъ Баттальини: Sei connessi ternari di 1° ord. e di 1^a Classe (Napoli Rendic. XIX. 120—112 и Giorn. Battaglini XX. 230—249) Лаццери (La rappresentazione dello spazio rigato sopra un piano connesso e sua applicazione allo studio dei connessi lineo-lineari—Atti Istituto Veneto (6) t. II p. 247—268, 457—473), Фосса (Zur Theorie der linearen Connexe. Math. Ann. XV. 355—359) и кромѣ того, рядъ работъ посвященныхъ изученію съ помощью билинейной формы (a) коллинеаціи,—каковы работы М. Паша (Math. Ann. XXIII, 419—436, XXVI, XXXVIII p. 24—49) Крауса (M. An. XXIX. 234—238), Келлера (Diss.) [1], Мута (Math. An. B. XL. p. 89—98, XLII, 257—272). Розанеса (Ueb. linear-abhängige Punkt-Systeme Crelle's J. p. 241—273). Здѣсь уже не говоримъ о тѣхъ работахъ относительно коллинеарнаго (гомографическаго) преобразованія, указаннаго еще Мöbiусомъ, которыя не кладутъ въ основу опредѣленіе его помощью билинейной формы и которыхъ мы касаемся попутно въ главѣ IV. Наконецъ какъ приложеніе теоріи коннексовъ къ теоріи алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій 1 порядка, должно упомянуть о работахъ Darboux Mémoire sur les équations algébriques du 1-er ordre et du 1-er degré (Bull. Sc. Math. (2) II t. p. 60—96, 123—144, 151—200), Мюллендорфа (Ueb. einen speciellen Fall der dem Connex $(1,n)$ entsprechenden Differentialgleichung (Grunert's Archiv B. 69 s. 113—124), дающаго неудачный примѣръ для примѣненія болѣе общихъ результатовъ Дарбу, далѣе работы Ax. Harnack'a [2]) Фосса Zur Theorie d. algebraischen Differentialgleichungen 1. Ordn. u. 1. Grades Math. Ann. XXIII p. 157—180) и L. Autonne. Sur la théorie des équations differ. du 1-er ordre et du 1-er

---

[1]) Ueber gewisse Vierecke, die von Viereckspaaren abhängen. Gies. 1888.

[2]) Ueb. eine Behandlungsweise algebraischer Differentiale in homogenen Coordinaten (M. An. IX, p. 37).

degré (Journ. Éc. Polyt. Cah. 61 и 62, Ann. Univ Lyon. t. III. f. 1.) и Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentièlle du 1-er ordre (J. Éc. Polyt. Cah. 63 и 64). Послѣднему вопросу посвящена также работа Poincaré Sur l'intégration algébrique des équat. diff. du l. ordre et du 1. degré (Rendic. Circ. Mat. Palermo t. VII. 1891). Тѣсную связь съ теоріей коннексовъ имѣютъ наконецъ работы Фурэ о системахъ кривыхъ опредѣленныхъ алгебраическимъ диффер. уравненіемъ 1. порядка (Bull. Soc. Math. de France t. II, V, VI и XIX), Какъ видно изъ приведеннаго краткаго перечня [1]) видно, что разработка ученія о коннексахъ плоскости только еще начата, но уже и теперь въ ученіи о дифференціальныхъ уравненіяхъ они играютъ важную роль.

Что касается до аналогичныхъ конфигурацій въ пространствѣ трехъ измѣреній, которымъ посвящена настоящая работа, то они представляются почти не изученными. Самъ Клебшъ далъ относительно ихъ только нѣсколько замѣчаній въ § 3 цитированнаго выше мемуара Ueb. Fundamentalaufgabe d. Invariantentheorie", хотя имѣется указаніе Софуса Ли (Gött. Nachr. 1872 p. 478), что Клебшъ, распространяя свои изслѣдованія о коннексахъ на подобныя образованія въ многообразіяхъ трехъ и болѣе измѣреній, о которыхъ онъ упоминаетъ въ этомъ мемуарѣ, пришелъ къ разсмотрѣнію преобразованій частныхъ дифференціальныхъ уравненій, при чемъ центръ тяжести лежитъ во введеніи понятія рода и пр.,— въ однозначности и алгебраическомъ характерѣ примѣняемыхъ преобразованій. Эти результаты, устно сообщенные С. Ли Клебшемъ, равно какъ соотвѣтственное мѣсто въ цитированной выше статьѣ суть единственныя указанія на работы Клебша; они позволяютъ тѣмъ не менѣе признавать Клебша первымъ, введшимъ въ геометрію не только двухъ, но и трехъ измѣреній понятія о коннексахъ—геометрическихъ конфигураціяхъ съ составными элементами. Такъ какъ очень часто заслуги Клебша въ этомъ отношеніи отрицаются, то я и приведу

---

[1]) Я не привелъ здѣсь такихъ работъ въ которыхъ пользуются только терминологіей коннексовъ, не занимаясь самыми свойствами этихъ конфигурацій, но долженъ указать на сочиненіе Study: Methoden der Theorie der ternären Formen, аналитическіе результаты которой ждутъ геометрической переработки, и на которую я не разъ ссылаюсь въ дальнѣйшемъ.

здѣсь относящееся сюда мѣсто § 3 „Ueb. Fundamentalaufg. etc.“ Клебшъ говоритъ: „въ пространствѣ приходимъ къ восьми классамъ образованій, которыя получаются комбинированіемъ точки, прямой и плоскости, и необходимо изучать всѣ соотвѣтственныя основныя формы... Изъ этихъ восьми классовъ первый составляютъ постоянныя, которыя и безъ того составляются какъ инваріанты, но которыя можно разсматривать и какъ основныя формы, вводя въ совокупныя системы основныя постоянныя, координированныя остальнымъ основнымъ формамъ и являющіяся a priori данными инваріантами. Слѣдующіе три класса содержатъ только по одному разряду перемѣнныхъ; уравненныя нулю эти формы изображаютъ поверхности въ точечныхъ и въ плоскостныхъ координатахъ и комплексы прямыхъ. Пятый классъ формъ содержитъ координаты точки и координаты плоскости; приравнявъ такую форму нулю, каждой плоскости пространства подчинимъ поверхность, опредѣленную уравненіемъ въ точечныхъ координатахъ, и каждой точкѣ — поверхность въ плоскостныхъ координатахъ. Таково уравненіе, опредѣляющее коллинеацію въ пространствѣ, или условія касанія плоскости къ конусу, касательному къ данной поверхности и имѣющаго вершину въ произвольно взятой точкѣ пространства“ [такими конфигураціями и занимаюсь въ настоящей работѣ]. „Шестой классъ формъ содержитъ рядъ точечныхъ координатъ и рядъ координатъ прямой. Уравненныя нулю такія формы подчиняютъ каждой точкѣ комплексъ прямыхъ, каждой прямой—поверхность. Таковы, напр., уравненія, выражающія, что прямая касается конуса, проведеннаго касательно къ данной поверхности изъ какой нибудь-точки. Двойственно этому классу формъ и уравненій имѣемъ седьмой, содержащій рядъ координатъ прямой и рядъ координатъ плоскости. Наконецъ, восьмой классъ содержитъ по ряду координатъ точки, прямой и плоскости. Примѣромъ уравненія такого рода можетъ служить условіе касанія прямой съ конусомъ, имѣющимъ вершину въ данной точкѣ и проходящимъ черезъ пересѣченія данной поверхности съ произвольной плоскостью. Такое уравненіе каждой комбинаціи точки и плоскости подчиняетъ комплексъ, каждой комбинаціи точки и прямой—поверхность въ плоскостныхъ координатахъ, каждой комбинаціи плоскости и прямой—поверхность въ точечныхъ координатахъ“.

Всѣмъ этимъ конфигураціямъ,—до сихъ поръ почти не изученнымъ,—придаютъ общее названіе коннексовъ, хотя правильнѣе было бы придавать это названіе тѣмъ только конфигураціямъ, которыя имѣютъ своимъ элементомъ сочетаніе (точка, плоскость). Дѣло въ томъ, что наиболѣе характернымъ для элемента тернарнаго коннекса и съ геометрической и особенно съ аналитической стороны является не то обстоятельство, что за элементъ этой конфигураціи принимаемъ комбинацію всѣхъ элементовъ плоскости: точки и прямой, а то, что оба эти основные элемента совершенно между собою однородны, одинаково требуя для своего опредѣленія двухъ условій. Изъ основныхъ элементовъ пространства этимъ свойствомъ однородности обладаютъ взаимно не точка и прямая, а точка и плоскость, одинаково опредѣляемыя тремя условіями, тогда какъ прямая въ пространствѣ требуетъ для своего опредѣленія четырехъ условій. Двойственно соотвѣтствующею его элементу (точка, прямая) на плоскости будетъ снова комбинація прямой и точки, тогда какъ въ пространствѣ—комбинація плоскости и прямой. Тѣмъ же свойствомъ переходить въ себя при двойственномъ преобразованіи обладаетъ правда и сочетаніе (точка, прямая, плоскость), но составляющіе его члены не однородны между собою. Поэтому формальная аналогія, подобная той, какая существуетъ между кривыми и поверхностями второй степени, будетъ связывать между собою коннексъ тернарный съ элементомъ (точка, прямая) и коннексъ кватернарный съ элементомъ (точка, плоскость), и вообще въ пространствѣ n измѣреній коннексъ съ элементомъ (точка, плоская система (n—1)-го измѣренія). Поэтому я полагалъ бы придавать названіе коннексовъ такимъ только конфигураціямъ. Въ настоящей работѣ я ставлю себѣ цѣлью дать общій очеркъ теоріи кватернарныхъ коннексовъ, которые до настоящаго времени почти не изучались,—мы имѣемъ только работу Р. Краузе о коннексѣ второго порядка и перваго класса (Math. Ann. B. XIV s. 294—322), и нѣсколько работъ о линео-линейныхъ коннексахъ: Баттальини Sulle forme quaternarie bilineari (Atti Accad. Lincei 1882 г.), гдѣ онъ разсматриваетъ впрочемъ случай, когда оба ряда перемѣнныхъ x и y билинейной формы когредіентны, и она устанавливаетъ корреляцію, а не коллинеацію, Лаццери Sopra i sistemi lineari di connessi quaternari (1,1) (Mem. Acc. Lincei (4) IV. 1887), Мутъ: Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten Math. An. B. 33, s. 493—510. Изученію собственно коллинеацій въ пространствѣ посвящены работы Сегре (Mem. Acc. Lincei (3). XIX, 1884), Ришело, Ст. Смита, Гирста—который изучая системы корреляцій въ пространствѣ, указываетъ на связь съ изученіемъ коллинеацій (Proc. London Math. Soc. Vol. VI, XXI p. 92—118) и другія, которыя я цитирую въ главѣ IV. Тѣсную связь съ ученіемъ о коннексахъ имѣютъ изслѣдованія Fouret объ имплексахъ поверхностей,—системахъ ∞^2 поверхностей, опредѣленныхъ алгебраическимъ уравненіемъ въ частныхъ производныхъ 1. порядка; самъ Fouret на эту связь не указываетъ. Если прибавимъ, что Darboux въ своей увѣнчанной работѣ объ особенныхъ рѣшеніяхъ диффер. уравненій въ частныхъ производныхъ 1. порядка замѣчаетъ въ заключеніе о преимуществахъ введенія однородныхъ координатъ, то этимъ мы исчерпаемъ все, что до сихъ поръ опубликовано имѣющаго отношенія къ занимающему насъ вопросу. Поставивъ себѣ цѣлью дать въ настоящей работѣ для коннексовъ кватернарныхъ такой же очеркъ, какой для тернарныхъ даетъ Линдеманнъ въ послѣдней главѣ I-го тома составленныхъ имъ A. Clebsch's Vorlesungen über Geometrie, я разсматриваю въ первой главѣ общія свойства коннексовъ, начиная съ элементарныхъ энумеративныхъ, разсматриваю особенные элементы коннексовъ, его сопряженный коннексъ ввожу понятіе касательнаго коннекса, который подобно касательной плоскости, замѣняетъ коннексъ (m,n) въ сосѣдствѣ элемента его (x,u), и показываю примѣры составленія коваріантовъ даннаго коннекса изъ инваріантовъ касательнаго; глава заканчивается размотрѣніемъ однозначнаго преобразованія коннекса и рода его, какъ числа, не измѣняющагося при однозначномъ преобразованіи коннекса. Во II-й главѣ я перехожу къ главной коинциденціи коннекса; давъ въ § 8 нѣкоторыя общія опредѣленія и замѣчанія относительно коинциденціи вообще и въ § 9—нѣкоторыя коваріантныя образованія главной коинциденціи, въ § 10 и слѣдующихъ останавливаюсь на связи ученія о коннексахъ съ теоріей дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка. Излагаемая въ духѣ теоріи коннексовъ, теорія этихъ дифференціальныхъ уравненій тожественна съ теоріею С. Ли; вся разница въ томъ, что С. Ли разсматриваетъ точку и проходящую черезъ нее плоскость за элементъ пространства, здѣсь же это будетъ элементъ главной коинциденціи. Я счелъ однако не лишнимъ остановиться на такомъ изложеніи теоріи С. Ли во-первыхъ потому, что при этомъ она значительно выигрываетъ въ наглядности и естественности, и во-вторыхъ потому, что въ русской математической литературѣ изслѣдованія С. Ли до сихъ поръ не получили права гражданства: въ единственныхъ сочиненіяхъ, въ которыхъ идетъ рѣчь о работахъ С. Ли по дифференціальнымъ уравненіямъ,—П. С. Назимова „объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными М. 1881 г.“ и П. А. Шапошникова „Интегрир. уравненій съ полными дифференціалами и пр. М. 1880“ авторы ограничиваются, по самому характеру поставленной ими себѣ задачи изложеніемъ методы интегрированія С. Ли, не касаясь общихъ теорій норвежскаго геометра. Въ той же главѣ находятъ себѣ мѣсто изслѣдованія Фурэ объ имплексахъ поверхностей, многочисленныя теоремы котораго объ этихъ послѣднихъ являются простыми слѣдствіями доказанныхъ въ первой главѣ формулъ, и результаты работъ Дарбу объ особенныхъ рѣшеніяхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка.

Третья и четвертая главы представляютъ приложенія общихъ результатовъ главъ I и II къ болѣе частнымъ случаямъ коннексовъ $(m,1)$ и $(1,1)$. Въ главѣ III помимо обобщенія результатовъ Краузе я останавливаюсь на главной коинциденціи коннекса $(m,1)$ и показываю, какъ при этомъ распространяется на линейныя частныя дифф. уравненія метода Миндинга-Дарбу составленія полнаго интеграла помощью частныхъ рѣшеній. Четвертая глава посвящена изученію коннекса $(1,1)$, который относительно коннекса (m,n) играетъ ту же роль, что прямая относительно кривой m-го порядка.

Въ заключеніе я указываю на возможность распространенія предыдущихъ результатовъ на случай произвольнаго числа перемѣнныхъ.

Я не останавливаюсь на аналитической сторонѣ вопроса: центральный вопросъ теоріи формъ—доказательство конечности „полной системы формъ“ [1]) имѣетъ для геометріи сравнительно

[1]) Для кватернарныхъ формъ дано Hilbert'омъ (Math. Ann. B. 36), поставившимъ вопросъ на чисто ариѳметическую почву, слѣдуя Кронекеру. Его доказательство упростилъ Stroh.

меньшее значеніе, и только по отношенію къ коннексу (1,1) я составляю такую систему помощью символическихъ методовъ Клебша-Аронгольда (не символическими процессами задача эта разрѣшена Мертенсомъ въ Monatshefte für Mathematik u. Physik B. I 1890), преслѣдуя главнымъ образомъ цѣль геометрическаго истолкованія отдѣльныхъ представителей этой системы.

На русскомъ языкѣ имѣется по теоріи коннексовъ до сихъ поръ одна только статья моего многоуважаемаго учителя пр. А. В. Васильева „Объ особенныхъ рѣшеніяхъ въ связи съ новымъ взглядомъ на задачу интегрированія дифф. уравненій 1. порядка“ (Уч. Зап. Каз. Ун. 1878), въ которой авторъ знакомитъ съ основаніями теоріи коннексовъ на плоскости.

Въ виду этого можетъ быть не лишнею явится и настоящая работа, въ которой я не столько стремился обстоятельно изучить какой нибудь частный вопросъ теоріи коннексовъ, сколько дать общій ея очеркъ и указать на приложенія ея въ геометріи и анализѣ, которыя оправдываютъ ея разработку въ настоящее время, когда недостаточно изученными являются даже алгебраическія поверхности.

ГЛАВА I.

Общія свойства коннексовъ.

§ 1. **Опредѣленія**. Пространственный коннексъ, изученію свойствъ и приложеній котораго посвящена настоящая работа, есть такая геометрическая конфигурація, такое геометрическое образованіе (если условимся такимъ образомъ передавать терминъ „das Gebilde“), которое элементомъ своимъ имѣетъ сочетаніе (точка, плоскость) и обнимаетъ, какъ частные случаи, поверхности, разсматриваемыя, какъ геометрическія мѣста точекъ или какъ огибающія плоскостей. Каждая изъ ∞^3 точекъ пространства [для краткости мы не будемъ повторять каждый разъ, что дѣло идетъ о трехмѣрномъ пространствѣ] можетъ быть соединяемо въ элементъ (точка, плоскость) съ каждою изъ ∞^3 плоскостей того же пространства; для простоты геометрическихъ представленій точечное и плоскостное пространство мы предполагаемъ совмѣщенными, хотя можно было бы изучать и нѣсколько болѣе общія образованія, предполагая пространство точекъ и пространство плоскостей независимыми между собою. Такимъ образомъ всего мы имѣемъ ∞^6 [1]) эле-

---

[1]) Если какая-нибудь величина можетъ принимать, измѣняясь непрерывно, всевозможныя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$, то говорятъ, что эта величина можетъ принимать ∞^1 значеній. Если V—какая нибудь функція отъ m величинъ, каждая изъ коихъ независимо отъ другихъ можетъ имѣть ∞^1 значеній, то говоримъ, что V можетъ имѣть ∞^m значеній, будетъ величиною m измѣреній. Такимъ образомъ ∞^m элементовъ (поверхностей и пр.) $\equiv$ m—мѣрная система элементовъ (поверхностей и пр.). Въ этомъ смыслѣ мы и употребляемъ это выраженіе, какъ сокращающее значительно изложеніе.

ментовъ (точка, плоскость). Изъ общаго числа этихъ ∞^6 элементовъ уравненіе

$$f\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4;\ u_1\ u_2\ u_3\ u_4) = o, \qquad (1)$$

гдѣ $x_1 \ldots x_4$—однородныя координаты точки, $u_1 \ldots u_4$—однородныя координаты плоскости и f—функція однородная какъ относительно x, такъ и относительно u въ отдѣльности, выдѣляетъ ∞^5 элементовъ, образующихъ въ совокупности геометрическую конфигурацію, которой придается названіе пространственнаго коннекса Въ дальнѣйшемъ мы разсматриваемъ главнымъ образомъ алгебраическіе коннексы,—для которыхъ f есть цѣлая раціональная функція степени m относительно x и степени n относительно u. Символически изображаемъ ее тогда

$$f \equiv a_x^m\, u_\alpha^n = o\ ,$$

гдѣ

$$a_x = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + a_4\, x_4\ ,\ u_\alpha = \alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2 + \alpha_3\, u_3 + \alpha_4 u_4,$$

и $a_1^{k_1}\ a_2^{k_2}\ a_3^{k_3}\ a_4^{k_4}\ \alpha_1^{l_1}\ \alpha_2^{l_2}\ \alpha_3^{l_3}\ \alpha_4^{l_4}$ равно коффиціенту при

членѣ съ $\dfrac{m!}{k_1!k_2!k_3!k_4!} \times \dfrac{n!}{l_1!l_2!l_3!l_4!}\, x_1^{k_1}\ x_2^{k_2}\ x_3^{k_3}\ x_4^{k_4}\ u_1^{l_1}\ u_2^{l_2}\ u_3^{l_3}\ u_4^{l_4}$.

Мы будемъ означать такой коннексъ знакомъ (m,n)—коннексъ m-го порядка и n-го класса.

Каждой плоскости u пространства соотвѣтствуетъ въ коннексѣ поверхность X_u порядка m, уравненіе которой въ точечныхъ координатахъ получимъ, подставляя въ (1) значенія координатъ $u_1 u_2 u_3 u_4$, соотвѣтствующія взятой плоскости u; только въ соединеніи съ точками этой поверхности плоскость u дастъ элементъ коннекса (1); каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ подобнымъ образомъ поверхность U_x n-го класса которой уравненіе получаемъ, замѣняя въ (1) текущія координаты x координатами взятой нами точки. Такъ въ случаѣ если $m = n = 1$ каждой точкѣ x пространства соотвѣтствуетъ другая точка y, разсматриваемая, какъ центръ связки плоскостей, каждая изъ которыхъ въ соединеніи съ x дастъ элементъ коннекса (1,1); и каждой плоскости u сотвѣтствуетъ другая плоскость v—геометрическое мѣсто точекъ, въ соединеніи съ u образующихъ элементы разсматриваемаго коннекса. Такимъ образомъ коннексъ (1,1) устанавливаетъ коллинеацію (гомографію) въ трехмѣрномъ пространствѣ. Подобнымъ образомъ при $m=n=2$ каждой точкѣ соотвѣтствуетъ поверхность 2-го класса, и каждой плоскости—поверхность 2-го порядка.

Только въ особенныхъ случаяхъ можетъ встрѣтиться, что всякая точка пространства можетъ быть соединяема съ нѣкоторою опредѣленною плоскостью, или же съ извѣстною точкою можетъ быть соединена въ элементъ коннекса всякая плоскость пространства. Такого рода обстоятельство встрѣчается, напр., во всѣхъ коннексахъ, уравненія которыхъ приводятся къ виду:

$$\varphi_1(x_1)\cdot\psi_1(u)+\varphi_2(x)\cdot\psi_2(u)+\varphi_3(x)\cdot\psi_3(u)=o. \qquad (a)$$

Каждая изъ точекъ пересѣченія поверхностей $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$, $\varphi_3=o$,—которыя должны быть одной степени,—обладаетъ указаннымъ выше свойствомъ,—даетъ элементъ коннекса (a) въ соединеніи съ каждою изъ ∞^3 плоскостей пространства; точно также каждая изъ плоскостей, касательныхъ ко всѣмъ тремъ поверхностямъ

$$\psi_1(u)=o\ ,\ \psi_2(u)=o\ ,\ \psi_3(u)=o$$

даетъ элементъ коннекса (a) въ соединеніи съ каждою точкою пространства. Всякая другая точка x пространства, не принадлежащая одновременно поверхностямъ $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$ $\varphi_3=o$ можетъ давать элементъ коннекса только въ соединеніи съ плоскостями касательными къ той поверхности клубка $\lambda_1\psi(u)+\lambda_1\ \psi_1\ (u)+\lambda_3\ \psi_3\ (u)=o$, для которой параметры λ_i соотвѣтвѣтственно пропорціональны $\varphi_i(x_1\ ..\ x_4)$.—Такія точки и плоскости называемъ *главными* или *основными* точками и плоскостями коннекса. Ихъ можетъ быть и безчисленное множество,—если, напр., уравненіе коннекса имѣетъ видъ

$$\varphi_1(x)\cdot\psi_1(u)+\varphi_2(x)\cdot\psi_2(u)=o,$$

то главными будутъ всѣ точки кривой $\varphi_1(x)=o$, $\varphi_2(x)=o$ и всѣ плоскости, касательныя къ разгибающейся поверхности, опредѣленной двумя уравненіями въ плоскостныхъ координатахъ $\psi_1(u)=o$, $\psi_2(u)=o$.

Каждое уравненіе, содержащее только одинъ рядъ перемѣнныхъ, можетъ быть разсматриваемо, какъ уравненіе коннекса; напр., $\psi(x_1 \,..\, x_4)=o$ представляетъ въ этомъ смыслѣ коннексъ такого характера: каждой плоскости пространства соотвѣтствуетъ поверхность $\psi(x_1 \,..\, x_4)=o$, точки которой въ соединеніи съ нею даютъ элементы этого коннекса. Каждая точка этой поверхности является главною точкою такого коннекса, и ∞^5 элементовъ его слагаются изъ соединенія каждой изъ ∞^2 точекъ поверхности $\psi=o$ съ каждою изъ ∞^3 плоскостей пространства. Точкѣ, не лежащей на поверхости $\psi=o$, не соотвѣтствуетъ ни одной плоскости, которая въ соединеніи съ нею могла бы давать элементъ этого коннекса.

Какъ слѣдуетъ изъ общей теоріи характеристикъ, возведенной на степень исчисленія Шубертомъ[1]), простое условіе ξ_1, налагаемое на систему элементовъ (x,u) образовывать коннексъ (1), выражается формулою

$$\xi_1 = \alpha.\, p + \beta.\, e, \tag{b}$$

гдѣ p символъ означающій, что точка p подчиняется условію лежать въ нѣкоторой данной плоскости, а e есть символъ условія, чтобы плоскость e проходила чрезъ нѣкоторую опредѣленную точку. Численное значеніе получаютъ только степени p^3 и e^3,—равныя каждая 1, ибо условію принадлежать тремъ плоскостямъ одновременно удовлетворяетъ только одна точка, и одна плоскость проходитъ черезъ три данныя точки, нележащія на одной прямой; всѣ дальнѣйшія степени $p^4=p^5=\ldots=o$, $e^4=e^5=..=o$. Чтобы изъ ∞^6 элементовъ (x,u) выдѣлить нѣкоторое конечное число элементовъ, мы должны наложить шестикратное условіе, и слѣдовательно къ условію (b) добавить еще пятерное условіе. Принимая за таковыя p^3e^2 и p^2e^3, получимъ:

$$\xi_1\, p^3\, e^2=\beta, \qquad \xi_1\, p^2\, e^3=\alpha$$

[1]) Его многочисленныя работы резюмированы имъ въ его «Kalkül der abzählenden Geometrie» 1879. Первые слѣды этой символики встрѣчаются, впрочемъ у Halphen'а. Въ русской математической литературѣ изложеніе основаній энумеративной геометріи мы находимъ въ работахъ В. Г. Алексѣева (Мат. Сб. XIV (1889). Уч. Зап. Моск. Ун., Физ. Мат. От. В. 10).

т. е. число элементовъ коннекса (1), которыхъ точка принадлежитъtремъ даннымъ плоскостямъ, т. е. будетъ данною, а плоскость подчинена условію проходить черезъ двѣ данныя точки, т. е. черезъ данную (но совершенно произвольную) прямую, равно β; но это не что иное, какъ число плоскостей, касательныхъ къ поверхности Φ_n, которая соотвѣтствуетъ данной точкѣ въ коннексѣ, и проходящихъ черезъ данную прямую, иными словами это—классъ поверхности Φ_n, который равенъ n и который мы называемъ классомъ коннекса;—итакъ $\beta = n$.

Совершенно подобнымъ же образомъ второе уравненіе, показывающее, сколько въ коннексѣ (1) элементовъ, которыхъ точка лежитъ на данной прямой, а плоскость проходитъ черезъ три данныя точки, приводитъ насъ къ заключенію, что α есть порядокъ поверхности F_m, соотвѣтствующей въ коннексѣ (1) данной плоскости, и такимъ образомъ $\alpha = m$. Поэтому основное для исчислительной геометріи уравненіе коннекса принимаетъ окончательно видъ

$$\xi_1 = m.\ p + n.\ e. \tag{2}$$

Обращаемся къ геометрическому образованію, представляющему собою совокупность ∞^4 элементовъ (x,u). Проще всего представить себѣ аналитически такое образованіе, какъ совокупность элементовъ, общихъ двумъ коннексамъ и слѣдовательно опредѣляемыхъ двумя уравненіями

$$f(x,u) = o, \quad f'(x,u) = o. \tag{3}$$

Въ этомъ геометрическомъ образованіи каждой плоскости пространства соотвѣтствуетъ кривая двоякой кривизны—пересѣченіе поверхностей, соотвѣтствующихъ взятой плоскости въ томъ и въ другомъ коннексѣ; каждой точкѣ—развертывающаяся поверхность, огибаемая плоскостями, касательными къ той и къ другой поверхности, которыя соотвѣтствуютъ точкѣ въ двухъ коннексахъ. Не всякая, однако, подобная совокупность ∞^4 элементовъ (x,u), которой придается названіе *коинциденціи*, можетъ быть представлена аналитически двумя уравненіями; иначе говоря, не всякая коинциденція можетъ быть разсматриваема, какъ полное пересѣченіе двухъ коннексовъ,—

совершенно аналогично тому, какъ не всякую кривую двоякой кривизны можно разсматривать, какъ полное пересѣченіе двухъ поверхностей. Не трудно дать примѣръ подобной коинциденціи. Но для этого необходимо установить, что мы называемъ порядкомъ и классомъ коинциденціи и пр. Опредѣляя ее, какъ пересѣченіе двухъ коннексовъ (m,n) и (m',n'), мы получаемъ, что двойное условіе ξ_2, налагаемое на элементъ (x,u), принадлежать одновременно тому и другому коннексу выражается уравненіемъ

$$(4) \qquad \xi_2 = (m.p+n.e)\ (m'.p+n'.e) = mm'.p^2 + (mn'+nm').pe+nn'.e^2.$$

Добавляя поочередно каждое изъ трехъ возможныхъ четверныхъ условій p^3e, p^2e^2, pe^3, получимъ:

$$\xi_2.p^3e = nn', \quad \xi_2.p^2e^2 = mn'+nm', \quad \xi_2.pe^3 = mm',$$

которыя показываютъ, что *въ коинциденціи, опредѣленной пересѣченіемъ двухъ коннексовъ* (m,n), (m',n') *каждой точкѣ соотвѣтствуетъ развертывающаяся поверхность класса* nn', *каждой плоскости—кривая порядка* mm', *и наконецъ элементовъ* (x,u), *коихъ точка лежитъ на данной прямой, а плоскость проходитъ черезъ ту же или какую-нибудь другую данную прямую, имѣется* $mn'+nm'$. Порядокъ кривой, соотвѣтствующей въ коинциденціи данной плоскости, можно называть ея порядкомъ, классъ развертывающейся поверхности — классомъ коинциденціи; наконецъ число элементовъ, проходящихъ черезъ данную прямую,—рангомъ коинциденціи.

Представимъ себѣ теперь, что взятые нами коннексы суть:

$$F \equiv f.\varphi + g.\psi = o, \qquad F_1 \equiv f'.\varphi + g'.\psi = o.$$

гдѣ f, f', g, g', φ и ψ суть шесть различныхъ между собою билинейныхъ формъ типа $\Sigma a_{ik} x_i u_k$. По только что полученной общей теоремѣ (которая безъ труда получается изъ прямого разсмотрѣнія уравненій, опредѣляющихъ коинциденцію и выражающихъ условіе прохожденія черезъ данную точку, прямую или плоскость) эти коннексы (2,2) и (2,2) опредѣляютъ въ пересѣченіи коинциденцію 4-го порядка, 8-го ранга и 4-го класса.

Но въ составъ этой коинциденціи входитъ коинциденція, опредѣляемая коннексами (1,1) $\varphi = o$, $\psi = o$, —порядка 1, ранга 2 и класса 1. Замѣчая, что порядокъ коинциденціи есть число точекъ, лежащихъ на данной прямой и составляющихъ элементы съ данною плоскостью, мы видимъ, что порядокъ коинциденціи, остающейся за вычетомъ указанной сейчасъ коинциденціи (1,2,1), есть 3; точно также найдемъ, что классъ ея 3 и рангъ 6. Какъ ясно изъ вышеполученныхъ формулъ, подобная коинциденція,—т. е. (3,6,3) могла бы быть получена только въ пересѣченіи коннексовъ (3,3) и (1,1) [1]. Но въ коинциденціи, опредѣленной коннексами (3,3) и (1,1), каждой заданной плоскости соотвѣтствуетъ плоская кривая 3-го порядка—пересѣченіе поверхности 3-го порядка съ плоскостью. Въ указанной же выше коинциденціи данной плоскости соотвѣтствуетъ вообще кривая 3-го порядка двоякой кривизны. Поэтому ясно, что такую коинциденцію (3,6,3) нельзя изобразить полнымъ пересѣченіемъ двухъ коннексовъ. Мы приходимъ поэтому къ необходимости говорить вообще о коинциденціяхъ порядка μ, класса ν и ранга ϱ, разумѣя при этомъ подъ порядкомъ коинциденціи число ея элементовъ, которыхъ плоскость дана, а точка лежитъ въ другой данной плоскости, или порядокъ соотвѣтствующей въ ней данной плоскости кривой двоякой кривизны, подъ классомъ коинциденціи—классъ развертывающейся поверхности, соотвѣтствующей данной точкѣ, и подъ рангомъ—число элементовъ коинциденціи, коихъ точка лежитъ на одной данной прямой, а плоскость проходитъ черезъ другую или ту же данную прямую.

Геометрическую конфигурацію, представляющую совокупность ∞^3 элементовъ (точка, плоскость) будемъ называть *бикоинциденціею*, независимо отъ того, будетъ ли она опредѣляться пересѣченіемъ трехъ коннексовъ, или нѣтъ. Въ ней каждой точкѣ соотвѣтствуетъ только конечное число плоскостей, и каждой плоскости—конечное число точекъ, такъ что бикоинциденція устанавливаетъ преобразованіе, представляющее обобщеніе преобразованія помощью взаимныхъ поляръ. Пред-

---

[1]) Дѣйствительно три уравненія $mm'=3$, $mn'+nm'=6$, $nn'=3$ удовлетворяются положительными цѣлыми числами только при $m=n=3$, $m'=n'=1$ (или наоборотъ, что безразлично). Первое и третье можно бы удовлетворить еще полагая $m=n'=1$, $n=m'=3$, но тогда $nm'+mn'=10$.

ставимъ себѣ сначала, что бикоинциденція опредѣляется пересѣченіемъ трехъ коннексовъ (m,n), (m',n'), (m'',n'').

Тогда имѣемъ:

$$\xi_3 = (m.\,p + n.\,e)\,(m'.\,p + n'.\,e)\,(m''.\,p + n''.\,e). \qquad (5)$$

Умножая обѣ части послѣдовательно на p^3, p^2e, pe^2, e^3, получимъ такія равенства:

$$(6) \qquad \xi_3.\,p^3 = nn'n''; \quad \xi_3.\,p^2e = \Sigma mn'n''; \quad \xi_3.\,pe^2 = \Sigma mm'n''; \quad \xi_3.\,e^3 = mm'm'',$$

которыя заключаютъ въ себѣ слѣдующую теорему:

Въ бикоинциденціи, опредѣленной тремя коннексами (m,n), $(m,'n')$, (m'',n''), *каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ* $nn''n'$ *плоскостей вмѣстѣ съ нею образующихъ элементъ бикоинциденціи; каждой плоскости соотвѣтствуетъ подобнымъ образомъ* $mm'm''$ *точекъ; точкамъ какой-нибудь произвольно взятой прямой соотвѣтствуетъ развертывающаяся поверхность класса* $\Sigma mn'n'' = mn'n'' + m'n''n + m''nn'$, *и плоскостямъ пучка, имѣющаго осью произвольно заданную прямую, соотвѣтствуетъ кривая двоякой кривизны порядка* $\Sigma mm'n''$.

Если бикоинциденція опредѣляется пересѣченіемъ коинциденціи (μ, ϱ, ν) съ коннексомъ (m,n), то ея уравненіе исчислительной геометріи будетъ:

$$\xi_3 = (\mu.\,p^2 + \varrho.\,pe + \nu.\,e^2)\,(m.\,p + n.\,e), \qquad (7)$$

и мы имѣемъ:

$$\xi_3 e^3 = \mu m, \quad \xi_3 pe^2 = m\varrho + n\mu, \quad \xi_3 p^2 e = m\nu + n\varrho, \quad \xi_3 p^3 = n\nu, \qquad (8)$$

уравненія, заключающія въ себѣ вышеприведенныя, какъ частный случай.

Вообще бикоинциденція можетъ быть опредѣлена тѣмъ, что каждой точкѣ въ ней соотвѣтствуетъ ν_1 плоскостей, каждой плоскости — μ_1 точекъ, точкамъ произвольно заданной прямой развертывающаяся поверхность класса λ_1, и плоскостямъ, проходящимъ черезъ ту же или какую-нибудь другую данную прямую кривая двоякой кривизны порядка $\varkappa_1$. Мы говоримъ тогда, что это бикоинциденція $(\mu_1, \varkappa_1, \lambda_1, \nu_1)$; ея уравненіе исчислительной геометріи:

$$\xi_3 = \mu_1 p^3 + \varkappa_1 p^2 e + \lambda_1 p e^2 + \nu_1 e^3.$$

Если возьмемъ ∞^2 элементовъ (x,u), общихъ четыремъ коннексамъ (m,n), (m',n'), (m'',n'') и (m''',n'''), то какъ не трудно видѣть, исключая x, получимъ одно уравненіе между координатами плоскости, которое опредѣляетъ поверхность, а исключая u, получаемъ одно уравненіе между x, изображающее точечную поверхность. Такимъ образомъ эти уравненія опредѣляютъ *пару поверхностей*. Точка одной и соотвѣтствующая плоскость, касательная къ другой, образуютъ элементъ, общій четыремъ коннексамъ. Такъ какъ условіе принадлежать такой парѣ поверхностей есть:

$$\xi_4 = (m.p + n.e)\ (m'.p + n'.e)\ (m''.p + n''.e)\ (m'''.p + n'''.e),$$

то отсюда имѣемъ:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_4.p^2 = \Sigma m n' n'' n''' = m n' n'' n''' + m' n'' n''' n + m'' n''' n n' + \\ \qquad\qquad + m''' n n' n''. \\ \xi_4 . pe = \Sigma m m' n'' n''' \,; \qquad\qquad \xi_4 . e^2 = \Sigma m m' m'' n'''. \end{array}\right\} (9)$$

Геометрическое значеніе этихъ формулъ слѣдующее: *Четыре коннекса* (m,n), (m',n'), (m'',n''), (m''',n''') *опредѣляютъ пару поверхностей: одну—геометрическое мѣсто точекъ—порядка* $\Sigma m n' n'' n'''$ *и другую огибаемую плоскостями и класса* $\Sigma m m' m'' n'''$ *Только точка первой въ соединеніи съ однозначно ей соотвѣтствующей плоскостью, касательной ко второй, даютъ элементъ этой конфигураціи. Число элементовъ этой пары поверхностей* (x,u), *въ коихъ точка* x *лежитъ на нѣкоторой произвольно заданной плоскости, а плоскость* u *проходитъ черезъ нѣкоторую произвольно заданную точку, есть* $\Sigma m m' n'' n'''$ (суммы распространяются на всѣ 6 комбинацій чиселъ $m^{(i)} n^{(i)}$).

Пара поверхностей можетъ быть опредѣлена не только пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ. Допустимъ прежде всего, что она задана какъ пересѣченіе двухъ коинциденцій (μ,ϱ,ν) и (μ',ϱ',ν').

Тогда

$$\xi_4 = (\mu . p^2 + \varrho . pe + \nu . e^2) \ (\mu' . p^2 + \varrho' . pe + \nu' . e^2)$$

Отсюда получаются равенства

$$\xi_4 . p^2 = \nu\varrho' + \varrho\nu'; \ \xi_4 . pe = \mu\nu' + \nu\mu' + \varrho\varrho'; \ \xi_4 . e^2 = \mu\varrho' + \varrho\mu', \quad (10)$$

геометрическое значеніе коихъ ясно изъ вышеприведенной теоремы.

Подобнымъ образомъ, если пара поверхностей опредѣляется, какъ пересѣченіе бикоинциденціи $(\mu_1, \varkappa_1, \lambda_1, \nu_1)$ съ коннексомъ (m,n), то

$$\xi_4 = (\mu_1 p^3 + \varkappa_1 p^2 e + \lambda_1 p e^2 + \nu_1 e^3) \ (m . p + n . e),$$

и слѣдовательно

$$\xi_4 . p^2 = m\nu_1 + n\lambda_1 \ ; \ \xi_4 . pe = m\lambda_1 + n\varkappa_1 \ ; \ \xi_4 . e^2 = m\varkappa_1 + n\mu_1 .$$

На другихъ возможныхъ комбинаціяхъ при опредѣленіи пары поверхностей не останавливаюсь, ибо всѣ онѣ заключаются, какъ частные случаи въ приведенныхъ здѣсь.

Вообще можно представить себѣ, что пара поверхностей опредѣлена числами μ_2—порядокъ ея, ν_2—ея классъ и π_2—число ея элементовъ (x,u), коихъ точка x лежитъ въ данной плоскости, а плоскость u проходитъ черезъ данную точку. Тогда

$$\xi_4 = \mu_2 . p^3 e + \pi_2 . p^2 e^2 + \nu_2 . p e^3. \quad (11)$$

Пять коннексовъ (m,n), (m',n'), (m'',n''), (m''',n'''), (m^{IV},n^{IV}), имѣютъ ∞^1 общихъ элементовъ, образующихъ пару: *кривая двоякой кривизны*, *развертывающаяся поверхность*; точка первой въ соединеніи съ соотвѣтствующей ей однозначно плоскостью, касательною ко второй, даютъ элементъ, общій пяти коннексамъ. Имѣемъ

$$\xi_5 = \prod_{i=0}^{i=4} (m^{(i)} . p + n^{(i)} . e) \quad (12)$$

$$\xi_5 . p = \Sigma m m' n'' n''' n^{IV} \ ; \qquad \xi_5 . e = \Sigma n n' m'' m''' m^{IV}.$$

Суммы здѣсь берутся такъ: составляются всевозможныя произведенія изъ пяти чиселъ $m, m', m'', m''', m^{\text{IV}}$ по два для первой и $n, n', n'', n''', n^{\text{IV}}$ для второй, и каждое добавляется тѣми числами $nn'n''n'''n^{\text{IV}}$ (соотвѣтсв. $m, m', m'', m''', m^{\text{IV}}$), коихъ значковъ нѣтъ въ первомъ произведеніи.—Такимъ образомъ *пять коннексовъ* (m,n), $(m',n')\ldots(m^{\text{IV}},n^{\text{IV}})$ *опредѣляетъ пару: кривая двоякой кривизны порядка* $\Sigma mm'n''n'''n^{\text{IV}}$ *и развертывающаяся поверхность класса* $\Sigma nn'm''m'''m^{\text{IV}}$.

Пару: (кривая двоякой кривизны, развертывающаяся поверхность)—можетъ давать, кромѣ того, коинциденція (μ,ϱ,ν) въ пересѣченіи съ бикоинциденціею $(\mu_1,\varkappa_1,\lambda_1,\nu_1)$ Тогда

$$\xi_5=(\mu p^2+\varrho.\,pe+\nu.\,e^2)\ \ (\mu_1.\,p^3+\varkappa_1.\,p^2e+\lambda_1.\,pe^2+\nu_1.\,e^3)$$

откуда

$$\xi_5.\,p=\mu\nu_1+\varrho\lambda_1+\nu\varkappa_1\ ;\qquad \xi_5.\,e=\mu\lambda_1+\varrho\varkappa_1+\nu\mu_1\ ,\text{—}$$

порядокъ и классъ полученной пары.

Точно также можно найти эти числа для пары, опредѣленной какъ пересѣченіе пары поверхностей (μ_2, π_2, ν_2) съ съ коннексомъ (m,n). Дѣйствительно, тогда

$$\xi_5=(\mu_2.\,p^3e+\pi_2.\,p^2e^2+\nu_2pe^3)\ \ (m.\,p+n.\,e)$$

и слѣдовательно:

$$\xi_5.\,p=\pi_2\,n+\nu_2m\ ;\qquad \xi_5.\,e=\mu_2n+\pi_2m.$$

Остальныхъ комбинацій не разсматриваемъ.—И здѣсь, какъ было показано для коинциденціи и какъ подразумѣвалось для дальнѣйшихъ образованій, возможно, что пару (кривая двоякой кривизны, развертывающаяся поверхность) нельзя получить, какъ полное пересѣченіе многообразій большаго числа измѣреній. Но и тогда можемъ говорить о порядкѣ μ_3 и классѣ ν_3 этой пары въ томъ же смыслѣ, что и выше:

$$\xi_5=\mu_3.\,p^2e^3+\nu_3.\,p^3e^2 \tag{13}$$

Шесть коннексовъ $(m,n), \ldots, (m^{v}, n^{v})$ имѣютъ только конечное число общихъ элементовъ, которые получимъ перемножая условія, соотвѣтствующія отдѣльнымъ коннексамъ.

Такимъ образомъ:

$$\xi_6 = \prod_{i=0}^{i=5} (m^{(i)}.\, p + n^{(i)}.\, e) = \Sigma\, mm'm''\, n'''n^{IV}n^{v}\,, \tag{14}$$

гдѣ знакъ суммы распространяется на всевозможныя сочетанія—числомъ 20,—которыя можно составить изъ шести чиселъ $m, m', \ldots m^{v}$ по три,—причемъ остальные множители $n^{(i)}$ войдутъ отъ тѣхъ коннексовъ $(m^{(i)}, n^{(i)})$, отъ которыхъ не вошли $m^{(i)}$.

Для полноты опредѣлимъ число элементовъ, общихъ двумъ бикоинциденціямъ; коинциденціи и парѣ поверхностей, наконецъ тремъ коинциденціямъ.

Первое изъ этихъ трехъ чиселъ получимъ изъ

$$\begin{aligned}\xi_6 &= (\mu_1 p^3 + \varkappa_1 p^2 e + \lambda_1 p e^2 + \nu_1 e^3)\,(\mu'_1 p^3 + \varkappa'_1 p^2 e + \lambda'_1 p e^2 + \nu'_1 e^3)\\ &= \mu_1 \nu'_1 + \varkappa_1 \lambda'_1 + \lambda_1 \varkappa'_1 + \nu_1 \mu'_1\end{aligned} \tag{15}$$

Второе—изъ формулы

$$\begin{aligned}\xi_6 &= (\mu.\, p^2 + \varrho.\, pe + \nu.\, e^2)\,(\mu_2 .\, p^3 e + \pi_2 .\, p^2 e^2 + \nu_2 .\, p e^3)\\ &= \mu\nu_2 + \varrho\pi_2 + \mu_2 \nu.\end{aligned} \tag{16}$$

Наконецъ третье—

$$\begin{aligned}\xi_6 &= \prod_{i=0}^{i=2} (\mu^{(i)}.\, p^2 + \varrho^{(i)}.\, pe + \nu.^{(i)}\, e^2) = \mu\,(\varrho'\nu'' + \varrho''\nu') +\\ &+ \mu'\,(\varrho\nu'' + \varrho''\nu) + \mu''\,(\varrho\nu' + \nu\varrho') + \varrho\varrho'\varrho''.\end{aligned} \tag{17}$$

Можно дать еще число элементовъ общихъ парѣ (кривая двоякой кривизны, развертывающаяся поверхность): (μ_3, ν_3) и коннексу (m,n); оно получится изъ уравненія

$$\xi_6 = (m.\, p + n.\, e)\,(\mu_3 .\, p^2 e^3 + \nu_3 p^3 e^2) = m\mu_3 + n\nu_3 \tag{17a}$$

На этомъ мы остановимся въ общемъ обзорѣ конфигурацій, съ которыми будемъ имѣть дѣло при изученіи образованій, имѣющихъ своимъ элементомъ сочетаніе (точка, плоскость), и остановимся прежде всего на коннексѣ.

§ 2. Лѣвая часть уравненія коннекса (m,n), какъ бикватернарная форма, содержитъ коэффиціентовъ всего

$$N = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\ 2.\ 3.} \times \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.},$$

и слѣдовательно для полнаго опредѣленія его нужно имѣть $N-1$ условій,—напр., знать $N-1$ его элементовъ. Но не всегда такое число извѣстныхъ элементовъ оказывается достаточно для полнаго опредѣленія коннекса. И здѣсь мы имѣемъ явленіе, аналогичное пародоксу Крамера въ теоріи плоскихъ кривыхъ. Представимъ себѣ дѣйствительно шесть какихъ-нибудь—но данныхъ, извѣстныхъ коннексовъ (m,n), различныхъ между собою. Эти шесть коннексовъ имѣютъ по предыдущему $20\, m^3n^3$ общихъ элементовъ. Пусть уравненія этихъ коннексовъ суть $f_1 = o, \ldots f_6 = o$. Тогда уравненіе

$$\sum_{i=1}^{i=6} \lambda_i f_i = 0 \tag{18}$$

представитъ всѣ ∞^5 коннексовъ, проходящихъ черезъ $20\, m^3n^3$ элементовъ, общихъ упомянутымъ шести. Чтобы опредѣлить какой-нибудь одинъ, нужно дать какіе-нибудь пять его элементовъ, не принадлежащихъ къ числу $20\, m^3n^3$ основныхъ. Представимъ себѣ теперь, что намъ даны какіе-либо $N-6$ элементовъ. Въ уравненіи коннекса, проходящаго черезъ всѣ эти $N-6$ элементовъ и удовлетворяющаго слѣдовательно $(N-6)$ условіямъ, останется еще пять неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, и его уравненіе приведется слѣдовательно къ виду (18). Но шесть коннексовъ $f_i = o$, съ помощью которыхъ линейно выразился разсматриваемый коннексъ, пересѣкаются, кромѣ $(N-6)$ еще въ $20\, m^3n^3 - N + 6$—и элементахъ. Если слѣдовательно необходимые для окончательнаго опредѣленія коннекса (m,n) пять элементовъ мы возьмемъ изъ числа этихъ $20\, m^3n^3 - N + 6$, то поставленнымъ условіямъ удовлетворитъ не одинъ, а ∞^5 коннексовъ (m,n) [1]).

---

[1]) Съ этимъ вопросомъ имѣютъ связь изслѣдованія Розанеса (Ueb. linear-abhängige Punktsysteme Crelle's Journ. B. 88, его же: Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft. Crelle's J. B. 90 s. 313—321 и пр. *Связною* системою Розанесъ называетъ такую систему p элементовъ, если изъ $p-1$ слѣдуетъ необходимо p—ый элементъ. Относительно бикватернарныхъ формъ онъ ограничивается билинейными формами. См. подробнѣе объ этомъ ниже.

§ 3. Ближайшее изученіе коннекса предполагаетъ установленіе и истолкованіе его инваріантовъ и коваріантовъ. При этомъ слѣдуя общему правилу—сводить болѣе сложные вопросы на вопросы болѣе простые, можемъ изученіе инваріантныхъ образованій бикватернарныхъ формъ свести на изученіе таковыхъ же образованій битернарныхъ формъ, установить иными словами принципъ перенесенія (Uebertragung, translation) для теоріи кватернарныхъ формъ. Дѣйствительно, соотношеніе устанавливаемое коннексомъ между точками и плоскостями пространства можно представить себѣ съ иной точки зрѣнія. Какая-нибудь точка x пространства можетъ быть опредѣлена, кромѣ ея координатъ $x_1 x_2 x_3 x_4$, также пересѣченіемъ трехъ плоскостей — напр., $v,\omega,\bar{\omega}$; будемъ обозначать ее точкою $(v,\omega,\bar{\omega})$; точно также плоскость u, проходящую черезъ три точки ξ,η,ζ, будемъ означать (ξ,η,ζ). Совокупность этихъ точки x и плоскости u образуетъ элементъ (x,u), не принадлежащій вообще говоря коннексу (1), но все же черезъ посредство этого коннекса плоскости связки $(v,\omega,\bar{\omega})$ соподчиняются точкамъ плоскости (ξ,η,ζ), и это соподчиненіе состоитъ въ томъ, что каждой плоскости связки соотвѣтствуютъ точки плоскости (ξ,ζ,η), лежащія на плоской кривой C_m m-го порядка, и каждой точкѣ плоскости (ξ,η,ζ), соотвѣтствуютъ въ связкѣ $(v,\omega,\bar{\omega})$ плоскости огибающія коническую поверхность K_n n-го класса. Если точку плоскости (ξ,η,ζ) обозначимъ $\varkappa_1\xi+\varkappa_2\eta+\varkappa_3\zeta$, а плоскость связки $(v,\omega,\bar{\omega})$ обозначимъ $\lambda_1 v+\lambda_2\omega+\lambda_3\bar{\omega}$, то найдемъ, что соподчиненіе, устанавливаемое коннексомъ (1), выражается аналитически уравненіемъ:

$$(\varkappa_1 a_\xi+\varkappa_2 a_\eta+\varkappa_3 a_\zeta)^m\,(\lambda_1 v_\alpha+\lambda_2\omega_\alpha+\lambda_3\bar{\omega}_\alpha)^n=0$$

Означивъ

$$a_\xi=A_1,\ a_\eta=A_2,\ a_\zeta=A_3,\ v_\alpha=\mathfrak{A}_1,\ \omega_\alpha=\mathfrak{A}_2,\ \bar{\omega}_\alpha=\mathfrak{A}_3,$$

получаемъ такимъ образомъ битернарную форму $\varphi=A_\varkappa{}^m\mathfrak{A}_\lambda{}^n$,— и вышеуказанное соотвѣтствіе устанавливается уравненіемъ

$$\varphi\equiv A_\varkappa{}^m\mathfrak{A}_\lambda{}^n=o.$$

Если возьмемъ элементъ (x,u) даннаго коннекса (1),— гдѣ точка x принадлежитъ плоскости (ξ,η,ζ), а плоскость u—

связкѣ $(v,\omega,\bar{\omega})$, и поставимъ условіе, чтобы коническая поверхность K_n, соотвѣтствующая x и содержащая въ числѣ касательныхъ плоскость u, обладала нѣкоторымъ инваріантнымъ свойствомъ, и точно также соотвѣтствующая u плоская кривая C_m обладала коррелятивнымъ или какимъ-либо другимъ свойствомъ, то придемъ къ нѣкоторому инваріантному условію для плоскости (ξ,η,ζ) и точки $(v,\omega,\bar{\omega})$, и элементъ, ими образуемый, будетъ принадлежать коваріантному относительно (1) коннексу, уравненіе котораго получится, какъ инваріантъ формы φ, и все сводится такимъ образомъ на изученіи инваріантовъ битернарной формы. Такой методъ способенъ однако оказать ощутительныя услуги въ томъ только случаѣ, если геометрическая теорія тернарныхъ коннексовъ развита въ достаточной степени, чего далеко нельзя сказать въ настоящее время. Поэтому считая необходимымъ упомянуть объ этомъ важномъ теоретически принципѣ, мы не будемъ однако пользоваться имъ въ дальнѣйшемъ.

§ 4. **Особенные элементы.** Однимъ изъ наиболѣе важныхъ вопросовъ въ теоріи алгебраическихъ кривыхъ и поверхностей является вопросъ объ особенныхъ точкахъ ихъ,—если онѣ разсматриваются, какъ точечныя образованія,—и особенныхъ касательныхъ,—если мы разсматриваемъ ихъ, какъ огибающія прямыхъ и плоскостей. Приступая къ изученію коннексовъ, мы прежде всего встрѣчаемся поэтому съ вопросомъ, что̀ должно въ теоріи коннексовъ, нами изучаемыхъ, соотвѣтствовать особеннымъ точкамъ или плоскостямъ поверхностей. Соотвѣтственная теорія находится въ зачаточномъ состояніи и въ ученіи о сравнительно болѣе простыхъ конфигураціяхъ—коннексахъ на плоскости. Поэтому мы ограничимся здѣсь только самымъ необходимымъ.

Условимся прежде всего въ томъ, что̀ мы называемъ особеннымъ элементомъ коннекса. Возьмемъ какую нибудь плоскость u пространства; соотвѣтствующая ей въ коннексѣ поверхность F_m пусть имѣетъ нѣкоторую точку x—особенную, напр., двойную; тогда и въ коннексѣ элементъ (x,u) долженъ быть считаемъ за двойной; дѣйствительно, такъ какъ x является результатомъ сліянія двухъ безконечно-близкихъ точекъ x' и x'' поверхности, то и элементъ (x,u) можно разсматривать какъ совпаденіе двухъ точечно-безконечно-близкихъ элементовъ (x',u) и $(x,''u)$.

Точно также особеннымъ явится тотъ элементъ (x,u), въ которомъ u есть двойная или вообще особенная касательная къ поверхности Φ_n, соотвѣтствующей въ коннексѣ точкѣ x. Такимъ образомъ *мы называемъ особенными тѣ элементы коннекса, въ которыхъ или точка x будетъ особенною точкою поверхности Φ_n соотвѣтствующей плоскости u, или же плоскость u есть особенная касательная поверхности F_m, которая въ коннексѣ соотвѣтствуетъ точкѣ x, или наконецъ то и другое одновременно* [1]).

Въ то время какъ въ кривыхъ — плоскихъ или двоякой кривизны—возможны только отдѣльныя особенныя точки, или особенныя касательныя, въ поверхностяхъ—системахъ двухъ измѣреній—возможны особенныя кривыя или особенныя касательныя развертывающіяся поверхности. Вообразимъ себѣ дѣйствительно рядъ параллельныхъ плоскостей, вырѣзающихъ изъ поверхности рядъ плоскихъ сѣченій; если каждое изъ этихъ плоскихъ сѣченій имѣетъ двойную точку—что очевидно можно себѣ представить,—то непрерывный рядъ этихъ двойныхъ точекъ образуетъ нѣкоторую кривую - систему ∞^1 точекъ — которая будетъ двойною кривою поверхности. Подобнымъ образомъ представимъ себѣ, что поверхность F_m, соотвѣтствующая плоскости u въ коннексѣ $f(x,u)=o$, имѣетъ особенную кривую. Мы можемъ представить себѣ, что эта кривая вырѣзается нѣкоторою другою поверхностью $F_{m'}$, уравненіе которой можетъ зависѣть отъ координатъ плоскости u; если теперь это имѣетъ мѣсто для всѣхъ плоскостей пространства, то уравненіе $\varphi\,(x,u)=o$, которое для каждой данной плоскости опредѣляетъ соотвѣтствующую этой плоскости поверхность, вырѣзающую изъ F_m двойную кривую, вмѣстѣ съ уравненіемъ $f(x,u)=o$ даннаго коннекса опредѣлить его двойную коинциденцію. Возможны разумѣется и особенныя бикоинциденціи, пары поверхностей и т. д., при чемъ особенные элементы, ими опредѣляемые, обладаютъ болѣе спеціальными свойствами. Напр., если особенныя точки всѣхъ двойныхъ кривыхъ, соотвѣтствующихъ различнымъ плос-

---

[1]) Линдеманнъ въ Clebsch's Vorlesungen üb. Geometrie B. I T. 2. даетъ иное опредѣленіе особеннаго элемента; я показываю далѣе, что даваемое мною равносильно съ опредѣленіемъ Линдеманна, которое предполагаетъ предварительное введеніе понятія о нѣкоторомъ коваріантномъ коннексѣ, именно сопряженномъ, и потому менѣе просто.

костямъ пространства, выдѣляются изъ двойной коинциденціи $f=o$, $\varphi=o$ помощью коннекса $\psi=o$, то эта бикоинциденція будетъ состоять, очевидно, изъ элементовъ высшаго порядка кратности, чѣмъ элементы, соотвѣтствующіе простымъ точкамъ двойной кривой.

Аналитически поэтому особенные элементы опредѣлятся или уравненіями

$$\frac{df}{dx_1} \equiv m a_x{}^{m-1} u^n{}_\alpha a_1 = o\,,\ \frac{df}{dx_2} = o\,,\ \frac{df}{dx_3} = o\,,\ \frac{df}{dx_4} = o\,, \tag{19}$$

если это будетъ точечно-особенный элементъ, или уравненіями

$$\frac{df}{du_1} \equiv n a_x{}^m u_\alpha{}^{n-1}\, \alpha_1 = o\,,\ \frac{df}{du_2} = o\,,\ \frac{df}{du_3} = o\,,\ \frac{df}{du_4} = o\,, \tag{20}$$

если элементъ будетъ тангенціально особеннный. Первыя четыре уравненія опредѣляютъ пару поверхностей порядка $4\,(m-1)n^3$, класса $4\,(m-1)^3 n$ и ранга $6\,(m-1)^2 n^2$. Для пары поверхностей, опредѣленной вторыми четырьмя уравненіями, соотвѣтственныя числа суть $4\,m(n-1)^3$, $4\,m^3(n-1)$, $6\,m^2(n-1)^2$. При извѣстныхъ условіяхъ, однако, эти системы уравненій могутъ опредѣлять не пару поверхностей, а бикоинциденцію или даже коинциденцію. Остановимся, напр., на системѣ первыхъ четырехъ уравненій $\frac{df}{dx_i} = o$ $(i = 1,2,3,4)$. Если функціональный опредѣлитель этой системы относительно перемѣнныхъ x, т. е.

$$24\ \Sigma \pm \frac{d^2f}{dx_1{}^2} \cdot \frac{d^2f}{dx_2{}^2} \cdot \frac{d^2f}{dx_3{}^2} \cdot \frac{d^2f}{dx_4{}^2} \equiv$$

$$\equiv a_x{}^{m-2} b_x{}^{m-2} c_x{}^{m-2} d_x{}^{m-2}\ (abcd)\ {}^2 u_\alpha{}^n u_\beta{}^n u_\gamma{}^n u_\delta{}^n$$

обращается тожественно въ нуль, каковы бы ни были значенія $x_1 x_2 x_3 x_4$, то четыре эти уравненіи не будутъ различны между собою относительно x, и для всякаго даннаго значенія координатъ $u_1 u_2 u_3 u_4$ дадутъ конечное число системъ значеній перемѣнныхъ x; въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть уже не пару поверхностей, а бикоинциденцію точечно-двойныхъ элементовъ. Если уничтожаются тожественно и всѣ первые миноры этого опредѣлителя при всякихъ значеніяхъ x и u, то четыре уравненія $\frac{df}{dx_i} = o$ приводятся только къ двумъ между собою независимымъ, и мы имѣемъ двойную коинциденцію. То же самое приложимо разумѣется и ко второй системѣ уравненій,—тожественное уничтоженіе коваріанта

$$a_x{}^m b_x{}^m c_x{}^m d_x{}^m u_\alpha{}^{n-2} u_\beta{}^{n-2} u_\gamma{}^{n-2} u_\delta{}^{n-2} (\alpha\beta\gamma\delta)^2$$

показываетъ, что коннексъ обладаетъ бикоинциденціею тангенціально-особенныхъ элементовъ. Такимъ образомъ только при выполненіи полученныхъ условій коннексъ (m,n) будетъ обладать бикоинциденціею особенныхъ элементовъ, а не парою поверхностей, какъ въ общемъ случаѣ. Поэтому если разсматривать только коннексъ (m,n) самъ по себѣ, то уже наличность бикоинциденціи особенныхъ элелентовъ вмѣсто пары поверхностей не будетъ обыкновенною особенностью коннекса, т. е. такою его особенностью, которая является и въ томъ случаѣ, когда разсматриваемъ коннексъ самый общій въ своемъ родѣ. Однако, аналогично тому, какъ въ теоріи поверхностей двойныя кривыя входятъ въ число обыкновенныхъ особенностей вслѣдствіе того обстоятельства, что если поверхность разсматриваемая, какъ мѣсто точекъ, двойною кривою не обладаетъ, то какъ огибающая плоскостей, она должна имѣть двойную касательную — развертывающуюся поверхность; такъ и здѣсь отсутствіе особенностей въ самомъ коннексѣ ведетъ собою необходимо наличность ихъ въ нѣкоторомъ коваріантномъ коннексѣ, который по отношенію къ данному коннексу играетъ роль аналогичную той, какую поверхность или кривая, разсматриваемая въ тангенціальныхъ координатахъ, играетъ по отношенію къ себѣ самой, разсматриваемой какъ мѣсто точекъ. Клебшъ, а за нимъ Линдеманнъ, Стефаносъ, Краузе, Лаццери, Баттальини и др. занимавшіеся теоріей коннексовъ придаютъ этому коннексу названіе *сопряженнаго* данному. Но такъ какъ въ теоріи инваріантовъ со времени упомянутыхъ выше изслѣдованій Розанеса это названіе утвердилось за такими двумя кривыми или коннексами, нѣкоторый совмѣстный инваріантъ которыхъ уничтожается, то Study (Methoden d. Theorie d. ternären Formen S. 53) предлагаетъ называть „Conjugirter connex“ Клебша „Umhüllungs-connex“.

Но такъ какъ эта „сопряженность“ (Conjugirt-sein) двухъ коннексовъ есть только частный случай „аполярности“ (терминъ, введенный Рейе), то нѣтъ надобности вводить новый терминъ, а въ особенности измѣнять значеніе такого установившагося термина, какъ сопряженный коннексъ; поэтому я слѣдую здѣсь терминологіи Клебша.

§ 5. **Сопряженный коннексъ.** Если возьмемъ какой-нибудь элементъ (x,u) коннекса (m,n), то поверхность Φ_n — огибающая плоскостей u, соотвѣтствующихъ въ коннексѣ точкѣ x, — касается плоскости u въ нѣкоторой точкѣ, которую означимъ y; поверхность F_m, соотвѣтствующая плоскости u въ коннексѣ, имѣетъ въ точкѣ x, — которая лежитъ на ней, потому что по условію (x,u) есть элементъ коннекса, — касательною нѣкоторую плоскость v. Координаты этой точки y и этой плоскости v опредѣлятся очевидно изъ уравненій:

$$\varrho . y_i = \frac{df}{du_i} \; ; \quad \sigma . v_k = \frac{df}{dx_k} \quad (i,k = 1,2,3,4) \tag{21}$$

если $f(x,u) = o$ уравненіе разсматриваемаго коннекса; элементу (x,u) коннекса $f = o$ соотвѣтствуетъ по этимъ уравненіямъ элементъ (y,v), и совокупности всѣхъ ∞^5 элементовъ (x,u) — совокупность ∞^5 элементовъ (y,v) образующихъ связанный однозначно съ даннымъ коннексъ $F(y,v) = o$, которому придаемъ названіе *сопряженнаго* и уравненіе котораго получимъ, исключая изъ (21) ϱ, σ, x и u съ помощью уравненія $f = o$. Соотношеніе между основнымъ коннексомъ и ему сопряженнымъ отличается полною взаимностью. Дѣйствительно, можно доказать, что перемѣняя роли ихъ и взявъ за основной коннексъ тотъ, который являлся ранѣе сопряженнымъ, получимъ, какъ ему сопряженный, первоначальный основной коннексъ, иными словами можно доказать теорему: *Коннексъ, сопряженный сопряженнаго данному коннекса, есть самъ данный коннексъ.* Въ виду важности этой теоремы мы дадимъ ей два доказательства, первое изъ которыхъ представляетъ распространеніе на случай кватернарныхъ формъ доказательства даннаго Линдеманномъ [1]). Оно основывается на томъ, что въ силу происхожденія коннекса $F(y, v) = o$ мы должны имѣть при замѣнѣ y и v черезъ

---

[1]) Leçons de Géom. T. III p. 362. Цитирую по французскому переводу Бенуа, исправленному авторомъ.

$\frac{df}{du}$ и $\frac{df}{dx}$ слѣдующее: $F\left(\frac{df}{du}, \frac{df}{dx}\right) \equiv M.f(x,u)$, гдѣ M— цѣлая однородная функція отъ x и u. Для краткости означимъ $\frac{df}{dx_i} = q_i$, $\frac{df}{du_i} = p_i$,— эти величины отличаются соотвѣтственно отъ v_i и y_i только на множители, независящіе отъ указателя i. Сопряженный коннексу $f = o$ коннексъ F опредѣляется уравненіями:

$$f(x,u) = o, \text{ и}$$

$$\varrho' z_i = \frac{dF}{dq_i} \equiv \frac{d(M.f)}{dq_i}, \quad \sigma. w_k = \frac{dF}{dp_k} \equiv \frac{d(M.f)}{dp_k}$$
$$(i,k = 1,2,3,4).$$

Для образованія производныхъ отъ Mf по p и q достаточно предположить, что вездѣ введены какъ перемѣнныя p и q вмѣсто x и u; тогда имѣемъ:

$$\frac{d(Mf)}{dq_i} \equiv f\frac{dM}{dq_i} + M\frac{df}{dq_i}$$

или въ силу $f = o$:

$$\frac{d(Mf)}{dq_i} = M\frac{df}{dq_i}, \quad \text{т. е. } \varrho' z_i = M\frac{df}{dq_i}. \tag{22}$$

Точно также найдемъ: $\sigma'. w_i = M\frac{df}{dp_i}$. (22')

Далѣе изъ уравненій

$$m.f = \sum_{i=1}^{i=4} q_i x_i, \qquad n f = \sum_{i=1}^{i=4} p_i u_i$$

слѣдуетъ

$$m.df = \Sigma\, q_i\, dx_i + \Sigma\, x_i\, dq_i; \qquad n\, df = \Sigma\, p_i\, du_i + \Sigma\, u_i\, dp_i$$

и такъ какъ въ силу опредѣленія p и q

$$df = \Sigma\, q_i\, dx_i + \Sigma\, p_i\, du_i,$$

то

$$(m+n-1)\, df = \Sigma\, x_i\, dq_i + \Sigma\, u_i\, dp_i$$

т. е. $x_i = (m+n-1)\dfrac{df}{dq_i}$ и $u_i = (m+n-1)\dfrac{df}{dp_i}$.

Сравнивая съ уравненіями (22) и (22′), видимъ, что z_i и w_i соотвѣтственно пропорціональны x_i, u_i, т. е. мы вернулись къ элементу первоначальнаго коннекса, что и доказываетъ желаемое.

Можно однако при доказательствѣ обойтись и безъ тожества

$$F\left(\frac{df}{du}, \frac{df}{dx}\right) \equiv M.\ f\ ,—$$

которое безъ доказательства представляется не вполнѣ очевиднымъ. Дѣйствительно, уравненіе $F(y,v)=o$ коннекса, сопряженнаго коннексу $f(x,u)=o$, можно представлять себѣ, какъ результатъ замѣны въ $f(x,u)=o$ величинъ x_i и u_i ихъ значеніями изъ уравненій

$$\varrho.\ y_i = \frac{df}{du_i}\ , \quad \sigma.\ v_i = \frac{df}{dx_i}\ .$$

Поэтому, коннексъ сопряженный коннексу $F(y,v)=o$ можно опредѣлять уравненіями $f(x,u)=o$ (гдѣ сдѣлана упомянутая замѣна) и

$$\varrho'\ z_i = \frac{df}{dv_i}\ , \quad \sigma'.\ w_i = \frac{df}{dy_i}\ .$$

Послѣднія уравненія напишутся иначе такъ:

$$\varrho'.z_i = \sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{dv_i} + \frac{df}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dv_i}\right) \quad (\alpha)$$

и

$$\sigma' w_i = \sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{dy_i} + \frac{df}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dy_i}\right) \qquad (\beta)$$

Но дифференцируя по v уравненія, устанавливающія зависимость между x,u и y,v,— при чемъ мы на минуту оставляемъ въ сторонѣ уравненіе $f(x,u)=o$, такъ что можемъ считать y и v независимыми между собою, получимъ

$$o = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d^2 f}{du_j dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dv_i} + \frac{d^2 f}{du_j du_k} \cdot \frac{du_k}{dv_i} \right)$$

$$\sigma \frac{d(v_j)}{dv_i} = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d^2 f}{dx_j dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dv_i} + \frac{d^2 f}{dx_j du_k} \cdot \frac{du_k}{dv_i} \right) \quad (i,j = 1,2,3,4)$$

Умножая первыя четыре уравненія соотвѣтственно на $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$—при постоянномъ i и складывая, получимъ

$$o = \sum_{k=1}^{k=4} \left(n \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dv_i} \cdot + (n-1) \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dv_i} \right) \qquad (\gamma)$$

Точно также умножая уравненія второй строки на x_j при постоянномъ i и складывая, получимъ:

$$\sigma.\ x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \left((m-1) \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dv_i} \cdot + m \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dv_i} \right) \qquad (\sigma)$$

Умножая (γ) на λ, (σ) на μ и складывая съ (α), будемъ имѣть:

$$\varrho'.\ z_i + \mu\ \sigma\ x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \left\{ \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dv_i} \left(1 + \lambda\, n + \mu\, (m-1) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dv_i} \left(1 + \lambda\, (n-1) + \mu\, m \right) \right\}$$

Опредѣляемъ λ и μ изъ уравненій: $1 + \lambda\, n + \mu\, (m-1) = o$,

$$1 + \lambda\, (n-1) + \mu\, m = o$$

т. е. положимъ $\quad \lambda = \mu = -\dfrac{1}{m+n-1}$;

будемъ имѣть:

$$(m+n-1)\ \varrho'\ z_i = \sigma\, x_i\,.$$

Точно также дифференцируя тѣ же зависимости, что и выше, по y_j, будемъ имѣть

$$\varrho \frac{d(y_j)}{dy_i} = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d^2 f}{du_j dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dy_i} + \frac{d^2 f}{du_j du_k} \cdot \frac{du_k}{dy_i} \right)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d^2 f}{dx_j dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dy_i} + \frac{d^2 f}{dx_j du_k} \cdot \frac{du_k}{dy_i} \right) \quad (i, j = 1,2,3,4)$$

Такъ же, какъ и выше, мы получимъ, умножая первыя четыре уравненія на u_j и складывая:

$$\varrho . u_i = \sum_{k=1}^{k=4} \left(n \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dy_i} + (n-1) \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dy_i} \right)$$

$$0 = \sum_{k=1}^{k=4} \left((m-1) \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dy_i} + m \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dy_i} \right)$$

Первое изъ этихъ уравненій множимъ на λ, второе на μ и складываемъ съ (β). Это приводитъ насъ къ уравненію

$$\sigma' . w_i + \lambda \varrho u_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{dy_i} \cdot \left(1 + \lambda n + \mu (m-1) \right) +$$

$$+ \sum \frac{df}{du_k} \cdot \frac{du_k}{dy_i} \left(1 + \lambda (n-1) + \mu m \right)$$

Если λ и μ дадимъ тѣ же значенія, что и выше, то получимъ:

$$(m + n - 1) \sigma' . w_i = \varrho u_i .$$

Такимъ образомъ снова доказано, что элементъ (z,w) сопряженнаго сопряженному даннаго коннекса, который соотвѣтствуетъ элементу (y,v) и слѣдовательно элементу (x,u) даннаго, совпадаетъ съ этимъ послѣднимъ, ч. и т. д. Замѣтимъ, что второй части доказательства можно было бы не приводить, ибо она совершенно подобна первой. Совершенно также доказывается эта теорема и при большемъ числѣ перемѣнны.

Порядокъ m' и классъ n' сопряженнаго коннекса опредѣлятся первый, какъ число соотвѣтствующихъ данной плоскости v точекъ y, лежащихъ на данной прямой, второй какъ число плоскостей v, соотвѣтствующихъ данной точкѣ y и проходящихъ черезъ данную прямую. Достаточно опредѣлить которое-нибудь одно изъ двухъ этихъ чиселъ,—другое можетъ быть тогда написано прямо по аналогіи. Остановимся на первомъ,—его опредѣленіе приводится къ нахожденію числа рѣшеній системы уравненій

$$f(x,u)=o\ ,\quad \varrho.\, v_i=\frac{df}{dx_i}\ ,\quad \sigma.\, y_i=\frac{df}{du_i}\ ,\ (i=1,2,3,4)$$

$$\sum_{k=1}^{k=4}\gamma_k\, y_k=o\ ,\ \sum_{k=1}^{k=4}\delta_k\, y_k=o$$

Уравненіе $f(x,u)=o$ можетъ быть замѣнено черезъ $v_x=o$. Если, кромѣ того, означимъ ξ,η,ζ три какія-нибудь данныя точки данной плоскости v, то всякая другая точка x той же плоскости изобразится

$$x_i=\varkappa.\,\xi_i+\lambda\,\eta_i+\mu\,\zeta_i$$

Вмѣсто четырехъ уравненій $\varrho\, v_i=\frac{df}{dx_i}$ мы имѣемъ три независящихъ отъ ϱ:

$$\sum_{i=1}^{i=4}\xi_i\frac{df}{dx_i}=o,\ \sum_{i=1}^{i=4}\eta_i\frac{df}{dx_i}=o,\ \sum_{i=i}^{i=4}\zeta_i\frac{df}{dx_i}=o, \qquad (\alpha')$$

гдѣ x замѣнены ихъ выраженіями черезъ $\varkappa,\lambda,\mu$. Наконецъ условія $\sigma.\, y_i=\frac{df}{du_i}$ вмѣстѣ съ $\Sigma\,\gamma_i\, y_i=o$, $\Sigma\,\delta_i\, y_i=o$ замѣняются двумя уравненіями, не содержащими σ:

$$\sum_{i=1}^{i=4}\gamma_i\frac{df}{du_i}=o\ ,\ \sum_{i=1}^{i=4}\delta_i\frac{df}{du_i}=o \qquad (\beta')$$

Пять уравненій (α') (β'), однородныя и степеней $m-1$, $m-1$, $m-1$, m, m относительно $\varkappa,\lambda,\mu$, и степеней n, n, n, $n-1$, $n-1$ соотв. относительно $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$, допускаютъ конечное число общихъ рѣшеній. Каждому рѣшенію, т. е. каждой системѣ значеній $\varkappa,\lambda,\mu$, $u_1u_2u_3u_4$, удовлетворяющихъ (α') (β'), соотвѣтствуетъ система значеній y_i и v_i, опредѣляющая элементъ (y,v). Поэтому число рѣшеній этихъ уравненій и доставитъ намъ порядокъ сопряженнаго коннекса. Опредѣлить его можно такъ. Систему значеній $\varkappa,\lambda,\mu$; $u_1u_2u_3u_4$ можно разсматривать, какъ систему координатъ, опредѣляющихъ нѣкоторое образованіе, состоящее изъ точки двухмѣрнаго пространства и плоскости трехмѣрнаго. Число подобныхъ сочетаній, общихъ пяти конфигураціямъ, составленнымъ изъ такихъ сочетаній и выдѣляемымъ изъ общаго числа ∞^5 подобныхъ сочетаній пятью уравненіями $\varphi_i(\varkappa,\lambda,\mu;\ u_1u_2u_3u_4)=o$ степеней $\pi^{(i)}$ относительно $\varkappa,\lambda,\mu$ и степеней $\nu^{(i)}$ относительно u соотвѣтственно, опредѣлится помощью перемноженія характеристическихъ для такихъ конфигурацій условныхъ уравненій

$$\bar{\xi}_1 = \pi^{(i)}\,.\,a + \nu^{(i)}e,$$

гдѣ a—условіе для точки $(\varkappa,\lambda,\mu)$ лежать на данной прямой двухмѣрнаго пространства, а e—для плоскости u проходить черезъ данную точку трехмѣрнаго пространства, такъ что

$$a^2=1,\ a^3=o \text{ и т. д.},\ e^3=1,\ e^4=o \text{ и. т. д.}$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть

$$m'=\bar{\xi}_5=\prod_{i=0}^{i=4}(\pi^{(i)}.\,a+\nu^{(i)}e) = \Sigma\,\pi\pi'\nu''\nu'''\nu^{\text{IV}},$$

гдѣ суммованіе распространяется на всѣ сочетанія $\pi\pi'$ изъ пяти элементовъ $\pi^{(i)}$ по два. Въ данномъ случаѣ

$$\pi=\pi'=\pi''=m-1,\ \pi'''=\pi^{\text{IV}}=m;\ \nu=\nu'=\nu''=n,\ \nu'''=\nu^{\text{IV}}=n-1.$$

Поэтому

$$m'=m^2n^3+6\,m\,(m-1)\,n^2\,(n-1)+3\,(m-1)^2n\,(n-1)^2=$$

$$n\left\{\ m^2n^2+6\,m\,(m-1)\,(n-1)\,n+3\,(m-1)^2\,(m-1)^2\ \right\}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ опредѣлится n', только обмѣняются ролями m и n, такъ что можемъ прямо писать:

$$n'=m\ \left\{m^2\,n^2+6\,m\,(m-1)\,n\,(n-1)-3(m-1)^2(n-1)^2\right\}$$

Далѣе мы дадимъ другой способъ опредѣленія порядка и класса сопряженнаго коннекса, который послужитъ для насъ повѣркою полученнаго результата.

Въ частности, при

$$\begin{array}{ll} m=1,\, n=1, & m'=1,\, n'=1 \\ m=2,\, n=2 & m'=86,\, n'=86 \\ m=m,\, n=1 & m'=m^2,\, n'=m^3. \end{array}$$

Такимъ образомъ только при $m=n=1$ порядокъ и классъ сопряженнаго коннекса не превышаютъ порядка и класса исходнаго коннекса, вообще же они значительно выше. Между тѣмъ при переходѣ отъ сопряженнаго къ его сопряженному, т. е. къ данному, порядокъ и классъ вмѣсто того, чтобы еще повыситься, понижаются до порядка и класса исходнаго коннекса. Обстоятельство это показываетъ, что или въ данномъ коннексѣ или въ сопряженномъ необходимо должны быть на лицо нѣкоторыя особенности, которыя будутъ поэтому обыкновенными особенностями коннекса и подобно особенностямъ точечнымъ и тангенціальнымъ поверхности понижаютъ ихъ порядокъ и классъ. Мнѣ не удалось однако получить формулъ, аналогичныхъ формуламъ Плюккера. Подобныхъ формулъ не установлено еще и для тернарнаго коннекса.

Замѣтимъ. что *существуютъ коннексы сами себѣ сопряженные*. Дѣйствительно, каждый вообще коннексъ $f=o$ имѣетъ съ сопряженнымъ ему коннексомъ $F=o$ общую коинциденцію. Но если F содержитъ f множителемъ, или иначе если уничтожаются тожественно всѣ опредѣлители матрицы:

$$o = \left\| \begin{array}{cccccccc} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} & \frac{df}{du_1} & \frac{df}{du_2} & \frac{df}{du_3} & \frac{df}{du_4} \\ \frac{dF}{dx_1} & \frac{dF}{dx_2} & \frac{dF}{dx_3} & \frac{dF}{dx_4} & \frac{dF}{du_1} & \frac{dF}{du_2} & \frac{dF}{du_3} & \frac{dF}{du_4} \end{array} \right\|$$

то всѣ элементы коннекса $f=o$ будутъ принадлежать и сопряженному коннексу. Таковъ, напр., *тожественный* коннексъ $u_x=o$,—ибо для него

$$\varrho\, y_i = \frac{d(u_x)}{du_i} = x_i\ ,\ \delta\, v_i = \frac{d(u_x)}{dx_i} = u_i.$$

Остановимся на нѣкоторыхъ свойствахъ сопряженнаго коннекса, представляющихъ распространеніе на пространственный коннексъ свойствъ, указанныхъ для тернарнаго коннекса К. Стефаносомъ „Sur la théorie des connexes conjugués“ (Bull. Darboux (2) t. IV p. 1-ère p. 318—328. 1880 г.).

Геометрическое мѣсто $\mathbf{X}y$ *такихъ точекъ* x, *которымъ въ разсматриваемомъ коннексѣ соотвѣтствуютъ поверхности* U $(\equiv \Phi_n)$, *проходящія черезъ точку* y, *совпадаетъ съ поверхностью* V, *соотвѣтствующею точкѣ* y *въ сопряженномъ коннексѣ.*

Огибающая U_v *поскостей* u, *коимъ въ разсматриваемомъ коннексѣ соотвѣтствуютъ поверхности* $\mathbf{X}$ $(\equiv F_m)$, *касающіяся плоскости* v, *совпадаетъ съ поверхностью* $У$, *соотвѣтствующею плоскости* v *въ сопряженномъ коннексѣ.*

Достаточно доказать только одну изъ этихъ двухъ теоремъ,—другая получится двойственнымъ разсужденіемъ. Пріемъ доказательства примѣнимъ и къ случаю формы съ двумя рядами въ $k+1$ контрагредіентныхъ перемѣнныхъ. Итакъ пусть имѣемъ уравненіе $f(x,u)=o$. Поверхность $\mathbf{X}y$ получаемъ такъ: придаемъ координатамъ x_i опредѣленныя значенія x_i, соотвѣтствующія разсматриваемой точкѣ x,—получимъ соотвѣтствующую точкѣ x поверхность U; уравненіе этой поверхности въ точечныхъ координатахъ находимъ, исключая $u_1 u_2 u_3 u_4$ изъ уравненій:

$$f(x,u)=o\ , \quad \varrho\,\xi_i=\frac{df(x,u)}{du_i} \quad (i=1,2,3,4).$$

Чтобы эта поверхность проходила черезъ точку y, должны быть совмѣстными уравненія:

$$f(x,u)=o\ , \quad \varrho\,y_i=\frac{df(x,u)}{du_i} \quad (i=1,2,3,4) \tag{23}$$

Исключая отсюда u_i, получимъ уравненіе между x_1,x_2,x_3,x_4. Итакъ Xy выражается помощью совмѣстныхъ уравненій (23). Образуемъ теперь поверхность V, соотвѣтствующую въ сопряженномъ коннексѣ точкѣ y; она опредѣляется въ плоскостныхъ координатахъ v уравненіями

$$f(x,u)=o\ , \quad \varrho\,y_i=\frac{df}{du_i}\,, \quad \sigma.\,v_k=\frac{df}{dx_k} \tag{21}$$

Первыя пять изъ уравненій (21) совпадаютъ съ уравненіями (23), если придадимъ въ нихъ y указанное значеніе. Остается показать, что переходъ отъ точечныхъ координатъ x къ плоскостнымъ въ (23) равносиленъ присоединенію четырехъ уравненій

$$\sigma.\ v_k = \frac{df}{dx_k}.\ (k=1,2,3,4)$$

Пусть изъ уравненій $\rho.\ y_i = \frac{df}{du_i}$ $(i=1,2,3,4)$

величины u_i опредѣлены въ функціи x и y и подставлены въ $f(x,u)=o$. Чтобы перейти къ уравненію Xy въ плоскостныхъ координатахъ, надобно исключить x изъ $f(x,u)=o$, — гдѣ сдѣлана указанная замѣна u черезъ x и y,—и изъ уравненій

$$\tau.\ v_k = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{du_i}\cdot\frac{du_i}{dx_k} + \frac{df}{dx_k}.$$

Для опредѣленія $\frac{du_i}{dx_k}$ дифференцируемъ по x_k уравненія

$$\rho\, y_j = \frac{df}{du_j} —$$

принимая y постояннымъ, будемъ имѣть:

$$o = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2f}{du_j du_i}\ \frac{du_i}{dx_k} + \frac{d^2f}{du_j dx_k}\ (k,j=1,2,3,4);$$

этихъ 16 уравненій, вообще говоря, достаточно для опредѣленія $\frac{du_i}{dx_k}$, но намъ важны не самыя эти выраженія, а значенія суммъ

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{du_i}\cdot\frac{du_i}{dx_k},$$

которыя можно получить значительно проще. Дѣйствительно выбравъ четыре уравненія, соотвѣтствующія одному и тому же значенію k, и умноживъ каждое соотвѣтственно на u_j, получимъ въ суммѣ съ помощью теоремы однородныхъ функцій:

$$o = (n-1) \sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{du_i} \cdot \frac{du_i}{dx_k} + n \frac{df}{dx_k}.$$

Поэтому вышеприведенныя уравненія для v принимаютъ видъ:

$$\tau . v_k = \frac{df}{dx_k} - \frac{n}{n-1} \frac{df}{dx_k} = - \frac{1}{n-1} \frac{df}{dx_k}, -$$

уравненія, которыя отличаются отъ послѣднихъ четырехъ уравненій (21) только видомъ множителя пропорціональности,— что и доказываетъ теорему. Замѣтимъ, что здѣсь n предполагается болѣе единицы, и случай $n = 1$ долженъ быть разсмотрѣнъ особо. Въ этомъ случаѣ уравненіе коннекса можетъ быть написано

$$L_1 u_1 + L_2 u_2 + L_3 u_3 + L_4 u_4 = o$$

и потому получаемъ $\varrho\, y_i = L_i$—выраженія, не зависящія отъ u и для каждаго даннаго y дающія конечное число системъ значеній координатъ x. Поверхность X_y сводится въ этомъ случаѣ къ конечному числу дискретныхъ точекъ, и ея уравненіе въ точечныхъ координатахъ не можетъ быть получено. Сопряженный коннексъ опредѣляется въ этомъ случаѣ уравненіями

$$\Sigma L_i u_i = o, \quad \varrho\, y_i = L_i, \quad \sigma . v_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{dL_k}{dx_i} u_k,$$

или же уравненіями

$$\varrho . y_i = L_i, \quad o = v_x \equiv u_y = o, \quad \sigma . v_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{dL_k}{dx_i} u_k$$

Исключая изъ первыхъ пяти уравненій x и ϱ получимъ уравненіе поверхности V, соотвѣтствующей точкѣ y. Но замѣтивъ, что первыя четыре уравненія для каждой точки опредѣляютъ конечное число значеній x_i, и каждая такая система значеній опредѣляетъ точку, которой уравненіе $v_x = o$, убѣдимся, что и V распадается на совокупность конечнаго числа дискретныхъ точекъ. Сопоставляя уравненія

$$\varrho\, y_i = L_i\,,\quad o = v_x \equiv u_y = o,\quad v_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{dLk}{dx_i}\, u_i$$

сопряженнаго коннекса, при данныхъ y_i опредѣляющія поверхность V, съ уравненіями, опредѣляющими рядъ точекъ x, коихъ совокупность образуетъ въ этомъ случаѣ поверхность X_y:

$$\varrho\, y_i = L_i\,,\quad w_x = o\,,\quad \tau\, w_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{dLk}{dx_i}\, u_i$$

убѣждаемся въ тожествѣ двухъ этихъ системъ точекъ.

Такимъ образомъ теорема доказана для всѣхъ случаевъ. Для двойственной теоремы доказательство совершенно подобно этому.—Какъ результатъ исключенія u_1, u_2, u_3, u_4, изъ трехъ уравненій n-ой степени относительно u и степени m—1 относительно x и одного уравненія $u_y = o$ 1-ой степени относительно u и 0-й относительно x, поверхность X_y будетъ порядка $3n^2(m-1)$, и аналогично поверхность U_v — класса $3m^2(n-1)$. Припомнивъ, что вообще говоря поверхность класса ν будетъ порядка $\nu(\nu-1)^2$ и поверхность порядка μ—класса $\mu(\mu-1)^2$, и сопоставляя только что полученныя числа съ тѣми, которыя получились бы, если бы вмѣсто ν и μ подставили найденныя выше значенія n' и m'—класса и порядка сопряженнаго коннекса, видимъ, какъ велико то пониженіе, которое производятъ особенности, въ немъ выступающія, тогда, когда относительно даннаго коннекса предполагаемъ, что онъ общій въ своемъ родѣ.

Въ предыдущемъ, доказавъ формулированныя выше основныя теоремы, мы показали тѣмъ самымъ, что поверхности Y_x и X_y, соотвѣтствующія точкамъ x,y по связи (x,y), устанавливаемой коннексомъ, совпадаютъ соотвѣтственно съ поверхностями U_x и V_y, которыя встрѣчаемъ въ данномъ коннексѣ и ему сопряженномъ. Точно какже поверхности V_u и U_v, соотвѣтствующія плоскостямъ u и v по связи (v,u) устанавливаемой коннексомъ, совпадаютъ соотвѣтственно съ поверхностями X_u и Y_v, которыя въ данномъ коннексѣ и по сопряженномъ отвѣчаютъ плоскостямъ u и v.

Разбирая отдѣльныя фазы доказательства вышеприведенныхъ теоремъ, не трудно видѣть, что послѣдовательно имѣемъ теоремы:

Геометрическое мѣсто X_y точекъ x, коимъ соотвѣтствуютъ поверхности U, проходящія черезъ неподвижную точку y, совпадаетъ съ огибающею поверхностей X, соотвѣтствующихъ плоскостямъ u, проходящимъ черезъ точку y.

Дѣйствительно, плоскости проходящія черезъ y, имѣютъ уравненіе $u_y = o$; соотвѣтственныя поверхности $X—f(x,u) = o$.

Искомая огибающая при заданныхъ y и перемѣнныхъ u получится по обычнымъ правиламъ посредствомъ исключенія u_i и λ изъ уравненій

$$\frac{d(f+\lambda u_y)}{du_i} = o$$

т. е. изъ

$$\frac{df}{du_i} + \lambda y_i = o (i = 1,2,3,4).$$

Огибающая U_v плоскостей u, коимъ въ коннексѣ соотвѣтствуютъ поверхности X, касательныя къ неподвижной плоскости v, совпадаетъ съ огибающей поверхностей U, соотвѣтствующихъ точкамъ x, лежащимъ въ плоскости v.

Точки x, лежащія въ плоскости v, выразятся уравненіемъ $v_x = o$, а соотвѣтствующія имъ поверхности U уравненіемъ $f(x,u) = o$. Искомая огибающая опредѣлится исключеніемъ x_i и μ изъ уравненій.

$$\frac{d(f+\mu v_x)}{dx_i} = o \quad (i = 1,2,3,4)$$

гдѣ v_i данныя, x перемѣнныя, или изъ

$$\frac{df}{dx_i} + \mu v_i = o \quad (i = 1,2,3,4)$$

Мы получимъ такимъ образомъ систему уравненій (23), и двойственную ей, что доказываетъ теорему и даетъ геометрическое значеніе этихъ системъ.

Аналогично К. Стефаносу разсуждаемъ далѣе такъ: возьмемъ три безконечно-близкія плоскости, проходящія черезъ точку y; въ разсматриваемомъ коннексѣ имъ соотвѣтствуютъ три поверхности X, пересѣкающіяся въ m^3 точкахъ x; очевидно, что поверхности U, соотвѣтствующія этимъ точкамъ, касаются разсматриваемыхъ плоскостей въ точкахъ безконечно-близкихъ къ y, иначе говоря онѣ проходятъ черезъ точку y, когда три плоскости приходятъ въ совпаденіе. Отсюда:

Поверхность X, принадлежащая плоскости u, проходящей черезъ точку y, касается

Поверхность U, принадлежащая точкѣ x, лежащей въ плоскости v, имѣютъ съ по-

поверхности X_y въ m^3 точкахъ, которымъ соотвѣтствуютъ поверхности U, имѣющія въ точкѣ y касательною плоскость u.

Точки общія X съ поверхностью X_y суть точки ея пересѣченія съ безконечно близкими поверхностями X, принадлежащими плоскостямъ, также проходящимъ через y. Эти поверхности мы получимъ, давая въ уравненіи X, т. е. въ $f(x,u)=o$ величинамъ u_i безконечно малыя приращенія du_i связанныя между собою только условіемъ:

$$\Sigma y_i du_i = o.$$

Такимъ образомъ:

$$\Sigma \frac{df}{du_i} du_i = o, \quad \Sigma y_i du_i = o$$

$$\therefore \Sigma \left(\frac{df}{du_i} + \lambda y_i \right) du_i = o$$

и слѣдовательно

$$\frac{df}{du_i} + \lambda y_i = o \quad (i = 1,2,3,4)$$

Исключая λ получимъ три уравненія m-ой степени относительно x

$$y_1 \frac{df}{du_2} - y_2 \frac{df}{du_1} = o,$$

$$y_2 \frac{df}{du_3} - y_3 \frac{df}{du_2} = o,$$

$$y_3 \frac{df}{du_4} - y_4 \frac{df}{du_3} = o,$$

верхностью U_v n^3 общихъ касательныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ поверхности X, касающіяся плоскости v въ точкѣ x.

Общія касательныя U и U_v суть общія касательныя U и безконечно близкихъ къ ней поверхностей. Ихъ мы получимъ давая въ $f(x,u)=o$ величинамъ x_i безконечно малыя приращенія, связанныя только условіемъ:

$$\Sigma v_i dx_i = o.$$

Это приводитъ къ уравненіямъ

$$\Sigma \frac{df}{dx_i} dx_i = o, \quad \Sigma v_i dx_i = o.$$

Откуда

$$\Sigma \left(\frac{df}{dx_i} + \mu v_i \right) dx_i = o$$

и слѣдовательно

$$\frac{df}{dx_i} + \mu v_i = o (i = 1,2,3,4).$$

Исключая μ, получимъ три уравненія n-ой степени относительно u_i

$$v_1 \frac{df}{dx_2} - v_2 \frac{df}{dx_1} = o,$$

$$v_2 \frac{df}{dx_3} - v_3 \frac{df}{dx_2} = o,$$

$$v_3 \frac{df}{dx_4} - v_4 \frac{df}{dx_3} = o,$$

которыя имѣютъ m^3 системъ рѣшеній и даютъ m^3 точекъ общихъ X и X_y. Притомъ въ этихъ точкахъ касательныя у X и X_y общія; дѣйствительно, первыя опредѣляются уравненіемъ

$$\Sigma \frac{df}{dx_i}\xi_i \equiv a_x{}^{m-1} a_\xi u_\alpha{}^n = o,$$

если черезъ ξ_i означимъ текущія координаты точекъ касательной, а вторыя уравненіями

$$\sum_{i=1}^{i=4}\xi_i\left(\frac{df}{dx_i}+\sum_{k=1}^{k=4}\frac{df}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dx_i}\right)=o,$$

причемъ зависимость u и x выражается уравненіями

$$\varrho y_i = \frac{df}{du_i},$$

съ помощью которыхъ мы найдемъ, какъ и выше,

$$0 = n\frac{df}{dx_i}+(n-1)\sum_{k=1}^{k=4}\frac{df}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dx_i};$$

уравненіе касательной къ X_y въ точкѣ x приметъ видъ

$$\sum_{i=1}^{i=4}\xi_i\left(\frac{df}{dx_i}-\frac{n}{n-1}\frac{df}{dx_i}\right)=o,$$

т. е. тожественно съ уравненіемъ касательной въ той же точкѣ къ X, чѣмъ и доказывается первая часть теоремы. Для доказательства второй части замѣтимъ, что каждой изъ m^3 точекъ x соотвѣтствуетъ которыя приводятъ къ n^3 общимъ касательнымъ U и U_v. Но имѣя общую касательную плоскость поверхности эти имѣютъ сверхъ того и точку касанія на ней общую, т. е. касаются между собою. Дѣйствительно, такъ какъ U_v опредѣляется уравненіями

$$f(x,u)=o,\ \sigma v_i = \frac{df}{dx_i}\ (i=1,2,3,4)$$

точка ея прикосновенія съ плоскостью u опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_{i=1}^{i=4} w_i\left(\frac{df}{du_i}+\sum_{k=1}^{k=4}\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{du_i}\right)=o$$

но по предыдущему

$$0 = m\frac{df}{du_i}+(m-1)\sum_{k=1}^{k=4}\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{dx_i},$$

и уравненіе это приметъ поэтому видъ

$$\sum_{i=1}^{i=4} w_i\left(\frac{df}{du_i}-\frac{m}{m-1}\frac{df}{du_i}\right)=o,$$

т. е. оказывается тожественно съ уравненіемъ точки прикосновенія u съ U:

$$\sum_{i=1}^{i=4} w_i\frac{df}{du_i}=o.$$

Каждой изъ этихъ n^3 плоскостей u принадлежитъ поверхность X: $f(x,u)=o$; такъ поверхность U, которое тангенціальное уравненіе есть $f(x,u)=o$. Такъ какъ x удовлетворяетъ уравненіямъ $\varrho y_i = = \frac{df}{dx_i}$, то плоскость u, проходящія черезъ точку y (такъ что $u_y = o$) удовлетворитъ и уравненію

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \equiv nf(x,u) = \varrho . u_4 = o,$$

т. е. поверхности U, которыя по опредѣленію X_y проходятъ черезъ точку y, имѣютъ въ этой точкѣ касательною плоскость u, ч. и т. д.

Поверхность U, соотвѣтствующая въ коннексѣ точкѣ x поверхности X_y, имѣетъ касательною плоскостью въ точкѣ y плоскость u, которой принадлежитъ поверхность X касающаяся поверхности X_y въ точкѣ x.

Точка x удовлетворяетъ уравненіямъ $f(x,u)=o$, $\varrho y_i = \frac{df}{du_i}$, исключая изъ коихъ u получимъ уравненіе X_y. Ей соотвѣтствуетъ поверхность U: $f(x,u)=o$. Касательная u къ этой поверхности въ точкѣ y опредѣлится уравненіями

$$f(x,u)=o,\ u_y=o, \frac{df}{du_i} = \tau . y_i .$$

Этой плоскости u принадлежитъ поверхность X: $f(x,u)=o$, какъ u выполняетъ уравненіе $\sigma . v_i = \frac{df}{dx_i}$, то точка x плоскости $v(v_x = o)$ удовлетворяетъ уравненію:

$$0 = \sigma . v_x = \Sigma x_i \frac{df}{dx_i} = mf(x,u),$$

т. е. поверхность X, принадлежащая какой либо изъ n^3 плоскостей u, касается плоскости v въ точкѣ x

ч. и т. д.

Поверхность X, соотвѣтствующая плоскости u, касательной къ U_v, касается плоскости v въ точкѣ x, которой принадлежитъ поверхность U, имѣющая съ U_v общую касательную плоскость u.

Плоскость u, касательная къ U_v, удовлетворяетъ уравненіямъ:

$$f(x,u)=o,\ \sigma . v_i = \frac{df}{dx_i};$$

ей соотвѣтствуетъ поверхность X: $f(x,u) = o$, касательныя v къ которой прикасаются къ ней въ точкѣ x, такъ что

$$f(x,u)=o,\ v_x=o$$

откуда

$$\frac{df}{dx_i} = \varrho . v_i .$$

которая въ точкѣ x имѣетъ касательную

$$\Sigma \frac{df}{dx_i}\xi_i = o,$$

а поверхность X_y по доказанному имѣетъ въ той же точкѣ x касательную

$$-\frac{1}{m-1}\Sigma \frac{df}{dx_i}\xi_i = o,$$

т. е. туже самую, ч. и т. д.

Этой точкѣ x принадлежитъ поверхность U: $f(x,u)=o$ касательная къ u въ точкѣ

$$\Sigma \frac{df}{du_i}w_i = o$$

а поверхность U_v по предыдущему касается u въ точкѣ

$$-\frac{1}{m-1}\Sigma \frac{df}{du_i}w_i = o,$$

т. е. въ той же самой, ч. и т. д.

Сопоставляя предыдущее, замѣтимъ, что если будемъ разсматривать нѣкоторый элементъ (x,u) даннаго коннекса и соотвѣтственный элементъ (y,v) сопряженнаго, то *поверхности X_u и V_y касаются плоскости v въ точкѣ x, а поверхности U_x и $У_v$ касаются плоскости u въ точкѣ y.* Полная симметрія во взаимныхъ отношеніяхъ даннаго коннекса и его сопряженнаго, вслѣдствіе которой ничто во взаимныхъ отношеніяхъ элементовъ (y,v) и (x,u) не измѣнится, если обмѣнить роли коннексовъ и сопряженный считать за основной, и даетъ право, какъ это дѣлаетъ К. Стефаносъ для тернарныхъ коннексовъ, заключать отсюда доказанную выше теорему, что коннексъ, сопряженный сопряженному даннаго есть данный коннексъ. Доказательство формулированной выше теоремы послѣ всего сказаннаго ранѣе не трудно. Дѣйствительно, если уравненіе исходнаго коннекса есть $f(x,u)=o$, то уравненіе сопряженнаго:

$$f(x,u)=o,\ \varrho y_i = \frac{df}{du_i},\ \sigma v_i = \frac{df}{dx_i}.$$

Касательная къ $У_v$ въ ея точкѣ y опредѣлится уравненіемъ

$$\sum_{i=4}^{i=1}\eta_i \sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{dx_k}{dy_i}+\frac{df}{du_k}\cdot\frac{du_k}{dy_i}\right)=o,$$

или такъ какъ по предыдущему

$$(m+n-1)\varrho . u_i = \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{df}{dxk} \cdot \frac{dxk}{dy_i} + \frac{df}{duk} \cdot \frac{duk}{dy_i} \right)$$

уравненіемъ $(m+n-1)\varrho\Sigma\eta_i u_i = o$, т. е. это будетъ плоскость u, проходящая въ силу $u_y = o$ черезъ точку y.

Я не буду останавливаться на перенесеніи на случай пространственнаго коннекса способа опредѣленія для коннекса сопряженнаго его порядка и класса, приводимаго Стефаносомъ и состоящаго въ томъ, что онъ опредѣляетъ число двойныхъ точекъ и точекъ возврата кривой Y_v, что даетъ ему возможность опредѣлить по порядку классъ этой кривой; знаніе этихъ чиселъ и даетъ классъ сопряженнаго коннекса. Въ случаѣ поверхностей пришлось бы принимать во вниманіе гораздо большее число особенностей, не вполнѣ еще установленныхъ, [1]) и подробное разсмотрѣніе вопроса отвлекло бы значительно въ сторону. Отлагая поэтому болѣе подробное изслѣдованіе этого вопроса до другого раза, я покажу теперь, что данное выше опредѣленіе особенныхъ элементовъ коннекса тожественно по существу съ опредѣленіемъ Клебша - Линдеманна. Не требуя предварительнаго введенія понятія сопряженнаго коннекса, оно мнѣ кажется болѣе простымъ. Въ Vorlesungen üb. Geometrie B. I. особенный элементъ коннекса (тернарнаго, но опредѣленіе одинаково сохраняется и для любого числа измѣреній) опредѣляется, какъ такой его элементъ, которому въ сопряженномъ соотвѣтствуетъ не одинъ элементъ, а болѣе. Но если точка x въ элементѣ (x,u) есть особенная точка поверхности X, соотвѣтствующей въ коннексѣ плоскости u, то выполняются уравненія

$$\text{(a)} \qquad \frac{df}{dx_i} = o \quad (i=1,2,3,4);$$

если плоскость u есть особенная касательная поверхности U принадлежащей точкѣ x въ коннексѣ, то выполнены уравненія $\frac{df}{du_i} = o (i=1,2,3,4)$. Сопряженный коннексъ по предыдущему опредѣляется уравненіями: $f=o$, $\sigma v_i = \frac{df}{dx_i}$, $\varrho y_i = \frac{df}{du_i}$.

---

[1]) Достаточно напомнить, что Сальмону только для частныхъ случаевъ удалось подсчетомъ особенностей показать, что порядокъ линейчатой поверхности равенъ ея классу. (Géom. 3 dim. 1892, p. III n° 618).

Если выполняется, напр. первая изъ вышеприведенныхъ системъ уравненій, т. е. если x есть особенная точка на X, то мы имѣемъ $\sigma . v_i = o (i = 1,2,3,4)$, и такъ какъ всѣ v_i не могутъ быть одновременно нулями, то $\sigma = o$, и значенія координатъ v становятся поэтому неопредѣленными, принимая видъ $v_i = \frac{o}{o}$; и обратно при однозначности производныхъ $\frac{df}{dx_i}$ только тогда для v_i могутъ изъ предыдущихъ уравненій вытекать не одно, а нѣсколько значеній, если выраженія координатъ v_i становятся неопредѣленными, и когда слѣдовательно эти уравненія замѣняются другими, дающими для v_i болѣе одной системы значеній. Для нахожденія ихъ отъ уравненія

$$o = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{dx_i} \xi_i \equiv m . a_x^{m-1} u_\alpha^n a_\xi, \tag{24}$$

которое при условіяхъ $\frac{df}{dx_i} = o$ $(i = 1,2,3,4)$ удовлетворяется тожественно и уже не опредѣляетъ касательной къ X въ точкѣ x плоскости v, приходится переходить къ уравненію

$$\sum_{i,k}^{1.4} \frac{d^2 f}{dx_i dx_k} \xi_i \xi_k = o \equiv m(m-1) a_x^{m-2} a^2_\xi u_\alpha^n \tag{25}$$

и такимъ образомъ вмѣсто одной касательной плоскости v къ X въ точкѣ x, которая и входила въ элементъ (y,v) сопряженнаго коннекса, будемъ имѣть ∞^1 касательныхъ къ конусу 2-го порядка, опредѣленнаго уравненіемъ (25). Что это будетъ конусъ, ясно изъ того, что уравненія $\frac{df}{dx_i} = o$ могутъ быть представлены подъ видомъ $(n-1)\frac{df}{dx_i} = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2 f}{dx_i dx_k} x_k = o$ $(i = 1,2,3,4)$, откуда находимъ, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_3} & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_4} \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 f}{dx_2^2} & \frac{d^2 f}{dx_2 dx_3} & \frac{d^2 f}{dx_2 dx_4} \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_3} & \frac{d^2 f}{dx_2 dx_3} & \frac{d^2 f}{dx_3^2} & \frac{d^2 f}{dx_3 dx_4} \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_4} & \frac{d^2 f}{xd_2 dx_4} & \frac{d^2 f}{dx_3 dx_4} & \frac{d^2 f}{dx_4^2} \end{vmatrix}$$

уничтожается для особенной точки x поверхности X, а это и есть условіе того, чтобы $a_k^{m-2}u_\alpha^n a_\xi^2=o$ изображало конусъ. Такимъ образомъ мы убѣдились, что если въ элементѣ (x,u) точка x есть особенная точка поверхности X, принадлежащей въ коннексѣ $f(x,u)=o$, если слѣдовательно этотъ элементъ будетъ согласно нашему опредѣленію точечно-особеннымъ, онъ будетъ особеннымъ и въ смыслѣ опредѣленія Клебша-Линдеманна. Если уничтожаются миноры-опредѣлители 3-го порядка, конусъ распадается на двѣ плоскости, и (x,u) соотвѣтствуютъ два (y,v). Если уничтожаются и миноры 2-го порядка, то двѣ плоскости v сливаются, и элементу (x,u) соотвѣтствуетъ двойной элементъ сопряженнаго коннекса.

Совершенно подобнымъ образомъ убѣдимся, что и тангенціально-особенные элементы (x,u) будутъ особенными элементами и въ силу опредѣленія Клебша-Линдеманна. Дѣйствительно выполненіе уравненій $\varrho.y_i=\frac{df}{du_i}=o$ показываетъ, что $\varrho=o$, и слѣдовательно точка прикосновенія плоскости u съ поверхностью U опредѣляется уже не уравненіемъ

$$\Sigma\frac{df}{du_i}w_i=o\equiv n.a_x^m u_\alpha^{n-1}w_\alpha, \tag{26}$$

которое теперь обращается въ тожество, а уравненіемъ

$$\sum_{k,i}^{1.4}\frac{d^2f}{du_idu_k}w_iw_k=o, \tag{27}$$

и каждая точка y опредѣленной этимъ уравненіемъ на плоскости u плоской кривой 2-го порядка будетъ точкою прикосновенія u съ U, и элементу (x,u) даннаго коннекса соотвѣтствуетъ во взаимномъ ∞^1 элементовъ (y,v). Что уравненіе (27) дѣйствительно изображаетъ плоскую кривую 2-го порядка, а не поверхность, видимъ изъ того, что въ силу совмѣстности уравненій

$$0=(n-1)\frac{df}{du_i}=\sum_{k=1}^{k=4}\frac{d^2f}{du_idu_k}u_k$$

обращается въ нуль опредѣлитель

$$\left| \frac{d^2f}{du_i du_k} \right| \equiv a_x{}^m b_x{}^m c_x{}^m d_x{}^m u_\alpha{}^{n-2} u_\beta{}^{n-2} u_\gamma{}^{n-2} u_\delta{}^{n-2} (\alpha\beta\gamma\delta)^2,$$

а это и есть условіе того, чтобы тангенціальное уравненіе второй степени изображало кривую 2-го порядка. Если и миноры этого опредѣлителя равны нулю, то имѣемъ пару точекъ.

Полученные результаты можно резюмировать въ весьма важной по моему мнѣнію теоремѣ: *коннексъ не имѣетъ иныхъ особенностей, кромѣ тѣхъ, которыя представляютъ поверхности его.*

§ 6. **Касательный коннексъ.** Уже въ предыдущемъ можно было видѣть тѣсную связь съ даннымъ коннексомъ $f(x,u)=o$ формъ $a_x{}^{m-1} a_\xi u_\alpha{}^n$ и т. д.—первыхъ и вторыхъ его поляръ относительно x и u. Дѣйствительно, уравненіе, напр., $a_x{}^{m-1} a_\xi u_\alpha{}^n=o$ представляетъ съ одной стороны коннексъ (1,0), въ элементъ котораго можетъ быть соединяема каждая плоскость пространства съ точками ξ плоскости $a_x{}^{m-1} u_\alpha{}^n a_\xi=o$, гдѣ x,u данныя; съ другой стороны это уравненіе представляетъ касательную плоскость въ точкѣ x къ поверхности X, принадлежащей въ коннексѣ плоскости u. Каждому элементу (x,u) соотвѣтствуетъ такимъ образомъ опредѣленная плоскость и, вообще говоря, только одна, которая изображается уравненіемъ $a_x{}^{m-1} a_\xi u_\alpha{}^n=o$ (24). Точно также каждому элементу подчиняется опредѣленная точка прикосновенія плоскости u къ поверхности U, изображаемая уравненіемъ $a_x{}^m u_\alpha{}^{n-1} w_\alpha=o$ (26). Элементъ, составленный этою точкою и плоскостью, такимъ образомъ однозначно соотвѣтствуетъ элементу (x,u) даннаго коннекса; перебравъ всѣ элементы послѣдняго, получимъ ∞^5 элементовъ, образующихъ коннексъ сопряженный данному. Если выполнены уравненія $\frac{df}{dx_i}=o$ $(i=1,2,3,4)$, то уравненіе $\Sigma \frac{df}{dx_i}\xi_i=o$ обращается въ тожество, и чтобы получить касательныя въ точкѣ x, должны обратиться ко второй полярѣ f относительно x: $a_x{}^{m-2} a_\xi{}^2 u_\alpha{}^n=o$; о частныхъ случаяхъ, которые могутъ при этомъ встрѣтиться, упомянуто уже выше. Если и всѣ производныя 2-го порядка $\frac{d^2f}{dx_i dx_k}$ обращаются для взятаго (x,u) въ нуль, то элементъ будетъ тройнымъ, и касательныя опредѣлятся изъ уравненія третьей поляры:

$$\sum_{i,k,l}^{1..4} \frac{d^3f}{dx_i dx_k dx_l} \xi_i \xi_k \xi_l = o \equiv \sigma . a_x^{m-3} a_\xi^3 u_\alpha^n$$

которая будетъ въ этомъ случаѣ коническою поверхностью съ вершиною въ x и которая можетъ распадаться; но на этихъ подробностяхъ уже не буду останавливаться.

Четыре уравненія $\frac{df}{dx_i} = o (i = 1,2,3,4)$ опредѣляютъ, какъ упомянуто выше, пару поверхностей съ характеристиками $4(m-1)n^3$, $6(m-1)^2n^2$, $4(m-1)^3n$. Если они и не выполнены, уравненіе выражающее, что вторая поляра обращается въ коническую поверхность

$$a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} u_\alpha^n u_\beta^n u_\gamma^n u_\delta^n (abcd)^2 = o$$

можетъ выполняться. При данной плоскости u это уравненіе опредѣляетъ Гессіену поверхности X и совмѣстно съ уравненіемъ даннаго коннекса опредѣляетъ *коинциденцію параболическихъ элементовъ*, если называть такъ тѣ элементы (x,u), въ которыхъ x есть параболическая точка принадлежащей u поверхности X,—т. е. точка съ параболическою индикатрисою. Эта параболическая коинциденція будетъ порядка $4m(m-2)$ ранга $8nm(m-1)$ и класса $4n^2$. Элементы точечно-особенные принадлежатъ этой коинциденціи. Подобнымъ образомъ, если выполнены уравненія $\frac{df}{du_i} = o$, и элементъ (x,u) будетъ тангенціально-особенный, то чтобы получить точку прикосновенія плоскости u съ поверхностью U, должны отъ уравненія $\Sigma \frac{df}{dx_i} w_i = o$, которое теперь обращается въ тожество, перейти къ уравненію

$$0 = \Sigma \frac{d^2f}{du_i du_k} w_i w_k \equiv n(n-1) a_x^m u_\alpha^{n-2} w_\alpha^2 = o;$$

оно опредѣляетъ вообще поверхность 2-го класса. Но если опредѣлитель $\left| \frac{d^2f}{du_i du_k} \right|$ обращается въ нуль, какъ въ настоящемъ случаѣ, эта поверхность обращается въ коническое сѣченіе; если и первые миноры обращаются всѣ въ 0, оно распадается на пару точекъ, которыя сливаются, если и вторые миноры всѣ нули для взятаго (x,u). Четыре уравненія опредѣляютъ какъ было упомянуто, пару поверхностей $[4m(n-1)^3, 6m^2(n-1)^2, 4m^3(n-1)]$. По этому въ общей сложности самый общій въ своемъ родѣ коннексъ имѣетъ особенныхъ элементовъ пару поверхностей съ характеристиками $4m(n-1)^3+4(m-1)n^3$, $6m^2(n-1)^2+6(m-1)^2n^2$, $4m^3(n-1)+4(m-1)^3n$. Если уравненія $\frac{df}{du_i}=o$ не выполняются элементомъ (x,u), уравненіе $\left|\frac{d^2f}{du_i du_k}\right|=o$, выражающее, что $a_x^m u_\alpha^{n-2} w_\alpha^2=o$ представляетъ для этого элемента плоскую кривую 2-го класса, можетъ все-таки существовать. Элементы, обладающіе этимъ свойствомъ образуютъ поэтому коинциденцію, выдѣляемую изъ коннекса $f(x,u)\equiv a_x^m u_\alpha^n=o$ коннексомъ

$$a_x^m b_x^m c_x^m d_x^m u_\alpha^{n-2} u_\beta^{n-2} u_\gamma^{n-2} u_\delta^{n-2} (\alpha\beta\gamma\delta)^2=o$$

Характеристики этой коинциденціи суть $4m^2$, $8m(n-1)$, $4n(n-2)$. Этой коинциденціи принадлежатъ, очевидно, и всѣ тангенціально-особенные элементы коннекса.

Если обращаются одновременно въ нуль два элемента (x,u) и всѣ $\frac{d^2f}{du_i du_k}$, то должны для опредѣленія точекъ прикосновенія обратиться къ уравненію $a_x^m u_\alpha^{n-3} w_\alpha^3=o$ и т. д.

Все, что до сихъ поръ говорено о полярныхъ образованіяхъ коннекса, представляетъ полную аналогію съ тѣмъ, что имѣемъ въ теоріи поверхностей, разсматриваемыхъ, какъ мѣста точекъ или огибающія плоскостей. Нѣчто новое является въ слѣдующемъ. Замѣняя въ уравненіе коннекса x_i черезъ $x_i+\lambda z_i$, и u_i черезъ $u_i+\varkappa w_i$ и разлагая по степенямъ λ и $\varkappa$, получимъ:

$$\begin{aligned} f(x+\lambda z, u+\varkappa w) &\equiv a_x^m u_\alpha^n + m\lambda a_x^{m-1} a_z u_\alpha^n + n\varkappa a_x^m u_\alpha^{n-1} w_\alpha + \\ &+ \frac{m.m-1}{1.2}\lambda^2 a_x^{m-2} a_z^2 u_\alpha^n + \frac{n\,n-1}{1.2}\varkappa^2 a_x^m u_\alpha^{n-2} w_\alpha^2 + \\ &+ mn\lambda\varkappa a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} a_z w_\alpha + R_3 \end{aligned}$$

(R_3—члены 3-го порядка и выше относительно $\varkappa,\lambda$).

Сверхъ разсмотрѣнныхъ уже формъ, сюда вошла еще форма

$$a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} a_z w_\alpha$$

смѣшанная поляра f относительно x и u. Опредѣляемое ею уравненіе, въ которомъ перемѣнными разсматриваемъ z и w, а x и u данными, изображаетъ линео-линейный коннексъ (1,1):

$$a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} a_z w_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \Sigma \frac{d^2 f}{du_i dx_k} w_i z_k = 0$$

Этотъ линео-линейный коннексъ имѣетъ особенно тѣсную связь съ даннымъ коннексомъ (m,n) и можетъ быть названъ *касательнымъ коннексомъ* [1]). Дѣйствительно, онъ обладаетъ свойствомъ, аналогичнымъ характерному свойству касательной содержать кромѣ точки x и безконечно къ ней близкую. По свойству коннекса (1,1) этотъ коннексъ каждой точкѣ z пространства подчиняетъ другую точку z', такъ что

$$\varrho . z'_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2 f}{du_i dx_k} z_k,$$

слѣдовательно точкѣ x онъ подчиняетъ точку

$$\varrho y_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2 f}{du_i dx_k} x_k \equiv m \frac{df}{du_i}$$

т. е. точку, соотвѣтствующую x въ сопряженномъ коннексѣ. Точно также каждой плоскости w пространства соотвѣтствуетъ въ силу касательнаго коннекса другая w', которой координаты суть

$$\sigma . w'_k = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2 f}{du_i dx_k} w_i;$$

въ частности слѣдовательно плоскости u соотвѣтствуетъ плоскость

$$\sigma . v_k = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2 f}{du_i dx_k} u_i \equiv n \frac{df}{dx_k}, —$$

та именно плоскость v, которая соотвѣтствуетъ u по уравненіямъ, опредѣляющимъ сопряженный коннексъ. Такимъ обра-

---

[1]) Аналогично введенному Aschieri «касательному комплексу», важному для теоріи общаго комплекса. Giorn. Battaglini t. XI.

зомъ касательный коннексъ, соотвѣтствующій элементу (x,u) даннаго, подчиняетъ элементу (x,u) тотъ элементъ (y,v), который соотвѣтствуетъ этому элементу въ сопряженномъ коннексѣ. Можно поэтому сказать, что въ сосѣдствѣ элемента (x,u) гомографическое преобразованіе, устанавливаемое коннексомъ $a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} a_z w_\alpha = o$ воспроизводитъ взаимное соотношеніе даннаго коннекса и его сопряженнаго; безконечно близкіе къ (x,u) элементы это гомографическое преобразованіе переводитъ въ элементы, безконечно близкіе къ соотвѣтственному элементу сопряженнаго коннекса. Точкѣ x въ касательномъ коннексѣ соотвѣтствуетъ точка прикосновенія плоскости u къ поверхности U и плоскости u—плоскость, касательная къ принадлежащей u поверхности X въ точкѣ x. Такимъ образомъ касательный коннексъ опредѣляетъ собою гомографическое преобразованіе, изображающее въ сосѣдствѣ элемента (x,u) коннексъ (m,n), совершенно подобно тому, какъ касательная изображаетъ кривую вблизи точки прикосновенія. Можно поэтому представлять себѣ коннексъ составленнымъ касательными коннексами (1,1), какъ кривую мы представляемъ образованною элементами ея, принадлежащими ряду послѣдовательныхъ касательныхъ,—огибаемою ея касательными. Исходя изъ уравненія касательнаго коннекса, мы можемъ изучать особенности коннекса,—потому что каждая особенность, отличающая элементъ (x,u) отъ прочихъ элементовъ коннекса, должна отражаться на характерѣ гомографическаго преобразованія, опредѣляемаго соотвѣтствующимъ этому элементу касательнымъ коннексомъ. Устанавливая различные инваріанты послѣдняго, мы получимъ коваріанты даннаго коннекса (m,n), и это доставитъ намъ въ тоже время геометрическое значеніе получаемыхъ коваріантовъ. Поэтому детальное изученіе коннекса (1,1) получаетъ большое значеніе для теоріи общаго коннекса (m,n).

Отлагая до главы IV это изученіе, я воспользуюсь здѣсь нѣкоторыми результатами этого изслѣдованія для иллюстраціи вышесказаннаго. Инваріантъ $i = a_\alpha = \Sigma a_{kk}$ коннекса (1,1) уничтоженіемъ своимъ показываетъ, что опредѣляемое коннексомъ гомографическое преобразованіе находится въ такъ называемое вписанномъ положеніи тетраедровъ [2], а также, что точки

[1]) Названіе, введенное М. Пашемъ. Ближайшія литературныя указанія о коннексахъ (1,1) см. въ гл. IV.

0,1,2,4 находятся въ одной плоскости. Для касательнаго коннекса этотъ инваріантъ есть

$$\frac{d^2f}{dx_1du_1}+\frac{d^2f}{dx_2du_2}+\frac{d^2f}{dx_3du_3}+\frac{d^2f}{dx_4du_4}\equiv a_x^{m-1}u_\alpha^{n-1}a_\alpha.mn$$

Слѣдовательно, если коннексъ (m,n) выполняетъ дифференціальное уравненіе

$$\frac{d^2f}{dx_1du_1}+\frac{d^2f}{dx_2du_2}+\frac{d^2f}{dx_3du_3}+\frac{d^2f}{dx_4du_4}=o,$$

т. е. если онъ будетъ нормальнаго вида (а по Гордану уравненіе каждаго коннекса можетъ быть разложено въ рядъ по возрастающимъ степенямъ u_x такъ, что коэффиціенты будутъ коннексы нормальнаго вида или нормальные коннексы по Study) то для каждаго его элемента касательный коннексъ опредѣляетъ гомографическое преобразованіе во вписанномъ положеніи тетраедровъ. Въ противномъ случаѣ элементы, обладающіе этимъ свойствомъ, образуютъ коллинеацію

$$f\equiv a_x^m u_\alpha^n=o,\quad a_x^{m-1}u_\alpha^{n-1}a_x=o$$

съ характеристиками $m(m-1)$, $n(m-1)+m(n-1)$, $n(n-1)$.

Совершенно аналогичнымъ образомъ можемъ воспользоваться и другими инваріантными образованіями касательнаго коннекса. Такъ инваріантъ $i_2=\sum\limits_{i,lk}^{1..4}a_{il}a_{lk}a_{ki}$ для касательнаго коннекса принимаетъ видъ: $\sum\limits_{i,k,l}^{1.4}\frac{d^2f}{dx_idu_l}\cdot\frac{d^2f}{dx_ldu_k}\cdot\frac{d^2f}{dx_kdu_i}$

Если форма f удовлетворяетъ уравненію

$$\sum_{i,k,l}^{1.4}\frac{d^2f}{dx_idu_l}\cdot\frac{d^2f}{dx_ldu_k}\cdot\frac{d^2f}{dx_kdu_i}=o$$

тожественно, то всѣ элементы (x,u) коннекса $f(x,u)=o$ опредѣляютъ касательные коннексы (1,1) приводящіе къ коллинеаціи въ описанномъ положеніи тетраедровъ. Вообще же подобнаго рода элементы принадлежатъ коинциденціи

$$f(x,u)=0=a_x^m u_x^n \text{ и } 0=a_x^{m-1}b_x^{m-1}c_x^{m-1}u_\alpha^{n-1}u_\beta^{n-1}u_\gamma^{n-1}a_\beta b_\gamma c_\alpha$$

съ характеристиками $3m(m-1), 3(m-1)n+3m(n-1), 3n(n-1)$

Остановимся еще на значеніи условія $i'''=o$. Въ этомъ случаѣ коллинеація будетъ вырожденною. Для касательнаго коннекса этотъ инваріантъ принимаетъ видъ:

$$a_x^{m-1} b_x^{m-1} c_x^{m-1} d_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^{n-1} u_\delta^{n-1} (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta).$$

Приравнивая эту форму нулю, получимъ, что элементы коннекса, коихъ касательные коннексы опредѣляютъ такія гомографическія преобразованія, которыя каждую точку пространства переводятъ въ точку нѣкоторой особенной плоскости, и каждую плоскость—въ плоскость, проходящую черезъ нѣкоторую особенную точку, образуютъ коинциденцію

$$a_x^m u_x^n = o,$$
$$o = a_x^{m-1} b_x^{m-1} c_x^{m-1} d_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} u_\gamma^{n-1} u_\delta^{n-1} (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)$$

съ характеристиками $4m(m-1)$, $4m(n-1)+4n(m-1)$, $4n(n-1)$. Координаты точки и плоскости, о которыхъ упомянуто выше, опредѣлятся изъ уравненій:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2 f}{dx_i du_k} z_i = o \quad (k=1,2,3,4) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2 f}{dx_i du_k} w_k = o \quad (i=1,2,3,4),\text{—}$$

въ разсматриваемомъ случаѣ каждая изъ этихъ системъ будетъ совмѣстною. Очевидно, что особенные элементы коннекса принадлежатъ указанной коинциденціи. При томъ если элементъ (x,u) тангенціально-особенный, то точка x будетъ такою точкою, о которой выше шла рѣчь,—ибо она выполняетъ уравненія

$$m\frac{df}{du_k} \equiv \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2 f}{dx_i du_k} x_i = o.$$

Если же (x,u) есть элементъ точечно-особенный, то его плоскость выполняетъ уравненіе

$$n\frac{df}{dx_i} \equiv \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2 f}{dx_i du_k} u_k = o$$

и будетъ тою плоскостью, о которой выше шла рѣчь.

Указанный путь можетъ приводить и къ установленію болѣе сложныхъ коваріантныхъ образованій. Такъ составляя уравненіе комплекса прямыхъ, соединяющихъ какую нибудь точку ξ пространства съ точкою ξ', соотвѣтствующею ей въ касательномъ коннексѣ, получимъ уравненіе

$$a_x^{m-1} b_x^{m-1} (ab\pi\pi)(\alpha\beta pp) u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} = o,$$

которое опредѣляетъ геометрическое образованіе, имѣющее своимъ элементомъ сочетаніе (точка, прямая, плоскость), порядка $2m-2$, класса $2n-2$ и ранга 2; для каждой данной прямой p это уравненіе изображаетъ вмѣстѣ съ $f(x,u)=o$ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ (x,u) соотвѣтствующій которымъ касательный коннексъ даетъ начало тетраедральному комплексу, содержащему данную прямую p. Такимъ образомъ для каждой данной прямой p совокупность элементовъ, обладающихъ вышеуказаннымъ свойствомъ, составляетъ коинциденцію

$$a_x^m u_x^n = o \quad a_x^{m-1} b_x^{m-1} (ab\pi\pi)(\alpha\beta pp) u_\alpha^{n-1} u_\beta^{n-1} = o,$$

съ характеристическими числами $2m(m-1)$, $2m(n-1)+2n(m-1)$, $2n(n-1)$.

Если всѣ производныя $\dfrac{d^2 f}{dx_i du_k}$ равны нулю, уравненіе касательнаго коннекса обращается тожественно въ нуль, и для ближайшаго изученія коннекса вблизи подобнаго элемента мы должны обратиться къ коннексамъ (2,1) и (1,2): $a_x^{m-2} u_\alpha^{n-1} a_z^2 w_\alpha = o$ и $a_x^{m-1} u_\alpha^{n-2} a_z w_\alpha^2 = o$ и т. д.

Сказаннаго достаточно, чтобы показать важность касательнаго коннекса для изученія свойствъ коннекса (m,n) вблизи элемента (x,u), и мы видѣли, что для особеннаго элемента касательный коннексъ является выроясденнымъ (ausgeartet). Ограничиваемся сказаннымъ, чтобы не пользоваться еще болѣе свойствами коннекса (1,1), которыя будутъ доказаны только ниже.

§ 7. **Однозначное преобразованіе и родъ коннекса.** Переходъ отъ даннаго коннекса (m,n) къ его сопряженному представляетъ частный случай общаго однозначнаго преобразованія

---

(1) Изученію геометрическихъ конфигурацій этого типа, до сихъ поръ не составлявшихъ предмета изслѣдованій, я надѣюсь посвятить особую работу.

коннекса, преобразованія, которое можетъ быть изображено уравненіями

$$\varrho . y_i = \varphi_i(\overset{p}{x},\overset{q}{u}),\ \ \sigma . v_i = \psi_i(\overset{r}{x},\overset{s}{u})\ \ (i=1,2,3,4).$$

Здѣсь $\varphi_i = o$ четыре коннекса (p,q), $\psi_i = o$ четыре коннекса (r,s). Уравненіе $F(y,v) = o$ преобразованнаго коннекса получается исключеніемъ величинъ ϱ,σ,x,u изъ 8 уравненій преобразованія и изъ уравненія $f(x,u) = o$ даннаго коннекса $(m.n)$.

Порядокъ преобразованнаго коннекса опредѣлится по даннымъ порядку и классу исходнаго коннекса и коннексовъ преобразованія, какъ число элементовъ (y,v), въ которыхъ плоскость v есть данная, а точка y лежитъ на данной прямой $\gamma y = o$, $\delta y = o$, т. е. какъ число общихъ рѣшеній системы уравненій,

$$f(x,u) = o,\ \ \gamma y = o,\ \ \delta y = o,\ \ \varrho y_i = \varphi_i,\ \ \sigma . v_i = \psi_i,$$

въ которыхъ v_i разсматриваемъ данными и которыя замѣняются такими:

$$\begin{array}{lll} f(x,u) = o, & \Sigma\gamma_i\varphi_i(x,u) = o, & \Sigma\delta_i\varphi_i(x,u) = o, \\ v_1\psi_2 - v_2\psi_1 = o, & v_2\psi_3 - v_3\psi_2 = o, & v_3\psi_4 - v_4\psi_3 = o; \end{array}$$

иными словами искомое число равно числу элементовъ, общихъ коинциденціи $\Sigma\gamma_i\varphi_i = o$, $\Sigma\delta_i\varphi_i = o$, —которой характеристики суть p^2, $2pq$, q^2, и парѣ поверхностей $f(x,u) = o$, $v_1\psi_2 - v_2\psi_1 = o$, $v_2\psi_3 - v_3\psi_2 = o$, $v_3\psi_4 - v_4\psi_3 = o$ съ характеристиками $ms^3 + 3nrs^2$, $3mrs^2 + 3nsr^2$, $nr^3 + 3msr^2$.

Число это на основаніи ранѣе выведенныхъ формулъ равно

$$m' = p^2(ms^3 + 3nrs^2) + 2pq(3mrs^2 + 3nsr^2) + q^2(nr^3 + 3msr^2).$$

Совершенно аналогичнымъ образомъ классъ преобразованнаго коннекса опредѣлится, какъ число элементовъ, общихъ коинциденціи

$$\Sigma c_i\psi_i = o,\ \ \Sigma d_i\psi_i = o$$

съ парою поверхностей

$$f(x,u)=o,\ y_1\varphi_2-y_2\varphi_1=o,\ y_2\varphi_3-y_3\varphi_2=o,\ y_3\varphi_4-y_4\varphi_3=o,$$

и будетъ на основаніи предыдущаго

$$n'=(3npq^2+mq^3)r^2+2rs(2mpq^2+3nqp^2)+s^2(3mqp^2+np^3).$$

Но формулы эти выведены въ предположеніи, что коннексы преобразованія φ_i и ψ_i не имѣютъ никакого особеннаго отношенія къ преобразуемому коннексу $f(x,u)=o$. Въ случаѣ существованія какого-либо отношенія должны быть сдѣланы соотвѣтственныя приведенія.

Допустимъ, напримѣръ, что коннексы $\varphi_i=o$ имѣютъ съ коннексомъ $f=o$ общую пару поверхностей съ характеристиками d, e, h, а коннексъ $\psi_i=o$ пару поверхностей съ характеристиками δ, ε, φ. Въ этомъ случаѣ такія пары поверхностей должны быть исключены, потому что вышеприведенныя системы уравненій удовлетворяются элементами этой пары поверхностей, каковы бы ни были данныя y_i или v_i. А такъ какъ порядокъ пары поверхностей есть число ея элементовъ (x,u), коихъ точка x принадлежитъ данной прямой, то изъ полученныхъ выше характеристическихъ чиселъ надо отнять эти числа d, e, h, δ, ε, φ; такимъ образомъ характеристическія числа пары поверхностей

$$f=o,\ v_1\psi_2-v_2\psi_1=o,\ v_2\psi_3-v_3\psi_2=o,\ v_3\psi_4-v_4\psi_3=o$$

будутъ въ данномъ случаѣ таковы

$$ms^3+3nrs^2-\delta,\ 3mrs^2+3nsr^2-\varepsilon,\ 3msr^2+nr^3-\varphi$$

и слѣдовательно порядокъ преобразованнаго коннекса будетъ въ этомъ случаѣ

$$m'=p^2(ms^3+3ns^2r-\delta)+2pq(3mrs^2+3nsr^2-\varepsilon)+$$
$$q^2(3msr^2+nr^3-\varphi)$$

Точно также характеристики пары поверхностей

$$f=o,\ y_1\varphi_2-y_2\varphi_1=o,\ y_2\varphi_3-y_3\varphi_2=o,\ y_3\varphi_4-y_4\varphi_3=o$$

будутъ теперь

$$mq^3+3npq^2-d,\ 3mpq^2+3nqp^2-e,\ 3mqp^2+np^3-h$$

и потому классъ преобразованнаго коннекса выразится формулою

$$n' = (mq^3 + 3npq^2 - d)r^2 + 2rs(3mpq^2 + 3nqp^2 - e) + (3mqp^2 + np^3 - h)s^2.$$

Примѣняя эти формулы къ случаю преобразованія даннаго коннекса въ сопряженный, когда коннексы преобразованія $\varphi_i \equiv \frac{df}{du_i} = o$ имѣютъ съ $f = o$ общую пару поверхностей съ характеристиками $4m(n-1)^3$, $6m^2(n-1)^2$, $4m^3(n-1)$, а коннексы $\psi_i \equiv \frac{df}{dx_i} = o$ общую пару поверхностей съ характеристиками $4(m-1)n^3$, $6(m-1)^2 n^2$, $4(m-1)^3 n$, и когда $p = m$, $q = n-1$, $r = m-1$, $s = n$, будемъ имѣть:

$$m' = m^2 n^3 + 6m(m-1)n^2(n-1) + 3(m-1)^2 n(n-1)^2,$$
$$n' = m^3 n^2 + 6m^2(m-1)n(n-1) + 3(n-1)^2 m(m-1)^2,$$

чѣмъ и подтверждается результатъ, полученный ранѣе другимъ путемъ.

Дальнѣйшее изученіе однозначныхъ преобразованій коннекса приводитъ къ вопросу о зависимости особенностей преобразованнаго коннекса отъ особенностей исходнаго. Можно установить какъ для коннексовъ, такъ и для коинциденцій и т. д. нѣкоторое характеристическое число—*родъ* конфигураціи [1],—которое остается безъ измѣненія при всѣхъ однозначныхъ преобразованіяхъ, и равенство котораго для двухъ конфигурацій является необходимымъ условіемъ возможности взаимнаго раціональнаго однозначнаго преобразованія. Но при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что въ то время какъ для *пары* (*кривая двоякой кривизны*, *развертывающаяся поверхность*) *существуетъ одно такое число*—родъ каждой особи пары—одинаковое для обоихъ, ибо онѣ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи между собою, для *пары поверхностей*—системы ∞^2 элементовъ—существуетъ, какъ показалъ для поверхностей, Клебшъ—*два* такихъ числа; *бикоинциденція*—система ∞^3 элементовъ - подобно тернарному коннексу—имѣетъ

[1]) Введено Риманномъ. Cayley называетъ это число *дефектомъ*.

такихъ чиселъ *три*, *коинциденція*—*четыре* и *коннексъ*—*пять* подобныхъ чиселъ. Результаты, данные Нётеромъ (Nöther) [1]), измѣняются здѣсь въ томъ отношеніи, что имѣемъ не восемь перемѣнныхъ, а двѣ группы по четыре перемѣнныхъ.

Взявъ за исходный какой-либо элементъ (x,u) коннекса $f(x,u)=o$, можемъ въ этомъ послѣднемъ, какъ фигурѣ пяти измѣреній, выбрать пять независимыхъ направленій перемѣщенія при переходѣ отъ элемента (x,u) къ безконечно-близкому элементу $(x+dx,\ u+du)$. Означаемъ соотвѣтствующія этимъ направленіямъ приращенія $d, d^{\mathrm{I}}, d^{\mathrm{II}}, d^{\mathrm{III}}, d^{\mathrm{IV}}$. Будемъ имѣть тогда пять уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{df}{dx_i}d^{(k)}x_i+\frac{df}{du_i}\,d^{(k)}u_i\right)=0\quad(k=0,1,2,3,4)$$

которыя въ соединеніи съ уравненіями

$$\sum_{i=1}^{i=4}x_i\frac{df}{dx_i}\equiv mf=o,\quad \sum_{i=1}^{i=4}u_i\,\frac{df}{du_i}\equiv nf=o$$

опредѣляютъ величины $\frac{df}{dx_i}$ и $\frac{df}{du_i}$ пропорціональными соотвѣтственнымъ опредѣлителямъ матрицы

$$\left\|\begin{matrix}
dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 & du_1 & du_2 & du_3 & du_4\\
d^{\mathrm{I}}x_1 & d^{\mathrm{I}}x_2 & d^{\mathrm{I}}x_3 & d^{\mathrm{I}}x_4 & d^{\mathrm{I}}u_1 & d^{\mathrm{I}}u_2 & d^{\mathrm{I}}u_3 & d^{\mathrm{I}}u_4\\
d^{\mathrm{II}}x_1 & d^{\mathrm{II}}x_2 & d^{\mathrm{II}}x_3 & d^{\mathrm{II}}x_4 & d^{\mathrm{II}}u_1 & d^{\mathrm{II}}u_2 & d^{\mathrm{II}}u_3 & d^{\mathrm{II}}u_4\\
d^{\mathrm{III}}x_1 & d^{\mathrm{III}}x_2 & d^{\mathrm{III}}x_3 & d^{\mathrm{III}}x_4 & d^{\mathrm{III}}u_1 & d^{\mathrm{III}}u_2 & d^{\mathrm{III}}u_3 & d^{\mathrm{III}}u_4\\
d^{\mathrm{IV}}x_1 & d^{\mathrm{IV}}x_2 & d^{\mathrm{IV}}x_3 & d^{\mathrm{IV}}x_4 & d^{\mathrm{IV}}u_1 & d^{\mathrm{IV}}u_2 & d^{\mathrm{IV}}u_3 & d^{\mathrm{IV}}u_4\\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & o & o & o & o\\
o & o & o & o & u_1 & u_2 & u_3 & u_4
\end{matrix}\right\|,$$

получаемымъ вычеркиваніемъ того столбца, гдѣ стоитъ то x_i или u_k, по которому производится дифференцированіе

Поэтому если добавимъ еще одну строку изъ произвольныхъ параметровъ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, то получаемый такимъ

[1]) Math. Ann. II p. 293—316. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. (1869). См. его-же статью въ Math. Ann. VIII, s. 495—533.

образомъ опредѣлитель, будучи раздѣленъ на сумму

$$\sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i \frac{df}{dx_i} + \sum_{i=1}^{i=4} \beta_i \frac{df}{du_i},$$

даетъ частное, независящее отъ произвольныхъ постоянныхъ α_i и β_i.

Слѣдовательно, если означимъ Θ однородную бикватернарную функцію степени $m-4$ относительно x и $n-4$ относительно u, то выраженіе

$$dJ = \frac{\Theta . \begin{vmatrix} dx_i & d^{\mathrm{I}}x_i & d^{\mathrm{II}}x_i & d^{\mathrm{III}}x_i & d^{\mathrm{IV}}x_i & x_i & o & \alpha_i \\ du_i & d^{\mathrm{I}}u_i & d^{\mathrm{II}}u_i & d^{\mathrm{III}}u_i & d^{\mathrm{IV}}u_i & o & u_i & \beta_i \end{vmatrix}_{(i=1,2,3,4)}}{\sum_{i=1}^{i=4} \left(\alpha_i \frac{df}{dx_i} + \beta_i \frac{df}{du_i}\right)}$$

есть элементъ пятерного интеграла, который совершенно не зависитъ отъ значеній постоянныхъ α и β. Если коэффиціенты Θ опредѣлимъ такъ, чтобы этотъ интегралъ не обращался въ безконечность ни для одного элемента коннекса $f=o$, т. е. чтобы коннексъ $\Theta=o$ содержалъ всѣ особенные элементы коннекса $f=o$, то число коэффиціентовъ, остающихся въ Θ произвольными, и дастъ намъ родъ коннекса. Если, напримѣръ коннексъ $f=o$ не имѣетъ ни двойной коинциденціи, ни особенной бикоинциденціи и т. д., то Θ не подчинено ни одному условію, а потому

$$p = \frac{n-1.\ n-2.\ n-3}{6} \cdot \frac{m-1.\ m-2.\ m-3}{6}.$$

Это первое изъ пяти характеристическихъ чиселъ коннекса, о которыхъ было говорено выше. Остальныя опредѣлятся, какъ таковыя же числа коинциденціи $f=o$, $\Theta=o$, которой, очевидно, принадлежатъ всѣ особенные элементы коннекса $f=o$. Въ предыдущемъ выраженіи мы можемъ для упрощенія принять два изъ пяти перемѣщеній d, d^{I}, d^{II}, d^{III}, d^{IV} такъ, чтобы при одномъ оставались безъ перемѣны x_i, при другомъ u_i; примемъ напримѣръ

$$d'''x_1 = d'''x_2 = d'''x_3 = d'''x_4 = o$$
$$d^{IV}u_1 = d^{IV}u_2 = d^{IV}u_3 = d^{IV}u_4 = o$$

и кромѣ того, можемъ принять равными нулю или всѣ α_i или всѣ β_i.

Такимъ образомъ dJ приметъ одинъ изъ нижеслѣдующихъ двухъ видовъ:

$$dJ = \frac{\Theta \times \begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & d''x_i & o & d^{IV}x_i & x_i & o & \alpha_i \\ du_i & d'u_i & d''u_i & d'''u_i & o & o & u_i & o \end{vmatrix}}{\sum\limits_{k=1}^{k=4} \alpha_k \frac{df}{dx_k}} \quad (i=1,2,3,4)$$

или

$$dJ = \frac{\Theta \times \begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & d''x_i & o & d^{IV}x_i & x_i & o & o \\ du_i & d'u_i & d''u_i & d'''u_i & o & o & u_i & \beta_i \end{vmatrix}}{\sum\limits_{k=1}^{k=4} \beta_k \frac{df}{du_k}} \quad (i=1,2,3,4)$$

Опредѣлитель, стоящій въ числителѣ перваго изъ этихъ выраженій, можно представить въ видѣ суммы трехъ произведеній:

$$(dx_1 d^{IV}x_2 x_3 \alpha_4).(d'u_1 d''u_2 d'''u_3 u_4) -$$
$$-(d'x_1 . d^{IV}x_2 . x_3 \alpha_4)(du_1 . d''u_2 . d'''u_3 . u_4) +$$
$$+(d''x_1 . d^{IV}x_2 . x_3 . \alpha_4)(du_1 . d'u_2 . d'''u_3 u_4),$$

а стоящій въ числителѣ второго выраженія подъ видомъ:

$$(d'x_1 d''x_2 d^{IV}x_3 x_4)(du_1 d'''u_2 u_3 \beta_4) -$$
$$-(dx_1 d''x_2 d^{IV}x_3 x_4)(d'u_1 d'''u_2 u_3 \beta_4) +$$
$$+(dx_1 d'x_2 d^{IV}x_3 x_4)(d''u_1 d'''u_2 u_3 \beta_4).$$

Подобнымъ образомъ опредѣляется родъ коинциденціи— пересѣченія двухъ коннексовъ (m,n) и (m',n'). Линейно-независимыхъ направленій перемѣщенія здѣсь четыре d, d', d'', d'''. Для каждаго изъ нихъ имѣемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \left(\frac{df}{dx_i} d^{(k)}x_i + \frac{df}{du_i} d^{(k)}u_i \right) = o,$$

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\varphi}{dx_i}d^{(k}x_i+\frac{d\varphi}{du_i}d^{(k)}u_i\right)=o\ \ (k=o,1,2,3).$$

Присоединяя сюда уравненія

$$\sum_{i=1}^{i=4}x_i\frac{df}{dx_i}\equiv mf=o;\ \sum_{i=1}^{i=4}u_i\frac{df}{du_i}\equiv n.f=o;$$

$$\sum_{i=i}^{i=4}x_i\frac{d\varphi}{dx_i}\equiv m'\varphi=o;\ \sum_{i=1}^{i=4}u_i\frac{d\varphi}{du_i}\equiv n'\varphi=o;$$

получимъ, что 12 уравненій опредѣляютъ миноры матрицы

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}\frac{df}{dx_1}&\frac{df}{dx_2}&\frac{df}{dx_3}&\frac{df}{dx_4}&\frac{df}{du_1}&\frac{df}{du_2}&\frac{df}{du_3}&\frac{df}{du_4}\\ \frac{d\varphi}{dx_1}&\frac{d\varphi}{dx_2}&\frac{d\varphi}{dx_3}&\frac{d\varphi}{dx_4}&\frac{d\varphi}{du_1}&\frac{d\varphi}{du_2}&\frac{d\varphi}{du_3}&\frac{d\varphi}{du_4}\end{array}\right\|$$

пропорціональными соотвѣтственнымъ минорамъ матрицы

$$\left\|\begin{array}{cccccccc}dx_1&dx_2&dx_3&dx_4&du_1&du_2&du_3&du_4\\ d'x_1&d'x_2&d'x_3&d'x_4&d'u_1&d'u_2&d'u_3&d'u_4\\ d''x_1&d''x_2&d''x_3&d''x_4&d''u_1&d''u_2&d''u_3&d''u_4\\ d'''x_1&d'''x_2&d'''x_3&d'''x_4&d'''u_1&d'''u_2&d'''u_3&d'''u_4\\ x_1&x_2&x_3&x_4&o&o&o&o\\ o&o&o&o&u_1&u_2&u_3&u_4\end{array}\right\|$$

Означивъ Θ_1 однородную функцію степени $m+m'-4$ относительно x_i и степени $n+n'-4$ относительно u_i, будемъ имѣть, что дифференціалъ

$$dJ=\frac{\Theta_1\left|\begin{array}{cccccccc}dx_i&d'x_i&d''x_i&d'''x_i&x_i&o&a_i&\alpha_i\\ du_i&d'u_i&d''u_i&d'''u_i&o&u_i&b_i&\beta_i\end{array}\right|\ (i=1,2,3,4)}{\left|\begin{array}{cc}\sum_{i=1}^{i=4}a_i\frac{df}{dx_i}+\sum_{i=1}^{i=4}b_i\frac{df}{du_i}, & \sum_{i=1}^{i=4}\alpha_i\frac{df}{dx_i}+\sum_{i=1}^{i=4}\beta_i\frac{df}{du_i}\\ \sum_{i=1}^{i=4}a_i\frac{d\varphi}{dx_i}+\sum_{i=1}^{i=4}b_i\frac{d\varphi}{du_i}, & \sum_{i=1}^{i=4}\alpha_i\frac{d\varphi}{dx_i}+\sum_{i=1}^{i=4}\beta_i\frac{d\varphi}{du_i}\end{array}\right|}$$

совершенно не зависитъ отъ значеній параметровъ a, b, α и β. Это будетъ дифференціалъ четверного интеграла. Если коэффиціенты въ Θ, подберемъ такъ, чтобы этотъ послѣдній оставался конеченъ для всякой конечной области внутри коинциденціи $f=o$, $\varphi=o$, то остающееся затѣмъ число произвольныхъ коэффиціентовъ въ Θ, и покажетъ намъ *родъ* π *коинциденціи*. Такимъ образомъ, если коинциденція будетъ самая общая, т. е. не будетъ обладать особенною бикоинциденціею etc, то число это будетъ имѣть такое значеніе:

$$\pi=\frac{(m+m'-1)(m+m'-2)(m+m'-3)}{6}\times\frac{(n+n'-1)(n+n'-2)(n+n'-3)}{6}$$
$$-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$
$$-\frac{(m'-1)(m'-2)(m'-3)}{6}\cdot\frac{(n'-1)(n'-2)(n'-3)}{6},$$

потому что вмѣсто Θ_1 мы можемъ взять

$$\Theta_1+M.f+N.\varphi,$$

гдѣ $M=o$—коннексъ $(m'-4, n'-4)$, а $N=o$—коннексъ $(m-4, n-4)$, и съ помощью произвольныхъ коэффиціентовъ M и N уничтожить соотвѣтственное число коэффиціентовъ Θ_1.

Другія характеристическія числа коинциденціи $f=o$, $\varphi=o$ получатся, какъ таковыя бикоинциденціи

$$f=o,\ \varphi=o,\ \Theta_1=o.$$

Для упрощенія можемъ принять въ предыдущемъ выраженіи

$$d'''x_1=d'''x_2=d'''x_3=d'''x_4=o$$
$$d''u_1=d''u_2=d''u_3=d''u_4=o$$

и кромѣ того

$$a_i=\alpha_i=o\ (i=1,2,3,4)\ \text{или же}\ b_i=\beta_i=o\ (i=1,2,3,4).$$

Получимъ при этомъ

$$dJ=\frac{-\Theta_1\times(x_1d''x_2a_3\alpha_4)(du_1d''u_2d'''u_3u_4)}{\Sigma a_i\frac{df}{dx_i}\times\Sigma\alpha_i\frac{d\varphi}{dx_i}-\Sigma a_i\frac{d\varphi}{dx_i}\times\Sigma\alpha_i\frac{df}{dx_i}}$$
$$=\Theta_1.\frac{(dx_1d'x_2d''x_3x_4)(u_1d'''u_2b_3\beta_4)}{\Sigma b_i\frac{df}{du_i}\times\Sigma\beta_i\frac{d\varphi}{du_i}-\Sigma b_i\frac{d\varphi}{du_i}\times\Sigma\beta_i\frac{df}{du_i}}$$

Родъ бикоинциденціи опредѣляется аналогично. Представимъ себѣ, что даны три коннекса (m,n), (m',n'), (m'',n''). Три возможныя независимыя направленія перемѣщенія пусть будутъ d, d', d''. Тогда имѣемъ рядъ уравненій:

$$\sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{dx_i}d^{(k)}x_i + \sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{du_i}d^{(k)}u_i = o,$$

$$\Sigma_i\frac{d\varphi}{dx_i}d^{(k)}x_i + \Sigma_i\frac{d\varphi}{du_i}d^{(k)}u_i = o, \quad \Sigma_i\frac{d\psi}{dx_i}d^{(k)}x_i + \Sigma_i\frac{d\psi}{du_i}d^{(k)}x = o,$$

которыя въ соединеніи съ уравненіями

$$\Sigma x_i\frac{df}{dx_i} = o \quad \Sigma x_i\frac{d\varphi}{dx_i} = o, \quad \Sigma x_i\frac{d\psi}{dx_i} = o,$$

$$u_i\Sigma\frac{df}{du_i} = o, \quad \Sigma u_i\frac{d\varphi}{du_i} = o, \quad \Sigma u_i\frac{d\psi}{du_i} = o$$

даютъ для опредѣлителей третьяго порядка, составленныхъ изъ

$$\frac{df}{dx_i}, \quad \frac{d\varphi}{dx_k}, \quad \frac{d\psi}{dx_l}, \quad \frac{df}{du_i}, \quad \frac{d\varphi}{du_k}, \quad \frac{d\psi}{du_l},$$

выраженія, пропорціональныя соотвѣтственнымъ опредѣлителямъ изъ dx, $d'x$, $d''x$, du, $d'u$, $d''u$. Такимъ образомъ оказывается независящимъ отъ постоянныхъ $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ выраженіе

$$dJ_1 = \frac{\Theta_2\begin{vmatrix} dx_i & d'x_i & d''x_i & x_i & o & a_i & b_i & c_i \\ du_i & d'u_i & d''u_i & o & u_i & \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i\frac{df}{dx_i} + \Sigma\alpha_i\frac{df}{du_i} & \Sigma b_i\frac{df}{dx_i} + \Sigma\beta_i\frac{df}{du_i} & \Sigma c_i\frac{df}{dx_i} + \Sigma\gamma_i\frac{df}{du_i} \\ \Sigma a_i\frac{d\varphi}{dx_i} + \Sigma\alpha_i\frac{d\varphi}{du_i} & \Sigma b_i\frac{d\varphi}{dx_i} + \Sigma\beta_i\frac{d\varphi}{du_i} & \Sigma c_i\frac{d\varphi}{dx_i} + \Sigma\gamma_i\frac{d\varphi}{du_i} \\ \Sigma a_i\frac{d\psi}{dx_i} + \Sigma\alpha_i\frac{d\psi}{du_i} & \Sigma b_i\frac{d\psi}{dx_i} + \Sigma\beta_i\frac{d\psi}{du_i} & \Sigma c_i\frac{d\psi}{dx_i} + \Sigma\gamma_i\frac{d\psi}{du_i} \end{vmatrix}}$$

Выбирая коэффиціенты Θ_2—бикватернарной формы степени $m+m'+m''-4$ относительно x и степени $n+n'+n''-4$ относительно u—такъ, чтобы тройной интегралъ оставался конечнымъ для всякой области внутри бикоинциденціи $f=\varphi=\psi=o$, получимъ число оставшихся произвольныхъ коэффиціентовъ равнымъ *роду* $\mathfrak{p}$ *бикоинциденціи*. Такъ если эта бикоинциденція не обладаетъ особенною парою поверхностей, число это будетъ равно числу коэффиціентовъ Θ_2, которые не могутъ быть уничтожены съ помощью уравненій $f=o$, $\varphi=o$, $\psi=o$, и будетъ поэтому равно

$$\mathfrak{p}=\frac{(m+m'+m''-1)(m+m'+m''-2)(m+m'+m''-3)}{1.2.3}\times$$

$$\times\frac{(n+n'+n''-1)(n+n'+n''-2)(n+n'+n''-3)}{1.2.3}-$$

$$\frac{(m'+m''-1)(m'+m''-2)(m'+m''-3)}{6}\times\frac{(n'+n''-1)(n'+n''-2)(n'+n''-3)}{6}$$

$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}\times\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}-$$

$$\frac{(m''+m-1)(m''+m-2)(m''+m-3)}{6}\times\frac{(n''+n-1)(n''+n-2)(n''+n-3)}{6}$$

$$+\frac{(m'-1)(m'-2)(m'-3)}{6}\times\frac{(n'-1)(n'-2)(n'-3)}{6}-$$

$$\frac{(m+m'-1)(m+m'-2)(m+m'-3)}{6}\times\frac{(n+n'-1)(n+n'-2)(n+n'-3)}{6}$$

$$+\frac{(m''-1)(m''-2)(m''-3)}{6}\times\frac{(n''-1)(n''-2)(n''-3)}{6}.$$

Остальныя два характеристическія числа получаются, какъ таковыя пары поверхностей, опредѣленной уравненіями

$$f=o,\ \varphi=o,\ \psi=o \text{ и } \Theta_2=o.$$

Предыдущее выраженіе можно упростить. Хотя нельзя уже принимать равными нулю ни всѣхъ $d^{(k)}x$, ни всѣхъ $d^{(k)}u$ но за то можемъ одинъ разъ положить

$$a_i=b_i=c_i=o(i=1,2,3,4)$$

другой

$$\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=o\ \ (i=1,2,3,4).$$

Такимъ образомъ будемъ имѣть:

$$dJ_1 = \frac{\Theta_2.(dx_1.d'x_2.d''x_3x_4).(u_1\alpha_2\beta_3\gamma_4)}{\begin{vmatrix} \Sigma\alpha_i\frac{df}{du_i} & \Sigma\beta_i\frac{df}{du_i} & \Sigma\gamma_i\frac{df}{du_i} \\ \Sigma\alpha_i\frac{d\varphi}{du_i} & \Sigma\beta_i\frac{d\varphi}{du_i} & \Sigma\gamma_i\frac{d\varphi}{du_i} \\ \Sigma\alpha_i\frac{d\psi}{du_i} & \Sigma\beta_i\frac{d\psi}{du_i} & \Sigma\gamma_i\frac{d\psi}{du_i} \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\Theta_2.(du_1d'u_2d''u_3u_4)\,(x_1a_2b_3c_4)}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i\frac{df}{dx_i} & \Sigma b_i\frac{df}{dx_i} & \Sigma c_i\frac{df}{dx_i} \\ \Sigma a_i\frac{d\varphi}{dx_i} & \Sigma b_i\frac{d\varphi}{dx_i} & \Sigma c_i\frac{d\varphi}{dx_i} \\ \Sigma a_i\frac{d\psi}{dx_i} & \Sigma b_i\frac{d\psi}{dx_i} & \Sigma c_i\frac{d\psi}{dx_i} \end{vmatrix}}$$

Родъ пары поверхностей, одинаковый, какъ упомянуто, для той и другой поверхности пары,—потому что точки одной и касательныя къ другой находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи,—опредѣлится по извѣстнымъ правиламъ. Также опредѣлимъ и родъ пары (кривая двоякой кривизны, развертывающаяся поверхность).

Послѣ этихъ опредѣленій вернемся къ первому полученному нами выраженію, которое давало намъ родъ коннекса. Мы уже упоминали, что число это является инваріантомъ по отношенію ко всѣмъ однозначнымъ преобразованіемъ коннекса. Доказательство этой теоремы представитъ лишь видоизмѣненіе доказательства Нӧтера (l. c. стр. 306 и сл.), которое in extenso дается имъ для формы $\varphi(x_1 \ldots x_5)$, и прямо распространяется благодаря подготовительнымъ разсужденіямъ въ общемъ видѣ на случай произвольнаго числа перемѣнныхъ; видоизмѣненія, представляющіяся здѣсь, происходятъ отъ того, что имѣемъ не восемь однородныхъ перемѣнныхъ, а двѣ группы по четыре однородныхъ перемѣнныхъ. Доказательство это въ сжатомъ видѣ заключается въ слѣдующемъ. Пусть dJ,—которое, предполагаемъ, не приведено къ упрощенному виду, — подвергли однозначному преобразованію, опредѣляемому уравненіями:

$$\varrho x_i = \varphi_i(\overset{p\,q}{y,v}),\quad \sigma u_i = \psi_i(\overset{r\,s}{y,v}).$$

Отъ этого преобразованія функція $f(x,u)$ переходитъ въ $M.F(y,v)$, гдѣ F есть неприводимый множитель въ результатъ подстановки. Множитель M, какъ замѣчаетъ Нötеръ, въ преобразованномъ уравненіи долженъ быть откинутъ, ибо F не можетъ быть функціей φ и ψ, если должно быть возможнымъ обратное опредѣленіе y и v раціональнымъ образомъ черезъ x и u изъ уравненій $\varrho x_i = \varphi_i(y,v)$, $\sigma u_i = \psi_i(y,v)$ съ помощью уравненія $F(y,v) = o$. Мы имѣемъ:

$$d^{(k)}x_i = \sum_{j=1}^{j=4} \left(\frac{dx_i}{dy_j} d^{(k)}y_j + \frac{dx_i}{dv_j} d^{(k)}v_j\right);$$

$$x_i = \frac{1}{p}\Sigma_j \frac{dx_i}{dy_j} y_j = \frac{1}{q}\Sigma_j \frac{dx_i}{dv_j} v_j,$$

$$d^{(k)}u_i = \sum_{j=1}^{j=4} \left(\frac{du_i}{dy_j} d^{(k)}y_j + \frac{du_i}{dv_j} d^{(k)}v_j\right);$$

$$u_i = \frac{1}{r}\Sigma_j \frac{du_i}{dy_j} y_j = \frac{1}{s}\Sigma_j \frac{du_i}{dv_j} v_j.$$

Подставляя эти значенія въ dJ получимъ

$$dJ = dJ' = \frac{\Theta.D. \begin{vmatrix} dy_i & d'y_i & d''y_i & d'''y_i & d^{\mathrm{IV}}y_i & y_i & o & k_i \\ dv_i & d'v_i & d''v_i & d'''v_i & d^{\mathrm{IV}}v_i & o & v_i & l_i \end{vmatrix}}{(ps-qr)M\left\{\Sigma k_i \dfrac{dF}{dy_i} + \Sigma l_i \dfrac{dF}{dv_i}\right\}},$$

гдѣ

$$D = \Sigma \pm \frac{dx_1}{dy_1} \cdot \frac{dx_2}{dy_2} \cdot \frac{dx_3}{dy_3} \cdot \frac{dx_4}{dy_4} \cdot \frac{du_1}{dv_1} \cdot \frac{du_2}{dv_2} \cdot \frac{du_3}{dv_3} \cdot \frac{du_4}{dv_4} =$$

$$= \frac{d(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4)}{d(y_1, y_2, y_3, y_4, v_1, v_2, v_3, v_4)}$$

$$k_i = \overset{1..4}{\Sigma_j} \alpha_j \frac{dy_i}{dx_j} + \overset{1..4}{\Sigma_j} \beta_j \frac{dy_i}{du_j}, \quad l_i = \Sigma_j \alpha_j \frac{dv_i}{dx_j} + \Sigma_j \beta_j \frac{dv_i}{du_j}.$$

Въ справедливости этого убѣдимся непосредственнымъ перемноженіемъ D и другого опредѣлителя, стоящаго въ числителѣ; столбцы 5-й и 6-й будутъ: $\begin{matrix} px_i & qx_i \\ ru_i & su_i \end{matrix}$ замѣнимъ сначала 5-й черезъ $\begin{matrix}(p+\lambda q)x_i \\ (r+\lambda s)u_i\end{matrix}$ и возьмемъ $r+\lambda s = o$; затѣмъ 6-й замѣнимъ черезъ $(q+\mu\frac{ps-qr}{s})x_i$ и возьмемъ $q+\mu\frac{ps-qr}{s}=o$; тогда и придемъ къ первоначальному выраженію dJ.

Величины k_i и l_i остаются безъ вліянія на результатъ и потому могутъ быть разсматриваемы, какъ ранѣе α_i и β_i, произвольными постоянными. Выраженіе dJ сохранило прежній видъ, и теперь остается показать, что если соотвѣтствіе между $f(x,u)=o$ и $F(y,v)=o$ однозначно, то въ числителѣ преобразованнаго выраженія $\Theta.D$ есть такая цѣлая функція отъ y и v, что $\frac{\Theta.D}{M}$ можетъ быть сдѣлана съ помощію $F(y,v)=o$ *цѣлою* функціею, которая при томъ для кратныхъ (особенныхъ) образованій, принадлежащихъ $F=o$, обладаетъ тѣми же свойствами по отношенію къ dJ', какими Θ—по отношенію къ dJ. Для этого нужно показать, что $\Theta.D=o$ проходитъ черезъ элементы, общіе $M=o$ и $F=o$, соотвѣтственно столько же разъ, какъ само M, что и даетъ право заключить что съ помощью $F=o$ $\frac{\Theta.D}{M}$ можетъ быть сдѣлано цѣлою функціей. Показывая затѣмъ, что для кратныхъ образованій $F=o$ эта цѣлая функція $\frac{\Theta.D}{M}$ обладаетъ относительно dJ' тѣми свойствами, помощью коихъ Θ дѣлаетъ dJ нормированнымъ выраженіемъ, покажемъ тѣмъ самымъ, что при однозначномъ соотвѣтствіи изъ каждаго нормированнаго для $f=o$ выраженія dJ получается выраженіе dJ', нормированное для $F=o$, и слѣдовательно число p—родъ коннекса одинаково для обоихъ выраженій.

Для доказательства первой половины, слѣдуя Нётеру, должны разобрать въ отдѣльности тѣ случаи, когда какой нибудь конфигураціи, принадлежащей $f=o$, соотвѣтствуетъ въ $F=o$ конфигурація не того же числа измѣреній, но большаго или меньшаго, въ каждомъ изъ этихъ случаевъ разсмотрѣть, какого порядка малости будетъ D, M и Θ и показать, что во всѣхъ случаяхъ порядокъ малости $\Theta.D$ по крайней мѣрѣ равенъ порядку малости M. Случаи, которые представляются при этомъ суть слѣдующіе:

1°. Элементу (x,u) коннекса $f(x,u)=o$ соотвѣтствуетъ коинциденція въ $F=o$. Тогда формулы преобразованія приводятся къ виду

$$\varrho x_i = A.\varphi_i,\ \sigma u_i = A.\psi_i \qquad (i=1,2,3)$$
$$\varrho x_4 = \varphi_4,\quad \sigma u_4 = \psi_4$$

D оказывается пропорціонально A^5 и такимъ образомъ уничтожается до пятаго порядка для всѣхъ элементовъ коинциденціи $A=o$, $F=o$.

2°. Элементу $f=o$ соотвѣтствуетъ въ $F=o$ бикоинциденція; типомъ такого преобразованія является:

$$\varrho x_i = A\varphi_i + B\varphi'_i,\quad \sigma u_i = A.\psi_i + B.\psi'_i \quad (1,2,3)$$
$$\varrho x_4 = \varphi_4,\quad \sigma u_4 = \psi_4$$

и D исчезаетъ до четвертаго порядка для всѣхъ элементовъ бикоинциденціи

$$A=o,\ B=o,\ F=o.$$

До четвертаго же порядка исчезаетъ D и въ томъ случаѣ если парѣ (кривая дв. крив., разверт. поверхн.), входящей въ составъ $f=o$ соотвѣтствуетъ въ $F=o$ нѣкоторая коинциденція.

3°. До третьяго порядка уничтожается D, если нѣкоторому элементу коннекса $f=o$ соотвѣтствуетъ въ преобразованномъ пара поверхностей, или парѣ (кривая дв. кривая, развертыв. пов.)—бикоинциденція или наконецъ парѣ поверхностей коинциденція.

Для обратныхъ случаевъ допустимъ, какъ это дѣлаетъ Нётеръ, что не всѣ φ_i, ψ_i уничтожаются одновременно до порядка выше перваго. При этомъ можно различать случаи, когда $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\varphi_4$ или $\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$ имѣютъ общими не пару поверхностей, а бикоинциденцію или коинциденцію, или даже восемь коннексовъ φ, ψ имѣютъ общую бикоинциденцію или коинциденцію.

$\Theta.D$ должно уничтожаться для всѣхъ элементовъ (y,v), уничтожающихъ M, и при томъ до того же порядка, и $\dfrac{\Theta.D}{M}$ должно уничтожаться для всѣхъ особенныхъ элементовъ коннекса $F=o$, все сводится такимъ образомъ къ тому, чтобы показать что $\Theta.D$ уничтожается всякій разъ, какъ выполняется та или другая изъ двухъ системъ уравненій

$$M\frac{dF}{dy_h}=o=\sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{dx_i}{dy_h}+\sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{du_i}\cdot\frac{dy_i}{du_h}\quad(h=1,2,3,4)$$

$$M\frac{dF}{dv_h}=o=\sum_{i=4}^{i=1}\frac{df}{xd_i}\cdot\frac{dx_i}{dv_h}+\sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{du_i}\cdot\frac{du_i}{dv_h}\quad(h=1,2,3,4)$$

или обѣ одновременно.

Если элементъ (x,u) которому въ $F=o$ соотвѣтствуетъ коинциденція, бикоинциденція, пара поверхностей или пара (кривая, развертывающаяся), есть простой элементъ коннекса $f=o$, то M можетъ уничтожаться для элементовъ этой коинциденціи etc. до порядка не выше перваго; D при этомъ уничтожается до порядковъ соотвѣтственно 5-го, 4-го, 3-го и 2-го, такъ что $\frac{D}{M}$ — до порядка 4-го, 3-го, 2-го или перваго resp. Если для элемента (x,u) уничтожаются всѣ производныя f до μ—го порядка включительно, то до μ—го порядка уничтожаются $M\frac{dF}{dy_h}$, $M\frac{dF}{dv_h}$. Θ для конечности интеграла должно уничтожаться (въ соотвѣтственныхъ случаяхъ) до порядка $(\mu-5)$-го, $(\mu-4)$-го и т. д., D до 5-го, до 4-го и т. д., и $\frac{\Theta.D}{M}$ уничтожается такъ, что dJ' будетъ нормированнымъ выраженіемъ.

Если одновременно уничтожаются всѣ φ_i или всѣ ψ_i, или тѣ и другія вмѣстѣ, то M уничтожается до порядка $m-1$, $n-1$, $m+n-1$ resp. Θ—до порядка $m-4$, $n-4$, $m+n-8$; но при этомъ D обращается въ 0 до порядковъ 3-го, 3-го или 7-го, и $\frac{\Theta.D}{M}$ конечно; такимъ детальнымъ разборомъ всѣхъ могущихъ представиться частныхъ случаевъ и докажемъ теорему сохраненія рода Ее можно было бы получить проще помощью такихъ соображеній [1]). Если имѣемъ однозначное и однозначно обратимое преобразованіе

$$\varrho x_i=\varphi_i(y,v),\quad \sigma u_i=\psi_i(y,v)$$
$$\varrho' y_i=\Phi_i(x,u),\quad \sigma' v_i=\Psi_i(y,v),$$

[1]) Ср. *Clebsch.* и *Gordan.* Theorie der Abelschen Functionen. 1866. S. 53.

то каждому элементу (x,u) коннекса $f(x,u)=o$ соотвѣтствуетъ по этимъ уравненiямъ вообще одинъ совершенно опредѣленный элементъ коннекса $F=o$, въ который преобразуется $f=o$ и каждому элементу $F=o$—совершенно опредѣленный вообще элементъ (x,u) коннекса $f=o$. Если поэтому составимъ интегралъ вышеуказаннаго типа и при томъ перваго вида,—т. е. соотвѣтствующiй цѣлой функцiи Θ, то каждому такому интегралу въ перемѣнныхъ (x,u) соотвѣтствуетъ совершенно опредѣленный интегралъ въ перемѣнныхъ (v,y) и также перваго вида, и обратно каждый интегралъ перваго вида въ перемѣнныхъ (y,v) приводитъ къ такому же интегралу въ перемѣнныхъ (x,u). Число этихъ интеграловъ должно поэтому быть одинаково въ обоихъ случаяхъ, а такъ какъ число это совпадаетъ съ числомъ произвольныхъ коэффицiентовъ въ множителѣ Θ нормированнаго интеграла, то и заключаемъ, что *родъ коннекса не мѣняется при всѣхъ его однозначныхъ и однозначно-обратимыхъ преобразованiяхъ.*

Примѣчанiе къ стр. 53. Два слова относительно употребляемыхъ мною координатъ прямой. Слѣдуя Вельшу (Wien. Ber. B. 98. Abt. IIa S. 5128 и Math. Ann. B. 37 S. 141) я пользуюсь символикою Грассманна, полагая координаты прямой $p_{ik}=x_iy_k-x_ky_i$ равными произведенiю Грассманновыхъ альтернативныхъ комплексныхъ чиселъ: $p_{ik}=p_ip_k=-p_kp_i$, такъ что $p_{ii}=p_ip_i=o$. Но символическiе множители вида $(abpp)$ сохраняю подъ видомъ опредѣлителей и не свожу ихъ, какъ это дѣлаетъ Вельшъ, къ линейнымъ множителямъ помощью введенiя новыхъ альтернативныхъ символовъ. При этомъ надо имѣть въ виду, что напр., $(abpp)^m$ означаетъ произведенiе m множителей, каждый изъ которыхъ должно замѣнить черезъ $\Sigma(ab)_{ik}p_{ik}$ и тогда уже производить перемноженiе и потомъ замѣну символовъ a, b дѣйствительными коэффицiентами. Условiя, что точка x лежитъ на прямой p, или плоскость u проходитъ черезъ прямую π, напишутся

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix}\right\| = o, \quad \left\|\begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \\ \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{matrix}\right\| = o,$$

это значитъ, что нулю уравниваются опредѣлители, получаемые вычеркиванiемъ каждаго столбца этихъ матрицъ.

ГЛАВА II.

Главная коинциденція коннекса.

§ 8. **Общія замѣчанія о коинциденціяхъ.** Два уравненія

$$f(x,u)=o,\ \varphi(x,u)=o \tag{1}$$

опредѣляютъ конфигурацію, которую называемъ коинциденціею. Ея особенные элементы суть тѣ, въ коихъ или точка x есть особенная точка кривой, принадлежащей плоскости u въ коинциденціи, или u есть особенная касательная развертывающейся поверхности, принадлежащей точкѣ x. Для особенныхъ элементовъ имѣемъ поэтому или уравненія

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{\frac{d\varphi}{dx_1}}=\frac{\frac{df}{dx_2}}{\frac{d\varphi}{dx_2}}=\frac{\frac{df}{dx_3}}{\frac{d\varphi}{dx_3}}=\frac{\frac{df}{dx_4}}{\frac{d\varphi}{dx_4}}=\lambda \tag{2}$$

выражающія, что двѣ поверхности $f(x,u)=o$ и $\varphi(x,u)=o$, соотвѣтствующія плоскости u, касаются между собою въ точкѣ x, или же уравненія

$$\frac{\frac{df}{du_1}}{\frac{d\varphi}{du_1}}=\frac{\frac{df}{du_2}}{\frac{d\varphi}{du_2}}=\frac{\frac{df}{du_3}}{\frac{d\varphi}{du_3}}=\frac{\frac{df}{du_4}}{\frac{d\varphi}{du_4}}=\mu. \tag{3}$$

выражающія что двѣ поверхности, соотвѣтствующія точкѣ x, имѣютъ общую точку прикосновенія къ плоскости u.

Кромѣ этихъ особенныхъ элементовъ, въ коинциденціи выдѣляются еще тѣ ея элементы, которыхъ точкамъ соотвѣтствуетъ не развертывающаяся, а какая-либо поверхность, или плоскости — не кривая, а поверхность. Примѣръ подобнаго рода точекъ представляетъ коинциденція, опредѣляемая двумя коннексами:

$$(4) \quad \begin{cases} o = \varphi_1(x).\theta_1(u) + \varphi_2(x).\theta_2(u) + \varphi_3(x).\theta_3(u) + \varphi_4(x).\theta_4(u) \\ o = \psi_1(x).\theta_1(u) + \psi_2(x).\theta_2(u) + \psi_3(x).\theta_3(u) + \psi_4(x).\theta_4(u) \end{cases}$$

гдѣ φ_i функціи $x_1 \ldots x_4$ степени m, ψ_i функціи $x_1 \ldots x_4$ степени m', и θ_i—функціи $u_1 \ldots u_4$ степени n. Всѣмъ точкамъ, координаты которыхъ выполняютъ уравненія

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)} = \frac{\varphi_3(x)}{\psi_3(x)} = \frac{\varphi_4(x)}{\psi_4(x)} = \nu \qquad (5)$$

или

$$\varphi_1.\psi_2 - \varphi_2.\psi_1 = o, \quad \varphi_2.\psi_3 - \varphi_3.\psi_2 = o, \quad \varphi_3.\psi_4 - \varphi_4.\psi_3 = o \qquad (5')$$

соотвѣтствуетъ въ обоихъ коннексахъ одна и таже поверхность

$$0 = \Sigma\varphi_i(x).\theta_i(u) \equiv \nu\Sigma\psi_i(x).\theta_i(u)$$

и въ коинциденціи слѣдовательно не развертывающаяся поверхность, опредѣляемая двумя уравненіями въ плоскостныхъ координатахъ, а общая поверхность. По аналогіи съ основными (главными) точками коннекса, которыя могутъ быть соединяемы въ элементъ его со всякою плоскостью пространства, и эти точки будемъ называть *основными* (*главными*) *точками* коинциденціи.

Понятно, что двойственный случай коинциденціи

$$\sum_{i=1}^{i=4}\theta_i(u).\varphi_i(x) = o, \quad \sum_{i=1}^{i=4}\chi_i(u).\varphi_i(x) = o \qquad (6)$$

приводитъ къ основнымъ плоскостямъ этой коинциденціи,—которыя опредѣляются изъ уравненій

$$\theta_i(u).\chi_k(u) - \theta_k(u).\chi_k(u) = o \quad (i,\kappa = 1,2,3,4) \qquad (7)$$

независимыхъ между которыми три.

Не трудно опредѣлить число основныхъ точекъ коинциденціи опредѣленной вышеприведенными коннексами (m,n), (m',n). Уравненія $(5')$ степени $m+m'$ каждое даютъ вообще $(m+m')^3$ системъ, но въ числѣ этихъ послѣднихъ есть посторонні я. Дѣйствительно, $(5')$ удовлетворяются въ предположеніи

$$\varphi_2=o,\ \psi_2=o,\ \varphi_3\psi_1-\varphi_1\psi_3=o,$$

и

$$\varphi_3=o,\ \psi_3=o,\ \varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1=o,$$

но опредѣляемыя рѣшенія этими системами уравненій должны быть отброшены, потому что они не всѣ коэффиціенты при $\theta_i(u)$ въ (4) дѣлаютъ пропорціональными. Эти системы даютъ каждая $mm'(m+m')$ рѣшеній, и слѣдовательно для числа основныхъ точекъ получаемъ

$$\begin{aligned} M&=(m+m')^3-2mm'(m+m')=(m^2+m'^2)(m+m')= \\ &=m^3+m'm^2+m'^2m+m'^3. \end{aligned} \tag{8}$$

Подобнымъ образомъ найдемъ число основныхъ плоскостей коинциденціи (6) (m,n), (m,n'):

$$\begin{aligned} N&=(n+n')^3-2nn'(n+n')=(n^2+n'^2)(n+n')= \\ &=n^3+n'n^2+n'^2n+n'^3. \end{aligned} \tag{9}$$

Если оба коннекса, опредѣляющіе коинциденцію, одного порядка m и класса n, то общая имъ коинциденція будетъ принадлежать и всѣмъ коннексамъ, уравненіе которыхъ можетъ быть представлено уравненіемъ

$$f(x,u)+\lambda\varphi(x,u)=o, \tag{10}$$

гдѣ λ—произвольная постоянная. Опредѣляемая этимъ уравненіемъ совокупность ∞^1 коннексовъ (m,n) можетъ быть названа *пучкомъ* коннексовъ. Всѣ элементы пространства помощью этого уравненія распредѣляются на ∞^1 коннексовъ (m,n), каждый по ∞^5 элементовъ. Дѣйствительно, какой бы ни взяли элементъ пространства (x^0,u^0), параметру λ можно дать такое значеніе, что соотвѣтственный коннексъ будетъ содержать этотъ элементъ. Дѣйствительно точкѣ x^0 принадлежитъ пучекъ поверхностей $f(x^0,u)+\lambda\varphi(x^0,u)=o$, имѣющихъ общую огибающую - развертывающуюся поверхность $f(x^0,u)=o$, $\varphi(x^0,u)=o$. Если плоскость u^0 касается этой развертывающейся поверхности, то элементъ (x^0,u^0) взятый нами, будетъ принадлежать каждому изъ коннексовъ пучка (10). Въ противномъ случаѣ достаточно опредѣлить λ изъ уравненія $f(x^0,u^0)+\lambda.\varphi(x^0,u^0)=o$,

такъ что $$f(x,u).\varphi(x^0,u^0)—f(x^0,u^0).\varphi(x,u)=o$$

есть уравненіе коннекса пучка (10), которому принадлежитъ взятый нами элементъ (x^0,u^0) пространства.

Если коннексы, опредѣляющіе коинциденцію, не одного порядка и класса, то нельзя уже соединять ихъ уравненія, какъ выше. Коинциденція, ими опредѣляемая, будетъ тогда принадлежать всѣмъ коннексамъ

$$M.f(x,u)+N.\varphi(x,u)=o$$

гдѣ M и N бикватернарныя формы порядковъ $m_0—m$ и $m_0—m'$ и классовъ $n_0—n$, $n_0—n'$ соотвѣтственно—гдѣ m_0 и n_0 соотв. наибольшія изъ чиселъ m,m' и n,n'.

Но теперь уже недостаточно взять два какихъ-либо коннекса этой системы для опредѣленія коинциденціи (mm', $mn'+nm'$, nn'),—нужно взять три различныхъ коннекса, чтобы не вошло постороннихъ коинциденцій, и шесть, чтобы не вошло ни одного посторонняго элемента.

Методъ полученія совмѣстныхъ инваріантовъ и коваріантовъ двухъ формъ, примѣняемый въ случаѣ двухъ квадратичныхъ формъ, — когда составляемъ инваріанты формы $f+\lambda\varphi$, и коэффиціенты при степеняхъ λ даютъ искомые инваріанты примѣнимъ поэтому въ еще болѣе ограниченномъ числѣ случаевъ, чѣмъ въ теоріи кривыхъ и поверхностей,—ибо здѣсь требуется равенство двухъ чиселъ — порядка и класса. Если же $m \gtrless m'$ или $n \gtrless n'$, то остается примѣнять другіе методы и прежде всего примѣнять различные инваріантные дифференціальные процессы, наиболѣе важнымъ изъ которыхъ является процессъ составленія поляръ формы φ относительно формы f. Такое названіе [1]) придается слѣдующей составляемой изъ $f = a_x{}^m u_\alpha{}^n$ и $\varphi = a'_x{}^{m'} u_\alpha{}^{n'}$ формѣ

$$f' = (f,\varphi), = a_{\alpha'}{}^{n'} a'_\alpha{}^{m'} a_x{}^{m-n'} u_\alpha{}^{n-m'} \tag{11}$$

(предполагаемъ, что $m' \overline{\lessgtr} n$, $n' \overline{\lessgtr} m$). Если $m' \overline{\lessgtr} n - m'$, $n' \overline{\lessgtr} m - n'$, то можемъ составить поляру φ относительно f',— вторую поляру φ относительно f.

$$a_{\alpha'}{}^{n'} a'_\alpha{}^{m'} a_{\beta'}{}^{n'} b'_\alpha{}^{m} a_x{}^{m-2n'} u_\alpha{}^{n-2m'}$$

и т. д. Если первая поляра (f,φ) уничтожается тождественно, формы f и φ называются *аполярными*, — по терминологіи Рейе (Crelle's Journ. B. 78 etc. F. Meyer's Bericht, s. 180, 258). Въ частности при $m = n'$, $n = m'$ поляра обращается въ инваріантъ $a_{\alpha'}{}^m a'_\alpha{}^n$, уничтоженіе котораго есть по Розанесу и Штуди условіе „сопряженности" двухъ формъ $a_x{}^m u_\alpha{}^n$ и $a'_x{}^n u_{\alpha'}{}^m$. Послѣдній терминъ представляется излишнимъ, такъ какъ такія „сопряженныя" формы $a^m{}_x u^n{}_\alpha$ и $a'_x{}^n u_{\alpha'}{}^m$ суть формы аполярныя [2]).

§ 9. **Главная коинциденція.** *Тождественный* коннексъ $u_x = \sum_{i=1}^{i=4} u_i x_i = o$ выдѣляетъ изъ ∞^6 элементовъ (x,u) тѣ, которыхъ точка x лежитъ въ плоскости u, и каждой точкѣ подчиняетъ ее же, какъ центръ связки плоскостей, каждой плоскости— саму плоскость, какъ основаніе лежащихъ въ ней точекъ. Изъ числа элементовъ коннекса (m,n), опредѣленнаго уравненіемъ $f(x,u) = o$ тождественный коннексъ выдѣляетъ тѣ ∞^4 элементовъ, въ которыхъ точка и плоскость находятся въ соединеніи. Совокупность этихъ элементовъ образуетъ *главную коинциденцію* даннаго коннекса, которая такимъ образомъ опредѣляется парою уравненій

$$f(x,u) = o, \quad u_x = o. \tag{12}$$

---

[1]) По Study (Ternäre Formen). Болѣе употребительный терминъ Ueberschiebung поддается съ гораздо большимъ трудомъ передачѣ на русскій языкъ.

[1]) Вопросу объ аполярности въ теоріи кривыхъ посвящена книга Фр. Мейера: Apolarität u. rationale Curven (1883). Къ вопросу о распространеніи ея результатовъ на теорію коннексовъ я надѣюсь возратиться впослѣдствіи.

Каждой точкѣ x подчиняется въ главной коинциденціи коническая поверхность класса n, огибаемая плоскостями, соотвѣтствующими точкѣ, и имѣющая поэтому вершину въ этой точкѣ x. Каждой плоскости u подчиняется плоская кривая порядка m, лежащая въ этой плоскости. Черезъ каждую прямую пространства проходитъ $m+n$ элементовъ. Возьмемъ какую нибудь прямую, лучевыя координаты которой суть p_{ik}, а осевыя π_{ik} и вообразимъ рядъ коническихъ поверхностей, соотвѣтствующихъ различнымъ точкамъ этой прямой. Обертывающую этихъ коническихъ поверхностей получимъ, исключая координаты x_i изъ (12) и изъ уравненій, выражающихъ что точка x лежитъ на прямой. Изъ трехъ уравненій

$$u_x = o,\ (xpp)_1 = o,\ (xpp)_2 = o,$$

которыя можно писать также

$$u_x = o,\ x_2.\pi_{12} + x_3\pi_{13} + x_4\pi_{14} = o,\ x_1.\pi_{12} + x_3\,\pi_{32} + x_4\pi_{42} = o,$$

получимъ

$$x_i = (u\pi\pi)_i$$

и подставляя въ уравненіе коннекса, придемъ къ искомому уравненію огибающей

$$(au\pi\pi)^m u_\alpha{}^n = o \tag{13}$$

Такимъ образомъ, *если точка x пробѣгаетъ прямую съ осевыми координатами π_{ik}, то ея конусъ главной коинциденціи огибаетъ поверхность $(m+n)$-го класса, и прямая π будетъ m-кратною прямою поверхности.*

Уравненіе (13) опредѣляетъ коваріантный разсматриваемому коннексу (m,n) коннексъ съ элементомъ (прямая, плоскость), въ которомъ каждой прямой пространства соотвѣтствуетъ поверхность U_π, огибаемая конусами коинциденціи; каждой плоскости пространства соотвѣтствуетъ комплексъ прямыхъ, каждая изъ которыхъ проходитъ черезъ одну изъ точекъ кривой главной коинциденціи, соотвѣтствующей плоскости, какъ это видно по самому способу полученія уравненія;—слѣдовательно это есть *уравненіе кривой главной коинциденціи въ линейчатыхъ координатахъ,*—ибо вообще уравненіе кривой двоякой кривизны въ линейчатыхъ координатахъ получаемъ выражая, что прямая встрѣчаетъ кривую (ср. *G. Salmon.* Géom. à 3 dim. n° 316 (D). P. II. 1892).

Подобнымъ образомъ чтобы получить геометрическое мѣсто кривыхъ главной коинциденціи, соотвѣтствующихъ плоскостямъ пучка, имѣющаго осью нѣкоторую прямую p, исключаемъ перемѣнныя $u_1 u_2 u_3 u_4$ изъ уравненій:

$$f \equiv a_x{}^m u_\alpha{}^n = o, \; u_x = o, \; u_2 \cdot p_{12} + u_3 p_{13} + u_4 p_{14} = o,$$
$$u_1 p_{12} + u_3 p_{32} + u_4 p_{42} = o.$$

Изъ трехъ послѣднихъ найдемъ $u_i = (xpp)_i$ и подставляя въ первое, получимъ уравненіе искомаго геометрическаго мѣста:

$$(14) \qquad a_x{}^m (\alpha xpp)^n = o.$$

Такимъ образомъ, *если плоскость u вращается около лежащей въ ней прямой p, то соотвѣтственная кривая главной коинциденціи описываетъ поверхность порядка $m+n$, имѣющую p n-кратною прямою.* Послѣднее ясно изъ того, что опредѣлитель $(\alpha xpp) = \Sigma \alpha_i (xpp)_i$ имѣетъ минорами $(xpp)_i$ выраженія, обращающіяся въ ноль, если точка x лежитъ на прямой p. Уравненіе (14) представляетъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая) [нѣкоторыя свойства котораго были изучены Бонсдорфомъ [1]] порядка $m+n$ и ранга n. Данной произвольно прямой p въ немъ соотвѣтствуетъ вышеупомянутая поверхность, а каждой данной точкѣ x пространства—комплексъ лучей n-аго ранга, всѣ прямыя котораго лежатъ въ плоскостяхъ u, огибающихъ конусъ главной коинциденціи, принадлежащій точкѣ x, и слѣдовательно встрѣчаютъ его ребра.

Для случая $m=2$, $n=1$ формы эти получены Р. Краузе [2]).

Здѣсь умѣстно будетъ дать еще одинъ коваріантъ коннекса f, содержащій перемѣнныя всѣхъ трехъ родовъ. Опредѣлимъ плоскость u условіемъ проходить черезъ точку y и

---

[1]) Ueb. ein neues Connex im Raume, Bull. Acad. S.Pétersbourg. XXVII p. 560.

[1]) Ueb. ein Gebilde d. analyt. Geometrie des Raumes, welches dem Connex 2. Ord. u. 1. Classe entspricht. Math. Ann. XIV. S. 294 — 322. Въ то же время это—распространеніе на пространство теоремъ Линдеманна (Leçons de Géom. III, 389),—что легче увидѣть замѣняя координаты прямой опредѣлителями изъ координатъ двухъ ея точекъ y и z.

прямую p,—тогда по предыдущему $u_i=(ypp)_i$; точку x условіемъ лежать на пересѣченіи нѣкоторой плоскости v съ тою же прямою p, которой координаты возьмемъ теперь осевыя π; тогда $\varrho x_i=(u\pi\pi)_i$. Чтобы элементъ (x,u), полученный такимъ образомъ, принадлежалъ данному коннексу, точка y и плоскость v не могутъ быть взяты произвольно, но должны выполнять уравненіе

$$(av\pi\pi)^m(\alpha ypp)^n=o. \tag{15}$$

Такъ какъ элементъ (x,u) при этомъ необходимо принадлежитъ главной коинциденціи, то эту форму и умѣстно было выводить именно здѣсь. Такъ какъ v и y текущія координаты то мы имѣемъ право писать вмѣсто нихъ u и x, и форма приметъ видъ

$$(au\pi\pi)^m(\alpha xpp)^n=o. \tag{15a}$$

Предполагая, что (x,u) элементъ даннаго коннекса, мы получаемъ такимъ образомъ слѣдующій результатъ: *прямыя пространства, обладающія тѣмъ свойствомъ, что заданный элементъ* (x,u) *пространства даетъ въ пересѣченіи съ такою прямою элементъ главной коинциденціи коннекса* (m,n), *образуютъ комплексъ ранга* $m+n$. (Пересѣченіе прямой p съ элементомъ (x,u) есть элементъ, составленный изъ точки пересѣченія плоскости u съ прямою p и плоскости, соединяющей прямую p съ точкою x).

Само по себѣ уравненіе (15a) опредѣляетъ коннексъ съ элементомъ (точка, прямая, плоскость) порядка n, класса m и ранга $m+n$. Въ этой конфигураціи каждому элементу (x,u) подчиняется комплексъ $(m+n)$-го ранга и каждой прямой—коннексъ (n,m). Если составимъ для соотвѣтствующаго какой-нибудь прямой p коннекса (n,m) условіе его аполярности относительно исходнаго коннекса, то получимъ уравненіе

$$(ab\pi\pi)^m(\alpha\beta pp)^n=o. \tag{16}$$

Замѣтивъ, что здѣсь символы a,α и b,β совершенно равнозначущи, и обмѣнъ между ними вводитъ множитель $(-1)^{m+n}$, заключаемъ, что при $m+n$ нечетномъ эта форма тожественно равна нулю, какова бы ни была прямая p. Такимъ образомъ *если рангъ главной коинциденціи коннекса* (m,n) *есть число* *нечетное, то всякой прямой пространства принадлежитъ составленный вышеуказаннымъ способомъ коннексъ* (который назовемъ *взаимнымъ* данному) *аполярный относительно исходнаго. Если же главная коинциденція будетъ четнаго ранга, то аполярными данному будутъ только тѣ его взаимные коннексы, которые принадлежатъ прямымъ комплекса, опредѣленнаго уравненіемъ* (16).

При выводѣ коваріанта $(au\pi\pi)^m(axpp)^n$ можно было не предполагать, что π_{ik} и p_{ik} означаютъ соотвѣтственно осевыя и лучевыя координаты одной и той же прямой; — можно считать, что это координаты двухъ различныхъ прямыхъ. Тогда уже этотъ коваріантъ не будетъ приводить къ элементамъ главной коинциденціи, но инваріантныя по отношенію къ самому коннексу свойства сохранятся. Ниже мы воспользуемся этимъ замѣчаніемъ.

— Каждому коннексу соотвѣтствуетъ совершенно опредѣленная главная коинциденція. Но данная главная коинциденція принадлежитъ не одному только коннексу $f(x,u)=o$, но и всякому другому, котораго уравненіе приводится къ виду

$$f+M.u_x=o,$$

гдѣ $M=o$ — уравненіе какого либо коннекса $(m-1,\ n-1)$. Произвольностью послѣдняго мы можемъ воспользоваться для упрощенія коннекса, который кладемъ въ основу при изученіи данной главной коинциденціи. Мы можемъ, напр. уничтожить

$$\frac{m.\overline{m+1}.\overline{m+2}}{6}\cdot\frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{6}$$

коэффиціентовъ коннекса, такъ что главная коинциденція зависитъ только отъ

$$\frac{\overline{m+1}.\overline{m+2}}{1.2}\times\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.2}\times\frac{m+n+2}{3} \qquad (17)$$

постоянныхъ; можно поставить и другія требованія.

Между коннексами $f+M.u_x$ всегда существуетъ одинъ нормальнаго вида. Дѣйствительно, какъ показалъ Горданъ [1]),

[1]) Ueb. Combinanten. Math. Ann. V. s. 95. Здѣсь § 4 и слѣд.

всякая форма $f(x,u)$ можетъ быть разложена въ рядъ по цѣлымъ и положительнымъ степенямъ u_x, такъ что коэффиціенты разложенія суть формы $f_0, f_1, \ldots$ нормальнаго вида; такимъ образомъ, если f_0—первый членъ этого разложенія, то

$$f = f_0 + M.u_x\,,$$

и разсматривая главную коинциденцію коннекса $f = o$ можемъ опредѣлять ее уравненіями

$$u_x = o;\; f_0 = o,$$

гдѣ f_0 уже форма нормальнаго вида

§ 10. **Связь главной коинциденціи съ уравненіями въ частныхъ производныхъ 1 порядка.** Особенный интересъ изученію главныхъ коинциденцій придаетъ то обстоятельство, что съ каждою главной коинцидекціей связано нѣкоторое дифференціальное уравненіе въ частныхъ производныхъ 1. порядка, къ которому придемъ слѣдующимъ образомъ.

Построимъ въ точкѣ x пространства принадлежащую ей въ главной коинциденціи

$$f = o,\; u_x = o$$

коническую поверхность, — огибаемую проходящими черезъ точку x плоскостями, касательными къ поверхности U, принадлежащей точкѣ x въ коннексѣ $f = o$, — и возьмемъ какую-нибудь изъ числа этихъ ∞^1 плоскостей. Возьмемъ далѣе элементъ $(x + dx, u + du)$, безконечно-близкій къ (x,u) и выполняющій уравненіе $(u + du)_{x+dx} = o$,

Пусть точка $x + dx$ лежитъ въ плоскости u, такъ, что $u_{x+dx} = o$. Тогда предыдущее уравненіе, которое можно писать

$$u_{x+dx} + \Sigma du_i(x_i + dx_i) = o,$$

приметъ видъ

$$\Sigma du_i(x_i + dx_i) = o,$$

или если отбросимъ члены второго порядка малости

$$\Sigma x_i du_i = o.$$

Такъ какъ $u_x = o$, то отсюда имѣемъ

$$o = u_x + \Sigma x_i du_i \equiv \Sigma(u_i + du_i)x_i$$

т. е. плоскость $u+du$ проходитъ черезъ точку x. Два такіе безконечно близкіе элементы наз. *соединенными* или элементами въ соединеніи.

Если возьмемъ другую точку $x+d'x$, безконечно-близкую къ x и лежащую въ плоскости u, то три точки $x, x+dx, x+d'x$ плоскость эту вполнѣ опредѣляютъ, такъ что координаты ея выразятся:

$$\sigma . u_i = (x dx d'x)_i .$$

Условіе, чтобы плоскость эта была касательною къ конусу главной коинциденціи, будетъ:

$$f(x, (x dx d'x)) \equiv a_x{}^m \, (\alpha x dx d'x)^n = o$$

Переходя отъ точки x къ сосѣдней съ нею точкѣ $x+dx$, лежащей въ плоскости u, и опредѣляя безконечно-близкую къ u плоскость $u+du$, проходящую черезъ $x+dx$ такъ, чтобы элементы (x,u) и $(x+dx, u+du)$ были въ соединеніи, и элементъ $(x+dx, u+du)$ принадлежалъ разсматриваемой главной коинцинденціи, и повторяя тоже построеніе для всѣхъ безконечно-близкихъ къ x точекъ плоскости u, затѣмъ для всѣхъ точекъ, безконечно-близкихъ къ этимъ точкамъ и лежащихъ въ плоскостяхъ, безконечно-мало уклоняющихся отъ u и т. д., построимъ постепенно поверхность по безконечно-малымъ ея частямъ, подобно тому какъ кривую огибаемъ, переходя отъ нѣкоторой точки ея къ другой, безконечно къ ней близкой, по нѣкоторой прямой, — которая будетъ касательной къ кривой въ первой точкѣ, потомъ отъ второй точки къ третьей — по прямой, безконечно-мало уклоняющейся отъ первой и проходящей черезъ вторую точку и т. д.

Точка и безконечно-малая площадка на проходящей черезъ нее плоскости образуютъ „элементъ поверхности". Координаты $x_1 .. x_4$, точекъ получаемой такимъ образомъ поверхности суть функціи двухъ независимыхъ перемѣнныхъ, — означимъ ихъ ξ_1, ξ_2, — это будутъ нѣкоторыя функціи отъ $x_1 .. x_4$, видъ которыхъ обусловливается требованіемъ принадлежности элементовъ поверхности къ коннексу.

Произвольностью выбора приращенiй dx и $d'x$ воспользуемся, чтобы взять

$$\varrho dx_i = \frac{dx_i}{d\xi_1} d\xi_1, \qquad \varrho d'x_i = \frac{dx_i}{d\xi_2} d\xi_2;$$

u_i оказываются пропорцiональны опредѣлителямъ матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{dx_1}{d\xi_1} & \frac{dx_2}{d\xi_1} & \frac{dx_3}{d\xi_1} & \frac{dx_4}{d\xi_1} \\ \frac{dx_1}{d\xi_2} & \frac{dx_2}{d\xi_2} & \frac{dx_3}{d\xi_2} & \frac{dx_4}{d\xi_2} \end{matrix} \right\|$$

Условiе, чтобы элементъ $\left(x, (x \frac{dx}{d\xi_1} \frac{dx}{d\xi_2}) \right)$ принадлежалъ коннексу, напишется.

$$f(x_1 (x \frac{dx}{d\xi_1} \frac{dx}{d\xi_2})) \equiv a_x{}^m (ax \frac{dx}{d\xi_1} \frac{dx}{d\xi_2})_n = 0. \qquad \text{(I)}$$

Въ частности, если возьмемъ прямоугольныя координаты,— всего проще

$$x_1 = z, \; x_2 = y, \; x_3 = x, \; x_4 = 1,$$

а за ξ_1 и ξ_2 возьмемъ y и x, и означимъ для краткости

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

то получимъ

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = 1 : -q : -p : px + qy - z,$$

и предыдущее уравненiе приметъ видъ

$$f(z, y, x, 1; 1, -q, -p, px + qy - z) = 0 \qquad \text{(I')}.$$

Можно было бы исходить изъ двойственнаго представленiя: взять принадлежащую нѣкоторой плоскости u плоскую кривую C_m и на ней точку x; затѣмъ черезъ послѣднюю двѣ безконечно-близкiя къ u плоскости $u + du$, $u + d'u$; тогда координаты точки x выразятся $\varrho x_i = (udud'u)_i$.

Беремъ плоскости $u+du$ etc., безконечно близкія къ u, и на лежащихъ въ нихъ кривыхъ главной коинциденціи точки $x+dx$ такъ, чтобы элементы (x,u), $(x+dx, u+du)$ находились въ соединеніи; съ точками $x+dx$ повторимъ тѣ-же построенія и получимъ такимъ образомъ нѣкоторую поверхность, координаты которой суть функціи параметровъ η_1, η_2. Произвольностью малыхъ приращеній du, $d'u$ можно воспользоваться, чтобы взять

$$\sigma\, du_i = \frac{du_i}{d\eta_1} d\eta_1,\ \sigma' d'u_i = \frac{du_i}{d\eta_2} d\eta_2;$$

такимъ образомъ

$$\varrho' x_i = \left(u \frac{du}{d\eta_1}\ \frac{du}{d\eta_2}\right)_i;$$

внося эти значенія въ уравненіе коннекса, получимъ

$$\left(au \frac{du}{d\eta_1}\ \frac{du}{d\eta_2}\right)^m u_x{}^n = o, \text{—} \qquad \text{(II)}$$

условіе, чтобы точка пересѣченія плоскостей

$$u,\ u + \frac{du}{d\eta_1} d\eta_1,\ \ u + \frac{du}{d\eta_2} d\eta_2$$

лежала на кривой C_m, принадлежащей плоскости u въ (12).

Опредѣляемая этимъ уравненіемъ семья поверхностей характеризуется тѣмъ, что каждая изъ касательныхъ къ нимъ плоскостей u имѣетъ своею точкою прикосновенія x — одну изъ точекъ лежащей въ этой плоскости кривой главной коинциденціи коннекса $f=o$, иными словами каждая изъ поверхностей этой семьи покрыта элементами этой коинциденціи. Слѣдовательно, если разсматривать эти поверхности, какъ мѣста точекъ, то каждая точка x такой поверхности имѣетъ своею касательною одну изъ принадлежащихъ этой точкѣ въ разсматриваемой коинциденціи плоскостей,—касательныхъ къ конусу этой главной коинциденціи. Но такимъ именно свойствомъ и характеризовалась семья поверхностей, опредѣляемая уравненіемъ (I); *двѣ эти семьи поверхностей*, слѣдовательно, *тожественны*, *и уравненіе* (*II*) *есть такимъ образомъ диффе-*

ренціальное уравненіе въ тангенціальныхъ координатахъ той самой семьи поверхностей, уравненіе которой въ точечныхъ координатахъ есть (I). Поверхностямъ этимъ будемъ придавать поэтому наименованіе *поверхностей главной коинциденціи* коннекса $f=o$, или его *интегральныхъ поверхностей.*

Въ частности, если примемъ $u_1=1$ и за η_1, η_2 возьмемъ $u_2=u$, $u_3=v$ и положимъ $u_4=w$, $\dfrac{dw}{du}=P$, $\dfrac{dw}{dv}=Q$, то

$$x_1 : x_2 = x_3 : x_4 = P.u+Q.v-w : -P : -Q : 1.$$

Подставляя въ уравненіе $f(x,u)=o$ получимъ:

$$f(Pu+Qv-w, -P, -Q, 1;\ 1, u, v, w)=o \qquad (\mathrm{II}').$$

Уравненіе тожественнаго коннекса, т. е. условіе, что точка (x,y,z) лежитъ на плоскости (u,v,w), принимаетъ видъ

$$z+ux+vy+w=0,$$

и мы имѣемъ съ одной стороны

$$\frac{dz}{dx}=-u,\quad \frac{dz}{dy}=-v,\quad z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}=-w,$$

съ другой:

$$\frac{dw}{du}=-x,\quad \frac{dw}{dv}=-y,\ w-u\frac{dw}{du}-v\frac{dw}{dv}=-z\ ^{1}).$$

---

[1]) Въ такомъ видѣ переходъ отъ диффер. уравненія въ частн. произв. 1. пор. въ точечныхъ координатахъ къ такому же уравненію въ плоскостныхъ данъ *Ю. Плюккеромъ*, хотя какъ аналитическій чисто искусственный пріемъ это преобразованіе встрѣчается еще у *Лагранжа* (Mém. sur les intégrales particulières etc. Mem. Ac. Berlin. 1774); Лежандръ примѣнялъ его къ рѣшенію нѣкоторыхъ вопросовъ въ теоріи минимальныхъ поверхностей (Sur l'équat. de la moindre surface, Mém. Acad. Paris. 1787 p. 309), и потому оно получило названіе преобразованія Лежандра; Монжъ, какъ указываетъ Шаль (Aperçu historique Note XXX), занимался вопросомъ о «взаимныхъ поверхностяхъ»,—

установленная такимъ образомъ связь между главною коинциденціею и дифференціальнымъ уравненіемъ 1. порядка можетъ быть формулирована такъ: *пусть дано дифференціальное уравненіе перваго порядка*

$$\varphi(z,y,x,q,p)=o \text{ (a)} \quad (p=\frac{dz}{dx}, q=\frac{dz}{dy}).$$

которыя связаны между собою уравненіями $x'=p$, $y'=q$, $z'=px+qy-z$ (x,y,z—точка первой, x',y',z'—точка второй), но мемуаръ его остался ненапечатаннымъ,—кромѣ заглавія помѣщеннаго въ IV изд. Applic. de l' Anal. à la Géom. (1809 г.). Шаль замѣчаетъ при этомъ, что геометрически такое преобразованіе представляетъ переходъ отъ поверхности $dz-pdx-qdy=o$ къ ея взаимной полярѣ относительно параболоида $x^2+y^2=2z$. Позднѣе на примѣненіе такого преобразованія къ интегрированію уравненій въ частныхъ производныхъ 1. порядка указывалъ Де-Морганъ (Cambr. Phil. Trans. t. VIII. p. 606—613, 1849). Но еще въ 1831 г. Плюккеръ далъ во II-омъ томѣ своихъ Analytisch - geometrische Entwickelungen (отд. II, § 4) переходъ отъ дифференціальнаго уравненія семьи кривыхъ, опредѣленной дифференціальнымъ уравненіемъ 2. порядка въ точечныхъ координатахъ, къ уравненію той же семьи кривыхъ въ тангенціальныхъ координатахъ, и въ томъ же году въ § 2 своей «Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes (Crelle's Journal B. 9.) распространилъ это преобразованіе на уравненія въ частныхъ производныхъ 2. порядка съ 2-мя независимыми перемѣнами,—т. е. далъ переходъ отъ уравненія въ точечныхъ координатахъ

$$f(x,y,z,p,q,r,s,t)=o$$

къ уравненію въ плоскостныхъ «дружественныхъ» взятымъ точечнымъ:

$$o=f(-P,-Q,\ vQ+Pu-w,-u,-v,\ \frac{-T}{S^2-RT},\ \frac{S}{S^2-RT},\ \frac{R}{S^2-RT})$$

исходя изъ уравненія

$$z+ux+vy+w=o,$$

Отмѣтимъ далѣе, что въ томъ же II отдѣлѣ Anal.-geom. Entwickelungen т. II. Плюккеръ даетъ двѣ теоремы, изъ которыхъ первая: Если точку кривой $F(y,x,b,a)=o$ означимъ (y',x') то всѣ кривыя $F(y',x',w,v)=o$ касаются одной и той же прямой $w=b$, $v=a$. — Другая теорема получается, если w,v не тангенціальныя, а также точечныя координаты. Первую теорему можно считать первымъ указаніемъ на ту область изслѣдованій, которая открыта Клебшевымъ ученіемъ о коннексахъ, вторая находится въ такомъ же отношеніи къ созданной другимъ ученикомъ Плюккера Софусомъ Ли

Представимъ его подъ видомъ

$$f(z,y,x;\ -q,\ -p,\ px+qy-z) = 0, \qquad (\mathfrak{b})$$

что можетъ быть сдѣлано безчисленнымъ множествомъ способовъ [1]. *Тогда освобожденное отъ знаменателей уравненіе*

$$f\left(\frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4};\ \ \frac{u_2}{u_1},\ \frac{u_3}{u_1},\ \frac{u_4}{u_1}\right) = 0$$

будетъ уравненіемъ того коннекса, интегральныя поверхности котораго удовлетворяютъ уравненію ($\mathfrak{b}$), *или что тоже уравненію* (*a*).

Такое приведеніе дифференціальныхъ уравненій къ однороднымъ перемѣннымъ, особенно важное при изученіи опредѣляемыхъ такими уравненіями конфигурацій, имѣетъ значеніе и для теоріи самыхъ уравненій. Прежде всего оно приводитъ насъ естественнымъ образомъ къ тому обобщенію понятія интеграла, которое играетъ такую существенную роль въ работахъ С. Ли. Дѣйствительно, уравненіе коннекса вполнѣ симметрично относительно координатъ точки и плоскости, и мы можемъ представлять себѣ семью интегральныхъ поверхностей его опредѣленною уравненіемъ въ координатахъ точечныхъ или плоскостныхъ. Но въ первомъ случаѣ обычному опредѣленію, что рѣшеніе уравненія (a) есть такая поверхность $z=\Omega(x,y)$, что при замѣнѣ въ φ величинъ z, p и q соотвѣтственно черезъ Ω, $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$ уравненіе (a) обращается въ то-

---

теоріи преобразованій прикосновенія, которой мы коснемся въ дальнѣйшемъ. Между тѣмъ ни Шаль, ни Морганъ, ни позднѣе Θ. Е. Орловъ (Мат. Сб. Т. III, с. 167), Mc Cowan (Proc. Edinburgh. Math. Soc. XI p. 2) даже не упоминають о Плюккерѣ, а Линдеманнъ указываетъ только на позднѣйшую System der analyt. Geometrie des Raumes. 1846.

[1]) H. Laurent (Traité d'analyse, t. V. p. 104) полагаетъ, что замѣняя коннексъ $f=o$ коннексомъ $f+M.u_x=o$, получимъ другое дифференціальнзе уравненіе, которое можетъ даже интегрироваться. Это не вѣрно: всѣмъ коннексамъ $f+M.u_x=o$ принадлежитъ *одна и таже* главная коинциденція, и слѣдовательно одно и тоже дифференціальное уравненіе вида (a), но только различнымъ образомъ представляемое подъ видомъ ($\mathfrak{b}$).

жество, не противорѣчитъ предположеніе, что эта поверхность $z = \Omega(x,y)$ есть поверхность развертывающаяся. Двойственнымъ образомъ, кривыя двоякой кривизны могутъ явиться рѣшеніями дифференціальнаго уравненія 1. порядка въ плоскостныхъ координатахъ (II′) т. е. входить въ число интегральныхъ поверхностей этого уравненія и слѣдовательно уравненія (I′), потому что по предыдущему системы интегральныхъ поверхностей (I′) и (II′) совпадаютъ. Такимъ образомъ интегралъ уравненія

$$\varphi\,(z,y,x,p,q) = 0 \qquad \text{(a)}$$

можетъ быть опредѣленъ не однимъ уравненіемъ въ точечныхъ координатахъ, а двумя, и даже тремя — въ томъ частномъ случаѣ, когда поверхность—рѣшеніе (II′) будетъ перваго класса,—т. е. будетъ точкою. Всѣ три типа точечныхъ образованій трехмѣрнаго пространства поверхность, кривая линія и точка могутъ представляться съ одинаковымъ правомъ рѣшеніями уравненія (a). Существеннымъ является не число измѣреній интегральнаго многообразія разсматриваемаго какъ точечное образованіе, но то обстоятельство, что изъ точекъ его и проходящихъ черезъ соотвѣтствующія точки плоскостей можемъ составить ∞^2 элементовъ, причемъ каждые два сосѣдніе элемента находятся въ соединеніи. Чтобы выполнить послѣднее условіе, т. е. удовлетворить уравненію $\Sigma\, u_i dx_i = o$, каждую изъ ∞^2 точекъ поверхности можемъ соединять только съ касательною къ ней въ этой точкѣ плоскостью; каждую изъ ∞^1 точекъ кривой можемъ соединять съ каждою изъ ∞^1 плоскостей, проходящихъ черезъ касательную къ кривой въ этой точкѣ, и наконецъ данную точку—съ каждою изъ ∞^2 проходящихъ черезъ нее плоскостей; во всѣхъ трехъ случаяхъ получаемъ ∞^2 элементовъ (точка, плоскость). Софусъ Ли, первый давшій такое обобщеніе понятія интеграла, вводитъ для общаго обозначенія всѣхъ трехъ типовъ терминъ „элементное многообразіе“ (Elementmannigfaltigkeit), давая ему такое опредѣленіе: *непрерывная совокупность главныхъ элементовъ плоскаго пространства наз. элементнымъ многообразіемъ, если система уравненій, опредѣляющая эту совокупность, удовлетворяетъ уравненію Пфаффа* $\Sigma\, u_i\, dx_i = o$. Оно будетъ q - го измѣренія, если состоитъ изъ ∞^2 элементовъ, и С. Ли означаетъ тогда его элементъ-M_q.

Является вопросъ, сколько различныхъ видовъ элементныхъ многообразій существуетъ въ дифференціальныхъ уравненій 1. порядка съ 3-мя перемѣнными, — исчерпываютъ ли три вышеуказанные типа всѣ возможные, или могутъ быть еще какіе-либо иные типы интегральныхъ многообразій. Оказывается, что *кромѣ приведенныхъ трехъ типовъ интегральныхъ многообразій, другихъ не существуетъ, ими исчерпываются всѣ возможные типы.*

Разсмотримъ дѣйствительно систему уравненій

$$W_1(x,u)=o,\ \ldots,\ u_x=o$$

удовлетворяющую уравненію Пфаффа $\Sigma udx = o$ и дающую элементы, принадлежащіе коинциденціи $f=o,\ u_x=o$. Эта система должна давать хотя одно соотношеніе между одними x или одними u. Остановимся для простоты только на первомъ случаѣ,—второй получится изъ него двойственно.

Если примемъ для начала, что изъ системы $W_1=o, \ldots$ получается только *одно* соотношеніе

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4)=o$$

не содержащее $u_1u_2u_3u_4$, тогда $dx_1 \ldots dx_4$ связаны однимъ лишь соотношеніемъ:

$$\Sigma_i\frac{d\Phi}{dx_i}dx_i=o,$$

которое поэтому должно быть тожественно съ $\Sigma u_i dx_i = o$ для всѣхъ значеній x,u, удовлетворяющихъ уравненіямъ $W_1=o, \ldots$ т. е. въ силу послѣднихъ уравненій должно быть

$$(18)\quad \sigma.u_i=\frac{d\Phi}{dx_i}.$$

Но въ разсматриваемомъ нами случаѣ система $W_1=o, \ldots$ можетъ содержать самое большее три независимыхъ уравненія и потому должна быть эквивалентна тремъ уравненіямъ, получаемымъ изъ (18) исключеніемъ σ съ прибавкою уравненія $\Phi(x_1\ldots x_4)=o$, — которое въ силу этихъ уравненій можно замѣнить также черезъ $u_x=o$. Какова бы ни была функція Φ,—

лишь бы она не приводилась къ постоянной, — уравненіе $\Sigma u dx = o$ выполняется.

Элементное многообразіе, изображаемое уравненіями $\varPhi = o$, $\sigma u_i = \frac{d\varPhi}{dx_i}$ состоитъ изъ ∞^2 элементовъ (x,u), которыхъ точка x лежитъ на поверхности $\varPhi = o$, а плоскость u касается поверхности въ этой точкѣ, — слагается изъ элементовъ, покрывающихъ поверхность $\varPhi = o$. Итакъ, *если уравненія элементнаго многообразія трехмѣрнаго пространства даютъ только одно соотношеніе* $\varPhi = o$ *между одними* x, *то имъ можно дать видъ*

$$\varPhi(x_1 \, . \, . \, x_4) = o, \quad \sigma u_i = \frac{d\varPhi}{dx_i}(i = 1,2,3,4),$$

и соотвѣтственное элементное многообразіе слагается изъ ∞^2 *элементовъ поверхности* $\varPhi = o$.

Если система уравненій $W_1 = o$, $W_2 = o, \ldots$ дающая рѣшеніе даннаго дифференціальнаго уравненія и удовлетворяющая слѣдовательно уравненію $\Sigma u_i dx_i = o$, приводитъ по исключеніи u_i къ *двумъ* независимымъ между собою соотношеніямъ

$$\varPhi_1(x_1 \, . \, . \, x_4) = o, \quad \varPhi_2(x_1 \, . \, . \, x_4) = o,$$

зависящимъ только отъ $x_1 \ldots x_4$, то и dx_i связаны также двумя соотношеніями:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{d\varPhi_1}{dx_i} dx_i = o, \quad \sum_{i=2}^{i=4} \frac{d\varPhi_2}{dx_i} dx_i = o.$$

Два эти уравненія въ соединеніи съ $W_1 = o$, $W_2 = o, \ldots$ должны приводить къ $\Sigma u_i dx_i = o$, а потому упомянутая система, кромѣ $\varPhi_1 = o$, $\varPhi_2 = o$ должна обнимать еще уравненія, которыя получаются по исключеніи λ_1, λ_2 и σ изъ уравненій:

$$(19) \quad \sigma u_i = \lambda_1 \frac{d\varPhi_1}{dx_i} + \lambda_2 \frac{d\varPhi_2}{dx_i}(i = 1,2,3,4).$$

Обратно, пусть даны два произвольныхъ соотношенія $\varPhi_1(x_1 \, . \, . \, x_4) = o$, $\varPhi_2(x_1 \, . \, . \, x_4) = o$ между одними x. Тогда если уравненія (19) совмѣстны между собою и съ $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$, то исключая λ_1, λ_2 изъ этихъ уравненій получимъ необходимо систему уравненій, удовлетворяющихъ уравненію Пфаффа $\Sigma u_i dx_i = o$. Но чтобы уравненія (19) были совмѣстны съ $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$ и возможно было исключить изъ нихъ σ, λ_1 и λ_2, хотя одинъ изъ опредѣлителей матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d\Phi_1}{dx_1} & \frac{d\Phi_1}{dx_2} & \frac{d\Phi_1}{dx_3} & \frac{d\Phi_1}{dx_4} \\ \frac{d\Phi_2}{dx_1} & \frac{d\Phi_2}{dx_2} & \frac{d\Phi_2}{dx_3} & \frac{d\Phi_2}{dx_4} \end{matrix} \right\|$$

долженъ не уничтожаться въ силу $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$. Въ симметричной формѣ получимъ недостающія два уравненія въ дополненіе къ $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$, приравнивая нулю какіе-либо два изъ четырехъ опредѣлителей матрицы

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{d\Phi_1}{dx_1} & \frac{d\Phi_1}{dx_2} & \frac{d\Phi_1}{dx_3} & \frac{d\Phi_1}{dx_4} \\ \frac{d\Phi_2}{dx_1} & \frac{d\Phi_2}{dx_2} & \frac{d\Phi_2}{dx_3} & \frac{d\Phi_2}{dx_4} \end{matrix} \right\|$$

Эта система выполняетъ уравненіе Пфаффа $\Sigma u_i dx_i=o$ и даетъ между одними x только два соотношенія $\Phi_1=o$ и $\Phi_2=o$.

Если же всѣ опредѣлители первой матрицы суть нули, то всѣ $\frac{d\Phi_1}{dx_i}$ пропорціональны соотвѣтственнымъ $\frac{d\Phi_2}{dx_i}$, и мы имѣемъ такимъ образомъ не два независимыхъ соотношенія между $x_1 \ldots x_4$, а только одно, и возвращаемся къ третьему случаю.

Не трудно показать на самомъ дѣлѣ, что при вышеозначенныхъ условіяхъ мы придемъ необходимо къ четыремъ уравненіямъ. Дѣйствительно, кромѣ $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$, будемъ имѣть, умножая $\sigma u_i = \lambda_1 \frac{d\Phi_1}{dx_i} + \lambda_2 \frac{d\Phi_2}{dx_i}$ соотвѣтственно на x_i и суммируя:

$$\sigma . u_x = \lambda'_1 . \Phi_1 + \lambda'_2 . \Phi_2,$$

т. е. такъ какъ уже $\Phi_1=o$, $\Phi_2=o$, то $u_x=o$,—третье уравненіе. Замѣтивъ затѣмъ, что всѣ четыре координаты $x_1 \ldots x_4$

не могутъ быть одновременно равны нулю, такъ что одна по крайней мѣрѣ, — напр., x_4—должна быть отлична отъ нуля, разсматриваемую матрицу можемъ привести къ виду

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & \frac{1}{x_4} & u_x \\ \frac{d\Phi_1}{dx_1} & \frac{d\Phi_1}{dx_2} & \frac{d\Phi_1}{dx_3} & \frac{p}{x_4} & \Phi_1 \\ \frac{d\Phi_2}{dx_1} & \frac{d\Phi_2}{dx_2} & \frac{d\Phi_2}{dx_3} & \frac{q}{x_4} & \Phi_2 \end{matrix} \right\|$$

или въ силу $\Phi_1 = o$, $\Phi_2 = o$, $u_x = o$:

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & o \\ \frac{d\Phi_1}{dx_1} & \frac{d\Phi_1}{dx_2} & \frac{d\Phi_1}{dx_3} & o \\ \frac{d\Phi_2}{dx_1} & \frac{d\Phi_2}{dx_2} & \frac{d\Phi_2}{dx_3} & o \end{matrix} \right\| = o.$$

Единственный отличный отъ нуля опредѣлитель этой матрицы есть $\Sigma \pm u_1 \frac{d\Phi_1}{dx_2} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx_3}$, и мы придемъ такимъ образомъ къ системѣ четырехъ уравненій

$$\Phi_1 = o,\ \Phi_2 = o,\ u_x = o,\ D \equiv \Sigma \pm u_1 \frac{d\Phi_1}{dx_2} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx_3} = o, \qquad \text{ч. и т. д.}$$

Эта система уравненій представляетъ элементное многообразіе M_2, каждый элементъ (x,u) котораго слагается изъ точки x кривой, опредѣленной уравненіями $\Phi_1 = o$, $\Phi_2 = o$, и изъ плоскости u, проходящей черезъ касательную къ кривой въ этой точкѣ; можно поэтому говорить, что *опредѣленное выписанными уравненіями элементное многообразіе состоитъ изъ* ∞^2 *элементовъ кривой* $\Phi_1 = o$, $\Phi_2 = o$.

Остается опредѣлить всѣ элементныя многообразія, изъ уравненій которыхъ получаются три независимыхъ соотношенія между одними x,—которыя слѣдовательно даютъ

$$\rho x_i = a_i (i = 1,2,3,4),\ \rho \gtrless o.$$

Отсюда $dx_i = o$, и уравненіе $\Sigma u_i dx_i = o$ такимъ образомъ выполняется.

Тоже имѣетъ мѣсто и относительно системы: $\rho x_i = a_i$, $U(u_1 \,..\, u_4) = o$, какова бы ни была функція U отъ $u_1 \,..\, u_4$. Такимъ образомъ, *если уравненія элементнаго многообразія трехмѣрнаго пространства даютъ ровно три независимыхъ соотношенія между одними x,—откуда находимъ $\rho x_i = a_i$,—то эти уравненія приводятся или къ виду $\rho x_i = a_i$ или къ виду $\rho . x_i = a_i$, $U(u_1 \,..\, u_4) = o$.*

Болѣе трехъ независимыхъ соотношеній между одними x уравненія элементнаго многообразія давать не могутъ, и такимъ образомъ различныхъ типовъ этихъ послѣднихъ существуетъ только три,—тѣ именно, которые указаны выше.

Замѣтимъ, что какъ показалъ С. Ли, не существуетъ другого уравненія Пфаффа, кромѣ уравненія $\Sigma u_i dx_i = o$, которому бы удовлетворяли всѣ элементныя двухмѣрныя многообразія. Допустимъ, дѣйствительно, что подобное уравненіе существуетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \mathfrak{a}_i(x,u) dx_i + \sum_{i=1}^{i=4} \mathfrak{b}_i(x,u) du_i = o,$$

и пусть ему удовлетворяютъ всѣ элементныя двухмѣрныя многообразія, въ частности слѣдовательно и такія:

$$F(x_1 \,..\, x_4) = o, \quad \sigma u_i = \frac{dF}{dx_i} (i = 1,2,3,4),$$

какова бы ни была функція F. Дифференцируя эти уравненія, имѣемъ:

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{dF}{dxk} dx_k = o, \quad \sigma . du_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2F}{dx_i du_k} dx_k;$$

съ помощью послѣднихъ четырехъ уравненій сумма $\Sigma \mathfrak{b}_i(x,u) du_i$ приметъ видъ:

$$\sum_{k=1}^{k=4} dx_k \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2F}{dx_i dx_k} \mathfrak{b}_i(x,u),$$

и такимъ образомъ должны быть выполнены два уравненія

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{dF}{dx_i} dx_i = o, \quad \sum_{i=1}^{i=4} [\mathfrak{a}_i(x,u) + \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d^2F}{dx_i dx_k} \mathfrak{b}_k(x,u)] dx_i = o.$$

Представивъ первое уравненіе подъ видомъ

$$\sum_{i,k}^{1..4} \frac{d^2F}{dx_i dx_k} x_k dx_i = o,$$

умноживъ на λ и придавъ ко второму, получимъ, уравнивая нулю коэффиціенты при dx_i:

$$\mathfrak{a}_i + \sum_{k=1}^{k=4} \frac{\partial^2 F}{dx_i dx_k}(\mathfrak{b}_k + \lambda x_k) \equiv o. \quad (i = 1,2,3,4)$$

Уравненія эти должны имѣть мѣсто, какова бы ни была функція F, а потому получаемъ

$$\mathfrak{a}_i(x,u) \equiv o, \quad \mathfrak{b}_k(x,u) + \lambda x_k \equiv o,$$

и разсматриваемое уравненіе Пфаффа приводится къ виду — $\lambda . \Sigma x_i du_i = o$, т. е. по предыдущему оказывается тожественнымъ съ $\Sigma u_i dx_i = o$.

Такимъ образомъ, *уравненіе* $\Sigma u_i dx_i = o$ *вмѣстѣ съ тожественно-эквивалентнымъ ему въ силу* $u_x = o$ *уравненіемъ* $\Sigma x_i du_i = o$ *суть единственныя Пфаффовы уравненія, которыя удовлетворяются всѣми элементными многообразіями трехмѣрнаго пространства,—въ томъ числѣ и всѣми элементными —* M_2 вида

$$F(x_1 \,..\, x_4) = o, \quad \sigma . u_i = \frac{dF}{dx_i} (i = 1,2,3,4).$$

Теорія коннексовъ привела насъ естественнымъ образомъ къ тому обобщенію понятія интеграла, которое составляетъ существенную особенность изслѣдованій С. Ли. При дальнѣйшемъ развитіи теоріи дифференціальныхъ уравненій 1. порядка въ духѣ теоріи коннексовъ мы получимъ тѣже результаты, что въ теоріи С. Ли, и разница въ томъ, что *элементъ* состоящій изъ точки и проходящей черезъ нее плоскости, не будетъ элементомъ пространства, но элементомъ тожественнаго коннекса. Геометрическое обоснованіе теорій С. Ли придаетъ имъ большую наглядность и простоту, а введеніе однородныхъ координатъ позволяетъ примѣнять къ теоріи дифференціальныхъ уравненій результаты теоріи инваріантовъ [1]). Въ настоящей работѣ, посвященной геометрическому вопросу. на теоріи аналитической умѣстно останавливаться только въ общихъ чертахъ. Остановимся прежде всего на обобщеніи задачи интегрированія. Въ обычномъ смыслѣ проинтегрировать уравненіе

$$\Phi(x,y,z,p,q)=o$$

значитъ найти всевозможныя уравненія $\omega(x,y,z)=o$ того свойства, чтобы при замѣнѣ въ $\Phi=o$ величинъ z,p,q ихъ значеніями изъ $\omega=o$, $\frac{d\omega}{dx}+p\frac{d\omega}{dz}=o$ и $\frac{d\omega}{dy}+q\frac{d\omega}{dz}=o$ это уравненіе обращалось въ тожество, каковы бы ни были x и y, или чтобы результатъ замѣны p и q ихъ значеніями изъ двухъ послѣднихъ уравненій уничтожался въ силу $\omega=o$; иначе можно задачу интегрированія формулировать еще такъ: въ дополненіе къ данному уравненію $\Phi=o$ нужно установить другое уравненіе $\Phi(z.y.x,p,q)=\alpha$ такъ, чтобы найденныя отсюда значенія p,q обращали лѣвую часть уравненія

$$dz—pdx—qdy=o$$

въ полный дифференціалъ; тогда искомымъ интеграломъ и будетъ

$$\int(dz—pdx—qdy)=\beta.$$

Для этого функція Φ должна выполнять линейное уравненіе

$$P\frac{d\Phi}{dx}+Q\frac{d\Phi}{dy}+(Pp+Qq)\frac{d\Phi}{dz}-(X+pZ)\frac{d\Phi}{dp}-(Y+qZ)\frac{d\Phi}{dq}=o.$$

Такъ именно находится интегралъ уравненія $\Phi=o$ въ способѣ Лагранжа-Шарпи, съ которымъ въ этомъ случаѣ—

[1]) У С. Ли мы находимъ, правда, (очевидно подъ вліяніемъ идей Клебша) преобразованіе уравненія $o=dz-p_1dx_1-\,..\,-p_ndx_n$ къ однородному относительно p виду, — подстановкою вм. p_i отношенія $-\frac{p_i}{p_{n+1}}$ и вм. z величины x_{n+1}, но точечныя координаты остаются неоднородными, и самыя величины $p_1\,..\,p_{n+1}$ не будутъ однородными тангенціальными координатами.

2-хъ независимыхъ перемѣнныхъ—совпадаетъ и способъ Якоби Можно сказать также, что нужно найти два независимыхъ соотношенія

$$\psi(xyzpq\alpha\beta)=o,\ \ \chi(xyzpq\alpha\beta)=o,$$

такъ, чтобы найденныя отсюда и изъ $f=o$, z,p,q удовлетворяли уравненію

$$dz-pdx-qdy=o.$$

Первое опредѣленіе выразимъ въ проективной формѣ такъ: найти всѣ поверхности $F(x_1..x_4)=o$ того свойства, что при подстановкѣ $\sigma u_i=\frac{dF}{dx_i}$ въ $f(x,u)$ получимъ результатъ, пропорціональный $F(x_1\ ..\ x_4)$ и слѣдовательно уничтожающійся при $F=o$; элементы, составленные точками поверхности и соотвѣтственными касательными, будутъ выполнять уравненіе $\Sigma u_i dx_i=o$ т. е. составлять элементное многообразіе, принадлежащее взятой коинциденціи. Выполненіе послѣдняго условія представляется существеннымъ; вводя вмѣсто поверхности, которая является только частнымъ видомъ его, самое элементное многообразіе, мы приходимъ къ такому опредѣленію задачи интегрированія (по С. Ли): ∞^4 *элементовъ разсматриваемой главной коинциденціи нужно распредѣлить на* ∞^2 *элементныхъ многообразій 2-хъ измѣреній, т. е. состоящихъ изъ* ∞^2 *элементовъ каждое и выполняющихъ уравненіе Пфаффа* $\Sigma u_i dx_i=o$ *иными словами нужно найти всѣ элементныя многообразія данной главной коинциденціи,—даннаго дифференціальнаго уравненія.* Такъ получимъ собственно только полный интегралъ, но изъ него получаются, какъ общій въ предположеніи произвольной зависимости между α и β исключеніемъ ихъ, такъ и особенное рѣшеніе. Всѣ три типа элементныхъ многообразій могутъ при этомъ встрѣтиться. Возьмемъ, напр., уравненіе не содержащее производныхъ неизвѣстной функціи и въ однородномъ видѣ изображаемое коинциденціею

$$\Phi(x_1\ ..\ x_4)=o,\ \ u_x=o.$$

Въ теоріи Лагранжа такое уравненіе совсѣмъ не разсматривается, какъ дифференціальное. Въ теоріи С. Ли — и это особенно ясно съ точки зрѣнія теоріи коннексовъ—такое уравненіе, являясь дифференціальнымъ, выдѣляется только своею простотою, такъ что мы сразу можемъ дать всѣ его интегралы.

Дѣйствительно какъ уже упомянуто, уравненіе $\Phi(x_1 \,..\, x_4)=o$ можно разсматривать какъ уравненіе коннекса, въ элементъ котораго каждая точка x, принадлежащая поверхности Φ, можетъ быть соединяема съ каждою изъ ∞^3 плоскостей u пространства. Главной коинциденціи этого коннекса будутъ принадлежать поэтому ∞^4 элементовъ (x,u) получаемыхъ соединеніемъ каждой изъ ∞^2 точекъ поверхности Φ съ каждою изъ ∞^2 проходящихъ черезъ нее плоскостей. Элементными многообразіями этого уравненія явятся поэтому *во - первыхъ* каждая изъ ∞^2 точекъ поверхности, разсматриваемая, какъ центръ связки проходящихъ черезъ нее плоскостей. Этимъ уже осуществляется предыдущее требованіе распредѣленія ∞^4 элементовъ (x,u) на ∞^2 элементовъ M_2. Но кромѣ того, элементнымъ многообразіемъ является 2^0 всякая кривая расположенная на поверхности $\Phi=o$, — ∞^1 точекъ такой кривой даютъ элементы разсматриваемой коинциденціи въ соединеніи каждая съ ∞^1 плоскостей касательныхъ къ кривой въ этой точкѣ,—т. е. проходящихъ черезъ прямую, касательную къ кривой въ этой точкѣ; и наконецъ 3^0 сама поверхность $\Phi=o$,— точки ея даютъ элементы въ соединеніи съ касательными къ поверхности въ нихъ плоскостями. Тремя этими видами исчерпываются всѣ элементныя многообразія этого уравненія. Интегралъ перваго вида, опредѣляемый уравненіями

$$\varrho x_i=a_i \quad (i=1,2,3,4) \quad \Phi(a_1 \,..\, a_4)=o, \quad u_x=o,$$

зависитъ отъ трехъ постоянныхъ, связанныхъ однимъ соотношеніемъ, и является полнымъ интеграломъ Лагранжа. Интегралъ второго вида получается, если установить въ дополненіе къ $\Phi=o$ произвольную зависимость между параметрами $a_1..a_4$

$$\Psi(a_1 \,..\, a_4)=o;$$

онъ опредѣляется уравненіями

$$\sigma u_i=\lambda\frac{d\Phi}{dx_i}+\mu\frac{d\Psi}{dx_i}(i=1,2,3,4), \quad \Phi=o, \quad \Psi=o, \quad u_x=o$$

$$\therefore \quad \sigma.\Sigma u_i dx_i=\lambda\Sigma\frac{d\Phi}{dx_i}dx_i+\mu\Sigma\frac{d\Psi}{dx_i}dx_i=\lambda d\Phi+\mu d\Psi=o$$

и является общимъ интеграломъ Лагранжа; наконецъ третій видъ интеграловъ есть особенное рѣшеніе.

Подобнымъ образомъ уравненіе, изображаемое коинциденціею

$$\Phi(u_1\,..\,u_4)=o,\quad u_x=o,$$

имѣетъ интегральными многообразіями: 1° ∞^2 плоскостей u, касательныхъ къ поверхности $\Phi(u_1\,..\,u_4)=o$;—каждая изъ точекъ такой плоскости образуетъ съ ней элементъ (x,u), принадлежащій разсматриваемой коинциденціи, и сосѣдніе элементы находятся въ соединеніи, ибо $du_i=o$, а потому выполняется уравненіе $\Sigma x_i du_i=o$, и такимъ образомъ ∞^2 полученныхъ элементовъ образуютъ двухмѣрное элементное многообразіе. 2° Второй типъ элементныхъ многообразій этого уравненія представляютъ развертывающіяся поверхности, касательныя къ $\Phi=o$; ∞^1 плоскостей, огибающихъ такую поверхность, выдѣляются изъ общаго числа ∞^2 касательныхъ къ $\Phi=o$ плоскостей помощью какого-нибудь уравненія $\Psi(u_1\,..\,u_4)=o$; каждая изъ этихъ ∞^1 плоскостей даетъ начало ∞^1 элементамъ (x,u) въ соединеніи съ точками прямой, по которой она касается съ развертывающейся:

$$\varrho x_i=\lambda\frac{d\Phi}{du_i}+\mu\frac{d\Psi}{du_i}$$

$$\therefore\ \varrho\Sigma x_i du_i=\lambda\Sigma\frac{d\Phi}{du_i}du_i+\mu\Sigma\frac{d\Psi}{du_i}du_i=\lambda d\Phi+\mu d\Psi=o,$$

$$\text{ибо } d\Phi=o,\ d\Psi=o.$$

Наконецъ въ 3-хъ элементнымъ многообразіемъ является сама поверхность $\Phi=o$, ибо касательныя ея u въ соединеніи съ ихъ точками прикосновенія $\varrho x_i=\frac{d\Phi}{du_i}$ образуютъ ∞^2 элементовъ, принадлежащихъ разсматриваемой коинциденціи, и сосѣдніе элементы находятся въ соединенномъ положеніи, такъ какъ $u+du$ должна также касаться поверхности, т. е. должно быть $\Sigma\frac{d\Phi}{du_i}du_i=o$, а потому $\Sigma x_i du_i=o$ выполняется соотвѣтственными точками прикосновенія. — Изъ трехъ перечисленныхъ видовъ интеграловъ, первые заключены въ уравненіяхъ

$\sigma.u_i=A_i$, такъ что $\sigma.u_x\equiv A_x=o$, при условіи $\Phi(A_1\,..\,A_4)=o$

и представляютъ полный интегралъ разсматриваемаго уравненія, которое есть не что иное, какъ уравненіе Клеро. Рѣшеніе второго типа при произвольномъ Ψ даетъ общій интегралъ Лагранжа, и наконецъ третій—особенное рѣшеніе.

Вопросомъ, всегда ли необходимо являются особенныя рѣшенія т. е. рѣшенія, не содержащія параметровъ и не заключающіяся ни въ полномъ ни въ общемъ интегралѣ, займемся далѣе; теперь же остановимся на линейныхъ уравненіяхъ, на которыхъ и С. Ли иллюстрируетъ свои общіе взгляды [1]) и которыми мы займемся болѣе подробно въ главѣ III.

Линейное уравненіе въ однородныхъ координатахъ изображается по предыдущему главною коинциденціею коннекса $(m,1)$, уравненіе которой мы напишемъ

$$\Sigma L_i u_i = o, \quad u_x = o.$$

Точкѣ x принадлежатъ, т. е. образуютъ съ нею элементъ этой коинциденціи ∞^1 плоскостей u пучка, имѣющаго своею осью прямую p:

$$p_{ik} = x_i L_k - x_k L_i.$$

Если отъ точки x перейдемъ къ сосѣдней точкѣ $x+dx$, лежащей на той же прямой p, то

$$\sigma . p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i.$$

Сравнивая два выраженія для p_{ik}, имѣемъ

$$(dx_k - \sigma L_k) x_i = (dx_i - \sigma L_i) x_k,$$

откуда

$$dx_k - \sigma L_k = \tau . x_k.$$

Если множитель пропорціональности t выберемъ такъ, чтобы $dx_k - \tau x_k = t^{-1} d(t x_k)$ т. е. возьмемъ $\tau = -\frac{dt}{t}$ и означимъ $\sigma t = \lambda t^m$, то предыдущее уравненіе приведется по замѣнѣ

---

[1]) Theorie d. Transformationsgruppen. B. II. S. 72.

tx_k черезъ x_k (возможной вслѣдствіе однородности L_k) къ виду

$$dx_k = \lambda . L_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

Такимъ образомъ отъ линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ перешли къ системѣ совокупныхъ уравненій

$$\frac{dx_1}{L_1} = \frac{dx_2}{L_2} = \frac{dx_3}{L_3} = \frac{dx_4}{L_4} .$$

Если возьмемъ произвольно какую-нибудь точку пространства, то эта система опредѣлитъ направленія перемѣщенія, и переходя отъ точки къ точкѣ, мы построимъ интегральную кривую, обладающую по отношенію къ исходной коинциденціи тѣмъ свойствомъ, что элементъ, образуемый точкою кривой и любою изъ плоскостей, проходящихъ черезъ прямую, касательную къ ней въ этой точкѣ, принадлежитъ помянутой коинциденціи, и сосѣдніе элементы находятся въ соединеніи; слѣдовательно ∞^2 *интегральныхъ кривыхъ совокупной системы, разсматриваемыя, какъ элементныя многообразія 2. измѣреній, являются интегральными многообразіями коинциденціи.* Если выбрать изъ числа ∞^2 кривыхъ по какому-либо аналитическому закону ∞^1, въ непрерывной послѣдовательности образующихъ поверхность, то каждая точка послѣдней въ соединеніи съ соотвѣтственной касательной даетъ элементъ, принадлежащій разсматриваемой главной коинциденціи. Мы получаемъ такимъ образомъ теорему Лагранжа, что всякая поверхность, составленная изъ ∞^1 интегральныхъ кривыхъ совокупной системы (ея характеристикъ), есть интегральная поверхность связаннаго съ системою линейнаго уравненія въ частныхъ производныхъ. Такимъ образомъ между интегральными многообразіями линейнаго уравненія есть ∞^2 такихъ, которыя, какъ точечныя образованія, суть кривыя — интегральныя кривыя эквивалентной линейному уравненію совокупной системы. Обратно, если между интегральными многообразіями дифференціальнаго уравненія 1. порядка имѣется ∞^2 кривыхъ, заполняющихъ пространство, то такое уравненіе непремѣнно есть линейное, такъ что наличность ∞^2 такихъ интеграловъ является характерною особенностью линейнаго уравненія. Въ теоріи же Лагранжа эти кривыя совсѣмъ не считаются за интегралы. Возвратимся къ общему случаю.

Аналитически задача интегрированія въ проективной формѣ состоитъ въ томъ, чтобы *найти всѣ трехчленныя системы* $\Phi(x,u)=o$, $\Phi_1(x,u)=\alpha_1$, $\Phi_2(x,u)=\alpha_2$, *которыя бы выполняли уравненіе Пфаффа* $\Sigma u_i dx_i = o$ *и въ совокупности своей обнимали уравненіе* $f(x,u)=o$. Тогда изъ четырехъ уравненій

$$\Phi = o,\ \Phi_1 = \alpha_1\ \ \Phi_2 = \alpha_2,\ u_x = o$$

можно исключить или u_1, u_2, u_3, u_4 и получить уравненія элементныхъ многооброзій въ точечныхъ координатахъ, или же исключить $x_1 x_2 x_3 x_4$ и получить уравненія тѣхъ же интегральныхъ многообразій разсматриваемой коинциденціи въ плоскостныхъ координатахъ.

Аналитическія условія, которыя должны выполнять Φ, Φ_1, Φ_2, чтобы удовлетворять высказаннымъ требованіямъ, получаются такъ. Для всѣхъ элементовъ выполняющихъ $f=o$, $\Phi=o$ должно быть

$$\Sigma\frac{df}{dx_i}dx_i + \Sigma\frac{df}{du_i}du_i = o, \quad \Sigma_i\frac{d\Phi}{dx_i}dx_i + \Sigma_i\frac{d\Phi}{du_i}du_i = o.$$

Если прибавить сюда уравненія соединеннаго положенія сосѣднихъ элементовъ

$$\Sigma u_i dx_i = o, \quad \Sigma x_i du_i = o,$$

то получимъ всѣ условія, связывающія дифференціалы dx_i, du_i. Поэтому если умножимъ второе уравненіе на λ, третье на μ, четвертое на ν, то въ суммѣ коэффиціенты при дифференціалахъ должны быть равны нулю въ отдѣльности, т. е. получимъ: $(i=1,2,3,4)$

$$\frac{df}{dx_i} + \lambda\frac{d\Phi}{dx_i} + \mu u_i = o,$$
$$\frac{df}{du_i} + \lambda\frac{d\Phi}{du_i} + \nu x_i = o.$$

Умножая первые четыре уравненія на $\frac{df}{du_i}$ соотвѣтственно, вторыя на $-\frac{df}{dx_i}$ и складывая, будемъ имѣть

$$\lambda\Sigma\left(\frac{df}{du_i}\frac{d\Phi}{dx_i}-\frac{df}{dx_i}\frac{d\Phi}{du_i}\right)+(n\mu-m\nu)f=o,$$

т. е. въ силу $f=o$ должно быть,—такъ какъ λ не равно o:

$$\Sigma\left(\frac{df}{du_i}\frac{d\Phi}{dx_i}-\frac{df}{dx_i}\frac{d\Phi}{du_i}\right)=o,$$

уравненіе, которое должно быть выполнено для всѣхъ ∞^4 элементовъ коинциденціи $f(x,u)=o$, $u_x=o$. Чтобы найти всѣ интегральныя многообразія послѣдней, нужно найти три независимыхъ рѣшенія этого уравненія,—въ числѣ которыхъ можетъ явиться и само $f(x,u)=o$. Такимъ образомъ интегрированіе даннаго уравненія сводится на нахожденіе двухъ независимыхъ рѣшеній совокупной системы:

$$(10)\quad \frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial u_1}}=\ldots=\frac{dx_4}{\frac{\partial f}{\partial u_4}}=\frac{du_1}{-\frac{\partial f}{\partial x_1}}=\ldots=\frac{du_4}{-\frac{\partial f}{\partial x_4}},$$

которую можемъ писать проще, вводя для обозначенія общаго отношенія dt:

$$(21)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u_i},\qquad \frac{du_i}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,3,4)$$

если во избѣжаніе смѣшенія частныя производныя означимъ по Якоби.

Это приведеніе интегрированія уравненія въ частныхъ производныхъ къ нахожденію интеграловъ канонической системы совокупныхъ уравненій выполнено С. Ли (Math. Ann. VIII), а въ однородныхъ координатахъ, какъ здѣсь мы встрѣчаемъ эту систему, въ работѣ G. Darboux (Sur les solutions singulières des équat. part. 1. O. Mém. Sav. Etr. XXVII § 42). Если перейдемъ къ прямоугольнымъ координатамъ, то условное уравненіе приметъ видъ, приведенный ранѣе на стр. 99 и въ частности, если данное уравненіе есть

$$q=F(x,y,z,p),$$

оно приметъ ту форму, въ которой оно дается у Лагранжа. (Nouv. Mém. Ac. Berlin. 1772)

$$\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dz}\left(q-p\frac{dq}{dp}\right)-\left(\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz}\right)=o$$

или короче

$$\left(\frac{dp}{dy}\right)-\left(\frac{dq}{dx}\right)-p\left(\frac{dq}{dz}\right)+q\left(\frac{dp}{dx}\right)=o.$$

§ 11. **Характеристики**. Геометрическое значенiе совокупной системы (20) таково. Получаемыя интегрированiемъ ея уравненiя

$$\varrho x_i=\varphi_i(t,x_1{}^0\,..\,u_4{}^0),\quad \sigma u_i=\psi_i(t,x_1{}^0\,..\,u_4{}^0)\quad (i=1,2,3,4)$$

при условiи

$$\Sigma u_i{}^0 x_i{}^0=o,\ f(x^0,u^0)=o$$

опредѣляютъ величины $x_1\,..\,x_4$, $u_1\,..\,u_4$, какъ функцiи одного независимаго перемѣннаго t. Это уравненiе пары (кривая двоякой кривизны, развертывающаяся поверхность), особи которой связаны между собою такъ, что плоскость, касательная ко второй, касается ея по прямой, касательной къ первой (это слѣдуетъ изъ уравненiя $u_x=o$ и условiй соединеннаго положенiя). Эти кривая и развертывающаяся суть *характеристики* разсматриваемой коинциденцiи. Основное свойство характеристики — кривой то, что касательною въ каждой точкѣ x ея является производящая принадлежащаго этой точкѣ конуса главной коинциденцiи, соотвѣтствующая той плоскости u, которая отвѣчаетъ тому же значенiю параметра t, что и x. Двойственно, если возьмемъ какую нибудь плоскость u^0, то тѣмъ самымъ опредѣлимъ касательную къ ней характеристику — развертывающуюся; пусть u одна изъ ∞^1 огибающихъ эту развертывающуюся плоскостей, — тогда прямая, по которой плоскость u касается развертывающей, касается принадлежащей плоскости u кривой главной коинциденцiи въ той ея точкѣ, которая соотвѣтствуетъ тому же значенiю параметра t, что u.

Дѣйствительно, если будемъ искать уравненiя геометрическихъ мѣстъ указаннаго свойства, то придемъ къ канонической совокупной системѣ (20). Плоскость u, проходящая черезъ точку x, касается принадлежащей въ коннексѣ $f=o$ этой точкѣ поверхности U_x въ точкѣ y, отличной вообще отъ

x, и прямая xy есть производящая конуса главной коинциденціи, соотвѣтствующая взятому элементу (x,u) коинциденціи $f=o$, $u_x=o$. Ея координаты суть:

$$p_{ik}=\varrho(x_iy_k-x_ky_i)=x_i\frac{df}{du_k}-x_k\frac{df}{du_i}\,.$$

Перейдемъ по прямой p отъ точки x къ безконечно-близкой точкѣ $x+dx$; имѣемъ

$$\tau p_{ik}=x_idx_k-x_kdx_i.$$

Сравнивая два значенія p_{ik} получаемъ

$$(\tau\frac{df}{du_k}-dx_k)x_i = (\tau\frac{df}{du_i}-dx_i)x_k,$$

откуда

$$\tau\frac{df}{du_k}-dx_k=\nu.x_k \text{ или } \frac{\partial f}{\partial u_k}=\frac{1}{\tau}dx_k+\frac{\nu}{\tau}x_k=\frac{d(\sigma x_k)}{dt}\,,$$

если положимъ

$$\frac{\nu}{\tau}=\frac{d\sigma}{dt},\quad \tau=\frac{1}{\sigma}dt.$$

Точно также касательная изъ точки x, лежащей въ плоскоети u, къ поверхности X, принадлежащей u въ коннексѣ $f=o$, отлична вообще отъ плоскости u; пусть это будетъ плоскость v, тогда $\sigma.v_i=\frac{df}{dx_i}$. Прямая пересѣченія плоскостей u и v будетъ касательною къ кривой пересѣченія плоскости u и поверхности X, т. е. къ принадлежащей u кривой главной коинциденціи. Эта прямая совпадаетъ при томъ съ производящею p принадлежащаго точкѣ x конуса главной коинциденціи, соотвѣтствующею u и имѣетъ координатами:

$$\varrho\pi_{ik}=u_i\frac{df}{du_k}-u_k\frac{df}{du_i}\,.$$

Если около π повернемъ u на безконечно малый уголъ до $u+du$ то $\tau'\pi_{ik}=u_idu_k-u_kdu_i$. Сравнивая два выраженія, получимъ подобно предыдущему

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{d(\sigma' u)}{dt'} \,.$$

Вводя вмѣсто x и u величины σx и $\sigma' u$ и замѣчая, что въ силу $\Sigma u dx \equiv -\Sigma x du$ при $u_x = o$ будемъ имѣть $t' = -t$, придемъ наконецъ къ полученной ранѣе совокупной системѣ.

Такимъ образомъ конусъ главной коинциденціи есть геометрическое мѣсто касательныхъ къ кривымъ характеристикамъ проходящимъ черезъ его вершину, и кривыя главной коинциденціи суть огибающія прямыхъ, по которымъ плоскости ихъ касаются характеристикъ развертывающихся. Принадлежащіе главной коинциденціи ∞^4 элементовъ (x,u) разбиваются такимъ образомъ на ∞^3 системъ ∞^1 элементовъ—на ∞^3 характеристикъ. Если по какому-либо аналитическому закону выберемъ ∞^1 такъ, чтобы сосѣдними элементами постоянно выполнялось уравненіе $\Sigma u dx = o$, то получаемая такимъ образомъ поверхность всѣми своими элементами будетъ принадлежать разсматриваемой коинциденціи и выполняя уравненіе $\Sigma u dx = o$ будетъ ея интегральною поверхностью. Если, напр., возьмемъ всѣ характеристики проходящія черезъ опредѣленную точку x^0 пространства, то получимъ интегральную поверхность, которую Du Bois Reymond [1]) называетъ интегральнымъ коноидомъ и которая обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что является огибающею всѣхъ другихъ интегральныхъ коноидовъ которыхъ интегральныя точки расположены на ея поверхности. Вблизи центральной точки она изображается приближенно конусомъ главной коинциденіи, и уравненіе ея, если полный интегралъ уравненія есть

$$\varphi(x_1 \,..\, x_4;\ \alpha,\beta) = o,$$

получится какъ результатъ исключенія постоянныхъ α,β изъ $\varphi = o$, $\varphi_0 \equiv \varphi(x_1{}^0 \,..\, x_4{}^0;\ \alpha,\beta) = o$ и

---

[1]) Beiträge zur Interpretation d. partiellen Differentialgleichungen. 1. Or. mit 3 Variab. H. I. 1864. S. 15. Чтобы кривая $\lambda(x_1 \,..\, x_4) = o$, $\lambda_1(x_1 \,..\, x_4) = o$ лежала на какой-нибудь интегральной поверхности коннекса $f(x,u) = o$ должно быть $\Sigma u_1 \pm \frac{d\lambda}{dx_2}\frac{d\lambda_1}{dx_3}\frac{df}{dx_4} = o$. Коррелятивное условіе, чтобы развертывающаяся $\nu(u_1 \,..\, u_4) = o$, $\nu_1(u_1 \,..\, u_4) = o$ касалась какой-нибудь интегральной поверхности есть $\Sigma \pm x_1 \frac{d\nu}{du_2}\frac{d\nu_1}{du_3}\frac{df}{du_4} = o$.

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\varphi_0}{d\beta}-\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\varphi_0}{d\alpha}=o.$$

Оно симметрично относительно x и x^0.

Двойственно можно говорить объ интегральной поверхности—огибающей развертывающихся поверхностей, касательныхъ къ одной и той же плоскости,—если полный интегралъ выраженъ въ плоскостныхъ координатахъ $\psi(u_1\,..\,u_4;\ \alpha,\beta)=o$ то интегральная поверхность указаннаго типа получается исключеніемъ $\alpha.\beta$ изъ уравненій:

$$\psi(u_1\,..\,u_4;\ \alpha,\beta)=o;\ \psi_0\equiv\psi(u_1{}^0\,..\,u_4{}^0;\ \alpha,\beta)=o;$$
$$\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\psi_0}{d\beta}-\frac{d\psi}{d\beta}\frac{d\psi_0}{d\alpha}=o.$$

Ему можно было бы придать названіе интегральнаго планоида, который у Dubois Reymond есть частный случай интегральнаго коноида—при безконечно удаленной центральной точкѣ x^0. Если уравненіе полнаго интеграла дано въ точечныхъ координатахъ, то искомую поверхность получимъ исключая

$$\sigma\ \frac{x_1}{x_4},\ \frac{x_2}{x_4},\ \frac{x_3}{x_4},\ \frac{x_1{}^0}{x_4{}^0},\ \frac{x_2{}^0}{x_4},\ \frac{x_3{}^0}{x_4},\ \alpha \text{ и } \beta$$

изъ уравненій

$$\varphi(x_1\,..\,x_4;\ \alpha,\beta)=o,\ \varphi_0=o,\ \sigma u_i=\frac{d\varphi}{dx_i},\ \sigma u^0{}_i=\frac{d\varphi_0}{dx_i},$$
$$(i=1,2,3,4)\qquad \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\varphi_0}{d\beta}-\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\varphi_0}{d\alpha}=o,$$

гдѣ φ^0 означаетъ результатъ подстановки въ φ величинъ $x_1{}^0$, $x_2{}^0$, $x_3{}^0$, $x_4{}^0$—получаемыхъ рѣшеніемъ уравненій $\sigma.u^0{}_i=\frac{d\varphi}{dx_i}$ относительно x_i. Каждая интегральная поверхность есть геометрическое мѣсто характеристикъ—кривыхъ и огибающая характеристикъ — развертывающихся. Такъ какъ начальный элементъ (x^0,u^0) и безконечно близкій $x^0+dx,\ u^0+du)$ вполнѣ опредѣляютъ пару характеристикъ, то двѣ интегральныя поверхности, имѣющія общіе два сосѣдніе элемента пары характеристикъ т. е. касающіяся между собою по элементу пары характеристикъ будутъ имѣть общею и всю пару, т. е. будутъ касаться между собою по всей характеристикѣ—кривой пары. Отъ всякой другой кривой, начерченной на интегральной поверхности и называемой у Du Bois Reymond'a интегральною [1]), кривая характеристика отличается тѣмъ, что если черезъ какую нибудь точку x^0 ея проведемъ касательную u къ конусу главной коинциденціи, принадлежащему этой точкѣ, и будемъ перемѣщать точку вдоль характеристики, то какъ слѣдуетъ изъ самыхъ уравненій (a), плоскость u опишетъ характеристику развертывающуюся, которая касается начальнаго положенія u^0 плоскости u по прямой, касательной къ принадлежащей u^0 кривой главной коинциденціи въ точкѣ x^0.

Характеристики коинциденцій alias дифференціальныхъ уравненій 1 порядка приводятъ къ цѣлому ряду интересныхъ геометрическихъ вопросовъ. Такъ въ своемъ мемуарѣ Ueber Complexe, insbesondere Linien-u. Kugel-Complexe etc. (Math. Ann. V, 145—256) C. Ли показываетъ, что дифференціальныя уравненія или въ нашей терминологіи коннексы, которыхъ характеристики суть кривыя главныхъ касательныхъ на интегральныхъ поверхностяхъ суть 1°, коннексы (m,1), коихъ прямолинейныя характеристики образуютъ конгруэнцію, 2°, коннексы соотвѣтствующія Плюккеровымъ комплексамъ: ихъ характеристики огибаются прямыми нѣкотораго комплекса; Ли занимается далѣе разысканіемъ коннексовъ, которыхъ характеристики суть линіи кривизны или геодезическія линіи интегральныхъ поверхностей.

§ 12. **Имплексы**. Сказанное въ предыдущемъ о связи коннексовъ съ уравненіями въ частныхъ производныхъ перваго порядка и объ интегрированіи послѣднихъ относится ко всякимъ безъ различія уравненіямъ алгебраическимъ или трансцендентнымъ. Въ дальнѣйшемъ мы ограничимся алгебраическими уравненіями и слѣдовательно будемъ имѣть дѣло съ

[1]) Darboux (Solutions singulières etc.) даетъ это названіе тѣмъ кривымъ, лежащимъ на интегральной поверхности, которыя, какъ и характеристики, касаются въ каждой своей точкѣ образующей принадлежащаго этой точкѣ конуса главной коинциденціи и которыя Монжъ называетъ *ребромъ возврата* интегральной поверхности.

коннексами (m,n). Нахожденіе полнаго интеграла такого уравненія, т. е. распредѣленіе ∞^4 элементовъ главной коинциденціи коннекса (m,n) на ∞^2 системъ въ ∞^2 элементовъ каждая приводитъ насъ къ системамъ ∞^2 поверхностей, вообще трансцендентныхъ, но обладающихъ свойствами, аналогичными свойствамъ системъ алгебраическихъ поверхностей: поверхности такой системы, проходящія черезъ точку A, огибаютъ коническую поверхность n-го класса—принадлежащій точкѣ A конусъ главной коинциденціи:

$$u_A = o, \quad f(A,u) = o,$$

и точки прикосновенія различныхъ поверхностей системы съ одною и тою же плоскостью $\mathfrak{A}$ образуютъ алгебраическую плоскую кривую m-го порядка —принадлежащую этой плоскости кривую главной коинциденціи

$$\mathfrak{A}_x = o \quad f(x,\mathfrak{A}) = o.$$

Такимъ образомъ интегральныя поверхности коннекса образуютъ систему съ двумя характеристиками (m,n), которую Фурэ изучалъ подъ именемъ *имплекса* поверхностей, исходя изъ дифференціальнаго уравненія

$$F[(x,y,z)_m, \quad (p,q,xp+yq-z)_n] = o.$$

Въ тѣхъ случаяхъ, когда интегрировать такое уравненіе мы не можемъ, приходится переходить къ изученію функцій, ему удовлетворяющихъ, или геометрически его интегральныхъ поверхностей по самому уравненію. Въ такихъ случаяхъ для изученія измѣненія интегральныхъ поверхностей вблизи даннаго элемента (x,u) разсматриваемой коинциденціи

$$f \equiv a_x{}^m u_\alpha{}^n = o, \quad u_x = o$$

обращаемся къ касательному коннексу

$$a_x{}^{m-1} u_\alpha{}^{n-1} a_X U_x = o,$$

Такой методъ примѣнимъ въ особенности къ тѣмъ случаямъ когда или $m=1$ или $n=1$, потому что тогда касательный коннексъ одинаковъ для всѣхъ элементовъ (x,u), составленныхъ точкою x и каждою изъ ∞^1 плоскостей, проходящихъ черезъ прямую, соединяющую x съ сопряженною ей въ коннексѣ точкою $\varrho y_i = \frac{df}{du_i}$—въ первомъ случаѣ, и составленныхъ плоскостью u и точками x прямой пересѣченія этой плоскости съ сопряженною ей въ коннексѣ плоскостью $\sigma v_i = \frac{df}{du_i}$ во 2-омъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ геометрическому значенію метода изученія функцій опредѣляемыхъ линейнымъ дифференціальнымъ уравненіемъ, примѣняемаго Poincare въ его работахъ: Thèse sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux differences partielles 1879. Mémoire sur les courbes definies par une équation différentielle (Journ. de Mathém. Sér 3, t. 7, 8, Sér 4, t. 1, 2); Sur l'intégration algébrique des équations diff. de 1. O. et du 1. degré (Rendic. Circ. Math. Palermo, t. V) и состоящаго въ замѣнѣ даннаго уравненія вблизи точки x другимъ, которое получается при сохраненіи въ разложеніяхъ коэффиціентовъ разсматриваемаго уравненія въ степенныя строки только первыхъ членовъ. Въ слѣдующей главѣ мы остановимся нѣсколько на этомъ вопросѣ, теперь же перейдемъ къ тѣмъ теоремамъ энумеративнаго характера, которыя составляютъ главное содержаніе замѣтокъ Фурэ въ Comptes Rendus de l'Acad. de Paris по теоріи имплексовъ.

Теоремы, доказываемыя Фурэ для имплексовъ съ помощью принципа соотвѣтствія, безъ труда выводятся изъ доказанныхъ нами теоремъ о пересѣченіи коннексовъ. Замѣтимъ, что кромѣ двухъ вводимыхъ Фурэ характеристикъ, системѣ интегральныхъ поверхностей коннекса или имплексу присуща еще третья—число поверхностей имплекса, касающихся данной прямой или точнѣе встрѣчающихъ данную прямую и имѣющихъ въ точкахъ встрѣчи касательными плоскости, проходящія черезъ эту прямую; число это равно по предыдущему $m+n$ для коннекса (m,n). Общнѣе можно опредѣлить эту характеристику какъ число поверхностей имплекса, встрѣчающихъ одну данную прямую и въ тоже время касающихся съ плоскостями, проходящими черезъ другую данную прямую. Покажемъ, какъ рѣшаются на основаніи предыдущаго вопросы о касаніи имплекса съ алгебраическою кривой или поверхностью.

Представимъ себѣ, что дана кривая двоякой кривизны порядка μ, и пусть развертывающаяся поверхность, огибаемая ея соприкасающимися плоскостями, будетъ класса ν. Эти кривая и поверхность находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи: точкѣ первой подчинена опредѣленная проходящая черезъ нее плоскость, касательная къ другой. Поэтому совокупность (кривая двоякой кривизны и соприкасающаяся развертывающаяся поверхность) можно разсматривать какъ пару съ характеристиками μ и ν, и условіе принадлежности элемента къ этой конфигураціи выражается уравненіемъ $\xi_5 = \mu.p^2e^3 + \nu.p^3e^2$. Тогда для опредѣленія числа поверхностей имплекса, проходящихъ черезъ точки этой кривой и имѣющихъ въ этихъ точкахъ касательными соотвѣтственныя соприкасающіяся плоскости, должно опредѣлить число элементовъ, общихъ парѣ (кривая, развертывающаяся поверхность) и коннексу (m,n), дающему начало имплексу;— т. е. это число равно по предыдущему:

$$N = m\mu + n\nu.$$

Подобнымъ образомъ вопросъ о касаніи поверхностей имплекса съ алгебраическою поверхностью порядка μ, класса ν и ранга ϱ (порядокъ касательнаго конуса или классъ плоскаго сѣченія) сводится на опредѣленіе элементовъ, общихъ коннексу (m,n) и парѣ поверхностей, образованною поверхностью, разсматриваемою, какъ мѣсто точекъ, и ею же, какъ огибающею плоскостей, при чемъ каждый разъ точкѣ подчиняется соотвѣтственная касательная. Третья характеристика пары поверхностей, показывающая, сколько элементовъ пары имѣютъ точку въ данной плоскости и плоскость проходящею черезъ данную точку, и будетъ рангомъ поверхности; ибо для опредѣленія послѣдняго беремъ точку пространства, строимъ соотвѣтственный касательный конусъ и наконецъ черезъ данную точку проводимъ опредѣленную плоскость, —число прямыхъ, по которымъ эта плоскость пересѣчетъ касательный конусъ, даетъ его порядокъ—рангъ поверхности—и покажетъ въ тоже время, сколько точекъ поверхности лежитъ во взятой плоскости, которыхъ касательныя проходятъ черезъ взятую точку. Слѣдовательно опредѣляя пересѣченія этой пары поверхностей съ коннексомъ (m,n), мы получимъ, какъ искомое геометрическое мѣсто, *кривую двоякой кривизны порядка*

$m\mu + n\varrho$ *и соподчиненно развертывающуюся поверхность класса* $\varrho m + \nu n$, *огибаемую плоскостями соприкосновенія кривой* [1]). Послѣднее ясно изъ того, что въ каждой точкѣ этой кривой поверхность имплекса, проходящая черезъ эту точку и безконечно къ ней близкую, касается съ поверхностью (μ, ν, ϱ) и слѣдовательно касательныя къ той и другой сливаясь не могутъ давать въ пересѣченіи одну прямую касательную къ кривой, но содержать двѣ — касательную въ данной точкѣ и касательную въ безконечно къ ней близкой точкѣ, т. е. являются соприкасающимися плоскостями.

Я не останавливаюсь здѣсь на пониженіи порядковъ въ зависимости отъ наличности общей всѣмъ поверхностямъ имплекса кривой, лежащей на разсматриваемой поверхности, а равно и на приложеніяхъ, и перехожу къ другимъ свойствамъ имплексовъ.

Прежде всего теоремы, выражаемыя уравненіями (14) и (15a) Гл. I. для имплексовъ принимаютъ видъ:

I. *Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ плоскостей, проведенныхъ черезъ одну и ту же прямую* p *ко всѣмъ интегральнымъ поверхностямъ коннекса* (m, n) *есть поверхность порядка* $m + n$, *коей* n *полостей проходятъ черезъ прямую* p.

Огибающая плоскостей, касательныхъ къ интегральнымъ поверхностямъ коннекса (m, n) *въ точкахъ встрѣчи послѣднихъ съ прямою* π *есть поверхность класса* $m + n$, *содержащая прямую* π, — *всякая плоскость черезъ* π *касается огибающей въ* m *точкахъ на* π.

(Fouret. C. R. t. 79. p. 689—693) даетъ безъ доказательства какъ эти двѣ, такъ и нижеслѣдующія, которыхъ эти теоремы суть частный случай:

II. *Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія интегральныхъ поверхностей коннекса* (m, n) *съ плоскостями огибающими развертывающуюся поверхность класса* ν, *есть поверхность порядка,* $\nu(m + n)$.

Огибающая плоскостей, касательныхъ къ интегральнымъ поверхностямъ коннекса (m, n) *въ точкахъ ихъ встрѣчи съ кривою* μ*-го порядка есть поверхность класса* $\mu(m + n)$.

---

[1]) Fouret. Comptes Rendus de l'Acad. Paris t. 82 p. 1497 — 1500; t. 84 p. 436—439.

Вмѣсто того, чтобы получать этотъ результатъ изъ общихъ данныхъ въ началѣ первой главы формулъ, можемъ вывести обѣ теоремы изъ слѣдующей общей теоремы. Если имѣемъ четыре кватернарныхъ формы степеней n, n', n'', n''' относительно перемѣнныхъ $u_1u_2u_3u_4$, коэффиціенты коихъ суть функціи также однородныя перемѣнныхъ $x_1 \,.\,.\, x_4$ степеней m, m', m'', m''' соотвѣтственно, то результатъ исключенія u будетъ степени $\Sigma mn'n''n'''$ относительно x. Здѣсь мы имѣемъ:

$$\begin{array}{ll} m=m,\ n=n & .\ .\ f(x,u)=o \\ m'=1\ \ n'=1 & .\ .\ u_x=o \\ \left.\begin{array}{l} m''=o\ \ n''=\mu \\ m'''=o\ \ n'''=\mu' \end{array}\right\}\ \mu\mu'=\nu & \begin{array}{l} \varphi_\mu(u_1 \,.\,.\, u_4)=o \\ \varphi_{\mu}'(u_1 \,.\,.\, u_4)=o \end{array} \end{array}$$

Подставляя эти значенія въ $\Sigma mn'n''n'''$ получимъ для искомаго порядка вышеупомянутое число $\nu(m+n)$:

Коррелятивно—по формулѣ $\Sigma mm'm''n'''$ будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l} m=m,\ n=n \\ m'=1,\ n'=1 \\ \mu'\mu''=\mu\begin{cases} m''=\mu' & n''=o \\ m'''=\mu'' & n'''=o \end{cases} \end{array}$$

Подставляя въ $\Sigma nm'm''n'''$ и получимъ $\mu(m+n)$.

III. *Представимъ себѣ два коннекса* (m,n) *и* (m',n') *и прямую* p; *тогда будемъ имѣть*:

Геометрическое мѣсто точки, проведенная черезъ которую и черезъ p *плоскость касается въ этой точкѣ проходящихъ черезъ эту точку интегральныхъ поверхностей перваго и второго коннекса, есть кривая двоякой кривизны порядка* $mm'+nm'+mn'$, *встрѣчающая* p *въ* $nm'+mn'$ *точкахъ.*

Огибающая плоскости, касающейся въ одной и той же точкѣ интегральныхъ поверхностей того и другого коннекса, есть развертывающаяся поверхность класса $nn'+nm'+mn'$, *и черезъ прямую* p *проходитъ* $nm'+mn'$ *ея касательныхъ.*

Порядокъ искомаго мѣста (лѣв. ст.) опредѣлится какъ порядокъ общей пяти коннексамъ (m,n), (m',n'), $u_x=o$, $u_a=o$

$u_b = o$ пары; классъ соотв. развертывающейся будетъ mm'. Исключая u,—при чемъ $u_a = o$ и $u_b = o$, опредѣляющія прямую p, замѣнимъ эквивалентными уравненіями $(u\pi\pi)_{1,2} = o$ получимъ $u_i = (xpp)_i$ и такимъ образомъ искомое геометрическое мѣсто опредѣлится какъ пересѣченіе поверхностей

$$a_x^m(axpp)^n = o, \quad a'^{m'}_x(a'xpp)^{n'} = o$$

но въ томъ числѣ выдѣлится прямая p, n—кратная на одной поверхности и n'—кратная на другой, такъ что остающаяся кривая двоякой кривизны будетъ порядка

$$(m'+n')(m+n) - nn' = mm' + nm' + mn'.$$

Число ея точекъ на p опредѣлится изъ формулы $m(n'+m') + n'(n+m)$,—но отсюда нужно вычесть еще $2nn'$ точекъ, выдѣляющихся съ удаленіемъ прямой p изъ состава геометрическаго мѣста, и остается $nm'+mn'$. Коррелятивная теорема доказывается подобнымъ образомъ.

IV. *Геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ интегральныя поверхности двухъ коннексовъ касаются одной и той же плоскости, проходящей черезъ точку $\mathfrak{A}$ есть поверхность порядка $nn' + nm' + mn'$, на которой $\mathfrak{A}$ будетъ nn'—кратною точкой.*

Огибающая плоскостей, касающихся въ одной и той же точкѣ плоскости A съ двумя интегральными поверхностями коннексовъ (m,n), (m',n') есть поверхность класса $mm' + nm' + mn'$, имѣющая плоскость A mm'—кратною касательной.

Искомое геометрическое мѣсто опредѣляется уравненіями

$$a_x^m u_\alpha^n = o, \quad a'^{m'}_x u_{\alpha'}^{n'} = o, \quad u_x = o \quad u_\alpha = o.$$

Перемножая соотвѣтственные характеристическіе множители получимъ

$$\xi_4 = mm'.p^3e + (mm' + mn' + nm')p^2e^2 + (mn' + nm' + nn')pe^3$$

которое показываетъ, что опредѣляемая ими пара поверхностей, — приводящаяся въ данномъ случаѣ къ поверхности—мѣсту точекъ и той же поверхности, какъ огибающей соотв. касательныхъ,—будетъ порядка $mn' + nm' + nn'$, ранга $mm' + mn'$

$+nm'$ и класса mm'. Замѣчая, что при исключеніи u_i результатъ будетъ степени nn' относительно $\mathfrak{A}_i$, заключаемъ, что $\mathfrak{A}$ будетъ nn'—кратною точкой поверхности. Аналогично докажемъ двойственную теорему. Эти теоремы суть частный случай слѣдующихъ:

V. *Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія двухъ интегральныхъ поверхностей коннексовъ (m,n) и (m',n') къ однѣмъ и тѣмже плоскостямъ, касательнымъ къ поверхности класса ν, есть поверхность порядка $\nu(nn'+nm'+mn')$.*

Огибающая плоскостей, которыхъ двѣ интегральныя поверхности коннексовъ (m,n) и (m',n') касаются въ одной и той же точкѣ поверхности μ-го порядка, есть поверхность класса $\mu\,(mm'+nm'+mn')$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремъ III и IV, и мы его опускаемъ. Приведемъ еще слѣдующія теоремы, даваемыя Фурэ:

VI. *Геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ касаются интегральныя поверхности трехъ коннексовъ $(m,n),(m',n'),(m'',n'')$, есть поверхность порядка $nn'n''+mn'n''+m'n''n+m''nn'$.*

Огибающая плоскостей, касающихся въ одной точкѣ къ тремъ интегральнымъ поверхностямъ коннексовъ $(m,n)(m',n')(m'',n'')$ есть поверхность класса $mm'm''+mm'n''+m''mn'$ $m'mn''$.

Представимъ себѣ три коннекса $(m,n),(m',n'),(m'',n'')$. Пара поверхностей образуемая ими въ соединеніи съ тожественнымъ коннексомъ $u_x=o$ будетъ по предыдущему порядка и класса, опредѣляемыхъ изъ уравненія

$$\begin{gathered}\xi_4=(m.p+n.e)(m'.p+n'.e)(m''.p+n''.e)(1.p+1.e)=\\(mm'm''+mm'n''+mm''n'+m'm''n)p^3e+\\(mm'n''+mm''n'+mn'n''+m'm''n+m'nn''+m''nn')p^2e^2+\\+(nn'n''+mn'n''+m'n''n+m''nn')pe^3\end{gathered}$$

т. е. эта пара поверхностей состоитъ изъ точечной поверхности порядка $nn'm''+mn'n''+m'n''n+m''nn'$, которая и есть мѣсто, указываемое въ теоремѣ VI (лѣв. ст.), и изъ огибаемой касательными плоскостями поверхности класса $mm'm''+$

$mm'n'' + mm''n' + m'm''n$, которая и есть геометрическое мѣсто, упоминаемое въ коррелятивной теоремѣ.

Полагая въ теоремѣ VI (слѣва) $m'' = o$, получимъ соотв. теорему V, а при коррелятивномъ предположеніи $n'' = o$ въ теоремѣ VI (справа) получимъ теорему V (справа). При $m' = m'' = o$ получимъ теорему,—частный случай теоремы II:

Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія поверхностей имплекса—или интегральныхъ поверхностей коннекса (m,n) — *съ различными плоскостями, общими касательными поверхностей классовъ* n' *и* n'', *есть поверхность порядка* $n'n''(m+n)$.

Полагая здѣсь же справа $n' = n'' = o$, получимъ коррелятивную теорему. Полагая $n = n' = n'' = o$, получаемъ теорему Безу, что три алгебраическія поверхности степеней m, m' и m'' пересѣкаются въ $mm'm''$ точкахъ.

Приведемъ еще одинъ частный случай. Представимъ себѣ связки плоскостей порядка m, m', m''

$$\varphi + \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = o, \quad \psi + \lambda'\psi_1 + \mu'\psi_2 = o, \quad \chi + \lambda''\chi_1 + \mu''\chi_2 = o$$

гдѣ φ_i, ψ_i и χ_i суть функціи $x_1 \,..\, x_4$ степеней соотвѣтственно m, m', m''. Дифференціальное уравненіе этихъ связокъ получимъ дифференцируя и исключая $\sigma^{(k)}, \lambda^{(k)}, \varkappa^{(k)}$ изъ уравненій:

$$\sigma . u_i = \frac{d\varphi}{dx_i}\lambda + \frac{d\varphi_1}{dx_i} + \mu\frac{d\varphi_2}{dx_i} \qquad (i = 1,2,3,4),$$

и будемъ имѣть такимъ образомъ коннексы:

$$(3(m-1),1) \colon \; \Sigma \pm u_1 \frac{d\varphi}{dx_2}\,\frac{d\varphi_1}{dx_3}\,\frac{d\varphi_2}{dx_4} = o,$$

$$(3(m'-1),1) \colon \; \Sigma \pm u_1 \frac{d\psi}{dx_2}\,\frac{d\psi_1}{dx_3}\,\frac{d\psi_2}{dx_4} = o,$$

$$(3(m''-1),1) \; \Sigma \pm u_1 \frac{d\chi}{dx_2}\,\frac{d\chi_1}{dx_3}\,\frac{d\chi_2}{dx_4} = o,$$

главныя коинциденціи которыхъ будутъ имѣть своими интегральными поверхностями вышеупомянутыя связки поверхностей.

Примѣняя сюда теорему VI получимъ: *Если даны три связки плоскостей порядковъ* m, m' *и* m'', *то геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ касаются между собою три по-*

верхности, принадлежащія къ тремъ различнымъ связкамъ, есть поверхность порядка $3(m+m'+m'')-8$, *проходящая черезъ* $m^3+m'^3+m''^3$ *основныхъ точекъ трехъ связокъ. Общія касательныя огибаютъ поверхность класса*

$$9[(m-1)(m'-1)m''+(m''-1)(m-1)m'+(m'-1)(m''-1)m].$$

Аналогичныя теоремы получимъ въ коррелятивномъ случаѣ.

Чтобы покончить съ изслѣдованіями Фурэ, остановимся теперь же на томъ, что онъ называетъ *системами поверхностей*. Если возьмемъ два какихъ-нибудь коннекса

$$(m,n) \text{ и } (m',n'){:}\ f(x,u)=o \text{ и } \varphi(x,u)=o,$$

то главныя ихъ коинциденціи имѣютъ ∞^3 общихъ элементовъ, образующихъ *главную бикоинциденцію* коинциденціи $f=o$, $\varphi=o$. Каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ конечное число nn' проходящихъ черезъ нее плоскостей, и каждой плоскости mm' лежащихъ на ней точекъ; три уравненія $f=o$, $\varphi=o$ и $u_x=o$ устанавливаютъ такимъ образомъ бираціональное соотвѣтствіе между точками и плоскостями пространства:

$$\begin{aligned} \varrho x_i &= \Phi_i(u_1\,..\,u_4) \quad (i=1,2,3,4) \\ \sigma.u_i &= \Psi_i(x_1\,..\,x_4) \end{aligned}$$

Если отъ точки x перейдемъ къ безконечно-близкой $x+dx$, то плоскость $u+du$, сосѣдняя съ u и образующая вмѣстѣ съ $x+dx$ элементъ, находящійся въ соединеніи съ (x,u), опредѣлится единственнымъ образомъ; — дѣйствительно чтобы выполнить соотношенія

$$\Sigma u_i dx_i=o,\ \Sigma x_i du_i=o,$$
$$\Sigma\frac{df}{dx_i}dx_i+\Sigma\frac{df}{du_i}du_i=o,\ \Sigma\frac{d\varphi}{dx_i}dx_i+\Sigma\frac{d\varphi}{du_i}du_i=o$$

за du_i нужно взять

$$\sigma du_i=\Sigma\frac{d\Psi_i}{dx_l}dx_l \ \therefore\ \frac{du_i}{u_i}=\Sigma\frac{1}{\Psi_i}\frac{d\Psi_i}{dxl}dx_l.$$

Переходя непрерывнымъ образомъ отъ одной точки къ сосѣдней съ нею, построимъ кривую — характеристику, общую двумъ главнымъ коинциденціямъ, а соотвѣтственныя плоскости огибаютъ характеристику—развертывающуюся. Но эти ∞^2 характеристикъ нельзя вообще распредѣлить на ∞^1 поверхностей, т. е. плоскости, касательныя къ характеристикѣ, безконечно-мало уклоняющейся отъ другой, не будутъ вообще проходить черезъ касательныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ этой послѣдней. Это возможно лишь при выполненіи выведеннаго выше условія

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{df}{dx_i}\,\frac{d\varphi}{du_i}-\frac{df}{du_i}\,\frac{d\varphi}{dx_i}\right)=o,$$

чтобы два коннекса имѣли ∞^1 общихъ интегральныхъ поверхностей, были бы въ инволюціи. Дѣйствительно, если это условіе выполняется всѣми элементами разсматриваемой бикоинциденціи, то сдѣлавъ въ $f=o$ и $\varphi=o$ подстановку $u_i=\Phi_i(x)$ и дифференцируя по x, будемъ имѣть:

$$\frac{df}{dx_i}+\sum_{k=1}^{k=4}\frac{df}{du_k}\,\frac{du_k}{dx_i}=o,\quad \frac{d\varphi}{dx_i}+\sum_{k=4}^{k=4}\frac{d\varphi}{du_k}\,\frac{du_k}{dx_i}=o\quad (i=1,2,3,4).$$

Отсюда, если первыя уравненія умножимъ на $\frac{d\varphi}{du_k}$, вторыя на $-\frac{df}{du_k}$,

$$\Sigma\frac{df}{du_k}\,\frac{d\varphi}{du_i}\left(\frac{du_k}{dx_i}-\frac{du_i}{dx_k}\right)=o.$$

Такъ какъ это уравненіе должно быть выполнено для всѣхъ элементовъ бикоинциденціи, и $\frac{df}{du_i}$, $\frac{d\varphi}{du_k}$ не всѣ равны нулю, то должно быть $\frac{du_k}{dx_i}=\frac{du_i}{dx_k}$, т. е. выраженіе

$$\Sigma\Phi_i(x_1\,..\,x_4)dx_i=o \text{ при условіи } \Sigma x_i\Phi_i=o$$

представляетъ собою точный дифференціалъ dH, такъ что

$$H=const$$

изображаетъ ∞^1 поверхностей, которыя и будутъ искомыми общими интегралами уравненій

$$f=o,\ u_x=o \text{ и } \varphi=o,\ u_x=o.$$

Мы предположили, что уравненія опредѣляющія бикоинциденцію могутъ быть рѣшены относительно u. Если же относительно u они разрѣшены быть не могутъ, то разрѣшаются относительно x, и при выполненіи условія интегрируемости мы будемъ имѣть:

$$o = \Sigma \Psi_i(u_1 \,..\, u_4) du_i = d\Xi.$$
$$\therefore \quad \Xi(u_1 \,..\, u_4) = const$$

опредѣлитъ семью поверхностей въ плоскостныхъ координатахъ—∞^1 интеграловъ, общихъ двумъ уравненіямъ. Если же останемся при точечныхъ координатахъ, то уравненіе $f = o$, $\varphi = o$, $u_x = o$ приведутся или къ системѣ

$$\varphi(x_1 \,..\, x_4) = o, \;\; K(x,u) = o, \;\; u_x = o$$

или къ системѣ

$$\varphi_1(x_1 \,..\, x_4) = o, \;\; \varphi_2(x_1 \,..\, x_4) = o, \;\; u_x = o.$$

Въ первомъ случаѣ ∞^3 элементовъ бикоинциденціи составляются такъ: каждая изъ ∞^2 точекъ поверхности $\varphi = o$ даетъ ∞^1 элементовъ въ соединеніи съ ∞^1 плоскостями, черезъ нее проходящими и огибающими коническую поверхность $K(x,u) = o$, $u_x = o$. Характеристики суть кривыя, расположенныя на поверхности $\varphi = o$; но характеристики развертывающіяся будутъ касаться поверхности $\varphi = o$ вдоль соотвѣтственныхъ кривыхъ лишь въ случаѣ выполненія условій интегрируемости, которое здѣсь приводится къ

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{dK}{du_i} \, \frac{d\varphi}{dx_i} = o.$$

Въ частности, если $K(x,u) = o$ есть коннексъ $(m,1)$, это уравненіе выражаетъ, что принадлежащая точкѣ x въ $K = o$ точка y лежитъ въ плоскости, касательной къ $\varphi = o$ въ точкѣ x, т. е. прямая xy касается этой поверхности. Въ случаѣ интегрируемости оси пучковъ, принадлежащихъ x въ коинциденціи $K = o$, $u_x = o$, огибаютъ ∞^1 характеристикъ, лежащихъ на $\varphi = o$ и представляющихъ ∞^1 интеграловъ, общихъ разсматриваемымъ уравненіямъ. Рѣшеніемъ является сверхъ того сама поверхность $\varphi = o$.

Если данная бикоинциденція приводится къ $\phi_1(x_1 \ldots x_4) = o$, $\phi_2(x_1 \ldots x_4) = o$, $u_x = o$, то ∞^3 элементовъ ея слагаются изъ ∞^1 связокъ съ вершинами на кривой $\phi_1 = o$, $\phi_2 = o$, которыя и являются интегралами системы. Рѣшеніемъ является сверхъ того и кривая $\phi_1 = o$, $\phi_2 = o$. Аналогичныя явленія представляются въ двойственныхъ случаяхъ

$$\Psi(u_1 \ldots u_4) = o,\ K(x,u) = o,\ u_x = o \text{ и}$$
$$\Psi_1(u_1 \ldots u_4) = o,\ \Psi_2(u_1 \ldots u_4) = o,\ u_x = o.$$

Обстоятельство, что уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ вида $Pdx + Qdy + Rdz = o$, не выполняющее условій интегрируемости, можетъ быть проинтегрировано и приводится къ системѣ двухъ уравненій въ частныхъ производныхъ замѣчено было Монжемъ [1]), указавшимъ и геометрическое значеніе этого результата, — что интегралами являются здѣсь не поверхности, а кривыя двоякой кривизны.

Если же условія интегрируемости выполнены, то совокупность ∞^1 интегральныхъ поверхностей коинциденціи $f(x,u) = o$, $\phi(x,u) = o$ обладаютъ слѣдующими свойствами: 1° черезъ каждую точку пространства проходитъ $\nu = nn'$ поверхностей системы, 2° каждой плоскости пространства касаются $\mu = mm'$ поверхностей и 3° $\varrho = mn' + nm'$ имѣютъ въ точкахъ встрѣчи съ данною прямою касательною плоскость, проходящую черезъ эту прямую. Дѣйствительно первое число—порядокъ системы совпадаетъ съ числомъ элементовъ бикоинциденціи, которыхъ точка есть данная, второе—съ числомъ ея элементовъ, которыхъ плоскость есть данная и 3° есть число элементовъ, проходящихъ черезъ данную прямую т. е. выполняющихъ уравненія

$$(xpp)_1 = o,\ (xpp)_2 = o$$
$$(u\pi\pi)_1 = o,\ (u\pi\pi)_2 = o$$
$$f = o,\ \phi = o\ (u_x = o).$$

---

[1]) См. его Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour les quelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une veritable intégration et que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux differences partielles élevées. Histoire de l'Acad de Paris 1784 p. 502.

Такимъ образомъ опредѣляются порядокъ, классъ и рангъ этой *системы поверхностей* (такое названіе придаетъ этой совокупности ∞^1 поверхностей Фурэ — C. R. t. 85 p. 844). Для бикоинциденціи мы имѣли четыре числа характеристики но $\varkappa_1$—порядокъ кривой, соотвѣтствующей плоскостямъ, проходящимъ черезъ данную прямую равно $\varrho+\nu$, а λ_1—классъ развертывающейся поверхности, соотвѣтствующей точкамъ данной прямой—равно $\mu+\varrho$. Въ тоже время это характеристики коинциденціи $f=o$, $\varphi=o$. Поэтому достаточно трехъ характеристикъ для опредѣленія системы поверхностей и для рѣшенія относящихся сюда вопросовъ энумеративной геометріи. Такъ прежде всего вопросъ о касаніи поверхностей системы съ поверхностью $F=o$ порядка μ_2 ранга ϱ_2 и класса ν_2 сведемъ на вопросъ о числѣ элементовъ пары поверхностей

$$F=o,\ \varrho u_i=\frac{dF}{dx_i}\quad (i=1,2,3,4),$$

общихъ ей съ коинциденціею $f(x,u)=o$, $\varphi(x,u)=o$ порядка μ, класса ν и ранга ϱ—равномъ по (16) § 1:

$$N=\mu\mu_2+\varrho\varrho_2+\nu_2\nu$$

Въ примѣненіи къ системамъ алгебраическихъ поверхностей эта теорема, какъ указываетъ Brill (Math. Ann VIII: Ueber Systeme von Curven u. Flächen S. 534) дана впервые de Jonquières'омъ (C. R. t. 58, 81).

Пусть $\psi=o$ третій коннексъ (m'',n''), не стоящій ни въ какомъ особомъ отношеніи къ коннексамъ въ инволюціи f и φ. Съ главною бикоинциденціею послѣднихъ онъ имѣетъ общую пару поверхностей, порядокъ и классъ которой по формуламъ (10), (11) § 1 будутъ соотвѣтственно $n''(\nu+\varrho)+m''\nu$ и $m''(\mu+\varrho)+n''\mu$. Такимъ образомъ: *геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія интегральныхъ поверхностей коннекса* (m'',n'') (*поверхностей имплекса* (m'',n'')) *съ поверхностями системы* (ν,ϱ,μ) *есть поверхность порядка* $\varrho n''+n\nu''+\nu m''$, *а огибающая соотв. общихъ касательныхъ есть поверхность класса* $\mu m''+m''\varrho+n''\mu$ (Fouret, C. R. t. 80 p. 805). Къ этому можно прибавить, что число такихъ элементовъ этой пары, или число такихъ точекъ прикосновенія интегральныхъ поверхностей коннекса $(m''n'')$ съ поверхностями системы (ν,ϱ,μ), которыя лежатъ въ данной плоскости, и которыхъ касательныя проходятъ черезъ данную точку, есть

$$\mu n'' + \varrho(m'' + n'') + \nu m''.$$

Двѣ системы поверхностей (ν,ϱ,μ) и (ν',ϱ',μ') имѣютъ ∞^1 *общихъ элементовъ, которыхъ точки—т. е. точки касанія поверхностей этихъ системъ—образуютъ кривую двоякой кривизны порядка* $\mu'\nu + \mu\nu' + \nu'\varrho + \nu\varrho' + \varrho\varrho'$, *а огибающая соотвѣтственныхъ плоскостей—общихъ касательныхъ есть развертывающаяся поверхность класса* $\mu\nu' + \nu\mu' + \varrho\mu' + \mu\varrho' + \varrho\varrho'$ (§ 1, (12)) [1].

§ 13. **Поверхности особенностей. Особенныя рѣшенія.** Примѣняя къ главной коинциденціи коннекса $f(x,u) = o$ дан-

---

[1]) Системы поверхностей можно изучать еще съ другой точки зрѣнія. Какъ мы видѣли, изученіе ихъ сводится на изученіе уравненія въ полныхъ дифференціалахъ $\Sigma\Phi_i dx_i = o$ при условіи $\Sigma\Phi_i x_i = o$. Съ такой точки зрѣнія занимался этими конфигураціями Фоссъ (Math. Ann XVI, 556—9, XXIII, 45—81, 359—411). Зная уравненія $f=o$, $\Phi=o$, $u_x=o$ найдемъ $\sigma u_i = \Phi_i$ и получимъ уравненіе въ полныхъ дифференціалахъ и обратно отъ этого послѣдняго перейдемъ къ уравненіямъ бикоинциденціи, приводя къ цѣлому виду уравненія

$$\frac{\Phi_1}{x_1} = \frac{\Phi_2}{x_2} = \frac{\Phi_3}{x_3} = \frac{\Phi_4}{x_4}.$$

Представимъ себѣ съ другой стороны коннексъ съ элементомъ (точка прямая) $\varphi(x,p) = o$. Его главная коинциденція выдѣляется уравненіями $(xpp)_1 = o$, $(xpp)_2 = o$. Условія соединеннаго положенія безконечно близкихъ элементовъ суть $(dxpp)_1 = o$, $(dxpp)_2 = o$, такъ что прямая p, соединяющая точки x и $x+dx$ будетъ $\tau p_{ik} = x_i dx_k - x_k dx_i$. Подставляя въ уравненіе $\varphi(x,p) = o$ получимъ $\varphi(x,(xdx)) \equiv a_x{}^m(\mathfrak{a}\mathfrak{b}xdx)^r = o$. Случай уравненій 1 порядка относительно дифференціаловъ, который имѣемъ въ системахъ поверхностей, является однимъ изъ простѣйшихъ, и изученіе его явится первымъ шагомъ въ теоріи главныхъ коинциденцій коннексовъ съ элементомъ (точка, прямая). Въ виду этого является болѣе умѣстнымъ изучать системы поверхностей въ связи съ коннексами $\varphi(x,p) = o$, нѣкоторыя свойства котораго—преимущественно энумеративныя—изслѣдованы Бонсдорфомъ, а главная коинциденція подъ именемъ коническаго коннекса разсматривается Мазони.—Ср. S. Lie Theorie de Transformationsgruppen. B. II.

ное въ § 8 для коинциденціи вообще опредѣленіе особенныхъ элементовъ, замѣтимъ, что есть особенные элементы двухъ родовъ: одни выполняютъ уравненія:

$$\frac{\frac{df}{dx_1}}{u_1}=\frac{\frac{df}{dx_2}}{u_2}=\frac{\frac{df}{dx_3}}{u_3}=\frac{\frac{df}{dx_4}}{u_4}=\sigma \quad \text{или} \quad \sigma.u_i=\frac{df}{dx_i} \qquad (i=1,2,3,4)$$

это—элементы точечно-особенные. Геометрическое ихъ отличіе состоитъ въ томъ, что поверхность X_u, принадлежащая плоскости u, касается этой плоскости, и точка прикосновенія x является поэтому двойною точкою на кривой пересѣченія u съ X_u т. е. на принадлежащей u кривой главной коинциденціи; такъ какъ $\sigma v_i=\frac{df}{dx_i}$ опредѣляютъ вообще плоскость элемента (y,v) сопряженнаго коннекса соотвѣтствующаго элементу (x,u), то разсматриваемые элементы суть въ тоже время тѣ элементы, въ которыхъ u есть общая касательная поверхности U_x и поверхности V_y принадлежащей въ сопряженномъ коннексѣ точкѣ y, соотвѣтствующей x. Такъ какъ помножая на x_i и суммируя получаемъ $m.f=\sigma.u_x$, то шесть уравненій $\sigma u_i=\frac{df}{dx_i}$, $f=o$, $u_x=o$ сводятся къ пяти, а по исключеніи σ къ четыремъ и опредѣляютъ пару поверхностей изъ которыхъ одна есть огибающая плоскостей u, касательныхъ къ принадлежащимъ имъ поверхностямъ X_u, а вторая мѣсто ихъ точекъ прикосновенія. Уравненіе первой получится поэтому, если выразимъ уравненіе X_u въ плоскостныхъ координатахъ подъ видомъ $\Phi(u,U)=o$ и напишемъ, что оно удовлетворяется при $U_i=u_i$: $\Phi(u,u)=o$. Такъ если

$$f(x,u)\equiv a_x{}^2u_\alpha{}^n=o,$$

то уравненіе X_u въ тангенціальныхъ координатахъ получается исключеніемъ x_i изъ $\sigma.U_i=a_ia_xu_\alpha{}^n (i=1,2,3,4)$, такъ что

$$\Phi(u,U)\equiv u_\alpha{}^n u_\beta{}^n u_\gamma{}^n (abcU)^2=o, \text{ и потому}$$
$$\Phi(u,u)\equiv u_\alpha{}^n u_\beta{}^n u_\gamma{}^n (abcu)^2=o,$$

поверхность класса $3n+2$. Мѣсто точекъ прикосновенія означимъ F'.

Другого рода особенные элементы главной коинциденціи опредѣляются уравненіями

$$\frac{\frac{df}{du_1}}{x_1} = \frac{\frac{df}{du_2}}{x_2} = \frac{\frac{df}{du_3}}{x_3} = \frac{\frac{df}{du_4}}{x_4} \quad \text{или} \quad \varrho x_i = \frac{df}{du_i} \quad (i = 1,2,3,4),$$

которыя выражаютъ, что поверхность U_x, принадлежащая точкѣ x въ коннексѣ, имѣетъ точкою прикосновенія одной изъ касательныхъ u самую точку x, т. е. проходитъ черезъ нее. Элементы этого рода тангенціально-особенные, потому что здѣсь u является двойною касательною принадлежащаго x конуса главной коинциденціи, и также образуютъ пару поверхностей, одна изъ коихъ есть геометрическое мѣсто точекъ x, лежащихъ на принадлежащихъ имъ въ коннексѣ поверхностяхъ U_x, а другая—огибающая касательныхъ къ U_x въ этихъ точкахъ. Уравненіе первой получимъ поэтому, если выразимъ U_x въ точечныхъ координатахъ, — т. е. исключимъ ϱ и u_i изъ уравненій $F(x,u) = o$, $\varrho X_i = \frac{df}{du_i}$ и напишемъ, что полученное такимъ образомъ уравненіе $F(x,X) = o$ удовлетворяются при $X_i = x_i$,—т. е. искомое уравненіе есть $F(x,x) = o$.

Такъ если f есть коннексъ $(m,2)$, то

$$F(x,X) \equiv a_x^m b_x^m c_x^m (\alpha\beta\gamma X)^2 = o,$$

и слѣдовательно

$F(x,x) \equiv a_x^m b_x^m c_x^m (\alpha\beta\gamma x)^2 = o$,—поверхность порядка $3m+2$.

Огибающую плоскостей u, касательныхъ къ U_x въ точкахъ этой поверхности означимъ Φ'. Поверхность $F(x,x) = o$ существуетъ только при $n > 1$, потому что при $n = 1$ U_x сводится къ точкѣ и нельзя уже говорить о двойныхъ касательныхъ etc. Точно также $\Phi(u,u) = o$ существуетъ только при $m > 1$. Случаи коннексовъ $(m,1)$ и $(1,n)$ нужно поэтому разсмотрѣть особо.

Порядокъ и классъ связанныхъ съ коинциденціей двухъ паръ поверхностей F, Φ' и F', Φ опредѣлимъ по общимъ формуламъ § 1, какъ порядокъ и классъ пары поверхностей, опредѣленной пересѣченіемъ четырехъ коннексовъ

$$(\mathrm{a})\ f=o,\ x_1\frac{df}{du_2}-x_2\frac{df}{du_1}=o,\ x_2\frac{df}{du_3}-x_3\frac{df}{du_2}=o,\ x_3\frac{df}{du_4}-x_4\frac{df}{du_3}=o$$

порядокъ и классъ которыхъ суть соотвѣтственно (m,n), $(m+1,n-1)$, $(m+1,n-1)$, $(m+1,n-1)$; при этомъ нужно отбросить, какъ посторонніе, общія также этимъ четыремъ коннексамъ 1^0 пару поверхностей

$$(\mathrm{b})\frac{df}{du_1}=o,\quad \frac{df}{du_2}=o,\quad \frac{df}{du_3}=o,\quad \frac{df}{du_4}=o,\text{—}$$

мѣсто тангенціально-особенныхъ элементовъ коннекса $f=o$, и 2^0 двѣ пары поверхностей

$$(\mathrm{c})\quad \begin{cases} f=o,\ x_2=o,\ \dfrac{df}{du_2}=o,\ x_3\dfrac{df}{du_4}-x_4\dfrac{df}{du_3}=o \\ f=o,\ x_3=o,\ \dfrac{df}{du_3}=o,\ x_1\dfrac{df}{du_2}-x_2\dfrac{df}{du_1}=o \end{cases}$$

потому что хотя выписанная система уравненій при этомъ и удовлетворяется, но не выполняются другія уравненія изъ числа $x_i\dfrac{df}{du_k}-x_k\dfrac{df}{du_i}=o$,—которыя всѣ должны быть слѣдствіемъ четырехъ выписанныхъ.

Порядокъ пары (a) есть $m(n-1)^3+3(n-1)^2n(m+1)$, классъ ея $(m+1)^3n+3(n-1)n(m+1)^2$, для пары (b) порядокъ $4m(n-1)^3$ и классъ $4m^3(n-1)$, наконецъ пары (c) порядка $n(n-1)^2$ и класса $m^2(n-1)+m(m+1)(2n-1)$ каждая. Поэтому порядокъ поверхности F' есть:

$$m(n-1)^3+3(m+1)n(n-1)^2-4m(n-1)^3-2n(n-1)^2=$$
$$=(3m+n)(n-1)^2,$$

а классъ поверхности Φ'

$$(m+1)^3n+3m(m+1)^2(n-1)-4m^3(n-1)-2m^2(n-1)-$$
$$2m(m+1)(2n-1)=m^3+3m^2n-2m^2+2mn+n-m.$$

Порядокъ поверхности F можно было бы получить еще такимъ образомъ: (порядокъ) поверхности n-го класса безъ особенностей есть $n(n-1)^2$, и уравненіе ея въ точечныхъ координатахъ степени $3(n-1)^2$ относительно коэффиціентовъ ея тангенціальнаго уравненія. Каждый изъ которыхъ степени m относительно $x_1 \ldots x_4$; такимъ образомъ порядокъ поверхности F' равенъ $n(n-1)^2+3(n-1)^2m=(3m+n)(n-1)^2$, какъ и найдено выше.

Въ двойственномъ случаѣ порядокъ и классъ пары поверхностей F'', Φ опредѣлимъ, какъ порядокъ и классъ пары поверхностей, которую получимъ откидывая отъ пары

$$f=o,\ u_1\frac{df}{dx_2}-u_2\frac{df}{dx_1}=o,\ u_2\frac{df}{dx_3}-u_3\frac{df}{dx_2}=o,\ u_3\frac{df}{dx_4}-u_4\frac{df}{dx_3}=o$$

порядка $m(n+1)^3+3(m-1)n(n+1)^2$ и класса $(m-1)^3n+$ $+3(m-1)^2m(n+1)$ пары поверхностей: 1^0 пару

$$\frac{df}{dx_1}=o,\ \frac{df}{dx_2}=o,\ \frac{df}{dx_3}=o;\ \frac{df}{dx_4}=o,$$

мѣсто точечно-особенныхъ элементовъ—порядка $4(m-1)n^3$ и класса $4(m-1)^3n$;

2^0 пары
$$f=o,\ u_2=o,\frac{df}{dx_2}=o,\ u_3\frac{df}{dx_4}-u_4\frac{df}{dx_3}=o$$
$$f=o,\ u_3=o,\frac{df}{dx_3}=o,\ u_1\frac{df}{dx_2}-u_2\frac{df}{dx_1}=o$$

порядка $n^2(m-1)+(2m-1)n(n+1)$ и класса $m(m-1)^2$ каждая.

Такимъ образомъ находимъ, что порядокъ F'' есть $n^3+3n^2m-2n^2+2nm+m-n$, а классъ $\Phi(3n+m)(m-1)^2$. Послѣднее число, какъ и порядокъ F, можно бы получить прямо. Въ частности при $n=2$ имѣемъ: F—порядка $3m+2$, F''—порядка $17m-2$, Φ' класса $(m+1)^3+m^2+1$ и Φ—класса $(m-1)\ (m+6)$.

Поверхности F и Φ имѣютъ тѣсную связь съ характеристиками и интегральными поверхностями коннекса. Разсмотримъ точки вблизи поверхности $F(x,x)=o$. Точка x этой поверхности лежитъ на принадлежащей ей поверхности U_x, и конусъ главной коинциденціи распадается на плоскость, касательную къ U_x въ точкѣ x, и другой конусъ. Двѣ по крайней мѣрѣ образующія конуса главной коинциденціи для такой точки слѣдовательно совпадаютъ, и двѣ кривыя характеристики, проходящія черезъ точку, имѣютъ въ ней общую касательную. Но уравненія характеристикъ $\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u_i}$ съ помощью $\varrho x_i = \frac{df}{du_i}$, опредѣляющихъ $F(x,x) = o$, принимаютъ вблизи точки этой поверхности видъ $\frac{dx_i}{dt}=\varrho x_i$, такъ что точка $x+dx$, въ которую перейдемъ двигаясь по характеристикѣ, приведшей въ точку x на $F(x,x)=o$, имѣетъ координатами $x_i+dx_i=x_i(1+\varrho dt)$, т. е. характеристика не продолжается за точку x. Въ точкѣ поверхности $F(x,x)=o$ двѣ вѣтви имѣютъ общую касательную, не продолжаясь за эту точку, которая является такимъ образомъ точкою возврата кривой-характеристики. Повторивъ двойственное разсужденіе для характеристики-развертывающейся, касательной къ $\Phi(u,u)=o$, получимъ такія двѣ коррелятивныя теоремы:

Геометрическое мѣсто $F(x,x)=o$ точекъ, расположенныхъ на принадлежащихъ имъ въ коннексъ $f(x,u)=o$ поверхностяхъ U_x, есть въ то же время геометрическое мѣсто точекъ возврата кривыхъ-характеристикъ этого коннекса.

Огибающая $\Phi(u,u)=o$ плоскостей, касательныхъ къ принадлежащимъ имъ въ коннексъ $f(x,u)=o$ поверхностямъ X_u, есть въ то же время огибающая касательныхъ возврата характеристикъ — развертывающихся этого коннекса.

Плоскости, касательныя въ точкахъ F къ принадлежащимъ послѣднимъ поверхностямъ U_x, огибаютъ другую поверхность Φ', которая будетъ въ то же время огибающею касательныхъ перегиба характеристикъ—развертывающихся; точки прикосновенія касательныхъ u къ X_u являются точками перегиба кривыхъ-характеристикъ и образуютъ поверхность F'. Только въ отдѣльныхъ точкахъ поверхности F касательная къ U_x будетъ въ тоже время касательною и къ $F(x,x)=o$,—для этого нужно не только, чтобы F и Φ' просто касались (онѣ касаются по кривой), но чтобы онѣ касались въ соотвѣтственныхъ точкахъ, а для этого необходимо чтобы кромѣ уравненій $\varrho x_i = \frac{df}{du_i}$, точка x выполняла также уравненія $\sigma u_i = \frac{df}{dx_i}$. Восемь уравненій

$$(22)\quad \begin{array}{c} x_1\frac{df}{du_2} - x_2\frac{df}{du_1} = o,\ x_2\frac{df}{du_3} - x_3\frac{df}{du_2} = o,\ x_3\frac{df}{du_4} - x_4\frac{df}{du_3} = o \\ u_1\frac{df}{dx_2} - u_2\frac{df}{dx_1} = o,\ u_2\frac{df}{dx_3} - u_3\frac{df}{dx_2} = o,\ u_3\frac{df}{dx_4} - u_4\frac{df}{dx_3} = o \\ f(x,u) = o,\ u_x = o \end{array}$$

вслѣдствіе однородности f сводятся къ шести и опредѣляютъ вообще конечное число элементовъ (x,u), образуемыхъ точкою поверхности F и касательною къ ней въ этой точкѣ, касающейся и Φ'. Вслѣдствіе полной симметріи относительно x и u это будутъ также элементы (x,u), которыхъ плоскости u касаются $\Phi(u,u) = o$ въ точкахъ x, принадлежащихъ F'.

Въ извѣстныхъ случаяхъ однако шесть уравненій могутъ имѣть ∞^1 и даже ∞^2 общихъ элементовъ. Въ послѣднемъ случаѣ совокупность такихъ ∞^2 элементовъ главной коинциденціи $f = o$, $u_x = o$ образуетъ элементное многообразіе этой коинциденціи, представляя собою какъ точечное—поверхность, кривую или точку. Дѣйствительно два сосѣдніе элемента (x,u) и $(x + dx, u + du)$ образуются первый точкою x поверхности U_x и касательною къ ней u въ этой точкѣ и второй—точкою $x + dx$ той же поверхности, лежащей въ плоскости u, т. е. выполняющей уравненіе $\Sigma x_i du_i = o$.

Это рѣшеніе отличается отъ другихъ элементныхъ многообразій разсматриваемой коинциденціи тѣмъ, что принадлежащій точкѣ этой поверхности, кривой или связки конусъ главной коинциденціи распадается на другой конусъ и на плоскость, касательную къ разсматриваемому рѣшенію. Каждая прямая пучка, имѣющаго эту точку своею вершиною и лежащаго въ этой плоскости, есть образующая принадлежащаго точкѣ конуса главной коинциденціи, такъ что черезъ каждую точку разсматриваемаго рѣшенія проходятъ по всѣмъ направленіямъ кривыя характеристики, къ нему касательныя. Двойственно изъ кривой главной коинциденціи въ плоскости, принадлежащей къ разсматриваемому рѣшенію (касательной къ этой поверхности, кривой etc.) выдѣляется точка прикосновенія этой плоскости: прямыя пучка, лежащаго въ плоскости имѣющаго прямую вершиною, суть образующія, по которымъ съ плоскостью касается характеристики развертывающіяся.

Рѣшеніе, опредѣляемое уравненіями (22), является огибающею полныхъ интеграловъ, — опредѣляемыхъ системою уравненій:

$$f(x,u)=o,\ \ u_x=o,\ \ \varphi_1(x,u,\alpha,\beta)=o,\ \ \varphi_2(x,u,\alpha,\beta)=o$$

гдѣ α,β произвольныя постоянныя и φ_1,φ_2 рѣшенія (20). Дѣйствительно исключая $u_1\,..\,u_4$, получимъ уравненіе интеграла

$$\text{(I)}\qquad V(x_1\,..\,x_4,\alpha,\beta)=o,$$

и огибающая этихъ поверхностей получится исключеніемъ α,β изъ $V=o$ и изъ

$$\frac{dV}{d\alpha}=o,\quad \frac{dV}{d\beta}=o.$$

Въ однородномъ видѣ эти условія получимъ такъ: пусть изъ трехъ уравненій, опредѣляющихъ интегралъ напримѣръ $u_x=o$, $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$ нашли u_i пропорціональными нѣкоторымъ функціямъ $\omega_i(x_1\,..\,x_4;\alpha,\beta)$. Подставляя въ $f=o$ — при чемъ можно принять множитель пропорціональности равнымъ единицѣ,—и получимъ уравненіе (I). Такимъ образомъ, если вездѣ замѣнимъ u_i черезъ ω_i, то будемъ имѣть:

$$\Sigma\frac{du_i}{d\alpha}\Big(\lambda_1 x_i+\lambda_2\frac{d\varphi_1}{du_i}+\lambda_3\frac{d\varphi_2}{du_i}+\lambda_4\frac{df}{du_i}\Big)+\lambda_2\frac{d\varphi_1}{d\alpha}+\lambda_3\frac{d\varphi_2}{d\alpha}=o.$$

Мы получимъ такимъ образомъ четыре линейныхъ однородныхъ относительно $\frac{du_i}{d\alpha}$ уравненія; условія ихъ совмѣстности—одно тожественное съ условіемъ, получаемымъ изъ уравненія

$$\Sigma x_i\frac{du_i}{d\beta}\Big(\lambda_1 x_i+\lambda_2\frac{d\varphi_1}{du_i}+\lambda_3\frac{d\varphi_2}{du_i}+\lambda_4\frac{df}{du_i}\Big)+\lambda_2\frac{d\varphi_1}{d\beta}+\lambda_3\frac{d\varphi_2}{d\beta}=o$$

суть

$$\text{(A)}\qquad \Sigma\pm x_1\frac{df}{du_2}\frac{d\varphi_1}{du_3}\frac{d\varphi_2}{du_4}=o,\qquad \frac{d\varphi_1}{d\alpha}\frac{d\varphi_2}{d\beta}-\frac{d\varphi_1}{d\beta}\frac{d\varphi_2}{d\alpha}=o;$$

первое можно писать также

$$\Sigma\left(x_i\frac{df}{du_k}-x_k\frac{df}{du_i}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{du_j}\frac{d\varphi_2}{du_l}-\frac{d\varphi_1}{du_l}\frac{d\varphi_2}{du_j}\right)=o \quad (i,k,j,l=1,2,3,4).$$

Въ силу первыхъ трехъ уравненій системы (22) это уравненіе выполняется.

Двойственно опредѣляя изъ $u_x=o$, $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$ величины $x_1 \dots x_4$ въ функціи $u_1 \dots u_4$, α и β и подставляя въ $f(x,u)=o$, $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$ и $u_x=o$, будемъ имѣть:

$$\lambda_1 u_i+\lambda_2\frac{d\varphi_1}{dx_i}+\lambda_3\frac{d\varphi_2}{dx_i}+\lambda_4\frac{df}{dx_i}=o \quad (i=1,2,3,4)$$

и аналогично для β. Условіе совмѣстности этихъ уравненій есть

$$\text{(B)}\quad 0=\Sigma\pm u_1\frac{df}{dx_2}\frac{d\varphi_1}{dx_3}\frac{d\varphi_2}{dx_4}\equiv\Sigma\left(u_i\frac{df}{dx_k}-u_k\frac{df}{dx_i}\right)\left(\frac{d\varphi_1}{dx_j}\frac{d\varphi_2}{dx_l}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_j}\right)$$

Оно выполняется, если имѣютъ мѣсто вторыя три уравненія системы (22). Такимъ образомъ, если система (22) выполнена, удовлетворятся и выписанныя условныя уравненія. Обратно какой бы ни взяли полный интегралъ, т. е. какія ни выбрали функціи φ_1, φ_2, условныя уравненія должны удовлетворяться; поэтому должны въ отдѣльности уничтожаться коэффиціенты при

$$\frac{d\varphi_1}{dx_j}\frac{d\varphi_2}{dx_l}-\frac{d\varphi_1}{dx_l}\frac{d\varphi_2}{dx_j},\quad \frac{d\varphi_1}{du_j}\frac{d\varphi_2}{du_l}-\frac{d\varphi_1}{du_l}\frac{d\varphi_2}{du_j}$$

такъ что огибающая полныхъ интеграловъ должна выполнять уравненія (22) и совпадаетъ съ рѣшеніемъ, опредѣляемымъ этою системою. Это *особенное рѣшеніе* дифференціальнаго уравненія 1. порядка, изображаемаго главною коинциденціей $f=o$, $u_x=o$. Оно возможно только въ сравнительно исключительныхъ случаяхъ,—когда изъ шести уравненій (22) независимыхъ только четыре.

Первый далъ теорію особенныхъ рѣшеній уравненій въ частныхъ производныхъ 1 порядка Лагранжъ, исходя изъ понятія огибающей (Mém. Ac. Berlin. 1774). Если неизвѣстенъ полный интегралъ $V(xyz\alpha\beta)=o$, то по самому уравненію

$F(x,y,z,p,q)=o$ особенное рѣшеніе опредѣляется уравненіями

$$(23) \qquad F=o \quad \frac{dF}{dp}=o, \ \frac{dF}{dq}=o,$$

которыя въ однородномъ видѣ—при замѣнѣ $F(xyzpq)\equiv f(z,y,x,1;\ 1,p,q,px-qy-z)$ сводятся къ тремъ первымъ уравненіямъ системы (22). Но какъ замѣчено было для обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій De-Morgan'омъ [1]), уравненія эти опредѣляютъ вообще геометрическое мѣсто точекъ возврата. Чтобы получить особенное рѣшеніе, необходимо добавить уравненія

$$\frac{dF}{dx}+p\frac{dF}{dz}=o, \ \frac{dF}{dy}+q\frac{dF}{zd}=o,$$

переходящія при однородныхъ координатахъ во вторыя уравненія системы (22).

Одни уравненія (23) давали бы всегда нѣкоторое значеніе для z. Но какъ указываетъ Darboux въ своемъ изслѣдованіи [2]), надо различать уравненіи, которыя получаются исключеніемъ постоянныхъ изъ извѣстнаго уравненія $V(x,y,z,\alpha,\beta)=o$ и которыя вообще имѣютъ особенное рѣшеніе, отъ уравненій, происхожденіе которыхъ неизвѣстно и для которыхъ можно доказать методами теоріи комплекснаго перемѣннаго существованіе интеграла, но нельзя доказать, что можно установить такой интегралъ, который бы и по отношенію къ входящимъ въ него произвольнымъ постояннымъ обладалъ тою степенью непрерывности, какая необходима для возможности примѣненія теоріи огибающихся.

Теорія коннексовъ, не давая чего-нибудь существенно новаго, дѣлаетъ болѣе нагляднымъ самый фактъ исключительности появленія особеннаго рѣшенія [3]).

---

[1]) Cambridge Phil. Trans. IX p. 2 On some points of Integral calculus.

[2]) Sur les solutions singulières des équations aux dérivés partielles du 1. ordre. Mém. Sav. étrang. XXVII. 1884.

[3]) Литература до 1854 г. см. Houtain. Des solutions ingulières des équations différentielles. Далѣе пр. А. В. Васильевъ: Объ особенныхъ рѣшеніяхъ въ связи съ новыми взглядами на задачу интегрированія дифференціаль-

§ 14. **Однозначное преобразованіе и родъ главной коинциденціи.** Примѣняя къ главной коинциденціи общія формулы § 7, опредѣлимъ родъ главной коинциденціи коннекса $f=o$, какъ число произвольныхъ коэффиціентовъ въ выраженіи:

$$dJ=\frac{\Theta_1.(dx_1.d'x_2.d''x_3\ x_4)(u_\gamma\Sigma\sigma_i d'''u_i-u_\sigma\Sigma\gamma_i d'''u_i)}{(x_1\ \frac{df}{du_2}\gamma_3\sigma_4)}=-$$

$$=-\frac{\Theta_1(du_1d'u_2d''u_3u_4)(c_x\Sigma s_i d'''x_i-s_x\Sigma c_i d'''x_i)}{(u_1\ \frac{df}{dx_2}c_3s_4)}.$$

Дальнѣйшія характерныя числа коинциденціи суть родъ искомой бикоинциденціи $f=o$, $u_x=o$, $\Theta_1=o$ и т. д. Они не измѣняются при всѣхъ раціональныхъ однозначныхъ и однозначно обратимыхъ преобразованіяхъ, но не всѣ такія преобразованія

$$\rho y_i=\varphi_i(\overset{p}{x},\overset{q}{u}),\quad \tau v_k=\psi_k(\overset{r}{x},\overset{s}{u})$$

переводятъ главную коинциденцію коннекса $f=o$ въ главную же коинциденцію преобразованнаго коннекса. Послѣднему требованію удовлетворятъ тѣ только преобразованія, которыя элементъ (x,u), выполняющій уравненіе $u_x=o$, переводятъ въ такой (y,v), что $v_y=o$, и въ коихъ, кромѣ того, безконечно-близкимъ элементамъ въ соединеніи соотвѣтствуютъ безконечно близкіе элементы и также въ соединеніи. Такимъ образомъ въ силу $u_x=o$ и $u_{dx}=o$ должно быть $v_y=o$, $v_{dy}=o$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=4}\psi_i\varphi_i=o \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{i=4}\psi_i d\varphi_i=o$$

должны удовлетворяться въ силу $f=o$ и $u_x=o$.

ныхъ уравненій 1. порядка (Уч. Зап. Казан Ун. 1880) и Workman. Theory of singular solutions. Quart. J. of Mat. XXII. 1887). Современные взгляды ведутъ начало отъ работъ Дарбу (C. R. 1870, Bull. Sc. Math. (1) IV. 1873 и цит. выше работа) и Клебша (Math. Ann. B. VI S. 211, а также Clebsch-Lindemann, Vorlesungen. B. I. Abth. VII.

Первое условіе должно приводить къ тожеству

$$\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i \varphi_i = M.f + N.u_x.$$

Второе можетъ быть написано

$$\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i \left\{ \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\varphi_i}{dx_k} dx_k + \sum_{k=1}^{k=4} \frac{d\varphi_i}{du_k} du_k \right\} = o. \tag{24}$$

Но существованіе равенствъ

$$\Sigma x_i du_i = o, \ u_x = o, \ \Sigma x_i \frac{df}{dx_i} \equiv m f = o$$

ведетъ за собою такое равенство

$$\Sigma x_i (du_i - u_i dV - \frac{df}{dx_i} dU) = o$$

при всякихъ x,—т. е. должно быть

$$du_i = u_i dV + \frac{df}{dx_i} dU$$

Точно также найдемъ

$$dx_i = x_i dV' + \frac{df}{du_i} dU'$$

Внося эти значенія дифференціановъ du_i и dx_i въ тожество

$$df \equiv \Sigma \frac{df}{dx_i} dx_i + \Sigma \frac{df}{du_i} du_i = o,$$

получимъ

$$(dU + dU') \sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{df}{du_i} + dV' \Sigma \frac{df}{dx_i} x_i + dV \Sigma \frac{df}{du_i} u_i = o$$

или

$$(dU + dU') \sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{df}{du_i} + f(m dV' + n dV) = o,$$

что съ помощью уравненія $f=o$ приводится къ виду:

$$(dU+dU')\sum_{i=1}^{i=4}\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{df}{du_i}=o,$$

и такъ какъ вообще второй множитель неравенъ нулю, то должно быть

$$dU+dU'=o,\quad \text{т. е.}\quad dU'=-dU$$

Если подставимъ полученныя значенія du_i и dx_i въ уравненіе (1), то будемъ имѣть

$$(pdV'+qdV)\sum_{i=1}^{i=4}\psi_i\varphi_i-dU\sum_{i,k}^{1..4}\psi_i\left(\frac{d\varphi_i}{dx_k}\cdot\frac{df}{du_k}-\frac{d\varphi_i}{du_k}\cdot\frac{df}{dx_k}\right)=o,$$

или съ помощью (24)

$$(25)\qquad \sum_{i,k}^{1..4}\psi_i\left(\frac{d\varphi_i}{dx_k}\cdot\frac{df}{du_k}-\frac{df}{dx_k}\cdot\frac{d\varphi_i}{du_k}\right)=M'.f+N'.u_k\ .$$

Тожество (24) можно замѣнить другимъ;—произведемъ надъ нимъ операцію

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{df}{du_i}\,\frac{d}{dx_i}-\frac{df}{dx_i}\cdot\frac{d}{du_i}\right),$$

съ помощью (25) получимъ тогда

$$\sum_{i,k}^{1..4}\varphi_i\left(\frac{d\psi_i}{dx_k}\cdot\frac{df}{du_k}-\frac{d\psi_i}{du_k}\,\frac{df}{dx_k}\right)=M''.f\,N''.\,u_x$$

Итакъ, *для того. чтобы главная коинциденція коннекса* $f(x,u)$ $=o$ *преобразовывалась уравненіями*

$$\varrho y_i=\varphi_i(x,u).\ \ \sigma v_k=\psi_k(x,u)\ \ (i,k=1,2,3,4)$$

въ другую главную же коинциденцію, необходимо и достаточно, чтобы возможно было подобрать многочлены M',N',M'',N'' *такъ, чтобы выполнялись тожества*

$$\sum_{i=1}^{i=4} \psi_i \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d\varphi_i}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} - \frac{d\varphi_i}{du_k} \cdot \frac{df}{dx_k}\right) = M'.f + N'.\, u_x$$

$$\sum_{i=1}^{i=4} \varphi_i \sum_{k=1}^{k=4} \left(\frac{d\psi_i}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} - \frac{d\psi_i}{du_k} \cdot \frac{df}{dx_k}\right) = M''.\, f + N''.\, u_x\,.$$

При выполненіи этихъ тожествъ, слѣдовательно, совокупность интегральныхъ поверхностей дифференціальнаго уравненія, связаннаго вышеуказаннымъ образомъ съ главною коинциденціею коннекса $f(x,u)=o$, преобразуется въ совокупность интегральныхъ поверхностей дифференціальнаго уравненія, связаннаго точно также съ главной коинциденціей преобразованнаго коннекса $F(y,v)=o$. При этомъ по доказанному не измѣняется родъ главной коинцеденціи, и это приводитъ естественнымъ образомъ къ *классификаціи* дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка, аналогичной той, которую Клебшъ указалъ для обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій. Каждой главной коинциденціи, а слѣдовательно и связанному съ нею дифференціальному уравненію принадлежатъ четыре характеристическія числа, не измѣняющіяся при всѣхъ однозначныхъ преобразованіяхъ коинцеденціи и опредѣляющія *родъ* ея, который можно называть также и *родомъ* соотвѣтственнаго *дифференціальнаго уравненія 1. пор.* Равенство соотвѣтственныхъ характеристическихъ чиселъ есть поэтому необходимое условіе возможности преобразовать два данныхъ дифференціальныхъ уравненія одно въ другое, и сообразно значеніямъ родовыхъ чиселъ дифференціальныя уравненія 1. пор. распадаются на группы. Тѣ, которыя могутъ быть преобразованы одно въ другое однозначнымъ преобразованіемъ и потому являются тожественными, должны необходимо принадлежать къ одной группѣ [1]).

Остается разсмотрѣть тотъ случай, когда въ силу $f=o$, $u_x=o$ уничтожается выраженіе

$$\Sigma \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{df}{du_i} \equiv mn a_x^{m-1} u_\alpha^n b_x^m u_\beta^{n-1} a_\beta\,.$$

[1]) Ueb. ein neues Grundgebilde d. analytischen Geometrie d. Ebene. Math. Ann. B. VI. 202—215 (Gött. Nachr. 1872).

Сопоставляя уравненіе

$$\Sigma \frac{df}{dx_i} \cdot \frac{df}{du_i} = Kf + M.u_x\ ^2)$$

съ уравненіями

$$\Sigma \frac{df}{dx_i} x_i = m.f \quad \text{и} \quad \Sigma \frac{df}{du_i} u_i = n.f$$

заключаемъ, что

$$\frac{df}{dx_i} \equiv K.^{(i)} u_i + N.^{(i)} u_x \quad \text{или} \quad \frac{df}{du_i} \equiv L.^{(i)} u_i + M.^{(i)} u_x$$

такъ что должны быть выполнены или уравненія

$$u_1 \frac{df}{dx_2} - u_2 \frac{df}{dx_1} = o, \; u_2 \frac{df}{dx_3} - u_3 \frac{df}{dx_2} = o, \; u_3 \frac{df}{dx_4} - u_4 \frac{df}{dx_3} = o$$

въ силу уравненій $f = o$, $u_x = o$, или же уравненія

$$x_1 \frac{df}{du_2} - x_2 \frac{df}{du_1} = o, \; x_2 \frac{df}{du_3} - x_3 \frac{df}{du_2} = o, \; x_3 \frac{df}{du_4} - x_4 \frac{df}{du_3} = o\,,$$

выражающія условія наличности особенныхъ элементовъ въ этой коинциденціи. Обращаясь къ уравненію

$$X_p \equiv a_x^m (\alpha xpp)^n = o$$

которое преобразуется въ связанное съ главною коинциденціею коннекса $f = o$ дифференціальное уравненіе при подстановкѣ

$$P_{ik} = \frac{dx_i}{d\xi_1} \cdot \frac{dxk}{d\xi_2} - \frac{dxk}{d\xi_1} \cdot \frac{dxi}{d\xi_2}\,,$$

замѣтимъ, что предыдущія уравненія—1-й строки—принимаютъ при замѣнѣ $u_i = (xpp)_i$ такой видъ

$$\frac{dX_p}{dp_{ik}} = o \quad (i,k = 1,2,3,4)$$

---

[1]) Это уравненіе выражаетъ въ тоже время, что главныя коинциденціи даннаго коннекса и сопряженнаго совпадаютъ.

изъ коихъ независимыхъ три. Всѣ значенія (x,p), удовлетворяющія $X_p=o$, должны удовлетворить и этимъ уравненіямъ— степени ниже, чѣмъ $X_p=o$. Это невозможно, если X_p неприводимая функція. Поэтому должно быть

$$X_p=\varphi.\psi\ldots\chi,—$$

и выписанныя уравненія принимаютъ видъ:

$$\Sigma\frac{d\varphi}{dp_{ik}}\psi\ldots\chi=o$$

Для $\varphi=o$ это уравненіе обращается въ $\frac{d\varphi}{dp_{ik}}\cdot\psi\ldots\chi=o$ и слѣдовательно, или одинъ изъ множителей $\psi\ldots\chi$ равенъ φ, или же φ не зависитъ отъ P_{ik}; такимъ образомъ

$$X_p=M.{}^2\Phi(x_1..x_2)$$

Полагая

$$M=\Psi(\overset{\rho}{x},\ \overset{\sigma}{(xpp)})\ ,$$

получимъ, что самый общій типъ этого вида коннексовъ есть

$$f=\Phi_{m-2\rho}(x)\ \Psi^2(\overset{\rho}{x},\overset{\sigma}{u})+N.u_x$$

Въ такомъ коннексѣ $(m, 2\sigma)$ точкѣ соотвѣтствуетъ поверхность, имѣющая въ x коническую точку порядка σ, каждой плоскости u—поверхность, которая касается плоскости u въ ρ точкахъ на какой либо прямой плоскости; остальныя точки изъ соотвѣтствующихъ плоскости и лежащихъ на этой прямой суть ея точки пересѣченія съ поверхностью $\Phi_{m-2\rho}=o$. *Главная коинциденція такого коннекса слагается изъ поверхности* $\Phi_{m-2\rho}=o$, *каждая изъ точекъ которой принимается за центръ связки плоскостей, и изъ считаемой вдвойнѣ главной коинциденціи коннекса* (ρ,σ). Двойственный случай получимъ, разсматривая второй рядъ уравненій, что приведетъ насъ къ коннексу $(2\rho,\ n)$ общаго типа

$$f = U_{n-2\sigma}(u) \times \overset{\rho\ \sigma}{\Psi_1^2(x, u)} + N u_x\,,$$

котораго главная коинциденція слагается изъ считаемой вдвойнѣ главной коинциденціи коннекса (ρ,σ): $\Psi_1 = o$ и изъ плоскостей, касательныхъ къ поверхности $U_{n-2\rho} = o$ и считаемыхъ за точечныя поля.

Полученное условное уравненіе имѣетъ еще другое значеніе. Съ коннексомъ связаны двѣ системы поверхностей,— поверхности коннекса, соотвѣтствующія плоскостямъ или точкамъ пространства, и системы интегральныхъ его поверхностей, разсматриваемыя въ точечныхъ или плоскостныхъ координатахъ. Естественно поэтому задаться вопросомъ, *могутъ ли двѣ эти системы совпадать между собою вполнѣ или отчасти.* Общее условіе, чтобы поверхности коннекса $f(x,u) = o$ изображали *вполнѣ* его поверхности главной коинцеденціи, геометрически состоитъ въ томъ, чтобы поверхность, принадлежащая плоскости u, касалась ея во *всѣхъ* точкахъ пересѣченія съ нею, и двойственно, чтобы *всѣ* касательныя, которыя можно провести къ поверхности, принадлежащей точкѣ x, изъ этой точки, имѣли точкою прикосновенія туже точку x. Это возможно только при поверхностяхъ 2-го порядка и 2-го класса, такъ что нераспадающійся коннексъ можетъ имѣть это свойство только будучи 2-го порядка и 2-го класса. Но и въ гораздо болѣе общихъ случаяхъ можетъ встрѣтиться такое обстоятельство, что поверхности коннекса составляютъ *часть* интегральныхъ его поверхностей,—это будетъ тогда, когда *каждая* плоскость u касается принадлежащей ей поверхности въ *одной* или *нѣсколькихъ* изъ ихъ общихъ точекъ, или если *каждая* поверхность, соотвѣтствующая точкѣ пространства, проходитъ черезъ эту точку. Аналитическое условіе этого получимъ такъ. Пусть $f(x,u) = o$ уравненіе коннекса. Придавъ x_i значенія x_i, получимъ соотвѣтствующую точкѣ x поверхность, касательныя къ которой, проходящія черезъ точку x, опредѣлятся уравненіями

$$f(x,u) = o, \quad u_x = o\,,$$

координаты лежащей на $f(x,u) = o$ точки касанія ξ плоскости u опредѣляются уравненіями:

$$\varrho \xi_i = \frac{df(x,u)}{du_i}$$

Если одна изъ точекъ касанія должна совпадать съ x, и означимъ u соотвѣтственную касательную, то поверхность $f(x,u)=o$, соотвѣтствующая u, должна касаться u въ точкѣ x; но касательная къ $f(x,u)=o$ въ x имѣетъ координаты пропорціональныя $\frac{df(x,u)}{dx_i}$, и потому искомое условное уравненіе будетъ

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{df}{du_i} \cdot \frac{df}{dx_i} = o, \; f(x,u)=o, \; u_x=o\,, —$$

то уравненіе, съ которымъ мы имѣли дѣло выше [1]).

§ 15. **Преобразованія прикосновенія**. Какъ показали изслѣдованія С. Ли, для теоріи дифференціальныхъ уравненій вообще и дифференціальныхъ уравненій перваго порядка въ частности большое значенія имѣютъ такъ называемыя *преобразованія прикосновенія* (Berührungstransformationen). Это названіе С. Ли придаетъ тѣмъ преобразованіямъ типа

$$(26) \qquad \varrho . y_i = F_i(x,u), \sigma . v_i = \Phi_i(x,u),$$

(гдѣ мы предполагаемъ F_i однородными и 1-го порядка относительно x, 0-го относительно u, а Φ_i—однородными функціями 0-го порядка относительно x_i и 1-го относительно u_i), которыя выполняютъ тожественно уравненія

$$(27) \qquad \begin{aligned} \Sigma v_i dy_i &\equiv \Sigma \Phi_i dF_i = \Sigma u_i dx_i, \\ \Sigma y_i dv_i &\equiv \Sigma F_i d\Phi_i = \Sigma x_i du_i. \end{aligned}$$

Множитель пропорціональности мы предполагаемъ здѣсь внесеннымъ въ Φ. Прежде чѣмъ выводить условія, которымъ должны удовлетворять Φ_i и F_i, чтобы выполнялись эти то-

---

[1]) Для тернарнаго коннекса на такое значеніе уравненія

$$\Sigma \frac{df}{du_i} \cdot \frac{df}{dx_i} = o$$

указалъ Акс. Гарнакъ Math. Ann. IX p. 404.

жества, замѣтимъ, что примѣняя преобразованіе къ элементному многообразію,—которое характеризуется, именно, условіемъ, чтобы сосѣдніе элементы (x,u) и $(x+dx, u+du)$ выполняли уравненія Пфаффа

$$\Sigma x_i du_i = o, \Sigma u_i dx_i = o,$$

мы получимъ вмѣсто первоначальныхъ его уравненій:

$$\Phi(x,u) = o,\ \mathrm{X}(x,u) = o,\ \Psi(x,u) = o, u_x = o$$

новыя эквивалентныя имъ уравненія

$$\Phi_1(y,v) = o,\ \mathrm{X}_1(y,v) = o,\ \Psi_1(y,v) = o,\ v_y = o$$

обладающія тѣмъ свойствомъ, что соотвѣтственныя уравненія

$$\Sigma v_i dy_i = o,\ \Sigma y_i dv_i = o$$

ими снова выполняются; иными словами многообразіе, получаемое послѣ примѣненія къ элементному многообразію преобразованія прикосновенія, будетъ снова элементнымъ многообразіемъ; *∞^2 элементовъ (x,u), покрывающихъ поверхность, кривую двоякой кривизны или образующихъ связку, помощью преобразованія прикосновенія переходятъ въ ∞^2 элементовъ снова образующихъ поверхность, кривую двоякой кривизны или связку.* Обратно каждое преобразованіе (26), обладающее этимъ свойствомъ, будетъ преобразованіемъ прикосновенія. Дѣйствительно, это преобразованіе должно по условію переводить элементное многообразіе $F(x_1..x_4) = o, \sigma u_i = \frac{dF}{dx_i}$ снова въ элементное многообразіе, изображаемое —допустимъ— уравненіями:

$$v_y = o, U_1(y,v) = o, U_2(y,v) = o, U_3(y,v) = o,$$

которыя удовлетворяютъ уравненію $\Sigma v_i dy_i = o$.

Вставляя сюда вмѣсто v_i и y_i ихъ значенія по (26) въ прежнихъ перемѣнныхъ, получимъ

$$\Sigma v_i dy_i \equiv \Sigma \mathfrak{a}_i(x,u) dx_i + \Sigma \mathfrak{b}_i(x,u) du_i = o,\text{—}$$

уравненіе, которое должно быть выполнено независимо отъ вида функціи F.

Но какъ мы видѣли выше, единственнное Пфаффово уравненіе, обладающее этимъ свойствомъ, есть уравненіе $\Sigma u_i dx_i = o$ или эквивалентное ему $\Sigma x_i du_i = o$, а потому должно быть

$$\Sigma v_i dy_i \equiv \varkappa(x,u) \Sigma u_i dx_i = o,$$

т. е. (26) есть дѣйствительно преобразованіе прикосновенія. *Преобразованія прикосновенія трехмѣрнаго пространства можно поэтому опредѣлять, какъ тѣ его преобразованія, которыя каждое двухмѣрное элементное многообразіе переводятъ въ нѣкоторое другое двухмѣрное элементное многообразіе.* Такъ какъ съ другой стороны интегралами дифференціальнаго уравненія 1. порядка являются именно элементныя многообразія, то *преобразованія прикосновенія суть въ то же время тѣ преобразованія коннекса, которыя переводятъ его интегральныя многообразія въ интегральныя многообразія преобразованнаго коннекса.* Условія, которымъ должны удовлетворять функціи Φ_i и F_i, чтобы преобразованіе

$$(26) \qquad \varrho . y_i = F_i(x,u); \; \sigma . v_i = \Phi_i(x,u)$$

было преобразованіемъ прикосновенія получатся такъ [1]). Уравненія (27) распадаются на слѣдующія

$$\sum_{i=1}^{i=4} \Phi_i \frac{dF_i}{dx_k} = u_k \,, \quad \sum_{i=1}^{i=4} \Phi_i \frac{dF_i}{du_k} = o \quad (k = 1,2,3,4)$$

$$\Sigma F_i \frac{d\Phi_i}{dx_k} = o, \Sigma F_i \frac{d\Phi_i}{du_k} = u_k$$

откуда дифференцируя по u_k четыре первыя и по x_k четыре вторыя и составляя разности соотвѣтствующихъ одному k уравненій, получимъ:

---

[1]) S. Lie далъ доказательство выводимыхъ нами условій, сведя вопросъ на задачу Пфаффа (см. Math. Ann. VIII p. 215—314). A. Mayer въ виду этого далъ прямой аналитическій выводъ тѣхъ же условій (Gött. Nachr. 1874 n° 13, и затѣмъ Math. Ann. VIII, 305—312). Примѣненіе этого доказательства къ коннекснымъ координатамъ плоскости и даетъ Линдеманнъ l. c. 463 u. ff). Другое доказательство далъ Darboux (Bull. Sc. Math. (2) VI Sur le problème de Pfaff, которое и приводитъ Гурса въ VI главѣ своихъ Leçons.

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\Phi_i}{du_k}\cdot\frac{dF_i}{dx_k}-\frac{d\Phi_i}{du_k}\cdot\frac{dF_i}{dx_k}\right)=1.$$

Подобнымъ образомъ найдемъ еще три типа уравненій

$$(28)\qquad \begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\Phi_i}{du_k}\cdot\frac{dF_i}{dx_h}-\frac{d\Phi_i}{dx_h}\cdot\frac{dF_i}{du_k}\right)=o(h\lesseqgtr k)\\
&\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_h}\cdot\frac{dF_i}{dx_k}-\frac{d\Phi_i}{dx_k}\cdot\frac{dF_i}{dx_h}\right)=o(h,k=1,2,3,4)\\
&\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\Phi_i}{du_h}\cdot\frac{dF_i}{du_k}-\frac{d\Phi_i}{du_k}\cdot\frac{dF_i}{du_h}\right)=o
\end{aligned}$$

при чемъ замѣтимъ, что первыя и вторыя можно соединить въ одно:

$$\sum_{i=1}^{i=4}\left(\frac{d\Phi_i}{du_k}\cdot\frac{dF_i}{dx_h}-\frac{d\Phi_i}{dx_h}\cdot\frac{dF_i}{du_k}\right)=\frac{du_h}{du_k}$$

Уравненія эти показываютъ, что восемь уравненій

$$v_i=\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{dF_i}{dx_k}y_k+\frac{dF_i}{du_k}z_k\right)w_i=\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{d\Phi_i}{dx_k}y_k+\frac{d\Phi_i}{du_k}z_k\right)$$

ведутъ за собою слѣдующія восемь уравненій:

$$y_h=\sum_{i=1}^{i=4}\left(v_i\frac{d\Phi_i}{du_h}-w_i\frac{dF_i}{du_h}\right);-z_h=\sum_{i=1}^{i=4}\left(v_i\frac{d\Phi_i}{dx_h}-w_i\frac{dF_i}{dx_h}\right).$$

Вставляя эти значенія y_h и z_h въ предыдущія уравненія, должны получить тожества и приходимъ такимъ образомъ къ уравненіямъ:

$$(F_iF_k)=o,(F_i,\Phi_k)=o(i\gtrless k),(\Phi_i,\Phi_k)=o,(F_i,\Phi_i)=1,\quad(29)$$

гдѣ вообще

$$(F,\Phi)=\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{dF}{dx_k}\cdot\frac{d\Phi}{du_k}-\frac{dF}{dx_k}\cdot\frac{d\Phi}{du_k}\right).$$

И обратно можно показать, что при выполненіи этихъ условій (29), преобразованія (26) будетъ непремѣнно преобразованіемъ прикосновенія. Дѣйствительно, по предположенію Φ_i нулевого измѣренія относительно x и 1-го относительно u, а F_i наоборотъ,—1-го относительно x и 0-го относительно u. Поэтому выраженіе $\Sigma v_i y_i \equiv \Sigma F_i \Phi_i$ можетъ быть представлено такъ:

$$v_y \equiv \sum_{i,\kappa,h}^{1..4} \left(\frac{dF_i}{dx_k} \cdot \frac{d\Phi_i}{du_h} - \frac{dF_i}{du_h} \cdot \frac{d\Phi_i}{dx_k}\right) x_k u_h.$$

Но если выполняются уравненія (29), то выполняются и уравненія (28), а тогда полученное для v_y выраженіе принимаетъ видъ $\Sigma u_h x_h \equiv u_x$. Слѣдовательно при этихъ условіяхъ уравненіе $v_y = o$ есть необходимое слѣдствіе уравненія $u_x = o$. Далѣе $\Sigma v_i dy_i$ можетъ быть приведено къ виду:

$$\Sigma v_i dy_i \equiv \sum_{h,k} u_h dx_k \Sigma_i \left(\frac{d\Phi_i}{du_h} \cdot \frac{dF_i}{dx_k} - \frac{d\Phi_i}{dx_k} \cdot \frac{dF_i}{du_h}\right) +$$
$$+ \sum_{h,k} u_h du^k \Sigma_i \left(\frac{d\Phi_i}{du_h} \cdot \frac{dF_i}{du_k} - \frac{d\Phi_i}{du_k} \cdot \frac{dF_i}{du_h}\right)$$

и въ силу уравненій (28)

$$\Sigma v_i dy_i \equiv \Sigma u_h dx_h,$$

т. е. уравненіе $\Sigma u_h dx_h = o$ ведетъ за собою необходимо и уравненіе $\Sigma v_i dy_i = o$. Замѣтивъ, что при тѣхъ же условіяхъ $\Sigma y_i dv_i$ можетъ быть изображено:

$$\Sigma y_i dv_i \equiv \sum_{h,k} x_h dx_k \Sigma_i \left(\frac{d\Phi_i}{dx_k} \cdot \frac{dF_i}{dx_h} - \frac{d\Phi_i}{dx_h} \cdot \frac{dF_i}{dx_k}\right) +$$
$$\Sigma x_h du_k \Sigma \left(\frac{d\Phi_i}{du_k} \cdot \frac{dF_i}{dx_h} - \frac{d\Phi_i}{dx_h} \cdot \frac{dF_i}{du_k}\right)$$

имѣемъ: $\Sigma\, y_i\, dv_i \equiv \Sigma\, x_i\, du_i$, — т. е. слѣдствіемъ уравненія $\Sigma x_i du_i = o$ является $\Sigma y_i dv_i = o$. Это и показываетъ, что удовлетворяющее поставленнымъ условіямъ преобразованіе есть преобразованіе прикосновенія, ч. и т. д. Первый примѣръ представляютъ точечныя преобразованія

$$\varrho y_i = \chi_i(x_1 \ldots x_4) \quad (i = 1,2,3,4) \; (\alpha)$$

переводящія точку x пространства въ точку y, или точнѣе т. наз. *распространенныя* точечныя преобразованія. Поверхность $\varphi(x_1..x_4)=o$ (β) преобразованіемъ (α) переводится въ другую $\varphi_1(y_1..y_4)=o$, которой уравненіе получимъ, исключая $x_1..x_4$ изъ (α) и (β). Если двѣ поверхности $\varphi(x_1..x_4)=o$ и $\psi(x_1..x_4)=o$ имѣютъ въ x общую касательную, то координаты послѣдней для обѣихъ поверхностей пропорціональны однимъ и тѣмъ же величинамъ: $\tau\frac{d\varphi}{dx_i}=\frac{d\varphi}{dx_i}$. Подставляя значенія x въ функціи $y_1...y_4$ получимъ уравненія выражающія, что въ соотвѣтственной точкѣ y преобразованныя поверхности имѣютъ также общую касательную. Касательная къ φ въ точкѣ x проходитъ и черезъ $x+dx$, такъ что точка и касательная въ этой точкѣ выполняютъ уравненіе $\Sigma u_i dx_i=o$, какова бы ни была поверхность φ. На поверхности φ_1 имѣемъ точно также $\Sigma v_i dy_i=o$ или, если выразимъ y черезъ x:

$$\sum_{k=1}^{k=4} dx_k \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d\chi_i}{dx_k} v_i=0.$$

Такъ какъ $\Sigma u_i dx_i=o$ есть единственное уравненіе, связывающее $dx_1..dx_4$, то предыдущее должно сводиться къ нему же,—т. е. если выразимъ v_i—координаты касательной къ преобразованной поверхности въ точкѣ, соотвѣтствующей x, черезъ координаты этой послѣдней, то должно быть

$$\Sigma v_i dy_i \equiv \mu(x)\Sigma u_i dx_i,$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{k=4}\frac{d\chi_i}{dx_k}v_k=\mu.u_i \; (i=1,2,3,4)$$

или по исключенію μ:

$$\Sigma v_k\Big(\frac{d\chi_k}{dx_i}u_j-\frac{d\chi_k}{dx_j}u_i\Big)=o,$$

откуда получаемъ такія значенія для v_i:

$$\sigma.v_k=\sum_{i=1}^{i=4}u_i\left|\frac{d\chi_i}{dx_k}\right|=U_k,$$

гдѣ $\left|\frac{d\chi_i}{dx_k}\right|$ означаетъ сопряженный члену $\frac{d\chi_i}{dx_k}$ миноръ опредѣлителя

$$\Sigma \pm \frac{d\chi_1}{dx_1} \cdot \frac{d\chi_2}{dx_2} \cdot \frac{d\chi_3}{dx_3} \cdot \frac{d\chi_4}{dx_4}.$$

Полученное такимъ образомъ преобразованіе

$$\varrho y_i = \chi_i(x_1..x_4), \sigma.v_i = U_i(x,u)(i=1,2,3,5)$$

наз. *распространеннымъ* точнымъ преобразованіемъ $\varrho y_i = \chi_i$; по доказанному оно будетъ преобразованіемъ прикосновенія и обладаетъ двумя свойствами: 1^0, всѣ элементы (x,u), имѣющіе общую точку x, оно переводитъ въ элементы (y,v) также съ общею точкой y—элементы одной связки, снова въ элементы одной связки, и 2^0 оно не измѣняетъ уравненія Пфаффа

$$\Sigma u_i dx_i = o.$$

Второе условіе взято нами за опредѣленіе преобразованія прикосновенія и для нихъ характерно, но первое присуще не всѣмъ подобнымъ преобразованіямъ: двойственныя, напр., преобразованія суть очевидно преобразованія прикосновенія, но они переводятъ элементы (x,u), имѣющіе общую точку x, черезъ которую проходятъ всѣ плоскости u, въ элементы (y,v) имѣющіе общую плоскость v, въ которой лежатъ всѣ точки y,— это ясно изъ аналитическаго ихъ выраженія:

$$\varrho y_i = u_i, \sigma.v_i = -x_i$$

(при условіи $u_x = o$). Мы убѣждаемся такимъ образомъ, что точечныя преобразованія не единственныя преобразованія, при которыхъ прикосновеніе является инваріантнымъ свойствомъ. Могутъ представиться три случая: 1^0 Исключеніе плоскостныхъ координатъ приводитъ къ одному соотношенію между x и y, однородному относительно x и относительно y:

$$\Omega(x_1..x_4; y_1..y_4) = o.$$

Между dx_i и dy_i получается соотношеніе

$$\Sigma \frac{d\Omega}{dx_i} dx_i + \Sigma \frac{d\Omega}{dy_k} dy_k = o,$$

которое должно быть тожественно по предыдущему съ уравненіемъ $\Sigma v_k dy_k - \mu\Sigma u_i dx_i = o$,—т. е. въ этомъ случаѣ должно быть

$$\sigma.v_k = -\frac{d\Omega}{dy_k}, \tau.u_i = \frac{d\Omega}{dx_i} (i = 1,2,3,4).$$

Всякое преобразованіе этого типа приводится поэтому къ виду:

$$\Omega(x,y) = o, \sigma.v_k = -\frac{d\Omega}{dy_k}, \tau.u_i = \frac{d\Omega}{dx_i} (i.k = 1,2,3,4),$$

гдѣ Ω—функція однородная какъ относительно x, такъ и относительно y, а всѣ производныя ея въ отношеніи одного ряда перемѣнныхъ не должны быть одновременно нулями. Примѣръ—двойственныя преобразованія, когда $\Omega = \sum_{i=1}^{i=4} v_i y_i$.

2°. Исключеніе плоскостныхъ координатъ приводитъ къ двумъ соотношеніямъ между x и y.

$$\Omega_1(x,y) = o, \Omega_2(x,y) = o.$$

Какъ въ 1°. убѣдимся, что уравненія преобразованій прикосновенія могутъ быть приведены въ этомъ случаѣ къ виду

$$\Omega_1 = o, \Omega_2 = o, -\sigma.v_k = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dy_k} + \lambda_2 \frac{d\Omega_2}{dy_k},$$
$$\tau.u_i = \lambda_1 \frac{d\Omega_1}{dx_i} + \lambda_2 \frac{d\Omega_2}{dx_i} \ (i,k = 1,2,3,4),$$

откуда должны быть исключены λ_1, λ_2. Какъ примѣръ можно привести изученную С. Ли въ его выше цитированномъ мемуарѣ Ueb. Complexe etc M. An. V. взаимность между точками пространства и прямыми комплекса, опредѣляемую уравненіями

$$\Omega_1 = \Sigma a_{ik} x_i y_k = o, \Omega_2 = \Sigma \alpha_{ik} x_i y_k = o.$$

3°. Исключеніе u_i приводитъ къ тремъ независимымъ соотношеніямъ между x и y,—всякое такое преобразованіе есть распространенное точечное преобразованіе.

Тремя этими типами исчерпываются всѣ возможные типы преобразованій прикосновенія. Двойственное представленіе привело бы также къ тремъ типамъ, — смотря потому, получались ли бы по исключеніи x,y одно, два или три уравненія между одними u,v. Но это дало бы только иную группировку уже извѣстныхъ типовъ.

Если преобразованіе прикосновенія принадлежитъ къ первому изъ перечисленныхъ типовъ, то оно переводитъ ∞^2 элементовъ (x,u), образующихъ связку съ вершиною въ точкѣ a въ ∞^2 элементовъ. покрывающихъ поверхность $\Omega(a,y) = o$, и напротивъ ∞^2 элементовъ поверхности $\Omega(x,b) = o$ въ ∞^2 элементовъ образующихъ связку съ вершиною въ точкѣ b. Поэтому всѣ ∞^2 поверхностей: $\Omega(x_1..x_4; b_1,b_2,b_3,o) = o$ переводятся этимъ преобразованіемъ въ точки плоскости $y_4' = o$. Если представимъ себѣ, что эти ∞^2 поверхностей суть ∞^2 интегральныхъ поверхностей дифференціальнаго уравненія 1. порядка, то предыдущее показываетъ, что всегда существуетъ преобразованіе прикосновенія, которое переводитъ любое данное дифф. уравненіе 1. порядка въ уравненіе $x_4 = o$. Такимъ образомъ *задача интегрированія такого уравненія сводится на опредѣленіе преобразованія прикосновенія, переводящаго его въ уравненіе* $x_4 = o$, интегрированіе котораго дается само собою. Въ то же время *всякое дифф. уравненіе 1 порядка помощью преобразованій прикосновенія можетъ быть преобразовано во всякое другое уравненіе того же порядка и съ тѣмъ же числомъ перемѣнныхъ; дифф. уравненія 1 порядка не имѣютъ слѣдовательно инваріантовъ относительно преобразованій прикосновенія.* Въ этомъ не заключается противорѣчій съ § 14. Преобразованія, о которыхъ говорилось въ § 14, суть преобразованія раціональныя и однозначныя; коннексы, ихъ опредѣляющіе, — цѣлые алгебраическіе. Здѣсь же функціи Φ_i и F_i—порядковъ 1-го и 0-го относительно u и 0-го и 1-го относительно x соотвѣтственно,—подчинены только условію сохранять уравненіе Пфаффа, т. е. выполнять полученныя выше условныя уравненія.

ГЛАВА III.

Коннексы $(m,1)$ и $(1,n)$.

§ 16. **Критическія точки (плоскости).** Коннексы $(m,1)$, $(1,n)$, линейные относительно координатъ плоскостныхъ или точечныхъ, представляютъ нѣкоторыя отличія, зависящія отъ того, что первыя производныя лѣвыхъ частей ихъ уравненій по u (resp. по x) отъ u (resp. отъ x) не зависятъ. Мы остановимся поэтому на нихъ подробнѣе; вмѣстѣ съ тѣмъ это будетъ иллюстраціей общихъ положеній и опредѣленій главъ I. и II.

Произвольной точкѣ x соотвѣтствуетъ въ коннексѣ $(m,1)$:

$$f(x,u) \equiv \Sigma L_i u_i \equiv a_x{}^m u_\alpha = o \qquad (1)$$

другая совершенно опредѣленная вообще точка y, центръ связки плоскостей u, образующихъ элементъ кеннекса (1) въ соединеніи съ точкою x:

$$\varrho y_i = a_x{}^m \alpha_i = L_i \qquad (i = 1,2,3,4)$$

Точка эта вообще отлична отъ x и совпадаетъ съ нею въ тѣхъ только случаяхъ, когда L_i пропорціональны x:

$$L_i = \lambda . x_i \qquad (i = 1,2,3,4) \qquad (3)$$

или по исключеніи λ:

$$x_1 L_2 - x_2 L_1 = o, \;\; x_2 L_3 - x_3 L_2 = o, \;\; x_3 L_4 - x_4 L_3 = o. \qquad (3')$$

Послѣднія уравненія показываютъ, что такія точки суть *особенныя точки* главной коинциденціи коннекса $(m,1)$ (ср. (2) § 8). Вмѣстѣ съ тѣмъ эти точки суть основныя точки той же коинциденціи (ср. (5) § 8), такъ что съ каждою такою точкою соединяются въ элементъ главной коинциденціи не ∞^1, а всѣ ∞^2 плоскостей, проходящихъ черезъ точку. Чтобы оттѣнить этотъ двойной характеръ точекъ (3) мы будемъ называть ихъ не *особенными* [какъ Darboux въ соотв. случаѣ тернарнаго коннекса $(m,1)$] и не *основными* по Клебшу, но *критическими*,—какъ это уже принято въ работахъ Poincaré, Painlevé и Autonne по вопросу объ алгебраическихъ интегралахъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 1. порядка по отношенію къ аналогическимъ точкамъ тернарнаго коннекса. Число критическихъ точекъ коннекса $(m,1)$ равно, какъ слѣдуетъ изъ (8) § 8 при $n=1$, $m'=1$, $m=m$

$$N_m = m^3 + m^2 + m + 1 \qquad (4)$$

Въ частности коннексъ (1,1) имѣетъ четыре критическихъ точки, (2,1) имѣетъ 15, какъ это даетъ P. Краузе (M. An. XIV) (3,1)—40 критическихъ точекъ.

Двойственно коннексъ $(1,n)$ имѣетъ n^3+n^2+n+1 *критическихъ плоскостей*, которыя даютъ элементы коннекса съ каждою изъ своихъ точекъ.

Какъ показалъ для $m=2$ P. Краузе (l. c.), эти N_m критическихъ точекъ между собою не независимы, такъ что произвольныя N_m точекъ нельзя принять за критическія точки коннекса $(m,1)$: чтобы быть критическими, точки должны выполнять $3N_m$ условій, а произвольныхъ коэффиціентовъ въ (1), которыми можно располагать для ихъ выполненія всего

$$\frac{2}{3}(m+1)(m+2)(m+3)—1,—$$

при $m>1$ второе число менѣе перваго.

Касательный коннексъ

$$a_x{}^{m-1} a_X U_\alpha = \sum_{i,k}^{1..4} \frac{dL_i}{dx_k} X_k U_i = 0$$

одинаковъ для всѣхъ элементовъ (x,u) коннекса $(m,1)$, въ которыхъ точка x одна и таже. Его основной тетраедръ опредѣляется характеристическимъ уравненіемъ:

$$\begin{vmatrix} \frac{dL_1}{dx_1}-S & \frac{dL_1}{dx_2} & \frac{dL_1}{dx_3} & \frac{dL_1}{dx_4} \\ \frac{dL_2}{dx_1} & \frac{dL_2}{dx_2}-S & \frac{dL_2}{dx_3} & \frac{dL_2}{dx_4} \\ \frac{dL_3}{dx_1} & \frac{dL_3}{dx_2} & \frac{dL_3}{dx_3}-S & \frac{dL_3}{dx_4} \\ \frac{dL_4}{dx_1} & \frac{dL_4}{dx_2} & \frac{dL_4}{dx_3} & \frac{dL_4}{dx_4}-S \end{vmatrix} = o. \qquad (5)$$

Такъ какъ уравненія (3) можно писать

$$\lambda . x_i = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{dL_i}{dx_k} x_k \quad (i=1,2,3,4),$$

то слѣдовательно въ коллинеаціи, устанавливаемой касательнымъ коннексомъ, принадлежащимъ критической точкѣ, одна изъ вершинъ основного тетраедра совпадаетъ съ этою точкою; одинъ изъ корней уравненія (5) есть поэтому λ. Умножая первые три столбца (5) соотвѣтственно на $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ и придавая къ четвертому, получимъ по свойству однородныхъ функцій элементы его:

$$\frac{1}{x_4}\, mL_1-\frac{x_1}{x_4}S, \quad \frac{1}{x_4}\, mL_2-\frac{x_2}{x_4}S, \quad \frac{1}{x_4}\, mL_3-\frac{x_3}{x_4}S, \quad \frac{1}{x_4}\, mL_4-\frac{x_4}{x_4}S,$$

которымъ съ помощью (3′) можно придать видъ

$$\frac{x_1}{x_4}(m\lambda-S) \quad (i=1,2,3,4);$$

вынесемъ общій множитель $\frac{1}{x_4}(m\lambda-S)$ за знакъ опредѣлителя, который приметъ видъ:

$$o = \frac{1}{x_4}(m\lambda - S) \begin{vmatrix} \frac{dL_1}{dx_1} - S & \frac{dL_1}{dx_2} & \frac{dL_1}{dx_3} & x_1 \\ \frac{dL_2}{dx_1} & \frac{dL_2}{dx_2} - S & \frac{dL_2}{dx_3} & x_2 \\ \frac{dL_3}{dx_1} & \frac{dL_3}{dx_2} & \frac{dL_3}{dx_3} - S & x_3 \\ \frac{dL_4}{dx_1} & \frac{dL_4}{dx_2} & \frac{dL_4}{dx_3} & x_4 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{x_4}(m\lambda - S) \times$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_1}{dx_1} - x_1\frac{dL_4}{dx_1}\right) - S, & \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_1}{dx_2} - x_1\frac{dL_4}{dx_2}\right), & \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_1}{dx_3} - x_4\frac{dL_4}{dx_3}\right) \\ \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_2}{dx_1} - x_2\frac{dL_4}{dx_1}\right), & \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_2}{dx_2} - x_2\frac{dL_4}{dx_2}\right) - S, & \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_2}{px_3} - x_2\frac{dL_4}{dx_3}\right) \\ \frac{1}{x_4}\left(x_4\frac{dL_3}{dx_1} - x_3\frac{dL_4}{dx_1}\right), & \frac{1}{x_4}\left[x_4\frac{dL_3}{dx_2} - x_3\frac{dL_4}{dx_2}\right], & \frac{1}{x_4}\left[x_1\frac{dL_3}{dx_3} - x_3\frac{dL_4}{dx_3}\right] - S \end{vmatrix}$$

Въ случаѣ критической точки характеристическое уравненіе касательнаго коннекса одинъ корень $S_4 = m\lambda$ имѣетъ необходимо вещественный, и слѣдовательно или всѣ вещественные корни или два вещественныхъ и два комплексно-сопряженныхъ. Сообразно этому различаемъ вслѣдъ за Poincaré [1]) четыре рода критическихъ точекъ:

1°. Всѣ корни (5) вещественны, и разности $S_2 - S_4$, $S_3 - S_4$, $S_1 - S_4$ всѣ одного знака,—такія точки Poincaré называетъ *узлами* (*noeuds*).

2°. Всѣ корни (5) вещественны, но разности $S_1 - S_4$, $S_2 - S_4$, $S_3 - S_4$ не одного знака: такую точку назовемъ *коническою* (Poincaré называетъ такую точку *col*).

3° Два корня, напр. S_2 и S_3 комплексны, и вещественная часть разностей $S_2 - S_4$, $S_3 - S_4$ одного знака съ $S_1 - S_4$ такія точки—*фокусы* (*foyers*) по Poincaré.

---

[1]) Comptes Rendus de l'Acad. de Paris t. 94 p. 416: Sur les points singuliers des équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

4°. Два корня S_2 и S_3 комплексны, и вещественная часть S_2-S_4, S_3-S_4 не одного знака съ S_1-S_4,—это *коническіе фокусы* (*cols-foyers* у Poincaré).

На геометрическомъ различіи остановимся ниже, здѣсь же замѣтимъ только, что въ первыхъ двухъ случаяхъ основной тетраедръ имѣетъ всѣ составныя части вещественныя, въ двухъ же другихъ вещественны двѣ вершины и ребро ихъ соединяющее, и двѣ грани и ребро ихъ пересѣченія.

Критическія точки являются обыкновенными особенностями коннекса $(m,1)$. При извѣстныхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами его могутъ явиться другія уже исключительныя особенности — точки *поликритическія* и *гиперкритическія* по терминологіи Autonne'а. Если въ уравненіи

$$f(x,(xdxd'x)) = a_x{}^m(\alpha xdxd'x)^n = o \qquad \text{(гл. II, § 10)}$$

примемъ за $x+d'x$ точку $x+dx+\frac{1}{1.2}d^2x$, т. е. $d'x_i = dx_i + \frac{1}{1.2}d^2x_i$, то плоскость u проходящая черезъ три безконечно близкія точки $x, x+dx$ и $x+dx+\frac{1}{1.2}d^2x$ будетъ имѣть координаты, пропорціональныя минорамъ матрицы:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{Vmatrix}$$

Условіе, чтобы плоскость эта въ соединеніи съ точкою x давала элементъ коннекса (m,n), напишется

$$a_x{}^m(\alpha xdxd^2x)^n = o,$$

и въ частности при $n=1$:

$$o = a_x{}^m(\alpha xdxd^2x) \equiv$$

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix} =$$

$$L \equiv \Sigma(L_ix_k - L_kx_i)(dxd^2x)_{ik}$$

если, какъ и выше, означимъ

$$\frac{df}{du_i} = a_x{}^m a_i \text{ черезъ } L_i.$$

Полученное уравненіе въ критическихъ точкахъ удовлетворяется независимо отъ значеній придаваемыхъ dx и d^2x. Если же уничтожается независимо отъ значеній, придаваемыхъ dx, d^2x, d^3x, и дифференціалъ правой части выписаннаго уравненія, т. е. если имѣемъ независимо отъ значеній dx, d^2x, d^3x

$$dL = \begin{vmatrix} L_i \\ x_i \\ dx_i \\ d^3x_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} dL_i \\ x_i \\ dx_i \\ d^2x_i \end{vmatrix} = o$$

или въ силу $L_i x_k - L_k x_i = o$:

$$o = \begin{vmatrix} dL_i \\ x_i \\ dx_i \\ d^2x_i \end{vmatrix} \quad \therefore x_i \frac{dL_j}{dx_k} - x_j \frac{dL_i}{dx_k} = o \quad (i,k,j = 1,2,3,4),$$

то такая точка будетъ *дикритическою*. Вообще если независимо отъ значеній dx, d^2x, $d^{n+1}x$ координаты точки x выполняютъ уравненія

$$L = o, \ dL = o, \ \ldots \ d^{n-1}L = o,$$

то такая точка есть *n—критическая*.

Если какія нибудь четыре критическихъ точки примемъ за вершины координатнаго тетраедра, то уравненіе коннекса упрощается; въ частности при $m = 2$ мы можемъ 1365 способами привести коннексъ (2,1) къ виду

$$M.u_x + x_1x_2u_a + x_1x_3u_b + x_1x_4u_c + x_2x_2u_d + x_2x_4u_e + x_3x_4u_g + o$$

гдѣ

$$u_a = \mathfrak{a}_1u_1 + \mathfrak{a}_2u_2 + \mathfrak{a}_3u_3 + \mathfrak{a}_4u_4 \text{ и т. д.}$$

Въ общемъ случаѣ уравненіе коннекса $(m,1)$ приводится къ такому же виду, только $\mathfrak{a}, \ldots \mathfrak{g}$ уже не постоянные коэффиціенты, но кватернарныя формы степени $(m-2)$-ой каждая

§ 17. Дальнѣйшее изученіе критическихъ точекъ удобнѣе производить въ связи съ главною коинциденціей коннекса $(m,1)$, поэтому мы остановимся сначала на нѣкоторыхъ коваріантныхъ образованіяхъ послѣдняго. Прежде всего разсмотримъ геометрическое мѣсто точекъ y, соотвѣтствующихъ въ немъ точкамъ x прямой p Такъ какъ каждой некритической точкѣ соотвѣтствуетъ одна опредѣленная точка, то это геометрическое мѣсто есть кривая. Уравненіе ея въ тангенціальныхъ координатахъ получимъ по обычнымъ правиламъ, какъ огибающую поверхностей $f = a_x{}^m u_\alpha = o$ при условіи $(xpp)_1 = o$, $(xpp)_2 = o$, что доставитъ

$$\frac{df}{dx_i} + \lambda\, p_{1i} + \mu\, p_{2i} = o \ (i = 1,2,3,4),$$

откуда

$$a_x{}^{m-1} u_\alpha \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ o & p_{21} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & o & p_{23} & p_{24} \end{Vmatrix} = o \qquad (6).$$

Въ менѣе симметричной, но болѣе простой формѣ эти уравненія получимъ, исключая x_3 и x_4 изъ $a_x{}^m u_\alpha = o$ по уравненіямъ $(xpp)_3 = o$, $(xpp)_4 = o$, эквивалентнымъ $(xpp)_1 = o$, $(xpp)_2 = o$:

$$p_{21} x_3 = x_1 p_{23} + x_2 p_{31} \ \text{ и } \ p_{21} x_4 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41};$$

при такой подстановкѣ

$$p_{21} a_x = x_1 (a_1 p_{21} + a_3 p_{23} + a_4 p_{24}) + x_2 (a_2 p_{21} + a_3 p_{31} + a_4 p_{41}) \equiv$$
$$\equiv x_1 p_2 a_p + x_2 a_p p_1 \quad \text{или} \quad p_{12} = (x_1 p_2 - x_2 p_1) a_p$$

и слѣдовательно

$$p_{21}{}^m a_x{}^m u_\alpha = (x_1 p_2 - x_2 p_1)^m a_p{}^m u_\alpha = o.$$

Дифференцируя по x_1 и x_2, получимъ искомое геометрическое мѣсто, исключая x_1, x_2 изъ уравненій

$$p_2 a_p \left[(x_1 p_2 - x_2 p_1) a_p\right]^{m-1} u_\alpha = o$$
$$p_1 a_p \left[(x_1 p_2 - x_2 p_1) a_p\right]^{m-1} u_\alpha = o$$

Результатъ исключенія степени $(m-1)$-ой относительно коэффиціентовъ каждаго изъ уравненій будетъ степени $2m(m-1)$ относительно p_{ik} и степени $2(m-1)$ относительно u [1]). Въ частности при $m=2$ получимъ, производя исключеніе,

$$(ab\pi\pi)^2 u_\alpha u_\beta = o, \tag{7}$$

уравненіе, изображающее коническое сѣченіе, которое Р. Краузе (l. c. p. 301) называетъ *коническимъ сѣченіемъ, принадлежащимъ прямой* π. Дискриминантъ уравненія (7) обращается въ нуль:

$$o = (ab\pi\pi)^2(a'b'\pi\pi)^2(a''b''\pi\pi)^2(a'''b'''\pi\pi)^2 \times$$

$$\begin{vmatrix} 2\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 & \alpha_1\beta_4+\alpha_4\beta_1 \\ \alpha_1'\beta_2'+\alpha_2'\beta_1' & 2\alpha_1'\beta_2' & \alpha_2'\beta_3'+\alpha_3'\beta_2' & \alpha_2'\beta_4'+\alpha_4'\beta_2' \\ \alpha_1''\beta_3''+\alpha_3''\beta_3'', & \alpha_2''\beta_3''+\alpha_3''\beta_2'' & 2\alpha_3''\beta_3'' & \alpha_3''\beta_4''+\alpha_4''\beta_3'' \\ \alpha_1'''\beta_4'''+\alpha_4'''\beta_1''', & \alpha_2'''\beta_4'''+\alpha_4'''\beta_2''' & \alpha_3'''\beta_4'''+\alpha_4'''\beta_3''' & 2\alpha_4'''\beta_4''' \end{vmatrix}$$

Полученное геометрическое мѣсто имѣетъ еще другое значеніе по отношенію къ коннексу $(m,1)$. Условіе того, чтобы поверхность, принадлежащая въ коннексѣ $(m,1)$ плоскости u, касалась данной прямой p, мы получимъ, выразивъ, что прямая p лежитъ въ плоскости, касательной въ точкѣ x къ этой поверхности, и проходитъ черезъ точку x; имѣемъ такимъ образомъ уравненія:

$$a_x^{m-1}u_\alpha(a\pi\pi)_1 = o;\ a_x^{m-1}u_\alpha(a\pi\pi)_2 = o,\ (xpp)_1 = o,\ (xpp_2) = o \tag{8}$$

Съ помощью соотношенія между координатами π_{ik} и p_{ik}:

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{34} : p_{42} : p_{23} = \pi_{34} : \pi_{42} : \pi_{23} : \pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14}$$

---

[1]) Совершенно подобнымъ образомъ соотвѣтственное геометрическое мѣсто для коннекса (m,n)—огибающая поверхностей коннекса, принадлежащихъ точкамъ прямой, получится исключеніемъ x_1, x_2 изъ уравненій

$$p_2 a_p\,[(x_1p_2-x_2p_1)a_p]^{m-1}u_\alpha{}^n = o, \quad -p_1 a_p\,[(x_1p_2-x_2p_1)a_p)^{m-1}u_\alpha{}^n = o$$

и представляетъ Бонсдорфовъ коннексъ $[2m(m-1),\ 2n(m-1)]$.

найдемъ, что

$$(a\pi\pi)_1 = p_1 a_p, \quad (a\pi\pi)_2 = -p_2 a_p$$

и такъ какъ изо второй пары уравненій (8) получимъ

$$-p_{12}x_1, = x_1 p_{23} + x_2 p_{31}, \quad p_{21}x_4 = x_1 p_{24} + x_2 p_{41}$$

то выписанныя уравненія принимаютъ видъ:

$$[a_p(x_1p_2 - x_2p_1)]^{m-1} u_\alpha . a_p p_1 = o, \quad [x_p(x_1p_2 - x_2p_1)]^{m-1} u_\alpha . a_p p_2 = o.$$

Такимъ образомъ, *плоскости u, принадлежащія которымъ поверхности коннекса $(m,1)$ касаются прямой p, огибаютъ кривую двоякой кривизны класса $2(m-1)$. Поверхности коннекса, соотвѣтствующія плоскостямъ, проходящимъ черезъ одну и туже касательную π къ этой кривой, касаются π въ одной и той же точкѣ x, и точка прикосновенія π съ принадлежащею ей кривою есть точка y, соотвѣтствующая x въ коннексѣ $(m,1)$*. Это послѣднее свойство принадлежитъ, очевидно, аналогичной поверхности класса $2n(m-1)$ въ общемъ случаѣ коннекса (m,n), но это будетъ уже собственная поверхность, а не кривая двоякой кривизны.

Двойственно, *точки x, которыхъ поверхности коннекса $(1,n)$ касаются прямой p, образуютъ развертывающуюся поверхность порядка $2(n-1)$. Поверхности коннекса, принадлежащія въ коннексѣ точкамъ x образующей p этой развертывающейся, касаются одной и той же проходящей черезъ p плоскости, и плоскость, касающаяся развертывающейся вдоль прямой p, есть принадлежащая точкѣ x въ $(1,n)$ плоскость* $\boldsymbol{v}$.

§ 18. Геометрическое мѣсто точекъ y, соотвѣтствующихъ точкахъ x какой нибудь плоскости v т. е. поверхность, въ которую обращается эта плоскость преобразованіемъ, устанавливаемымъ помощью коннекса $(m,1)$ между точками x и y, можетъ быть опредѣлена или такъ, какъ это дѣлаетъ Р. Краузе (l. c. p. 303) при $m=2$, замѣняя x_i черезъ

$$\rho x_i = \lambda\xi_i + \mu\eta_i + \nu\zeta_i \quad (i=1,2,3,4)$$

гдѣ ξ,η,ζ—три точки плоскости v, не лежащія на одной прямой, и отыскивая затѣмъ дискриминантъ тернарной формы

$$(\lambda . a_\xi + \mu . a_\eta + \nu a_\zeta)^m u_\alpha = o$$

Видоизмѣняя нѣсколько этотъ пріемъ, можно сохранить координаты v данной плоскости. Дѣйствительно изъ $v_x = o$ имѣемъ $v_4 x_4 = -(v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3)$ (допускаемъ, что v_4 неравно o).

Подставляя въ уравненіе коннекса $(m,1)$, будемъ имѣть:

$$v_4 a_x = x_1 (a_1 v_4 - a_4 v_1) + x_2 (a_2 v_4 - a_4 v_2) + x_4 (a_3 v_4 - a_4 v_3) = x_1 (a_1 v_4) + x_2 (a_2 v_4) + x_3 (a_3 v_4),$$

и слѣдовательно

$$a_x{}^m u_\alpha \equiv (x_1 (a_1 v_4) + x_2 (a_2 v_4) + x_3 (a_3 v_4))^m u_\alpha = o$$

Независимые между собою параметры $x_1 x_2 x_3$ исключаются изъ уравненій

$$(9)\quad (a_i v_4)\,(x_1 (a_1 v_4) + x_2 (a_2 v_4) + x_3 (a_3 v_4)\,)^{m-1} u_\alpha = o \quad (i = 1,2,3)$$ [1].

Такъ какъ результатъ исключенія степени $(m-1)^2$ относительно коэффиціентовъ каждаго изъ этихъ уравненій, и коэффиціенты линейны относительно u, то степень дискриминанта относительно u будетъ $3(m-1)^2$. Такимъ образомъ *точкамъ плоскости v соотвѣтствуютъ въ коннексѣ $(m,1)$ точки поверхности Φ_v класса $3(m-1)^2$*.

Двойственно, *плоскостямъ связки y соотвѣтствуютъ въ коннексѣ $(1,n)$ плоскости, касательныя къ поверхности F_y порядка $3(n-1)^2$*.

Поверхность Φ_v имѣетъ еще другое значеніе. Чтобы получить огибающую плоскостей u, принадлежащія которымъ поверхности коннекса $(m,1)$ касаются данной плоскости v, замѣтимъ, что плоскость, касательная къ поверхности, пересѣкаетъ ее по кривой, имѣющей двойную точку. Условіемъ этого является уничтоженіе опредѣлителей, составленныхъ изъ производныхъ по x уравненій, опредѣляющихъ кривую, т. е.

---

[1]) Тотъ же результатъ получимъ исключая $\lambda, x_1, x_2 x_3, x_4$ изъ

$$o = a_x{}^{m-1} a_k u_\alpha + \lambda v_k \quad (k = 1,2,3,4)$$

и $v_x = o$, если станемъ находить огибающую по общимъ правиламъ. Исключая сначала λ и потомъ x_4 по $v_x = o$, вернемся къ уравненіямъ, приведеннымъ въ текстѣ.

въ данномъ случаѣ $v_x = o$, $a_x{}^m u_\alpha = o$, что и приводитъ къ уравненіямъ

$$\frac{a_x{}^{m-1} a_1 u_\alpha}{v_1} = \frac{a_x{}^{m-1} a_2 u_\alpha}{v_2} = \frac{a_x{}^{m-1} a_3 u_\alpha}{v_3} = \frac{a_x{}^{m-1} a_4 u_\alpha}{v_4}$$

и по исключеніи x_4 помощью $v_x = o$ приходимъ къ (9). Такимъ образомъ *каждая плоскость* v, *которой координаты выполняютъ уравненіе* $\Phi_v = o$, *касается поверхности, принадлежащей въ коннексъ* $(m,1)$ *плоскости* u. Разсматривая v_i постоянными, u_i—перемѣнными, имѣемъ: *плоскости* u, *коихъ поверхности коннекса касаются плоскости* v, *огибаютъ поверхность* Φ_v—*геометрическое мѣсто точекъ* y, *соотвѣтствующихъ въ коннексъ точкамъ плоскости* v.

Для упрощенія формулъ можно принять, что плоскость v есть $x_4 = o$. Предыдущія формулы принимаютъ тогда видъ

$$x_4 = o,\ (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^m u_\alpha = o;$$
$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^{m-1} a_i u_\alpha = o \quad (i = 1,2,3)$$

и координаты y_i точки этой поверхности выразятся

$$\varrho y_k = L^0{}_k = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^m \alpha_k \quad (k = 1,2,3,4)$$

ибо какія-либо два изъ трехъ уравненій $\left(\frac{df}{dx_i}\right)_{x_4=0} = o$ даютъ $x_1 x_2 x_3$ въ функціи u; подставляя эти значенія въ $f = o$, найдемъ $\frac{df}{du_i} = \frac{\partial f}{\partial u_i} + \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k}{du_i}$ (въ общемъ случаѣ поверхности $v_x = o$ какой-либо достаточно положить $(a_i v_4) = \alpha_i$, чтобы получить уравненія въ томъ же видѣ). Поверхность Φ_v является такимъ образомъ *уникурсальною поверхностью*, — ея координаты выражаются раціонально въ функціи двухъ параметровъ, она однозначно изображается на плоскости и есть поверхность рода *0*. Такимъ образомъ теорія коннексовъ связывается съ теоріей однозначнаго изображенія поверхности на плоскость и въ частности съ теоріей уникурсальныхъ поверхностей [1]). Порядокъ поверхности Φ_v опредѣлится, какъ число точекъ, общихъ поверхности съ прямою $wy=o$, $w'y=o$ т. е. какъ число рѣшеній системы $\Sigma w_i L_i^0=o$, $\Sigma w'_i L_i^0=o$, степени m относительно $x_1 x_2 x_3$ каждое,—ибо по уравненіямъ $\varrho y_i = L_i^0$ каждой системѣ значеній x_1, x_2, x_3 соотвѣтствуетъ одна система значеній $y_1 \ldots y_4$, —т. е. одна точка пересѣченія поверхности съ прямою. Такимъ образомъ $\Phi_v=o$ класса $3(m-1)^2$ и порядка m^2.

Сравнивая уравненія $\varrho y_i = L_i^0$ съ уравненіями, опредѣляющими критическія точки коннекса $(m,1)$ $\Sigma L_i u_i = o$, замѣтимъ, что поверхность Φ_v проходитъ черезъ тѣ изъ нихъ, которыя лежатъ въ плоскости $x_4=o$ (результатъ этотъ встрѣчается у Клебша, l. c. p. 15).

Замѣтимъ еще слѣдующую теорему, которую приводитъ Клебшъ: поверхность $\Phi_v=o$ имѣетъ кривую перегиба (Wendecurve), изображеніе которой на плоскости v есть кривая порядка $8m-12$ и которая слѣдовательно сама порядка $m(8m-12)$; кривая параболическихъ точекъ вырѣзается изъ поверхности

---

[1]) Наиболѣе изученнымъ представляется простѣйшій (послѣ $m=1$) случай $m=2$, приводящій къ Штейнеровой поверхности,—уникурсальной поверхности 4-го порядка, замѣченной впервые Штейнеромъ, который не публику сообщилъ свои результаты Вейерштрассу, который съ своей стороны нашелъ, что координаты этой поверхности выражаются раціональными функціями 2-ой степени отъ двухъ параметровъ. Особенное вниманіе на эту поверхность, содержащую безчисленное множество коническихъ сѣченій и образуемую вращеніемъ коническаго сѣченія около прямой, лежащей въ его плоскости, было обращено послѣ работы Куммера (Berlin. Monatsber. 1863, также Crelle's Journ. B. 64 s. 66—76), за которою послѣдовали замѣтка Вейерштрасса (ib. p. 77—78) о результатахъ Штейнера, работы Кремона (Crelle's J. B. 63 p. 315—328), Шрӧтера (B. Mon. 1863, Crelle's Journ. 64, p. 79—94) — синтетическаго характера, Cayley (ib. p. 172—174), Clebsch'a Ueb. die Steiner'sche Fläche (Crelle's Journ. B. 67 s. 1—22. 1807). Частный случай Штейнеровой поверхности представляетъ циклида Дюпена (коническія сѣченія на поверхности суть круги), изученная французскими математиками, особенно Мутаромъ и Дарбу. Сальмонъ (Géom. à 3 dim. III p. 51) указываетъ еще на работу Gerbaldi. Torino 1881. Что касается уникурсальныхъ поверхностей вообще, то какъ замѣчаетъ Humbert въ своей статьѣ Sur la théorie générale des surfaces unicursales, M. Ann. B. 45, s. 423—445, теорія ихъ столь же бѣдна общими результатами, насколько она богата частными предложеніями и интересными примѣрами.

ея Гессіеною, которая въ данномъ случаѣ поверхности порядка m^2 будетъ порядка $4(m^2—2)$; пониженіе порядка кривой параболическихъ точекъ есть $4m(m—1)$ $(m^2+m—3)$.

Разсмотрѣнная задача есть частный случай болѣе общей задачи: *найти геометрическое мѣсто точекъ* y, *соотвѣтствующихъ въ коннексѣ точкамъ* x *поверхности* $\vartheta(x_1\,..\,x_4)=o$ *порядка* μ *и класса* ν. Такая поверхность Φ_ϑ будетъ слѣдовательно огибающею плоскостей u, принадлежащія которымъ въ коннексѣ $(m,1)$ поверхности X_u касаются поверхности ϑ. Уравненіе Φ_ϑ получится поэтому, какъ результатъ исключенія $x_1\,..\,x_4$ изъ уравненій

$$\vartheta=o,\ a_x^{m-1}u_\alpha\left(a_i\frac{d\vartheta}{dx_k}-a_k\frac{d\vartheta}{dx_i}\right)=o\ \ (i,k=1,2,3,4).$$

при чемъ вмѣсто $\vartheta=o$ можемъ также взять $a_x^m u_\alpha=o$. $\Phi_\vartheta=o$ будетъ поэтому класса $3\mu(\mu+m—2)^2$ (при $\mu\leq 2m—1$) или $(\mu+m—2)^2$ $(4m+\mu—2)$ если $\vartheta>2m—1$. Порядокъ же Φ_ϑ опредѣлится, какъ число рѣшеній системы

$$\vartheta=o,\ w_\alpha a_x^m=o,\ w'_\alpha a_x^m=o$$

т. е. равенъ μm^2. Такимъ образомъ: *огибающая плоскостей* u, *принадлежащія которымъ въ коннексѣ* $(m,1)$ *поверхности* X_u *касаются данной поверхности* $\vartheta(x_1\,..\,x_4)$ *порядка* μ, *есть поверхность* $\Phi_\vartheta=o$ *порядка* μm^2 *и класса* $\mu^1(m+\mu—2)^2$, *гдѣ* $\mu^1=3\mu$ *при* $\mu\leq 2m—1$ *и* $=4m+\mu—2$ *при* $\mu>2m—1$, *которая является въ то же время геометрическимъ мѣстомъ точекъ* y, *соотвѣтствующихъ въ коннексѣ точкамъ* x *поверхности* $\vartheta(x_1\,..\,x_4)=o$.

§ 19. Такъ какъ первые производныя коннекса $(m,1)$ по u_i отъ u независятъ, то въ общемъ случаѣ уравненія

$$\frac{df}{du_i}\equiv a_x^m a_i=o\quad (i=1,2,3,4)$$

общихъ рѣшеній не имѣютъ, и потому тангенціально-особенными элементами коннексъ $(m,1)$ вообще не обладаетъ. Точечно-особенные элементы, опредѣляемые уравненіями

$$\frac{1}{m}\frac{df}{dx_i} \equiv a_x^{m-1} a_i u_\alpha = o \quad (i = 1,2.3,4)$$

образуютъ пару поверхностей порядка $4(m-1)$ и класса $4(m-1)^3$.

Первая изъ нихъ получается исключеніемъ плоскостныхъ координатъ,—ея уравненія будутъ

$$a_x^{m-1} b_x^{m-1} c_x^{m-1} d_x^{m-1} (abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) = o;$$

это геометрическое мѣсто особенныхъ точекъ поверхностей коннекса $(m,1)$. Вторая, уравненіе которой получается исключеніемъ перемѣнныхъ x, представляетъ огибающую плоскостей, которыхъ поверхности коннекса имѣютъ двойную точку. Аналитически ея уравненіе представляетъ дискриминантъ поверхности коннекса, и потому при $m=2$ Краузе (l. c.) придаетъ ей названіе Determinanten-fläche. Но при $m = 2$ эта поверхность Δ будетъ

$$(abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta = o$$

и выражаетъ, что соотвѣтствующая ея огибающимъ поверхностямъ поверхностямъ 2. порядка обращается въ конусъ. Она совпадаетъ такимъ образомъ съ Гессіеною коннекса, которая изъ каждой поверхности коннекса вырѣзаетъ кривую ея параболическихъ точекъ и которой уравненіе для общаго коннекса $(m,1)$ будетъ

$$a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} d_x^{m-2} (abcd)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma u_\delta = o.$$

Первой поверхности (также для $m=2$) Краузе придаетъ названіе Kernfläche, обозначая ее поверхность K. Точки поверхности K и касательныя поверхности Δ находятся въ однозначномъ соотвѣтствіи; будемъ называть соотвѣтствующую точкѣ x на K касательную къ Δ принадлежащею точкѣ x плоскостью. Взаимная связь поверхностей Φ_v, Δ и K выражается теоремой:

Можно показать: *если плоскость v проходитъ черезъ точку x поверхности K, то соотвѣтствующая этой плоскости поверхность Φ_v касается принадлежащей x плоскости u, касательной къ Δ.* Дѣйствительно, если $v_x = o$ проходитъ черезъ точку x на $a_x^{m-1}b_x^{m-1}c_x^{m-1}d_x^{m-1}(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta)=o$, то означая u плоскость, принадлежащую x, имѣемъ:

$$a_x^{m-1}a_i u_\alpha = o \quad (i=1,2,3,4);$$

исключая отсюда x_4 помощью $v_x=o$ $(v_4 \gtrless o)$ будемъ имѣть:

$$[(a_1v_4)x_1+(a_2v_4)x_2+(a_3v_4)x_3]^{m-1}a_i u_\alpha = o$$

и слѣдовательно уравненія Φ_v:

$$[(a_1v_4)x_1+(a_2v_4)x_2+(a_3v_4)x_3]^{m-1}(a_iv_4)u_\alpha = o$$

выполняются плоскостью u, что и доказываетъ теорему.

Замѣтивъ далѣе, что точка прикосновенія какой-нибудь плоскости u къ поверхности Δ можетъ быть опредѣлена такъ: изъ трехъ какихъ либо уравненій $a_x^{m-1}a_i u_\alpha=o$ опредѣлимъ x въ функцію u_i и подставимъ въ уравненіе коннекса. Тогда изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія поверхности Δ получимъ для точки прикосновенія какой-нибудь ея касательной u:

$$\varrho z_k = a_x^m\alpha_k + m\Sigma a_x^{m-1}a_i u_\alpha \frac{dx_i}{du_k}.$$

Если точка x лежитъ на поверхности K, то $a_x^{m-1}a_i u_\alpha=o$, и выраженія сводятся къ $\varrho z_k = a_x^m\alpha_k$,—т. е. изображаютъ принадлежащую x въ коннексѣ $(m,1)$ точку y. Такъ какъ при этомъ u становится принадлежащею x плоскостью, то мы имѣемъ: *плоскость u, принадлежащая точкѣ x поверхности K, касается поверхности Δ въ точкѣ y, соотвѣтствующей x въ коннексѣ $(m,1)$.*

Двѣ послѣднія теоремы, равно какъ и слѣдующую, Краузе даетъ для $m=2$, основываясь при доказательствѣ на томъ обстоятельствѣ, что въ точкѣ x поверхности K тангенціальное уравненіе принадлежащей въ коннексѣ этой точкѣ поверхности сводится къ квадрату уравненія ея двойной точки.

Всѣ поверхности Φ_v, принадлежащія плоскостямъ, проходящимъ черезъ точку поверхности K, обладаютъ по предыдущему во первыхъ общею касательною, во вторыхъ общею точкою прикосновенія этой касательной—точкою принадлежащей въ коннексѣ этой точкѣ k и K. Другими словами: *плос-*

кость, принадлежащая точкѣ x поверхности K, касается не только поверхности Δ, но и всѣхъ поверхностей Φ_v, соотвѣтствующихъ всѣмъ плоскостямъ, проходящимъ черезъ x, въ одной и той же точкѣ y, принадлежащей x въ коннексѣ $(m,1)$.

Двойственно для коннекса $(1,n)$ составляемъ поверхности $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$, взаимная связь которыхъ выражается теоремою: *черезъ точку y, принадлежащую касательной и поверхности $\mathfrak{K}$ проходитъ не только поверхность $\mathfrak{D}$, но и всѣ поверхности $\mathfrak{F}_x$, соотвѣтствующія всѣмъ точкамъ плоскости u, и всѣ эти поверхности имѣютъ въ этой точкѣ y общую касательную v,—принадлежащую и въ коннексѣ* $(1,n)$. Здѣсь $\mathfrak{F}_x$—огибающая плоскостей, принадлежащихъ въ коннексѣ $(1,n)$ плоскостямъ связки съ вершиною въ x, $\mathfrak{K}$—огибающая плоскостей тангенціально-особенныхъ элементовъ коннекса, а $\mathfrak{D}$—геометрическое мѣсто ихъ точекъ прикосновенія къ соотвѣтственнымъ поверхностямъ коннекса.

§ 20. **Главная коинциденція** коннекса $(m,1)$ опредѣляется уравненіями $\Sigma L_i u_i = a_x{}^m u_\alpha = o$, $u_x = o$.

Каждой точкѣ x пространства въ ней подчиняется вообще пучекъ плоскостей, имѣющій осью прямую p, соединяющую точку x съ принадлежащею ей въ коннексѣ точкою y такъ что

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i = \frac{1}{\varrho}(L_k x_i - L_i x_k).$$

Исключеніе составляютъ критическія точки, въ которыхъ выполняются уравненія

$$L_k x_i - L_i x_k = o, \quad (i,k = 1,3,3,4)$$

Каждая плоскость, проходящая черезъ такую точку, можетъ быть соединена съ нею въ элементъ коинциденціи. Къ числу подобныхъ точекъ нужно относить и тѣ, которыя при извѣстныхъ соотношеніяхъ между коэффиціентами уравненія коннекса выполняютъ четыре уравненія

$$L_i = o \quad (i = 1,2,3,4);$$

если напр.,

$$L_3 = g(x_1 \,.\,.\, x_4)\,\Psi_3(x_1 \,.\,.\, x_4),\ L_4 = g(x_1 \,.\,.\, x_4)\,\Psi_4(x_1 \,.\,.\, x_4),$$

то каждая изъ m^2k точекъ пересѣченія поверхностей

$$L_1 = o,\ L_2 = o,\ g = o$$

степеней m, m и k явится такою точкою. Если точка x описываетъ прямую съ аксіальными координатами π_{ik}, то совокупность ∞^2 плоскостей, дающихъ элементы главной коинциденціи съ различными точками этой прямой, образуетъ поверхность

$$(au\pi\pi)^m u_\alpha = o$$

$(m+1)$-го класса, которая какъ точечное образованіе является кривою двоякой кривизны. Дѣйствительно, это геометрическое мѣсто есть кривая—огибающая прямыхъ p, ибо каждая плоскость, проходящая черезъ одну изъ этихъ прямыхъ, является касательною къ поверхности, и двѣ послѣдовательныя прямыя p и p', соотвѣтствующія сосѣднимъ точкамъ x и $x+dx$ прямой π, пересѣкаются между собою, такъ какъ

$$p'_{ik} = p_{ik} + \sum_{i=1}^{i=4} dx_l \left(x_i \frac{dL_k}{dx_l} - x_k \frac{dL_i}{dx_l}\right)$$

и условіе пересѣченія

$$\Sigma p_{ik} p'_{i'k'} = \Sigma p_{ik} p'_{i'k'} + \Sigma dx_l \Sigma (L_k x_i - L_i x_k)\left(x_i' \frac{dL_k'}{dx_l} - x_k' \frac{dL_i'}{dx_l}\right)$$

$$= \Sigma p_{ik}\, p_{i'k'} + \Sigma dx_2 \begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{dL_1}{dx_l} & \frac{dL_2}{dx_l} & \frac{dL_3}{dx_l} & \frac{dL_4}{dx_l} \end{vmatrix} \equiv o.$$

Каждой плоскости u пространства принадлежитъ въ главной коинциденціи плоская кривая m-го порядка—пересѣченіе плоскости u съ поверхностью $\Sigma L_i u_i = o$. Если u вращается около прямой съ радіальными координатами p_{ik}, то соотвѣтственная плоская кривая описываетъ поверхность:

$$a_x^m(axpp) = o.$$

Изъ упомянутыхъ въ гл. II коваріантныхъ образованій главной коинциденціи остановимся на тѣхъ, которыя означали выше $F(x,x)$, $\Phi(u,u)$, F' и Φ'. Изъ числа ихъ поверхность $F(x,x) = o$, какъ геометрическое мѣсто точекъ, лежащихъ на принадлежащихъ имъ поверхностяхъ коннекса, вырождается въ совокупность $m^3 + m^2 + m + 1$ критическихъ точекъ и не можетъ быть выражена однимъ уравненіемъ въ точечныхъ координатахъ, а $\Phi' = o$ представляетъ тангенціальное уравненіе этихъ $m^3 + m^2 + m + 1$ критическихъ точекъ. Но Φ и F' продолжаютъ существовать: огибающая $\Phi(u,u) = o$ плоскостей u, касательныхъ къ принадлежащимъ имъ въ коннексѣ поверхностямъ X_u, будетъ по предыдущему поверхность класса $(m+3)(m-1)^2$, а геометрическое мѣсто F' соотвѣтственныхъ точекъ прикосновенія—двойныхъ точекъ кривыхъ главной коинциденціи будетъ порядка $6m-2$.

Въ случаѣ $m = 2$ тангенціальное уравненіе поверхностей коннекса, получаемое исключеніемъ σ, $x_1 \,..\, x_4$ изъ $\sigma v_i = a_x a_i u_\alpha$, есть $(abcv)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = o$, и потому уравненіе $\Phi(u,u) = o$ есть $(abcu)^2 u_\alpha u_\beta u_\gamma = o$, какъ это даетъ Р. Краузе l. c. Равнымъ образомъ уравненіе поверхности 10-й степени $F' = o$ онъ получаетъ подъ видомъ

$$F' \equiv (abcd)(\alpha\beta\gamma x)(\delta\delta'\delta'' x) a_x b_x c_x d_x d'_x{}^2 d''_x{}^2 = o$$

Въ общемъ случаѣ эта форма получается точно также исключеніемъ 10 величинъ $u_i u_k$ изъ десяти уравненій

$$\Sigma\left(u_i \frac{dLl}{dx_k} - u_k \frac{dLl}{dx_i}\right) u_2 = o,\ \ u_1 u_x = o,\ \ u_2 u_x = o,\ \ u_3 u_x = o\ \ u_4 u_x = o$$

въ видѣ опредѣлителя 10. порядка и степени $6m-2$ относительно x, который можно привести къ виду:

$$F' = (abcd)(\alpha\beta\gamma x)(\delta\delta'\delta'' x) a_x^{m-1} b_x^{m-1} c_x^{m-1} d_x^{m-1} d'_x{}^m d''_x{}^m = o$$

Каждая критическая точка лежитъ на поверхности F'; дѣйствительно если u есть плоскость, проходящая черезъ критическую точку y, то элементъ (y,u) принадлежитъ коннексу т. е. y лежитъ на поверхности X_u, принадлежащей въ коннексѣ плоскости u. Есть въ выраженіи для F' замѣнимъ

$$(\delta\delta'\delta''x)d'_x{}^m d_x''^m \equiv \Sigma(\delta_i x_k)[\delta'_{k'} d'_x{}^m \delta''_{k'} d''_x{}^m - \delta'_{k'} d'_x{}^m . \delta''_{i'} d''_x{}^m]$$

то замѣтимъ, что при $a_x{}^m \alpha_i = \varrho x_i$ т. е. если x есть критическая точка, обращается въ 0 не только F', но и всѣ ея первыя производныя по x, такъ что *всѣ* m^3+m^2+m+1 *критическихъ точекъ коннекса* $(m,1)$ *суть двойныя точки поверхности* $F'(x,x)=o$,—теорема для $m=2$ доказанная Р. Краузе l. c.

Интегральныя поверхности коннекса $(m,1)$. Нахожденіе интегральныхъ поверхностей коннекса $(m,1)$: $\Sigma L_i u_i = o$, или что тоже линейнаго уравненія

$$\mathfrak{L}'_1 + \mathfrak{L}'_2 q + \mathfrak{L}'_3 p + \mathfrak{L}'_4 (z - px - qy) = o \quad (10)$$

если $\mathfrak{L}'_i$ означаетъ $L_4 : x_4{}^m$ при $\frac{x_1}{x_4} = x, \frac{x_2}{x_4} = y, \frac{x_3}{x_4} = x$

сводится, какъ показалъ еще Лагранжъ [1]) для линейныхъ уравненій, на интегрированіе системы совокупныхъ уравненій

[1]) Mém Berlin. Acad. 1879. Якоби въ своихъ Dilucidationes de aequationum differentialium vulgarium systematis earumque connexione cum aequationibus diff. partialibus linearibns 1. ordinis (Crelle's J. B. XVIII, Werke IV, 127) указалъ на истинное значеніе работъ Лагранжа и далъ полную теорію линейныхъ уравненій. Между прочимъ онъ приводитъ линейное уравненіе къ однородности относительно производныхъ, вводя вмѣсто производныхъ зависимаго перемѣннаго производныя функціи f,—связывающей зависимое перемѣнное съ независимыми по уравненію $f=o$, такъ что

$$\frac{dx}{dx_i} = -\frac{\frac{df}{dx_i}}{\frac{df}{dx}}.$$

Изъ новѣйшихъ работъ слѣдуетъ отмѣтить работы Gilbert'a, указавшаго на особенное рѣшеніе линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, выдѣляемое въ множителѣ при переходѣ къ системѣ совокупныхъ уравненій. См. P. Mansion. Theorie d. partiellen Diff.-gl. 1. Ordn. Ueb. Maser. 1891.

$$(10) \qquad \frac{dx_1}{L_1} = \frac{dx_2}{L_2} = \frac{dx_3}{L_3} = \frac{dx_4}{L_4}$$

Интегральною поверхностью коннекса $(m,1)$ называемъ всякую поверхность, которая всѣми покрывающими ее элементами (точка, касательная въ точкѣ плоскость) принадлежитъ главной коинциденціи этого коннекса; если $\varphi(x_1..x_4)=o$ есть уравненіе такой поверхности то уравненія коинциденціи должно удовлетворяться при подстановкѣ

$$\sigma u_i = \frac{d\varphi}{dx_i} \qquad (i=1,2,3,4),$$

для всѣхъ точекъ $\varphi=o$, т. е. должно быть

$$\left.\begin{aligned} \Sigma L_i \frac{d\varphi}{dx_i} &= o \\ \Sigma \frac{d\varphi}{dx_i} x_i &= o \end{aligned}\right\} \text{ въ силу } \varphi = o$$

При этомъ нѣтъ необходимости, чтобы лѣвая часть перваго уравненія обращалась въ нуль тожественно,—необходимо и достаточно, чтобы результатъ подстановки дѣлился на φ:

$$\Sigma L_i \frac{d\varphi}{dx_i} = K.\varphi,$$

гдѣ K многочленъ $(m-1)$-ой степени. Если $\varphi_1(x_1 \,..\, x_4) = C$ есть интегралъ съ одною постоянною совокупной системы (10) и φ_1 однородная функція o-й степени алгебраическая или трансцендентная, то

$$d\varphi_1 = \Sigma \frac{d\varphi_1}{dx_i} dx_i = o$$

Замѣняя dx_i пропорціональными имъ величинами L_i, будемъ имѣть

$$\Sigma L_i \frac{d\varphi_1}{dx_i} = o$$

и въ силу однородности φ_1

$$\Sigma x_i \frac{d\varphi_1}{dx_i} = o$$

Такимъ образомъ, *если* $\varphi_1 = c$ *есть интегралъ совокупной системы* (10), *то каждый элементъ составленный, точкою какой-либо изъ* ∞^1 *поверхностей, изображаемыхъ этимъ уравненiемъ, въ соединенiи съ касательною къ поверхности въ этой точкѣ, принадлежитъ главной коинциденцiи коннекса* (1) иными словами *въ такомъ случаѣ каждая поверхность семьи* $\varphi_1 = c$ *удовлетворяетъ* (10) *и принадлежитъ къ числу интегральныхъ поверхностей этого коннекса* $(m,1)$.

Если $\varphi(x_1 \,.\,.\, x_4) = C$, $\psi(x_1 \,.\,.\, x_4) = C'$—два независимыхъ интеграла совокупной системы (10) и слѣдовательно уравненія (10), то и всякая функцiя $\Phi(\varphi,\psi)$ будетъ удовлетворять этому уравненiю, ибо если означить

$$\nabla w = \Sigma L_i \frac{dw}{dx_i}, \text{ то } \nabla \Phi(\varphi,\psi) = \frac{d\Phi}{d\varphi} \nabla\varphi + \frac{d\Phi}{d\psi} \nabla\psi = o,$$

при $\nabla\varphi = o$, $\nabla\psi = o$. Сверхъ того

$$\Sigma x_i \frac{d\Phi}{dx_i} = o$$

въ силу однородности φ и ψ. Геометрически, уравненiя

$$\varphi = c, \ \psi = c'$$

опредѣляютъ ∞^2 кривыхъ-характеристикъ (10) и представляютъ полный интегралъ этого уравненiя. Чтобы получить какое-либо другое интегральное многообразiе этого уравненiя достаточно по произвольному аналитическому закону выбрать ∞^1 изъ числа этихъ ∞^2 кривыхъ, т. е. установить какую-либо зависимость между произвольными постоянными C и C': $\Phi(C,C') = o$. Уравненiе $\Phi(\varphi,\psi) = o$ изобразитъ такимъ образомъ общiй интегралъ уравненiя.

Каждая плоскость

$$\sigma u_i = \frac{d\varphi}{dx_i} + \lambda \frac{d\psi}{dx_i} \quad (i = 1,2,3,4)$$

проходящая черезъ прямую, касательную къ проходящей черезъ точку x кривой $\varphi = C$, $\psi = C'$, въ соединенiи съ точкою x образуетъ элементъ разсматриваемой коинциденцiи. Устанавливая зависимость между φ и ψ, мы выбираемъ одну изъ этихъ плоскостей, соотвѣтствующую значенію

$$\lambda = \frac{\frac{d\Phi}{d\psi}}{\frac{d\Phi}{d\varphi}}.$$

Нахожденіе интегральныхъ поверхностей коннекса (1) и интегрированіе совокупной системы (11) приводится такимъ образомъ къ нахожденію двухъ независимыхъ интеграловъ съ одною произвольною постоянною каждый. Такъ какъ общихъ и прямыхъ способовъ нахожденія интеграловъ совокупныхъ уравненій не имѣемъ, то заслуживаетъ вниманія способъ Миндинга-Дарбу [1]) составленія полнаго интеграла по частнымъ рѣшеніямъ. Пусть имѣемъ p алгебраическихъ частныхъ рѣшеній даннаго уравненій p интегральныхъ поверхностей коннекса $(m,1)$: $\varphi_1 = o, \ldots \varphi_p = o$. Каждое изъ нихъ приводитъ къ тожеству

$$\nabla \varphi_i = K_i . \varphi_i,$$

гдѣ K_i суть однородные многочлены $(m-1)$-ой степени относительно $x_1 \ldots x_4$. По свойству операціи ∇

$$\nabla \Omega(\varphi_1 \ldots \varphi_p) = \frac{d\Omega}{d\varphi_1} \nabla \varphi_1 + \ldots + \frac{d\Omega}{d\varphi_p} \nabla \varphi_p$$

---

[1]) Въ своемъ мемуарѣ «Изслѣдованія объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій 1. порядка съ двумя перемѣнными Спб. 1862.» Миндингъ составляетъ интегрирующій множитель помощью частныхъ рѣшеній линейныхъ. Его работа осталась неизвѣстною Дарбу, который въ своемъ извѣстномъ «Mémoire sur les équations du 1. ordre et du 1. degré Bull. Sciences Math. (2) t. II 1878. даетъ общій пріемъ и примѣняетъ его въ частности къ случаю коннекса (2,1). Одновременно съ Дарбу занимался этимъ вопросомъ Fouret, исходившій изъ понятія системъ кривыхъ съ 2. характеристиками и распространившій свои результаты на имплексы и уравненія въ частныхъ производныхъ. Darboux далъ обобщеніе своихъ результатовъ на случай совокупной системы въ n перемѣнныхъ въ замѣткѣ De l'emploi des solutions particulières algébriques dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles algébriques (C. R. t. 86 p. 1012). Далѣе я пополняю ихъ результаты.

будемъ имѣть, взявъ за $\Omega(\varphi_1 \ldots \varphi_p)$ произведеніе $\varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}$, гдѣ $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ неопредѣленные пока коэффиціенты,

$$\nabla(\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}) = \Sigma\alpha_i\varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_i^{\alpha_i - 1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}.\nabla\varphi_i =$$
$$= (\varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p})\Sigma\alpha_i K_i.$$

Если неопредѣленностью $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ воспользуемся, чтобы уничтожить второй множитель

$$\Sigma\alpha_i K_i = o$$

то получаемое такимъ образомъ выраженіе $\Phi = \varphi_1^{\alpha_1} \ldots \varphi_p^{\alpha_p}$ будетъ удовлетворять уравненію коннекса при подстановкѣ

$$\sigma u_i = \frac{d\Phi}{dx_i},$$

каковы бы ни были значенія $x_1 \ldots x_4$. Если, кромѣ того, $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ подчинимъ условію

$$\Sigma\alpha_i h_i = o,$$

гдѣ h_i—порядокъ φ_i, то Φ будетъ однородная функція нулевой степени и потому при всякихъ x будетъ выполнять уравненіе

$$\Sigma\frac{d\Phi}{dx_i}x_i = o.$$

Какова бы ни была слѣдовательно точка x, элементъ образуемый ею въ соединеніи съ проходящею черезъ нее плоскостью, касательною въ ней къ поверхности $\Phi = C$, принадлежитъ разсматриваемой коинциденціи, т. е. $\Phi = C$ будетъ искомымъ интеграломъ съ одною постоянною. Если имѣемъ далѣе q какихъ-нибудь другихъ рѣшеній $\psi_1 \ldots \psi_q$ порядковъ $h'_1 \ldots h'_q$ и подберемъ постоянныя $\beta_1 \ldots \beta_q$ такъ, чтобы выполнялись уравненія

$$\Sigma\beta_i K'_i = o$$

(предполагаемъ $\nabla\psi_i = K'_i.\psi_i$)

$$\Sigma\beta_i h'_i = o,$$

то произведеніе $\psi_1^{\beta_1} \ldots \psi_q^{\beta_q} = C'$ явится вторымъ интеграломъ и характеристики линейнаго уравненія—или коннекса $(m,1)$ опредѣлятся такимъ образомъ уравненіями

$$\varphi_1^{\alpha_1}\varphi_2^{\alpha_2}\ldots\varphi_p^{\alpha_p}=c,\quad \psi_1^{\beta_1}\psi_2^{\beta_2}\ldots\psi_q^{\beta_q}=c'.$$

Каждая интегральная поверхность выразится уравненіемъ

$$\Phi(\varphi_1^{\alpha_1}\ldots\varphi_p^{\alpha_p},\ \psi_1^{\beta_1}\ldots\psi^{\beta_q})=o.$$

Число членовъ въ кватернарной формѣ $(m-1)$-ой степени есть

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Поэтому число условныхъ уравненій, на которыя распадается уравненіе

$$\Sigma\alpha_i K_i=o,$$

есть

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3},$$

и такимъ образомъ число различныхъ частныхъ рѣшеній, необходимое для составленія интеграла съ одною постоянною есть

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+2,$$

потому что при однородности уравненій относительно $\alpha_1\ldots\alpha_p$ они опредѣляютъ только ихъ отношенія. Чтобы опредѣлить второй интегралъ, нужно знать по крайней мѣрѣ одно еще частное рѣшеніе, чтобы отбросивъ одно изъ прежнихъ и добавивъ новое, вычислить снова значенія $\beta'_1\ldots\beta'_q$. Такимъ образомъ, чтобы составить полный интегралъ съ линейнаго уравненія нужно знать

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+3$$

его частныхъ рѣшеній. Можно впрочемъ показать что достаточно уже $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+2$ частныхъ рѣшеній.

Зная p частныхъ рѣшеній $\varphi_1 \ldots \varphi_p$ степеней $h_1 \ldots h_p$ составимъ снова произведеніе $\varphi_1^{s_1} \ldots \varphi_p^{s_p}$ и неопредѣленные показатели $s_1 \ldots s_p$ подберемъ такъ, чтобы выполнялись уравненія:

$$\begin{aligned} \Sigma s_i K_i &= -H \\ \Sigma s_i h_i &= -m-3 \end{aligned} \tag{12}$$

гдѣ

$$H = \sum_{i=1}^{i=4} \frac{dL_i}{dx_i}$$

Для выполненія этихъ уравненій нужно имѣть одною величиною s_i менѣе, чѣмъ для выполненія уравненій

$$\Sigma \alpha_i K_i = o, \Sigma \alpha_i h_i = o.$$

Поэтому если можемъ составить интегралъ съ одною постоянною, то отбрасывая одно рѣшеніе, помощью остальныхъ выполнимъ уравненія (12). Получаемая при этомъ функція

$$M = \varphi_1^{s_1} \ldots \varphi_p^{s_p}$$

удовлетворяетъ уравненію

$$\nabla M + HM = o, \text{ или} \sum_{i=1}^{i=4} \frac{d(M.L_i)}{dx_i} = o,$$

которое при переходѣ къ прямоугольнымъ координатамъ помощью подстановки

$$x_1 = zx_4, x_2 = yx_4, x_3 = xx_4, \mathrm{L}_i = \mathrm{L}_i . x_4^m,$$

послѣ чего дѣлаемъ $x_4 = 1$ принимаетъ видъ, если положить

$$-\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_4 z = Z; -\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_4 y = Y, -\mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_4 x = X,$$

$$\frac{d(MX)}{dx} + \frac{d(MY)}{dy} - \frac{d(MZ)}{dz} = o$$

т. е. представляетъ собою Якобіевъ [1]) множитель совокупной

---

[1]) См. *Jacobi* Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum vulgarium applicandi Crelles Journ. B. 27 u. 29 Werke B. IV 317. Также Vorlesungen üb. Dynamik Vorl. 10 u. ff. S. 71—141. На Якобіевы системы распространенъ С. Ли (M. An. B. XI) и А. Майеромъ (M. An. XII).

системы (11), а при переходѣ къ прямоугольнымъ координатамъ при помощи вышеуказанной подстановки обращается въ Якобіевъ множитель совокупной системы

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}.$$

Такимъ образомъ зная $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+2$ частныхъ рѣшенія и составивъ интегралъ съ одною постоянною, можемъ отбросить одно изъ этихъ рѣшеній, съ помощью остальныхъ составить множитель и такимъ образомъ закончить интегрированіе квадратурою. Такъ какъ отношеніе двухъ множителей, приравненное постоянной, даетъ интегралъ системы, то повидимому зная $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}+2$ рѣшенія, можно составить и полный интегралъ,—если отбрасывать два различныхъ рѣшенія и составить два множителя. Но ихъ отношеніе должно необходимо совпадать съ первымъ интеграломъ, составленнымъ помощью всѣхъ рѣшеній.

Если коннексъ $(m,1)$ нормальнаго вида, то

$$H=o,\text{—ибо } \Sigma\frac{d^2f}{dx_i du_i}\equiv\Sigma\frac{dL_i}{dx_i}=o.$$

Произвольный коннексъ можетъ быть приведенъ къ нормальному виду замѣною L_i черезъ $L_i-\lambda x_i$, гдѣ $H=(m+3)\lambda$,— главная коинциденція двухъ коннексовъ одна и та же, такъ какъ второй коннексъ есть:

$$\Sigma(L_i-\lambda x_i)u_i\equiv\Sigma L_i u_i-\lambda u_x=o.$$

Такимъ образомъ уравненія, опредѣляющія $s_1 \ldots s_p$, для множителя всегда можно привести къ болѣе простому виду

$$\Sigma s_i K_i=o,\ \Sigma s_i h_i=-m-3.$$

Если бы найденныя изъ первыхъ уравненій значенія $s_1 .. s_p$ давали $\Sigma s_i h_i=o$, то вмѣсто множителя получили бы прямо интегралъ съ одною постоянною.

Возьмемъ напр., коннексъ (2,1). Его главную коинциденцію можно по предыдущему опредѣлить уравненіями

$$\Sigma(A_i x_1 x_2 + B_i x_1 x_3 + C_i x_1 x_4 + D_i x_2 x_3 + E_i x_2 x_4 + F_i x_3 x_4) u_i = o,$$
$$u_x = o$$

гдѣ не входятъ члены съ квадратами x. Если коннексъ долженъ имѣть частными рѣшеніями плоскости

$$x_1 = o, x_2 = o, x_3 = o, x_4 = o,$$

то уравненіе его должно приводиться къ такому виду, что результатъ подстановки $u_i = 1, u_k = o (k \gtrless i)$ пропорціоналенъ x_i, т. е. коэффиціентъ при u_i долженъ быть вида

$$x_i (A_1^{(i)} x_1 + A_2^{(i)} x_2 + A_3^{(i)} x_3 + A_4^{(i)} x_4)$$

такъ что уравненіе коннекса должно имѣть видъ

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{i=4} u_i x_i A_x^{(i)} = o.$$

Чтобы составить интегралъ съ одною постоянною, нужно знать $\frac{2.3.4}{1.2.3} + 2 = 6$ частныхъ рѣшеній. Пусть коэффиціенты (13) таковы, что однимъ изъ двухъ недостающихъ рѣшеній является поверхность второй степени

$$2x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_4^2 = o.$$

Подставляя $u_1 = 2x_2, u_2 = 2x_1 - x_3 . u_3 = -x_2, u_4 = -2x_4$ и выразивъ, что результатъ пропорціоналенъ $2x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_4^2$, получимъ, что уравненіе коннекса должно приводиться къ виду:

$$0 = u_1 x_1 A_x^{(1)} + u_2 x_2 A_x^{(2)} + u_3 x_3 [A_x^{(1)} - h x_1 + h x_3]$$
$$+ \frac{1}{2} u_4 x_4 \; [A_x^{(1)} + A_x^{(2)} + h x_3]$$

что съ помощью $u_x = o$ приводится, если означимъ

$$A_x^{(1)} - A_x^{(2)} = \Sigma(A_i^{(1)} - A_i^{(2)}) x_i = E_x,$$

къ такому виду

$$E_x (u_1 x_1 - u_2 x_2 + u_3 x_3) + h x_3 (-2(2x_1 - x_3) u_3 + x_4 u_4) = o.$$

Дѣйствительно при подстановкѣ вмѣсто u_i производныхъ по соотвѣтственнымъ координатамъ отъ

$$x_1, x_2, x_3, x_4,\ 2x_1x_2 - x_2x_3 - x_4^2$$

мы получимъ соотвѣтственно:

$$E_x . x_1, \quad -E_x . x_2, \quad [E_x - 2h(2x_1 - x_3)]x_3, \quad hx_3x_4,$$
$$2hx_3[2x_1x_2 - x_2x_3 - x_4^2]$$

т. е. выраженія, пропорціональныя соотвѣтственнымъ частнымъ рѣшеніямъ. Какъ недостающее рѣшеніе, попробуемъ получить плоскость

$$\lambda_x = \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4 = o$$

Подстановка даетъ

$$E_x(\lambda_1x_1 - \lambda_2x_2 + \lambda_2x_3) + hx_3(2\lambda_3(x_3 - 2x_1) + \lambda_4x_4) = M_x . \lambda_x,$$

и приводитъ къ значеніямъ:

$$M_1 = E_1, M_2 = -E_2, M_3 = E_3 + h, M_4 = o$$
$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 = E_1 : E_2 : E_3 + h : E_4$$

при условіи
$$-\frac{1}{2}E_1 = E_3 + h.$$

Однимъ изъ интеграловъ уравненія явится поэтому

$$C = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_2^{\alpha_3}x_4^{\alpha_4}(E_x + h_3x_3)^{\alpha_5}(2x_1x_2 - x_2x_3 - x_4)^{\alpha_6}$$

гдѣ α_i опредѣляются изъ соотношеній

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6 = o$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)E_x - 2h\alpha_3(2x_1 - x_3) + hx_3(\alpha_4 + 2\alpha_6) = 0,$$

которымъ удовлетворимъ, полагая

$$\alpha_2 = \alpha_3 = 0, \alpha_1 = -\alpha_5 = -k_1, \alpha_6 = k_2, \alpha_4 = -2k_2$$

такъ что искомый интегралъ принимаетъ видъ

$$x_4^{-2k_2}x_1^{-k_1}(E_x + h_3x_3)^{k_1}(2x_1x_2 - x_2x_3 - x_4^2)^{k_2} = C.$$

Замѣтивъ, что

$$H=\Sigma\frac{dL_i}{dx_i}=(E_1-h)(2x_1-x_3)$$

получимъ изъ уравненій

$$\Sigma\alpha_i K_i=-H, \Sigma\alpha_i h_i=-5$$

отбрасывая рѣшеніе x_4:

$$\alpha_6=0, \alpha_2=-\frac{5}{2}, \quad \alpha_3=\frac{E_1-h}{2h}, \alpha_5+\alpha_1=-\frac{E_1+5h-h}{2h}=-\frac{E_1}{2h}-2$$

Зная интегралъ съ одною постоянною и послѣдній множитель, вычислимъ по извѣстному способу Якоби второй интегралъ,—на чемъ здѣсь уже не останавливаюсь.

Возьмемъ еще уравненіе линео-линейнаго коннекса

$$\Sigma a_{ik} x_i u_k=o.$$

Частныя рѣшенія его плоскости v должны выполнять уравненіе:

$$\Sigma a_{ik} x_i \frac{dv_x}{dx_k}=s.v_x,$$

которое распадается на четыре:

$$a_{i1}v_1+a_{i2}v_2+a_{i3}v_3+a_{i4}v_4=s.v_i \qquad (i=1,2,3,4),$$

и по исключеніи v_k приводитъ къ уравненію 4-й степени для s:

$$(\alpha)\quad o=\begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-s & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-s & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}-s \end{vmatrix}$$

Такимъ образомъ получаются четыре плоскости — частныя рѣшенія, которыя будутъ непремѣнно вещественны, если $a_{ik}=a_{ki}$, въ общемъ же случаѣ могутъ быть вещественны или попарно комплексно сопряженны, и которыя, какъ увидимъ далѣе, суть плоскости, неизмѣняемыя при коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ. Означая ихъ уравненія $\chi_1=o$, $\chi_2=o$,

$\chi_3 = o$, $\chi_4 = o$, а соотвѣтственные корни характеристическаго уравненія (α) $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ будемъ имѣть

$$\nabla \chi_i = \varkappa_i \chi_i \qquad (i = 1,2,3,4).$$

Помощью какихъ-либо трехъ изъ этихъ четырехъ рѣшеній, напр., χ_1, χ_2, χ_4 составимъ интегралъ съ одною постоянною; $\chi_1^{\alpha_1} \chi_2^{\alpha_2} \chi_4^{\alpha_4} = c$, опредѣляя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ изъ уравненій

$$\alpha_1 \varkappa_1 + \alpha_2 \varkappa_2 + \alpha_4 \varkappa_4 = o$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = o$$

откуда находимъ

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_4 = \varkappa_2 - \varkappa_4 : \varkappa_4 - \varkappa_1 : \varkappa_1 - \varkappa_2 .$$

Второй интегралъ опредѣлимъ подобнымъ образомъ помощью χ_1, χ_3, χ_4, находя $\beta_1, \beta_3, \beta_4$ изъ уравненій

$$\beta_1 \varkappa_1 + \beta_3 \varkappa_3 + \beta_4 \varkappa_4 = o, \ \beta_1 + \beta_3 + \beta_4 = o,$$

соотвѣтственно пропорціональными $\varkappa_3 - \varkappa_4$, $\varkappa_4 - \varkappa_1$, $\varkappa_1 - \varkappa_3$, такъ что искомыя характеристики опредѣлятся двумя уравненіями

$$U = \chi_1^{\varkappa_2 - \varkappa_4} \chi_2^{\varkappa_4 - \varkappa_1} \chi_4^{\varkappa_1 - \varkappa_2} = C,$$
$$V = \chi_1^{\varkappa_3 - \varkappa_4} \chi_3^{\varkappa_4 - \varkappa_1} \chi_4^{\varkappa_3 - \varkappa_1} = C'$$

а общій интегралъ уравненія напишется

$$\Phi(U, V) = o,$$

какъ и даетъ его Фурэ, берущій только для U рѣшенія

$$\chi_1, \chi_2 \text{ и } \chi_3 .$$

Въ общемъ случаѣ коннекса $(m,1)$, если не знаемъ достаточнаго числа алгебраическихъ частныхъ рѣшеній для составленія полнаго интеграла, можемъ судить о расположеніи характеристикъ вблизи точки x, замѣняя коннексъ $(m,1)$ касательнымъ ему коннексомъ

$$\Sigma \frac{dL_i}{dx_k} X_k U_i = o.$$

Въ особенности этотъ методъ примѣнимъ къ точкамъ критическимъ и особеннымъ. Въ то время, какъ черезъ обыкновенную точку x проходитъ только одна характеристика, и различныя проходящія черезъ точку интегральныя поверхности имѣютъ касательными въ этой точкѣ плоскости, проходящія черезъ прямую $\rho p_{ik} = L_i x_k - L_k x_i$, касательную въ точкѣ x къ характеристикѣ, черезъ критическую точку или особенную проходитъ болѣе одной характеристики,—и такая точка является одною изъ основныхъ точекъ коллинеаціи, устанавливаемой касательнымъ коннексомъ. Коллинеація будетъ для критической точки вообще не вырожденной, и напротивъ непремѣнно вырожденной для особенной точки, которая выполняетъ уравненія

$$\Sigma \frac{dL_i}{dx_k} u_i = o \quad (k = 1,2,3,4),$$

и по исключеніи u_i даетъ

$$\left| \frac{dL_i}{dx_k} \right| = o,$$

такъ что въ характеристическомъ уравненіи касательнаго коннекса свободный членъ равенъ нулю.

Коллинеаціи, устанавливаемыя касательными коннексами, соотвѣтствующими точкамъ, безконечно-близкимъ къ критической точкѣ x, безконечно мало отличаются отъ коллинеаціи, соотвѣтствующей этой точкѣ. Можно поэтому принять, что точки, въ которыя эти коллинеаціи переводятъ точки, близкія къ x, суть тѣ, въ которыя эти послѣднія переводятся степенями коллинеаціи, принадлежащей точкѣ x; ихъ геометрическое мѣсто вблизи точки x представляется поэтому траэкторіями принадлежащаго x касательнаго коннекса. Такимъ образомъ вблизи точки x интегральныя кривыя — характеристики замѣняются траэкторіями касательнаго коннекса. Такимъ образомъ [1]):

---

[1]) См. *Poincaré.* Thèse sur les f-s définies par des équations partielles, гдѣ онъ приводитъ теорему, какъ сообщенную ему Дарбу. Подробно изучаетъ ходъ характеристикъ вблизи критической точки въ 4-й части своего мемуара: Sur les courbes définies par les équations differ. Journ. de Math. (4). II p. 151 и слѣд., откуда и заимствую описаніе критическихъ точекъ.

1°. Точка x есть *узелъ*. Черезъ нее проходитъ ∞^2 характеристикъ.

2°. Если точка x есть *коническая* (*col*), то черезъ нее проходитъ ∞^1 характеристикъ, образующихъ поверхность, и сверхъ того одна характеристика, лежащая внѣ этой поверхности.

3°. Точка x есть *фокусъ*: только одна характеристика проходитъ черезъ фокусъ, другія вращаются около него, асимптотически приближаясь къ нему подобно спиралямъ.

4°. Если x есть *коническій фокусъ* (*col-foyer*), то черезъ нее проходитъ только одна характеристика, ∞^1 другихъ, образующія поверхность, вращаются около точки, асимптотически къ ней приближаясь.

5°. Предѣльный случай 3° и 4°,—когда сумма комплексно-сопряженныхъ S_2—S_4 и S_3—S_4 равна нулю; черезъ точку проходятъ вещественная характеристика и поверхность, на которой лежатъ ∞^1 характеристикъ-замкнутыхъ кривыхъ, огибающихъ критическую точку, которую Poincaré называетъ въ этомъ случаѣ *центромъ*.

Онъ различаетъ далѣе въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣется ∞^1 критическихъ точекъ, образующихъ линію, три рода точекъ—узлы, коническія точки и фокусы и указываетъ, что болѣе сложныя особенности являются въ точкахъ, раздѣляющихъ отрѣзки критической линіи, покрытые узлами, отъ покрытыхъ коническими точками или фокусами.

—Знаніе критическихъ точекъ имѣетъ значеніе и для нахожденія самаго выраженія полнаго интеграла: при извѣстныхъ условіяхъ оно понижаетъ число частныхъ рѣшеній, необходимое для составленія интеграла.

Пусть φ—частное рѣшеніе порядка h, такъ что $\nabla\varphi = K.\varphi$, и x_0—критическая точка, не лежащая на поверхности $\varphi = 0$. Для всякой цѣлой функціи f степени q имѣемъ въ точкѣ x^0,—такъ какъ въ ней $L_i = \Lambda.x_i^0$:

$$\nabla f = \Lambda \Sigma x_i{}^0 \frac{df}{dx_i} = \Lambda.q\,f$$

и слѣдовательно въ частности

$$\nabla\varphi = \Lambda h.\varphi = K.\varphi$$

$$\therefore\ K = h\Lambda \text{ при } x_i = x_i^0$$

Пусть имѣемъ p алгебраическихъ частныхъ рѣшеній $\varphi_1 ..\varphi_p$ степеней $h_1 .. h_p$, изъ которыхъ составленъ интегралъ съ одною постоянною

$$(14)\ \varphi_1^{\alpha_1} .. \varphi_p^{\alpha_p} = C,$$

и пусть ни одна изъ поверхностей $\varphi_1 = 0$ не проходитъ черезъ точку x^0; тогда для этой послѣдней выполняется равенство

$$\Sigma\alpha_i K_i = \Lambda\Sigma\alpha_i h_i.$$

Такъ какъ $\alpha_1 .. \alpha_p$ выбираются такъ, чтобы $\Sigma\alpha_i h_i = 0$, то для критической точки x^0 имѣемъ $\Sigma\alpha_i K_i = 0$,—соотношеніе между α_i; въ томъ только случаѣ, если для x^0 и $\Lambda = 0$, всѣ K_i обращаются въ 0, и это равенство не даетъ соотношенія между $\alpha_1 .. \alpha_p$, но тогда должны существовать соотношенія между коэффиціентами $K_1 .. K_p$, которыя приводятъ къ тому, что для уничтоженія $\Sigma\alpha_i K_i$ при всякихъ $x_1 .. x_p$ нужно меньшее число произвольныхъ коэффиціентовъ $\alpha_1 .. \alpha_p$. Число неопредѣленныхъ коэффиціентовъ α_i, т. е. число рѣшеній, необходимыхъ для составленія полнаго интеграла, понижается при этомъ по крайней мѣрѣ на 1. Если всѣ p рѣшеній не проходятъ черезъ q критическихъ точекъ, то каждая изъ этихъ точекъ приводитъ къ одному соотношенію между $\alpha_1 .. \alpha_p$; поэтому *если имѣемъ* $p = \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + 2 - q$ *поверхностей* $\varphi_1 .. \varphi_p$—*частныхъ интеграловъ коннекса* $(m,1)$, *не проходящихъ черезъ* q *его критическихъ точекъ, то ихъ достаточно для составленія интеграла съ одною постоянною* (Теорема I).

Какъ теорему Дарбу можно такимъ образомъ распространить на случай кватернарныхъ коннексовъ, такъ и представляющую ея обобщеніе теорему Autonne'a [1]). Общій видъ кон-

[1]) Annales de l'université de Lyon. t. III, f. 1. 1892 (n° 28—30).

некса $(m,1)$, имѣющаго n—критическую точку $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ $(n\leqq m)$ имѣетъ видъ $\Sigma \mathrm{L}_i u_i=0$, гдѣ

$$\mathrm{L}_1=a_{1,n}x_4^{m-n}+a_{1,n+1}x_4^{m-n-1}+.+a_{1,m},$$

$$\mathrm{L}_2=a_{2,n}x_4^{m-n}+..+a_{2,m}.$$

$$\mathrm{L}_3=a_{3,n}x_4^{m-n}+..+a_{3,m},$$

$$\mathrm{L}_4=a_{4,n-i}x_4^{m-n+2}+a_{4,n-1}x_4^{m-n+1}+a_{4,n}x_4^{m-n}+..+a_{4,m}$$

Дѣйствительно, условіе, чтобы точка $x_1=x_2=x_3=0$ была дикритическою, сводится къ тому, чтобы $\Sigma \pm d\mathrm{L}_1 dx_2 d^2x_3 x_4$ уничтожалось независимо отъ $dx_i dx_k d^2x_l$, что приводитъ прежде всего къ уравненіямъ

$$d\mathrm{L}_1 dx_2 - d\mathrm{L}_2\, dx_1=0,\ d\mathrm{L}_1 dx_3 - dx_1 d\mathrm{L}_3=0,\ d\mathrm{L}_2 dx_3 - d\mathrm{L}_3 dx_1=0$$

и даетъ затѣмъ, если означимъ:

$$a_{i1}=a'_{i,1}\ x_2+a''_{i,1}\ x_2+a'''_{i,1}\ x_3,\text{—}$$

$$a'_{1,1}=a''_{2,1}=a'''_{3,1},\ a''_{1,1}=a'''_{3,1}=a'_{2,1}=a'''_{2,1}=a'_{3,1}=a''_{3,1}=0$$

и такъ какъ

$$x_4^{m-1}\ a'_{1,1}(x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3)$$

можно замѣнить черезъ

$$-x_4^m u_4 a'_{1,1}+a'_{1,1}x_4^{m-1}\ u_x,$$

то можно принять $a'_{1,1}=a''_{2,1}=a'''_{3,1}=0$, $(a_{1,0}=a_{2,0}=a_{3,1}=0$ уже для монокритической точки) и такимъ образомъ для дикритической точки

$$\mathrm{L}_i=a_{i,2}x_4^{m-2}+a_{i,3}x_4^{m-3}+...+a_{i,m}(i=1,2,3),\ \mathrm{L}_4=a_{4,0}x_4^{m}+a_{4,1}x_4^{m-1}+$$
$$+a_{4,2}x_4^{m-2}+..+a_{4,m}$$

Точно также докажемъ, что для трикритической точки должны быть равны нулю коэффиціенты квадратичныхъ тернарныхъ формъ $a_{i,2}(i=1,2,3)$ а также $a_{4,0}$ и т. д.

Написавъ частное рѣшеніе

$$\varphi_i = x_4^{h_i} + g_{i,1} x_4^{h_i-1} + g_{i,2} x_4^{h_i-2} + . + g_{i,h_i}$$

и подставляя въ уравненіе коннекса значенія

$$u_k = \frac{d\varphi_i}{dx_k},$$

будемъ имѣть

$$\nabla\varphi_i = h_i a_{4,n-2} x_4^{m-n+h_i+1} + [(h_i-1) g_{i,1} a_{4,n-2} + h_i a_{4,n-1}] x_4^{m-n+h_i} + \ldots$$

и дѣленіемъ на φ_i убѣдимся, что

$$K_i = h_i a_{4,n-2} x_4^{m-n+1} + [h_i a_{4,n-1} - a_{4,n-2} g_{i,1}] x_4^{m-n} + \ldots$$

Умножая эти уравненія на α_i и суммируя по i, будемъ имѣть

$$K = \Sigma\alpha_i K_i = a_{4,n-2} x_4^{m-n+1} \Sigma\alpha_i h_i + [a_{4,n-1} \Sigma\alpha_i h_i -$$
$$- a_{4,n-2} \Sigma\alpha_i g_{i,1}] x_4^{m-n} + \ldots$$

Поверхность $(m-1)$-*го* порядка $K=0$ обладаетъ въ точкѣ $(x_1=o,\ x_2=o,\ x_3=o)$ вообще $(n-2)$—кратною точкою, но если положимъ

$$\Sigma\alpha_i h_i = o,\ \Sigma\alpha_i g_{i,1} = o,$$

то эта точка будетъ n—кратною на всѣхъ поверхностяхъ $K=o$, и въ уравненіи $\Sigma\alpha_i K_i = o$ остается коэффиціентовъ, которые должны быть уничтожены соотвѣтственнымъ выборомъ α,

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$$

вмѣсто

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}.$$

Въ силу линейности $g_{i,1}$ относительно $x_1 x_2 x_3$ уравненіе $\Sigma \alpha_i g_{i,1} = o$ распадается на три; уравненіе $\Sigma \alpha_i h_i = o$ принадлежитъ уже къ числу тѣхъ, которыя выведены ранѣе для α. Такимъ образомъ, для составленія интеграла съ одною постоянною нужно имѣть

$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} + 2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + 3$$

частныхъ рѣшеній—поверхностей, не проходящихъ черезъ n—критическую точку коннекса $(m,1)$.

Если имѣемъ $a_{4,n-1} = o$, то $(x_1 = o,\ x_2 = o,\ x_3 = o)$ будетъ n—кратною точкою на всѣхъ поверхностяхъ системы

$$\Sigma \mathfrak{A}_{ik}\ (\mathrm{L}_i x_k - \mathrm{L}_k x_i) = o,$$

т. е. согласно опредѣленію Autonne'a, n—гиперкритическою точкою коннекса $(m,1)$ и n—кратною на поверхностяхъ $K = o$; уравненіе $\Sigma g_{i,1}\ \alpha_i = o$ отпадаетъ, и число условій между α понижается на

$$\frac{n(n+2)\,(n+2)}{1.2.3}$$

Такимъ образомъ *при примѣненіи теоремы I каждая n—критическая точка считается за $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$—3 монокритическихъ, и каждая n—гиперкритическая за*

$$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\ \textit{такихъ точекъ.}$$

Такъ можно показать, что главная коинциденція всякаго коннекса (3,1) можетъ быть опредѣлена уравненіями

$$u_x = o,\ \Sigma x_i u_i \Sigma \overset{(i)}{a_{lk}} x_l x_k + A_1 x_2 x_3 x_4 + A_2 x_3 x_4 x_1 + A_3 x_4 x_1 x_2 + A_4 x_1 x_2 x_3 = o,$$

гдѣ

$$a^{(i)}_{lk} = a^{(i)}_{kl} \text{ и } a^{(i)}_{ll} = o.$$

Каждая изъ вершинъ координатнаго тетраедра является ди-гиперкритическою. Сторона его $x_4=o$ будетъ рѣшеніемъ, если возьмемъ частный случай $A_4=0$. Она не проходитъ черезъ ди-гиперкритическую точку $x_1=o$, $x_2=o$, $x_3=o$ и поэтому для окончательнаго интегрированія нужно знать еще восемь рѣшеній, не проходящихъ черезъ эту точку.

Вопросъ интегрированія линейнаго дифференціальнаго уравненія 1. порядка или связанной съ нимъ совокупной системы сводится такимъ образомъ на нахожденіе извѣстнаго числа алгебраическихъ частныхъ рѣшеній. Отсюда ясно, что указанный методъ не можетъ быть общимъ, ибо не всякое линейное уравненіе допускаетъ алгебраическія рѣшенія, тѣмъ болѣе столько, сколько ихъ нужно для составленія полнаго интеграла. Но самый вопросъ нахожденія алгебраическихъ частныхъ рѣшеній имѣетъ большой интересъ, и мы укажемъ здѣсь нѣсколько результатовъ, указывающихъ на связь критическихъ точекъ съ алгебраическими рѣшеніями.

Прежде всего, *никакая плоскость не можетъ содержать болѣе* m^2+m+1 *изъ общаго числа* m^3+m^2+m+1 *критическихъ точекъ; если она содержитъ такое ихъ число, то является частнымъ рѣшеніемъ.* Дѣйствительно, если плоскость v содержитъ нѣкоторое число критическихъ точекъ, то уравненія

$$v_x=o,\ L_1x_2-L_2x_1=o,\ L_2x_3-L_3x_2=o,\ L_3x_4-L_4x_3=o$$

должны имѣть столько же общихъ рѣшеній. Но первыя три имѣютъ $(m+1)^2$ общихъ рѣшеній, въ числѣ которыхъ находятся и m рѣшеній системы

$$v_x=o,\ x_2=o,\ L_2=o,$$

не принадлежащихъ къ числу критическихъ точекъ коннекса. Поэтому наибольшее число критическихъ точекъ, которое можетъ содержать плоскость, есть $(m+1)^2-m=m^2+m+1$. Допустимъ теперь, что плоскость содержитъ такое число критическихъ точекъ и примемъ ее за одну изъ плоскостей координатнаго тетраедра,—въ данномъ случаѣ за плоскость $x_2=o$. Критическія точки, лежащія въ этой плоскости, удовлетворяютъ уравненіямъ

$$-L_2x_1=o,\ L_2x_3=o,\ x_2=o,\ L_3x_4-L_4x_3=o,$$

изъ которыхъ первыя два показываютъ, что $L_2 = o$ при $x_2 = o$, т. е. L_2 дѣлится на x_2. Но тогда уравненіе $\Sigma L_i u_i = o$ выполняется при подстановкѣ $\sigma u_i = \frac{dx_2}{dx_i}$ для всѣхъ точекъ плоскости $x_2 = o$, которая и будетъ такимъ образомъ частнымъ рѣшеніемъ. Такъ при $m = 1$ частными рѣшеніями являются грани основнаго тетраедра,—содержащія каждая по три критическихъ точки—его вершины.

Пусть $\varphi(x_1 \ldots x_4) = o$—поверхность порядка p—есть частное рѣшеніе уравненія $\Sigma L_i u_i = o$. По предыдущему для нея должно быть

$$\nabla \varphi = \Sigma L_i \frac{d\varphi}{dx_i} = K.\varphi$$

Для критической точки $L_i = \Lambda . x_i (i = 1,2,3,4)$, а потому должны имѣть для такой точки

$$K.\varphi = \Lambda \Sigma . x_i \frac{d\varphi}{dx_i} = p.\Lambda.\varphi$$

Поэтому одно изъ двухъ: или $\varphi = o$, т. е. критическая точка лежитъ на поверхности—частномъ рѣшеніи, или если φ неравно нулю:

$$K = p.\Lambda.$$

Четыре поверхности

$$\psi_i = pL_i - Kx_i = o \quad (i = 1,2,3,4)$$

должны такимъ образомъ проходить черезъ всѣ критическія точки, не лежащія на поверхности $\varphi = o$; если на $\varphi = o$ лежитъ $m^2 + m + 1 - \alpha$ критическихъ, то остальныя $m^3 + \alpha$ должны принадлежать всѣмъ поверхностямъ

$$\sum_{i=1}^{i=4} u_i (pL_i - Kx_i) = o.$$

Это возможно въ томъ только случаѣ, если ψ имѣютъ общую кривую, такъ какъ три неприводимыя поверхности порядка m могутъ имѣть только m^3 общихъ точекъ; поэтому

$$pL_i = Kx_i + M\chi_i + N\theta_i$$

Уравненіе коннекса $(m,1)$ принимаетъ видъ:

$$Ku_x + M.\Sigma\chi_i u_i + N\Sigma\theta_i u_i = o,$$

или

$$M.\Sigma\chi_i u_i + N\Sigma\theta_i u_i = o.$$

Критическія точки опредѣляются при этомъ уравненіями:

$$M(\chi_i x_k - \chi_k x_i) + N(\theta_i x_k - \theta_k x_i) = o;$$

ихъ будетъ уже не конечное число $m^3 + m^2 + m + 1$, но всякая точка кривой $M = o$, $N = o$ будетъ критическою. Предполагая, что коннексъ $(m,1)$ имѣетъ только конечное число критическихъ точекъ, мы тѣмъ самымъ исключаемъ такой случай, и должны поэтому принять $\alpha = o$.

Такимъ образомъ найденъ нижній предѣлъ числа критическихъ точекъ, лежащихъ на поверхности—частномъ рѣшеніи: *каждая алгебраическая поверхность—частное рѣшеніе линейнаго дифференціальнаго уравненія 1-го порядка и m-го измѣренія должна проходить по крайней мѣрѣ черезъ $m^2 + m + 1$ его критическихъ точекъ.*

Верхній предѣлъ того же числа дается теоремою: *неприводимая поверхность p-го порядка не можетъ проходить болѣе, чѣмъ черезъ $(m^2 + m + 1)p$ критическихъ точекъ.* Если $p > m$ это очевидно само собою, потому что тогда $p(m^2 + m + 1) > m(m^2 + m + 1) + 1$. Достаточно поэтому разсмотрѣть случай $p \leqq m$. Критическія точки, лежащія на поверхности $\varphi = o$, опредѣляются уравненіями

$$L_1 x_2 - L_2 x_1 = o,\ L_2 x_3 - L_3 x_2 = o,\ \varphi = o,$$

число ихъ слѣдовательно не можетъ превышать числа $(m+1)^2 p$ точекъ, общихъ этимъ поверхностямъ. Но въ томъ числѣ находятся и mp точекъ, общихъ $\varphi = o$, $x_2 = o$ и $L_2 = o$, которыя не будутъ вообще критическими. Такимъ образомъ наибольшее число критическихъ точекъ, которое можетъ принадлежать $\varphi = o$, есть

$$(m+1)^2 p - mp = (m^2+m+1)p, \text{ ч. и т. д.}$$

Этими немногими теоремами я ограничиваюсь въ настоящее время. Хотя въ теоріи уравненій въ частныхъ производныхъ предыдущіе результаты являются гораздо болѣе частными, чѣмъ соотвѣтственные результаты въ теоріи тернарныхъ коннексовъ, такъ какъ относятся не къ общему случаю уравненія 1. порядка и 1. степени, а къ частному случаю линейныхъ уравненій, но въ то же время вопросъ этотъ совпадаетъ съ вопросомъ нахожденія алгебраическихъ интеграловъ совокупныхъ системъ вида:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

къ которымъ сводятся обыкновенныя дифференціальныя уравненія 2 порядка. Въ тоже время нахожденіе алгебраическихъ интеграловъ линейныхъ уравненій является первымъ шагомъ въ изслѣдованіи вопроса объ алгебраическихъ частныхъ интегралахъ нелинейныхъ уравненій 1 порядка, которые можно опредѣлять, какъ такія цѣлыя раціональныя функціи $\varphi(x_1..x_4)$, которыя при подстановкѣ $\sigma u_i = \frac{d\varphi}{dx_i}$ въ уравненіе $f(x,u) = o$ даютъ

$$f(x, \frac{d\varphi}{dx}) = K.\varphi$$

гдѣ K есть цѣлый многочленъ отъ $x_1..x_4$ степени $m-1+(n-1)(p-1)$. Вмѣсто критическихъ точекъ являются поверхности особенностей самаго коннекса и его главной коинциденціи, точки или плоскости которыхъ не носятъ однако двойного характера критическихъ точекъ коннекса $(m,1)$. Такъ какъ помощью попытокъ всегда можемъ убѣдиться, имѣетъ ли данное уравненіе частное рѣшеніе опредѣленной степени p, то существенно важнымъ является вопросъ о наибольшемъ порядкѣ частнаго рѣшенія. Для обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій 1 порядка вопросъ объ ограниченіи порядка разсматриваютъ Poincaré (Palermo Rend. t. V), Painlevé (замѣтки въ Comples Rendus), наконецъ Autonne (J. Ec. Pol. Cah 63, 64), но еще далеко не разрѣшено. Весьма интереснымъ представляется нахожденіе подобнаго maximum'a для уравненій въ частныхъ производныхъ, ибо тогда для каждаго даннаго уравненія, хотя бы и путемъ долгихъ выкладокъ, мы́ можемъ рѣшить вопросъ, имѣетъ ли оно или нѣтъ частныя рѣшенія алгебраическія.

ГЛАВА IV.

Линео-линейный коннексъ.

§ 21. Уравненіе

$$(1)\ \sum_{i,k}^{1..4} a_{ik} x_i\ u_k = o \equiv a_x\ u_\alpha \equiv b_x\ u_\beta \equiv \ldots \equiv f(x,u)$$

опредѣляетъ по предыдущему коннексъ $(1,1)$, въ которомъ какой-либо точкѣ x пространства соотвѣтствуетъ точка y—центръ связки плоскостей u, образующихъ въ соединеніи съ x элементы (1); эта точка y имѣетъ своими координатами:

$$(2)\ \varrho y_k = \Sigma a_{ik} x_i \equiv \frac{df}{du_k} = o;$$

плоскости u соотвѣтствуетъ плоскость v—мѣсто точекъ x, въ соединеніи съ u дающихъ элементы (1); координаты ея:

$$(3)\ \sigma v_i = \Sigma a_{ik} u_k \equiv \frac{df}{df_i} \equiv a_i u_\alpha.$$

Такимъ образомъ уравненіе (1) опредѣляетъ собою коллинеарное (гомографическое) преобразованіе пространства [1]).

---

[1]) Терминъ «коллинеація» введенъ Möбусомъ (Baryc. Calcul. 1827). Chasles (Aperçu historique 1837. Géom. Supérieure) употребляетъ терминъ гомографія. Ришело (Ueb. d. einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten.

Изученіе этого преобразованія съ помощью уравненія (1), или изученіе коннекса (1,1) приводится къ изученію инваріантовъ и коваріантовъ билинейной формы $\Sigma a_{ik} x_i u_k$. Первымъ шагомъ на этомъ пути является составленіе соотвѣтствующей $f(x,u)$ „полной системы формы"—такой системы коваріантныхъ образованій f, черезъ которыя всѣ прочія выражаются раціонально. Для тернарнаго линео-линейнаго коннекса эта задача разрѣшена Клебшемъ и Горданомъ помощью символическаго метода въ ихъ мемуарѣ: Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (Mat. Ann. B. I. 1869), для бикватернарныхъ формъ—Мертенсомъ (Monatshefte für Mathem. u.

Crelle'sj. B. 70. 1868. s. 137—155) даетъ соотвѣтствію, установленному (2)— лишь въ однородныхъ координатахъ—названіе корреляціи. Но послѣднее названіе утвердилось за двойственнымъ преобразованіемъ, которое также можетъ быть опредѣлено билинейною формой $\Sigma a_{ik} x_i y_k = o$, но съ когредіентными перемѣнными. Коллинеарное (гомографическое) соотвѣтствіе было предметомъ весьма большого числа работъ. Въ дополненіе къ указаннымъ во введеніи укажемъ прежде всего на чисто-геометрическое изслѣдованіе Reye (въ его Geometrie der Lage. 1868), R. Sturm'a (Problem der Collineation. M. Ann. X. 117—136, а также XXVI и др.) St. Smith'a On focal properties of homografic figures (Proc. Lond. Math. Soc. II), F. Schur'a Math. Ann. XVIII. Сочиненіе *Schoute*: Homographie en hare toepassing op de theorie der oppervlakken den tweeden grad. 1870, представляетъ, судя по реферату въ Bulletin Darboux, сводъ найденныхъ свойствъ гомографическихъ преобразованій въ примѣненіи преимущественно къ ученію о поверхностяхъ 2-й степени. Истолкованіемъ аналитическихъ результатовъ, полученныхъ Кронекеромъ и Вейерштрассомъ для теоріи билинейныхъ формъ занимался К. Сегре (см. кромѣ вышеупомянутой еще Ricerche sulle omografie e sulle collineazione etc. Mem. Acc. Torino XXXVIII. 395—425. Укажемъ далѣе на рядъ работъ S. Kantor'a о линейныхъ преобразованіяхъ, изъ которыхъ мы далѣе цитируемъ помѣщенную въ Wien. Abh. B. 46; Ameseder'a D. Quintupellage collinearer Räume (Wien Sitzber. 98 Ab. IIa· 588—613) и мелкія замѣтки A. Transon, Housel, Painvain, Darboux, Bortniker (C. R. 104. 771—3) Appell (C. R. 108 p. 224—6). Ср. также работы Бурместра по Кинематикѣ измѣняемыхъ системъ,—изъ которыхъ намъ интересно его изслѣдованія коллинеарно- и аффинно-измѣняемыхъ системахъ (Schlöm. Zeitschr. B. XX, 393—407. XXIII. 108—131). Изученіе коллинеарныхъ преобразованій съ точки зрѣнія теоріи группъ занимался С. Ли. См. въ особенности гл. II, III въ его Vorlesungen üb. continuirliche Gruppen (Scheff. 1893). (D. Allgemeine projective Gruppe d. Ebene и D. eingliedrigen projectiven Gruppen der Ebene u. ihre Bahncurven).

Physik. B. I. 1890) помощью несимволическихъ процессовъ. Въ дальнѣйшемъ я вывожу члены этой системы помощью символическаго метода, при чемъ главною цѣлью является нахожденіе геометрическаго значенія получаемыхъ при этомъ формъ.

Въ пространствѣ, кромѣ точечныхъ и плоскостныхъ—контрагредіентныхъ между собою координатъ являются еще координаты прямой—радіальныя p_{ik} и аксіальныя π_{ik}. Соотношеніе между тѣми и другими устанавливается отношеніемъ

$$(4)\quad p_{12}:p_{13}:p_{14}:p_{14}:p_{42}:p_{23}=\pi_{34}:\pi_{42}:\pi_{23}:\pi_{12}:\pi_{13}:\pi_{14},$$

гдѣ принимаемъ $p_{12}=\pi_{34}$ и т. д., а самыя координаты связаны соотношеніями

$$(5)\quad p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=o$$

и такимъ же точно соотношеніемъ между π_{ik}. Если введемъ Грассмановы координаты прямой: $p_{ik}=p_ip_k$ и $\pi_{ik}=\pi_i\pi_k$ (Ср. стр. 75), то p_i когредіентны съ x_i и α_i; α π_i съ u_i и a_i. Поэтому для полученія полной системы формъ данную форму $f(x,u)$ должно подвергать во-первыхъ ряду операцій совершенно аналогичныхъ тѣмъ, которыя имѣемъ въ случаѣ тернарныхъ формъ:

1) нѣкоторые изъ множителей a_x, b_x,... измѣняются въ $(abdu)$, $(bcdu)$ и т. д., гдѣ c,γ,d,δ суть символы, *не входящіе* въ данное символическое выраженіе.

2) $(ubcd)$, $(ubed)$,... измѣняются въ $(abcd)$, $(abed)$,...

3) нѣкоторые изъ множителей вида u_δ, u_γ,... измѣняются въ $(\alpha\beta\gamma x)$, $(\alpha\beta\delta x)$,...

4) $(x\beta\gamma\delta)$, $(x\beta\gamma\varepsilon)$,... переходятъ въ $(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\alpha\beta\gamma\varepsilon)$ и т. д.

Во-вторыхъ явятся операціи, вводящія символы p,π:

5) a_x, b_x... переходятъ въ $(au\pi\pi)$ $(bu\pi\pi)$, которымъ можно дать также видъ a_pu_p, b_pu_p,

6) u_α, u_β,... измѣняются въ (αxpp), (βxpp) (эквивалентные $\pi_\alpha\pi_x$, $\pi_\beta\pi_x$).

7) $(au\pi\pi)$, $(bu\pi\pi)$,... переходятъ въ $(ac\pi\pi)$, $(bc\pi\pi)$,... $(\equiv a_p\,c_p,\ b_p\,c_p)$.

8) $(\alpha x p p)$, $(\beta x p p)$... перемѣняются въ $(\alpha y p p)$ $(\beta y p p)$... $(\equiv \pi_\alpha \pi_\gamma, \pi_\beta \pi_\gamma, \ldots)$.

Такимъ образомъ для билинейныхъ формъ имѣемъ въ частности слѣдующія операціи:

I. 1) u_i переходятъ въ миноры x, α, β;
   2) u_i „ въ a_i;
   3) u въ a и u въ миноры x, α, β;
   4) x переходитъ въ миноры y, a, b.
   5) x „ въ α
   6) x въ α, x въ миноры u, a, δ
   7) x въ α, u въ a

II. 1) u_i переходитъ въ миноры $(\alpha p p)_i$
   2) u_i „ „ $(x p p)_i$
   3) x_i „ въ миноры $(a \pi \pi)_i$
   4) x_i „ „ $(u \pi \pi)_i$
   5) p_{ik} замѣняется черезъ $(\alpha_i \beta_k)$
   6) p_{ik} „ „ $(\alpha_i x_k)$
   7) π_{ik} „ „ $(a_i b_k)$
   8) π_{ik} „ „ $(a_i u_k)$

и другія представляющія собою комбинаціи операцій этой группы между собою и съ операціями первой группы.

Обращаемся сначала къ операціямъ первой группы и покажемъ, что по отношенію къ нимъ полной системой являются слѣдующія девять образованій:

$$
(6)\begin{cases}
i = a_\alpha,\ f = a_x u_\alpha,\ i_1 = a_\beta b_\alpha,\ f_1 = a_x u_\beta b_\alpha,\ i_2 = a_\beta b_\gamma c_\alpha,\ f_2 = a_x b_\alpha c_\beta u_\gamma, \\
i_3 = a_\beta b_\gamma c_\delta d_\alpha, \quad \varphi = \Sigma \pm \frac{df}{du_1} \cdot \frac{df_1}{du_2} \cdot \frac{df_2}{du_3} \cdot \frac{du_x}{du_4} \equiv a_x b_x c_x d_\beta e_\gamma l_\varepsilon\, (\alpha \delta \lambda x) \\
\qquad\qquad \psi = \Sigma \pm \frac{df}{dx_1} \cdot \frac{df_1}{dx_2} \cdot \frac{df_2}{dx_3} \cdot \frac{du_x}{dx_4} u_\alpha u_\beta u_\gamma b_\delta c_\varepsilon e_\lambda\, (a d l u),
\end{cases}
$$

къ которымъ нужно добавить еще форму u_x. Съ помощью этихъ десяти формъ выражаются всѣ другія коваріантныя образованія f, содержащія только точечныя и плоскостныя координаты. Прежде всего, опредѣлитель $\triangle$ формы f выражается черезъ инваріанты i, i_1, i_2, i_3, изъ которыхъ первый получается изъ f примѣненіемъ операціи

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{d^2}{dx_i du_i},$$

а другіе точно также изъ $f_1 f_2 f_3$ соотвѣтственно. Дѣйствительно

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \equiv a_1 b_2 c_3 d_4\ (\alpha\beta\gamma\delta) \equiv \frac{1}{4!}\ (abcd)\,(\alpha\beta\gamma\delta).$$

Производя въ послѣднемъ выраженіи перемноженія на самомъ дѣлѣ, получаемъ:

$$(7)\ \Delta = \frac{1}{4!}\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma & a_\delta \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma & b_\delta \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma & c_\delta \\ d_\alpha & d_\beta & d_\gamma & d_\delta \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{24}\left\{ i^4 + 8ii_2 - 6i^2 i_1, - 6i_3 + 3i_1{}^2 \right\}$$

Символически опредѣленныя выше формы $f_1, f_2, \ldots$ получаются изъ f слѣдующимъ несимволическимъ процессомъ

$$\nabla = \sum_{k=1}^{k=4} \frac{df}{dx_k} \frac{d}{du_k}$$

или же

$$\sum_{k=1}^{k=4} \frac{df}{du_k} \cdot \ \frac{d}{dx_k}$$

(оба выраженія означаютъ одинъ и тотъ же процессъ при билинейности $f(x,u)$. Дѣйствительно:

$$\Sigma \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} \equiv a_x u_\beta b_\alpha = f_1$$

$$\Sigma \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{df_1}{du_k} = \Sigma \frac{df_1}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} \equiv a_x b_\alpha c_\beta u_\gamma = f_2, \text{ и т. д.,}$$

вообще

$$\Sigma \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{df_h}{du_k} = \Sigma \frac{df}{du_k} \cdot \frac{df_h}{dx_k} = f_{h+1}.$$

Всѣ функціи f_h выражаются линейно посредствомъ f, f_1, f_2 и u_x. Дѣйствительно, распространяя соотвѣтственное доказательство Клебша (l. c., 465 стр.), составимъ произведенія двухъ тожественно равныхъ нулю опредѣлителей 5-го порядка:

$$0=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & 0 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & b_\alpha & c_\alpha & d_\alpha & u_\alpha \\ a_\beta & b_\beta & c_\beta & d_\beta & u_\beta \\ a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma & d_\gamma & u_\gamma \\ a_\delta & b_\delta & c_\delta & d_\delta & u_\delta \\ a_x & b_x & c_x & d_x & u_x \end{vmatrix}$$

Развертывая этотъ опредѣлитель, получимъ:

$$(i^4-6i^2i_1+8ii_2+3i_1{}^2-6i_3)\,u_x-4\,(i^3-3ii_1+2i_2)\,f+$$
$$+12\,(i^2-i_1)\,f_1-24if_2+24f_3=0.$$

Означая

$$(8)\begin{cases} i^4-6i^2i_1+8ii_2+3i_1{}^2-6i_3=24.\,\Delta=24.\,i''', \\ i^3-3ii_1+2i_2=6\dfrac{d\Delta}{di}=6.\,i'', \\ i^2-i_1=2.\dfrac{d^2\Delta}{di^2}=2i', \end{cases}$$

будемъ имѣть такимъ образомъ:

$$(9)\quad f_3=if_2-i'f_1+i''.f-i'''\,u_x.$$

Производя надъ обѣими частями этого тожества операцію ∇, получимъ,—замѣчая, что $\nabla.u_x=f$ и $\nabla f_h=f_{h+1}$:

$$f_4=if_3-i'f_2+i''f_1-i'''f$$

и т. д., вообще

$$(10)\quad f_{h+4}==if_{h+3}-i'f_{h+2}+i''f_{h+1}-i'''f_h.\quad (h=0,1,2...)$$

Мы видѣли ранѣе, что сопряженный линео-линейнаго коннексъ есть также линео-линейный коннексъ, образуемый совокупностью элементовъ (y,v), соотвѣтствующихъ всѣмъ элементамъ (x,u) коннекса $f=0$. Онъ опредѣляется такимъ образомъ уравненіями $\varrho y_k = \Sigma a_{ik}\, x_i = a_x\, \alpha_k$ и $v_x = 0$; по исключеніи изъ нихъ $x_1 \ldots x_4$ получаемъ уравненіе сопряженнаго коннекса подъ видомъ опредѣлителя (вмѣсто y,v можемъ писать какъ перемѣнныя x и u):

$$(11) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{31} & a_{21} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & u_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & u_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & u_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая опредѣлитель, стоящій въ лѣвой части, и представляя символически коэффиціенты при $x_i u_k$, убѣдимся, что онъ можетъ быть изображенъ символически такъ:

$$(12) \quad \frac{1}{6}\, (abcu)\, (\alpha\beta\gamma x);$$

обозначимъ это выраженіе $i''' g(x,u)$. Производя перемноженіе символическихъ множителей $(abcu)$ и $(\alpha\beta\gamma x)$, будемъ имѣть:

$$i'''\, g = \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma & a_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma & b_x \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma & c_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_\gamma & u_x \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{6}(i^3 + 2i_2 - 3ii_1)\, u_x - \frac{1}{2}(i^2 - i_1) f + if_1 - f_2 \equiv$$

$$\equiv i'' u_x - i' f + i f_1 - f_2.$$

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$(13) \quad f_2 \equiv if_1 - i'f + i''.u_x - i'''.g.$$

Замѣчая, что

$$i''' \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} \equiv \frac{1}{6}\, (abcu)\, (\alpha\beta\gamma\delta)\, d_x \equiv \begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma & a_\delta & d_x \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma & b_\delta & d_x \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma & c_\delta & d_x \\ u_\alpha & u_\beta & u_\gamma & u_\delta & d_x \end{vmatrix} \equiv i'' f - i' f_1 +$$

$$+ if_2 - f_3, \text{—}$$

т. е. по (9) $\qquad i''' \Sigma \dfrac{dg}{dx_k} \cdot \dfrac{df}{du_k} = i'''.u_x$

и такъ какъ операціи

$$\Sigma \frac{df}{du_k} \cdot \frac{d}{dx_k} \text{ и } \Sigma \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{d}{du_k}$$

въ примѣненіи къ билинейной формѣ $g(x,u)$ тожественны, то

$$\Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{df}{du_k} = \Sigma \frac{df}{dx_k} \cdot \frac{dg}{du_k} = u_x$$

Подобнымъ образомъ

$$i''' \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{df_1}{du_k} \equiv (abcu)\,(\alpha\beta\gamma\delta)\; d_\varepsilon e_x \equiv i'' f_1 - i' f_2 + i f_3 - f_4 \equiv i''' f;$$

точно также выведемъ

$$\Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{df_2}{du_k} = f_1 \text{ и вообще } \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{df_h}{du_k} = f_{h-1}.$$

Обратно, означая $g_1(x,u)$ форму:

$$g_1 = \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{dg}{du_k}, \quad g_2 = \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{dg_1}{du_k} \text{ и т. д.,}$$

получимъ изъ (13) помощью операціи

$$\nabla' = \Sigma \frac{dg}{dx_k} \cdot \frac{d}{du_k} \equiv \Sigma \frac{dg}{du_k} \cdot \frac{d}{dx_k}$$

(операціи, выражаемыя двумя символами, тожественны лишь при билинейности объекта):

$$i'''.g_1 = i''g - i'.u_x + i.f - f_1$$

Точно также далѣе

$$i'''.g_2 = i''g_1 - i'g + i.u_x - f$$
$$i'''g_3 = i''g_2 - i'g_1 + i.g - u_x$$

и вообще

$$(14) \quad i'''.g_{h+4} = i''.g_{h+3} - i'g_{h+2} + ig_{h+1} - g_h.$$

Формулы (9) и (14) можно соединить въ одну,—если означить f черезъ F_1, f_h черезъ F_{h+1},

$$u_x \equiv F_0,\ g \equiv F_{-1} \text{ и } g_h \equiv +F_{h-1}.$$

Тогда будемъ имѣть вмѣсто двухъ этихъ формулъ одну:

$$F_{h+4} - i.F_{h+3} + i'F_{h+2} - i''F_{h+1} + i'''F_h = o \qquad (15),$$

гдѣ h можетъ принимать всѣ цѣлочисленныя значенія,—положительныя, 0 и отрицательныя. Примѣняя къ обѣимъ частямъ тожества (15) операцію $D = \Sigma \dfrac{d^2}{dx_k\, du_k}$ получимъ, означая вообще $DF_h = J_h$, такое соотношеніе между инваріантами J_h

$$J_{h+4} - iJ_{h+3} + i'J_{h+2} - i''J_{h+1} + i'''J_h = o$$

Оно показываетъ въ частности, что инваріантъ J_{-1}, соотвѣтствующій инваріанту i формы $f(x,u)$ будетъ: $i'''.J_{-1} = i''$. Точно также:

$$i_{h+4} = i.i_{h+3} - i'.i_{h+2} + i''.i_{h+1} - i'''.i_h.$$

Примѣнимъ операціи группы I къ f или f_h; въ виду симметричности формъ относительно x и u достаточно примѣнить операціи 4°, 5°, 6° и 7°. Для простоты примѣняемъ къ f: 4° даетъ $(abcu)u_\alpha u_\beta u_\gamma \equiv 0$,—ибо мѣняетъ знакъ при незначущемъ обмѣнѣ c и b; 5° обращаетъ f въ f_1 (f_h въ f_{h+1}), 6°—непримѣнима, 7°—даетъ $i_1 (i_{h+1})$.

Изъ двойственно-симметричныхъ формъ φ, ψ достаточно разсмотрѣть одну, напр., φ; операціи 1°, 2°, 3°, и 7°, къ ней непримѣнимы. Операція 4° примѣненная къ c_x замѣняетъ этотъ множитель черезъ $(chku)u_\varkappa u_\chi$—результатъ будетъ тожественно равный нулю,—ибо мѣняетъ знакъ при обмѣнѣ h,χ и $k,\varkappa$; та же операція, примѣненная къ x въ $(\alpha\delta\lambda\chi)$, замѣняетъ этотъ множитель черезъ

$$\begin{vmatrix} u_\alpha k_\alpha h_\alpha \\ u_\delta k_\delta h_\delta \\ u_\lambda k_\lambda h_\lambda \end{vmatrix} u_\varkappa u_\chi,\text{—}$$

результатъ тожественно равенъ нулю по той же причинѣ.

Операція 5° приводится къ замѣнѣ въ

$$\varphi = \Sigma \pm \frac{df}{du_1} \cdot \frac{df_1}{du_2} \cdot \frac{df_2}{du_3} \cdot \frac{d.u_x}{du_4}$$

u_x черезъ f, или f черезъ f_1, f_1 черезъ f_2,—что даетъ въ результатѣ тожественно нуль, или наконецъ f_2 черезъ f_3,—но тогда все сводится по (9) снова къ φ.—Примѣняя операцію 6) къ a_x и b_x, получимъ квадратичную форму отъ u_x, f, f_1 и g:

$$u_\chi c_x a_\kappa a_\beta l_\gamma l_\varepsilon \begin{vmatrix} b_\alpha h_\alpha k_\alpha u_\alpha \\ b_\delta h_\delta k_\delta u_\delta \\ b_\lambda h_\lambda h_\lambda u_\lambda \\ b_\chi h_\chi k_\chi u_\chi \end{vmatrix} \equiv$$

$$2i'''\left\{(i''f_1 - i'''f) g f_1 (f_1 - if + i'u_x)\right\}$$

Здѣсь множителемъ при f_1 является форма

$$h(x,u) = f_1 - if + i'.u_x (17),—$$

производная взятая по i отъ $i'''.g$ въ (13). Упомянемъ еще о второй производной $i'''.g$ также по i,—это

$$k(xu) = f - i.u_x. \quad (17)$$

къ той же формѣ приводитъ и операція 3) примѣненная къ ψ.

Аналогичныя формы, квадратичныя относительно u_x, f, f_1 и f_2 получимъ примѣняя 6) къ a_x и $(\alpha\delta\lambda x)$,—будемъ имѣть при этомъ:

$$a_\kappa b_x c_x d_\beta e_\gamma l_\varepsilon u_\chi \begin{vmatrix} k_\alpha & h_\alpha & u_\alpha \\ k_\delta & h_\delta & u_\delta \\ k_\lambda & h_\lambda & u_\lambda \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad a_x b_x d_\beta e_\gamma l_\varepsilon u_\chi \begin{vmatrix} c_\alpha & h_\alpha & k_\alpha & u_\alpha \\ c_\delta & h_\delta & k_\delta & u_\delta \\ c_\lambda & h_\lambda & k_\lambda & u_\lambda \\ c_\kappa & h_\kappa & k_\kappa & u_\kappa \end{vmatrix}$$

Примѣняя, наконецъ, операціи группы I къ произведеніямъ $f^2, f_1 f, f_2 f$ и т. д., убѣдимся, что придемъ или къ тожественно равнымъ нулю выраженіямъ или къ формамъ, выражающимся черезъ $f, f_1, f_2, u_x, \varphi$ и ψ, и такимъ образомъ убѣдимся, что та часть полной системы формъ формы $f(x,u)$, которая не содержитъ перемѣнныхъ p_{ik}, слагается изъ выписанныхъ девяти формъ (6) въ соединеніи съ u_x. При этомъ слѣдуетъ замѣтить, что хотя φ и ψ въ отдѣльности не выражаются черезъ другія формы, но ихъ произведеніе можетъ быть выражено черезъ $u_x f, f_1$ и f_2.

Прежде чѣмъ переходить къ коваріантнымъ образованіямъ второй группы, остановимся на геометричесскомъ значеніи полученныхъ формъ,—что и составляетъ собственно нашу цѣль.

Какъ уже указано выше уравненіе

$$f(x,u) = \Sigma a_{ik} x_i u_k = o \qquad (1)$$

опредѣляетъ коллинеацію въ трехмѣрномъ пространствѣ. Эта коллинеація подчиняетъ точкѣ x точку y, вообще говоря отъ нея отличную; но существуютъ четыре точки, которыя сами себѣ соотвѣтствуютъ въ коллинеаціи,—это критическія точки коннекса (1,1), опредѣляемыя уравненіями:

$$(16) \qquad a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + a_{3k}x_3 + a_{4k}x_4 = \lambda . x_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Исключая изъ четырехъ уравненій, однородныхъ относительно x_1, x_2, x_3, x_4, эти послѣднія, имѣемъ для опредѣленія λ уравненіе четвертой степени:

$$(17)\ 0 = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44}-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^4 - i.\lambda^3 + i'.\lambda^2 - i'' + i'''.$$

Каждому изъ корней $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ этого уравненія соотвѣтствуетъ по уравненіямъ (16) точка x^0, не измѣняющаяся при коллинеарномъ преобразованіи (9). Четыре опредѣленныя такимъ образомъ точки будутъ всѣ вещественны и различны между собою, если вещественны и различны корни уравненія (17). Особые случаи равенства или сопряженности корней этого уравненія, характеристическаго для коллинеаціи, мы разсмотримъ ниже.—Если будемъ искать плоскости, не измѣняющіяся при коллинеарномъ преобразованіи (3), то подобнымъ образомъ уравненія

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + a_{i3}u_3 + a_{i4}u_4 = \lambda.u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

приведутъ насъ къ уравненію (17), и мы будемъ имѣть слѣдовательно четыре плоскости, совпадающія съ подчиненными имъ въ коллинеаціи (1) плоскостями v. Не трудно убѣдиться—съ помощью счета, что три плоскости, соотвѣтствующія корнямъ $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ уравненія (17), пересѣкаются въ точкѣ x^0, соотвѣтствующей корню $\varkappa_4$; но показать это можно и не прибѣгая къ выкладкамъ; дѣйствительно, представимъ себѣ плоскости, принадлежащія корнямъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, характеристическаго уравненія (17). Точка ихъ пересѣченія при коллинеарномъ преобразованіи (1) перейдетъ въ точку пересѣченія подчиненныхъ имъ плоскостей, — т. е. останется въ покоѣ, такъ какъ опредѣляющія ея плоскости не измѣняются. И такъ какъ неизмѣняющихся при коллинеарномъ преобразованіи точекъ всего четыре, то съ одною изъ этихъ точекъ и должна она совпадать. Координаты ея симметричны относительно $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ и суть слѣдовательно функціи коэффиціентовъ (17) и корня $\varkappa_4$, а такова именно точка, принадлежащая корню $\varkappa_4$, —съ нею слѣдовательно и совпадаетъ точка пересѣченія плоскостей $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$. Неизмѣняющіяся при коллинеарномъ преобразованіи точки и плоскости образуютъ поэтому тетраедръ, котораго вершины суть неизмѣняемыя точки, а грани—неизмѣняемыя плоскости. Это основной тетраедръ коллинеаціи. Принявъ его за координатный тетраедръ, приведемъ уравненіе линео-линейнаго коннекса къ виду

$$f = \sum_{i=1}^{i=4} \varkappa_i X_i U_i = o \quad (18),—$$

каноническому виду коллинеаціи,—когда координаты соподчиненной X точки выражаются уравненіями

$$\varrho Y_j = \varkappa_j X_j (j = 1, 2, 3, 4).$$

Дѣйствительно, если (1) приведемъ къ виду (18), то инваріанты (1) выразятся черезъ $\varkappa_i$ такъ:

$$i = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \varkappa_4; i = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_3^2 + \varkappa_4^2;$$
$$i_2 = \varkappa_1^3 + \varkappa_2^3 + \varkappa_3^3 + \varkappa_4^3; i_3 = \varkappa_1^4 + \varkappa_2^4 + \varkappa_3^4 + \varkappa_4^4.$$

и далѣе:

$$i' = \varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1 + \varkappa_1\varkappa_4 = \varkappa_2\varkappa_4 + \varkappa_3\varkappa_4;$$
$$i'' = \varkappa_1\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_4 + \varkappa_1\varkappa_3\varkappa_4 + \varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4; i''' = \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4.$$

Эти величины $\varkappa_1, \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4$ суть слѣдовательно ничто иное, какъ корни уравненія (17), и (16) принимаютъ поэтому теперь видъ $\varkappa_k X_k = \lambda X_k (k = 1,2,3,4)$.

Давая λ значеніе, напр., $\varkappa_1$, получимъ $\varkappa_k . x^0{}_k = \varkappa_1 . x^0{}_k$,— что показываетъ $x^0{}_2 = 0, x^0{}_3 = o, x^0{}_4 = o$,—и т. д.,—т. е. критическія (основныя) точки будутъ при этомъ вершинами координатнаго тетраедра.

Въ каноническомъ видѣ форма f содержитъ три существенныхъ параметра—отношенія $\frac{\varkappa_1}{\varkappa_4}; \frac{\varkappa_2}{\varkappa_4}; \frac{\varkappa_3}{\varkappa_4}$, и слѣдовательно имѣетъ три абсолютныхъ инваріанта, т. е. всего четыре независимыхъ инваріанта; простѣйшими являются упомянутые выше инваріанты i_1, i_1, i_2, i_3,—черезъ которые слѣдовательно и выразятся всѣ остальные. Коваріантныя формы f_h принимаютъ видъ $\Sigma \varkappa^h{}_i X_i U_i$.

Отсюда ясно ихъ геометрическое значеніе,—будучи приравнены нулю, онѣ опредѣляюъ коллинеаціи, эквивалентныя h разъ примѣненной коллинеаціи f, или какъ можно говорить, это—степени коллинеаціи $f = o$. Понимать это надо такъ: если $f = o$ переводитъ точку x въ точку x', а точку x' въ точку x'', то коллинеація, переводящая x въ x'' прямо, есть коллинеація $f_1 = o$,—квадратъ коллинеаціи $f = o$.

Сопряженный f коннексъ $g = o$, по самому опредѣленію своему, даетъ преобразованіе, обратное устанавливаемому коннексомъ $f = o$. Его уравненіе въ случаѣ каноническаго вида исходнаго коннекса получается такъ: коллинеація $f = o$ обращаетъ точку X въ точку Y, такъ что $\varrho Y_j = \varkappa_j X_j$, и плоскость U—въ плоскость V: $\sigma . V_j = \varkappa_j U_j$. Коннексъ $g = o$ представляетъ обратную коллинеацію, которая точку Y переводитъ въ X и плоскость V въ плоскость U,—такъ что

$$\varrho X_j = \varkappa_j^{-1} Y_j, \sigma' . U_j = \varkappa_j^{-1} V_j.$$

Уравненіе этой коллинеаціи получимъ поэтому, замѣняя въ (18) X и U черезъ Y и V;

$$g(Y, V) = \overset{1..4}{\Sigma_j} \varkappa_j^{-1} Y_j V_j.$$

Коннексъ $g_h = o$ представляетъ коллинеарное преобразованіе, получаемое h—кратнымъ примѣненіемъ коллинеаціи $g = o$,—такъ же какъ $f_h = o$ изъ $f = o$, и будетъ слѣдовательно коллинеаціею обратною $f_h = o$; дѣйствительно примѣнивъ $f_h = o$, переведемъ x въ $x^{(h)}$: $\varrho x_i^{(h)} = \varkappa_i^h X_j$; а производя затѣмъ преобразованіе $g_h = o$ надъ $x^{(h)}$, придемъ къ точкѣ

$$\varrho\varrho' Z_i = \varkappa_i^{-h} \varrho x_i^{(h)} = \varkappa_i^{-h+h} x_i = x_i,$$

и точно также

$$\sigma . U^{(h)} = U_i \varkappa_i^h \text{И} \sigma' V_i^{(h)} = \varkappa_i^{-h} U_i . \cdot . \sigma\sigma' W_i^{(h)} = \varkappa_i^{-h} \varkappa_i^{+h} U_i \equiv U_i$$

г. и т. д.

Зная $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$, можно найти и самое преобразованіе, приводящее (1) къ каноническому виду,—достаточно вычислить $U_j X_j$ помощію уравненій

$$\begin{aligned}
U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 + U_4 X_4 &= u_x. \\
\varkappa_1 U_1 X_1 + \varkappa_2 U_2 X_2 + \varkappa_3 U_3 X_3 + \varkappa_4 U_4 X_4 &= f. \\
\varkappa_1^2 U_1 X_1 + \varkappa_2^2 U_2 X_2 + \varkappa_3^2 U_3 X_3 + \varkappa_4^2 U_4 X_4 &= f_1. \\
\varkappa_1^3 U_1 X_1 + \varkappa_2^3 U_2 X_2 + \varkappa_3^3 U_3 X_3 + \varkappa_4^3 U_4 X_4 &= f_2.
\end{aligned}$$

Означая K произведеніе разностей корней характеристическаго уравненія,—или взятый съ знакомъ $+$ корень квадратный изъ дискриминанта этого уравненія,—который можно представить пропорціональнымъ опредѣлителю

$$(19) \begin{vmatrix}
4, & -3i & +2i' & -i'' \\
i, & -2i' & +3i'' & -4i''' \\
i', & -ii' + \frac{3}{2} i'', & i'^2 - ii'' - 2i''' & ii''' \\
i'', & -(ii'' + 4i'''), & i'i'' + 3ii''' & -i''^2 + i''i'''
\end{vmatrix}$$

или иначе

$$-(9ii'i'' - 27i^2 i''' - 26i''^2 - 2i'^3 + 72i'i''')^2 + 4(12i''' - 3ii'' + i'^2)^3$$

будемъ имѣть:

$$(20) K . U_j X_j = A_{j1} u_x + A_{j2} f + A_{j3} f_1 + A_{j4} f_2 \quad (j = 1,2,3,4)$$

гдѣ

$$A_{11}=\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_2-\varkappa_3)$$
$$-A_{12}=(\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_2\varkappa_4+\varkappa_3\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_2-\varkappa_3)$$
$$A_{13}=(\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_2-\varkappa_3)$$
$$-A_{14}=(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_4-\varkappa_2)(\varkappa_2-\varkappa_3)$$

Остальные коэффиціенты A_{jk} получаются изъ соотвѣтственныхъ A_{1k} умноженіемъ на $(-1)^{j-1}$ и замѣною индекса j индексомъ 1. Уравненіями (20) коэффиціенты въ X_j и U_j опредѣляются не вполнѣ, но до множителя, общаго всѣмъ коэффиціентамъ одного выраженія, который въ X_j обратенъ тому, что входитъ въ соотвѣтственное U_j.
Элементы, общіе четыремъ коннексамъ

$$(21)\quad u_x=o, f=o, f_1=o, f_2=o,$$

—въ линейной функціи которыхъ выражаются всѣ остальные коннексы $f_h=o$ и $g_h=o$, образуютъ пару поверхностей—4-го порядка и 4-го класса. Уравненія первой получаемъ, исключая изъ (21) $x_1x_2x_3x_4$, что приводитъ къ опредѣлителю

$$\Sigma\pm\frac{df}{du_1}\cdot\frac{df_2}{du_1}\cdot\frac{df_2}{du_3}\cdot\frac{du_3}{du_4}=\varphi=o$$

и точно также поверхность 4-го класса есть $\psi=o$. Такимъ образомъ *формы φ и ψ, приравненныя нулю, опредѣляютъ пару поверхностей, общихъ четыремъ коннексамъ (21), а слѣдовательно и всѣмъ коннексамъ, принадлежащимъ къ системѣ ∞^3 коннексовъ (1,1), изображаемой уравненіемъ*

$$(22)\quad F\equiv\pi.f+\lambda.f_1+\varkappa f_2+\nu.u_x=0$$

гдѣ π, λ, $\varkappa$, ν,—какія нибудь вещественныя постоянныя; къ системѣ этой принадлежатъ и коннексы $f_h=0$, $g_h=0$.

Если форму f возьмемъ въ каноническомъ видѣ (18), то для φ получаемъ такое выраженіе

$$(23a)\varphi=\begin{vmatrix}\varkappa_1X_1 & \varkappa_1{}^2X_1 & \varkappa_1{}^3X_1 & X_1\\ \varkappa_2X_2 & \varkappa_2{}^2X_2 & \varkappa_2{}^3X_2 & X_2\\ \varkappa_3X_3 & \varkappa_3{}^2X_3 & \varkappa_3{}^3X_3 & X_3\\ \varkappa_4X_4 & \varkappa_4{}^2X_4 & \varkappa_4{}^3X_4 & X_4\end{vmatrix}=K.X_1X_2X_3X_4$$

и точно также

$$(23b)\quad \psi = K.U_1 U_2 U_3 U_4,$$

т. е. *каждая изъ биквадратичныхъ формъ* φ, ψ *распадается на 4 линейные множителя, изображающіе сторонъ и вершины основнаго тетраедра коллинеаціи* $f = o$. Разложенія φ и ψ на линейные множители достигается такимъ образомъ уже самымъ преобразованіемъ формы f къ каноническому виду. Можно говорить поэтому, что *всѣ коллинеаціи* $f_h = o$, $g_h = o$, или общнѣе всѣ коллинеаціи (22) *относятся къ одному и тому же общему всѣмъ имъ основному тетраедру*. Для случая формъ, приведенныхъ къ каноническому виду, легко показать это и помощью счета; дѣйствительно взявъ какую нибудь систему значеній $\pi\lambda\mu\nu$ и означая

$$k_i = \pi + \lambda \varkappa_i + \mu \varkappa_i^2 + \nu \varkappa_i^3$$

получимъ для формы Φ соотвѣтствующей этому случаю

$$\Phi = X_1 X_2 X_3 X_4 \ \Sigma \pm 1 . k_2 . k_3^2 . k_4^3$$

—т. е. форма пропорціональная φ, ч. и т. д.

Рядомъ коллинеарныхъ преобразованій $g_h = o$, $f_h = o$ опредѣляется безконечный рядъ точекъ, въ которыя послѣдовательно переходитъ какая-нибудь точка x отъ повторнаго примѣненія преобразованія $f = o$ или обратнаго ему $g = o$;—обозначая точку x числомъ 0, получимъ рядъ точекъ

$$\ldots\ldots (-h) \ldots\ldots (-2), (-1)\ (0)\ (1)\ (2) \ldots\ldots (l) \ldots$$

соотвѣтствующихъ коллинеарнымъ преобразованіямъ, устанавливаемымъ коннексами

$$\ldots\ldots g_{h-1} = o \ldots g_1 = o,\ g = o,\ u_x = o\ f = o,\ f_1 = o, \ldots f_{l-1} = o, \ldots$$

Точку (o) въ точку (λ),—гдѣ λ какое нибудь цѣлое число—положительное, нуль или отрицательное,—переводитъ коллинеація, устанавливаемая коннексомъ:

$$(24)\qquad \varkappa_1^\lambda U_1 X_1 + \varkappa_2^\lambda U_2 X_2 + \varkappa_3^\lambda U_3 X_3 + \varkappa_4^\lambda U_4 X_4 = o.$$

Ряду точекъ λ соотвѣтствуетъ этотъ рядъ коллинеарныхъ системъ. Въ уравненіи (24) мы можемъ параметру λ придавать не только цѣлыя, но и любыя вещественныя значенія, и оно будетъ все же изображать коллинеаціи, отнесенныя къ основному тетраедру, общему съ (22); такую коллинеацію будемъ называть принадлежащею къ показателю λ относительно коллинеаціи $f=o$, или λ-тою степенью коллинеаціи $f=o$, понимая это выраженія въ томъ смыслѣ, что вопервыхъ $f_\lambda=o$, имѣетъ тотъ же основной тетраедръ, что и $f=o$, и во-вторыхъ отнесенная къ этому тетраедру, какъ координатному, она изображается уравненіемъ (24), гдѣ коэффиціентъ при X_iU_i есть λ-тая степень соотвѣтственнаго коэффиціента въ каноническомъ видѣ формы f. Точку, въ которую коллинеація $f_\lambda=o$ переводитъ точку x, изобразимъ уравненіями

$$(25) \qquad \varrho\, Y_i = \varkappa_i^\lambda X_i.$$

Разсматривая здѣсь ϱ и λ, какъ параметры, можемъ исключить ихъ,—при чемъ для удобства, означимъ $log\varkappa_i=k_i$. Тогда логариѳмируя имѣемъ:

$$log\varrho=\lambda.k_j+logX_j—logY_j$$

Результатомъ исключенія λ и $log\varrho$ явятся два уравненія

$$(26)\begin{cases} X_1^{k_2-k_3}X_2^{k_3-k_1}X_3^{k_1-k_2} = Y_1^{k_2-k_3}Y_2^{k_3-k_1}Y_3^{k_1-k_2} = Const = C \\ X_2^{k_4-k_3}X_3^{k_2-k_4}X_4^{k_3-k_2} = Y_2^{k_4-k_3}Y_3^{k_2-k_4}Y_4^{k_4-k_2} = Const = C' \end{cases}$$

Если коллинеація отнесена не къ основному тетраедру, то въ уравненіяхъ (26) $X_i=o$ суть уравненія сторонъ основнаго тетраедра.

Точки, лежащія въ основныхъ плоскостяхъ коннекса, преобразуются въ точки, лежащія въ тѣхъ же плоскостяхъ; такъ если точка лежитъ въ плоскости $X_4=o$, то исключеніе ϱ и λ изъ (25) приводитъ къ уравненіямъ

$$X_4=o,\ X_1^{k_2-k_3}X_2^{k_3-k_1}X_3^{k_1-k_2}=C \text{ или же } \varrho=o.$$

Если точка лежитъ на ребрѣ, напр., $X_3=o$, $X_4=o$, то два уравненія (25) приводятся къ $\varrho Y_3=o$, $\varrho Y_4=o$, которыя удовлетворяются при $\rho = o$ или $Y_3 = o$, $Y_4 = o$—послѣднія показываютъ, что точка остается вообще на ребрѣ. Наконецъ если точка есть вершина $X_2 = o\, X_3 = o\, X_4 = o$, то уравненія $\rho Y_1 = \varkappa_1{}^\lambda X_1, \rho Y_2 = o, \rho Y_3 = o, \rho Y_4 = o$ удовлетворяются при $\rho = o$ и $Y_2 = o\, Y_3 = o\, Y_4 = o$; послѣднія выражаютъ, что мѣста точекъ, въ которыя преобразуются вершины основнаго тетраедра суть сами вершины.

Черезъ каждую точку пространства проходитъ вообще только одна кривая (26). Исключеніе составляютъ вершины. Допустимъ, напр., что корни (17) таковы, что k_i вещественны и притомъ: $k_1 > k_2 > k_3 > k_4$, и приведемъ (26) къ виду

$$X_1^{k_2-k_3} X_3^{k_1-k_2} = C.X_2^{k_1-k_3}$$

$$X_2^{k_3-k_4} X_4^{k_2-k_3} = C_1 X_3^{k_2-k_4}$$

Каковы бы ни были значенія постоянныхъ C и C_1, кривыя эти проходятъ черезъ вершины $X_1 = o$, $X_2 = o$, $X_3 = o$ и $X_2 = o\, X_3 = o\, X_4 = o$ основнаго тетраедра.

Полученныя кривыя образуютъ систему интегральныхъ кривыхъ дифференціальнаго уравненія 1. порядка, изображаемаго въ проективномъ видѣ главною коинциденціею коннекса, котораго параметры суть логариѳмы соотвѣтственныхъ параметровъ. (1). Въ тоже время *онѣ являются траэкторіями (Bahncurven) одночленной непрерывной группы преобразованій, опредѣляемой уравненіями*

$$(25) \qquad \rho Y_i = \varkappa_i{}^\lambda X_i \quad (i = 1,2,3,4),$$

гдѣ существеннымъ параметромъ является λ [1]. Онѣ представляютъ собою иными словами кривыя, преобразуемыя сами въ себя всѣми ∞^1 коллинеарныхъ преобразованій (25), образующими одночленную группу. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія кривыхъ мы получили исключая ρ и λ изъ (25), то кривая—геометрическое мѣсто точекъ, въ которыя при (25) преобразуется точка x, будетъ въ то же время и мѣстомъ точекъ $\varkappa X \equiv Y$,—т. е. при коллинеарномъ преобразованіи

[1]) По терминологіи С. Ли. См. его Vorlesungen üb. Differentialgleichungen mit bekannten infinit. Transformationen или Vorl. üb. continuirliche Gruppen.—Theorie d. Transformationsgruppen B. I—III. Особенно: *Klein* и *Lie* Geometrisches üb. vertauschbare lineare Transformationen M. An. IV. 50—84.

$\varrho Y_i = \varkappa_i X_i$ каждая точка кривой (26) переходитъ въ другую точку той же самой кривой. Если за основную коллинеацію возьмемъ не устанавливаемую коннексомъ $f=o$, а какую-нибудь другую коллинеацію (24), принадлежащую къ показателю λ^0, то въ уравненіяхъ (26) вмѣсто k_1, k_2, k_3, k_4 войдутъ соотвѣтственно $k_1 + log\lambda^0$, $k_2 + log\lambda^0$, $k_3 + log\lambda^0$, $k_4 + log\lambda^0$, но разность $k_1 - k_2$, и т. д. при этомъ не измѣнится. Поэтому кривыя (26) суть траэкторіи точекъ не только при коллинеаціи $f=o$, но и при всѣхъ коллинеаціяхъ, устанавливаемыхъ уравненіями (24), а такъ какъ совокупность такихъ коллинеацій образуетъ группу,—удовлетворяя основному свойству: изъ $\varrho Y_i = \varkappa_i^{\lambda} X_i$ и $\varrho' Z_i = \varkappa_i^{\mu} Y_i$ имѣемъ $\varrho\varrho' Z_i = \varkappa_i^{\mu+\lambda} X_i$,— то кривыя (26) и являются траэкторіями группы (25). На такія кривыя, которыя преобразуются въ себя одночленною группою коммутативныхъ [2]) линейныхъ преобразованій, указали впервые Ф. Клейнъ и С. Ли въ своихъ статьяхъ, опубликованныхъ въ Comptes rendus de l'Ac. de Paris T. LXX p. 1222 и 1275, и въ Math. Ann B. IV развиты только вопросы. относящіеся къ плоскимъ кривымъ. Выше приведенное доказательство инваріантности разсматриваемыхъ кривыхъ (26) при группѣ преобразованій (25) заключаетъ въ себѣ основную даваемую ими теорему. *Если преобразуемъ кривыя (26) соотвѣтствіемъ, принадлежащимъ данному тетраедру, то получимъ кривыя той же системы.*

Если возьмемъ какое-нибудь преобразованіе (27) $\varrho Y_i = \pi_i X_i$,—хотя и принадлежащее къ тому же основному тетраедру, но обладающее другими величинами π_i, которыя нельзя представить какъ одинаковыя λ-ыя степени величинъ $\varkappa_i$, то такое преобразованія устанавливается коннексомъ (22). Всѣ подобныя преобразованія образуютъ трехъ-членную группу. Соотвѣтственно кривыя, аналогичныя (26), образуютъ совокупность ∞^3 кривыхъ, которыя при преобразованіяхъ (17) обмѣниваются между собою, и только часть этой совокупности при каждомъ преобразованіи (27) и всѣхъ его степеняхъ остается неизмѣнною.

---

[2]) Если два преобразованія T и S производятъ одинъ и тотъ же результатъ, въ какомъ бы ихъ порядкѣ ни производили,—т. е. если $TS=ST$, то такія преобразованія называются коммутативными (vertauschbar). См. цитир. выше статью.

Совершенно аналогичнымъ образомъ получимъ въ плоскостныхъ координатахъ уравненія

$$U_1^{k_3-k_2}\,U_2^{k_1-k_3}\,U_3^{k_2-k_1}=C$$
$$U_2^{k_3-k_4}\,U_3^{k_4-k_2}\,U_4^{k_2-k_3}=C_1$$

гдѣ $U_1=o$ $U_2=o$ $U_3=o$ $U_4=o$, уравненія вершинъ основного тетраедра, изображающія семью ∞^2 развертывающихся поверхностей и представляющія собою то, что можно назвать Bahn-developpable группы коллинеарныхъ преобразованій

$$\sigma.V_i=\varkappa_i\lambda U_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

Каждой плоскости W касается совершенно опредѣленная развертывающаяся

$$U_3^{k_1-k_2}\,U_2^{k_3-k_1}\,U_1^{k_2-k_3}=W_3^{k_1-k_2}\,W_2^{k_3-k_1}\,W_1^{k_2-k_3}$$
$$U_4^{k_2-k_3}\,U_3^{k_4-k_2}\,U_2^{k_3-k_4}=W_4^{k_2-k_3}\,W_3^{k_4-k_2}\,W_2^{k_3-k_4}$$

Если эта плоскость проходитъ черезъ ребро основного тетраедра, то пучекъ плоскостей, имѣющихъ его осью, и будутъ этою развертывающеюся. Наконецъ плоскость—грань основного тетраедра—остается безъ измѣненія, и слѣдовательно соотвѣтственная поверхность вырождается въ саму эту плоскость.

Если возьмемъ одну какую либо изъ поверхностей, опредѣляющихъ кривую (26), то такая поверхность, изображаемая въ неоднородныхъ координатахъ уравненіемъ $x^a y^b z^c=k$ [1]),

---

[1]) Подобныя поверхности были изучаемы *J. A. Serret*, который въ своемъ Mémoire sur les surfaces orthogonales (Journ. Liouville (1) XII 1847). опредѣлилъ ихъ линіи кривизны, разсматривая ихъ какъ частный случай поверхности $\Phi(x)+\varphi(y)+\chi(z)=\rho$, который получается, когда эта семья поверхностей должна быть одною изъ трехъ взаимно ортогональныхъ системъ поверхностей. Тѣмъ же вопросомъ занимался, согласно указанію М. Шаля (Rapport sur les progrès de la géométrie p. 345) не зная работы Серре, Combescure (Annali di Matematica V, 1863 p. 39—31) и De la Gournerie въ своихъ Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symètriques 1866.

Въ томъ направленіи, которое насъ здѣсь интересуетъ, занимались подобными поверхностями только Ф. Клейнъ и С. Ли въ работѣ указанной выше.

гдѣ a, b, c, k—постоянныя,—обладаетъ также основнымъ свойствомъ присущимъ траэкторіямъ—не измѣняться при всѣхъ преобразованіяхъ (25). Но болѣе того,—если возьмемъ такую поверхность, которой уравненіе не содержитъ X_4 напр.,

$$X_3^{k_1-k_2} X_2^{k_3-k_1} X_1^{k_2-k_3} = C$$

то не только всѣ преобразованія (25), но и всѣ преобразованія двучленной группы.

$$\varrho Y_i = \varkappa_i^\lambda X_i \quad (i=1,2,3) \quad \varrho Y_4 = \pi X_4 = \varkappa_4^\mu X_4$$

переводятъ эту поверхность саму въ себя. Свойство не измѣняться при всѣхъ преобразованіяхъ (25) принадлежитъ не только этимъ поверхностямъ, но и всѣмъ поверхностямъ, составленнымъ изъ кривыхъ (26), т. е. изображаемымъ уравненіямъ

$$V = \Phi(X_3^{k_1-k_2} X_2^{k-k_1} X_1^{k_2-k_3} X_4^{k_2-k_3} X_3^{k_4-k_2} X_2^{k_3-k_4}) = 0,$$

гдѣ Φ—знакъ произвольной функціи. Всякая поверхность V обладаетъ, какъ указываютъ Клейнъ и С. Ли, слѣдующими свойствами. 1° Она содержитъ особенности только въ вершинахъ основного тетраедра, 2° всѣ коваріантныя ей поверхности суть также поверхности V той же системы. 3° Пересѣченіе двухъ поверхностей V состоитъ изъ кривыхъ V одной и той же системы; 4° поверхности V одной системы могутъ пересѣкаться только въ вершинахъ основнаго тетраедра.

Мы предполагали, что всѣ корни характеристическаго уравненія различны между собою, и ни одинъ необращается въ 0. Въ § 24 мы разсмотримъ эти особенныя случаи коллинеаціи и выведемъ уравненія соотв. траэкторій. Здѣсь же ограничимся замѣчаніемъ, что кривыя эти имѣютъ значенія въ кинематикѣ коллинеарно-измѣняемой системы,—собственно въ частномъ случаѣ однообразно (einförmig-veränderlich) измѣняемой системы—когда четыре точки системы остаются неподвижны во все время движенія,—онѣ встрѣчаются подъ именемъ самоогибаемыхъ кривыхъ (Selbsthüll-curven u. Flächen) у Бурместера и у Сомова въ его Кинематикѣ коллинеарно-измѣняемой системы (Варш. Унив. Изв. 1891 № 1—5).

Кривыя (26) суть вообще *трансцендентныя* кривыя,— кромѣ тѣхъ случаевъ, когда

$$k_i - k_j = \mu . m_{ij}$$

гдѣ m_{ij}—раціональныя числа. Можно поставить вопросъ, *при какихъ условіяхъ точки ряда* (λ) *будутъ лежать на алгебраической кривой даннаго характера?* Мы разсмотримъ только тотъ наиболѣе простой случай, когда для сравненія беремъ плоскія кривыя. Прежде всего замѣтимъ, что если $a\,b\,c\,d$— какія нибудь четыре точки, не лежащія въ одной плоскости, $a'b'c'd'$—точки, имъ соотвѣтствующія въ коллинеаціи, устанавливаемой уравненіемъ $f(x,u)=o$, то имѣемъ всегда:

$$\text{(I)}\quad (a'bcd)+(ab'cd)+(abc'd)+(abcd')=i(abcd)$$

гдѣ $(abcd)=\Sigma\pm a_1b_2c_3d_4$ и т. д. Равенство это получимъ изъ тожества

$$a_x(bcdu)-b_x(cdau)+c_x(dabu)-d_x(abcu)=-u_x(abcd)$$

замѣняя x_iu_k черезъ a_{ik}. Въ частности если возьмемъ $b=a'$, $c=a''$, $d=a'''$ и слѣдовательно $b'=a''$, $c=a'''$, $d'=a^{\text{IV}}$, то получимъ изъ (I):

$$(aa'a''a^{\text{IV}})=i(aa'a''a''').$$

Такимъ образомъ *въ случаѣ* $i=o$ *точки* a', a', a'', a^{IV} *и слѣдовательно вообще* $a^{(\lambda)}$, $a^{(\lambda+1)}$, $a^{(\lambda+2)}$, $a^{(\lambda+4)}$ *лежатъ въ одной плоскости. Если же четыре точки* $a\,a'a''a'''$ *лежатъ въ одной плоскости, то и всѣ остальныя точки* $a^{(\lambda)}$ *будутъ лежать въ той же плоскости. Условіе этого* $discr$ (17)=0,—т. е.

$$(2i'^3+27i^2i'''-9ii'i''+27i''^2-72i'i''')^2-4(12i'''-3ii''+i'^2)^3=o$$

Случай этотъ мы теперь исключаемъ, отлагая разсмотрѣніе вырожденныхъ коллинеацій до послѣдующаго §'а.— Замѣняя въ выписанномъ выше тожествѣ x_iu_k коэффиціентами

$$\text{(II)}.\quad (ab'c'd)+(a'b'c'd')+(a'b'cd')+(a'b'e'd)=i''(abcd)$$

или въ частности при $b=a'$, $c=a''$, $d=a'''$:

$$(a\,a''a'''a^{\mathrm{IV}}) = i''(aa'a''a''').$$

Такимъ образомъ *при условіи* $i'' \lessgtr o$ *въ одной плоскости лежатъ точки 0. 2. 3. 4,—и слѣдовательно вообще точки* (λ), $(\lambda+2)$, $(\lambda+3)$, $(\lambda+4)$.

Сопоставляя два результата, имѣемъ *при условіи* $i=o$, $i''=o$ *всѣ точки* (λ) *съ четными индексами лежатъ на одной прямой, всѣ точки съ нечетными—на другой,* и вообще при какомъ угодно значеніи λ точки $(\lambda+2m)$(гдѣ m—цѣлое число или 0) лежатъ на одной прямой.

Подвергнемъ тожества (II) операціи

$$\delta U = \Sigma \frac{dU}{da_{ik}} P_{ik} \quad \text{гдѣ} \quad P_{ik} \begin{cases} =0 & \text{при } i \lessgtr k \\ =1 & \text{при } i=k \end{cases}$$

получимъ:

$$\text{(III)} \quad i'(abcd) = (abc'd') + (ab'cd') + (ab'c'd) +$$
$$+ (a'bcd') + (a'b'cd) + (a'bc'd).$$

Съ помощью этого тожества можно получить условіе, чтобы $a a' a'' a^{\mathrm{V}}$ находились въ одной плоскости. Дѣйствительно, изъ (I) при $b=a'$, $c=a''$, $d=a^{\mathrm{IV}}$; означая вообще для краткости $a^{(l)}$ черезъ l просто, имѣемъ:

$$(0134) + (0125) = i(0124) = i^2(0123)$$

а изъ (III) при $b=a'$, $c=a''$, $d=a'''$

$$(0134) = i'(0123)$$

Откуда: при $i'=o$ *точки* 0,1,3,4 *лежатъ въ одной плоскости.* Сопоставляя двѣ формулы имѣемъ:

$$(0125) = (i^2 - i')(0123)$$

Т. е. *при* $i^2 - i' = o$ *точки* 0,1,2,5 *будутъ въ одной плоскости.*

При $b=a'$, $c=a''$, $d=a^{\text{IV}}$ получимъ:

$$(0135)=(ii'-i'')(0123)$$

и слѣдовательно, $ii'-i''=o$ есть условіе, чтобы точки 0,1,3,5 находились въ одной плоскости.

Подобнымъ образомъ изъ (II) при $b=a'$, $c=a'''$, $d=a^{\text{IV}}$ получимъ:

$$(0145)+(0235)+(1234)=i'(0134)\equiv i'^2(0123).$$

Но изъ (I) при $b=a''$, $c=a'''$, $d=a^{\text{IV}}$ имѣемъ:

$$(1234)+(0235)=i(0234)=ii''(0123), \therefore (0145)=(i'^2-ii''(0123).$$

Т. е. при условіи i'^2-ii'' въ одной плоскости находятся точки 0,1,4,5.

Если одновременно $i=i'=i''=o$, то плоскость $(aa'a''')$, не проходящая черезъ прямую $aa''a^{\text{IV}}$ пересѣченія плоскости $aa'a''$ и $aa''a'''$, должна кромѣ a содержать еще и точку a^{IV}, слѣдовательно при этомъ a^{IV} совпадаетъ съ a, и коллинеація $f(x,u)=o$ является такимъ образомъ циклическимъ соотвѣтствіемъ. (*Muth*. Die geometrische Deutung von Invarianten räumlicher Collineationen und Reciprocitäten. M. An. B. XXXIII p. 495—510).

Замѣчая, что

$$(1234)=i'''(0123),$$

имѣемъ

$$(0235)=(ii''-i''').(0123).$$

Далѣе изъ (II) при $a=(0)$, $b=(2)$, $c=(3)$, $d=(4)$:

$$(0345)=i''(0234)-(1245)=(i''^2-ii''')(0123),$$

а при $a=(0.)$, $b=(1.)$, $c=(3.)$, $d=(4.)$:

$$(0245)=i''(0134)-(1235)\equiv(i'i''-ii''')(0123).$$

Такимъ образомъ мы получили всѣ условія, чтобы четыре какія-либо изъ первыхъ шести точекъ (A) лежали въ одной плоскости. Для случая тернарныхъ коннексовъ (1) такія условія разсматривали Клебшъ и Горданъ въ указанномъ выше мемуарѣ. Для кватернарнаго ихъ разсматривалъ Мутъ въ помянутой работѣ; другого рода геометрическія значенія инваріантовъ дадимъ въ дальнѣйшемъ, пополняя результаты Мута и ограничиваясь сказаннымъ выше по отношенію къ условіямъ, налагаемымъ на точки (λ). Достаточно вывести значеніе инваріанта i,—остальныя получаются изъ него.

Представимъ себѣ, что на какой-нибудь плоскости u устанавливается проективное соотвѣтствіе тѣмъ, что точкѣ ξ этой плоскости подчиняется точка ξ_0, въ которой плоскость u пересѣкается прямою соединяющею неизмѣнную точку x съ точкою ξ', гомологичною ξ въ $f(x,u)=o$. Пусть $\mathfrak{X},y,z$ три точки u, такъ что $\sigma u_i=(\mathfrak{X}yz)_i$ $(i=1,2,3,4)$ суть координаты плоскости u. Тогда координаты точки ξ можно представить подъ видомъ

$$\xi_i=\varLambda\mathfrak{X}_i+\mu y_i+\nu z_i$$

и точки ξ_0:

$$\xi_{0,i}=\varLambda'\mathfrak{X}_i+\mu' y_i+\nu' z_i$$

Координатамъ плоскости $\mathfrak{X}x\xi_0$ можно давать видъ:

$$\mu'(\mathfrak{X}xy)_i+\nu'(\mathfrak{X}xz)_i$$

а плоскости $yx\xi_0$:

$$\varLambda'(yx\mathfrak{X})_i+\nu'(yxz)_i$$

Если ξ' соотвѣтствуетъ ξ въ коллинеаціи $f=o$, то каждая плоскость связки, имѣющей ξ' центромъ, въ соединеніи съ точкою ξ образуетъ элементъ коннекса $f(x,u)=o$, т. е. имѣемъ въ частности

$$f\left(\xi,(\mathfrak{X}x\xi_0)\right)=o=\sum_{i,k}^{1..4}a_{ik}[\varLambda\mathfrak{X}_i+\mu y_i+\nu z_i].[\mu'(\mathfrak{X}xy)_i+\nu\mathfrak{X}xz)_i].$$

и точно также

$$f\left(\xi,(yx\xi_0)\right)=o=\sum_{i,k}^{1..4}a_{ik}[\varLambda\mathfrak{X}_i+\mu y_i+\nu z_i].[\varLambda'(yx\mathfrak{X})_i+\nu'(yxz)_i].$$

Изъ двухъ уравненій найдемъ отношеніе $\nu',\varLambda',\mu'$ въ функціи $\nu,\varLambda,\mu$; означая для краткости $v_i=(xyz)_i$, $w_i=(xz\mathfrak{X})_i$, $t=$

$(x\mathfrak{X}y)_i$, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} \rho\Lambda' &= \Lambda f(\mathfrak{X},v) + \mu f(y,v) + \nu f(z,v) \\ \rho\mu' &= \Lambda f(\mathfrak{X},w) + \mu f(y,w) + \nu f(z,w) \\ \rho\nu' &= \Lambda f(\mathfrak{X},t) + \mu f(y,t) + \nu f(z,t) \end{aligned}$$

Три эти уравненія между $\nu'\Lambda'\mu'$ и $\nu\Lambda\mu$ можно разсматривать, какъ уравненія коллинеаціи въ плоскости; она будетъ въ т. наз. вписанномъ положеніи треугольниковъ (eingeschriebene Dreieckslage der Collineation—*Pasch*,—Math. Ann. B. XXIII s. 415), если соотвѣтственный первый инваріантъ $i=\Sigma a_{ii}$ обращается въ нуль,—т. е. въ данномъ случаѣ:

$$f(\mathfrak{X},v)+f(y,w)+f(z,t)=o.$$

Вводя вмѣсто $\mathfrak{X},y,z,v,w,t$ величины x_i и u_i приведемъ это условное уравненіе къ такому виду:

$$k(x,u) \equiv f(x,u) - i.u_x = o \quad (a).$$

Такимъ образомъ *коллинеація* $f(x,u)=o$, *если принять за неподвижную нѣкоторую точку* a, *на каждой плоскости* u *устанавливаетъ проективное соотвѣтствіе такъ, что каждой точкѣ* b *плоскости* u *соотвѣтствуетъ точка* b_0, *въ которой прямая* ab' (b' соотвѣтствуетъ точкѣ b въ коллинеаціи $f=o$) *встрѣчаетъ плоскость* u. *Всѣ плоскости* u, *для коихъ эта коллинеація находится во вписанномъ положеніи треугольниковъ, проходятъ черезъ одну и ту же точку* A, *и пары* a,A *образуютъ новую коллинеацію въ пространствѣ, которой уравненіе есть* (a) [1].

---

[1]) Кромѣ этого значенія коваріантной коллинеаціи $k(x,u)=o$, даваемаго Мутомъ (*l.c.*), можно дать ей въ случаѣ, если коннексъ $f(x,u)=o$ есть спеціальный, — т. е. распадающійся на произведеніе двухъ множителей $f\equiv A_x\,U_{\mathfrak{a}}=o$ (гдѣ плоскость A и точка $\mathfrak{a}$ суть *основныя* плоскость и точка спеціальнаго коннекса), другое геометрическое истолкованіе, вводя понятіе новой метрической функціи коннекснаго пространства—*момента двухъ элементовъ* (x,u) и (y,v),—разумѣя подъ этимъ (введенный въ геометрію Кэйли)

Точки a,a' и A находятся на одной прямой.

Если $i=o$, форма $k(x,u)$ совпадаетъ съ $f(x,u)$ и слѣдовательно точка A совпадаетъ съ точкою a'. Если черезъ a'—соотвѣтствующую точкѣ a—проведемъ произвольную плоскость, возьмемъ на ней какъ-нибудь двѣ точки b и c, построимъ какъ указано выше b_0 и c_0 и отыщемъ точку $d=(bc_0,cb_0)$, то по предыдущему d_0 лежитъ на bc, и слѣдовательно d'—на плоскости abc, подобнымъ образомъ точка a' лежитъ на плоскости bcd, точка b'—на acd и c' на abd, *т. е. въ случаѣ* $i=o$ *существуетъ* ∞^9 *тетраедровъ, описанныхъ около соотвѣтствующихъ имъ въ коллинеаціи* $f=o$; *говоримъ, что при условіи* $i=o$ *коллинеація* $f=o$ *находится въ положеніи вписанныхъ тетраедровъ.* Точно также $i_1=o$ выражаетъ, что въ положеніи вписанныхъ тетраедровъ находится квадратъ коллинеаціи $f=o$ и т. д. Если возьмемъ обратную коллинеацію $g(x,u)=o$, то получимъ: *въ случаѣ* $i''=o$ *коллинеація* $f(x,u)=o$ *находится въ положеніи описанныхъ тетраедровъ.* Понятно значеніе условій i_{g_1}, i_{g_2} и т. д.

Сопоставляя два результата имѣемъ: *если одновременно* $i=o$, $i''=o$, *то существуетъ* ∞^9 *тетраедровъ, описанныхъ около имъ соотвѣтствующихъ, и столько же тетраедровъ,*

моментъ двухъ прямыхъ xy и uv,—который аналитически выражается т. $\sum\limits_{i,k}^{1..4}(x_iy_k-x_ky_i)(u_iv_k-u_kv_i)$. Именно замѣтивъ, что моментъ элементовъ (x,u) и (x',u'), составленнаго точкою и плоскостью, въ которыя $f=o$ переводитъ x и u, выражается формулою f^2-f_1u_x, и что въ случаѣ спеціальнаго коннекса $f_1=i.f$, видимъ, что моментъ двухъ помянутыхъ элементовъ$=f(f-iu_x)\equiv f.k(x,u)$. Такимъ образомъ для спеціальнаго коннекса $f=o$ форма $k(x,u)=o$ выражаетъ совокупность всѣхъ тѣхъ элементовъ (x,u) пространства, для торыхъ равны нулю моменты ихъ относительно соотвѣтствующихъ имъ въ $f=o$ элементовъ (x',u'). Къ понятію момента двухъ элементовъ мы пришли въ пространствѣ трехъ измѣреній, но полученное для него аналитическое выраженіе сохраняетъ свою силу и для случая любого числа перемѣнныхъ. Въ частности въ случаѣ тернарныхъ коннексовъ имѣемъ, что моментъ элементовъ (A,u) и (B,v) выражается произведеніемъ удвоенной площади треугольника ABC,—гдѣ C пересѣченіе прямыхъ u,v,—на синусъ угла между прямыми u,v.

вписанныхъ въ соотвѣтствующіе имъ; двумъ совокупностямъ общи ∞^7 *тетраэдровъ, одновременно вписанныхъ и описанныхъ около имъ соотвѣтствующихъ.* Послѣднюю часть теоремы докажемъ такъ: указываемое въ ней положеніе, которое Мутъ, распространяя на пространственныя колинеаціи названіе данное Краусомъ (Math.An.B.29 s. 224), называетъ Z—положеніемъ, состоитъ въ томъ, что точка

a' лежитъ на bcd, b'—на acd, c'—на abd, d'—на abc,
a — на $b'c'd'$, b—на $a'c'd'$, c—на $a'b'd'$, d—на $a'b'c'$.

Возьмемъ произвольно точки a и b, построимъ соотвѣтствующія имъ a' и b' и проведемъ ab' и ba'; Z—положеніе требуетъ, чтобы $cd \equiv \gamma$ и $c'd' \equiv \gamma'$ встрѣчали какъ ab', такъ и ba'; пусть ab' встрѣчаетъ γ, тогда $a'b''$ встрѣчаетъ γ', т. е. γ' лежитъ въ плоскости $a'bb''$; далѣе $a'b$ встрѣчаетъ γ, слѣдовательно $a''b'$ встрѣчаетъ γ', пересѣкающую и ab',—потому γ' лежитъ и въ плоскости $ab'a''$,—она опредѣляется вполнѣ какъ пересѣченіе $ab'a''$ и $a'bb''$,—т. е. по точкамъ a и b можно построить и γ.

Если Z—положеніе должно быть возможно, прямыя ab, $a'b'$, γ и γ' должны встрѣчать одну и туже пару прямыхъ (ab' и ba'),—принадлежать къ одной системѣ ∞^2 прямыхъ. Означимъ точку пересѣченія ba' и γ черезъ c_0, тогда c'_0 лежитъ на γ'; обратно точкѣ $d'_0 = (ba', \gamma')$ соотвѣтствуетъ точка d_0 на γ. Въ силу $(abc_0d'_0) = o$, $(ab'c_0d_0) = o$, $(a'bc_0d_0) = o$ имѣемъ при $i = o$ изъ (I) также и $(abc'_0d_0) = o$, т. е. прямая c'_0d_0 встрѣчаетъ ab. Далѣе, такъ какъ $(ab'c_0d_0) = o$, $(a'bc'_0d_0) = o$ и $(a'bc_0d'_0) = o$, то при $i'' = o$ будетъ и $(a'b'c'_0d_0) = o$, т. е. $d_0c'_0$ встрѣчаетъ и $a'b'$. Такимъ образомъ существуютъ три прямыхъ: $ab', a'b, d_0c'_0$, а слѣдовательно и безконечный рядъ прямыхъ, встрѣчающихъ $ab, a'b, \gamma, \gamma'$.—Возьмемъ теперь на γ произвольно точку c и отыщемъ соотвѣтствующую точку c' на γ'; опредѣлимъ далѣе точку пересѣченія плоскостей abc', acb' и bca',—которую обозначаемъ d, и соотвѣтственную ей точку d' на γ'; въ силу условія $i = o$ точка d' лежитъ въ плоскости abc; прямыя dc' и cd' пересѣкаютъ три прямыхъ предыдущей системы,—именно γ, γ' и ab,—слѣдовательно встрѣчаютъ и $a'b'$,—чѣмъ и достигается положеніе Z.

Обращаемся снова къ формѣ $k(x,u) \equiv f(x,u) - iu_x = o$. Каждой заданной плоскости u соотвѣтствуетъ въ силу этого уравненія плоскость U,—которой уравненіе есть $f - iu_x = o$ и изъ каждой точки которой плоская система (точечное поле) u' проектируется на плоскость u такъ, что получаемыя такимъ образомъ двѣ коллинеарныя плоскія системы находятся въ положеніи вписанныхъ треугольниковъ. Лучи, проектирующіе изъ какой-нибудь точки плоскости U точки системъ u и u', образуютъ двѣ концентрическихъ связки лучей, находящихся во вписанномъ положеніи трехгранниковъ. Дѣйствительно, чтобы опредѣлить точку плоскости u,—$\Lambda'x + \mu'y + \nu'z$—въ которой плоскость u встрѣчаетъ прямую соединяющую нѣкоторую точку X съ какою-нибудь точкою плоскости u',—$\xi \equiv \Lambda x' + \mu y' + \nu z'$—имѣемъ уравненія:

$$\begin{Vmatrix} \Lambda x'_j + \mu y'_j + \nu z'_j \\ \xi_j \\ X_j \end{Vmatrix} = o \quad (j=1,2,3,4),$$

которыя даютъ намъ:

$$\begin{aligned} \rho\Lambda' &= \Lambda(y_1 z_2 x'_3 X_4) + \mu(y_1 z_2 y'_3 X_4) + \nu(y_1 z_2 z'_3 X_4), \\ \rho\mu' &= \Lambda(z_1 x_2 x'_3 X_4) + \mu(z_1 x_2 y'_3 X_4) + \nu(z_1 x_2 z'_3 X_4), \\ \rho\nu' &= \Lambda(x_1 y_2 x'_3 X_4) + \mu(x_1 y_2 y'_3 X_4) + \nu(x_1 y_2 z'_3 X_4). \end{aligned}$$

Эта коллинеація будетъ находиться во вписанномъ положеніи треугольниковъ при условіи

$$(y_1 z_2 x'_3 X_4) + (z_1 x_2 y'_3 X_4) + (x_1 y_2 z'_3 X_4) = o.$$

Замѣняя здѣсь x_j', y_j', z_j' ихъ значеніями $a_x\alpha_j$, $a_y\alpha_j$, $a_z\alpha_j$, получимъ означая для краткости:

$$(x_2 y_3 z_4) = U_1, -(x_3 y_4 z_1) = U_2, \ (x_4 y_1 z_2) = \mathrm{U}_3, -(x_1 y_2 z_4) = \mathrm{U}_{y_3}$$

какъ коэффиціентъ при X_4, выраженіе $-(a_{33} + a_{22} + a_{11})\mathrm{U}_4 + a_{41}\mathrm{U}_1 + a_{42}\mathrm{U}_2 + a_{43}u_3 = \sum_k^{1..4} a_{4k}\mathrm{U}_k - i\mathrm{U}_4$.

Слѣдовательно выписанное выше условіе принимаетъ видъ

$$\Sigma a_{ik} X_i U_k - i\mathrm{U}_X \equiv f(X,U) - iU_X = o.$$

Эту плоскость U Мутъ (l. c.) называетъ i—плоскостью плоскостей u,u'.

Взявъ вмѣсто $f(x,u)=o$ обратную ей коллинеацію, получимъ i''—плоскость плоскостей u,u'.

Коннексъ (1,1) и изображаемая имъ коллинеація опредѣляются вполнѣ, если даны 15 условій для нахожденія значеній 15 параметровъ $\frac{a_{ik}}{a_{44}}$. Это можно достигнуть, задавая 15 элементовъ (x,u), которые должны принадлежать коннексу, или же задавая четыре пары точекъ или четыре пары плоскостей, гомологичныхъ въ коллинеаціи. Но если задаются четыре точки или четыре плоскости, которыя должны образовать основной тетраедръ коллинеаціи, то для полнаго опредѣленія послѣдней должна быть дана еще пара соотвѣтственныхъ точекъ (resp. плоскостей). Аналитическое опредѣленіе возможно и въ томъ случаѣ, если всѣ четыре вершины основного тетраедра суть точки комплексныя (см. ниже),—случай, ускользающій у Бурместера [1]) отъ чисто геометрическаго построенія.

Итакъ, возвращаясь къ разсматриваемому нами случаю допустимъ, что коллинеарное соотвѣтствіе между u и u' опредѣлено четырьмя парами соотвѣтственныхъ въ $f=o$ точекъ aa', bb', cc', dd', i—плоскость плоскостей u,u' проходитъ черезъ точки:

$D=(abc',\ ab'c,\ a'bc)$;i''—плоскость черезъ $(a'b'c,\ a'bc',\ ab'c')$,
$C=(bda',\ bd'a,\ b'da)$; — $(b'd'a,\ b'da',\ bd'a')$,
$B=(cad',\ ca'd,\ c'ad)$; — $(c'a'd,\ c'ad',\ ca'd')$,
$A=(bcd',\ bc'd,\ b'cd)$; — $(b'c'd,\ b'cd',\ bc'd')$.

Два пятиугольника $abcde$, $a'b'c'd'e'$ даютъ 10 паръ гомологичныхъ въ коллинеаціи плоскостей abc и $a'b'c'$ и т. д., и слѣдовательно опредѣляютъ 10 i—плоскостей, которыя по шести проходятъ черезъ пять точекъ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$, образующихъ третій пятиугольникъ, *i—пятиугольникъ* двухъ первыхъ $abcde$, $a'b'c'd'e'$. Дѣйствительно, если $f(x,u)=o$ есть коллинеація

---

[1]) *L. Burmester.* Kinematisch-geometrische Untersuchungen der Bewegung gesetzmässig-veränderlicher Systeme. 3-te Mitteilung. Schlömisch's Zeitschrift B. XXXIII s. 381—422. Здѣсь n° B.

$[abcde, a'b'c'd'e']$, то коллинеація $k(x,u) \equiv f(x,u) - iu_x = o$ подчиняетъ $abcde$ пятиугольникъ $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, ибо какъ изъ α такъ и изъ β и изъ γ точечная плоскость $a'b'c'$ проектируется на abc во вписанное положеніе треугольниковъ и слѣдовательно $\alpha\beta\gamma$ есть i—плоскость для abc, $a'b'c'$ и т. д. Это можно формулировать еще такъ: *если построимъ два соотвѣтственныхъ пятиугольника* $abcde$, *и* $a'b'c'd'e'$ *и коллинеацію* $[abcde, a'b'c'd'e']$ означимъ $f(x,u) = o$, то коллинеація $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon, abcde]$ опредѣлится уравненіемъ $k(x,u) \equiv f(x,u) - iu_x = o$.

§ 22. Мы разсматривали до сихъ поръ формы только съ однимъ рядомъ точечныхъ и съ однимъ рядомъ плоскостныхъ координатъ. Хотя по доказанному Клебшемъ къ такимъ формамъ могутъ быть сведены формы съ двумя и болѣе рядами координатъ одного рода, но такъ какъ насъ интересуетъ геометрическое значеніе формъ, то мы остановимся еще на разсмотрѣніи слѣдующей задачи, приводящей къ подобнымъ формамъ. Въ статьѣ Ueber Covarianten ebener Collineationen (Math. Ann. B. XL s. 89—98) Muth изучаетъ свойства коваріантной $f(x,u) = o$ сѣти коническихъ сѣченій, которыя получаются, какъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ x, что прямая, соединяющая x съ данною точкою ξ, проходитъ черезъ точку x', соотвѣтствующую x въ коллинеаціи $f = o$. Уравненіе этого геометрическаго мѣста получается исключеніемъ $u_1 u_2 u_3$ изъ уравненій $u_\xi = o$, $u_x = o$, $f(x,u) = o$, (α) и будетъ $a_x(\xi x \alpha) = o$. Переходя отъ битернарной формы $f(x,u)$ къ бикватернарной, замѣтимъ, что предыдущихъ уравненій недостаточно для исключенія $u_1 u_2 u_3 u_4$, а нужно видоизмѣнять условія задачи Мута. Это возможно нѣсколькими способами.

Прежде всего, самая задача Мута: найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ x, что прямая, проходящая черезъ x и соотвѣтствующую ей въ коллинеаціи точку x', проходитъ черезъ данную точку ξ.

Задача эта рѣшается такъ: прямая p опредѣляемая координатами

$$p_{ik} = x_i x'_k - x_k x_i = a_x (x_i x_k)$$

должна проходить черезъ точку ξ,—для этого должны быть выполнены условія

$$(xpp)_1 = o, \ (xpp)_2 = o,$$

или симметричнѣе должны быть нулями всѣ миноры матрицы

$$\left\|\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{matrix}\right\| = o \text{ или } a_x \left\|\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_8 & \alpha_4 \end{matrix}\right\| = o,$$

что сокращенно можемъ писать

$$\left\|\begin{matrix} \xi \\ x \\ x' \end{matrix}\right\| \equiv \left\|\begin{matrix} \xi \\ x \\ \alpha \end{matrix}\right\| a_x = o. \qquad (27)$$

Эти уравненія опредѣляютъ кривую четвертаго порядка-основаніе пучка поверхностей второй степени, выражаемыхъ уравненіемъ $a_x(\xi x \alpha \omega) = o$, гдѣ ω—произвольныя постоянныя. Кривая проходитъ черезъ точку ξ, а также черезъ точку ξ^{-1}, которую коллинеація $f(x,u) = o$ переводитъ въ точку ξ; — ибо тогда (27) обращаются тожественно въ нуль, такъ какъ содержатъ по двѣ одинаковыхъ строки. Посмотримъ встрѣчаетъ ли прямая $\xi^{-1}\xi$ кривую еще въ другихъ точкахъ. Для этого подставимъ вмѣсто x_i величины $\mu\xi_i + \lambda\xi_i^{-1}$, координаты какой-либо третьей точки прямой, и посмотримъ, возможно ли дать λ и μ такія значенія, чтобы точка $\mu\xi + \lambda\xi^{-1}$ принадлежала кривой. Имѣемъ

$$\left\|\begin{matrix} \xi \\ \mu\xi + \lambda\xi^{-1} \\ \mu\xi' + \lambda\xi \end{matrix}\right\| \equiv \mu^2 \left\|\begin{matrix} \xi \\ \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\| + \lambda\mu \left[\left\|\begin{matrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} \xi \\ \xi^{-1} \\ \xi' \end{matrix}\right\|\right] + \lambda^2 \left\|\begin{matrix} \xi \\ \xi^{-1} \\ \xi \end{matrix}\right\| = o$$

уравненія эти приводятся къ

$$\lambda\mu \left\|\begin{matrix} \xi^{-1} \\ \xi \\ \xi' \end{matrix}\right\| = o$$

Такимъ образомъ, если три точки ξ^{-1}, ξ и ξ' не лежатъ на одной прямой, то единственныя точки $\xi^{-1}\xi$ лежащія на кривой 4-го порядка суть $\xi^{-1}(\lambda = o)$ и $\xi(\mu = o)$. Если же всѣ три точки $\xi^{-1}\xi, \xi'$ лежатъ на одной прямой, то и всякая точка $\xi^{(\lambda)}$ лежитъ на той же прямой; каждая точка этой прямой принадлежитъ тогда разсматриваемому геометрическому мѣсту.

Всѣ траэкторіи будутъ прямыя, и въ этомъ только случаѣ кривая четвертой степени приводится къ четырежды считаемой прямой $(\xi\xi')$.

Возьмемъ теперь какую-нибудь точку x разсматриваемой кривой, соотвѣтствующей данной ξ. Каждая третья точка прямой $x\xi$ имѣетъ своими координатами $\lambda x_i + \mu\xi_i$. Чтобы она принадлежала кривой, должно быть

$$o = \begin{Vmatrix} \xi \\ \lambda x + \mu\xi \\ \lambda x' + \mu\xi' \end{Vmatrix} = \mu^2 \begin{Vmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi' \end{Vmatrix} + \lambda\mu \left[\begin{Vmatrix} \xi \\ \xi \\ x' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \xi \\ x \\ \xi' \end{Vmatrix} \right] + \lambda^2 \begin{Vmatrix} \xi \\ x \\ x' \end{Vmatrix}$$

Такъ какъ по условію x лежитъ на кривой, то

$$\begin{Vmatrix} \xi \\ x \\ x' \end{Vmatrix} = o$$

и предыдущее выраженіе сводится къ такому

$$\lambda\mu \begin{Vmatrix} \xi \\ x \\ \xi' \end{Vmatrix} = o,$$

которое показываетъ, что *если прямая* ξx (гдѣ ξ данная точка и лежитъ на кривой, x точка кривой) *проходитъ черезъ точку* ξ', *соотвѣтствующую* ξ *въ коннексѣ* $f = o$, *то эта прямая вся входитъ въ составъ кривой*; *вообще же только двѣ эти точки* ξ *и* x *прямой* $x\xi$ *принадлежатъ геометрическому мѣсту*. Уравненіе

$$\begin{Vmatrix} \xi \\ x \\ \xi' \end{Vmatrix} = o$$

выражаютъ также условія, чтобы прямая $\xi\xi'$ встрѣчала точку x, которая нами взята на кривой. Это приводитъ насъ къ вопросу, встрѣчаетъ ли $\xi\xi$, помянутую кривую (означимъ ее $C^4\xi(f)$) въ другой точкѣ, кромѣ точки ξ. Для этого подставляемъ $x_i = \lambda\xi_i + \mu\xi'_i$ и $x'_i = \lambda\xi'_i + \mu\xi_i''$, и будемъ имѣть:

$$o = \left\| \begin{matrix} \xi \\ \lambda\xi + \mu\xi' \\ \lambda\xi' + \mu\xi'' \end{matrix} \right\| = \lambda^2 \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi \\ \xi' \end{matrix} \right\| + \lambda\mu \left\{ \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi \\ \xi'' \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi' \\ \xi' \end{matrix} \right\| \right\} + \mu^2 \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi' \\ \xi'' \end{matrix} \right\| \equiv \mu^2 \left\| \begin{matrix} \xi \\ \xi' \\ \xi'' \end{matrix} \right\|$$

Такимъ образомъ, если отбросить упомянутый уже выше исключительный случай, прямая $\xi\xi'$ кривой $C_\xi{}^4(f)$ въ точкѣ, отличной отъ ξ, не встрѣчаетъ и при томъ касается ея въ этой точкѣ.

Система кривыхъ $C_\xi{}^4(f)$ состоитъ изъ ∞^3 кривыхъ, ибо каждой точкѣ ξ пространства принадлежитъ совершенно опредѣленная кривая системы. Возьмемъ какую-нибудь кривую $C_\xi{}^4(f)$ и на ней двѣ точки a и b; прямыя aa' и bb' пересѣкаются въ точкѣ ξ, слѣдовательно прямыя ab' и ba' также пересѣкаются, — пусть въ точкѣ p. Соотвѣтственная кривая $C_p{}^4(f)$ можетъ быть представлена

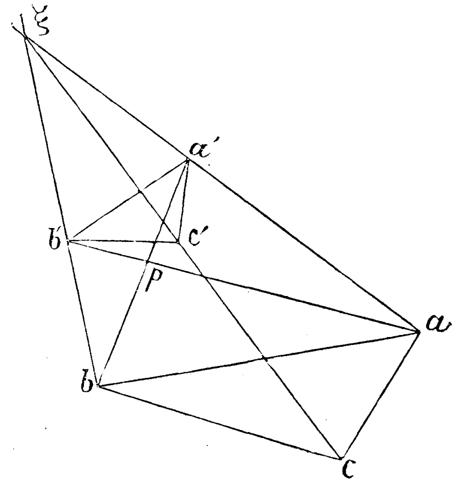
$$\lambda \left\| \begin{matrix} a' \\ x \\ x' \end{matrix} \right\| + \rho \left\| \begin{matrix} b \\ x \\ x' \end{matrix} \right\| = o; \quad \mu \left| \begin{matrix} a \\ x \\ x' \end{matrix} \right| + \nu \left| \begin{matrix} b' \\ x \\ x' \end{matrix} \right| = o,$$

т. е. если построимъ

$$C_a{}^4(f),\ C_{a'}{}^4(f),\ C_b{}^4(f),\ C_{b'}{}^4(f),$$

то $C_p{}^4(f)$ принадлежитъ одновременно двумъ системамъ ∞^1 кривыхъ

$$C^4{}_{\lambda a'+\rho b}(f) = o \text{ и } C^4{}_{\mu a+\nu b'}(f) = o.$$



Возьмемъ какія-нибудь три точки a,b,c на одной и той же кривой $C^4{}_\xi(f)$. Треугольникъ, ими образуемый, расположенъ перспективно относительно соотвѣтствующаго ему въ коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ $f=o$, треугольника $a'b'c'$, и центръ перспективы лежитъ на той же кривой $C_\xi{}^4(f)$ именно въ точкѣ ξ. И обратно, если какой нибудь треугольникъ a,b,c и ему соотвѣтственный въ коллинеаціи $f=o$ $a'b'c'$, перспективны, то центръ коллинеаціи ξ и самый треугольникъ abc лежатъ на кривой $C^4\xi(f)$, соотвѣтствующей точкѣ ξ.

Можно поставить себѣ далѣе вопросъ о тѣхъ точкахъ x, для которыхъ плоскость, содержащая точку x и данныя точки ξ и ξ' (соотвѣтств. ξ въ коллинеаціи), содержитъ и x'. Это геометрическое мѣсто получимъ, исключая $u_1 u_2 u_3 u_4$ изъ уравненій:

$$u_\xi = o,\ f(\xi,u) = o,\ u_x = o,\ f(x,u) = o$$

и будетъ поверхностью второй степени $F_\xi^2(f)$, которой уравненіе есть

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \end{vmatrix} \equiv a_x b_\xi (\alpha\beta\xi x) = o,$$

уравненіе, симметричное относительно x и ξ, что позволяетъ намъ сказать: *если поверхность* $F_\xi^2(f)$, *соотвѣтствующая точкѣ* ξ, *проходитъ черезъ точку* x, *то поверхность* $F_x^2(f)$, *соотвѣтствующая точкѣ* x, *проходитъ черезъ точку* ξ.

Не трудно убѣдиться далѣе, что поверхности $F_\xi^2(f)$ и $F_\xi^2(g)$ тожественны.

Дѣйствительно, если коннексъ $f=o$ возьмемъ въ каноническомъ видѣ, то первая будетъ имѣть своимъ уравненіемъ

$$\begin{vmatrix} \xi_i \\ \varkappa_i \xi_i \\ x_i \\ \varkappa_i x_i \end{vmatrix} = o,$$

а вторая

$$o = \begin{vmatrix} \xi_i \\ \dfrac{\xi_i}{\varkappa_i} \\ x_i \\ \dfrac{x_i}{\varkappa_i} \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4} \begin{vmatrix} \varkappa_i \xi_i \\ \xi_i \\ \varkappa_i x_i \\ x_i \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \xi_i \\ \varkappa_i \xi_i \\ x_i \\ \varkappa_i x_i \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{i'''} = \frac{1}{i'''} F_\xi^2(g).$$

Подобнымъ образомъ убѣдимся, что вообще $F_\xi^2(f_h)$ тожественна съ $F_\xi^2(g_h)$.

Поверхность $F_\xi^2(f)$ содержитъ точки ξ, ξ' а также ξ^{-1}.

Соотвѣтственно всѣмъ точкамъ ξ пространства получаемъ поверхности $F_\xi^2(f)$, совокупность коихъ образуетъ систему ∞^3 поверхностей. Исключеніе составляютъ вершины основного тетраедра: для нихъ ξ и ξ' тожественны, уравненіе $F_\xi^2(f)$ обращается тожественно въ нуль, и поверхности $F_\xi^2(f)$ для нихъ не существуетъ.

Подставляя координаты основныхъ точекъ—вершинъ основного тетраедра вмѣсто x, будемъ въ уравненіи $(\xi\xi' xx')=o$ имѣть двѣ строки равныхъ, и слѣдовательно, какова бы ни была точка ξ, соотвѣтствующая ей поверхность $F_\xi^2(f)$ проходитъ черезъ вершины основного тетраедра коннекса $f=o$.

Наконецъ самъ Мутъ въ заключеніи своей цитированной выше статьи указываетъ на третью задачу, которую можно разсматривать, какъ распространеніе его задачи на пространство; именно, онъ задается вопросомъ о геометрическомъ мѣстѣ такихъ точекъ x, что плоскость, проходящая черезъ данную точку ξ, черезъ x и x', содержитъ и точку x''. Это приводитъ насъ къ поверхности третьяго порядка, уравненіе которой напишется

$$a_x b_x c_\beta(\alpha\gamma\xi x)=o$$

и которая проходитъ, очевидно, черезъ точку ξ и черезъ точки ξ^{-1} и ξ^{-2}.

Обратно геометрическое мѣсто такихъ точекъ x, что плоскость $\xi\xi' x$ содержитъ и ξ'', образуетъ плоскость $(\xi\xi'\xi'')$:

$$a_\xi b_\xi c_\beta\ (\alpha\gamma\xi x)=o.$$

Исходя изъ двойственнаго представленія получимъ аналогичнымъ образомъ развертывающуюся поверхность

$$\begin{vmatrix} w \\ u \\ u' \end{vmatrix} = o, \equiv u_\alpha \begin{vmatrix} w \\ u \\ a \end{vmatrix}$$

какъ огибающую плоскостей u, которыя пересѣкаются съ соотвѣтствующими имъ плоскостями u' по прямымъ, лежащимъ въ плоскости w.

Далѣе, огибающая плоскостей u, обладающихъ тѣмъ свойствомъ, что u,u' пересѣкаются по прямой, встрѣчающей прямую пересѣченія данной плоскости w и ей соотвѣтствующей въ коннексѣ w', выразится помощью уравненія:

$$(abuw)u_\alpha w_\beta = o$$

это поверхность второго класса, которая касается плоскости w.

Огибающая плоскостей u, для которыхъ точка пересѣченія плоскостей u,u',u'' лежитъ въ данной плоскости v, есть поверхность третьяго класса касающихся плоскостей $u^{(-1)}$, $u^{(-2)}$ и u:

$$u_\alpha u_\beta b_\gamma(acvu) = o$$

Огибающая плоскостей u, для которыхъ точка (w,w',u) лежитъ въ плоскости w'', есть точка пересѣченія плоскостей w,w',w''.

Такимъ образомъ мы получили пространственные аналоги той сѣти коническихъ сѣченій, которыя разсматриваетъ Мутъ и которыя встрѣчаются и въ Механикѣ—въ изслѣдованіяхъ Бурместера по кинематикѣ коллинеарно-измѣняемой системы.

§ 23. Обращаемся ко второй группѣ коваріантныхъ образованій билинейной формы $f(x,u)$, которыя содержатъ, кромѣ точечныхъ и плоскостныхъ координатъ, и рядъ координатъ прямой. Возьмемъ прежде всего самую форму $f(x.u)$ и примѣнимъ къ ней операціи второй группы. Операція II. 1. даетъ форму $a_x b_x\,(\alpha\beta pp)$, которая обращается тожественно въ нуль, ибо мѣняетъ знакъ при обмѣнѣ a и b; по той же причинѣ исчезаетъ и форма $u_\alpha u_\beta\,(ba\pi\pi)$ получаемая помощью II.3. Операція II 2 даетъ форму $a_x\,(axpp)$, которую мы означимъ $\chi(x,p)$; двойственная операція II.4 доставитъ $u_\alpha(au\pi\pi)$ которую означимъ $\xi(u,\pi)$. Одновременное примѣненіе двухъ послѣднихъ операцій приводитъ къ формѣ $(au\pi\pi)(axpp)$, которую означимъ $\omega(x.p,u)$ и наконецъ одновременное примѣненіе II.1 и II.3 приводитъ къ формѣ $(ab\pi\pi)(\alpha\beta pp) = T(p)$. Если вмѣсто f возьмемъ форму f_1, то получимъ $a_x b_\alpha(\beta xpp) = \chi_1(x.p)$ вмѣсто $\chi(x,p)$; вмѣсто $\xi\,(u,\pi)$ будемъ имѣть $\xi_1(u,\pi) = u_\alpha a_\beta(bu\pi\pi)$, вмѣсто $\omega(x.p,u)$ получится $b_\alpha(au\pi\pi)(\beta xpp) = \omega_1(x.p,u)$ и вмѣсто $T(p)—(ab\pi\pi)(\gamma\delta pp)c_\alpha d_\beta = T_1(p)$ и т. д.

Вообще форма f_h приведетъ насъ къ коваріантамъ $\chi_h(x,p)$, $\xi_h(u,\pi)$, $\omega_h(x,p,u)$ и $T_h(p)$. Между ними можемъ установить соотношенія, аналогичныя тѣмъ, которыя связываютъ между собою f_h. Для этого замѣтимъ, что χ_h получаются изъ f_h помощью процесса $\sum\limits_j^{1.4} (xpp)_j \frac{d}{du_j}$, и что процессъ этотъ въ примѣненіи къ u_x даетъ въ результатѣ тожественно нуль. Примѣняя поэтому операцію къ тожеству (9) § 21, будемъ имѣть

$$\chi_3 = i\chi_2 - i'\chi_1 + i''\chi,$$

и вообще изъ (10)

$$\chi_{h+3} = i\chi_{h+2} - i'\chi_{h+1} + i''\chi_h.$$

Подобнымъ образомъ $\xi_h(u,\pi)$ получается изъ $f_h(x,u)$ помощью операціи $\Sigma(u\pi\pi)_i\frac{d}{dx_i}$, которыя въ примѣненіи къ u_x даетъ въ результатѣ 0.

Примѣняя къ (9) § 21 получимъ

$$\xi_3 = i.\xi_2 - i'.\xi_1 + i''.\xi$$

и вообще изъ (10)

$$\xi_{h+3} = i.\xi_{h+2} - i'.\xi_{h+1} + i''\xi_h.$$

Такимъ образомъ всѣ формы χ_h выражаются помощью трехъ изъ нихъ χ, χ_1 и χ_2 и всѣ ξ_h помощью ξ, ξ_1 и ξ_2.

Точно также форму ω можно получить изъ f помощью процесса

$$\Sigma(xpp)_k(u\pi\pi)_i \frac{d_i}{dx_i du_k}$$

который въ примѣненіи къ u_x даетъ въ результатѣ 0, и слѣдовательно примѣненный къ (9) и (10) § 21 даетъ

$$\omega_3 = i\omega_2 - i'\omega_1 + i''\omega$$

и вообще

$$\omega_{h+3} = i\omega_{h+2} - i'\omega_{h+1} + i''\omega_h.$$

Не трудно на самомъ дѣлѣ убѣдиться, что

$$\Sigma(u\pi\pi)_i(xpp)_k\frac{d^2 \cdot u_x}{dx_i du_k} = o.$$

Дѣйствительно, коэффиціенты при $x_i u_k$ уничтожаются тожественно, а коэффиціентъ при $x_k u_k$ есть не что иное какъ

$$\Sigma p_{ik}\pi_{ik} \equiv 2(p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23})$$

и равенъ поэтому нулю въ силу самаго опредѣленія величинъ p_{ik}.

Чтобы вывести зависимость между формами $T_1 T_1 \ldots T_h$, мы уже не можемъ воспользоваться формулами (9) и (10), и прибѣгнемъ къ приведенію коннекса f къ каноническому виду. Теперь же остановимся еще на операціяхъ II 5—8. Въ примѣненіи къ формамъ χ, ξ, ω онѣ даютъ въ результатѣ 0, и только форма T, подвергнутая этимъ операціямъ, приводитъ къ двумъ новымъ формамъ

$$(ab\pi\pi)(\alpha\beta\gamma x)c_x \text{ и } (abcu)(\alpha\beta pp)u_\gamma$$

(остальныя двѣ формы $(ab\pi\pi)(\alpha\beta\gamma\delta)c_x d_x$ и $(abcd)(\alpha\beta pp)u_\gamma u_\delta$ обращаются тожественно въ 0).

Обращаемся къ геометрическому истолкованію полученныхъ коваріантовъ и прежде всего къ формамъ T_h. Возьмемъ сначала простѣйшую изъ нихъ T. Приравненная нулю эта форма изображаетъ коваріантный коннексу (1,1) комплексъ 2. ранга. Если форма $f(x,u)$ приведена къ каноническому виду, то T, которой выраженіе въ развернутомъ видѣ представится

$$\sum_{i,k,j,l}^{1.4}(a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj})p_{ik}\pi_{jl} = o,$$

приводится къ суммѣ трехъ членовъ

$$(x_3 x_4 + x_1 x_2)p_{12}p_{34} + (x_1 x_3 + x_2 x_4)p_{13}p_{42} + (x_1 x_4 + x_2 x_3)p_{14}p_{23} = o$$

Съ помощью тожества

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=o$$

это уравненіе можетъ быть приведено къ одному изъ трехъ эквивалентныхъ видовъ:

$$(\varkappa_3-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_2)p_{12}p_{34}+(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_1-\varkappa_2)p_{13}p_{42}=o$$
$$(\varkappa_4-\varkappa_1)(\varkappa_3-\varkappa_2)p_{12}p_{34}+(\varkappa_4-\varkappa_3)(\varkappa_1-\varkappa_2)p_{14}p_{23}=o$$
$$(\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_2)p_{13}p_{42}+(\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_4-\varkappa_2)p_{14}p_{23}=o$$

Замѣчая далѣе, что для прямой, соединяющей точку x съ гомологичною ей точкою $x'(x'_i=\varkappa_i x_i)$, будемъ имѣть, что p_{ik} пропорціонально $(\varkappa_i-\varkappa_k)x_i x_k$, и слѣдовательно, напр.,

$$p_{12}p_{34}=(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_3-\varkappa_4)x_1x_2x_3x_4, \qquad (a)$$

а

$$p_{13}p_{42}=(\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_3-\varkappa_2)x_1x_2x_3x_4 \qquad (b)$$

Если подставить эти значенія ихъ въ предыдущее уравненіе, то оно удовлетворится, или лучше раздѣляя (a) на (b) и избавляясь отъ знаменателя, получимъ не что иное, какъ это уравненіе. Такимъ образомъ *$T=o$ есть комплексъ 2-го ранга, образуемый лучами, соединяющими точки пространства съ соотвѣтствующими имъ въ коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ $f(x,u)=o$.* Такъ какъ уравненіе T совершенно симметрично относительно p и π, ab и $\alpha\beta$, то можно непосредственно заключить, что *$T=o$ есть въ тоже время совокупность прямыхъ пересѣченія соотвѣтственныхъ плоскостей u,u'.*

Мы взяли для доказательства предыдущей теоремы коннексъ, приведенный къ каноническому виду; но не трудно и въ общемъ видѣ убѣдиться, что каждая прямая пересѣченія двухъ соотвѣтственныхъ плоскостей u', принадлежитъ комплексу T. Дѣйствительно такая прямая имѣетъ своими аксіальными координатами величины

$$\sigma.\pi_{ik}=u_\gamma(u_i c_k-u_k c_i) \qquad (i,k=1,2,3,5).$$

Если эти значенія подставимъ въ уравненіе $T=o$, при чемъ въ множитель $(ab\pi\pi)$ подставимъ $\sigma\pi_{ik}=u_\gamma(c_k u_i)$, а въ множитель $(\alpha\beta pp) = \Sigma(\alpha_i\beta_k)\pi_{ik} \ldots . \sigma\pi_{ik} = u_\delta(d_k u_i)$, то получимъ въ результатѣ

$$u_\gamma u_\delta(abcu).\Sigma(\alpha_i\beta_k - \alpha_k\beta_i)(u_i d_k - u_k d_i) \equiv u_\gamma u_\delta(abcu)(u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha)$$

Каждый изъ двухъ получаемыхъ такимъ образомъ опредѣлителей обращается тожественно въ нуль,—дѣйствительно первый членъ

$$u_\gamma u_\delta(abcu)u_\alpha d_\beta = \begin{vmatrix} \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \\ \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} \equiv o$$

ибо содержитъ двѣ тожественныхъ строки—1-ю и 3-ью; точно также

$$u_\gamma u_\delta(abcu)u_\beta d_\alpha = \begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \frac{df_1}{dx_3} & \frac{df_1}{dx_4} \\ \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \frac{df}{dx_3} & \frac{df}{dx_4} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} \equiv o,$$

ибо тожественны строки 2-я и 3-ья

Наконецъ, комплексъ T представляетъ собою совокупность прямыхъ p, пересѣкающихся съ соотвѣтствующими имъ въ коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ $f=o$. Дѣйствительно, прямая p', соотвѣтствующая p,—опредѣленной точками x,y—такъ что $\varrho p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$,—имѣетъ своими координатами $\varrho p'_{ik} = x'_i y'_k - x'_k y'_i$, или если коннексъ $f=o$ взять въ каноническомъ видѣ $\varrho p'_{ik} = \varkappa_i \varkappa_k (x_i y_k - x_k y_i) = \varrho.\varkappa_i \varkappa_k p_{ik}$. Условіе, чтобы прямыя p и p' пересѣкались, состоитъ въ томъ, чтобы обращалось въ нуль выраженіе

$$\sum_{i,k}^{1,4} \frac{dP}{dp_{ik}} p'_{ik} = p_{12}p'_{34} + p_{34}p'_{12} + p_{13}p'_{42} + p_{42}p'_{13} + p_{14}p'_{23} + p_{23}p'_{14}$$

гдѣ $P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23}$, что означаетъ уничтоженіе момента двухъ прямыхъ между собою. Въ настоящемъ случаѣ при подстановкѣ $p'_{ik} = \varkappa_i \varkappa_k p_{ik}$ это условіе принимаетъ видъ

$$p_{12}p_{34}(\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_3\varkappa_4) + p_{13}p_{42}(\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_4\varkappa_2) + p_{14}p_{23}(\varkappa_1\varkappa_4 + \varkappa_2\varkappa_3) + 0,$$

т. е. выражаетъ, что p принадлежитъ комплексу T.

Этотъ комплексъ, образуемый двумя коллинеарными пространствами, впервые изученъ болѣе подробно Reye въ его Geometrie d. Lage (1-te Aufl. 1868), почему и называется нѣкоторыми авторами [1]) Рейевымъ комплексомъ, хотя, какъ замѣчаетъ Клейнъ (Comptes Rendus T. 70 p. 1222), эта конфигурація была замѣчена еще ранѣе, особенно Chasles'емъ въ его Aperçu historique. Этому комплексу придается также названіе тетраедральнаго, потому что его „поверхность особенностей" (Singularitäten—или singuläre Fläche) распадается на четыре плоскости—грани основного тетраедра коллинеаціи,—которыя, какъ показываетъ приведенное къ наипростѣйшему виду уравненіе $T=o$, пересѣкаются каждою прямою комплекса въ четырехъ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ постоянно.

Въ своей замѣткѣ Ueber die Plücker'schen Complexe (Math. Ann. B. II p. 1—8) Клебшъ опредѣляетъ особенную поверхность комплекса 2-го порядка [2]), какъ геометрическое мѣсто точекъ, соотвѣтствующіе которымъ конусы комплекса распадаются на пару плоскостей.

Возьмемъ коннексъ $f(x,u)=o$ въ каноническомъ видѣ, и слѣдовательно уравненіе T въ одномъ изъ трехъ выписанныхъ выше видовъ, замѣнимъ $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ и считая за

---

[1]) Напр. S. Lie Ueb. d. Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes. Götting. Nachr. 1870 p. 55—66. *R. Sturm* D. Gebilde ersten u. Zweiten Grades der Liniengeometrie Th. I. 1892.

[2]) Для комплекса n-го порядка далъ первый опредѣленіе этой поверхности M. Пашъ въ своей диссертаціи pro venia legendi: Zur Theorie d. Complexe u. Congruenzen von Geraden. Giessen 1870.

текущія координаты величины y, будемъ искать двойную точку этой поверхности. Она опредѣляется уравненіями

$$\frac{dT}{dy_1}=o,\ \frac{dT}{dy_2}=o,\ \frac{dT}{dy_3}=o,\ \frac{dT}{dy_4}=o.$$

Если возьмемъ первое изъ трехъ выписанныхъ выше уравненій для T, то эти послѣднія уравненія по исключеніи y даютъ въ результатѣ опредѣлитель (для краткости означимъ: $(\varkappa_3-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_2)=A_3$, $(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_1-\varkappa_2)=B$).

$$\begin{vmatrix} o & Bx_3x_4 & Ax_2x_4 & (A-B)x_2x_3 \\ Bx_3x_4 & o & (A-B)x_1x_4 & Ax_1x_3 \\ Ax_2x_4 & (A-B)x_1x_4 & o & Bx_1x_2 \\ (A-B)x_2x_3 & Ax_1x_3 & Bx_1x_2 & o \end{vmatrix}$$

который равенъ тожественно нулю, ибо $T(x_iy_k-x_ky_i)=o$ изображаетъ конусъ. Чтобы этотъ конусъ обращался въ пару плоскостей, и всѣ миноры выписаннаго опредѣлителя должны обращаться въ нуль, что даетъ намъ соотношенія.

$$2AB(A-B)x_1{}^3x_2x_3x_4=o,\ 2AB(A-B)x_1{}^2x_2x_3{}^2x_4=o,$$
$$2AB(A-B)x_1{}^2x_2x_3x_4{}^2=o.$$

Лѣвыя части этихъ трехъ уравненій имѣютъ общій множитель

$$AB(A-B)x_2x_2x_3x_4\equiv\varphi$$

и такимъ образомъ мы убѣждаемся, что особенною поверхностью комплекса T является основной тетраедръ коллинеаціи $f(xu)=o$,

Если бы въ основу была положена не форма $f(x,u)$, а форма $f_1(x,u)$, т. е. если бы мы стали разсматривать совокупность прямыхъ xx'' (совпадающую съ совокупностью прямыхъ uu''), то пришли бы къ комплексу 2-го же ранга $T_1=o$: по самому образованію этой формы ясно, что поверхностью особенностей этого комплекса будетъ тотъ же основной тетраедръ. И вообще каждая коллинеація $f_h(xu)=o$ приводитъ къ комплексу $T_h=o$, тетраедральному и имѣющему особенною поверхностью основной тетраедръ коллинеаціи $f(xu)=o$, общій всѣмъ $f_h(xu)=o$.

Взаимное отношеніе этихъ комплексовъ $T_h = o$ можно представить себѣ такъ. Возьмемъ какую-нибудь плоскость u пространства, она пересѣкается плоскостью u', соотвѣтствующею ей въ коннексѣ $f = o$ по прямой $\pi_{ik} = u_i u'_k - u_k u'_i$, принадлежащей комплексу $T = o$. Плоскость u'', соотвѣтствующая u въ $f_1 = o$, пересѣкаетъ u по прямой $\pi' : \pi'_{ik} = u_i u''_k - u_k u''_i$, вообще $u^{(h)}$ пересѣкаетъ u по прямой $\pi^{(h-1)}$:

$$\pi^{(h-1)}_{ik} = u_i u^{(h)}_k - u^k u^{(h)}_i ,—$$

принадлежащей комплексу $T_h = o$, такъ какъ по уравненію

$$f_3 = i f_2 - i' f_1 + i'' f - i''' u_x$$

имѣемъ:

$$u^{\text{IV}}_j = i \,.\, u'''_j - i' u''_j + i'' u'_j - i''' u_j \,;$$

то

$$\pi'''_{jk} = i \pi''_{jk} - i' \,.\, \pi'_{jk} + i'' \,.\, \pi_{jk} \,,$$

и вообще

$$\pi^{(h)}_{jk} = i \pi^{(h-1)}_{jk} - i' \pi^{(h-2)}_{jk} + i'' \pi^{(h-3)}_{jk} \,,—$$

координаты всѣхъ прямыхъ, принадлежащихъ различнымъ T_h и лежащихъ въ плоскости u, выражаются линейно помощью координатъ прямыхъ, принадлежащихъ комплексамъ T, T_1 и T_2.

Прямая p' вообще не принадлежитъ комплексу T. Дѣйствительно, подставляя ея координаты

$$p'_{ik} = x_i x''_k - x_k x''_i = (\varkappa^2_k - \varkappa^2_i) x_i x_k \text{ въ } T = o, \text{ найдемъ:}$$

$$o = x_1 x_2 x_3 x_4 \ \ (\varkappa_1 - \varkappa_2)(\varkappa_1 - \varkappa_3)(\varkappa_1 - \varkappa_4)(\varkappa_2 - \varkappa_3)(\varkappa_2 - {}_4)(\varkappa_3 - \varkappa_4),—$$

откуда заключаемъ: 1° точки, лежащія на граняхъ основного тетраедра, и двойственно плоскости, проходящія черезъ вершины его, даютъ начало прямымъ, общимъ всѣмъ комплексамъ T_h. 2° точки, лежащія внѣ помянутыхъ граней, даютъ прямыя p', не принадлежащія T, если дискриминантъ характеристическаго уравненія K отличенъ отъ нуля; если же онъ обращается въ нуль, т. е. нѣкоторыя изъ величинъ $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4$ становятся равны между собою, то всѣ послѣдовательные тетраедральные комплексы T_h совпадаютъ между собою.

Предыдущая связь между четырьмя прямыми въ одной плоскости: π, π', π'' и π''', и двойственно между четырьмя, проходящими черезъ одну точку x:

$$p'''_{jk}=ip''_{jk}-i'p'_{jk}+i''p_{jk}$$

указываетъ уже намъ на связь между формами T, T_1, T_2 и T_3. На самомъ дѣлѣ линейно-связанными оказываются уже формы T, T_1 и T_2. Дѣйствительно

$$T=(\varkappa_3-\varkappa_1)(\varkappa_4-\varkappa_2)p_{12}p_{34}+(\varkappa_3-\varkappa_4)(\varkappa_1-\varkappa_2)p_{13}p_{42}=0$$

$$T_1=(\varkappa_3{}^2-\varkappa_1{}^2)(\varkappa_4{}^2-\varkappa_2{}^2)(p_{12}p_{34}+(\varkappa_3{}^2-\varkappa_4{}^2)(\varkappa_1{}^2-\varkappa_2{}^2)p_{13}p_{42}=0$$

$$T_2=(\varkappa_3{}^3-\varkappa_1{}^3)(\varkappa_4{}^3-\varkappa_2{}^3)(p_{12}p_{34}+(\varkappa_3{}^3-\varkappa_4{}^3)(\varkappa_1{}^3-\varkappa_2{}^3)p_{13}p_{42}=0$$

умножая три уравненія на λ, μ, ν и опредѣляя эти множители такъ, чтобы уничтожились коэффиціенты при $p_{12}p_{34}$ и $p_{13}p_{42}$, изъ уравненій:

$$(\varkappa_3-\varkappa_1)\,(\varkappa_4-\varkappa_2)\,\lambda+(\varkappa_3{}^2-\varkappa_1{}^2)\,(\varkappa_4{}^2-\varkappa_2{}^2)\,\mu$$
$$+(\varkappa_3{}^3-\varkappa_1{}^3)\,(\varkappa_4{}^3-\varkappa_2{}^3)\,\nu=0,$$
$$(\varkappa_3-\varkappa_4)\,(\varkappa_1-\varkappa_2)\,\lambda+(\varkappa_3{}^2-\varkappa_4{}^2)\,(\varkappa_1{}^2-\varkappa_2{}^2)\,\mu$$
$$+(\varkappa_3{}^3-\varkappa_4{}^3)\,(\varkappa_1{}^3-\varkappa_2{}^3)\,\nu=0,$$

получимъ

$$\lambda:\mu:\nu=ii''-i''':-i':1$$

т. е.

$$T_2=i'T_1+(i'''-ii'')\,T.$$

Замѣчая, что

$$i=[\varkappa_1],\ i=[\varkappa_1\varkappa_2],\ i''=[\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3],\ i'''=\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4$$

получимъ для коэффеціентовъ соотношенія, связывающаго T_{h+2} T_{h+1} и T_h, такія выраженія

$$\lambda_{(h)}=[\varkappa_1{}^{h+1}\varkappa_2{}^{h+1}\varkappa_3{}^{h+1}]\,.\,[\varkappa_1{}^{h+1}]-(\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3\varkappa_4)^{h+1}$$
$$=i''_h\,.\,i_h-(i''')^{h+1},\ \text{если}\ i''_h=\Sigma\varkappa_1{}^{h+1}\varkappa_2{}^{h+1}\varkappa_3{}^{h+1}$$
$$\mu_{(h)}=[\varkappa_1{}^{h+1}\varkappa_2{}^{h+1}],\ \nu=1$$

и

$$T_{h+2}=\mu_{(h)}\,T_{h+1}-\lambda_{(h}\,T.$$

Такимъ образомъ система ∞^1 коллинеацій—степеней коллинеаціи $f(x,u)=0$ приводитъ насъ къ пучку ∞^1 тетраедральныхъ комплексовъ, принадлежащихъ къ основному тетраедру коллинеацiи.

Обращаемся къ другимъ коварiантнымъ $f(x,u)$ формамъ и прежде всего къ формѣ $\chi(x,p) \equiv a_x(axpp)$. Геометрическое значенiе ея слѣдующее: *коннексъ* $[2,1]$, *получаемый приравнивая эту форму нулю, каждой точкѣ x пространства подчиняетъ спецiальный линейный комплексъ—совокупность прямыхъ p, пересѣкающихся съ прямою xx', соединяющею x съ гомологичною ей въ коллинеацiи $f(xu)=o$ точкою x'.* Дѣйствительно условiе пересѣченiя двухъ прямыхъ p и q состоитъ какъ уже было упомянуто выше въ томъ, чтобы моментъ этихъ прямыхъ былъ равенъ нулю:

$$o = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} q_{ik} \equiv \Sigma \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} p_{ik}$$

$$= p_{12}q_{34} + p_{34}q_{12} + p_{13}q_{42} + p_{42}q_{13} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14}$$

если здѣсь

$$q_{ik} = x_i x'_k - x_k x'_i = a_x(\alpha_i x_k),$$

то предыдущее выраженiе принимаетъ видъ

$$o = a_x \Sigma\ p_{12}(\alpha_3 x_4) = a_x(\alpha x p p).$$

Осью этого спецiальнаго комплекса является прямая xx'. Прямой p въ этомъ комплесѣ соотвѣтствуетъ поверхность 2-й степени, которая такъ преобразуется при коллинеарномъ преобразованiи, что прямыя, соединяющiя соотвѣтственныя точки, проходятъ черезъ одну прямую p. Поверхность эта можетъ обращаться въ конусъ для тѣхъ прямыхъ, которыя выполняютъ уравненiе

$$|\ a_i(\alpha pp)_k + a_k(\alpha pp)_i\ | = o,$$

получаемое приравнивая нулю опредѣлитель изъ элементовъ $a_i(\alpha pp)_k + a_k(\alpha pp)_i$. Если замѣтимъ, что формѣ $a_k(\alpha xpp)$, вводя вмѣсто радiальныхъ p_{ik} аксiальныя координаты π_{ik} прямой, можно придать видъ $a_x \pi_x \pi_\alpha$, то предыдущее условiе перепишется такъ:

$$\pi_\alpha \pi_1 \,.\, \pi'_\beta \pi'_2 \,.\, \pi''_\gamma \pi''_3 \,.\, \pi'''_\delta \pi'''_4 \,.\, (abcd) = o;$$

если коннексъ $f(xu)=o$ взять въ каноническомъ видѣ, то $q_{ik}=(\varkappa_i-\varkappa_k)x_i x_k$ и уравненіе $\chi(x,p)=o$ принимаетъ видъ

$$\Sigma\, p_{12}x_3x_4(\varkappa_3-\varkappa_4)=o.$$

Помянутый опредѣлитель принимаетъ теперь видъ:

$$\begin{vmatrix} o & (\varkappa_1-\varkappa_2)p_{34} & (\varkappa_1-\varkappa_3)p_{42} & (\varkappa_1-\varkappa_4)p_{23} \\ (\varkappa_1-\varkappa_2)p_{34} & o & (\varkappa_2-\varkappa_3)p_{14} & (\varkappa_4-\varkappa_2)p_{13} \\ (\varkappa_1-\varkappa_3)p_{42} & (\varkappa_2-\varkappa_3)p_{14} & o & (\varkappa_3-\varkappa_4)p_{12} \\ (\varkappa_1-\varkappa_4)p_{23} & (\varkappa_4-\varkappa_2)p_{13} & (\varkappa_3-\varkappa_4)p_{12} & o \end{vmatrix}$$

развертывая его, убѣдимся, что онъ представляетъ квадратъ формы T [1]). Итакъ: *если прямая p принадлежитъ комплексу $T=o$, то соотвѣтствующая ей въ коннексѣ $\chi(x,p)=o$ поверхность 2-го порядка вырождается въ квнусъ*; для формы $\chi_1(xp)$, получимъ точно также: *совокупность прямыхъ p встрѣ-*

---

[1]) Самый счетъ выполняется такъ: предполагая $p_{12} \gtrless o$ можемъ взять (2 ст.)$(\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_1-\varkappa_4)p_{12}+p_{13}(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_4)$(3 ст.)$+(\varkappa_1-\varkappa_2)(\varkappa_1-\varkappa_3)p_{14}$(4 ст.) вмѣсто 2-го столбца и вмѣсто третьяго (3 ст.)$+\dfrac{\varkappa_1-\varkappa_3}{\varkappa_1-\varkappa_4}\dfrac{p_{42}}{p_{23}}$ (4 ст.). Опредѣлитель обращается въ опредѣлитель 3-го порядка и $(\varkappa_1-\varkappa_4)p_{23}$ сокращается. Взявъ въ результатѣ вм. 3-го столбца (3)$+p_{12}(\varkappa_3-\varkappa_4)$, разбиваемъ на два, преобразовавъ предварительно 3-ій элементъ 1-ой строки помощью $p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{13}-o$ къ виду $T+p_{12}p_{24}(\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_2)$, (множители $\varkappa_1-\varkappa_3$ и $\varkappa_2-\varkappa_4$ вынесены).

Остается

$$\frac{1}{p_{12}}\,T\begin{vmatrix} p_{42} & (\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_1-\varkappa_4)p_{12}p_{14} \\ p_{23} & (\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_4-\varkappa_1)p_{13}p_{12} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{2}{p_{12}}\begin{vmatrix} (\varkappa_1-\varkappa_2)p_{34} & (\varkappa_1-\varkappa_2)^2(\varkappa_4-\varkappa_3)p_{13}p_{14} & p_{12}p_{34}(\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_1-\varkappa_2) \\ p_{42} & (\varkappa_1-\varkappa_3)(\varkappa_2-\varkappa_4)p_{12}p_{14} & o \\ p_{23} & (\varkappa_1-\varkappa_4)(\varkappa_3-\varkappa_2)p_{12}p_{14} & p_{12}p_{13}(\varkappa_3-\varkappa_4) \end{vmatrix}$$

Первый членъ$=T^2$, второй

$$=(\varkappa_1-\varkappa_4)^2(\varkappa_3-\varkappa_2)^2p_{12}p_{34}\cdot p_{13}p_{42}+(\varkappa_1-\varkappa_2)^2(\varkappa_3-\varkappa_4)^2p_{13}p_{42}\cdot p_{14}p_{23}$$

$+(\varkappa_1-\varkappa_3)^2(\varkappa_2-\varkappa_4)^2p_{12}p_{34}\cdot p_{14}p_{13}\equiv -4T^2$, и сумма такимъ образомъ

$=5T^2$,— съ помощью выраженій T стр. 231.

чающихъ прямую xx'' образуетъ специальный линейный комплексъ $\chi_1(x,p) = a_x b_\alpha(\beta x p p) = o$, а совокупность точекъ x, для которыхъ прямая xx'' встрѣчаетъ данную прямую p, образуетъ поверхность 2-го порядка, которая вырождается въ конусъ, если p принадлежитъ комплексу $T_1 = o$. И точно также вообще для $\chi_h(x,p) = o$.

Двойственнымъ образомъ $\xi(u,\pi) = u_\alpha(a u \pi\pi) = o$ *каждой плоскости и пространства подчиняетъ специальный линейный комплексъ, всѣ прямыя π коего встрѣчаются съ прямою пересѣченія и съ соотвѣтствующею ей въ $f = o$ плоскостью u'. Каждой прямой π пространства $\xi = o$ подчиняетъ поверхность 2-го класса, касательныя къ которой плоскости и пересѣкаются съ соотвѣтствующими имъ въ $f = o$ плоскостями u' по прямымъ, встрѣчающимъ π, и которая вырождается въ плоскую кривую второго порядка, если прямая π принадлежитъ комплексу $T = o$.* $\xi_h(u\pi) = o$ подчиняетъ u и прямыя π встрѣчающія $uu^{(h+1)}$, и прямой π поверхность 2-го класса, для касательныхъ u къ которой $uu^{(h+1)}$ встрѣчаетъ π и которыя вырождаются въ плоскую кривую, если π принадлежитъ комплексу $T = o$.

Замѣтимъ одну особенность. Такъ какъ

$$a_x(\alpha x p p) = a_x \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i (x p p)_i,$$

то при $(xpp)_i = o$ $(i = 1,2,3,4)$ уравненіе удовлетворится. Эти же четыре уравненія выражаютъ, что точка x лежитъ на прямой p. Такимъ образомъ въ коннексѣ $\chi(x,p) = o$ данной прямой соотвѣтствуетъ такая поверхность 2-ой степени, которая проходитъ черезъ прямую p; это будетъ слѣдовательно однополый гиперболоидъ или гиперболическій параболоидъ или ихъ вырожденія конусъ и пара плоскостей. Точно также

$$\xi(u,\pi) \equiv u_\alpha(a u \pi\pi) = u_\alpha \sum a_i (u\pi\pi)_i$$

удовлетворяется всякою плоскостью u, проходящею черезъ прямую π, ибо тогда $(u\pi\pi)_i = o$ $(i = 1,2,3,4)$, слѣдовательно поверхность 2-го класса есть поверхность линейчатая.

Можно иначе еще представить геометрическое значеніе $\chi(x,p)$. Возьмемъ какую нибудь прямую p. Въ главной коинциденціи коннекса $f(xu)=o$ точкѣ x пространства соотвѣтствуетъ пучекъ плоскостей u, имѣющій своею осью прямую xx''. Вообще говоря ни одна изъ плоскостей этого пучка не содержитъ прямой π. Чтобы это было возможно, необходимо, чтобы плоскость u, содержащая точку x и прямую π, содержала и точку x', т. е. должно быть одновременно

$$u_x=o,\ (u\pi\pi)_1=o,\ (u\pi\pi)_2=o \text{ и } f(x,u)=o.$$

Первыя три уравненія доставятъ $u_i=(xpp)_i$, и подставляя эти значенія u въ f и получимъ $a_x(axpp)=o$.

Совершенно подобнымъ образомъ $\xi(u,\pi)=o$ можно получить, разсматривая главную коинциденцію коннекса $f(x,u)=o$ и отыскивая точку пересѣченія данной прямой π съ прямою пересѣченія плоскостей u и u', которая является геометрическимъ мѣстомъ точекъ, соединяющихся съ u въ элементы главной коинциденціи коннекса $f(x,u)=o$.

Если возьмемъ какія нибудь точку и плоскость (x,u) и будемъ искать такую прямую p, что плоскость v, проходящая черезъ p и черезъ x, и точка y встрѣчи p и x образуютъ элементъ, принадлежащій коннексу $f(x,u)=o$ (его главной коинциденціи), то какъ мѣсто такихъ прямыхъ получимъ линейный комплексъ

$$\omega(x,p,u)\equiv(au\pi\pi)(axpp)=o.$$

Дѣйствительно, если v проходитъ черезъ x и черезъ p, то $v_i=(xpp)_i$; если y лежитъ на пересѣченіи u и π, то $y_i=(u\pi\pi)_i$, чтобы (y,v) былъ элементомъ $f=o$ должно быть $a_y v_\alpha=o$, т. е. $(au\pi\pi)(axpp)=o$. Такимъ же образомъ получимъ и значеніе формъ $\omega_1(xpu)$, и т. д. вообще $\omega_h(xpu)$.

Прямой p соотвѣтствуетъ коннексъ (1,1), который будетъ аполяренъ коннексу $f(xu)=o$, если прямая p выполняетъ условіе, что сумма произведеній коэффиціента при $x_i u_k$ въ f и $x_k u_i$ въ ω обращается въ нуль, т. е. если

$$\Sigma b_i(a\pi\pi)_i\,(app)_k\beta_k=(ab\pi\pi)(\alpha\beta pp)=o$$

т. е. если эта прямая принадлежитъ комплексу $T=o$.

Изъ формъ которыя мы получили выше намъ остается остановиться на геометрическомъ значеніи формъ

$$(ab\pi\pi)(\alpha\beta yx)c_x \text{ и } (abcu)(\alpha\beta pp)u_\gamma.$$

Чтобы получить это, замѣтимъ, что мы могли бы при составленіи формы ω предположить, что π_{ik} и p_{ik} принадлежитъ не одной и той же прямой, а двумъ различнымъ; т. е. взять произвольно точку x, плоскость u, и двѣ прямыхъ q и π; точка x и прямая q опредѣляютъ плоскость v: $v_i = (xqq)_i$; точно также u пересѣкается съ прямою π въ точкѣ $y : y_i = (u\pi\pi)_i$; чтобы элементъ (y,v) принадлежалъ коннексу $f=o$, т. е. v проходила черезъ точку y', и y лежала въ плоскости u' должно быть

$$(au\pi\pi)(\alpha xqq) = o.$$

Представимъ себѣ теперь, что ищемъ условіе аполярности этого коннекса (1,1) по отношенію къ $f=o$: оно будетъ

$$(au\pi\pi)(\alpha\beta qq) = o,$$

гдѣ π и q двѣ произвольно заданныхъ прямыхъ. Возьмемъ за q прямую, соединяющую точку x съ точкою x': $q_{ik} = c_x(\gamma_i x_k)$. Предыдущее условіе приметъ тогда видъ

$$(ab\pi\pi)(\alpha\beta\gamma x)c_x = o$$

наоборотъ если за π возьмемъ прямую uu' и вмѣсто q напишемъ p, то будемъ имѣть

$$u_\gamma(abcu)(\alpha\beta pp) = o.$$

§ 23. **Вырожденныя и особенныя коллинеаціи.** Только при вещественности всѣхъ корней уравненія (17) переходъ къ каноническому виду совершается помощью вещественныхъ преобразованій. Неудобство имѣть координатнымъ тетраедромъ такой, котораго элементы не всѣ вещественны, заставляетъ приводить уравненіе коннекса (1,1) къ иному простѣйшему виду — не каноническому. Такъ если два корня (17) комплексно сопряженны: $\varkappa_3 = a + b\sqrt{-1}$, $\varkappa_4 = a - b\sqrt{-1}$, то основной тетраедръ имѣетъ двѣ вещественныхъ вершины и двѣ вещественныхъ грани и два вещественныхъ ребра — соединяющее вещественныя вершины и пересѣченіе вещественныхъ граней. Простѣйшій видъ, къ которому можно привести уравненіе коннекса вещественнымъ преобразованіемъ, есть

$$\varkappa_1 x_1 u_1 + \varkappa_2 x_2 u_2 + a_{43} x_4 u_3 + (a_{34} x_3 + a_{44} x_4) u_4 = o.$$

Если наконецъ всѣ корни комплексны, то вещественныхъ элементовъ въ основномъ тетраедрѣ остается только два ребра, принимая которыя за противоположныя ребра координатнаго тетраедра можемъ привести уравненіе коннекса къ виду

$$a_{21}x_2u_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)u_2 + a_{43}x_4u_3 + (a_{34}x_3 + a_{44}x_4)u_4 = o$$

Если характеристическое уравненіе (17) имѣетъ кратные корни, то соотвѣтственныя коллинеаціи являются особенными. Возможны слѣдующіе случаи:

1° [211] по Сегре [1]). Два корня (17) равны между собою: $\varkappa_4 = \varkappa_1$. Двѣ вершины основного тетраедра сливаются, и остаются три вершины и три грани. Слѣдуя методу Клебша (Ueb. biternäre Formen etc. M. An. I), приметъ за вершины координатнаго тетраедра три вершины основного и точку прямой пересѣченія двухъ основныхъ плоскостей; при надлежащемъ выборѣ ея уравненіе коннекса принимаетъ видъ:

$$\varkappa_1(x_1u_1 + x_4u_4) + \varkappa_2x_2u_2 + \varkappa_3x_3u_3 + ax_1u_4 = o;$$

независимыхъ между инваріантами i, i_1, i_2, i_3 только три — ихъ связываетъ соотношеніе: дискриминантъ (17) равенъ нулю:

$$[9ii'i''-27i^2i'''-27i''^2-2i'^3+72i'i''']^2-4(12i'''-3ii''+i'^2)^3=o$$

форма

$$f\lambda = \varkappa_1^{\lambda+1}(u_1x_1 + u_4x_4) + \varkappa_2^{\lambda+1}u_2x_2 + \varkappa_3^{\lambda+1}u_3x_3 + (\lambda+1)a\varkappa_1^{\lambda}u_4x_1$$

показываетъ, что послѣ λ такихъ преобразованій точка x переходитъ въ точку Y:

$$\varrho Y_i = \varkappa_i^{\lambda}x_i \ (i=1,2,3), \quad \varrho Y_4 = \lambda a\varkappa_1^{\lambda-1}x_1 + \varkappa_1^{\lambda}x_4,$$

такъ что уравненія траэкторій принимаютъ видъ:

$$\frac{1}{C}x_1^{k_1-k_2}x_2^{k_2-k_1} = \frac{1}{C_1}x_2^{k_2-k_3}x_3^{k_3-k_2} = \frac{1}{C_2}e^{-\frac{\varkappa_1}{a}\frac{x_4}{x_1}}$$

---

1) Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie etc. n° 20. (Atti Ac. Lincei (3) XIX, 1884).

Если же $a=o$, то $x_1=C_2x_4$,

$$\frac{1}{C}x_1^{k_1-k_2}x_2^{k_2-k_1}=\frac{1}{C_1}x_2^{k_2-k_3}x_3^{k_3-k_2}$$

то всѣ траэкторіи суть кривыя плоскія и лежатъ въ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ ребро $x_1=o$, $x_4=o$ основного тетраедра.

2°. [31] Три корня (17) равны между собою: $\varkappa_2=\varkappa_3=\varkappa_4$. Можно найти только двѣ различныхъ линейныхъ комбинацій, которыя воспроизводятся при этомъ коллинеарномъ преобразованіи. Уравненіе коннекса приводится къ виду

$$f\equiv\varkappa_1X_1U_1+\varkappa_2(X_2U_2+X_3U_3+X_4U_4)+bX_2U_3+cX_3U_4$$

$$\therefore f\lambda=\varkappa_1{}^\lambda X_1U_1+\varkappa_2{}^\lambda(X_2U_2+X_3U_3+X_4U_4)+\lambda b\varkappa_2{}^{\lambda-1}X_2U_3+$$

$$\lambda c\varkappa_2{}^{\lambda-1}X_3U_4+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}bc\varkappa_2{}^{\lambda-2}X_2U_4$$

Уравненія траэкторій при b и c отличныхъ отъ нуля будутъ поэтому

$$\frac{1}{C_1}\frac{1}{\varkappa_1-\varkappa_2}\log\frac{X_1}{X_2}=\frac{\varkappa_2}{b}\left[\frac{X_3}{X_2}-C_2\right]=\left[\left(\frac{X_3}{X_2}\right)^2-2\frac{b}{c}\frac{X_4}{X_2}-C_3\right]\frac{\varkappa_2{}^2}{b^2}$$

всѣ эти кривыя лежатъ на поверхностяхъ второго порядка; двойственно траэкторіи - развертывающіяся касаются поверхности второго класса.

$$\text{Если } b=o,\ c\gtrless o,\ X_3=C_2X_2,\ \frac{\varkappa_2}{c}\left(\frac{X_4}{X_3}-C.\right)=$$

$$\frac{\log\frac{X_1}{X_2}-C_1}{k_2-k_1}$$

всѣ траэкторіи суть кривыя плоскія. Если и $c=o$, траэкторіи суть прямыя:

$$\frac{X_2}{C_2}=\frac{X_3}{C_3}=\frac{X_4}{C_4}.$$

Между инваріантами i, i_1, i_2, i_3 сверхъ предыдущаго имѣетъ мѣсто еще соотношеніе

$$
=o \begin{vmatrix} 6 & 3i & i' \\ 3i & 4i' & 3i'' \\ 2i' & 6i'' & 3ii''-i'^2 \end{vmatrix}.
$$

$$
\varphi=(\varkappa_1-\varkappa_2)^3 b^2 c X_1 X_2^{\ 3}, \quad \psi=-(\varkappa_1-\varkappa_2)^3 bc^2 U_1 U_4^{\ 3},-
$$

основной тетраедръ имѣетъ тройную вершину $U_4=o$ и тройную грань $X_2=o$.

3°. [22]. Уравненіе (17) обращается въ полный квадратъ,—что требуетъ соотношеній:

$$
i''^2-i^2 i'''=o, \quad i^3+8i''-4ii'=o.
$$

Простѣйшій видъ уравненія коннекса есть

$$
f=\varkappa_1(X_4U_4+X_1U_1)+\varkappa_2(X_2U_2+X_3U_3)+cX_2U_3+d'X_1U_4
$$

$$
\therefore\ f\lambda-1=\varkappa_1{}^\lambda(X_4U_4+X_1U_1)+\varkappa_2{}^\lambda(X_2U_2+X_3U_3)+\lambda c\varkappa_2{}^{\lambda-1}X_2U_3+\lambda d'\varkappa_1{}^{\lambda-1}X_1U_4
$$

$$
\varphi=(\varkappa_2-\varkappa_1)^4 d'cX_1^{\ 2}X_2^{\ 2} \text{ и } \psi=d'c(\varkappa_2-\varkappa_1)^4 U_3^{\ 2}U_4^{\ 2},
$$

основной тетраедръ сводится къ двумъ двойнымъ плоскостямъ $X_1=o$, $X_2=o$ и двумъ двойнымъ вершинамъ $U_3=o$, $U_4=o$ на прямой ихъ пересѣченія. Уравненія траекторій имѣютъ видъ:

$$
\frac{1}{k_2-k_1}\left(C_1-log\frac{X_2}{X_1}\right)=\frac{\varkappa_2}{c}\left(C_2-\frac{X_3}{X_2}\right)=\left(C_3-\frac{X_4}{X_1}\right)\frac{\varkappa_1}{d}.
$$

Если d' или c равно нулю, траэкторіи суть кривыя плоскія: $d'=o$:

$$
C=\frac{X_1}{X_4}; \quad \left(C_2-\frac{X_3}{X_2}\right)\frac{\varkappa_2}{c}=\frac{1}{k_2-k_1}\left(C_1-\frac{X_2}{X_1}\right).
$$

Если наконецъ одновременно $d=c=o$, траэкторіи обращаются въ прямыя:

$$
X_4-CX_1=o, \quad X_3-C_1X_2=o.
$$

4°. [4]. Всѣ корни (17) равны между собою,—такъ что

$$\varkappa_1 = \frac{i}{4} = \frac{3i'}{2i} = \frac{2i''}{3i'} = \frac{4i'''}{i''},\text{—}$$

три независимыхъ соотношенія между i, i_1, i_2 i_3. Въ этомъ случаѣ форма f можетъ приведена къ виду

$$f \equiv \varkappa_1 U_X + aX_1U_2 + bX_2U_3 + X_3U_4$$

и вообще

$$f_{\lambda-1} = \varkappa_1{}^\lambda U_X + \lambda\varkappa_1{}^{\lambda-1}(aX_1U_2 + bX_2U_3 + cX_3U_4) +$$
$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\varkappa_1{}^{\lambda-2}(abX_1U_3 + bcX_2U_4) + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{1.2.3}abc\varkappa_1{}^{\lambda-3}X_1U_4.$$

Далѣе

$$\varphi = a^3b^2cX^4,\ \ \psi = ab^2c^3U_4{}^4,$$

такъ что основной тетраедръ сводится къ четверной грани X_1—o и четверной вершинѣ $U_4 = o$ въ ней лежащей. Уравненія траэкторій имѣютъ видъ:

$$\left(\frac{X_2}{X_1} - C_1\right)\frac{\varkappa_1}{a} = \left(\left(\frac{X_1}{X_1}\right)^2 - \frac{2a}{b}\left(\frac{X_3}{X_1}\right) - C_2\right)\frac{\varkappa_1{}^2}{a^2} =$$
$$\left(\left(\frac{X_1}{X_1}\right)^3 - \frac{3a}{b}\,\frac{X_3X_2}{X_1{}^2} + \frac{3a^2}{bc}\,\frac{X_4}{X_1} - C\right)\frac{\varkappa_1{}^3}{a^3}.$$

Такимъ образомъ траекторіи суть алгебраическія кривыя—пересѣченія поверхности 2. степени съ поверхностью 3. степени. Въ частности если одна изъ величинъ a, b, c обращается въ нуль, траэкторіи суть кривыя второй степени—собственныя или не собственныя. Если двѣ изъ величинъ a, b, c обращаются въ нуль, траэкторіи суть прямыя. Если наконецъ $a = b = c = o$, то всѣ точки остаются въ покоѣ, преобразованіе будетъ тожественное.

Выражденныя суть тѣ коллинеаціи, которыхъ характеристическое уравненіе имѣетъ одинъ или болѣе корней равныхъ нулю. Если, напр., $\varkappa_4 = o$, то отнесенная къ основному тетраедру форма f принимаетъ видъ

$$\varkappa_1X_1U_1 + \varkappa_2X_2U_2 + \varkappa_3X_3U_3 = o, \qquad (\alpha)$$

являясь такимъ образомъ битернарною формою. Каждой точкѣ пространства подчиняется опредѣленная вообще точка плоскости $Y_4 = o$; исключеніе составляетъ точка, опредѣляемая уравненіями

$$\frac{df}{du_k} = o \quad (k = 1,2,3,4),$$

совмѣстными въ силу $i''' = o$,—ей не соотвѣтствуетъ опредѣленной точки. Въ случаѣ коннекса, приведеннаго къ каноническому виду, точка—*центръ* коллинеаціи имѣетъ координатами:

$$X_1 = o, \ X_2 = o, \ X_3 = o \ \ (U_4 = o).$$

Двойственно, плоскость $X_4 = o$ $(U_1 = U_2 = U_3 = o)$ не имѣетъ опредѣленной соотвѣтствующей ей плоскости. Сопряженный коннексъ приводится къ $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 X_4 U_4 = o$ и изображаетъ главную плоскость и центръ коллинеаціи. Форма $f\lambda_{-1}$ имѣетъ теперь видъ

$$f\lambda_{-1} = \varkappa_1{}^\lambda X_1 U_1 + \varkappa_2{}^\lambda X_2 U_2 = \varkappa_3{}^\lambda X_3 U_3$$

и показываетъ, что траэкторіи суть кривыя плоскія, лежащія въ главной плоскости:

$$X_4 = o, \ X_1{}^{k_2 - k_3} X_2{}^{k_3 - k_1} X^{k_1 - k_2} = C.$$

Развертывающія траэкторіи суть

$$U_4 = o, \ U_1{}^{k_2 - k_3} U_2{}^{k_3 - k_1} U_3{}^{k_2 - k_2} = C$$

коническія поверхности съ вершиною въ центрѣ коллинеаціи.

Дальнѣйшіе случаи вырожденныхъ коллинеацій представляютъ частные случаи разсмотрѣннаго, соотвѣтствующіе особенностямъ и вырожденіямъ коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ $f = o$ на плоскости $X_4 = o$ и въ связкѣ $U_4 = o$.

Если $\varkappa_2 = \varkappa_3$ двѣ вершины основного треугольника этой коллинеаціи сливаются такъ же, какъ и двѣ его стороны. Если $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$, основной треугольникъ сводится къ тройной точкѣ и проходящей черезъ нее тройной прямой.

Остановимся въ особенности на случаѣ, когда болѣе одного корня (17) обращаются въ нуль 2°. $\varkappa_3 = \varkappa_4 = o$, такъ что

$i''' = i'' = o$. Каноническій видъ уравненія коннекса есть

$$\varkappa_1 X_1 U_1 + \varkappa_2 X_2 U_2 + a X_4 U_3 = o \text{ при } \varkappa_1 \gtrless \varkappa_2 \text{ и}$$

$$\varkappa_1 (X_1 U_1 + X_2 U_2) + d X_1 U_2 + c X_4 U_3 = o \text{ при } \varkappa_1 = \varkappa_2$$

т. е при $4i' - i^2 = o$.

Въ первомъ случаѣ

$$\varphi = a\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2(\varkappa_1 - \varkappa_2) X_1 X_2 X_4{}^2, \quad \psi = a\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2(\varkappa_2 - \varkappa_1) U_1 U_2 U_3{}^2$$

$$f_{\lambda-1} = \varkappa_1{}^\lambda X_1 U_1 + \varkappa_2{}^\lambda X_2 U_2,$$

во второмъ

$$\varphi = cd\varkappa_1{}^4 X_1{}^2 X_4{}^2, \quad \psi = cd\varkappa_1{}^4 U_2{}^2 U_4{}^2,$$

$$f_{\lambda-1} = \varkappa_1{}^\lambda (X_1 U_1 + X_2 U_2) + \lambda d \varkappa_1{}^{\lambda-1} X_1 U_2$$

т. е. въ первомъ случаѣ основной тетраедръ приводится къ двойной главной плоскости $X_4 = o$ и двумъ простымъ гранямъ $X_1 = o$, $X_2 = o$, во второмъ къ двойной грани $X_1 = o$ и двойной грани—главной плоскости $X_4 = o$. Если въ частности $a = o$ (или $c = o$ во 2-мъ случаѣ), то главною является каждая плоскость проходящая черезъ прямую $U_1 = o$, $U_2 = o$, и центромъ каждая точка прямой $X_1 = o$, $X_2 = o$.

3°. Если $i' = i'' = i''' = o$, три корня (17) суть нули: $\varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_4 = o$. Каноническій видъ уравненія коннекса есть

$$\varkappa_1 X_1 U_1 + b X_2 U_3 + c X_3 U_4 = o \;\;\therefore\;\; f_{\lambda-1} = \varkappa_1{}^\lambda X_1 U_1 \;(\lambda > 2)$$

$$\varphi = \varkappa_1{}^3 b^2 c X_1 X_2{}^3$$

$$\psi = \varkappa_1{}^3 b c^2 U_1 U_4{}^3$$

основной тетраедръ слагается изъ тройной грани $X_2 = o$—главной плоскости коллинеаціи, и изъ грани $X_1 = o$; центромъ является точка $U_4 = o$—тройная вершина основного тетраедра. Если b или c обращаются въ нуль, главными являются ∞^1 плоскостей пучка и точекъ прямой; если $b = c = o$, одновременно главными будутъ всѣ три точки плоскости $X_1 = o$ и всѣ плоскости связки $U_1 = o$.

4°. Если наконецъ всѣ корни (17) суть нули, т. е. если

$i=i'=i''=i'''=o$, то каноническимъ видомъ уравненія коннекса будетъ

$$f\equiv aX_1U_2+bX_2U_3+cX_3U_4=o.$$

Произвольная точка пространства переносится въ точку плоскости $X_1=o$, каждая плоскость въ связку $U_4=o$. Основной тетраедръ приводится къ четверной грани $X_1=o$ и четверной вершинѣ $U_4=o$. Главными являются точка $X_1=o$, $X_2=o$, $X_3=o$ и плоскость $U_2=o$, $U_3=o$, $U_4=o$ если a, b, c не равны нулю; если одна или двѣ изъ этихъ величинъ обращаются въ нуль, имѣемъ ∞^1 или ∞^2 главныхъ плоскостей и точекъ. Траэкторіи въ этомъ случаѣ совершенно неопредѣленны ($f_3\equiv o$).

Классификацію вырожденныхъ коллинеацій даетъ К. Сегре въ цитированномъ выше мемуарѣ, опираясь на аналитическія изслѣдованія Вейерштрасса. (Berl. Monatsber. 1868 г. S. 310—338). С. Ли въ Vorlesungen üb. continuirlche Gruppen опредѣляетъ Bahncurven проективной одночленной группы (Кар. 3) и опредѣляетъ ихъ, какъ самопроективныя кривыя, неизмѣняющіеся при преобразованіяхъ группы. Аналогичную задачу для пространства разрѣшаетъ Pittarelli (I gruppi continui proiettivi semplicemente infiniti nello spazio ordinario Ann. di Mat. (2) XXII. 261—312. 1894 г.), различающій 13 типовъ коллинеарныхъ преобразованій и дающій для каждаго случая само-проективныя кривыя. Какъ онъ замѣчаетъ самъ, детальная классификація и приведеніе къ каноническому виду даны Predella Le omografie in un spazio adun numero qualunque di dimensione Ann. di Mat. (2) т. XVII. 113—159, гдѣ на 152 — 153 находимъ приведенныя формы коллинеарныхъ преобразованій обыкновеннаго пространства. Необходимо замѣтить, что въ настоящей работѣ терминъ „траэкторія“ употребляется въ смыслѣ отличномъ отъ придаваемаго С. Ли термину „Bahncurve“. Здѣсь это геометрическое мѣсто точекъ, въ которыя данную точку переводятъ степени коллинеаціи, устанавливаемой коннексомъ (1,1). У С. Ли траэкторія есть кривая, не измѣняющаяся при всѣхъ преобразованіяхъ одночленной группы, опредѣляемой безконечно-малымъ преобразованіемъ, котораго символъ $\Sigma a_{ik}x_i\frac{df}{dx_k}$ и стало быть удовлетворяющая уравненію $\Sigma a_{ik} x_i \frac{df}{dxk} = o$. Это характеристика дифференціальнаго уравненія, связаннаго съ коннексомъ (1,1). Въ послѣднемъ, напр., случаѣ это будетъ:

$$x_1 = x_1{}^0,\ x_2 = x_2{}^0 + a x_1{}^0 t,\ x_3 = x_3{}^0 + b x_2{}^0 t + \frac{ab x_1{}^0 t^2}{2}$$

$$x_4 = x_4{}^0 + c x_3{}^0 t + \frac{1}{2} x_2{}^0 t^2 + \frac{1}{6} x_1{}^0 t^3.$$

Траэкторія же въ принятомъ здѣсь смыслѣ совершенно неопредѣленна въ этомъ случаѣ. Въ общемъ случаѣ траэкторія опредѣляется уравненіями

$$X_1{}^{k_2 - k_3} X_2{}^{k_3 - k_1} X_3{}^{k_1 - k_2} = C,\quad X_2{}^{k_3 - k_4} X_3{}^{h_4 - k_2} X_4{}^{k_2 - k_3} = C'$$

гдѣ $X_i = o$ суть уравненія граней основного тетраедра и $k_i = log \varkappa_i$, $\varkappa_i$ корень (17), а „Bahncurve“ С. Ли или характеристика —уравненіями

$$X_1{}^{\varkappa_2 - \varkappa_3} X_2{}^{\varkappa_3 - \varkappa_1} X_3{}^{\nu_1 - \varkappa_2} = C,\quad X_2{}^{\varkappa_3 - \varkappa_4} X_3{}^{\varkappa_4 - \varkappa_2} X_4{}^{\varkappa_2 - \varkappa_3} = C'.$$

Можно сказать поэтому, что разсматриваемыя здѣсь траэкторіи коллинеаціи (1) суть характеристики коллинеаціи, имѣющей тотъ же основной тетраедръ, но корнями характеристическаго уравненія логариѳмы соотвѣтственныхъ корней характеристическаго уравненія (17) первой коллинеаціи.

Pittarelli указываетъ сверхъ того на статью G. Loria: Sulle corrispondenze proiettive tra due piani e tra due spazi (Giorn. Battaglini, vol. 22) гдѣ дается также классификація коллинеарныхъ преобразованій пространства и съ которою я не имѣлъ возможности познакомиться. Работа Pittarelli появилась, когда настоящая работа была уже начата печатаніемъ; не имѣя поэтому возможности воспользоваться ея результатами для дальнѣйшихъ развитій, я подвергъ сокращенію этотъ параграфъ, сохранивъ въ немъ только результаты.

Въ заключеніе укажу въ краткихъ чертахъ, какъ предыдущіе результаты распространяются на пространство k—1 измѣренія. Если точкою такого пространства называть совокупность значеній k величинъ $x_1 \ldots x_k$—однородныхъ координатъ точки, то опредѣлители (k—1)-го порядка, составленные изъ координатъ (k—1) точекъ, являются координатами u_i линейнаго многообразія (k—2) измѣреній, которое выдѣляется однимъ уравненіемъ

$$(\alpha) \quad u_x{}^0 \equiv \Sigma u_i{}^0 x_i = o$$

между точечными координатами x. Уравненіе

$$(\beta) \quad f(x_1 \ldots x_k;\ u_1 \ldots u_k) = o,$$

однородное какъ въ отношеніи x, такъ и въ отношеніи u опредѣлитъ *коннексъ* пространства (k—1)-го измѣренія, выдѣляя изъ общаго числа ∞^{2k-2} элементовъ, (x, u) составленныхъ точкою R_{k-1} и какою нибудь его плоскою системою (α), ∞^{2k-3} элементовъ, въ совокупности образующихъ эту конфигурацію. Два такихъ коннекса образуютъ въ пересѣченіи *коинциденцію*, которую называемъ *главною*, если уравненіе второго коннекса есть $u_x = o$,—т. е. если разсматриваемъ совокупность элементовъ (β), въ которыхъ точка x и система u находятся въ соединеніи. Если для каждой точки x пространства построимъ соотвѣтствующее ей въ главной коинциденціи многообразіе и отъ точки x перейдемъ къ безконечно-близкой точкѣ $x + dx$ такъ, чтобы выполнялось уравненіе Пфаффа $\Sigma u_i dx_i = o$, то независимыхъ направленій перемѣщенія имѣется k—2, такъ что x можно разсматривать, какъ функціи k—2 независимыхъ параметровъ: $\xi_1 \ldots \xi_{k-2}$ Уравненіе $\Sigma u_i dx_i = o$ распадается на k-1 уравненіе, которыя даютъ u_i пропорціональными минорамъ матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ \frac{dx_1}{d\xi_1} & \frac{dx_2}{d\xi_1} & \ldots & \frac{dx_k}{d\xi_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{dx_1}{d\xi_{k-2}} & \frac{dx_2}{d\xi_{k-2}} & \ldots & \frac{dx_k}{d\xi_{k-2}} \end{matrix} \right\|$$

Дѣлая такую подстановку въ уравненіе коннекса, получимъ:

$$f\left(x, \left(x\frac{dx}{d\xi_1}\cdots\frac{dx}{d\xi_{k-2}}\right)\right) \equiv a_x{}^m\left(ax\frac{dx}{d\xi_1}\cdots\frac{dx}{d\xi_{k-2}}\right)^n = o$$

Если за параметры $\xi_1 \,.\,.\, \xi_{k-2}$ выберемъ координаты: $\xi_i = x_{i+1} (i = 1,\,.\,.\, k-2)$ и положимъ

$$x_{k+1} = 1,\ \frac{dx_1}{d\xi_i} = p_{i+1},$$

то уравненіе приведется къ обычному виду, ибо все сводится къ подстановкѣ:

$$u_1 : u_2 : \,.\,.\, : u_{k-1} : u_k = 1 : -p_2 : -p_3 : \,.\,.\, : p_{k-1} : (p_{k-1}x_{k-1} + \,.\,.\, + p_2x_2 - x_1)$$

Исходя изъ двойственнаго представленія,—съ помощью уравненія $\Sigma x_i du_i = o$ придемъ къ значеніямъ

$$\varrho x_i = \left(u\frac{du}{d\eta_1}\cdots\frac{du}{d\eta_{k-2}}\right)_i,$$

и уравненіе коннекса приметъ видъ:

$$\left(au\frac{du}{d\eta_1}\cdots\frac{du}{d\eta_{k-1}}\right)^m u_\alpha{}^n = o.$$

Оба уравненія изображаютъ одну и туже систему многообразій,—одно въ точечныхъ, другое въ тангенціальныхъ координатахъ. Такъ какъ второе имѣетъ своими интегралами многообразія, опредѣляемыя уравненіями вида $\varphi(u_1 \,.\,.\, u_k) = o$ между координатами u, то при переходѣ къ точечнымъ координатамъ,—когда исключаемъ $u_1 \,.\,.\, u_k$ изъ уравненій

$$\varphi = o,\ \frac{d\varphi}{du_i} = \varrho x_i\ \ (i = 1, 2, \,.\,.\, k)$$

можемъ получить не одно уравненіе въ координатахъ $x_1 \,.\,.\, x_k$, но болѣе: два, три, вообще до $k-1$ уравненія. Такимъ образомъ *интегральнымъ многообразіемъ будетъ не только точечное многообразіе* $(k-2)$*-хъ измѣреній, но и всякая совокупность* ∞^{k-2} *элементовъ* (x,u) *пространства* R_{k-1}, *каждые два послѣдовательные элемента которой выполняютъ уравненія Пфаффа*,—опредѣленіе играющую такую важную роль въ теоріи

Соф. Ли. Задача интегрированія формулируется сообразно этому такъ: ∞^{2k-4} *элементовъ* (x,u) *разсматриваемой главной коинциденціи нужно всевозможными способами распредѣлить на* ∞^{k-2} *интегральныхъ многообразій* $(k-2)$-хъ *измѣреній*. Аналитически это сводится такимъ образомъ на нахожденіе всѣхъ системъ k—1 уравненій:

$$\Psi_i(x,u;\ \alpha_1\,..\,\alpha_{k-2})=o\quad(i=1,2,..\,k)$$

которыя замѣняли бы вполнѣ уравненія разсматриваемой главной коинциденціи, т. е. которымъ удовлетворялъ бы при соотвѣтственныхъ значеніяхъ $\alpha_1\,..\,\alpha_{k-2}$ каждый ея элементъ, и которыя приводили бы къ значеніямъ $u_1\,..\,u_k$ въ функціи $x_1\,..\,x_k$, выполняющимъ уравненіе Пфаффа $\Sigma u{:}dx_i=o$; такія уравненія должны по предыдущему выполнять уравненіе

$$\Sigma\left(\frac{d\Psi_i}{dx_j}\,\frac{df}{du_j}-\frac{d\Psi_i}{du_j}\,\frac{df}{dx_j}\right)=o$$

въ силу $f=o$. Такимъ образомъ теорія коннексовъ даетъ геометрическую основу теоріямъ С. Ли.—Если бы обратились въ частности къ уравненіямъ линейнымъ, то нашли бы для нихъ снова способъ нахожденія полнаго интеграла по частнымъ рѣшеніямъ, котораго основанія далъ G. Darboux (C. R. t. 86 p. 1012—1013). Хотя линейныя уравненія представляютъ лишь весьма частный случай уравненій перваго порядка, но съ другой стороны связанныя съ ними совокупныя системы заключаютъ въ себѣ, какъ частный случай, уравненія обыкновенныя высшихъ порядковъ, такъ что вопросъ о нахожденіи алгебраическихъ частныхъ рѣшеній линейныхъ уравненій въ частныхъ производныхк заключаетъ въ себѣ, какъ весьма частный случай, вопросъ о нахожденія таковыхъ же рѣшеній обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій k-го порядка линейныхъ,—вопросъ, такъ занимавшій въ послѣднее время русскихъ математиковъ. Но въ виду важности этого вопроса ему должно быть посвящено особое изслѣдованіе, которое связало бы вопросъ о нахожденіи интеграловъ линейныхъ уравненій съ болѣе общимъ и интереснымъ вопросомъ нахожденія алгебрическихъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій въ частныхъ производныхъ перваго порядка нелинейныхъ. При этомъ методы изслѣдованія явятся распространеніемъ методовъ Darboux, Autonne'a и Painlevé. Послѣдній примѣняетъ въ своихъ изслѣдованіяхъ теорію функцій комплекснаго перемѣннаго; поэтому я не буду здѣсь касаться ихъ. Что касается Autonne'a, то методъ его заключается въ однозначномъ и однозначно обратимомъ изображеніи элементовъ тожественнаго коннекса $u_x = o$ точками обыкновеннаго пространства, такъ что главная коинциденція какого либо коннекса изображается поверхностью. Въ случаѣ коннексовъ пространства (k—1)-го измѣренія мы должны по этому методу изображать элементъ тожественнаго коннекса этого пространства точкою плоскаго пространства (2k—3)-хъ измѣреній помощью преобразованія однозначнаго и однозначно обритимаго. Наконецъ методъ Дарбу основывается на изученіи критическихъ точекъ, Мы приведемъ здѣсь для примѣра теоремы, представляющія непосредственное распространеніе указанныхъ въ концѣ третьей главы и указанныхъ отчасти самимъ Дарбу въ цитированной выше замѣткѣ.

Линейное уравненіе, изображаемое въ однородныхъ координатахъ уравненіями

$$\sum_{i=1}^{i=k} L_i u_i = o, \quad u_x = o$$

главной коинциденціи коннекса (m,1), имѣетъ $\frac{m^k - 1}{m - 1}$ критическихъ точекъ выполняющихъ уравненіе $L_i = A.x_i (i = 1,2\,..\,k)$ Плоская система (k—2) измѣреній не можетъ содержать болѣе $\frac{m^{k-1} - 1}{m - 1}$ критическихъ точекъ; если она содержитъ такое ихъ число, то является частнымъ рѣшеніемъ. Система (k—2)-хъ измѣреній p-го порядка

$$\varphi(x_1\,..\,x_k) = 0,$$

будучи частнымъ рѣшеніемъ, не можетъ содержать менѣе $\frac{m^{k-1} - 1}{m - 1}$ и болѣе $p\,\frac{m^{k-1} - 1}{m - 1}$ критическихъ точекъ.

Зная $\mu_k + 2 = \frac{m(m+1)\ldots(m+k-1)}{1.2\,..\,k} + 2$ частныхъ алгебрическихъ рѣшеній, можемъ составить интегралъ съ одною произвольною постоянною. Чтобы составить полный, нужно знать μ_k+k-1 частныхъ рѣшеній. Если знаемъ μ_k+k-2 рѣшеній, то интегрированіе заканчивается квадратурою, потому что помощью μ_k+1 рѣшеній составимъ множитель.— Если всѣ извѣстныя частныя рѣшенія не проходятъ черезъ S критическихъ точекъ, то для составленія интеграла съ одною постоянною достаточно знать μ_k+2-S частныхъ рѣшеній.

Критическія точки классифицируются сообразно свойствамъ корней характеристическаго уравненія принадлежащаго такой точкѣ касательнаго коннекса. Это уравненіе имѣетъ для критической точки одинъ непремѣнно вещественный корень, равный значенію соотвѣтствующаго точкѣ отношенія $\varLambda = L_i : x_i$.

Мы можемъ далѣе различать точки поли-и гиперкритическія и оцѣнивать число эквивалентныхъ имъ монокритическихъ точекъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ВАЖНѢЙШІЯ ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.			
8	11	св.	слова „видно что“ д. б. выброшены.
23	21	—	въ правой части формулы (11) должно быть $\mu_2.pe^3 + \,.\,.\, \nu_2.p^3e$.
33	5	—	вм. $f=o$ и F д. б. соотв. $F=o$ и F'.
—	6	—	вм. $f(x,u)=o$ д. б. $M.f(x,u)=o$.
75	18	—	вм. стр. 53 д. б. 59.
109	3	сн.	вм. $\Sigma u_1 \pm \,.\,.$ д. б. $\Sigma \pm u_1 \,.\,.$
—	13	—	вм. интегральныя д. б. центральныя.
125	15	—	(прим.) въ знаменателяхъ д. б. u_i вм. x_i.
134	3	—	вм. ingulières д. б. singulières.
152	13	св.	вм. аналогическимъ д. б. аналогичнымъ.

На стр. 133 надо вставить сноску къ формулѣ (А):

„Этимъ уравненіемъ опредѣляются у Darboux (Théorie des surfaces T. II) фокальныя точки конгруэнціи кривыхъ $\varphi_1=o$, $\varphi_2=o$.