

**ФЛУКТУАЦИИ  
И  
НЕЛИНЕЙНОЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ВОЛН**

*А.Г. Ситенко*

**В ПЛАЗМЕ**

**АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

А. Г. СИТЕНКО

---

ФЛУКТУАЦИИ  
И  
НЕЛИНЕЙНОЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ  
ВОЛН  
В ПЛАЗМЕ

КИЕВ  
«НАУКОВА ДУМКА»  
1977

**530.3** **Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме.** Ситенко А. Г.  
С 41 К., «Наук. думка», 1977. 248 с.

УДК 533.9

Монография посвящена исследованию статистических и электродинамических свойств плазмы. Основное внимание уделено построению теории электромагнитных флуктуаций с учетом нелинейного взаимодействия волн. Изучены спектральные распределения стационарных флуктуаций, а также временная эволюция флуктуационных спектров. На основе обобщенного кинетического уравнения, учитывающего нелинейное взаимодействие волн и их взаимодействие с флуктуационными полями, рассмотрены процессы рассеяния, трансформации и излучения волн в неравновесной плазме.

Книга предназначена для физиков — теоретиков и экспериментаторов, работающих в области статистической физики, физики плазмы, радио- и астрофизики. Может быть полезна также аспирантам и студентам старших курсов физических и радиофизических факультетов и вузов.

Ил. 9. Список лит.: с. 242—248 (198 назв.).

**Рецензенты А. И. АХИЕЗЕР, И. Р. ЮХНОВСКИЙ**

Редакция физико-математической литературы

**Алексей Григорьевич Ситенко**  
**ФЛУКТУАЦИИ И НЕЛИНЕЙНОЕ**  
**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В ПЛАЗМЕ**

*Печатается по постановлению ученого совета  
Института теоретической физики АН УССР*

Редактор **Е. Л. Орлик**  
Оформление художника **Р. К. Пахольюка**  
Художественный редактор **И. П. Антонюк**  
Технический редактор **Г. Р. Боднер**  
Корректор **Е. А. Михалец**

Информ. бланк № 23

БФ 00277. Сдано в набор 2.XII 1976 г. Подписано в печать 31.V 1977 г. Формат 60×90<sup>1/8</sup>. Бумага типогр. № 1. Усл. печ. л. 15,5. Учетно-изд. л. 16,32. Тираж 1700 экз. Изд. № 306. Зак. № 7-316. Цена 2 руб. 77 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев-601, ГСП, ул. Репина, 3.

Книжная фабрика «Коммунист» РПО «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР,  
Харьков, ул. Энгельса, 11.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Основные обозначения . . . . .	9
<b>Глава 1</b>	
<b>Статистическое описание плазмы</b>	
1. Микроскопические уравнения . . . . .	11
2. Распределение Лиувилля . . . . .	14
3. Одночастичная функция распределения и корреляционные функции . . . . .	17
4. Иерархия уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Йвона . . . . .	20
5. Приближение самосогласованного поля . . . . .	22
6. Двухчастичные корреляции и интеграл столкновений . . . . .	25
<b>Глава 2</b>	
<b>Нелинейные электродинамические уравнения</b>	
1. Нелинейное уравнение для потенциального поля . . . . .	31
2. Продольная диэлектрическая проницаемость и нелинейные продольные электрические восприимчивости . . . . .	34
3. Метод многовременных последовательных приближений . . . . .	41
4. Нелинейное уравнение для поля (общий случай) . . . . .	45
5. Тензор диэлектрической проницаемости и тензорные нелинейные восприимчивости . . . . .	47
6. Иерархия уравнений многовременных последовательных приближений для электромагнитного поля . . . . .	51
<b>Глава 3</b>	
<b>Электродинамические свойства магнитоактивной плазмы</b>	
1. Продольная диэлектрическая проницаемость и нелинейные продольные восприимчивости плазмы в магнитном поле . . . . .	56
2. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле . . . . .	63
3. Тензорные нелинейные восприимчивости плазмы в магнитном поле . . . . .	68
<b>Глава 4</b>	
<b>Волны в плазме</b>	
1. Собственные колебания и волны в средах с пространственно-временной дисперсией . . . . .	71
2. Волны в изотропной плазме . . . . .	76
3. Волны в магнитоактивной плазме . . . . .	78
<b>Глава 5</b>	
<b>Нелинейное взаимодействие волн</b>	
1. Нерезонансное взаимодействие волн и эховые явления . . . . .	86
Эховые колебания продольного поля . . . . .	88
Трехимпульсные эховые колебания . . . . .	92
2. Трехволновое резонансное взаимодействие . . . . .	97
Динамическое уравнение для взаимодействующих волн . . . . .	97
Распадная и взрывная неустойчивости . . . . .	101
3. Четырехволновое резонансное взаимодействие . . . . .	104
4. Параметрический резонанс в плазме . . . . .	112

## Глава 6

### Флуктуации в плазме

1. Флуктуации в пространственно-однородных стационарных системах . . . . .	119
2. Флуктуации в системе заряженных частиц в пренебрежении взаимодействием между частицами . . . . .	123
3. Флуктуации в системе заряженных частиц с учетом электромагнитного взаимодействия между частицами (линейное приближение) . . . . .	129
4. Коллективные флуктуации и эффективная температура (потенциальное поле) . . . . .	140
5. Коллективные электромагнитные флуктуации . . . . .	147

## Глава 7

### Влияние нелинейного взаимодействия волн на флуктуации в плазме

1. Уравнения для спектральных корреляционных функций (потенциальное поле) . . . . .	151
2. Спектр стационарных флуктуаций с учетом нелинейных поправок . . . . .	158
3. Нелинейный сдвиг частот и насыщение уровня флуктуаций в неравновесной плазме . . . . .	160
4. Спектральные корреляционные функции для электромагнитных флуктуаций . . . . .	166
Система уравнений для последовательности корреляционных функций . . . . .	166
Нелинейный сдвиг частот собственных электромагнитных колебаний . . . . .	175

## Глава 8

### Флуктуационно-диссипативное соотношение

1. Обращение флуктуационно-диссипативного соотношения . . . . .	179
2. Нелинейное флуктуационно-диссипативное соотношение . . . . .	183
3. Правила сумм . . . . .	187
4. Нелинейное флуктуационно-диссипативное соотношение в случае электромагнитных флуктуаций . . . . .	189

## Глава 9

### Кинетические уравнения

1. Кинетическое уравнение для частиц . . . . .	192
Уравнение для одночастичной функции и интеграл столкновений . . . . .	192
Квазилинейное приближение . . . . .	199
2. Кинетическое уравнение для волн (потенциальное поле) . . . . .	202
Временная эволюция флуктуационных спектров . . . . .	202
Кинетическое уравнение для продольных волн и нелинейное затухание Ландау . . . . .	207
3. Кинетическое уравнение для волн (общий случай) . . . . .	213

## Глава 10

### Рассеяние и излучение волн

1. Рассеяние и трансформация волн в плазме . . . . .	218
2. Рассеяние и трансформация поперечных волн . . . . .	223
Рассеяние электромагнитных волн . . . . .	223
Трансформация электромагнитных волн . . . . .	231
3. Рассеяние и трансформация продольных волн . . . . .	234
4. Тормозное излучение в плазме . . . . .	237

Литература . . . . .	242
----------------------	-----

Современная теория плазмы основывается на широком использовании методов статистической физики. Наиболее полное описание свойств плазмы может быть получено в рамках общего динамического подхода в статистической теории, предложенного Н. Н. Боголюбовым [15]. Сущность этого подхода состоит во введении последовательности многочастичных функций распределения, полностью описывающих макроскопические свойства системы. Последовательность многочастичных функций удовлетворяет системе зацепляющихся уравнений, получившей название иерархии уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона. Приближенное решение иерархии уравнений, основанное на использовании разложения по степеням малого плазменного параметра, позволяет выразить двухчастичную функцию распределения через одночастичную функцию, и таким путем удается получить кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау [62].

Характерные особенности, отличающие плазму от других макроскопических сред, непосредственно связаны с ее коллективными свойствами, проявляющимися в существовании различных собственных волн и колебаний. В рамках приближения самосогласованного поля плазменные колебания впервые были изучены в работах А. А. Власова [24] и Л. Д. Ландау [63], сыгравших основополагающую роль в построении кинетической теории плазмы. Изложение основ этой теории можно найти в монографиях [49, 55, 57, 85, 115].

Важное место в теории плазмы занимает изучение флуктуаций. Как известно, для равновесных систем флуктуационно-диссипативное соотношение устанавливает связь между флуктуациями и диссипативными свойствами. Поэтому в случае равновесной плазмы задание тензора диэлектрической проницаемости полностью определяет флуктуации. Наоборот, зная флуктуации невзаимодействующих токов в плазме, с помощью обращения флуктуационно-диссипативного соотношения можно определить тензор диэлектрической проницаемости. Такой подход (допускающий обобщение и на неравновесный случай) позволяет полностью описать электродинамические свойства плазмы, не применяя кинетическое уравнение [88, 178].

Электродинамическим свойствам плазмы посвящены обстоятельные исследования [4, 5, 12, 33, 34, 87, 108, 162, 186]. В частности монография В. П. Силина, А. А. Рухадзе [87] является одной из первых книг по теории плазмы, в монографии А. И. Ахнезера, И. А. Ахнезера, Р. В. Половина, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанова [5] наиболее полно рассмотрена



электродинамика плазмы. В связи с интенсивным развитием исследований по термоядерному синтезу за последнее десятилетие достигнуты значительные успехи в разработке нелинейной электродинамики плазмы. Эти достижения отражены в монографиях [19, 29, 51, 54, 74, 111, 112, 131, 172]. В частности, Б. Б. Кадомцевым [51] разработана теория турбулентности в плазме, Р. З. Сагдеевым и А. А. Галеевым детально развита нелинейная теория плазмы [29, 172].

Настоящая монография посвящена разработке теории флуктуаций в однородной плазме с учетом нелинейного взаимодействия волн. Рассмотрение основано на использовании разложения по степеням напряженности поля и введении процедуры усреднения, учитывающей принцип ослабления корреляций Боголюбова. Из микроскопических уравнений выводится нелинейное уравнение, дающее динамическое описание электромагнитных полей в плазме. При этом электродинамические свойства плазмы полностью определяются коэффициентами нелинейного уравнения, представляющими собой диэлектрическую проницаемость и нелинейные восприимчивости плазмы. С помощью метода многовременных последовательных приближений из нелинейного уравнения выводится иерархия уравнений, описывающих различные нелинейные процессы в плазме.

Рассмотрено обобщение флуктуационно-диссипативного соотношения для нелинейных сред. Показано, что нелинейные восприимчивости плазмы выражаются через корреляционные функции различных порядков для флуктуаций плотности тока в пренебрежении взаимодействием между частицами. Поэтому задание последовательности указанных корреляционных функций полностью определяет линейные и нелинейные электродинамические свойства плазмы.

В последних главах детально изучены флуктуации в неравновесной плазме с учетом нелинейного взаимодействия волн. Для последовательности корреляционных функций, характеризующих флуктуации в плазме, получена система нелинейных уравнений, коэффициенты в которых выражаются через нелинейные восприимчивости, а неоднородные части — через корреляционные функции для флуктуаций в системе не взаимодействующих частиц. С помощью решения системы находятся спектральные распределения флуктуаций в плазме. Показано, что учет нелинейного взаимодействия волн устраняет расходимости в спектральных распределениях неравновесных флуктуаций, возникающие в линейном приближении. Рассмотрены кинетические уравнения для частиц и волн в неравновесной плазме. Получено обобщенное кинетическое уравнение для волн, учитывающее взаимодействие волн с флуктуационными полями в плазме. На основе обобщенного кинетического уравнения исследованы процессы рассеяния и трансформации волн, а также излучение в неравновесной плазме.

В заключение считаю своим долгом выразить искреннюю признательность А. И. Ахиезеру, Ю. Л. Климонтовичу и В. П. Силину за полезное обсуждение содержания книги.

*А. Г. Ситенко*

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$$a^2 = \frac{T}{4\pi e^2 n_0}$$

$$\Omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$$

$$s^2 = \frac{3T}{m}$$

$$s_i^2 = \frac{3T_i}{m_i}$$

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega}{ks}$$

$$\varphi(z) = 2ze^{-z^2} \int_0^z dx e^{x^2}$$

$$\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$$

$$z_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega - n\omega_B}{|k_z|s}$$

$$\beta = \frac{k_{\perp}^2 s^2}{3\omega_B^2}$$

$$v_s^2 = \frac{T_e}{m_i}$$

$$v_A^2 = \frac{B_0^2}{4\pi m_i n_0}$$

$$\eta^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$$

$$E_{k\omega} = \int dt \int dr e^{-ikr + i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\omega, \mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}$$

$$\sum_{\omega, \mathbf{k}} \dots = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \dots$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{r}t} = \langle E_i(\mathbf{r}_1, t_1) E_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad t = t_1 - t_2$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \int dt \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{r}t}$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}$$

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$$

(в изотропной плазме:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(\omega, k) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_t(\omega, k)$$

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \eta^2$$

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = |\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})|$$

$$\Lambda(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) = 0, \quad \Lambda'_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \Lambda(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}}$$

(в изотропной плазме:

$$\varepsilon_l(\omega_{\mathbf{k}}, k) = 0, \quad \varepsilon_{\mathbf{k}} = \frac{\partial \varepsilon_l(\omega_{\mathbf{k}}, k)}{\partial \omega_{\mathbf{k}}}$$

$$k \equiv \omega, \mathbf{k}$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(1, 2) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) = \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$$

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ

## 1. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Плазма представляет собой полностью или частично ионизированный газ, суммарный заряд частиц которого равен нулю. Будем рассматривать простейший случай двухкомпонентной плазмы, состоящей из отрицательно заряженных частиц — электронов и положительно заряженных частиц — ионов. Пусть плазма занимает объем  $V$ . Вследствие большой массы ионов их движением можно пренебречь, наличие ионов в плазме будет проявляться только в компенсации пространственного заряда электронов. Обозначим полное число электронов через  $N$  (заряд и массу отдельного электрона будем обозначать через  $e$  и  $m$ ), а среднюю плотность электронов — через  $n_0 \equiv N/V$ .

Состояния отдельных электронов в плазме полностью определяются заданием их координат и скоростей (предполагается, что электроны являются точечными частицами). В шестимерном фазовом пространстве координат и скоростей  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  каждому электрону отвечает своя траектория, определяемая уравнениями движения и начальными условиями. Обозначим радиус-вектор и скорость некоторого электрона  $\alpha$  в момент времени  $t$  через  $\mathbf{r}_\alpha(t)$  и  $\mathbf{v}_\alpha(t)$ . Уравнения движения для электрона можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_\alpha(t) &= \mathbf{v}_\alpha(t), \\ \dot{\mathbf{v}}_\alpha(t) &= \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t) + \frac{1}{c} \left[ \mathbf{v}_\alpha(t), \mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha(t), t) \right] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)$  — значения микроскопических электрического и магнитного полей в точке, где находится электрон в выбранный момент времени  $t$ . Поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  обусловлены как внешними источниками, так и микроскопическим распределением заряженных частиц в плазме (предполагается, что поля неэлектромагнитной природы отсутствуют; в общем случае в правой части второго уравнения (1.1) следует добавить слагаемое  $\frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}_\alpha(t), t)$ , где  $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$  — сила, обусловленная неэлектромагнитным полем). Наличие собственных электрического и магнитного полей в плазме

означает, что ее микроскопическое состояние определяется заданием не только координат и скоростей всех заряженных частиц, но и значений электрического и магнитного полей в каждой точке пространства, заполненного плазмой.

Микроскопическую функцию распределения электронов или микроскопическую плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  определяем посредством соотношения

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}(t)), \quad (1.2)$$

где суммирование производится по всем электронам. Представление микроскопической плотности в виде суммы дельта-функций, связанных с отдельными частицами, является непосредственным следствием тождественности частиц. Функция  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  характеризует микроскопическое распределение электронов в фазовом пространстве одной частицы. Тем не менее, согласно (1.2), она зависит от динамических переменных всех частиц плазмы.

Вводя обозначение

$$x \equiv (\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (1.3)$$

перепишем соотношение (1.2) в более компактном виде

$$\mathcal{F}(x, t) = \sum_{\alpha=1}^N \delta(x - x_{\alpha}(t)), \quad (1.4)$$

где

$$\delta(x - x_{\alpha}(t)) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}(t)). \quad (1.5)$$

Микроскопическое состояние плазмы будет полностью определено, если в данный момент времени  $t$  будет задана микроскопическая плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в любой точке фазового пространства и будут заданы значения микроскопических электрического и магнитного полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

Микроскопическая плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.6)$$

Используя уравнение движения для электронов (1.1), уравнение непрерывности (1.6) переписываем в виде

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.7)$$

(при наличии неэлектромагнитных сил в левой части уравнения следует добавить слагаемое  $\frac{1}{m} \mathbf{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}}$ ). Микроскопические поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  определяются системой уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho + \rho_0), \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где  $\rho_0$  и  $\mathbf{j}_0$  — плотности заряда и тока, обусловленные внешними источниками;  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  — микроскопические плотности заряда и тока, связанные с движением электронов в плазме,

$$\rho = e \left\{ \int d\mathbf{v} \mathcal{F} - n_0 \right\}, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{j} = e \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \mathcal{F}. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.7) и (1.8) вместе с соотношениями (1.9) и (1.10) образуют замкнутую систему уравнений, дающую полное микроскопическое описание плазмы. Уравнение (1.7) определяет временную эволюцию микроскопической плотности  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , в то время как уравнения (1.8) — (1.10) служат для нахождения самосогласованных микроскопических полей в плазме  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ . Отметим, что система уравнений (1.7) и (1.8) является точной и свободна от каких-либо приближений. Такой метод описания плазмы впервые предложен Ю. Л. Климонтовичем [55].

В случае нерелятивистской плазмы систему уравнений (1.7) и (1.8) можно несколько упростить, если учесть, что в нерелятивистских условиях электромагнитное взаимодействие между частицами сводится к чисто кулоновскому взаимодействию. В случае кулоновского взаимодействия уравнение для микроскопической плотности принимает вид

$$-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \right\} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — внешнее постоянное магнитное поле и  $\mathbf{E}$  — продольное самосогласованное электрическое поле, полностью определяемое последним уравнением системы (1.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho + \rho_0). \quad (1.12)$$

В отсутствие внешних электрического и магнитного полей уравнения (1.11) и (1.12) принимают вид

$$-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.14)$$

где  $\rho$  — плотность заряда, определяемая соотношением (1.9).

Кроме микроскопической плотности  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , характеризующей распределение частиц в шестимерном фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ,



свойств плазмы, поскольку решение такой системы эквивалентно решению полной динамической системы уравнений для плазмы. При рассмотрении макроскопических свойств плазмы такое полное описание, однако, оказывается излишним. Значения различных макроскопических величин, характеризующих состояние плазмы, могут быть получены с достаточной степенью точности в рамках статистического описания [65].

Статистический подход при рассмотрении свойств какой-либо многочастичной системы заключается в том, что вместо нахождения значений координат и импульсов всех частиц системы в определенный момент времени по заданным значениям в некоторый начальный момент времени рассматривается совокупность таких систем, различающихся только состояниями частиц, и изучается распределение систем по различным состояниям [16, 32]. Для описания распределения систем по состояниям вводится так называемая функция распределения Лиувилля в фазовом пространстве соответствующего числа частиц. В случае системы, состоящей из  $N$  частиц, распределение Лиувилля описывается функцией  $D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$ , зависящей от координат и скоростей  $N$  частиц. Если частицы тождественны, то функция распределения Лиувилля симметрична относительно перестановок координат и скоростей. На функцию распределения Лиувилля накладывается условие нормировки

$$\int \prod_{\alpha=1}^N dx_{\alpha} D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t) = 1. \quad (1.19)$$

Функция распределения Лиувилля удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве  $N$  частиц

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left( \dot{r}_{\alpha} \frac{\partial D_N}{\partial r_{\alpha}} + \dot{v}_{\alpha} \frac{\partial D_N}{\partial v_{\alpha}} \right) = 0. \quad (1.20)$$

Используя уравнения движения, из (1.20) нетрудно получить уравнение Лиувилля

$$\frac{\partial D_N}{\partial t} + \{D_N, H\} = 0, \quad (1.21)$$

где  $\{, \}$  — скобки Пуассона;  $H$  — гамильтониан, учитывающий взаимодействие между частицами; для нерелятивистской системы  $N$  частиц с кулоновским взаимодействием (в отсутствие внешних полей)

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m^{(\alpha)} v_{\alpha}^2 + \sum_{\alpha < \alpha'} \frac{e^{(\alpha)} e^{(\alpha')}}{|\mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{r}_{\alpha'}|}. \quad (1.22)$$

Уравнение Лиувилля описывает эволюцию функции распределения в зависимости от времени и в принципе позволяет находить ее в любой момент времени  $D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$ , если задано начальное распределение  $D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; 0)$ . Согласно (1.21), распределение



Лиувилля сохраняется вдоль траектории движения системы в фазовом пространстве  $N$  частиц:

$$D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t) = D_N(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0); 0). \quad (1.23)$$

С помощью функции распределения Лиувилля можно выполнить статистическое усреднение любой микроскопической величины. Рассмотрим некоторую микроскопическую величину  $Q(x, x', \dots; t)$ , заданную в точках  $x, x', \dots$  шестимерного фазового пространства. Временная зависимость величины  $Q$  определяется зависимостью координат и скоростей всех частиц от времени, т. е.

$$Q(x, x', \dots; t) \equiv Q(x, x', \dots; \{x_\alpha(t)\}). \quad (1.24)$$

Среднее значение величины  $Q$  определяем согласно

$$\begin{aligned} \langle Q(x, x', \dots; t) \rangle = \\ = \int \prod_{\alpha=1}^N dx_\alpha D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t) Q(x, x', \dots; \{x_\alpha\}). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Учитывая сохранение функции распределения Лиувилля вдоль траектории движения системы, усреднение в (1.25) по распределению в момент времени  $t$  заменяем усреднением по начальному распределению. Замечая, что координаты и скорости частиц в момент времени  $t$  зависят от начальных значений координат и скоростей,  $\{x_\alpha(t)\} \equiv \{x_\alpha(\{x_\alpha(0)\}, t)\}$ , и учитывая соотношение (1.23), формулу (1.25) переписываем в виде

$$\begin{aligned} \langle Q(x, x', \dots; t) \rangle = \\ = \int \prod_{\alpha=1}^N dx_\alpha(0) D_N(x_1(0), x_2(0), \dots, x_N(0); 0) \times \\ \times Q(x, x', \dots; \{x_\alpha(\{x_\alpha(0)\}, t)\}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Формула (1.25) (или (1.26)) позволяет найти среднее значение любой микроскопической величины, если задано распределение Лиувилля. Однако для систем с очень большим числом частиц  $N$  получить явное выражение  $D_N$  практически невозможно, так как необходимо точно проинтегрировать уравнения движения. В действительности полное определение функции распределения  $D_N$  и не требуется, если рассматриваются макроскопические величины, не зависящие от корреляции между частицами или же зависящие от корреляции между небольшим числом частиц. В качестве примера таких величин можно указать на среднюю плотность частиц (среднее число частиц в единице объема), среднюю плотность частиц в фазовом пространстве, среднюю скорость одной частицы, среднюю полную энергию частицы и т. п. Для определения этих величин достаточно ограничиться заданием одночастичной функции распределения или же функции распределения для небольшого числа частиц.

### 3. ОДНОЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Определим одночастичную функцию распределения  $f(x, t)$  как среднее значение микроскопической плотности (1.4) по распределению Лиувилля:

$$f(x, t) \equiv \langle \mathcal{F}(x, t) \rangle. \quad (1.27)$$

Используя определение микроскопической плотности (1.4) и учитывая симметрию  $D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t)$  относительно своих аргументов, для одночастичной функции распределения получаем выражение

$$f(x, t) = N \int dx_2 \dots dx_N D_N(x, x_2, \dots, x_N; t). \quad (1.28)$$

В соответствии с (1.19) одночастичная функция нормирована на полное число частиц  $N$ :

$$\int dx f(x, t) = N. \quad (1.29)$$

Двухчастичную функцию  $f_2(x, x'; t)$  определяем, усредняя по распределению Лиувилля двухчастичную микроскопическую плотность  $\mathcal{F}_2(x, x'; t)$  (1.15):

$$f_2(x, x'; t) \equiv \langle \mathcal{F}_2(x, x'; t) \rangle. \quad (1.30)$$

Используя явный вид плотности  $\mathcal{F}_2(x, x'; t)$  и учитывая симметрию (1.23), для двухчастичной функции распределения получаем выражение

$$f_2(x, x'; t) = N(N-1) \int dx_3 \dots dx_N D_N(x, x', x_3, \dots, x_N; t). \quad (1.31)$$

Аналогично можно определить  $s$ -частичную функцию распределения  $f_s(x, x', \dots, x^{(s-1)}; t)$ :

$$f_s(x, x', \dots, x^{(s-1)}; t) \equiv \langle \mathcal{F}_s(x, x', \dots, x^{(s-1)}; t) \rangle, \quad s \leq N. \quad (1.32)$$

Она выражается через функцию распределения Лиувилля:

$$\begin{aligned} f_s(x_1, x_2, \dots, x_s; t) &= \\ &= \frac{N!}{(N-s)!} \int dx_{s+1} \dots dx_N D_N(x_1, x_2, \dots, x_N; t). \end{aligned} \quad (1.33)$$

Макроскопические свойства системы полностью определяются заданием нескольких первых функций из введенной последовательности.

В соответствии с (1.19) многочастичные функции распределения (1.33) удовлетворяют условиям нормировки

$$\int dx_1 \dots dx_s f_s(x_1, \dots, x_s; t) = \frac{N!}{(N-s)!}. \quad (1.34)$$

Отметим, что во многих работах используются многочастичные функции  $\tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; t)$ , нормированные согласно условию

$$\int dx_1 \dots dx_s \tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; t) = N^s. \quad (1.35)$$

Этой нормировке соответствует определение

$$\tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; t) = N^s \int dx_{s+1} \dots dx_N D_N(x_1, \dots, x_N; t). \quad (1.36)$$

Очевидно,

$$f_s(x_1, \dots, x_s; t) = C_s \tilde{f}_s(x_1, \dots, x_s; t), \quad (1.37)$$

при этом

$$C_s = \frac{N!}{N^s (N-s)!}. \quad (1.38)$$

В предельном случае,  $N \rightarrow \infty$ , и при конечных значениях  $s$  коэффициент  $C_s$  обращается в единицу. Поэтому при рассмотрении систем с достаточно большим числом частиц различием между функциями  $f_s$  и  $\tilde{f}_s$  можно пренебречь.

Установим связь между средним значением произведения значений микроскопической плотности в двух различных точках фазового пространства и двухчастичной функцией распределения. В соответствии с определением (1.4)

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) = \\ & = \delta(x - x) \sum_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}(t)) + \sum_{\alpha \neq \alpha'} \delta(x - x_{\alpha}(t)) \delta(x' - x_{\alpha'}(t)). \end{aligned}$$

Усреднение первого слагаемого в правой части приводит к одночастичной функции распределения. Усредняя второе слагаемое, получаем двухчастичную функцию распределения:

$$\langle \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) \rangle = \delta(x - x') f(x, t) + f_2(x, x'; t). \quad (1.39)$$

Произведение значений микроскопической плотности в трех различных точках фазового пространства  $\mathcal{F}(x, t)$ ,  $\mathcal{F}(x', t)$  и  $\mathcal{F}(x'', t)$  удобно разбить на три группы слагаемых, с одинаковыми индексами, с двумя одинаковыми индексами и с разными индексами:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) \mathcal{F}(x'', t) & = \delta(x - x') \delta(x - x'') \sum_{\alpha} \delta(x - x_{\alpha}(t)) + \\ & + [\delta(x - x') + \delta(x - x'')] \sum_{\alpha \neq \alpha'} \delta(x' - x_{\alpha}(t)) \delta(x'' - x_{\alpha'}(t)) + \\ & + \delta(x' - x'') \sum_{\alpha \neq \alpha'} \delta(x - x_{\alpha}(t)) \delta(x' - x_{\alpha'}(t)) + \\ & + \sum_{\alpha \neq \alpha' \neq \alpha''} \delta(x - x_{\alpha}(t)) \delta(x' - x_{\alpha'}(t)) \delta(x'' - x_{\alpha''}(t)). \end{aligned}$$

В результате усреднения этого выражения получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) \mathcal{F}(x'', t) \rangle & = \delta(x - x') \delta(x - x'') f(x, t) + \\ & + [\delta(x - x') + \delta(x - x'')] f_2(x', x''; t) + \delta(x' - x'') f_2(x, x'; t) + \\ & + f_3(x, x', x''; t). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Аналогично можно показать, что среднее значение произведения значений микроскопической плотности в  $s$  различных точках фазового пространства выражается через последовательность функций  $f, f_2, \dots, f_{s-1}$  и  $f_s$ .

В отсутствие взаимодействия между частицами многочастичная функция  $f_s$  представляется в виде произведения  $s$  одночастичных функций. При наличии взаимодействия между частицами многочастичная функция в общем случае не представляется в виде произведения одночастичных функций; в частности, двухчастичная функция распределения не представляется в виде произведения двух одночастичных функций. Эффект взаимозависимости движения отдельных частиц может быть описан с помощью корреляционных функций. Например, двухчастичную функцию распределения можно записать в виде

$$f_2(x, x'; t) = f(x, t) f(x', t) + g(x, x'; t). \quad (1.41)$$

Первое слагаемое справа представляет собой двухчастичную функцию распределения в отсутствие взаимодействия между частицами; второе — описывает корреляцию частиц и обычно называется двухчастичной корреляционной функцией. Вообще говоря, двухчастичную корреляционную функцию следовало бы определять посредством равенства  $\tilde{f}_2(x, x'; t) = f(x, t) f(x', t) + \tilde{g}(x, x'; t)$ . Однако в предельном случае большого числа частиц ( $N \rightarrow \infty$ ) различие между функциями  $\tilde{g}(x, x'; t)$  и  $g(x, x'; t)$  можно пренебречь. Аналогичная ситуация возникает и при введении корреляционных функций высшего порядка.

Трехчастичную функцию распределения можно представить в виде

$$f_3(x, x', x''; t) = f(x, t) f(x', t) f(x'', t) + f(x, t) g(x', x''; t) + + f(x', t) g(x, x''; t) + f(x'', t) g(x, x'; t) + h(x, x', x''; t). \quad (1.42)$$

Первое слагаемое представляет собой трехчастичную функцию распределения в отсутствие взаимодействия между частицами; второе, третье и четвертое — описывают двухчастичные корреляции в системе; последнее — одновременную корреляцию трех частиц (трехчастичная корреляционная функция). Аналогично можно ввести корреляционные функции более высокого порядка, учитывающие эффекты, обусловленные корреляцией четырех и большего числа частиц. Последовательность корреляционных функций полностью описывает все эффекты, связанные с многочастичностью системы. Очевидно, при рассмотрении макроскопических свойств системы вместо последовательности функций распределения  $f(x, t), f_2(x, x'; t), \dots$  и  $f_s(x, x', \dots, x^{s-1}; t)$  можно использовать одночастичную функцию распределения  $f(x, t)$  и соответствующую последовательность корреляционных функций  $g(x, x'; t), h(x, x', x''; t)$  и т. д.

Последовательность функций распределения  $f(x, t)$ ,  $f_2(x, x'; t)$ , ... и  $f_s(x, x', \dots, x^{(s-1)}; t)$ , описывающих макроскопические свойства плазмы, удовлетворяет системе зацепляющихся уравнений, получившей название иерархии уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона. Эта система может быть получена с помощью статистического усреднения системы уравнений для микроскопической функции распределения и микроскопического поля. Так как функции  $f$ ,  $f_2$ , ... и  $f_s$  непосредственно выражаются через функцию  $D_N$  (согласно (1.33)), то иерархию уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона можно получить также с помощью непосредственного интегрирования уравнения Лиувилля (1.21) [109, 41].

Предположим для простоты, что внешние поля  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{V}_0$  отсутствуют. Систему уравнений (1.13) и (1.14) можно свести к одному уравнению. Действительно, используя соотношение (1.9), решение уравнения (1.14) нетрудно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -e' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \frac{\mathcal{F}(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.43)$$

Подставляя это решение в (1.13), получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathcal{F}(x, t) = \int dx' \mathcal{V}(x, x') \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t), \quad (1.44)$$

где  $\mathcal{V}(x, x')$  — некоторый двухчастичный оператор, описывающий кулоновское взаимодействие,

$$\mathcal{V}(x, x') \equiv \frac{ee'}{m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}. \quad (1.45)$$

Усредняем уравнение (1.44) с помощью распределения Лиувилля. Для этого умножаем его левую и правую части на функцию  $D_N$  и интегрируем по фазовому пространству  $N$  частиц. Применяя соотношение (1.26), убеждаемся, что в левой части полученного равенства операции усреднения и дифференцирования можно поменять местами. Подставляя в правую часть равенства соотношение (1.39), получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) f(x, t) = \int dx' \mathcal{V}(x, x') \{ \delta(x - x') f(x, t) + f_2(x, x'; t) \}. \quad (1.46)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения опускаем, так как оно соответствует учету собственной кулоновской энергии заряженных частиц (при выводе (1.44) необходимо помнить, что микроскопическое электрическое поле (1.43) в точке, где находится какой-либо заряд, определяется зарядами других частиц). Таким образом, получаем следующее уравнение, связывающее одночастич-

ную функцию распределения  $f(x, t)$  с двухчастичной функцией распределения  $f_2(x, x'; t)$ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f(x, t) = \int dx' \mathcal{V}(x, x') f_2(x, x'; t). \quad (1.47)$$

Это уравнение является первым из иерархии уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона. Для возможности решения уравнения (1.47), очевидно, необходимо найти уравнение для двухчастичной функции распределения  $f_2(x, x'; t)$ . С этой целью умножаем уравнение для микроскопической функции распределения  $\mathcal{F}(x, t)$  на микроскопическую функцию распределения  $\mathcal{F}(x', t)$ , а уравнение для микроскопической функции распределения  $\mathcal{F}(x', t)$  на функцию распределения  $\mathcal{F}(x, t)$  и складываем полученные равенства:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) = \\ & = \int dx'' [\mathcal{V}(x, x'') + \mathcal{V}(x', x'')] \mathcal{F}(x, t) \mathcal{F}(x', t) \mathcal{F}(x'', t). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Усредняя уравнение (1.48) с помощью распределения Лиувилля и используя соотношение (1.40), получаем уравнение, содержащее функции распределения  $f, f_2$  и  $f_3$ . Опуская в полученном уравнении слагаемые, отвечающие собственной кулоновской энергии заряженных частиц, и упрощая полученное уравнение с помощью (1.47), окончательно находим

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} - [\mathcal{V}(x, x') + \mathcal{V}(x', x)] \right\} f_2(x, x'; t) = \\ & = \int dx'' [\mathcal{V}(x, x'') + \mathcal{V}(x', x'')] f_3(x, x', x''; t). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Это уравнение связывает двухчастичную функцию распределения  $f_2$  с трехчастичной функцией распределения  $f_3$  и является вторым уравнением иерархии.

Аналогичным способом нетрудно получить всю иерархию уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона. В общем случае в уравнение, определяющее  $s$ -частичную функцию распределения  $f_s$ , входит  $(s + 1)$ -частичная функция распределения  $f_{s+1}$ :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{i \neq j}^s \mathcal{V}(x_i, x_j) \right\} f_s(x_1, x_2, \dots, x_s; t) = \\ & = \sum_{i=1}^s \int dx_{s+1} \mathcal{V}(x_i, x_{s+1}) f_{s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}; t). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Заметим, что при получении уравнений (1.47), (1.49) и (1.50) интегрирование проводилось в бесконечных пределах. Это соответствует предельному случаю  $V \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$  при  $n_0 = \frac{N}{V} = \text{const}$ . Если система занимает ограниченный объем, то в

уравнения входят дополнительные слагаемые, связанные с учетом граничных условий.

Иерархия уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона лежит в основе кинетической теории плазмы. Однако она не замкнута. Уравнение для одночастичной функции распределения содержит двухчастичную функцию, в уравнение для двухчастичной функции распределения входит трехчастичная функция и т. д. Если полное число частиц  $N$  достаточно велико, то уравнения иерархии практически составляют бесконечную цепочку. Для получения конечной системы уравнений цепочку необходимо оборвать. Различные кинетические приближения зависят от способа обрыва бесконечной цепочки уравнений. Наиболее простым приближением является приближение Власова, или приближение самосогласованного поля, при котором полностью пренебрегают корреляциями между частицами.

### 5. ПРИБЛИЖЕНИЕ САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ

В отсутствие корреляций между частицами все корреляционные функции следует положить равными нулю:  $g(x, x'; t) = 0$ ,  $h(x, x', x''; t) = 0$  и т. д. При этом любая многочастичная функция распределения представляется в виде произведения одночастичных функций:

$$f_s(x_1, x_2, \dots, x_s; t) = \prod_{i=1}^s f(x_i, t). \quad (1.51)$$

Подставляя в первое уравнение иерархии (1.47) функцию  $f_2(x, x'; t)$  в виде произведения двух одночастичных функций  $f(x, t)$  и  $f(x', t)$ , получаем

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \int d\mathbf{x}' \mathcal{U}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f(\mathbf{x}', t) \right\} f(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.52)$$

Это уравнение определяет одночастичную функцию распределения в пренебрежении корреляциями между частицами и обычно называется кинетическим уравнением Власова. Характерная особенность рассматриваемого приближения состоит в том, что взаимодействие между частицами в этом приближении полностью описывается усредненным самосогласованным полем [25].

Действительно, усредняя (1.43) по распределению Лиувилля, для среднего значения напряженности электрического поля в плазме получаем выражение

$$\overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} = -e' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{v}' \frac{f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (1.53)$$

используя которое кинетическое уравнение Власова (1.52) можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \overline{\mathbf{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.54)$$

Если плазма находится в постоянном внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , то кинетическое уравнение Власова имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{mc} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (1.55)$$

Нетрудно убедиться, что электрическое поле  $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ , определяемое (1.53), является решением уравнения

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} = 4\pi \bar{\rho}, \quad (1.56)$$

где  $\bar{\rho}(\mathbf{r}, t)$  — усредненное значение плотности заряда, определяемое выражением

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum e \int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (1.57)$$

(Макроскопическое уравнение (1.56) можно непосредственно получить, усредняя по распределению Лиувилля микроскопическое уравнение (1.14).) Кинетическое уравнение Власова (1.54) вместе с уравнением для самосогласованного поля (1.56) составляют замкнутую систему уравнений, которая и лежит в основе приближения Власова, дающего описание макроскопических свойств плазмы в пренебрежении корреляциями между частицами.

Интересно указать на формальное сходство между кинетическим уравнением Власова (1.54) и уравнением для микроскопической плотности (1.13). Система уравнений (1.54) и (1.56) формально совпадает с системой уравнений (1.13) и (1.14). Однако с физической точки зрения они существенно отличаются. В то время как уравнение (1.13) определяет микроскопическую функцию распределения, полностью описывающую случайное движение отдельных частиц, кинетическое уравнение Власова (1.54) определяет только макроскопическое распределение, получаемое в результате статистического усреднения микроскопической функции распределения. Флуктуации, связанные с движением отдельных частиц, и флуктуационные изменения поля не учитываются уравнением Власова. Аналогичным образом макроскопическое поле, определяемое уравнением (1.56), может быть получено в результате статистического усреднения микроскопического поля, определяемого уравнением (1.14). В то время как система уравнений (1.13) и (1.14) является точной, система, состоящая из кинетического уравнения Власова (1.54) и уравнения для самосогласованного поля (1.56), является приближенной и имеет ограниченную область применимости.

Как следует из определения (1.53), в кинетическом уравнении (1.54) и уравнении для самосогласованного поля (1.56) учитывается только кулоновское взаимодействие между заряженными частицами. Однако эти уравнения можно обобщить так, чтобы рассмотрение включало помимо кулоновского и электромагнитное взаимодействие между частицами. Для этого необходимо ввести усредненные самосогласованные электрическое (включающее кроме потенциальной и вихревую часть) и магнитное поля, обусловленные как



распределением заряда, так и распределением тока (связанных с движением заряженных частиц в плазме), и учесть их влияние на функцию распределения в кинетическом уравнении.

В общем случае кинетическое уравнение Власова с учетом электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами в плазме имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left( \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \bar{\mathbf{B}}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (1.58)$$

Самосогласованные электрическое и магнитное поля  $\bar{\mathbf{E}}$  и  $\bar{\mathbf{B}}$  определяются системой уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \bar{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \text{div } \bar{\mathbf{B}} &= 0, \\ \text{rot } \bar{\mathbf{B}} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \bar{\mathbf{j}}, \\ \text{div } \bar{\mathbf{E}} &= 4\pi \bar{\rho}, \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

где усредненные распределения заряда и тока  $\bar{\rho}(\mathbf{r}, t)$  и  $\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, t)$  выражаются через функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\bar{\rho} = \sum e \int d\mathbf{v} f, \quad (1.60)$$

$$\bar{\mathbf{j}} = \sum e \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f. \quad (1.61)$$

При наличии внешних зарядов и токов  $\rho_0$  и  $\mathbf{j}_0$  в правых частях третьего и четвертого уравнений системы (1.59) необходимо добавить соответствующие слагаемые. Если плазма находится в постоянном внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , то в уравнении (1.58) магнитное поле  $\mathbf{B}$  следует заменить суммарным магнитным полем  $\mathbf{B} + \mathbf{B}_0$ . Система уравнений (1.58) и (1.59) полностью описывает электромагнитные свойства плазмы в пренебрежении корреляциями между частицами и может быть положена в основу макроскопической электродинамики плазмы.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что кинетическое уравнение Власова (1.54) (или (1.58)) инвариантно относительно обращения времени. Поэтому решения кинетического уравнения Власова обратимы во времени, а само уравнение не может описывать приближение системы к состоянию термодинамического равновесия (распределения, удовлетворяющие кинетическому уравнению Власова, приводят к сохранению энтропии). Нетрудно показать, что любое однородное в пространстве и стационарное во времени распределение является решением уравнения (1.54) (среднее значение электрического поля в однородной системе вследствие ее нейтральности равно нулю). Для описания процессов установления равновесия в плазме необходим учет корреляций между частицами.

## 6. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ И ИНТЕГРАЛ СТОЛКНОВЕНИЙ

Приближение Власова основано на полном пренебрежении корреляциями между частицами. Учтем теперь двухчастичные корреляции в системе заряженных частиц, по-прежнему пренебрегая корреляциями между тремя частицами и большим числом частиц. Иными словами, предположим, что двухчастичная корреляционная функция  $g(x, x'; t)$  отлична от нуля, а корреляционные функции более высокого порядка равны нулю. Подставляя (1.41) и (1.42) в первые два уравнения иерархии Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона и учитывая, что трехчастичная корреляционная функция  $h(x, x', x''; t)$  равна нулю, получаем замкнутую систему уравнений для функций  $f(x, t)$  и  $g(x, x'; t)$ . Первое из этих уравнений удобно записать в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} f(x, t) = \int dx' \mathcal{V}(x, x') g(x, x'; t), \quad (1.62)$$

где  $\overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}$  — самосогласованное поле (1.56);  $\mathcal{V}(x, x')$  — двухчастичный кулоновский оператор (1.45). Левая часть уравнения (1.62) совпадает с левой частью кинетического уравнения Власова (1.54), а правая часть представляет собой выражение, зависящее от двухчастичной корреляционной функции. Это выражение описывает парные столкновения между частицами и называется интегралом столкновений.

Второе из указанных уравнений после упрощения с помощью (1.62) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + \frac{e}{m} \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e'}{m'} \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} - \right. \\ & \left. - \mathcal{V}(x, x') - \mathcal{V}(x', x) \right\} g(x, x'; t) - \int dx'' \mathcal{V}(x, x'') f(x, t) \times \\ & \times g(x', x''; t) - \int dx'' \mathcal{V}(x', x'') f(x', t) g(x', x''; t) = \\ & = [\mathcal{V}(x, x') + \mathcal{V}(x', x)] f(x, t) f(x', t). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Левая часть этого уравнения однородна по  $g(x, x'; t)$ , поэтому выражение, стоящее в правой части, можно рассматривать как вынуждающую силу, приводящую вследствие кулоновского взаимодействия к корреляциям частиц.

В предельном случае слабого взаимодействия между частицами систему связанных уравнений (1.62) и (1.63) можно существенно упростить. Во-первых, можно пренебречь влиянием самосогласованного поля, что позволяет опустить третье слагаемое в левой части уравнения (1.62) и четвертое и пятое — в (1.63). Заметим, что для пространственно-однородной системы эти слагаемые точно равны нулю. В дальнейшем будем считать, что система слабо неоднородна,

т. е. соответствующее самосогласованное поле малó по сравнению со средним корреляционным полем. Во-вторых, вследствие слабости взаимодействия в левой части (1.63) можно пренебречь также шестым и седьмым слагаемыми (это означает, что  $|g(x, x'; t)| \ll f(x, t) f(x', t)$ ). Наконец, по той же причине в левой части (1.63) можно опустить восьмое и девятое слагаемые (т. е. можно пренебречь взаимодействием двух частиц, если одна из них находится вблизи третьей). В результате система уравнений, определяющая функцию распределения  $f(x, t)$  и корреляционную функцию  $g(x, x'; t)$ , принимает вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) f(x, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int dx' U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} g(x, x'; t), \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'}\right) g(x, x'; t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \\ \times \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f(x, t)}{\partial \mathbf{v}} f(x', t) - \frac{1}{m'} \frac{\partial f(x', t)}{\partial \mathbf{v}'} f(x, t) \right\}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

где  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv ee' / (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ .

Чтобы получить из системы (1.64) и (1.65) кинетическое уравнение, т. е. уравнение, содержащее только одночастичную функцию распределения  $f(x, t)$ , необходимо из (1.64) исключить корреляционную функцию  $g(x, x'; t)$  с помощью (1.65).

Предполагая, что распределение почти однородно, нетрудно найти общее решение уравнения (1.65). Действительно, в принятом приближении интегрирование можно проводить вдоль прямолинейных траекторий. Обозначая корреляционную функцию в начальный момент времени  $t_0$  через  $g_0(x, x')$ , общее решение можно записать в виде

$$\begin{aligned} g(x, x'; t) = g_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}; \mathbf{r}' - \mathbf{v}'(t - t_0), \mathbf{v}') + \\ + \int_{t_0}^t dt' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - (\mathbf{v} - \mathbf{v}')(t - t')) \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f(x, t')}{\partial \mathbf{v}} f(x', t') - \right. \\ \left. - \frac{1}{m'} \frac{\partial f(x', t')}{\partial \mathbf{v}'} f(x, t') \right\}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Если функция распределения заметно не изменяется в течение времени взаимодействия, то можно пренебречь запаздыванием в системе (в этом случае выражение в фигурных скобках в (1.66) можно вынести за знак интеграла при  $t' = t$ ).

Выберем начальный момент времени  $t_0$  так, чтобы он был достаточно удален от рассматриваемого момента времени  $t$ . Тогда можно пренебречь начальными корреляциями между частицами в системе [15]:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} g_0(\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), \mathbf{v}; \mathbf{r}' - \mathbf{v}'(t - t_0), \mathbf{v}') = 0. \quad (1.67)$$

Это условие иногда называют принципом ослабления корреляций Боголюбова<sup>2</sup>. После несложных преобразований корреляционную функцию  $g(x, x'; t)$  окончательно записываем в виде

$$g(x, x'; t) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} f(\mathbf{v}', t) - \frac{1}{m'} \frac{\partial f(\mathbf{v}', t)}{\partial \mathbf{v}'} f(\mathbf{v}, t) \right\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - (\mathbf{v} - \mathbf{v}') t'). \quad (1.68)$$

Вследствие допущения об однородности системы найденная корреляционная функция зависит только от относительного расстояния между частицами. Подставляя ее в (1.64), получаем кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = J\{f\} \quad (1.69)$$

с интегралом столкновений

$$J\{f\} \equiv \frac{\partial}{\partial v_i} \sum_j \int d\mathbf{v}' I_{ij}(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \left\{ \frac{1}{m} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} f(\mathbf{v}', t) - \right. \\ \left. - \frac{1}{m'} \frac{\partial f(\mathbf{v}', t)}{\partial v'_j} f(\mathbf{v}, t) \right\}, \quad (1.70)$$

ядро которого определяется выражением

$$I_{ij}(\mathbf{v}) \equiv \frac{1}{2m} \int d\mathbf{r} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial r_i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\partial U(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{\partial r_j}. \quad (1.71)$$

Интегрирование в (1.71) удобно выполнить, воспользовавшись для потенциальной энергии  $U(\mathbf{r})$  представлением Фурье

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} U(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad U(\mathbf{k}) = \frac{4\pi e e'}{k^2}. \quad (1.72)$$

Подставляя (1.72) в (1.71), получаем

$$I_{ij}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{8\pi^2 m} \int d\mathbf{k} k_i k_j U^2(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (1.73)$$

Учитывая тензорный характер величины  $I_{ij}(\mathbf{v})$ , правую часть в (1.73) нетрудно преобразовать к виду

$$I_{ij}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{16\pi^2 m} \left( \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{v^2} \right) \int d\mathbf{k} k^2 U^2(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (1.74)$$

Введем сферические координаты в пространстве  $\mathbf{k}$ , тогда интегрирование по углам в (1.74) легко выполнить за счет дельта-функции. Интегрирование по  $k$  необходимо проводить в ограниченных пределах, от  $k_{\min}$  до  $k_{\max}$  ( $k_{\max}$  определяется средним значением расстояния наибольшего сближения двух частиц  $r_{\min} = ee'/T$ , где  $T$  —

<sup>2</sup> Заметим, что условие (1.67) соответствует предположению Л. Больцмана о начальном молекулярном беспорядке [16].

температура плазмы, а  $k_{\min}$  зависит от дебаевского радиуса  $a = \sqrt{T/4\pi e^2 n_0}$ . Таким образом, с логарифмической точностью получаем

$$I_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{2\pi e^2 e'^2}{m} \frac{v^2 \delta_{ij} - v_i v_j}{v^3} \ln \Lambda, \quad (1.75)$$

где  $\ln \Lambda$  — так называемый кулоновский логарифм ( $\Lambda = a/r_{\min}$ ). Формула (1.75) справедлива при выполнении условия  $\Lambda \gg 1$ .

Интеграл столкновений (1.70) с ядром (1.75) впервые получен Л. Д. Ландау [62] и обычно называется интегралом столкновений Ландау, а соответствующее уравнение (1.69) — кинетическим уравнением Ландау. Как следует из вывода, кинетическое уравнение Ландау (1.69) справедливо в случае слабого взаимодействия между частицами. При выводе интеграла столкновений Ландау кроме предположения о слабости взаимодействия пренебрегают также эффектом экранирования.

Учет эффекта экранирования позволяет получить более точное выражение для интеграла столкновений в кинетическом уравнении (1.69). Такое выражение было получено Р. Балеску [119] и А. Ленардом [160]. Для вывода интеграла столкновений Балеску — Ленарда из системы уравнений (1.62) и (1.63) в левой части (1.63) необходимо сохранить восьмое и девятое слагаемые, описывающие экранирование взаимодействия между частицами. Решение уточненного таким образом уравнения (1.65) приводит к выражению, совпадающему с (1.70), но с отличающимся от (1.71) ядром,

$$I_{ij}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \frac{2e^2 e'^2}{m} \int d\mathbf{k} k_i k_j \frac{\delta(\mathbf{k}(\mathbf{v} - \mathbf{v}'))}{k^4 |\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k})|^2} \quad (1.76)$$

( $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  — диэлектрическая проницаемость плазмы). Это выражение можно формально получить из (1.73), если в потенциальной энергии взаимодействия двух частиц учесть экранирование, обусловленное поляризацией плазмы. Заметим, что учет экранирования устраняет расходимость при малых значениях  $k$ , возникающую при интегрировании в (1.74). (Подробный вывод интеграла столкновений Балеску — Ленарда на основе другого подхода см. в гл. 9).

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (1.70), в отличие от кинетического уравнения Власова (1.54), приводит к возрастанию энтропии системы со временем. Действительно, используя явный вид интеграла столкновений (1.70), нетрудно показать, что для систем, описываемых кинетическим уравнением (1.69), справедлива  $H$ -теорема Больцмана [48],

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -k \int dx (1 + \ln f) \frac{\partial f}{\partial t} \geq 0, \quad (1.77)$$

где  $S$  — энтропия системы;  $k$  — постоянная Больцмана. Возрастание энтропии со временем указывает на необратимость процессов, описываемых (1.69). Существует прямая связь между необратимостью, вытекающей из (1.69), и принципом ослабления корреляций. Усло-

вие (1.67), использованное при получении (1.70), выделяет направление времени, что и означает необратимость процессов, описываемых на основе уравнения (1.69) и называемых обычно кинетическими процессами.

Решения кинетического уравнения (1.69) характеризуются следующими свойствами. Если функция распределения положительно определена в какой-либо начальный момент времени, то она будет положительно определенной и в любой последующий момент времени. Максвелловское распределение является стационарным решением кинетического уравнения (1.69), соответствующим максимальному значению энтропии системы. Любое решение кинетического уравнения (1.69) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к максвелловскому.

В многочастичной системе можно ввести иерархию времен релаксации, характеризующих различные динамические процессы [15]. Эволюция одночастичной функции распределения в зависимости от времени определяется кинетическими процессами и описывается кинетическим уравнением (1.69). Время, характеризующее релаксацию одночастичной функции распределения к локальному равновесному распределению, по порядку величины может быть определено как отношение средней длины свободного пробега  $l$  к средней скорости частиц  $s$ :

$$\tau_1 \simeq l/s. \quad (1.78)$$

Согласно (1.70) и (1.75) длина свободного пробега  $l$  определяется кулоновскими столкновениями.

Аналогично можно рассмотреть время релаксации двухчастичной корреляционной функции. По порядку величины его можно определить как отношение корреляционного расстояния, которое зависит от дебаевского радиуса  $a$ , к средней скорости частиц  $s$ :

$$\tau_2 \simeq a/s. \quad (1.79)$$

Если плазма находится в состоянии, мало отличающемся от равновесного, то кулоновская длина свободного пробега  $l$  значительно превышает дебаевский радиус  $a$ :

$$l \gg a. \quad (1.80)$$

Поэтому

$$\tau_1 \gg \tau_2, \quad (1.81)$$

т. е. корреляционная функция  $g$  релаксирует значительно быстрее, чем функция распределения  $f$ . Очевидно, при рассмотрении кинетических процессов начальным возмущением корреляционной функции можно пренебречь, так как в силу (1.81) корреляционная функция быстро релаксирует к значению, не зависящему от начального возмущения (это находится в соответствии с принципом ослабления корреляций). Далее, поскольку при изменении функции распределения  $f$  корреляционную функцию  $g$  можно считать квазистационарной, временная зависимость  $g$  определяется только функционально через  $f$  [15].

Пренебрежение корреляциями между тремя частицами и большим числом частиц оправдано для плазмы, находящейся вблизи теплового равновесия. В этом случае обрыв цепочки корреляционных функций можно связать с разложением по степеням плазменного параметра, в качестве которого выбирается величина, обратно пропорциональная числу частиц в сфере дебаевского радиуса:

$$\varepsilon = 1/a^3 n_0. \quad (1.82)$$

Нетрудно убедиться, что плазменный параметр (1.82) характеризует отношение средних плотностей потенциальной и кинетической энергии плазмы (для плазмы в состоянии теплового равновесия это отношение очень мало).

Значение плазменного параметра  $\varepsilon = 0$  соответствует полному пренебрежению корреляциями. Это значение плазменного параметра достигается в так называемой модели жидкостного предела ( $e \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow 0$ ,  $en_0 = \text{const}$ ,  $mn_0 = \text{const}$ ), в которой плазма рассматривается как сплошная непрерывная среда [171]. В жидкостном пределе иерархия уравнений Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона сводится к единственному уравнению — кинетическому уравнению Власова.

Если плазменный параметр отличен от нуля, но достаточно мал, то с помощью разложения по нему можно оборвать иерархию зацепляющихся уравнений (1.50) и получить замкнутую систему уравнений. Учет линейных членов в разложении иерархии по плазменному параметру соответствует учету парных корреляций и приводит к кинетическому уравнению с интегралом столкновений. Учет следующих членов разложения по параметру  $\varepsilon$  соответствует учету корреляций более высокого порядка между частицами.

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### 1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Электродинамические свойства любой материальной среды определяются ее электрической восприимчивостью, устанавливающей в общем случае нелинейную связь между поляризацией и напряженностью электрического поля в среде. При достаточно слабых полях поляризацию можно разложить по степеням напряженности и ограничиться учетом линейного слагаемого. Такое приближение соответствует линейной электродинамике, в которой электродинамические свойства среды описываются линейной восприимчивостью, зависящей при наличии пространственно-временной дисперсии от частоты и волнового вектора. Нелинейные эффекты описываются следующими членами в разложении поляризации по степеням напряженности поля. Соответствующие коэффициенты разложения можно рассматривать в качестве нелинейных восприимчивостей различного порядка. Очевидно, нелинейные восприимчивости зависят от частот и волновых векторов всех взаимодействующих волн. Электродинамические свойства среды с учетом нелинейных эффектов полностью определяются заданием как линейной, так и всех нелинейных восприимчивостей. Нелинейные восприимчивости плазмы введены в работах [28, 38, 51, 129]. Детальному рассмотрению нелинейных электродинамических свойств плазмы посвящена монография В. В. Пустовалова, В. П. Сирина [74].

Для установления связи между поляризацией и напряженностью электрического поля в плазме в пренебрежении корреляциями между частицами воспользуемся кинетическим уравнением Власова. Так как это уравнение нелинейное, то вытекающая из него связь между поляризацией и напряженностью поля в плазме также нелинейна. Хотя в общем виде это нелинейное соотношение с помощью кинетического уравнения получить не удастся, его нетрудно представить в виде ряда, а следовательно, можно определить линейную и нелинейные восприимчивости плазмы.

Предположим, что плазма однородна и находится в стационарном состоянии. В этом случае для решения кинетического уравнения удобно воспользоваться преобразованием Фурье. Обозначим



невозмущенную функцию распределения через  $f'_0(\mathbf{v})$ , а отклонение функции распределения, связанное с самосогласованным полем в плазме, — через  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , и ограничимся вначале для простоты рассмотрением потенциального электрического поля. Применяя к кинетическому уравнению (1.54) преобразование Фурье, получаем

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_{\mathbf{k}\omega} + \frac{e}{m}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m}\sum_{\omega', \mathbf{k}'}\mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}\frac{\partial f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$  и  $f_{\mathbf{k}\omega}$  — пространственно-временные компоненты Фурье напряженности электрического поля и отклонения функции распределения,

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = \int dt \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

$$f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = \int dt \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (2.3)$$

( $\mathbf{k}$  — волновой вектор,  $\omega$  — частота). Знак суммирования в (2.1) имеет следующий смысл:

$$\sum_{\omega, \mathbf{k}} \dots \rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \dots \quad (2.4)$$

Аналогично, применяя преобразование Фурье к уравнению для поля (1.56), получаем

$$i\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi(\rho_{\mathbf{k}\omega} + \rho_{\mathbf{k}\omega}^0), \quad (2.5)$$

где  $\rho_{\mathbf{k}\omega}$  и  $\rho_{\mathbf{k}\omega}^0$  — пространственно-временные компоненты Фурье плотностей индуцированных и внешних зарядов. Плотность индуцированных зарядов  $\rho_{\mathbf{k}\omega}$  непосредственно связана с отклонением функции распределения  $f_{\mathbf{k}\omega}$ :

$$\rho_{\mathbf{k}\omega} = e \int d\mathbf{v} f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}). \quad (2.6)$$

Вводя величину поляризации  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  посредством соотношения

$$i\mathbf{k}\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega} = -4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}, \quad (2.7)$$

уравнение (2.5) можно переписать в виде

$$i\mathbf{k}\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} \equiv i\mathbf{k}(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}) = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}^0 \quad (2.8)$$

( $\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega}$  — вектор индукции электрического поля).

Нелинейное уравнение (2.1) решаем методом итераций. Для этого представляем отклонение функции распределения  $f_{\mathbf{k}\omega}$  в виде бесконечного ряда

$$f_{\mathbf{k}\omega} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{\mathbf{k}\omega}^{(n)}, \quad (2.9)$$

отдельные члены которого соответствуют возрастающим степеням напряженности поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ . В линейном приближении из (2.1) получаем

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.10)$$

Теперь нетрудно записать рекуррентное соотношение, связывающее последующее приближение с предыдущим:

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(n)} = -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(n-1)}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (2.11)$$

Подставляя разложение  $f_{\mathbf{k}\omega}$  в виде ряда по степеням напряженности поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$  в (2.6) и используя соотношение (2.7), для поляризации  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  в случае потенциального электрического поля получаем следующее общее выражение:

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{k}\omega} = & \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} + \\ & + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} + \dots \\ \dots + & \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}}} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} \dots \\ & \dots E_{\mathbf{k}_n\omega_n} + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  — линейная, а  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ ,  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  и т. д. — нелинейные электрические восприимчивости плазмы. Суммирование в нелинейных слагаемых (2.12) производится по всем значениям промежуточных частот и волновых векторов, удовлетворяющих соотношениям

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \omega, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n = \mathbf{k}. \quad (2.13)$$

Для потенциального электрического поля векторы поляризации и напряженности  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  и  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$  продольные, поэтому восприимчивости, определяющие разложение  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  по степеням  $E_{\mathbf{k}\omega}$  в (2.12), являются скалярными величинами (продольные электрические восприимчивости). Нелинейные восприимчивости плазмы  $\chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n)$  ( $n \geq 2$ ) в отличие от линейной  $\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  — размерные величины. Размерность  $\chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n)$  равна обратной размерности напряженности поля  $E_{\mathbf{k}\omega}$  в степени  $(n - 1)$ . Подставляя выражение (2.12) в уравнение (2.7), получаем основное нелинейное уравнение для макроскопического поля в плазме (в предположении, что поле потенциально):

$$\begin{aligned} ik \left\{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} + \right. \\ \left. + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} + \dots \right\} = \\ = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}^0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, связанная с линейной электрической восприимчивостью  $\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  обычным соотношением  $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ . В дальнейшем будем ограничиваться учетом в (2.14) только линейных, квадратичных и кубических по полю слагаемых.

Нелинейное уравнение (2.14) полностью описывает динамику макроскопического поля в однородной плазме. При заданном распределении внешних зарядов  $\rho_{\mathbf{k}\omega}^0$  макроскопическое поле  $E_{\mathbf{k}\omega}$  однозначно определяется решением (2.14). Считая нелинейное взаимодействие слабым, уравнение (2.14) можно решать методом многовременных последовательных приближений, который позволяет исключать расходимости во времени отдельных членов разложения, связанные с резонансами в соответствующих приближениях.

## 2. ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

Используя итерационные решения кинетического уравнения (2.1), нетрудно найти явные выражения для продольной диэлектрической проницаемости и нелинейных продольных электрических восприимчивостей плазмы<sup>1</sup>. Диэлектрическая проницаемость плазмы  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  определяется хорошо известным выражением

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{k^2} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.15)$$

Нелинейные электрические восприимчивости второго и третьего порядка  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{k_1 k_2 | \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 |} \times \\ &\times \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{v} + i0} \left[ \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) + \right. \\ &\left. + \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] f_0(\mathbf{v}), \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \frac{1}{3} \{ \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \\ &+ \bar{\chi}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \bar{\chi}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1) \}, \quad (2.17) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> В работе [73] выражения для нелинейных восприимчивостей плазмы получены с помощью метода функционального среднего.

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{(-i)^2}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{k_1 k_2 k_3 |k_1 + k_2 + k_3|} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathbf{v} + i0} \left[ \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \right] \right\} f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Нелинейная электрическая восприимчивость  $n$ -го порядка определяется общей формулой

$$\begin{aligned} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) = & \sum \frac{(-i)^{n-1}}{n!} \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m}\right)^{n-1} \times \\ & \times \mathcal{P} \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n |k_1 + k_2 + \dots + k_n|} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) \mathbf{v} + i0} \times \\ & \times \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_n - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n) \mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \times \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[ \frac{1}{\omega_3 + \dots + \omega_n - (\mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n) \mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \left. \left. \times \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \dots \left( \frac{1}{\omega_n - \mathbf{k}_n \mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_n \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \dots \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь  $\mathcal{P}$  — всевозможные перестановки  $\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n$ ; слагаемое  $i0$  в знаменателях подынтегральных выражений означает, что интегрирование по соответствующим составляющим скорости  $\mathbf{v}$  следует производить с обходом особых точек снизу (правила обхода нетрудно установить, введя в правую часть кинетического уравнения (2.1) интеграл столкновений в виде  $-\nu f_{\mathbf{k}\omega}$ ,  $\nu$  — эффективная частота столкновений, и положив в пределе  $\nu \rightarrow 0$ );  $\Sigma$  — суммирование по сортам частиц.

Вследствие вещественности поляризации и напряженности электрического поля  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  линейная и нелинейные электрические восприимчивости плазмы удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) &= \chi^{(1)*}(-\omega, -\mathbf{k}), \\ \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= -\chi^{(2)*}(-\omega_1, -\mathbf{k}_1; -\omega_2, -\mathbf{k}_2), \\ \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \\ &= \chi^{(3)*}(-\omega_1, -\mathbf{k}_1; -\omega_2, -\mathbf{k}_2; -\omega_3, -\mathbf{k}_3). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Нелинейные электрические восприимчивости плазмы симметричны относительно перестановок своих аргументов:

$$\left. \begin{aligned} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \chi^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1), \\ \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \chi^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \dots \\ &\dots = \chi^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Симметрия непосредственно вытекает из разложения (2.12). Заметим, что величина  $\bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  (2.18) симметрична относительно перестановки  $\omega_2 \mathbf{k}_2 \rightleftharpoons \omega_3 \mathbf{k}_3$ , но не симметрична относительно перестановок  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2$  и  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3$ . Нелинейные восприимчивости второго порядка удовлетворяют также соотношению симметрии

$$\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \kappa^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2; -\omega_2, -\mathbf{k}_2). \quad (2.22)$$

Интегрированием по частям выражения для диэлектрической проницаемости и нелинейных восприимчивостей плазмы (2.15), (2.16) и (2.18) можно привести к виду

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum \frac{4\pi e^2}{m} \int d\mathbf{v} \frac{1}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)^2} f_0(\mathbf{v}); \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = & \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{k_1 k_2 k} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v} + i0)(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)} \left( \frac{k_1^2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v} + i0} + \right. \\ & \left. + \frac{k_2^2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} + \frac{k^2 \cdot \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \right) f_0(\mathbf{v}), \quad (2.24) \end{aligned}$$

где  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ;

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{1}{(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0)(\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v} + i0)(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)^2} \left\{ \frac{2}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \times \left( 3 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_3}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} + \frac{k_2^2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_3}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} + \frac{k_3^2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v} + i0} \right) + \\ & + \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} \left( 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} + \frac{k_2^2 \cdot \mathbf{k}'\mathbf{k}_3}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} + \right. \\ & \left. + \frac{k_3^2 \cdot \mathbf{k}'\mathbf{k}_2}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v} + i0} + \frac{k'^2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} \right) \left. \right\} f_0(\mathbf{v}), \quad (2.25) \end{aligned}$$

где  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ ,  $\omega' = \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ .  
В длинноволновом пределе ( $k \rightarrow 0$ ) из (2.23) получаем

$$\varepsilon(\omega, 0) = 1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2}. \quad (2.26)$$

Таким же выражением определяется диэлектрическая проницаемость холодной плазмы (при  $T = 0$ ). Напомним, что независимость диэлектрической проницаемости холодной плазмы от волнового вектора означает отсутствие пространственной дисперсии в этом случае. Если плазма находится в состоянии теплового равновесия, то в качестве функций распределения  $f_0(\mathbf{v})$  следует использовать

максвелловские функции. При этом продольная диэлектрическая проницаемость плазмы может быть записана в виде [88]

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{1}{a^2 k^2} \{1 - \varphi(z) + i\sqrt{\pi} z e^{-z^2}\}, \quad (2.27)$$

где  $z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega}{ks}$  — безразмерная частота;  $\varphi(z)$  — вещественная функция,

$$\varphi(z) \equiv 2ze^{-z^2} \int_0^z dx e^{x^2}. \quad (2.28)$$

Нелинейные восприимчивости плазмы  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\kappa^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  в предельном случае больших длин волн,  $k_1 = k_2 \rightarrow 0$  и  $k_1 = k_2 = k_3 \rightarrow 0$ , обращаются в нуль. В этом нетрудно убедиться с помощью формул (2.24) и (2.25):

$$\kappa^{(2)}(\omega_1, 0; \omega_2, 0) = 0; \quad \kappa^{(3)}(\omega_1, 0; \omega_2, 0; \omega_3, 0) = 0. \quad (2.29)$$

Заметим, что значения нелинейных восприимчивостей  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\kappa^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  при нулевой температуре отличаются от их значений в длинноволновом пределе.

Нелинейные восприимчивости холодной плазмы нетрудно найти с помощью формул (2.24) и (2.25), разложив в подынтегральных выражениях множители, стоящие перед функцией распределения  $f_0(\mathbf{v})$ , в ряд по степеням скорости  $v$ . Таким способом для нелинейной восприимчивости второго порядка получаем выражение

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega} \frac{1}{k_1 k_2 k} \times \\ &\times \left( \frac{k_1^2}{\omega_1} \mathbf{k} \mathbf{k}_2 + \frac{k_2^2}{\omega_2} \mathbf{k} \mathbf{k}_1 + \frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ;  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Эта формула справедлива при выполнении условий

$$k_1 s \ll \omega_1, \quad k_2 s \ll \omega_2, \quad ks \ll \omega. \quad (2.31)$$

Точно такое же выражение для  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  можно получить на основе гидродинамического описания плазмы, при котором вводятся макроскопические плотности и скорости  $n(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  для электронов и ионов, удовлетворяющие гидродинамическим уравнениям непрерывности и движения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m} \mathbf{E}. \quad (2.32)$$

Самосогласованное электрическое поле  $\mathbf{E}$  определяется уравнением (1.56), в котором плотность заряда выражается через плотности частиц отдельных компонент,  $\rho = \sum en$ .

Приведем выражение для тепловой поправки к (2.30), справедливое при выполнении условий (2.31):

$$\Delta\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega} \frac{1}{k_1k_2k} \frac{T}{m} \times \\ \times \left\{ \frac{k^2}{\omega} \left( 3 \frac{k^2}{\omega^2} + \frac{k_1^2}{\omega_1^2} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} + 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{\omega\omega_1} + 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega\omega_2} + \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}{\omega_1\omega_2} \right) \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \right. \\ \left. + (\omega, \mathbf{k} \rightleftharpoons \omega_1, \mathbf{k}_1) + (\omega, \mathbf{k} \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2) \right\}. \quad (2.33)$$

В случае достаточно малых частот, когда условия (2.31) не выполняются, формулой (2.30) пользоваться нельзя. Если одна из частот, входящих в выражение  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  (например,  $\omega_1$ ), и суммарная частота  $\omega$  достаточно велики, так что выполняются условия  $k_1s \ll \omega_1$  и  $ks \ll \omega$  (частота  $\omega_2$  может быть при этом произвольной), из (2.24) нетрудно получить приближенное выражение

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{1}{k_1k_2k} \times \\ \times \left\{ \left[ 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega\omega_2} (1 - a^2k_2^2\chi^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2)) - \frac{k_2^2}{\Omega^2} \chi^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) \right] \mathbf{k}\mathbf{k}_1 + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega_1} \left( \frac{k_1^2}{\omega_1} + 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{\omega} \right) \right\}, \quad (2.34)$$

где  $\chi^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2)$  — парциальная линейная восприимчивость. В предельном случае ( $\omega_2 = 0$ ) из (2.34) получаем

$$\chi^{(2)}(\omega, k_1; 0, k_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{1}{k_1k_2k} \times \\ \times \left\{ -3 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1}{s^2} + \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega^2} (k_1^2 + 2\mathbf{k}\mathbf{k}_1) \right\}. \quad (2.35)$$

Если  $k_2s \ll \omega_2$ , то формула (2.34) переходит в формулу гидродинамического предела (2.30).

Согласно (2.25) при нулевой температуре плазмы

$$\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \sum \frac{1}{2} \frac{e^3}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_2\omega_3\omega^2} \frac{1}{k_1k_2k_3k} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega'} \left( 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega} + \frac{k_2^2}{\omega_2} + \frac{k_3^2}{\omega_3} + \frac{k'^2}{\omega'} \right) \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \right. \\ \left. + \frac{k_2^2k_3^2}{\omega_2\omega_3} + \frac{2}{\omega} \left( 3 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_3}{\omega} + \frac{k_2^2}{\omega_2} \mathbf{k}\mathbf{k}_3 + \frac{k_3^2}{\omega_3} \mathbf{k}\mathbf{k}_2 \right) \right\} \mathbf{k}\mathbf{k}_1. \quad (2.36)$$

В то же время с помощью гидродинамических уравнений (2.32) получаем

$$\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega} \frac{1}{k_1k_2k_3k} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega'} \left( \frac{k^2}{\omega} - \frac{k_1^2}{\omega_1} + \frac{k_2^2}{\omega_2} + \frac{k_3^2}{\omega_3} + \frac{k'^2}{\omega'} \right) \mathbf{k}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \right.$$

$$+ \frac{1}{\omega\omega_1} k^2 k_1^2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \frac{1}{\omega_2\omega_3} k_2^2 k_3^2 \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}_1 \left. \right\}. \quad (2.37)$$

Различие между (2.36) и (2.37) обусловлено неоднозначностью в определении несимметризованных величин  $\bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1; \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$ . Нетрудно убедиться, однако, что при симметризации выражений (2.36) и (2.37) относительно перестановок  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2$  и  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3$  получается одно и то же выражение:

$$\begin{aligned} \kappa^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \left( \frac{1}{\omega'} \left[ \frac{k^2}{\omega} - \frac{k_1^2}{\omega_1} + \frac{k_2^2}{\omega_2} + \frac{k_3^2}{\omega_3} + \frac{k'^2}{\omega'} \right] \mathbf{k} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\omega\omega_1} k^2 k_1^2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \frac{1}{\omega_2\omega_3} k_2^2 k_3^2 \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}_1 \right) + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2) + \right. \\ & \left. + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3) \right\}. \quad (2.38) \end{aligned}$$

С помощью тождественных преобразований симметризованную восприимчивость (2.38) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \kappa^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{k_1 k_2 k_3 k} \left\{ \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k} \mathbf{k}_3}{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2} + \right. \\ & + \left( \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3}{\omega_2^2 \omega_3^2 \omega^2} + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega_3^2 \omega^2 \omega'^2} + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega_2^2 \omega^2 \omega'^2} - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega_1^2 \omega_3^2 \omega'^2} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega'^2} \right) \mathbf{k} \mathbf{k}_1 + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2) + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3) \right\}. \quad (2.39) \end{aligned}$$

Такая форма записи оказывается чрезвычайно удобной при сопоставлении значений восприимчивости в отсутствие и при наличии внешнего магнитного поля.

Интересно отметить, что выражения (2.36) и (2.37) характеризуются одинаковыми особенностями при условии  $\omega' \equiv \omega_2 + \omega_3 = 0$ . Поэтому различие их связано с неоднозначностью выбора частей, не содержащих особенности при этом условии. Симметризуя относительно возможных перестановок неособенные части в (2.36) или (2.37), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}'^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega'} \left( \frac{k^2}{\omega} - \frac{k_1^2}{\omega_1} + \frac{k_2^2}{\omega_2} + \frac{k_3^2}{\omega_3} + \frac{k'^2}{\omega'} \right) \mathbf{k} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \right. \\ & + \frac{1}{3} \left( \frac{k_1^2 k_2^2}{\omega_1 \omega_2} \mathbf{k} \mathbf{k}_3 + \frac{k_1^2 k_3^2}{\omega_1 \omega_3} \mathbf{k} \mathbf{k}_2 + \frac{k_2^2 k_3^2}{\omega_2 \omega_3} \mathbf{k} \mathbf{k}_1 + \frac{k_1^2 k^2}{\omega_1 \omega} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2^2 k^2}{\omega_2 \omega} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 + \frac{k_3^2 k^2}{\omega_3 \omega} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \right) \right\}. \quad (2.40) \end{aligned}$$



Напомним, что формула (2.40), так же как (2.36) и (2.37), справедлива только при выполнении условий  $k_1 s \ll \omega_1$ ,  $k_2 s \ll \omega_2$ ,  $k_3 s \ll \omega_3$  и  $k' s \ll \omega'$ . Если условие  $k' s \ll \omega'$  не выполняется, то в слагаемых (2.40), содержащих множители  $\omega'^{-1}$  и  $\omega'^{-2}$ , следует сделать замену

$$\omega'^{-n} \rightarrow \frac{1}{n_0} \int dv \frac{f_0(v)}{(\omega' - k'v + i0)^n}, \quad n = 1, 2.$$

Симметризованная восприимчивость  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  связана с величинами (2.40) прежним соотношением (2.17).

При нахождении тепловой поправки к (2.38) удобно воспользоваться для несимметризованной восприимчивости  $\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  следующим представлением:

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \int dv \frac{1}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 v + i0)(\omega_2 - \mathbf{k}_2 v + i0)(\omega_3 - \mathbf{k}_3 v + i0)(\omega - \mathbf{k}v + i0)} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega' - k'v + i0} \left( \frac{k^2}{\omega - \mathbf{k}v + i0} - \frac{k_1^2}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 v + i0} + \right. \right. \\ & + \frac{k_2^2}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 v + i0} + \frac{k_3^2}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 v + i0} + \left. \frac{k'^2}{\omega' - k'v + i0} \right) \mathbf{k}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + \\ & \left. + \frac{k^2 k_1^2 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{(\omega_1 - \mathbf{k}_1 v + i0)(\omega - \mathbf{k}v + i0)} + \frac{k_2^2 k_3^2 \cdot \mathbf{k}\mathbf{k}_1}{(\omega_2 - \mathbf{k}_2 v + i0)(\omega_3 - \mathbf{k}_3 v + i0)} \right\} f_0(v). \end{aligned} \quad (2.41)$$

(Непосредственной проверкой нетрудно показать, что (2.41) отличается от (2.25) только частью, антисимметричной относительно перестановок  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2$  и  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3$ .) В предельном случае ( $T = 0$ ) из формулы (2.41) для несимметризованной восприимчивости  $\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  непосредственно следует гидродинамическое выражение (2.37). Выбирая в качестве  $f_0(v)$  максвелловскую функцию и разлагая подинтегральное выражение (2.41) в ряд по степеням  $v$ , для тепловой поправки к (2.37) находим

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega \omega'} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \frac{T}{m} \times \\ & \times \left\{ \frac{k'^2}{\omega'} \left( \frac{k_1^2}{\omega_1^2} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} + \frac{k_3^2}{\omega_3^2} + \frac{k^2}{\omega^2} + 3 \frac{k'^2}{\omega'^2} + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}{\omega_1 \omega_2} + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3}{\omega_1 \omega_3} + \right. \right. \\ & + \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}{\omega_2 \omega_3} + \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}}{\omega_1 \omega} + \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}}{\omega_2 \omega} + \frac{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}}{\omega_3 \omega} + 2 \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}'}{\omega_1 \omega'} + 2 \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{k}'}{\omega_2 \omega'} + 2 \frac{\mathbf{k}_3 \mathbf{k}'}{\omega_3 \omega'} + \\ & \left. + 2 \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\omega \omega'} \right) \mathbf{k}\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega', \mathbf{k}') + (\omega_2, \mathbf{k}_2 \rightleftharpoons \omega', \mathbf{k}') + \\ & \left. + (\omega_3, \mathbf{k}_3 \rightleftharpoons \omega', \mathbf{k}') + (\omega, \mathbf{k} \rightleftharpoons \omega', \mathbf{k}') \right\}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Тепловая поправка к (2.38) определяется симметризацией этого выражения относительно перестановок  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2$  и  $\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3$ .

В заключение отметим, что нелинейные восприимчивости плазмы (в отличие от линейной восприимчивости, зависимость которой от волнового вектора исчезает в пренебрежении тепловым движением частиц) всегда зависят от волновых векторов взаимодействующих полей. Эту зависимость можно интерпретировать как нелинейную пространственную дисперсию плазмы. Действительно, причиной нелокальности связи между индуцированными зарядами и полем в этом случае является перенос частиц, обусловленный не тепловым движением, а осцилляциями частиц во взаимодействующих полях [74].

### 3. МЕТОД МНОГОВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Перейдем теперь к нахождению решения нелинейного уравнения (2.14), определяющего макроскопическое поле в плазме. При получении этого уравнения было использовано разложение поляризации в ряд по степеням напряженности электрического поля, однако для решения его метод последовательных приближений непосредственно неприменим, так как отдельные члены разложения могут оказаться расходящимися во времени (секулярными) из-за резонансов в соответствующих уравнениях. Эту трудность можно устранить, если использовать метод многовременных последовательных приближений [131, 144, 175, 176], являющийся одним из видоизменений общего метода Боголюбова — Крылова [61].

Обозначим безразмерный малый параметр, характеризующий нелинейное взаимодействие, через  $\alpha$  и введем иерархию времен  $t, t', t'', \dots$  с характерными периодами, последовательно увеличивающимися в  $\alpha^{-1}$  раз<sup>2</sup>. Решение уравнения (2.14) представим в виде разложения по степеням параметра  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(t) \rightarrow \alpha \mathbf{E}_k^{(1)}(t, t', t'', \dots) + \alpha^2 \mathbf{E}_k^{(2)}(t, t', t'', \dots) + \\ + \alpha^3 \mathbf{E}_k^{(3)}(t, t', t'', \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (2.43)$$

и предположим, что отдельные члены разложения (2.43) зависят от  $t, t', t'', \dots$ , которые будем считать независимыми переменными. Диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  и нелинейные электрические восприимчивости  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ ,  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  и т. д., входящие в уравнение (2.14), будем рассматривать как дифференциальные операторы  $(\omega \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t})$ , и разложим производные по времени согласно

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t''} + \dots \quad (2.44)$$

<sup>2</sup> Зависимости величин от времен различных масштабов при учете нелинейного взаимодействия волны проанализированы в работе [56].

Подставляя разложения (2.43) и (2.44) в уравнение (2.14) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ , получаем [180] последовательность уравнений для нахождения отдельных членов разложения (2.43):

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -\frac{4\pi i}{k} \rho_{\mathbf{k}\omega}^{(j)}, \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega}^{(2)} = \\ & = -\sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(1)} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(1)} - i \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t'} E_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega}^{(3)} = & -\sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(1)} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(1)} E_{\mathbf{k}_3\omega_3}^{(1)} - \\ & -\sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) (E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(1)} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(2)} + E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(2)} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(1)}) - \\ & -i \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \left\{ \frac{\partial \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\partial \omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(1)} \frac{\partial}{\partial t'} E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(1)} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\partial \omega_2} E_{\mathbf{k}_1\omega_1}^{(1)} \frac{\partial}{\partial t'} E_{\mathbf{k}_2\omega_2}^{(1)} \right\} - i \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t'} E_{\mathbf{k}\omega}^{(2)} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} - i \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t''} E_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

где  $t, t', t'', \dots$  — независимые переменные (произвол в определении этих времен можно устранить, потребовав, чтобы решения системы (2.45) — (2.47) не содержали секулярных слагаемых). Заметим, что при наличии пространственной дисперсии нелинейное взаимодействие приводит также к зависимости амплитуд поля от пространственных координат. Однако такие эффекты пространственной неоднородности взаимодействующих полей здесь и далее не учитываются.

В качестве первого приближения рассмотрим линеаризованное уравнение (2.45). Полагая правую часть его равной нулю, получаем уравнение для свободных колебаний:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = 0. \quad (2.48)$$

Это уравнение допускает отличные от нуля решения только при частотах  $\omega$  и волновых векторах  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному соотношению

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.49)$$

корни которого характеризуют собственные колебания в плазме (при фиксированном вещественном значении волнового вектора  $\mathbf{k}$  корень определяет частоту  $\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  и декремент затухания  $\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  соответствующего собственного колебания  $\alpha$ ). Решение уравнения (2.48), соответствующую

щее определенному корню дисперсионного уравнения (2.49), представим в виде

$$E_k^\alpha(t) = E_k^\alpha \cos(\omega_k^\alpha t + \Phi_k^\alpha), \quad E_k^\alpha \equiv E_{k0}^\alpha e^{-\gamma_k^\alpha t}, \quad (2.50)$$

где  $E_{k0}^\alpha$  и  $\Phi_k^\alpha$  — начальные соответственно амплитуда и фаза колебания. Если функция распределения частиц в плазме  $f_0(v)$  изотропна, то диэлектрическая проницаемость  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$  зависит только от модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$ :  $\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \equiv \epsilon(\omega, k)$ . В этом случае  $\omega_k^\alpha$ ,  $\gamma_k^\alpha$  и  $\Phi_k^\alpha$  являются вещественными функциями  $k$ . Из условия вещественности напряженности поля следует, что

$$E_k^* = E_{-k}. \quad (2.51)$$

В пренебрежении затуханием временная компонента Фурье решения (2.50) имеет вид

$$E_{k\omega}^\alpha = \pi E_k^\alpha \{ e^{-i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega - \omega_k^\alpha) + e^{i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega + \omega_k^\alpha) \}. \quad (2.52)$$

Рассмотрим теперь нелинейные эффекты, связанные с учетом в уравнении (2.14) слагаемых, квадратичных по амплитуде поля (в этом приближении взаимодействие волн описывается нелинейными восприимчивостями второго порядка). При учете нелинейного взаимодействия волн первое приближение для напряженности поля собственных колебаний также имеет вид (2.50) или (2.52), однако амплитуду  $E_k^\alpha$  и фазу  $\Phi_k^\alpha$  следует считать изменяющимися функциями, зависящими от  $t'$ :

$$E_{k\omega}^\alpha(t') = \pi E_k^\alpha(t') \{ e^{-i\Phi_k^\alpha(t')} \delta(\omega - \omega_k^\alpha) + e^{i\Phi_k^\alpha(t')} \delta(\omega + \omega_k^\alpha) \}. \quad (2.53)$$

Поправка к первому приближению  $E_{k\omega}^{(2)}$  определяется уравнением (2.46), в правой части которого, вообще говоря, есть резонансные слагаемые (например, последнее слагаемое, если только оно отлично от нуля, всегда находится в резонансе с левой частью).

Пусть поля  $E_{k_1\omega_1}$ ,  $E_{k_2\omega_2}$  и  $E_{k\omega}$  соответствуют собственным колебаниям плазмы с частотами  $\omega_{k_1}^\alpha$ ,  $\omega_{k_2}^\beta$  и  $\omega_k^\gamma$ . Если частоты  $\omega_{k_1}^\alpha$ ,  $\omega_{k_2}^\beta$  и  $\omega_k^\gamma$  удовлетворяют условию

$$\omega_{k_1}^\alpha + \omega_{k_2}^\beta = \omega_k^\gamma, \quad (2.54)$$

то нелинейное слагаемое в правой части (2.46) также является резонансным (трехволновой резонанс). Из условия обращения в нуль резонансной части справа в (2.46) получаем уравнение, описывающее медленную зависимость амплитуды линейного приближения  $E_k^\gamma$  и фазы  $\Phi_k^\gamma$  от времени:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} E_k^\gamma e^{-i\Phi_k^\gamma} = \\ & = \frac{i}{2} \frac{1}{\frac{\partial \epsilon(\omega_k^\gamma, \mathbf{k})}{\partial \omega_k^\gamma}} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \chi^{(2)}(\omega_{k_1}^\alpha, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}^\beta, \mathbf{k}_2) E_{k_1}^\alpha E_{k_2}^\beta e^{-i(\Phi_{k_1}^\alpha + \Phi_{k_2}^\beta)}. \quad (2.55) \end{aligned}$$

В более общем случае условие трехволнового резонанса можно записать в виде

$$|\omega_{k_1}^\alpha \pm \omega_{k_2}^\beta| = \omega_k^\gamma. \quad (2.56)$$

Уравнение (2.55) справедливо только в том случае, если две волны с частотами  $\omega_{k_1}^\alpha$  и  $\omega_{k_2}^\beta$  находятся в резонансе с третьей волной с частотой  $\omega_k^\gamma$ , т. е. если выполнено трехволновое резонансное условие (2.56). Если трехволновое резонансное условие не выполняется, то амплитуды линейного приближения не зависят от времени  $t'$ :

$$\frac{\partial}{\partial t'} E_k^\gamma = 0. \quad (2.57)$$

В этом случае поправка к напряженности поля во втором приближении выражается через напряженности поля в первом приближении:

$$E_{k\omega}^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{k_1\omega_1}^{(1)} E_{k_2\omega_2}^{(1)}. \quad (2.58)$$

Заметим, что частота поправки к напряженности поля во втором приближении в нерезонансном случае отличается от собственной частоты, хотя поля в первом приближении и соответствуют собственным колебаниям.

Предполагая, что трехволновые резонансы отсутствуют, рассмотрим следующую поправку к напряженности поля, связанную с учетом в уравнении (2.14) нелинейных слагаемых третьего порядка. Так как в отсутствие трехволновых резонансов амплитуда линейного приближения не зависит от времени  $t'$ , то, согласно (2.58), амплитуда второго приближения также не зависит от  $t'$ . Поэтому уравнение (2.47) для третьей поправки к напряженности поля существенно упрощается:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{k\omega}^{(3)} = & \frac{1}{3} \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \left\{ \left( 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \chi^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)}{\varepsilon(\omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) \right) + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_2, \mathbf{k}_2) + \right. \\ & \left. + (\omega_1, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3) \right\} E_{k_1\omega_1}^{(1)} E_{k_2\omega_2}^{(1)} E_{k_3\omega_3}^{(1)} - i \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t''} E_{k\omega}^{(1)}. \quad (2.59) \end{aligned}$$

(При записи этого уравнения использовано свойство симметрии восприимчивости  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ .) Последнее слагаемое в правой части (2.59) резонансное, резонансный характер могут носить также нелинейные слагаемые. Из условия обращения в нуль резонансной правой части нетрудно получить уравнение, описывающее зависимость амплитуды первого приближения от времени  $t''$ .

Подставляя в правую часть (2.59) напряженности поля  $E_{k\omega}^{(1)}$  в виде (2.53), убеждаемся, что отдельные слагаемые под знаком суммы в (2.59) соответствуют вынуждающим силам с комбинационными

частотами  $|\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} \pm \omega_{k_3}|$ . Очевидно, резонанс возможен, если хотя бы одна из указанных комбинационных частот совпадает с частотой  $\omega_k$ . Следовательно, условие четырехволнового резонанса можно записать в виде

$$|\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} \pm \omega_{k_3}| = \omega_k. \quad (2.60)$$

Предполагая соотношение (2.60) выполненным, из условия обращения в нуль резонансной правой части в (2.59) получаем уравнение для временной зависимости амплитуды  $E_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t^n} E_k e^{-i\Phi_k} = & -\frac{i}{12} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon(\omega_k, k)}{\partial \omega_k}} \times \\ & \times \sum'_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}} \left\{ \left( 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \chi^{(2)}(\omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3)}{\varepsilon(\omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \right) + (\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2) + \\ & \left. + (\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1 \rightleftharpoons \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \right\} E_{k_1} E_{k_2} E_{k_3} e^{-i(\Phi_{k_1} + \Phi_{k_2} + \Phi_{k_3})} \quad (2.61) \end{aligned}$$

(штрих у знака суммы в правой части (2.61) указывает на необходимость учета всех возможных комбинаций волн, удовлетворяющих условию резонанса (2.60)).

#### 4. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Рассмотрим теперь общий случай, отказавшись от допущения о безвихревом характере электрического поля в плазме. В пренебрежении корреляциями между частицами электромагнитное поле в общем случае определяется системой уравнений Максвелла (1.59), причем для нахождения плотностей индуцированного заряда и индуцированного тока необходимо воспользоваться кинетическим уравнением (1.58).

Систему уравнений Максвелла (1.59) удобно свести к одному уравнению для напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , исключив из (1.59) магнитное поле  $\mathbf{B}$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_0). \quad (2.62)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность индуцированного тока (1.61);  $\mathbf{j}_0$  — плотность внешних токов. Вместо плотности индуцированного тока  $\mathbf{j}$  вводим вектор поляризации  $\mathbf{P}$ , определяя его с помощью соотношения

$$\dot{\mathbf{P}} = 4\pi \mathbf{j}. \quad (2.63)$$

Используя (1.61), вектор поляризации  $\mathbf{P}$  непосредственно связываем с отклонением функции распределения  $f(\mathbf{v})$ , обусловленным

самоогласованным полем в плазме. Заметим, что вектор поляризации  $\mathbf{P}$  в общем случае содержит как потенциальную (продольную), так и вихревую (поперечную) часть.

Решаем, далее, кинетическое уравнение (1.58) с помощью преобразования Фурье. Разлагая отклонение функции распределения  $f(\mathbf{v})$  и поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в пространственно-временные интегралы Фурье и выражая магнитное поле  $\mathbf{B}$  через электрическое поле  $\mathbf{E}$  с помощью первого уравнения системы (1.59), получаем

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_{\mathbf{k}\omega} + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}]] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m} \sum_{\omega', \mathbf{k}' \neq \omega, \mathbf{k}} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{\omega'} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}', \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}]] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} = 0. \quad (2.64)$$

Применяя к этому уравнению метод последовательных приближений, представляем  $f_{\mathbf{k}\omega}$  в виде разложения в ряд по степеням напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ . Подставляя результат в выражение для плотности индуцированного тока (1.62) и используя соотношение (2.63), получаем разложение вектора поляризации  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  в ряд по степеням напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ :

$$P_i(\omega, \mathbf{k}) = \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \times \\ \times E_j(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k(\omega_2, \mathbf{k}_2) + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) \times \\ \times E_j(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k(\omega_2, \mathbf{k}_2) E_l(\omega_3, \mathbf{k}_3) + \dots, \quad (2.65)$$

где  $\chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор линейной восприимчивости;  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ ,  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  и т. д. — тензорные нелинейные восприимчивости плазмы. Заметим, что в рассматриваемом общем случае (в отличие от случая продольного поля, когда линейная и нелинейные восприимчивости плазмы являются скалярными величинами) коэффициенты линейной связи  $\chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  между векторами  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{E}$  образуют тензор второго ранга, а нелинейные восприимчивости  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ ,  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  и т. д. являются тензорными величинами соответственно третьего, четвертого и т. д. рангов.

Применяя преобразование Фурье к (2.62) и используя соотношения (2.63) и (2.65), получаем следующее нелинейное уравнение для макроскопического поля в плазме:

$$\Delta_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_j(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k(\omega_2, \mathbf{k}_2) + \\ + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) E_j(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k(\omega_2, \mathbf{k}_2) E_l(\omega_3, \mathbf{k}_3) + \dots \\ \dots = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i^0(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.66)$$

где

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \eta^2, \quad \eta^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2}; \quad (2.67)$$

$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, связанный с тензором линейной восприимчивости  $\chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  соотношением

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.68)$$

Нелинейное уравнение (2.66) в общем случае, так же как уравнение (2.14) в случае продольного поля, полностью описывает динамику макроскопического поля в плазме. Электродинамические свойства плазмы (линейные и нелинейные) при этом определяются заданием тензора диэлектрической проницаемости и тензорных нелинейных восприимчивостей. При заданном распределении внешних токов  $\mathbf{j}_0$  макроскопическое поле однозначно определяется решением уравнения (2.66).

## 5. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ И ТЕНЗОРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

Приведем общие выражения для тензора диэлектрической проницаемости и тензорных нелинейных восприимчивостей плазмы в предположении, что внешние поля отсутствуют:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \sum \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{\omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{jk} + \frac{k_k v_j}{\omega} \right] \frac{\partial}{\partial v_k} f_0(\mathbf{v}); \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{jl} + \frac{k_{1l} v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2\mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{km} + \right. \\ &+ \left. \frac{k_{2m} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} + \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2\mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{kl} + \frac{k_{2l} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{jm} + \frac{k_{1m} v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} f_0(\mathbf{v}), \quad (2.70) \\ &\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &\equiv \frac{1}{3} \{ \bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \\ &+ \bar{\chi}_{ikjl}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \bar{\chi}_{iljk}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1) \}, \quad (2.71) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \sum \frac{(-i)^2}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega} \times \\ &\times \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{jm} + \frac{k_{1m} v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} \left\{ \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} \times \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \times \left( \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{kn} + \frac{k_{2n} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_n} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3 \mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_3 \mathbf{v}}{\omega_3} \right) \delta_{lp} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_{3p} v_l}{\omega_3} \right] \frac{\partial}{\partial v_p} + \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_3 \mathbf{v}}{\omega_3} \right) \delta_{ln} + \frac{k_{3n} v_l}{\omega_3} \right] \frac{\partial}{\partial v_n} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \left. \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{kp} + \frac{k_{2p} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_p} \right) \} f_0(\mathbf{v}), \quad (2.72) \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad \omega' = \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3;$$

$$\begin{aligned} \chi_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) &= \sum \frac{(-i)^{n-1}}{n!} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^{n-1} \times \\ & \times \frac{1}{\omega} \mathcal{P} \int dv v_i \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) \mathbf{v} + i0} \times \\ & \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{j_1 k_1} + \frac{k_{1k_1} v_{j_1}}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_{k_1}} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 + \dots + \omega_n - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n) \mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{j_2 k_2} + \frac{k_{2k_2} v_{j_2}}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_{k_2}} \times \dots \\ & \left. \dots \times \left( \frac{1}{\omega_n - \mathbf{k}_n \mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_n \mathbf{v}}{\omega_n} \right) \delta_{j_n k_n} + \frac{k_{nk_n} v_{j_n}}{\omega_n} \right] \frac{\partial f_0}{\partial v_{k_n}} \right) \dots \right\} \quad (2.73) \end{aligned}$$

( $\mathcal{P}$  обозначает всевозможные перестановки частот  $\omega$ , волновых векторов  $\mathbf{k}$  и соответствующих индексов  $j$ ).

Линейные электродинамические свойства плазмы полностью определяются заданием тензора диэлектрической проницаемости (2.69), который удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ji}^*(-\omega, -\mathbf{k}), \quad \varepsilon_{ji}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, -\mathbf{k}). \quad (2.74)$$

В общем случае неизотропного распределения частиц по скоростям электромагнитное поле в плазме не разделяется на продольную и поперечную части, такое разделение можно провести только при изотропном распределении частиц по скоростям (в дальнейшем плазму с изотропным распределением частиц по скоростям будем называть изотропной).

В случае изотропной плазмы тензор диэлектрической проницаемости удобно представить в виде

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(\omega, k) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_t(\omega, k), \quad (2.75)$$

где  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_t$  — соответственно продольная и поперечная диэлектрические проницаемости, являющиеся скалярными функциями, зависящими от частоты  $\omega$  и модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Используя (2.69), нетрудно получить следующие выражения:

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int dv \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(v)}{\partial v}, \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_t(\omega, k) = 1 + \sum \frac{2\pi e^2}{m\omega k^2} \int dv \frac{1}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i0} [\mathbf{k}, [\mathbf{v}, \mathbf{k}]] \frac{\partial f_0(v)}{\partial v}. \quad (2.77)$$

Как видим, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_l(\omega, \mathbf{k})$  совпадает с введенной ранее для случая продольного поля диэлектрической проницаемостью  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ . В предельном случае холодной плазмы продольная и поперечная диэлектрические проницаемости совпадают и равны предельному значению

$$\epsilon(\omega) = 1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2}. \quad (2.78)$$

Таким образом, в холодной плазме пространственная дисперсия отсутствует как для продольного, так и для поперечного поля.

Тензорные нелинейные восприимчивости плазмы характеризуются свойствами симметрии

$$\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \kappa_{ikj}^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1), \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \kappa_{ijlk}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \\ &= \kappa_{ikjl}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \kappa_{iklj}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_1, \mathbf{k}_1) = \\ &= \kappa_{ijjk}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \kappa_{iikj}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1), \end{aligned} \quad (2.80)$$

которые непосредственно следуют из разложения (2.65) (величина  $\bar{\kappa}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$ , определяемая равенством (2.72), симметрична только относительно перестановки  $k \rightleftharpoons l$  и  $\omega_2, \mathbf{k}_2 \rightleftharpoons \omega_3, \mathbf{k}_3$ ). Кроме того, они удовлетворяют условиям

$$\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \kappa_{ijk}^{(2)*}(-\omega_1, -\mathbf{k}_1; -\omega_2, -\mathbf{k}_2), \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \\ &= \kappa_{ijkl}^{(3)*}(-\omega_1, -\mathbf{k}_1; -\omega_2, -\mathbf{k}_2; -\omega_3, -\mathbf{k}_3), \end{aligned} \quad (2.82)$$

которые вытекают из требований вещественности поля.

Интегрированием по частям выражения (2.70) и (2.72) для тензорных нелинейных восприимчивостей плазмы могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \times \\ &\times \left( \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{il} + \frac{k_{1l} v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{km} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{k_{2m} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} + \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{kl} + \frac{k_{2l} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} \times \right. \\ &\times \left. \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1 \mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{jm} + \frac{k_{1m} v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} \right) \frac{v_l}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v} + i0}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

где  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ ;

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \sum \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{\omega} \int d\mathbf{v} f_0(\mathbf{v}) \times \\ &\times \left( \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2 \mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{km} + \frac{k_{2m} v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_3 \mathbf{v}}{\omega_3} \right) \delta_{in} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k_{3n}v_l}{\omega_3} \left] \frac{\partial}{\partial v_n} + \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_3\mathbf{v}}{\omega_3} \right) \delta_{lm} + \frac{k_{3m}v_l}{\omega_3} \right] \frac{\partial}{\partial v_m} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{v} + i0} \times \\
& \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_2\mathbf{v}}{\omega_2} \right) \delta_{kn} + \frac{k_{2n}v_k}{\omega_2} \right] \frac{\partial}{\partial v_n} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}_1\mathbf{v}}{\omega_1} \right) \delta_{jp} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k_{1p}v_j}{\omega_1} \right] \frac{\partial}{\partial v_p} \frac{v_l}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0}, \quad (2.84)
\end{aligned}$$

$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ ,  $\omega' = \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ .  
Используя (2.83) и (2.84), в предельном случае холодной плазмы получаем

$$\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega} \left( \frac{k_l}{\omega} \delta_{jk} + \right. \\
\left. + \frac{k_{lj}}{\omega_1} \delta_{ik} + \frac{k_{2k}}{\omega_2} \delta_{ij} \right), \quad (2.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \sum \frac{1}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega} \left\{ \left( \frac{1}{\omega'} \left[ \frac{k'^2}{\omega'} \delta_{ij}\delta_{kl} + \right. \right. \right. \\
\left. \left. + \left( \frac{k_l k_j}{\omega} - \frac{k_{1l} k_{1j}}{\omega_1} \right) \delta_{kl} + \left( \frac{k_{2k} k_{2l}}{\omega_2} + \frac{k_{3k} k_{3l}}{\omega_3} \right) \delta_{ij} \right] + \right. \\
\left. + \frac{k_l k_{1j}}{\omega\omega_1} \delta_{kl} + \frac{k_{2k} k_{3l}}{\omega_2\omega_3} \delta_{ij} \right) + (1 \rightleftharpoons 2) + (1 \rightleftharpoons 3) \}. \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Точно такие же выражения для симметризованных нелинейных восприимчивостей плазмы  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  могут быть получены на основе системы гидродинамических уравнений

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0, \\
& \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right).
\end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

При этом плотность заряда и плотность тока в плазме выражаются через макроскопические плотности и скорости частиц:

$$\rho = \sum en, \quad \mathbf{j} = \sum env. \quad (2.88)$$

В случае холодной плазмы выражение для несимметризованной нелинейной восприимчивости  $\bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$ , определяемой как сумма части (2.84), содержащей в случае  $T = 0$  особенность при  $\omega' \equiv \omega_2 + \omega_3 = 0$ , и симметризованной (относительно возможных перестановок) оставшейся части (2.84), имеет вид

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1\omega_2\omega_3\omega} \times \\
\times \left( \frac{1}{\omega'} \left[ \frac{k'^2}{\omega'} \delta_{ij}\delta_{kl} + \left( \frac{k_l k_j}{\omega} - \frac{k_{1l} k_{1j}}{\omega_1} \right) \delta_{kl} + \left( \frac{k_{2k} k_{2l}}{\omega_2} + \frac{k_{3k} k_{3l}}{\omega_3} \right) \delta_{ij} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left[ \frac{k_l}{\omega} \left( \frac{k_{1j}}{\omega_1} + \frac{k_{2j}}{\omega_2} + \frac{k_{3j}}{\omega_3} \right) \delta_{kl} + \right. \\
& \left. + \left( \frac{k_{1k}k_{3l}}{\omega_1\omega_3} + \frac{k_{2k}k_{1l}}{\omega_1\omega_2} + \frac{k_{2k}k_{3l}}{\omega_2\omega_3} \right) \delta_{ij} \right]. \quad (2.89)
\end{aligned}$$

Согласно (2.85), (2.86), (2.89) тензорные нелинейные восприимчивости холодной плазмы, так же как и скалярные нелинейные восприимчивости в случае потенциального поля, зависят от волновых векторов взаимодействующих полей.

## 6. ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЙ МНОГОВРЕМЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Воспользуемся теперь методом многовременных последовательных приближений для решения нелинейного уравнения (2.66), определяющего макроскопическое электромагнитное поле в плазме. Подобно тому, как это было сделано в случае потенциального поля, разложим выражение для напряженности электрического поля (содержащего кроме потенциальной также вихревую часть) в ряд по степеням параметра нелинейного взаимодействия  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_k(t) \rightarrow \alpha \mathbf{E}_k^{(1)}(t, t', t'', \dots) + \alpha^2 \mathbf{E}_k^{(2)}(t, t', t'', \dots) + \\
+ \alpha^3 \mathbf{E}_k^{(3)}(t, t', t'', \dots) + \dots, \quad (2.90)
\end{aligned}$$

а тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и тензорные нелинейные восприимчивости  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  будем считать дифференциальными операторами, зависимость которых от параметра  $\alpha$  определим с помощью формальной замены

$$\omega \rightarrow i \left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t'} + \alpha^2 \frac{\partial}{\partial t''} + \dots \right).$$

Подставляя эти разложения в нелинейное уравнение (2.66) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\alpha$ , получаем последовательность уравнений, определяющую отдельные члены разложения (2.90):

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = - \frac{4\pi i}{\omega} j_i^0(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) = - \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \times \\
\times E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) - i \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t'} E_j^{(1)}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.92)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) = - \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) E_l^{(1)}(\omega_3, \mathbf{k}_3) - \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \times \\
& \quad \times (E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) + E_j^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2)) - \\
& - i \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \left\{ \frac{\partial \kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\partial \omega_1} E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) \frac{\partial}{\partial t'} E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial \kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\partial \omega_2} E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial t'} E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) \right\} - \\
& - i \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t'} E_j^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} E_j^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) - \\
& - i \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t''} E_j^{(1)}(\omega, \mathbf{k}). \tag{2.93}
\end{aligned}$$

Так как времена  $t, t', t'', \dots$  по предположению не зависят друг от друга, то полученная система уравнений, вообще говоря, является неопределенной. Эту неопределенность, однако, можно устранить, потребовав, чтобы уравнения в системе не содержали секулярных слагаемых. Из условия обращения в нуль секулярных частей получается иерархическая последовательность уравнений, дополняющая систему (2.91) — (2.93) и тем самым однозначно определяющая зависимость членов разложения (2.90) от  $t, t', t'', \dots$

В качестве первого приближения рассмотрим линеаризованное уравнение (2.91). Предполагая, что в плазме внешние заряды и токи отсутствуют, получаем

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0, \tag{2.94}$$

где  $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \eta^2$ ,  $\eta^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$ . Равенство (2.94)

представляет собой волновое уравнение, так как определяет электромагнитное поле в отсутствие внешних зарядов и токов, т. е. электромагнитные волны. Это уравнение допускает отличные от нуля решения только при выполнении дисперсионного соотношения, сводящегося к условию обращения в нуль определителя, составленного из элементов матрицы  $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\Delta(\omega, \mathbf{k}) \equiv |\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})| = 0. \tag{2.95}$$

Корни уравнения (2.95) определяют зависимость между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  для различных электромагнитных волн, распространяющихся в плазме.

Обозначим частоту и декремент затухания, соответствующие при фиксированном вещественном значении  $\mathbf{k}$  определенному корню дисперсионного уравнения (2.95), через  $\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  и  $\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  ( $\alpha$  — индексы корней, характеризующие собственные электромагнитные волны

в плазме). Решение уравнения (2.94), соответствующее указанному корню дисперсионного уравнения (2.95), можно записать в виде

$$\mathbf{E}_k^\alpha(t) = \mathbf{E}_k^\alpha \cos(\omega_k^\alpha t + \Phi_k^\alpha), \quad \mathbf{E}_k^\alpha \equiv \mathbf{E}_{k0}^\alpha e^{-\gamma_k^\alpha t}, \quad (2.96)$$

где  $\mathbf{E}_{k0}^\alpha$  и  $\Phi_k^\alpha$  — начальная амплитуда и фаза волны. Будем считать  $\omega_k^\alpha$ ,  $\gamma_k^\alpha$  и  $\Phi_k^\alpha$  вещественными функциями модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Так как поле (2.96) вещественно, то должно выполняться условие

$$\mathbf{E}_k^* = \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}. \quad (2.97)$$

Временная компонента Фурье (2.96) в пренебрежении затуханием имеет вид

$$\mathbf{E}_{k\omega}^\alpha = \pi \mathbf{E}_k^\alpha \{ e^{-i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega - \omega_k^\alpha) + e^{i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega + \omega_k^\alpha) \}. \quad (2.98)$$

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейных эффектов, связанных с учетом в уравнении (2.66) слагаемых, квадратичных по напряженности электрического поля. В этом приближении нелинейное взаимодействие волн характеризуется тензорной нелинейной восприимчивостью  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ . Первое приближение для напряженности электрического поля собственной волны имеет вид (2.98), где, однако, амплитуду поля  $\mathbf{E}_k^\alpha$  следует считать медленно изменяющейся функцией, зависящей от времени  $t'$ :

$$\mathbf{E}_{k\omega}^\alpha(t') = \pi \mathbf{E}_k^\alpha(t') \{ e^{-i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega - \omega_k^\alpha) + e^{i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega + \omega_k^\alpha) \}. \quad (2.99)$$

Это изменение амплитуды поля первого приближения обусловлено взаимодействием волн и возможно только при возникновении резонанса.

Для нахождения зависимости амплитуды  $\mathbf{E}_k^\alpha$  от времени  $t'$ , подобно случаю продольного поля, используем уравнение (2.92), которое определяет поправку к первому приближению  $\mathbf{E}_{k\omega}^{\alpha(2)}$ . В условиях трехволнового резонанса, т. е. при выполнении соотношения между частотами

$$\omega_{\mathbf{k}_1}^\alpha + \omega_{\mathbf{k}_2}^\beta = \omega_{\mathbf{k}}^\gamma, \quad (2.100)$$

из (2.92) нетрудно получить уравнение, определяющее медленную зависимость амплитуды  $\mathbf{E}_k^\alpha$  от времени. Для этого резонансные слагаемые в правой части (2.92) необходимо приравнять нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \omega_k^\gamma} \Lambda_{ij}(\omega_k^\gamma, \mathbf{k}) - \frac{\partial}{\partial t'} E_{jk}^\gamma e^{-i\Phi_k^\gamma} = \\ & = \frac{i}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}_1}^\alpha, \mathbf{k}_1; \omega_{\mathbf{k}_2}^\beta, \mathbf{k}_2) E_{j\mathbf{k}_1}^\alpha E_{k\mathbf{k}_2}^\beta e^{-i(\Phi_{\mathbf{k}_1}^\alpha + \Phi_{\mathbf{k}_2}^\beta)}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Решение этого уравнения и определяет характер изменения амплитуды  $\mathbf{E}_k^\gamma$  со временем, обусловленный резонансным взаимодействием трех волн.

Если резонансное условие (2.100) не выполняется, то амплитуда линейного приближения  $\mathbf{E}_k^\gamma$  не зависит от времени:

$$\frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{E}_k^\gamma = 0. \quad (2.102)$$

Поправка к напряженности поля (2.99), обусловленная нелинейным взаимодействием, в этом случае записывается в виде

$$E_i^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) = -\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi_{jkl}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \times \\ \times E_k^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_l^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2), \quad (2.103)$$

где  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор, обратный (2.67). Частота поправки к напряженности поля (2.103) при этом может значительно отличаться от собственной частоты.

В отсутствие трехволновых резонансов существенным оказывается учет четырехволновых или более высокого порядка резонансов. Предположим, что трехволновые резонансы отсутствуют и рассмотрим следующее приближение для напряженности поля  $\mathbf{E}_{k\omega}^{\gamma(3)}$ , связанное с учетом в уравнении (2.66) слагаемых, кубических по напряженности поля. Так как при невыполнении условия (2.100) амплитуда первого приближения  $\mathbf{E}_k^\gamma$  не зависит от  $t'$ , то от  $t'$  не зависит и первая поправка (2.103). В результате уравнение (2.93), определяющее вторую поправку к (2.99), существенно упрощается:

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \{2\chi_{ijj'}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \times \\ \times \Lambda_{j'i'}^{-1}(\omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \chi_{i'kl}^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) - \\ - \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)\} E_j^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) E_k^{(1)}(\omega_2, \mathbf{k}_2) E_l^{(1)}(\omega_3, \mathbf{k}_3) - \\ - i \frac{\partial}{\partial \omega} \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t'} E_j^{(1)}(\omega, \mathbf{k}). \quad (2.104)$$

Подставляем в правую часть напряженности поля  $E_{k_1\omega_1}^{(1)}$ ,  $E_{k_2\omega_2}^{(1)}$  и  $E_{k_3\omega_3}^{(1)}$  в виде (2.99) и учитываем зависимость амплитуд от времени  $t''$ . Предполагая, что выполняется резонансное условие между частотами

$$|\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} \pm \omega_{k_3}| = \omega_k, \quad (2.105)$$

из условия обращения в нуль резонансной части справа в (2.104) находим уравнение, определяющее временную зависимость амплитуды  $\mathbf{E}_k(t'')$ :

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \Lambda_{ij}(\omega_k, \mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial t''} E_{jk} e^{-i\Phi_{\mathbf{k}}} = \\ = -\frac{i}{4} \sum'_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}} \{2\chi_{ijj'}^{(2)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \Lambda_{j'i'}^{-1}(\omega_{k_2} +$$

$$+ \omega_{k_1}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \kappa_{i'kl}^{(2)}(\omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) - \kappa_{ijkl}^{(3)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \times \\ \times E_{jk_1} E_{kk_2} E_{lk_3} e^{-i(\Phi_{k_1} + \Phi_{k_2} + \Phi_{k_3})}. \quad (2.106)$$

(штрих у знака суммы означает, что необходимо учитывать все комбинации волн, удовлетворяющие условию резонанса (2.105)).

В отсутствие четырехволновых резонансов следует учитывать нелинейное взаимодействие волн более высокого порядка. Как и в случаях трехволнового и четырехволнового резонансов, можно получить уравнения, описывающие зависимость амплитуды поля от времени при резонансах с большим числом волн. Получаемые таким способом уравнения вместе с уравнениями (2.101) и (2.106) образуют иерархическую последовательность, полностью определяющую зависимость амплитуды поля от введенной иерархии времен. В дальнейшем уравнения этой последовательности используются для описания эффектов нелинейного взаимодействия волн в плазме.



## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЫ

### 1. ПРОДОЛЬНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Нелинейные уравнения для поля в плазме, полученные в предыдущей главе, справедливы как в отсутствие, так и при наличии внешних полей. Внешние поля, однако, оказывают существенное влияние на электродинамические свойства плазмы. В частности, под воздействием внешних полей существенным образом изменяются диэлектрическая проницаемость и нелинейные восприимчивости. Специфическими особенностями характеризуются электродинамические свойства плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле. Внешнее магнитное поле приводит к появлению анизотропии свойств плазмы и гиротропии, проявляющейся в оптической активности плазмы. (В силу этого обстоятельства плазму, находящуюся во внешнем магнитном поле, называют магнитоактивной.) Электродинамические свойства магнитоактивной плазмы в линейном приближении детально рассмотрены в ряде монографий и обзоров [5, 35, 87, 88, 96, 114, 116], нелинейные — в монографии [74].

Ограничимся рассмотрением наиболее простого и интересного случая, а именно рассмотрим электродинамические свойства пространственно-однородной плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле. Подобно тому, как это было сделано в отсутствие внешних полей, вначале определим диэлектрическую проницаемость и нелинейные электрические восприимчивости плазмы в магнитном поле, предполагая, что самосогласованное поле потенциально. Используя кинетическое уравнение (1.55), вместо (2.1) получаем уравнение, определяющее отклонение функции распределения  $f_{k\omega}$  под воздействием самосогласованного поля  $E_{k\omega}$  при наличии внешнего магнитного поля  $B_0$ :

$$\begin{aligned}
 -i(\omega - k\mathbf{v}) f_{k\omega} - \omega_B \frac{\partial f_{k\omega}}{\partial \varphi} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{k\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \\
 + \frac{e}{m} \sum_{\omega', k'} \mathbf{E}_{k'\omega'} \frac{\partial f_{k-k', \omega-\omega'}}{\partial \mathbf{v}} = 0.
 \end{aligned}
 \quad (3.1)$$

Здесь  $\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$  — циклотронная частота;  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{v}$  в плоскости, перпендикулярной направлению внеш-

него магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ; кроме того, предполагается, что исходная функция распределения  $f_0$  изотропна относительно направлений скорости в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю, т. е.  $f_0$  является функцией двух переменных  $v_\perp$  и  $v_\parallel$  — перпендикулярной и параллельной составляющих скорости по отношению к внешнему магнитному полю  $\mathbf{B}_0$  — и не зависит от азимутального угла в пространстве скоростей.

Пренебрегая нелинейным слагаемым в (3.1), находим

$$-i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})f_{\mathbf{k}\omega} - \omega_B \frac{\partial f_{\mathbf{k}\omega}}{\partial \varphi} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение (в отличие от линейной части (2.1), приводящей к алгебраическому уравнению относительно  $f_{\mathbf{k}\omega}$ ) является дифференциальным уравнением в пространстве скоростей. Интегрируя (3.2), получаем

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}(\mathbf{v}) = \frac{e}{m\omega_B} \exp\left[-\frac{i}{\omega_B} \int_0^\varphi d\varphi (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\right] \times \\ \times \int d\varphi \exp\left[\frac{i}{\omega_B} \int_0^\varphi d\varphi (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\right] \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}, \quad (3.3)$$

где значение интеграла следует брать только на верхнем пределе. При этом, что нетрудно проверить, выполняется условие периодичности  $f_{\mathbf{k}\omega}(\varphi + 2\pi) = f_{\mathbf{k}\omega}(\varphi)$ .

Выберем систему координат так, чтобы  $k_y = 0$ . Тогда

$$\int_0^\varphi d\varphi (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = (\omega - k_\parallel v_\parallel) \varphi - k_\perp v_\perp \sin \varphi.$$

Подставляя это выражение в (3.3) и производя под знаком интеграла разложение в ряд

$$e^{-ia \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) e^{-in\varphi}, \quad (3.4)$$

( $J_n(a)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка;  $a = k_\perp v_\perp / \omega_B$ ), получаем выражение для  $f_{\mathbf{k}\omega}$ :

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}(\mathbf{v}) = -i \frac{e}{mk} \sum_n J_n(a) \frac{e^{ia \sin \varphi - in\varphi}}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n\omega_B + i0} \left( \frac{n\omega_B}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} + \right. \\ \left. + k_\parallel \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) f_0(v_\perp, v_\parallel) \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}. \quad (3.5)$$

Очевидно, в произвольной системе координат в этом выражении под  $\varphi$  следует подразумевать разность азимутальных углов векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{k}$ .

С помощью (3.5) можно найти плотность индуцированных зарядов (2.8), а следовательно, и линейную электрическую восприим-

чивость плазмы  $\kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ . Учитывая соотношение (2.15), получаем выражение для продольной диэлектрической проницаемости плазмы во внешнем магнитном поле:

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int dv \sum_n \frac{J_n^2(a)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} \left( \frac{n\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}). \quad (3.6)$$

Напомним, что  $a = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$ ,  $k^2 = k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2$ .

Аналогично, с помощью второй и третьей итераций уравнения (3.1),

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(2)}(\mathbf{v}) = \frac{e}{m\omega_B} \exp \left[ -\frac{i}{\omega_B} \int_0^{\varphi} d\varphi (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] \times \\ \times \int_0^{\varphi} d\varphi \exp \left[ \frac{i}{\omega_B} \int_0^{\varphi} d\varphi (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \frac{\partial f_{\mathbf{k}_2, \omega_2}^{(1)}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}$$

и т. д., получаем выражение для нелинейных продольных электрических восприимчивостей плазмы во внешнем магнитном поле:

$$\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{k_1 k_2 k} \times \\ \times \int dv \sum_n \frac{e^{in\varphi - ia \sin \varphi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} J_n(a) \times \\ \times \left\{ \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{n_2} \frac{e^{-in_2(\varphi - \varphi_2) + ia_2 \sin(\varphi - \varphi_2)}}{\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2 \omega_B + i0} J_{n_2}(a_2) \left( \frac{n_2 \omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{2\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) + \right. \\ \left. + \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{n_1} \frac{e^{-in_1(\varphi - \varphi_1) + ia_1 \sin(\varphi - \varphi_1)}}{\omega_1 - k_{1\parallel} v_{\parallel} - n_1 \omega_B + i0} \times \right. \\ \left. \times J_{n_1}(a_1) \left( \frac{n_1 \omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{1\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) \right\} f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (3.7) \\ \omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2;$$

$$\kappa^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \frac{1}{3} \{ \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \\ + \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1) \}, \quad (3.8) \\ \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \sum \frac{(-i)^2}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \times \\ \times \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \int dv \sum_n \frac{e^{in\varphi - ia \sin \varphi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} J_n(a) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{n'} \frac{e^{-in'(\varphi-\varphi')} + ia' \sin(\varphi-\varphi')}{\omega' - k'_{\parallel} v_{\parallel} - n' \omega_B + i0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{in'(\varphi-\varphi') - ia' \sin(\varphi-\varphi')} \times \\
& \times \left\{ \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{n_3} \frac{e^{-in_3(\varphi-\varphi_3)} + ia_3 \sin(\varphi-\varphi_3)}{\omega_3 - k_{3\parallel} v_{\parallel} - n_3 \omega_B + i0} J_{n_3}(a_3) \left( \frac{n_3 \omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + k_{3\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) + \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{n_2} \frac{e^{-in_2(\varphi-\varphi_2)} + ia_2 \sin(\varphi-\varphi_2)}{\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2 \omega_B + i0} J_{n_2}(a_2) \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{n_2 \omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{2\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) \right\} f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ ,  $\omega' = \omega_2 + \omega_3$ ,  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ .  
Здесь  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{v}$ ;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и  $\varphi'$  — азимутальные углы векторов  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  и  $\mathbf{k}'$  в системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ .

Диэлектрическая проницаемость (3.6) и нелинейные восприимчивости (3.7) и (3.8) полностью определяют линейные и нелинейные электродинамические свойства плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, так же как (2.16) — (2.18) определяют их в отсутствие магнитного поля. Непосредственной проверкой легко установить, что формулы (3.6), (3.7) и (3.9) при  $B_0 \rightarrow 0$  переходят соответственно в формулы (2.15), (2.16) и (2.18).

Интегрированием по частям выражение (3.6) нетрудно привести к виду

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum \frac{4\pi e^2}{mk^2} \sum_n \int d\mathbf{v} f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}) \left( \frac{n\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \right. \\
\left. + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{J_n^2(a)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0}. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

В случае холодной плазмы из (3.10) непосредственно следует формула

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum \Omega^2 \left\{ \frac{\sin^2 \vartheta}{\omega^2 - \omega_B^2} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\omega^2} \right\}, \quad (3.11)$$

где  $\vartheta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и направлением магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Так же как и в отсутствие магнитного поля, диэлектрическая проницаемость холодной плазмы (3.11) не зависит от величины волнового вектора  $\mathbf{k}$ , т. е. в холодной плазме и во внешнем магнитном поле пространственная дисперсия отсутствует. Диэлектрическая проницаемость (3.11), однако, зависит от угла между направлениями волнового вектора  $\mathbf{k}$  и магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Это означает, что плазма в магнитном поле и в пренебрежении тепловым движением частиц обладает анизотропными свойствами.

В случае равновесной плазмы в (3.10) можно выполнить интегрирование по составляющим скорости, перпендикулярным направлению магнитного поля. Выбирая в качестве  $f_0(\mathbf{v})$  максвелловскую функцию распределения и замечая, что

$$\int_0^{\infty} dtte^{-p^2t^2} J_n^2(at) = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{a^2}{2p^2}} I_n\left(\frac{a^2}{2p^2}\right), \quad (3.12)$$

где  $I_n(x)$  — модифицированная функция Бесселя, для диэлектрической проницаемости равновесной плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, получаем выражение

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{1}{a^2 k^2} \left\{ 1 - e^{-\beta} \sum_n I_n(\beta) \frac{z_0}{z_n} [\varphi(z_n) - i\sqrt{\pi} z_n e^{-z_n^2}] \right\}. \quad (3.13)$$

Здесь  $a^2 = T/4\pi e^2 n_0$ ;  $\beta = k_{\perp}^2 s^2 / 3\omega_B^2$  ( $\omega_B = eB_0/mc$ ,  $s^2 = 3T/m$ );

$$z_n = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega - n\omega_B}{|k_{\parallel}|s}; \quad (3.14)$$

$\varphi(z)$  определяется по (2.28). Заметим, что при  $k_{\perp} = 0$  выражение (3.13) совпадает с (2.27).

Приведем еще выражение для диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле с анизотропным распределением по скоростям, когда распределения частиц по поперечным и продольным (по отношению к направлению магнитного поля) составляющим скорости характеризуются разными температурами ( $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$ ):

$$f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi T_{\perp}} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}} e^{-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} - \frac{mv_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}}}. \quad (3.15)$$

Используя (3.6), получаем

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{1}{a_{\parallel}^2 k^2} \left\{ 1 - e^{-\beta_{\perp}} \sum_n I_n(\beta_{\perp}) \left[ 1 - \frac{n\omega_B}{\omega} \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right] \right\} \times \\ \times \frac{z_0^{\parallel}}{z_n^{\parallel}} [\varphi(z_n^{\parallel}) - i\sqrt{\pi} z_n^{\parallel} e^{-z_n^{\parallel 2}}], \quad (3.16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{\parallel}^2 &= \frac{T_{\parallel}}{4\pi e^2 n_0}, & \beta_{\perp} &= \frac{k_{\perp}^2 s_{\perp}^2}{2\omega_B^2}, & s_{\perp}^2 &= \frac{2T_{\perp}}{m}, & s_{\parallel}^2 &= \frac{T_{\parallel}}{m}, \\ z_n^{\parallel} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega - n\omega_B}{|k_{\parallel}|s_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} (3.17)$$

Выражения для нелинейных электрических восприимчивостей плазмы в магнитном поле (3.7) и (3.9) с помощью интегрирования

по частям нетрудно привести к виду

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = & \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{k_1 k_2 k} \times \\ & \times \left\{ \left( \sum_{n, n_2} \int dv f_0(v_\perp, v_\parallel) \left( \frac{n_2 \omega_B}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} + k_{2\parallel} \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) \right) \times \right. \\ & \times \frac{e^{-in_2(\varphi - \varphi_2) + ia_2 \sin(\varphi - \varphi_2)}}{\omega_2 - k_{2\parallel} v_\parallel - n_2 \omega_B + i0} J_{n_2}(a_2) \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial v} \frac{e^{in\varphi - ia \sin \varphi}}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n \omega_B + i0} J_n(a) \Big\} + \\ & + (1 \rightleftharpoons 2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left( \frac{e}{m} \right)^2 \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \left( \sum_{n, n', n_3} \int dv f_0(v_\perp, v_\parallel) \left( \frac{n_3 \omega_B}{v_\perp} \frac{\partial}{\partial v_\perp} + k_{3\parallel} \frac{\partial}{\partial v_\parallel} \right) \right) \times \right. \\ & \times \frac{e^{-in_3(\varphi - \varphi_3) + ia_3 \sin(\varphi - \varphi_3)}}{\omega_3 - k_{3\parallel} v_\parallel - n_3 \omega_B + i0} J_{n_3}(a_3) \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial v} e^{in'(\varphi - \varphi') - ia' \sin(\varphi - \varphi')} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{e^{-in'(\varphi - \varphi') + ia' \sin(\varphi - \varphi')}}{\omega' - k'_\parallel v_\parallel - n' \omega_B + i0} \times \\ & \times \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial v} \frac{e^{in\varphi - ia \sin \varphi}}{\omega - k_\parallel v_\parallel - n \omega_B + i0} J_n(a) \Big\} + (2 \rightleftharpoons 3). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В предельном случае холодной плазмы из (3.18) непосредственно следует

$$\begin{aligned} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = & \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega} \frac{1}{k_1 k_2 k} \{ \omega(\mathbf{k}\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) \times \\ & \times (\mathbf{k}\Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) - \omega_1(\mathbf{k}\Gamma(\omega) \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_1\Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) - \omega_2(\mathbf{k}\Gamma(\omega) \mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_2\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) \}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_1\Gamma(\omega) \mathbf{k}_2) \equiv & k_{1i} \Gamma_{ij}(\omega) k_{2j} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_B} + \frac{1}{\omega + \omega_B} \right) k_{1\perp} k_{2\perp} \times \\ & \times \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_B} - \frac{1}{\omega + \omega_B} \right) k_{1\perp} k_{2\perp} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \\ & + \frac{1}{\omega} k_{1\parallel} k_{2\parallel}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Тензорная величина  $\Gamma_{ij}(\omega)$  выражается через единичный вектор в направлении магнитного поля  $\mathbf{b}$ , симметричный тензор  $\delta_{ij}$  и полностью антисимметричный тензор  $\varepsilon_{ijk}$ :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\omega) = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_B} + \frac{1}{\omega + \omega_B} \right) (\delta_{ij} - b_i b_j) - \\ & - \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\omega - \omega_B} - \frac{1}{\omega + \omega_B} \right) \varepsilon_{ijk} b_k + \frac{1}{\omega} b_i b_j. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Используя (3.19), симметризованную нелинейную восприимчивость третьего порядка для холодной магнитоактивной плазмы записываем в виде

$$\begin{aligned} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \omega (\mathbf{k} \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) (\mathbf{k} \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) + (\omega_1 [(\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) \times \right. \\ & \times (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) + \frac{\omega_2}{\omega'} (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega') \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) + \\ & \left. + \frac{\omega_3}{\omega'} (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega') \mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_3 \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2)] (\mathbf{k} \Gamma(\omega) \mathbf{k}_1) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega}{\omega'} [\omega_2 (\mathbf{k} \Gamma(\omega') \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) + \omega_3 (\mathbf{k} \Gamma(\omega') \mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_3 \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2)] \times \right. \\ & \left. \times (\mathbf{k} \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) \right) + (1 \rightleftharpoons 2) + (1 \rightleftharpoons 3) \Big\}. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Так же как и в отсутствие магнитного поля, нелинейные восприимчивости магнитоактивной плазмы (3.20) и (3.23) при  $T = 0$  зависят от волновых векторов взаимодействующих полей. Нетрудно установить, что (3.20) и (3.23) в предельном случае,  $B_0 \rightarrow 0$ , переходят соответственно в (2.30) и (2.39).

Выражение для несимметризованной восприимчивости  $\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  холодной магнитоактивной плазмы имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \left( \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega'} \left[ (\mathbf{k} [\Gamma(\omega_1) - \Gamma(\omega)] \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \left( \frac{1}{2} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \right)) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega' (\mathbf{k} \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} \Gamma(\omega) [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) + \frac{\omega'}{\omega_1} (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left( \mathbf{k} [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \left( \mathbf{k}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{k} \right) \right) + \left( (\mathbf{k}' [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_3}{\omega_2} (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) \right) (\mathbf{k} \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) \right] (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) \Big\} + (2 \rightleftharpoons 3) + \\ & + \frac{1}{3} \left\{ \left[ \left( \left[ \omega_2 \left( \frac{1}{2} (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}) - \frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\omega'} (\mathbf{k} [\Gamma(\omega_1) - \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \Gamma(\omega)] \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_1) - \omega_1 (\mathbf{k}_1 \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} \Gamma(\omega) [\Gamma(\omega_2) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) \right) (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) \right] + \{2 \rightleftharpoons 3\} + \omega_1 (\mathbf{k} \Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_2 \Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) \times \right. \\ & \left. \times (\mathbf{k}_3 \Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) \right] + [1 \rightleftharpoons 2] + [1 \rightleftharpoons 3] \Big\}. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Это выражение отличается от (3.19) при  $T = 0$  симметризацией (относительно перестановок  $(1 \rightleftharpoons 2)$  и  $(1 \rightleftharpoons 3)$ ) части (3.19), не содержащей особенности при  $\omega' = \omega_2 + \omega_3 = 0$ .

Формулы (3.20) и (3.23) можно получить также на основе гидродинамических уравнений, в которых, однако, необходимо учесть наличие внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Несимметризованная восприимчивость магнитоактивной плазмы  $\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  в гидродинамическом приближении определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\ & \times \left\{ \left( \omega_2 \left[ \frac{\omega_1}{\omega'} (\mathbf{k}\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}'\Gamma(\omega_2) \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_3\Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) + \right. \right. \right. \\ & + \left. \left. \left\{ \frac{\omega_1}{\omega'} ((\mathbf{k}\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) - (\mathbf{k}\Gamma(\omega) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}_1 [\Gamma(\omega_2) - \right. \right. \right. \\ & - \left. \left. \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2)) + (\mathbf{k}_1\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k} [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \omega_1 (\mathbf{k}'\Gamma(\omega_1) \mathbf{k}_1) (\mathbf{k}\Gamma(\omega) [\Gamma(\omega_2) - \Gamma(\omega')] \mathbf{k}_2) \right\} (\mathbf{k}_2\Gamma(\omega_3) \mathbf{k}_3) \right] \right) + (2 \rightleftharpoons 3) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Симметризация этого выражения относительно перестановок (1  $\rightleftharpoons$   $\rightleftharpoons$  2) и (1  $\rightleftharpoons$  3) приводит к (3.23). Используя общие формулы (3.18) и (3.19), можно найти тепловые поправки к значениям (3.20) и (3.23).

## 2. ТЕНЗОР ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь электродинамические свойства плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, отказавшись от допущения о потенциальном характере самосогласованного поля [104]. Как и в отсутствие внешнего магнитного поля, для описания электродинамических свойств плазмы в этом случае необходимо ввести тензор диэлектрической проницаемости и тензорные нелинейные восприимчивости.

Тензор диэлектрической проницаемости и тензорные нелинейные восприимчивости плазмы в магнитном поле существенно зависят от величины магнитного поля. В частности, тензор диэлектрической проницаемости изотропной плазмы во внешнем магнитном поле не сводится к продольной и поперечной составляющим, как в изотропной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля.

Для нахождения тензора диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле, воспользуемся кинетическим уравнением (1.58) и системой уравнений Максвелла (1.59). Согласно (1.58) отклонение функции распределения  $f_{\mathbf{k}\omega}$  под воздействием самосогласованного электромагнитного поля в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , определяется уравнением

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}\omega} - \omega_B \frac{\partial f_{\mathbf{k}\omega}}{\partial \varphi} + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}]] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \\ + \frac{e}{m} \sum_{\omega', \mathbf{k}' \neq \omega, \mathbf{k}} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{\omega'} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}', \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}]] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} = 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$



Решая это уравнение методом последовательных приближений подобно тому, как это было сделано в случае продольного поля, находим разложение вектора поляризации поля  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$  в ряд по степеням напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$ , коэффициенты которого и являются тензорными восприимчивостями плазмы в общем случае. В линейном приближении решение уравнения (3.26) имеет вид

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}(\mathbf{v}) = \frac{e}{m\omega_B} \exp\left[-\frac{i}{\omega_B} \int_0^\varphi d\varphi(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\right] \times \\ \times \int_0^\varphi d\varphi \exp\left[\frac{i}{\omega_B} \int_0^\varphi d\varphi(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\right] \left(\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}]]\right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (3.27)$$

Разлагая экспоненту под знаком интеграла в ряд по функциям Бесселя (подобно разложению (3.4)) и выполняя интегрирование, получаем

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}(\mathbf{v}) = -i \frac{e}{m\omega} e^{ia \sin(\varphi - \varphi_{\mathbf{k}})} \sum_n \frac{e^{-in(\varphi - \varphi_{\mathbf{k}})}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{Z}^{(n)} f_0, \quad (3.28)$$

где  $a = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_B$ ;  $\varphi$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}$  — азимутальные углы векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{k}$  (относительно произвольно выбранного начала отсчета) в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ;  $\omega_B = eB_0/mc$ ;  $\mathbf{Z}^{(n)}$  — векторный дифференциальный оператор,

$$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{v}) \equiv X_i^{(n)*} \left( \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) - \\ - \delta_{iz} J_n(a) (\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B) \left( \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} - \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right), \quad (3.29)$$

$$\mathbf{X}_i^{(n)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{v}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \cos \varphi_{\mathbf{k}} + i v_{\perp} J_n'(a) \sin \varphi_{\mathbf{k}} \\ \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \sin \varphi_{\mathbf{k}} - i v_{\perp} J_n'(a) \cos \varphi_{\mathbf{k}} \\ v_{\parallel} J_n(a) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Векторный оператор  $\mathbf{Z}_i^{(n)}$  можно записать в форме

$$\mathbf{Z}_i^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{v}) \equiv X_i^{(n)*} \left( \frac{n\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) + \\ + \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B}{v_{\perp}} \begin{pmatrix} \left( \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \cos \varphi_{\mathbf{k}} - i v_{\perp} J_n'(a) \sin \varphi_{\mathbf{k}} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \\ \left( \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \sin \varphi_{\mathbf{k}} + i v_{\perp} J_n'(a) \cos \varphi_{\mathbf{k}} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \\ v_{\perp} J_n(a) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Эта форма более удобна при конкретных расчетах.

Используя решение (3.28), нетрудно получить следующее выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = & \left(1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \delta_{ij} + \\ & + \sum \frac{4\pi e^2}{m\omega^2} \sum_n \int d\mathbf{v} \frac{\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} \left( \frac{n\omega_B}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \right. \\ & \left. + k_{\parallel} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где тензор  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  представляет собой диадное произведение векторов  $X_i^{(n)}$  и  $X_j^{(n)*}$ :

$$\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) \equiv X_i^{(n)} X_j^{(n)*}. \quad (3.33)$$

Воспользовавшись определением (3.30), можно найти элементы тензора  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  в явном виде. Напомним, что вектор  $X_i^{(n)}$  определен в системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Поэтому тензор (3.33) определен в такой же системе. Вид тензора  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  существенно упрощается, если система координат выбрана так, что ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . В такой системе координат  $\varphi_{\mathbf{k}} = 0$  и тензор (3.33) принимает вид

$$\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \\ -iv_{\perp} J'_n(a) \\ v_{\parallel} J_n(a) \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} J_n(a) \\ iv_{\perp} J'_n(a) \\ v_{\parallel} J_n(a) \end{pmatrix}_j. \quad (3.34)$$

Перемножая векторы, получаем

$$\begin{aligned} & \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) = \\ = & \begin{pmatrix} \frac{n^2\omega_B^2}{k_{\perp}^2} J_n^2(a) & i \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} v_{\perp} J_n(a) J'_n(a) & \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} v_{\parallel} J_n^2(a) \\ -i \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} v_{\perp} J_n(a) J'_n(a) & v_{\perp}^2 J_n^2(a) & -iv_{\perp} v_{\parallel} J_n(a) J'_n(a) \\ \frac{n\omega_B}{k_{\perp}} v_{\parallel} J_n^2(a) & iv_{\perp} v_{\parallel} J_n(a) J'_n(a) & v_{\parallel}^2 J_n^2(a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Таким образом, в системе координат, в которой ось  $z$  направлена вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ , тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  определяется общей формулой (3.32), где

в качестве тензора  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  следует использовать (3.35). Суммирование в (3.32) производится по сортам частиц, функции распределения которых предполагаются зависящими только от величин составляющих скорости, перпендикулярной и параллельной направлению внешнего магнитного поля. Непосредственной проверкой легко убедиться, что тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле (3.32) удовлетворяет условию симметрии

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{B}_0) = \varepsilon_{ji}(\omega, -\mathbf{k}; -\mathbf{B}_0). \quad (3.36)$$

В случае равновесной или неизотермической плазмы, в которой частицы разных сортов характеризуются максвелловскими распределениями с отличающимися температурами, тензор диэлектрической проницаемости (3.32) может быть приведен к виду [104]

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2} \times \left\{ e^{-\beta} \sum_n \frac{z_0}{z_n} \pi_{ij}(z_n) [\varphi(z_n) - i\sqrt{\pi} z_n e^{-z_n^2}] - 2z_0^2 b_i b_j \right\}, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} & \pi_{ij}(z_n) = \\ & = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\beta} I_n & -in(I_n - I'_n) & \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{\frac{2}{\beta}} nz_n I_n \\ in(I_n - I'_n) & \left(\frac{n^2}{\beta} + 2\beta\right) I_n - 2\beta I'_n & i \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{2\beta} z_n (I_n - I'_n) \\ \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{\frac{2}{\beta}} nz_n I_n & -i \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{2\beta} z_n (I_n - I'_n) & 2z_n^2 I_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

( $I_n = I_n(\beta)$  и  $I'_n = \frac{\partial I_n(\beta)}{\partial \beta}$  — модифицированная функция Бесселя и ее производная;  $\sqrt{\beta} = \frac{k_{\perp} s}{\sqrt{3} \omega_B}$ ,  $\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$ ,  $\Omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$ ,  $s^2 = \frac{3T}{m}$ ), где  $\mathbf{b}$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{B}_0$ . Напомним, что величина  $z_n$  определена по формуле (3.14).

В случае, когда распределения частиц по поперечным и продольным составляющим скорости (по отношению к направлению магнитного поля) характеризуются разными температурами,  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$ , выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2} \times$$

$$\times \left\{ e^{-\beta_{\perp}} \sum_n \pi_{ij}(z_n^{\parallel}) \left[ 1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} + \left( \frac{z_0^{\parallel}}{z_n^{\parallel}} - 1 + \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [\varphi(z_n^{\parallel}) - i \sqrt{\pi} z_n^{\parallel} e^{-z_n^{\parallel 2}}] \right] - 2 \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} z_0^{\parallel 2} b_i b_j \right\}, \quad (3.39)$$

где

$$\pi_{ij}(z_n) = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{\beta_{\perp}} I_n & -in(I_n - I'_n) & \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{\frac{2}{\beta_{\perp}}} \times \\ & & \times \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}} n z_n I_n \\ in(I_n - I'_n) & \left( \frac{n^2}{\beta_{\perp}} + 2\beta_{\perp} \right) I_n - 2\beta_{\perp} I'_n & i \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{2\beta_{\perp}} \times \\ & & \times \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}} z_n (I_n - I'_n) \\ \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{\frac{2}{\beta_{\perp}}} \times & -i \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \sqrt{2\beta_{\perp}} \times & 2 \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} z_n^2 I_n \\ \times \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}} n z_n I_n & \times \sqrt{\frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}} z_n (I_n - I'_n) & \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$\left( \sqrt{\beta_{\perp}} = \frac{k_{\perp} s_{\perp}}{\sqrt{2} \omega_B}; s_{\perp}, s_{\parallel} \text{ и } z_n^{\parallel} \text{ определены по формулам (3.17)} \right)$ . Заметим

что продольная свертка от тензора (3.39) приводит к выражению для продольной диэлектрической проницаемости плазмы (3.16).

Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы в магнитном поле не зависит от волнового вектора и определяется хорошо известным выражением

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -i\varepsilon_2 & 0 \\ i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

где

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \varepsilon_2 = \sum \frac{\omega_B}{\omega} \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_B^2}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2}. \quad (3.42)$$

Как видим, пренебрежение тепловым движением частиц в плазме приводит к отсутствию пространственной дисперсии. Поэтому (3.41)

можно также рассматривать как предельное значение тензора диэлектрической проницаемости (3.37) в области больших длин волны ( $k \rightarrow 0$ ). Согласно (3.41) плазма в магнитном поле является анизотропной и гиротропной средой даже в отсутствие пространственной дисперсии.

### 3. ТЕНЗОРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Для нахождения тензорных нелинейных восприимчивостей магнитоактивной плазмы необходимо использовать кроме (3.27) также последующие итерации уравнения (3.26). Вторая итерация уравнения (3.26) может быть представлена в виде

$$f_{\mathbf{k}\omega}^{(2)}(\mathbf{v}) = \frac{e}{m\omega_B} e^{ia \sin(\varphi - \varphi_{\mathbf{k}}) - t \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega_B} \varphi} \times \\ \times \int d\varphi e^{-ia \sin(\varphi - \varphi_{\mathbf{k}}) + t \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega_B} \varphi} \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \frac{1}{\omega_1} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_1 \omega_1} \mathbf{Y}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{v}) f_{\mathbf{k}_2 \omega_2}^{(1)}(\mathbf{v}), \quad (3.43)$$

где

$$Y_i(\omega_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{v}) \equiv [(\omega_1 - \mathbf{k}_1 \mathbf{v}) \delta_{ij} + k_{1j} v_i] \frac{\partial}{\partial v_j}. \quad (3.44)$$

Аналогично можно записать третью итерацию  $f_{\mathbf{k}\omega}^{(3)}(\mathbf{v})$ . С помощью найденных выражений для  $f_{\mathbf{k}\omega}^{(2)}(\mathbf{v})$  и  $f_{\mathbf{k}\omega}^{(3)}(\mathbf{v})$  нетрудно получить общие формулы для тензорных нелинейных восприимчивостей плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \sum \frac{(-i)}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega} \times \\ \times \int d\mathbf{v} \sum_n \frac{e^{in\varphi - ia \sin \varphi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} X_i^{(n)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{v}) \times \\ \times \left\{ Y_j(\omega_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{v}) \sum_{n_2} \frac{e^{-in_2(\varphi - \varphi_2) + ia_2 \sin(\varphi - \varphi_2)}}{\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2 \omega_B + i0} Z_k^{(n_2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{v}) + \right. \\ \left. + Y_k(\omega_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{v}) \sum_{n_1} \frac{e^{-in_1(\varphi - \varphi_1) + ia_1 \sin(\varphi - \varphi_1)}}{\omega_1 - k_{1\parallel} v_{\parallel} - n_1 \omega_B + i0} Z_j^{(n_1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \mathbf{v}) \right\} f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (3.45)$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2;$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \frac{1}{3} \{ \bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \\ + \bar{\chi}_{ikjl}^{(3)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_3, \mathbf{k}_3) + \bar{\chi}_{iljk}^{(3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_1, \mathbf{k}_1) \}; \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \sum \frac{(-i)^2}{2} \frac{4\pi e^2}{m} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \times \\
&\times \int d\mathbf{v} \sum_n \frac{e^{in\varphi - ia \cdot \sin \varphi}}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B + i0} X_i^{(n)}(\mathbf{k}_{\perp}, \mathbf{v}) \times \\
&\times Y_j(\omega', \mathbf{k}'; \mathbf{v}) \sum_{n'} \frac{e^{-in'(\varphi - \varphi') + ia' \cdot \sin(\varphi - \varphi')}}{\omega' - k'_{\parallel} v_{\parallel} - n'\omega_B + i0} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{in'(\varphi - \varphi') - ia' \cdot \sin(\varphi - \varphi')} \times \\
&\times \left\{ Y_k(\omega_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{v}) \sum_{n_3} \frac{e^{-in_3(\varphi - \varphi_3) + ia_3 \cdot \sin(\varphi - \varphi_3)}}{\omega_3 - k_{3\parallel} v_{\parallel} - n_3\omega_B + i0} Z_l^{(n_3)}(\omega_3, \mathbf{k}_3; \mathbf{v}) + \right. \\
&+ \left. Y_l(\omega_3, \mathbf{k}_3; \mathbf{v}) \sum_{n_2} \frac{e^{-in_2(\varphi - \varphi_2) + ia_2 \cdot \sin(\varphi - \varphi_2)}}{\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2\omega_B + i0} Z_k^{(n_2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \mathbf{v}) \right\} f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \tag{3.47}
\end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad \omega' = \omega_2 + \omega_3, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3.$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в рассмотренном ранее случае потенциального поля. Величины  $X_i^{(n)}(\mathbf{k}_{\perp}; \mathbf{v})$  и  $Z_l^{(n)}(\omega, \mathbf{k}; \mathbf{v})$  определяются по формулам (3.30) и (3.31).

Тензорные нелинейные восприимчивости плазмы в магнитном поле  $\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\kappa_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  характеризуются такими же свойствами симметрии, как и в отсутствие поля, (2.79) и (2.80). Кроме того, выражения (3.45) и (3.47), как и (3.32), удовлетворяют условиям вещественности поля (2.81) и (2.82). Нетрудно показать, что выражения (3.45) и (3.47) при  $B_0 \rightarrow 0$  непосредственно переходят в (2.70) и (2.72). С помощью свертки (3.45) и (3.47) по соответствующим волновым векторам можно получить формулы (3.7) и (3.9), описывающие случай продольного поля.

В предельном случае холодной магнитоактивной плазмы ( $T = 0$ ) из (3.45) — (3.47) для симметризованных тензорных восприимчивостей можно получить более простые выражения:

$$\begin{aligned}
\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega} \{ \omega_1 \Gamma_{ij}(\omega_1) \Gamma_{lk}(\omega_2) k_l + \\
&+ \omega_2 \Gamma_{ik}(\omega_2) \Gamma_{ij}(\omega_1) k_l + \omega_1 \Gamma_{kj}(\omega_1) \Gamma_{il}(\omega) k_{2l} - \omega \Gamma_{ik}(\omega) \Gamma_{ij}(\omega_1) k_{2l} + \\
&+ \omega_2 \Gamma_{jk}(\omega_2) \Gamma_{il}(\omega) k_{1l} - \omega \Gamma_{ij}(\omega) \Gamma_{lk}(\omega_2) k_{1l} \}, \tag{3.48} \\
\kappa_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \sum \frac{1}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \left\{ \left( \frac{\omega_1}{\omega'} \right) (\omega_2 k'_j k_{3k'} + \right. \\
&+ \omega_3 k_{2j} k'_{k'}) \Gamma_{ij}(\omega_1) \Gamma_{j'k}(\omega_2) \Gamma_{k'l}(\omega_3) + \left[ \frac{\omega_1}{\omega'} k_{k'} \Gamma_{ij}(\omega_1) - \right. \\
&- \frac{\omega}{\omega'} k_{1k'} \Gamma_{ij}(\omega) + k_{1j'} (\delta_{ik'} \Gamma_{j'j}(\omega_1) + \delta_{jk'} \Gamma_{ij'}(\omega)) + \\
&+ \left. \left. \omega_1 \Gamma_{ik'}(\omega) k'_{j'} \Gamma_{j'j'}(\omega_1) \right] [\omega_2 k_{3l'} \Gamma_{k'l'}(\omega') \Gamma_{lk}(\omega_2) + \omega_3 k_{3l'} \Gamma_{l'k}(\omega_2) \Gamma_{k'l}(\omega_3) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \omega' k_{3l'} \Gamma_{l'k}(\omega_2) \Gamma_{k'l}(\omega') + \omega_3 k_{2l'} \Gamma_{k'l'}(\omega') \Gamma_{kl}(\omega_3) + \\
& + \omega_2 k_{2l'} \Gamma_{k'k}(\omega_2) \Gamma_{l'l}(\omega_3) - \omega' k_{2l'} \Gamma_{l'l}(\omega_3) \Gamma_{k'k}(\omega') \mathbb{I} + (1 \rightleftharpoons 2) + (1 \rightleftharpoons 3) \Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

Такие же выражения для  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и  $\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  могут быть получены на основе гидродинамических уравнений. Несимметризованная тензорная восприимчивость третьего порядка магнитоактивной плазмы в гидродинамическом приближении записывается в виде

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}_{ijkl}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \sum \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega'} \times \\
& \times \{ (\omega_1 \omega_2 \Gamma_{ij}(\omega_1) k_{j'} \Gamma_{j'k}(\omega_2) k_{3k'} \Gamma_{k'l}(\omega_3) + [\omega_1 k_{k'} \Gamma_{ij}(\omega_1) - \\
& - \omega k_{1k'} \Gamma_{ij}(\omega) + \omega' k_{1j'} (\delta_{ik'} \Gamma_{j'j}(\omega_1) + \delta_{jk'} \Gamma_{ij'}(\omega))] + \\
& + \omega_1 \omega' \Gamma_{ik'}(\omega) k_{j'} \Gamma_{j'j'}(\omega_1) ] [\omega_2 k_{3l'} \Gamma_{k'l'}(\omega') \Gamma_{lk}(\omega_2) + \\
& + \omega_3 k_{3l'} \Gamma_{l'k}(\omega_2) \Gamma_{k'l}(\omega_3) - \omega' k_{3l'} \Gamma_{l'k}(\omega_2) \Gamma_{k'l}(\omega')] + (2 \rightleftharpoons 3) \}.
\end{aligned}
\tag{3.50}$$

Приведенные в этой главе выражения для тензора диэлектрической проницаемости и тензорных нелинейных восприимчивостей в дальнейшем будут использованы при рассмотрении различных волновых процессов в однородной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле.

1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ  
В СРЕДАХ С ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

Прежде чем перейти к систематическому изучению нелинейного взаимодействия волн, остановимся более детально на рассмотрении собственных колебаний и волн в средах с пространственно-временной дисперсией<sup>1</sup>. Во второй главе отмечалось, что в линейном приближении собственные колебания и волны определяются с помощью волнового уравнения, которое для пространственно-однородной и стационарной плазмы имеет вид

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (4.1)$$

где

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \eta^2 \quad (4.2)$$

( $\eta \equiv \frac{kc}{\omega}$  — показатель преломления). Уравнение (4.1) имеет решения, отличные от нуля, если определитель, составленный из элементов матрицы (4.2), обращается в нуль,

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) \equiv |\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})| = 0. \quad (4.3)$$

Корни дисперсионного уравнения (4.3) определяют зависимости показателей преломления от частоты  $\eta^\alpha(\omega)$  или зависимости собственных частот от волнового вектора  $\omega^\alpha(\mathbf{k})$  (индексом  $\alpha$  обозначены собственные волны).

Введем матрицу  $\lambda_{ij}$ , элементы которой представляют собой алгебраические дополнения к элементам матрицы  $\Lambda_{ij}$ . Согласно определению

$$\Lambda_{ij} \lambda_{jk} = \Lambda \delta_{ik}. \quad (4.4)$$

Элементы матрицы  $\lambda_{ij}$  выражаются через элементы матрицы  $\Lambda_{ij}$  по формуле

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikt} \varepsilon_{jmn} \Lambda_{mk} \Lambda_{ni}, \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> Линейная теория электромагнитных волн в плазме изложена в монографиях [5, 33, 35, 108, 114, 116]. Рассмотрению волн в ограниченных плазменных системах посвящена монография [189].



где  $\varepsilon_{ikl}$  — единичный полностью антисимметричный тензор. В общем случае тензор (4.2) содержит как эрмитовскую, так и антиэрмитовскую части:

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \Lambda_{ij}^H(\omega, \mathbf{k}) + \Lambda_{ij}^A(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.6)$$

$$\Lambda_{ij}^H(\omega, \mathbf{k}) = \Lambda_{ji}^{H*}(\omega, \mathbf{k}), \quad \Lambda_{ij}^A(\omega, \mathbf{k}) = -\Lambda_{ji}^{A*}(\omega, \mathbf{k}); \quad (4.7)$$

поэтому определитель  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$  является комплексной функцией  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ . Условие (4.3) при этом сводится к требованию обращения в нуль вещественной и мнимой частей  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$ :  $\text{Re}\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0$  и  $\text{Im}\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . В области прозрачности плазмы (область значений  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , при которых антиэрмитовская часть тензора диэлектрической проницаемости мала по сравнению с эрмитовской частью) мнимая часть  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$  мала по сравнению с вещественной. Поэтому, если пренебречь затуханием волн, дисперсионное уравнение (4.3) приближенно можно записать в виде

$$\text{Re}\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.8)$$

Предположим, что волновой вектор характеризуется вещественным значением  $\mathbf{k}$ . Определяя из (4.8) собственную частоту  $\omega_{\mathbf{k}}^\alpha$  ( $\omega_{\mathbf{k}}^\alpha > 0$ ) и считая затухание малым, из уравнения (4.3) получаем приближенное выражение для декремента затухания

$$\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha \simeq \frac{\text{Im}\Lambda(\omega_{\mathbf{k}}^\alpha, \mathbf{k})}{\frac{\partial \text{Re}\Lambda(\omega_{\mathbf{k}}^\alpha, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}^\alpha}}. \quad (4.9)$$

Непосредственной проверкой легко установить, что  $\text{Im}\Lambda(\omega, \mathbf{k})$  в области прозрачности плазмы можно выразить через эрмитовскую часть матрицы  $\lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и антиэрмитовскую часть тензора диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\text{Im}\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{4i} (\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}^*(\omega, \mathbf{k})) (\lambda_{ji}(\omega, \mathbf{k}) + \lambda_{ij}^*(\omega, \mathbf{k})). \quad (4.10)$$

В равновесной плазме величины  $\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha$ , определяемые равенством (4.9), всегда положительны ( $\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha > 0$ ), что соответствует затуханию колебаний. В неравновесной плазме  $\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha$  могут принимать и отрицательные значения ( $\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha < 0$ ). Если  $\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha$  отрицательно, то амплитуда соответствующего собственного колебания экспоненциально нарастает со временем и плазма оказывается неустойчивой (величина  $|\gamma_{\mathbf{k}}^\alpha|$  называется инкрементом нарастания)<sup>2</sup>.

Временная зависимость поля для какой-либо собственной волны  $\alpha$ , соответствующей фиксированному значению волнового вектора

<sup>2</sup> Теория плазменных неустойчивостей рассмотрена в монографиях [69, 70, 124].

$\mathbf{k}$ , определяется выражением

$$\mathbf{E}_k^\alpha(t) = \mathbf{E}_k^\alpha \cos(\omega_k^\alpha t + \Phi_k^\alpha), \quad \mathbf{E}_k^\alpha \equiv \mathbf{E}_{k0}^\alpha e^{-\gamma_k^\alpha t}, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{E}_{k0}^\alpha$  и  $\Phi_k^\alpha$  — начальные амплитуда и фаза ( $\omega_k^\alpha$ ,  $\Phi_k^\alpha$  и  $\gamma_k^\alpha$  — вещественные функции  $\mathbf{k}$ ). Амплитуда напряженности поля удовлетворяет условию вещественности

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}^*}^{\alpha*} = \mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^\alpha. \quad (4.12)$$

Если пренебречь затуханием, амплитуда поля волны не изменяется (в линейном приближении) в зависимости от времени,  $\mathbf{E}_k^\alpha = \mathbf{E}_{k0}^\alpha$ .

Введем единичный вектор  $\mathbf{e}$  в направлении вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}_k$  — вектор поляризации волны

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{E}_k}{|\mathbf{E}_k|}. \quad (4.13)$$

Согласно (4.1) вектор поляризации определенной волны  $\mathbf{e}^\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_{ij}(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) e_j^\alpha = 0, \quad (4.14)$$

общее решение которого можно представить в виде

$$e_i^\alpha = C \lambda_{ij}(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) a_j, \quad (4.15)$$

где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор и  $C$  — постоянная, определяемая из условия нормировки

$$\mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^{\alpha*} = 1. \quad (4.16)$$

Покажем, что соотношение (4.15) определяет вектор поляризации волны с точностью до фазового множителя. Прежде всего заметим, что при любых частотах матрицы  $\lambda_{ij}$  и  $\Lambda_{ij}$  связаны соотношением

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{il} \lambda_{kj} + \Lambda \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \Lambda_{nm}. \quad (4.17)$$

В справедливости этого равенства нетрудно убедиться, умножив на  $\frac{1}{\Lambda} \lambda_{aj} \lambda_{bl} \varepsilon_{ikc}$  левую и правую части<sup>5</sup> равенства

$$\Lambda \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{mnp} \Lambda_{ma} \Lambda_{nb} \Lambda_{pc}.$$

Для собственных частот, удовлетворяющих дисперсионному уравнению  $\Lambda = 0$ , соотношение (4.17) упрощается:

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{il} \lambda_{kj}. \quad (4.18)$$

Пренебрегая в области прозрачности плазмы антиэрмитовской частью  $\lambda_{ij}$ , из (4.18) нетрудно вывести равенство

$$\frac{\lambda_{il} a_l \lambda_{jk}^* a_k}{\lambda_{mn} a_m a_n} = \frac{\lambda_{il} a_l' \lambda_{jk}^* a_k'}{\lambda_{mn} a_m' a_n'}, \quad (4.19)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  — произвольные вещественные векторы. Заметим, что для произвольных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  скалярные произведения  $(\mathbf{a} \lambda \mathbf{a})$  и  $(\mathbf{a}' \lambda \mathbf{a}')$

имеют один и тот же знак:

$$(\mathbf{a}\lambda\mathbf{a})(\mathbf{a}'\lambda\mathbf{a}') = |(\mathbf{a}\lambda\mathbf{a}')|^2. \quad (4.20)$$

В частности, одинаковый знак имеют диагональные элементы эрмитовской части матрицы  $\lambda_{ij}$ .

Используя соотношение (4.18), постоянную нормировки в (4.15) можно записать так:

$$C = [(\mathbf{a}\lambda\mathbf{a}) \text{Sp } \lambda]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

Следовательно, нормированный вектор поляризации волны с дисперсией (4.3) имеет вид

$$\mathbf{e}^\alpha = \frac{\lambda\mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{a}\lambda\mathbf{a}) \text{Sp } \lambda}} \Big|_{\omega=\omega_k^\alpha}. \quad (4.22)$$

Согласно (4.19) произведение  $e_i e_j^*$  инвариантно относительно изменения вектора  $\mathbf{a}$ , поэтому при произвольном повороте  $\mathbf{a}$  в выражении (4.22) может измениться только фазовый множитель.

Из уравнений Максвелла (1.59) и линейного материального уравнения (2.63) непосредственно следует закон сохранения энергии в плазме

$$\frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \frac{c}{4\pi} \text{div} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] = 0. \quad (4.23)$$

Рассмотрим поле почти монохроматической плоской волны с частотой  $\omega_k^\alpha$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  (амплитуда волны  $\mathbf{E}_k^\alpha$  является медленно изменяющейся функцией координат и времени). Усредняя равенство (4.23) по временному интервалу, значительно превосходящему период собственных колебаний, и учитывая малость антиэрмитовской части тензора диэлектрической проницаемости по сравнению с эрмитовской частью, получаем уравнение переноса энергии в плазме с учетом пространственно-временной дисперсии

$$\frac{\partial W_k^\alpha}{\partial t} + \text{div} \mathbf{S}_k^\alpha + Q_k^\alpha = 0, \quad (4.24)$$

где  $W_k^\alpha$  — средняя плотность энергии,  $\mathbf{S}_k^\alpha$  — средняя плотность потока энергии в направлении распространения волны и  $Q_k^\alpha$  — величина потерь энергии, обусловленных линейной диссипацией. Указанные величины определяются выражениями

$$W_k^\alpha = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega_k^\alpha} [\omega_k^\alpha \varepsilon_{ij}^H(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})] + \eta^2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \right\} E_i^{\alpha*}(\mathbf{k}) E_j^\alpha(\mathbf{k}), \quad (4.25)$$

$$\mathbf{S}_{ki}^\alpha = \frac{1}{16\pi} \left\{ (2k_i \delta_{jk} - \delta_{ij} k_k - \delta_{ik} k_j) \frac{c^2}{\omega_k^\alpha} - \right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial k_i} [\omega_k^\alpha \varepsilon_{jk}^H(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})] E_j^{\alpha*}(\mathbf{k}) E_k^\alpha(\mathbf{k}), \quad (4.26)$$

$$Q_k^\alpha = -\frac{i\omega_k^\alpha}{16\pi} [\varepsilon_{ij}(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}^*(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})] E_i^{\alpha*}(\mathbf{k}) E_j^\alpha(\mathbf{k}). \quad (4.27)$$

Величина  $W_k^\alpha$  включает в себя как энергию электромагнитного поля волны, так и кинетическую энергию частиц, колеблющихся в этом поле. (Средняя плотность энергии в среде с временной дисперсией определена в [64].) Заметим, что величина  $W_k^\alpha$  для собственных волн в равновесной плазме всегда положительна. В неравновесной плазме величина  $W_k^\alpha$  для отдельных волн может принимать и отрицательные значения (волны с отрицательной энергией<sup>3</sup>). Знак  $W_k^\alpha$  определяется характером дисперсии в плазме. Средняя плотность потока энергии  $S_k^\alpha$  связана с  $W_k^\alpha$  соотношением

$$S_k^\alpha = v_k^\alpha W_k^\alpha, \quad (4.28)$$

где  $v_k^\alpha$  — групповая скорость волны,

$$v_k^\alpha = \frac{\partial \omega_k^\alpha}{\partial \mathbf{k}}. \quad (4.29)$$

Величина потерь энергии в плазме определяется антиэрмитовой частью тензора  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и ее нетрудно связать с мнимой частью определителя (4.3). Действительно, согласно (4.10) и (4.22)

$$\text{Im } \Lambda(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) = \frac{\text{Sp } \Lambda(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})}{2i} [\varepsilon_{ij}(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) - \varepsilon_{ji}^*(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})] e_i^{\alpha*} e_j^\alpha. \quad (4.30)$$

В силу возрастания энтропии для термодинамически устойчивых систем  $Q_k^\alpha > 0$ , поэтому, сравнивая (4.30) с (4.27), можно получить соотношение

$$\frac{\text{Sp } \lambda(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})}{\omega_k^\alpha} \text{Im } \Lambda(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}) > 0. \quad (4.31)$$

Временная компонента Фурье (4.11) в пренебрежении затуханием записывается в виде

$$E_{k\omega}^\alpha = \pi E_k^\alpha \{ e^{-i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega - \omega_k^\alpha) + e^{i\Phi_k^\alpha} \delta(\omega + \omega_k^\alpha) \}. \quad (4.32)$$

Очевидно, флуктуационные колебания электрического поля в плазме также описываются выражением (4.32), при этом начальную фазу  $\Phi_k^\alpha$  следует считать случайной величиной, а величина амплитуды  $E_k^\alpha$  определяется состоянием системы. Вследствие однородности плазмы и стационарности рассматриваемых состояний среднее значение квадратичного произведения флуктуаций электрического

<sup>3</sup> На возможность существования в плазме волн с отрицательной энергией впервые указано в работе [52].

поля находим по формуле

$$\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega'}^* \rangle = 2\pi V \delta(\omega - \omega') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (4.33)$$

где  $V$  — объем плазмы;  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  — спектральная корреляционная функция. Подставляя в левую часть (4.33) флуктуации напряженности поля в виде (4.32) и усредняя по начальной фазе, получаем

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi I_{\mathbf{k}}^\alpha \{ \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^\alpha) \}, \quad (4.34)$$

где  $I_{\mathbf{k}}^\alpha$  — полная интенсивность флуктуационных колебаний с собственными частотами  $\omega_{\mathbf{k}}^\alpha$  и  $-\omega_{\mathbf{k}}^\alpha$ ,

$$I_{\mathbf{k}}^\alpha \equiv \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^\alpha|^2}{V}. \quad (4.35)$$

## 2. ВОЛНЫ В ИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

В случае однородной изотропной плазмы, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости (2.75), дисперсионное уравнение (4.3) расщепляется на два отдельных уравнения для продольных и поперечных волн

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) \equiv \varepsilon_l(\omega, k) [\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2]^2 = 0. \quad (4.36)$$

Действительно, в случае продольных волн  $\mathbf{kE} \neq 0$ ,  $\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) E_j = 0$  и уравнение (4.1) принимает вид

$$\varepsilon_l(\omega, k) \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0. \quad (4.37)$$

Решение этого уравнения, отличное от нуля, возможно только при

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0. \quad (4.38)$$

Условие обращения в нуль продольной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_l(\omega, k)$  и является дисперсионным уравнением для продольных волн.

В случае поперечных волн в плазме  $\mathbf{kE} = 0$  и  $\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) E_j \neq 0$ . Волновое уравнение (4.1) принимает вид

$$[\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2] \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 0. \quad (4.39)$$

Решение этого уравнения будет отличным от нуля, если выполнено условие

$$\varepsilon_t(\omega, k) = \eta^2, \quad (4.40)$$

которое и представляет собой дисперсионное уравнение для поперечных электромагнитных волн в плазме.

В общем случае, когда плазма характеризуется неизотропным распределением частиц по скоростям или находится во внешних полях, тензор диэлектрической проницаемости не представляется в форме (2.75) и электромагнитные волны не разделяются на продольные и поперечные.

В однородной изотропной плазме существует два типа слабо-затухающих продольных волн: в высокочастотной области — электронные ленгмюровские, в низкочастотной — ионно-звуковые. Частоты и затухание волн нетрудно найти из дисперсионного уравнения (4.38), если воспользоваться выражением для продольной диэлектрической проницаемости плазмы (2.27). Частота и затухание ленгмюровских волн определяются формулами

$$\omega_k = \sqrt{\Omega^2 + k^2 s^2}; \quad \gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\Omega}{a^3 k^3} e^{-\frac{3}{2} \frac{\omega_k^2}{k^2 s^2}}, \quad (4.41)$$

где  $\Omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$  — квадрат ленгмюровской частоты;  $s^2 = \frac{3T}{m}$  — среднее значение квадрата скорости электрона. Формулы (4.41) справедливы при  $ak \ll 1$ . В этом случае затухание ленгмюровских волн невелико ( $\gamma_k \ll \omega_k$ ) и определяется взаимодействием резонансных электронов с полем волны (затухание Ландау). Если  $ak \gg 1$ , то ленгмюровские колебания сильно затухают ( $\gamma_k \geq \omega_k$ ). Вектор поляризации ленгмюровских волн направлен вдоль направления распространения волны

$$\mathbf{e} = \mathbf{k}/k. \quad (4.42)$$

Частота ионно-звуковых колебаний определяется выражением

$$\omega_k = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + a^2 k^2}}, \quad (4.43)$$

где  $v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$  — так называемая скорость неизотермического звука. Ионно-звуковые колебания слабо затухают только в сильно неизотермической плазме при  $T_e \gg T_i$ . Если  $ak \ll 1$ , то выражения для частоты и затухания ионно-звуковых волн имеют вид

$$\omega_k = kv_s, \quad \gamma_k = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} kv_s. \quad (4.44)$$

При  $ak > 1$  частота ионно-звуковых волн близка к ионной ленгмюровской частоте:

$$\omega_k \simeq \Omega_i. \quad (4.45)$$

Если  $T_e \simeq T_i$ , то ионно-звуковые волны сильно затухают,  $\gamma_k \simeq \omega_k$ . Вектор поляризации ионно-звуковых волн, как и ленгмюровских, определяется (4.42).

Показатель преломления поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме определяется соотношением

$$\eta^2(\omega) = \varepsilon_t(\omega, k). \quad (4.46)$$

Очевидно, электромагнитная волна может распространяться только при выполнении условия  $\eta^2(\omega) > 0$ . Зависимость частот распространяющихся электромагнитных волн от волнового вектора описывается выражением

$$\omega_k = \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2}. \quad (4.47)$$

Учет теплового движения частиц приводит к появлению в (4.47) лишь малых поправок, порядка  $T/mc^2$ . Электромагнитные волны характеризуются фазовыми скоростями, большими скорости света, и в бесстолкновительной плазме не затухают.

Условие  $\eta^2(\omega) = 0$  определяет границу между областями распространения и нераспространения электромагнитных волн. Используя выражение (2.77) для поперечной диэлектрической проницаемости, нетрудно найти граничную частоту  $\omega_0$ , которая в случае изотропной плазмы совпадает с электронной ленгмюровской частотой:

$$\omega_0 = \Omega \quad (4.48)$$

(индекс «0» означает, что величина  $\omega_0$  является предельным значением собственной частоты (4.47) при  $k \rightarrow 0$ ).

Каждой частоте (4.47) можно сопоставить две электромагнитные волны с взаимно перпендикулярными векторами поляризации  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  (которые, естественно, перпендикулярны также волновому вектору  $\mathbf{k}$ ) или две волны с правой и левой круговыми поляризациями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2), \\ \mathbf{e}_l &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2). \end{aligned} \right\} (4.49)$$

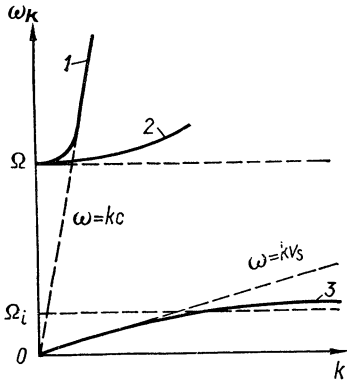


Рис. 1. Зависимость частоты собственных волн от величины волнового вектора в изотропной плазме:

1 — поперечная электромагнитная, 2 — ленгмюровская, 3 — ионно-звуковая волны.

На рис. 1 схематически представлена зависимость частоты от волнового вектора для различных собственных волн в изотропной плазме.

### 3. ВОЛНЫ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

Дисперсионное уравнение для волн в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, можно представить в виде

$$A\eta^4 + B\eta^2 + C = 0, \quad (4.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon_{11} \sin^2 \vartheta + \varepsilon_{33} \cos^2 \vartheta + 2\varepsilon_{13} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ B &= 2(\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}) \sin \vartheta \cos \vartheta - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2) \sin^2 \vartheta - \\ &\quad - (\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2) \cos^2 \vartheta - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}^2, \\ C &= \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{33}\varepsilon_{12}^2 + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}, \end{aligned} \right\} (4.51)$$

$\vartheta$  — угол между направлением распространения волны  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $\mathbf{B}_0$ . Уравнение (4.50) устанавливает связь между частотой и волновым вектором для собственных волн. Если считать волновой вектор  $\mathbf{k}$  заданным, то из уравнения (4.50) можно найти частоты собственных колебаний:

$$\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \omega^{\alpha}(k, \vartheta). \quad (4.52)$$

Очевидно, число корней уравнения (4.50), а также сами корни определяются характером зависимости компонент тензора  $\varepsilon_{ij}$  от  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ .

Если пренебречь тепловым движением частиц, то тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы принимает вид (3.41), при этом коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  в дисперсионном уравнении (4.50) зависят только от частоты и направления распространения волны:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \varepsilon_1 \sin^2 \vartheta + \varepsilon_3 \cos^2 \vartheta, \\ B_0 &= -[(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \vartheta + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \vartheta)], \\ C_0 &= (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \varepsilon_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

(величины  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  определяются согласно (3.42)). В этом случае уравнение (4.50) можно непосредственно решить относительно  $\eta^2$ , определив тем самым зависимости показателей преломления волн от частоты и направления распространения. Уравнение (4.50) при (4.53) имеет два различных решения:

$$\eta_{\pm}^2 = \frac{-B_0 \pm \sqrt{B_0^2 - 4A_0C_0}}{2A_0}, \quad (4.54)$$

соответствующих показателям преломления так называемых обыкновенной и необыкновенной электромагнитных волн.

Согласно (4.54) в магнитоактивной плазме возможно распространение двух волн с заданной частотой, отличающихся значениями показателей преломления. Эти волны при произвольном (по отношению к магнитному полю) направлении распространения характеризуются эллиптической поляризацией. Векторы поляризации можно выбрать в виде

$$\mathbf{e} = \left\{ \cos \varphi - i \frac{\varepsilon_2}{\eta^2 - \varepsilon_1} \sin \varphi, \quad \sin \varphi + i \frac{\varepsilon_2}{\eta^2 - \varepsilon_1} \cos \varphi, \right. \\ \left. \frac{\eta^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\eta^2 \sin^2 \vartheta - \varepsilon_1} \right\}, \quad (4.55)$$

где  $\varphi$  — азимутальный угол вектора  $\mathbf{k}$ . Электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, — поперечные, причем обыкновенная волна характеризуется правой, а необыкновенная — левой круговой поляризацией.

Электромагнитные волны в плазме, находящейся в магнитном поле, в общем случае не разделяются на продольные и поперечные.



Однако при  $A \equiv \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_{ij}(\omega, k) \rightarrow 0$  продольная составляющая электрического поля оказывается значительно больше поперечной. В этом нетрудно убедиться, умножив волновое уравнение (4.1) на  $\mathbf{k}$ :

$$E^l = - \frac{k_i \varepsilon_{ij} E_j^t}{kA}. \quad (4.56)$$

Отсюда видно, что в случае продольных колебаний в плазме ( $E^t = 0$ ) должны выполняться два условия:  $\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0$  и  $A(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . В общем случае эти условия одновременно не удовлетворяются. Однако в области частот, при которых  $\eta^2$  очень велико, в дисперсионном уравнении (4.50) следует оставить только член с высшей степенью  $\eta^2$  и оно сводится к условию

$$A(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.57)$$

Частоты, определяемые из этого условия, называются плазменными резонансными частотами. Заметим, что один из показателей преломления (4.54) стремится к бесконечности, если частота волны приближается к резонансному значению

$$\eta_+^2 = - \frac{B}{A}. \quad (4.58)$$

Другой показатель преломления,

$$\eta_-^2 = - \frac{C}{B}, \quad (4.59)$$

при этом остается конечным.

Используя (4.53) и (3.42), уравнение для плазменных резонансов (пренебрегая тепловыми эффектами) можно записать в виде

$$1 - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2} \cos^2 \vartheta - \sum \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_B^2} \sin^2 \vartheta = 0 \quad (4.60)$$

(суммирование производится по электронной и ионной составляющим). Это уравнение третьей степени относительно  $\omega^2$  и определяет три резонансные частоты  $\omega_\infty^{(\alpha)}(\vartheta)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  (индекс « $\infty$ » означает, что  $\omega_\infty(\vartheta)$  является собственной частотой при бесконечно большой величине волнового вектора,  $k \rightarrow \infty$ ). Если пренебречь вкладом ионов, уравнение (4.60) сводится к квадратному уравнению относительно  $\omega^2$ , при этом

$$\omega_\infty^{(1,2)}(\vartheta) = \left[ \frac{1}{2} (\Omega^2 + \omega_B^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\Omega^2 + \omega_B^2)^2 - 4\Omega^2 \omega_B^2 \cos^2 \vartheta} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.61)$$

При  $\vartheta = 0$

$$\omega_\infty^{(1)}(0) = \max(\Omega, \omega_B), \quad \omega_\infty^{(2)}(0) = \min(\Omega, \omega_B). \quad (4.62)$$

С увеличением угла  $\vartheta$  резонансная частота  $\omega_\infty^{(1)}(\vartheta)$  возрастает а  $\omega_\infty^{(2)}(\vartheta)$  убывает. Согласно (4.61) при  $\vartheta = \pi/2$   $\omega_\infty^{(2)}(\vartheta) = 0$ . В дей-

ствительности выражение (4.61) для  $\omega_\infty^{(2)}(\vartheta)$  неприменимо в области углов, близких к  $\pi/2$ , так как в этом случае (при значениях  $\omega_\infty^{(2)}(\vartheta)$ , сопоставимых с  $\omega_{B_i}$ ) следует учитывать вклад ионов. Выражение (4.61) для  $\omega_\infty^{(2)}(\vartheta)$  справедливо только при выполнении условия  $\cos^2 \vartheta \gg \frac{m_e}{m_i}$ . Дополнительная резонансная частота

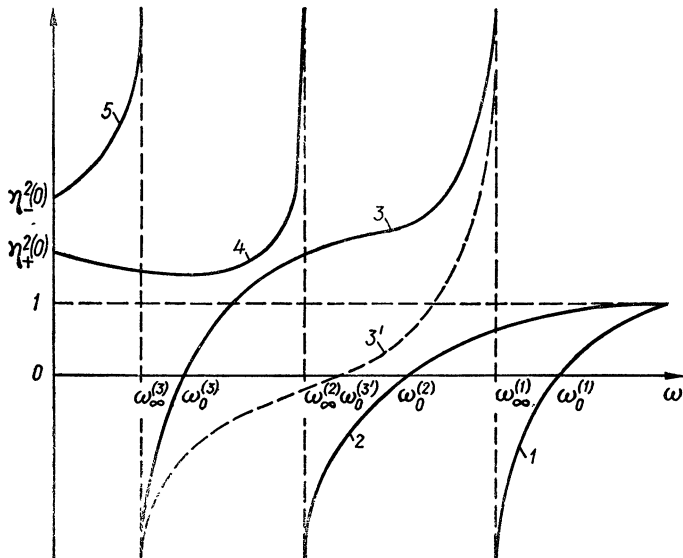


Рис. 2. Зависимость квадрата показателя преломления от частоты в магнитоактивной плазме при  $0 < \vartheta < \pi/2$ :  
 1 — быстрая необыкновенная, 2 — обыкновенная, 3, 3' — медленная необыкновенная, 4 — магнитоакустическая, 5 — альфвеновская волны.

$\omega_\infty^{(3)}(\vartheta)$ , возникающая при решении уравнения (4.60), существенно зависит от учета вклада ионов. Если  $\cos^2 \vartheta \gg \frac{m_e}{m_i}$ , то

$$\omega_\infty^{(3)}(\vartheta) \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_i} \operatorname{tg}^2 \vartheta\right) \omega_{B_i}. \quad (4.63)$$

Для установления зависимостей показателей преломления волн в холодной магнитоактивной плазме от частоты необходимо также найти положение нулей  $\eta_{\pm}^2(\omega)$ , определяющих границы областей распространения соответствующих волн. Согласно (4.54) условие  $\eta_{\pm}^2(\omega) = 0$  выполняется, если коэффициент  $C$  обращается в нуль. Пренебрегая вкладом ионов, находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^{(1)} &= \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{2} \omega_B^2 + \frac{1}{2} \omega_B}, \\ \omega_0^{(2)} &= \Omega, \\ \omega_0^{(3)} &= \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{2} \omega_B^2 - \frac{1}{2} \omega_B}. \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

Заметим, что граничные частоты  $\omega_0^{(\alpha)}$  являются предельными значениями собственных частот при  $k \rightarrow 0$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $\omega_0^{(1)} > \omega_\infty^{(1)} > \omega_0^{(2)} > \omega_\infty^{(2)}$ ;  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(3)}$ . Частота  $\omega_0^{(3)}$  может быть больше или меньше  $\omega_\infty^{(2)}$  в зависимости от угла  $\vartheta$ .

Согласно (4.53) и (4.54) при нулевой частоте ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\eta_{\pm}^2 = \epsilon_1(0), \quad \eta_{-}^2 = \frac{\epsilon_1(0)}{\cos^2 \vartheta}. \quad (4.65)$$

Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $\eta_{\pm}^2 \rightarrow 1$ .

Зная положение нулей и полюсов, а также значения функций  $\eta_{+}(\omega)$  и  $\eta_{-}(\omega)$  при  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$ , нетрудно построить схематические графики зависимости показателей преломления от частоты (рис. 2). Областям распространения ( $\eta^2(\omega) > 0$ ) соответствуют собственные частоты  $\omega_k^{\alpha}$ , определяющиеся с помощью уравнения (4.50). Если не учитывать тепловое движение частиц, то (4.50) является уравнением пятой степени относительно квадрата частоты, из которого можно определить пять собственных частот  $\omega_k^{\alpha}$  (альфвеновскую, быструю магнитозвуковую, медленную необыкновенную, обыкновенную и быструю необыкновенную, рис. 3) [114]. Частоты распространяющихся волн  $\omega_k^{\alpha}$  возрастают с увеличением волнового вектора  $k$ , т. е. для холодной магнитоактивной плазмы характерна нормальная дисперсия.

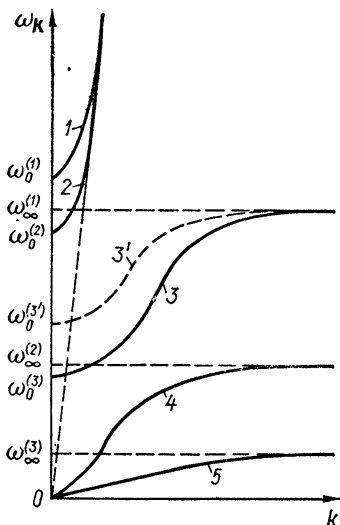


Рис. 3. Зависимость частоты собственных волн от величины волнового вектора в магнитоактивной плазме:

1 — быстрая необыкновенная, 2 — обыкновенная, 3, 3' — медленная необыкновенная, 4 — магнитозвуковая и 5 — альфвеновская волны.

и дисперсия волн полностью определяется электронами, при этом  $\eta_{+}(\omega)$  — показатель преломления обыкновенной электромагнитной ( $\omega > \Omega$ ) и высокочастотной части быстрой магнитозвуковой ( $\omega < \omega_\infty^{(2)}$ ) волн, а  $\eta_{-}(\omega)$  — показатель преломления необыкновенной ( $\omega > \omega_0^{(1)}$ ) и медленной необыкновенной ( $\omega_\infty^{(1)} > \omega > \omega_0^{(3)}$ ) электромагнитных волн. В плазме с большой плотностью ( $\Omega \gg \omega_B$ ) при достаточно низких частотах ( $\omega \ll \Omega$ ) и углах  $\vartheta$ , не близких к  $\pi/2$ , может распространяться только

Остановимся подробнее на характере дисперсии волн в магнитоактивной плазме. В высокочастотной области ( $\omega^2 \gg \omega_B \omega_{Bi}$ ) вкладом ионов в (3.42) можно пренебречь

быстрая магнитозвуковая волна с показателем преломления

$$\eta^2 = \frac{\Omega^2}{\omega(\omega_B \cos \vartheta - \omega)}, \quad \omega < \omega_B \cos \vartheta. \quad (4.66)$$

Зависимость частоты от волнового вектора описывается выражением

$$\omega_k = \omega_B \frac{k^2 c^2}{\Omega^2 + k^2 c^2} \cos \vartheta. \quad (4.67)$$

Если  $\omega \ll \omega_B$ , то это выражение упрощается:

$$\omega_k = \omega_B \frac{k^2 c^2}{\Omega^2} \cos \vartheta. \quad (4.68)$$

Быстрая магнитозвуковая волна с частотой, пропорциональной квадрату волнового вектора, — геликон или свист — характеризуется круговой поляризацией.

В низкочастотной области ( $\omega \ll \omega_{B_e}$  и  $\omega \ll \Omega$ ) распространяются альфвеновская и быстрая магнитозвуковая волны, дисперсия которых существенным образом зависит от ионов. Если  $\Omega_i \gg \omega_{B_i}$ , то

$$\omega_k = (b \mp \sqrt{b^2 - \cos^2 \vartheta})^{\frac{1}{2}} k v_A, \quad b \equiv \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{k^2 c^2}{\Omega_i^2} \right) \cos^2 \vartheta \right], \quad (4.69)$$

где  $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi m_i n_0}}$  — альфвеновская скорость ( $v_A \ll c$ ). В области очень малых частот ( $\omega \ll \omega_{B_i}$ ) выражения (4.69) упрощаются:

$$\omega_k = k v_A \cos \vartheta; \quad \omega_k = k v_A. \quad (4.70)$$

Если частота альфвеновской волны приближается к ионной циклотронной частоте (точнее, к резонансной частоте  $\omega_{\infty}^{(3)}$  (4.63)), показатель преломления волны стремится к бесконечности (в этой области частот,  $\omega \simeq \omega_{B_i}$ , альфвеновскую волну обычно называют ионно-циклотронной). Показатель преломления и частота ионно-циклотронной волны определяются соотношениями

$$\eta^2(\omega) = \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2 \cos^2 \vartheta} \frac{\omega}{\omega_{B_i} - \omega} \frac{c^2}{v_A^2}, \quad \omega_k = \left( 1 - \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2 \cos^2 \vartheta} \frac{\Omega_i^2}{k^2 c^2} \right) \omega_{B_i}. \quad (4.71)$$

Заметим, что показатель преломления быстрой магнитозвуковой волны при  $\omega \simeq \omega_{B_i}$  конечен,

$$\eta^2(\omega) = \frac{1}{1 + \cos^2 \vartheta} \frac{c^2}{v_A^2}. \quad (4.72)$$

Тепловое движение электронов и ионов существенно сказывается на характере распространяющихся волн в магнитоактивной плазме. Во-первых, из-за теплового движения частиц в магнитоак-

тивной плазме возможно распространение ряда новых типов слаботухающих волн, отсутствующих в холодной плазме. (В отсутствие магнитного поля учет теплового движения электронов в плазме с холодными ионами приводит к появлению ионно-звуковых волн.) Во-вторых, резонансное взаимодействие частиц с электрическим полем волн, распространяющихся в магнитоактивной плазме, так же как и в отсутствие магнитного поля, приводит к диссипации энергии волн (затухание Ландау). В магнитоактивной плазме существует также другой механизм диссипации — циклотронный, связанный с излучением и поглощением заряженными частицами, движущимися в магнитном поле по спиралям, электромагнитных волн на циклотронной и кратных частотах<sup>4</sup>.

Очевидно, при учете теплового движения частиц компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  зависят от  $\mathbf{k}$ , при этом порядок дисперсионного уравнения (4.50) повышается и появляются новые корни, отвечающие добавочным собственным волнам, существующим в горячей магнитоактивной плазме. Учитывая тепловые поправки в (3.37), вместо уравнения второго порядка получаем уравнение третьего порядка относительно  $\eta^2$ . Если тепловые поправки малы, то два корня полученного уравнения будут близки к (4.54), а третий соответствует условию

$$A \equiv A_0 - \frac{s^2}{c^2} A_1 \eta^2 = 0, \quad (4.73)$$

где

$$A_1 \equiv \left( \cos^4 \vartheta + \frac{1}{3} \frac{6\omega^6 - 3\omega_B^2 \omega^4 + \omega_B^4 \omega^2}{(\omega^2 - \omega_B^2)^3} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta - \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega^2 - 4\omega_B^2)} \sin^4 \vartheta \right) \frac{\Omega^2}{\omega^2},$$

и определяет показатель преломления продольной плазменной волны

$$\eta^2(\omega) = \frac{c^2}{s^2} \frac{A_0}{A_1}. \quad (4.74)$$

В сильно неизотермической магнитоактивной плазме существует два типа продольных низкочастотных колебаний: медленная магнитозвуковая и циклотронно-звуковая волны взамен одной ионно-звуковой волны, существующей в неизотермической плазме в отсутствие магнитного поля. Частоты этих волн определяются выражениями

$$\omega_k^2 = \frac{1}{2} (\omega_s^2 + \omega_{B_i}^2) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_s^2 + \omega_{B_i}^2)^2 - 4\omega_s^2 \omega_{B_i}^2 \cos^2 \vartheta}, \quad (4.75)$$

где  $\omega_s$  — частота ионно-звуковой волны в отсутствие магнитного

<sup>4</sup> Дисперсия и поглощение волн в магнитоактивной плазме с учетом кинетических эффектов рассмотрены в монографиях [5, 35, 68, 88].

поля. При  $k \rightarrow 0$

$$\omega_k = kv_s \cos \vartheta, \quad \omega_k = \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{k^2 v_s^2}{\omega_{B_i}^2} \sin^2 \vartheta \right) \omega_{B_i}. \quad (4.76)$$

В достаточно плотной плазме ( $\Omega_i \gg \Omega_{B_i}$ ) в области  $ak \ll 1$  и  $kv_s \gg \gg \omega_{B_i}$  частота циклотронно-звуковой волны совпадает с частотой ионно-звуковой волны в отсутствие магнитного поля.

Тепловое движение заряженных частиц в магнитном поле удобно характеризовать ларморовским радиусом  $\rho_\alpha = \frac{s_\alpha}{\omega_{B_\alpha}}$ . В случае конечного ларморовского радиуса частиц в магнитоактивной плазме возможно существование собственных циклотронных волн, распространяющихся в направлении  $\vartheta \simeq \frac{\pi}{2}$ . При  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$  частоты таких циклотронных волн кратны электронной или ионной циклотронной частотам:

$$\omega_k = n |\omega_{B_\alpha}|, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.77)$$

В случае квазипоперечного распространения (когда фазовая скорость волны вдоль магнитного поля значительно меньше тепловой скорости электронов, но много больше тепловой скорости ионов,  $s_e \gg \frac{\omega}{k_\parallel} \gg s_i$ ) существуют слабозатухающие ионно-циклотронные волны, а также непотенциальные ионно-циклотронные волны. В случае поперечного распространения (когда фазовая скорость волны вдоль магнитного поля значительно больше тепловой скорости электронов,  $\frac{\omega}{k_\parallel} \gg s_e$ ) существуют продольные, обыкновенные и необыкновенные электронные и ионные циклотронные волны, которые характеризуются чрезвычайно малым затуханием [44, 104, 120, 136].

## НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН

1. НЕРЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН  
И ЭХОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Нелинейное взаимодействие волн в плазме может проявляться как в условиях резонанса между волнами, так и в его отсутствие. В линейном приближении любое возмущение в плазме представляется в виде суперпозиции собственных колебаний, каждое из которых предполагается независимым. Временная эволюция возмущения при этом полностью определяется линейной диссипацией, обусловленной резонансным взаимодействием колебаний с частицами плазмы. Такое резонансное взаимодействие существенно, если скорость частицы близка к фазовой скорости волны, т. е. при выполнении условия

$$\omega_k = \mathbf{k}\mathbf{v}, \quad (5.1)$$

где  $\omega_k$  — собственная частота,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор и  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. Резонансное взаимодействие волн с частицами плазмы ответственно за затухание собственных колебаний, а также за возникновение различного рода линейных неустойчивостей в неравновесной плазме.

Будем предполагать, что в плазме линейные неустойчивости отсутствуют. В областях прозрачности резонансное взаимодействие волн с частицами плазмы, вообще говоря, мало и при определенных условиях им можно пренебречь. В этом случае необходимо учитывать нелинейное взаимодействие волн, которое оказывается весьма существенным в условиях резонанса, когда частоты и волновые векторы взаимодействующих волн связаны соотношениями

$$\omega_k = \sum_{i=1}^n \omega_{k_i}, \quad \mathbf{k} = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_i. \quad (5.2)$$

(Число слагаемых в правых частях равенств (5.2) определяет порядок нелинейного взаимодействия; полное число волн, участвующих в процессе, на единицу больше.) В результате нелинейного взаимодействия волн коэффициенты в разложении возмущения по собственным колебаниям становятся медленно изменяющимися функциями времени и по истечении достаточно большого промежутка

времени могут существенно отклоняться от значений, предсказываемых линейной теорией<sup>1</sup>.

Нелинейное взаимодействие волн может проявляться и в отсутствие резонанса. Существует ряд характерных эффектов в плазме, связанных с нелинейным взаимодействием волн в отсутствие резонанса. В качестве примера такого проявления нерезонансного взаимодействия волн можно указать на эховые явления в плазме.

Механизм возникновения эха в плазме непосредственно связан с нелинейным взаимодействием волн. В линейном приближении колебания макроскопических величин (поля, плотности заряда и др.) в плазме даже в отсутствие столкновений экспоненциально затухают со временем, в то же время отклонения функции распределения от равновесного значения могут испытывать незатухающие колебания [63]. Существование таких незатухающих колебаний обусловлено тем, что под действием только самосогласованного поля без парных столкновений в плазме не может установиться равновесие, поскольку самосогласованное поле не изменяет энтропию системы. Наличие незатухающих колебаний функции распределения и приводит к возможности возникновения эховых эффектов в плазме<sup>2</sup>.

Действительно, при возбуждении в плазме макроскопических колебаний электрического поля через промежуток времени, большой по сравнению с характерным временем затухания (определяемым затуханием Ландау), их взаимодействием практически можно пренебречь. Однако нелинейное взаимодействие незатухающих колебаний функции распределения (возникающих одновременно с возбуждением колебаний электрического поля) оказывается весьма существенным и может приводить к возникновению вторичных макроскопических колебаний электрического поля — эховых колебаний. Время возникновения и форма эховых колебаний в бесстолкновительной плазме определяются временем задержки и характером внешних возмущений, а также природой возникающих эховых колебаний. Так как эхо в плазме представляет собой существенно нелинейный эффект, то возможны эховые колебания не только второго, но и более высоких порядков. В плазме возможно также пространственное эхо: если колебания электрического поля с некоторыми частотами непрерывно возбуждаются в двух точках на расстоянии, большом по сравнению с длиной затухания, то в определенных местах возникают эховые колебания с комбинационными частотами.

---

<sup>1</sup> Теория нелинейного взаимодействия волн в плазме изложена в монографии Р. З. Сагдеева и А. А. Галева [172].

<sup>2</sup> Впервые на возможность возникновения эховых явлений в плазме указано в работах [146, 166], где рассмотрены эховые ленгмюровские колебания, возникающие в плазме при наложении двух продольных возмущений, задаваемых в виде плоских волн с антипараллельными волновыми векторами. Эховые колебания, возникающие в результате наложения трех последовательных возмущений, рассмотрены в работе [99], связанные с преобразованием волн — в работах [100, 181]. Различным эховым явлениям посвящен обзор [118].



## Эховые колебания продольного поля

Рассмотрим более подробно временные эховые эффекты в плазме. Для простоты ограничимся случаем продольных эховых колебаний, когда возмущения вызваны внешними зарядами. Выберем плотность внешних зарядов в виде

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = \rho_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} \delta(\omega_0 t) + \rho_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} \delta[\omega_0(t - \tau)], \quad (5.3)$$

т. е. будем считать, что внешние возмущения подаются в плазму в моменты времени  $t = 0$  и  $t = \tau$  ( $\tau \gg \gamma^{-1}$ , где  $\gamma$  — коэффициент затухания Ландау соответствующих колебаний) и пространственная зависимость возмущений задана в виде плоских волн ( $\omega_0$  — некоторая величина, имеющая размерность частоты,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — амплитуды внешних возмущений). Пространственно-временную компоненту Фурье плотности заряда записываем в виде

$$\rho_{\mathbf{k}\omega}^0 = \frac{(2\pi)^3}{\omega_0} \{ \rho_1 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \rho_2 e^{i\omega\tau} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \}. \quad (5.4)$$

В линейном приближении

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -4\pi i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\rho_{\mathbf{k}\omega}^0}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}. \quad (5.5)$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, нетрудно найти временную асимптотику поля (5.5). Под действием возмущения вида (5.3) в плазме возникают затухающие колебания электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с частотами, равными собственным частотам колебаний плазмы. При этом возмущение  $\rho_1$  вызывает возникновение колебаний поля в момент  $t = 0$ , а возмущение  $\rho_2$  — в момент  $t = \tau$ . Если  $\tau \gg \gamma^{-1}$ , то непосредственным воздействием колебаний поля, связанных с  $\rho_1$ , на колебания поля, обусловленные  $\rho_2$ , можно пренебречь.

С помощью нелинейного уравнения для поля в плазме (2.14) во втором приближении получаем

$$E_{\mathbf{k}\omega}^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \chi^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}') E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(1)} E_{\mathbf{k}', \omega'}^{(1)}, \quad (5.6)$$

где  $\chi^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')$  определяется выражением (2.16). Подставляем в (5.6)  $E_{\mathbf{k}'\omega'}^{(1)}$  и  $E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^{(1)}$  в виде (5.5) и используем явные выражения для  $\rho_{\mathbf{k}'\omega'}^0$  и  $\rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0$ . Так как плазменное эхо обусловлено интерференцией между первым и вторым возмущениями, то в произведении компонент плотности внешних зарядов следует сохранить только перекрестные члены, т. е.

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 \rho_{\mathbf{k}'\omega'}^0 \rightarrow & \frac{(2\pi)^6}{\omega_0^2} \rho_1 \rho_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \{ \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) e^{i\omega'\tau} + \\ & + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) e^{i(\omega-\omega')\tau} \}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Согласно (5.7) волновой вектор квадратичного сигнала определяется суммой волновых векторов последовательных возмущений,

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (5.8)$$

Используя явное выражение для нелинейной восприимчивости (2.17), осуществляем в (5.6) обратное временное преобразование Фурье. В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^{(2)}(t) = & 8(2\pi)^4 ik \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k_1^2 k_2^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \left\{ \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_1 e^{i\omega'\tau}}{(\omega' - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0) \varepsilon(\omega - \omega', \mathbf{k}_1) \varepsilon(\omega', \mathbf{k}_2)} \mathbf{k}_2 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2 e^{i(\omega - \omega')\tau}}{(\omega' - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0) \varepsilon(\omega - \omega', \mathbf{k}_2) \varepsilon(\omega', \mathbf{k}_1)} \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right\}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Интегрирование по  $\omega'$  и  $\omega$  можно выполнить с помощью теоремы Коши, замыкая контур интегрирования на соответствующей комплексной плоскости полуокружностью бесконечно большого радиуса, выбираемой в верхней или нижней полуплоскости в зависимости от знака множителя при  $\omega'$  или  $\omega$  в экспоненте. В интеграле по  $\omega'$  от первого слагаемого в фигурных скобках (5.9) полуокружность следует выбрать в верхней полуплоскости, и тогда интеграл обращается в нуль. В интеграле по  $\omega'$  от второго слагаемого полуокружность следует выбрать в нижней полуплоскости. При этом, если величина  $\tau$  и промежуток времени между возникновением эха и вторым возмущением велики по сравнению с величиной  $\gamma^{-1}$ , то в интеграле по  $\omega'$  следует учесть вклад только полюса в точке  $\omega' = \mathbf{k}_1\mathbf{v}$  (вкладами полюсов в точках, где диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, можно пренебречь в силу условия  $\gamma\tau \gg 1$ ). Выполняя аналогично интегрирование по  $\omega$  и учитывая только вклад полюса второго порядка в точке  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ , находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k^{(2)}(t) = & -8(2\pi)^6 ik \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k_1^2 k_2^2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{e^{-i\mathbf{k}_1\mathbf{v}\tau}}{\varepsilon(\mathbf{k}_1\mathbf{v}, \mathbf{k}_1)} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{e^{-i\omega(t-\tau)}}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon(\omega - \mathbf{k}_1\mathbf{v}, \mathbf{k}_2)} \right)_{\omega=\mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \simeq \\ & \simeq -8(2\pi)^6 k \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k_1^2 k_2^2} (\mathbf{k}\mathbf{k}_2) (t - \tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{v}t - \mathbf{k}_2\mathbf{v}\tau)}}{\varepsilon(\mathbf{k}_1\mathbf{v}, \mathbf{k}_1) \varepsilon(\mathbf{k}_2\mathbf{v}, \mathbf{k}_2) \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})} \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

Экспоненциальный множитель под знаком интеграла в этом выражении можно записать в виде  $\exp[-i\mathbf{k}\mathbf{v}(t - \tau')]$ , где

$$\tau' \equiv \mathbf{k}_2\mathbf{v}\tau/\mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (5.11)$$

При  $t = \tau'$  этот множитель обращается в единицу и поле (5.10) принимает максимальное значение. Если  $t$  отличается от  $\tau'$ , то вследствие быстрых осцилляций экспоненциального множителя при интегрировании по скоростям выражение (5.10) обращается в нуль.

Векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}$  связаны соотношением (5.8). Очевидно, для возникновения эха необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\tau' > \tau$ . Если волновой вектор  $\mathbf{k}_2$  параллелен вектору  $\mathbf{k}_1$ , то, согласно (5.11),  $\tau' < \tau$  и возникновение эха невозможно. Непосредственный расчет показывает, что эхо может появиться только тогда, когда вектор  $\mathbf{k}_2$  направлен противоположно вектору  $\mathbf{k}_1$  и когда  $\mathbf{k}_2$  по абсолютной величине больше  $\mathbf{k}_1$  (в этом случае  $\tau' > \tau$ ). Нетрудно показать, что при наличии эха угол между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  может отличаться от  $\pi$  только на малую величину, порядка  $(\tau k s)^{-1}$ .

Будем считать, что вектор  $\mathbf{k}_2$  антипараллелен вектору  $\mathbf{k}_1$  и  $k_2 > k_1$ . Тогда  $k = k_2 - k_1$  и

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \tau. \quad (5.12)$$

Для упрощения выкладок пусть также  $k_1 = \frac{1}{2} k_2$  и  $k = k_1$ . Выполняя в (5.10) интегрирование по составляющим скорости, перпендикулярным вектору  $\mathbf{k}$ , для поля эховых колебаний получаем выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & 32\pi^3 \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k^3} (t - \tau) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} dv \frac{e^{-ikv(t-\tau')}}{\varepsilon(kv, k) \varepsilon(-k_1 v, k_1) \varepsilon(k_2 v, k_2)} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $v$  — составляющая скорости вдоль вектора  $\mathbf{k}$ . Множители  $\varepsilon^{-1}(kv, k)$ ,  $\varepsilon^{-1}(-k_1 v, k_1)$  и  $\varepsilon^{-1}(k_2 v, k_2)$  описывают влияние диэлектрических свойств плазмы на внешние возмущения и эховое поле. Если  $ak \ll 1$  ( $a$  — дебаевский радиус), то множитель  $\varepsilon^{-1}(kv, k)$  характеризуется резким максимумом при скоростях  $v$ , близких к фазовой скорости соответствующих волн.

Оставшееся интегрирование по составляющей скорости вдоль  $\mathbf{k}$  в (5.13) выполняем, переходя в комплексную плоскость  $v$  и замыкая контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной либо в верхней, либо в нижней полуплоскости. Если  $t < \tau'$ , то, замыкая контур интегрирования полуокружностью, расположенной в верхней полуплоскости (вклад интеграла по такой полуокружности равен нулю), видим, что вклад вносит единственный полюс (находящийся внутри контура), соответствующий условию  $\varepsilon(-k_1 v, k_1) = 0$ :

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = 32\pi^4 i \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k^3} (t - \tau) \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times$$

$$\times \sum \frac{e^{(\pm i\Omega - \gamma)(\tau' - t)}}{\frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(-kv, k)} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{k}} \varepsilon(\pm \Omega - i\gamma, k) \varepsilon(2(\pm \Omega - i\gamma), 2k) \times \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{k}} \quad (5.14)$$

Если  $t > \tau'$ , то контур интегрирования следует дополнить полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости  $v$ . Тогда вклад вносят полюсы, соответствующие условиям  $\varepsilon(kv, k) = 0$  и  $\varepsilon(k_2 v, k_2) = 0$ , и

$$E^{(2)}(r, t) = -32\pi^4 i \frac{e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k^3} (t - \tau) k e^{ikr} \times \left\{ \sum \frac{e^{(\pm i\Omega - \gamma)(t - \tau')}}{\frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(kv, k)} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{k}} \varepsilon(\mp \Omega - i\gamma, k) \varepsilon(2(\pm \Omega - i\gamma), 2k) \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{k}} + \sum \frac{e^{(\pm i\Omega - \gamma_2)(t - \tau')}}{\frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(2kv, 2k)} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{2k}} \varepsilon\left(\frac{1}{2}(\pm \Omega - i\gamma_2), k\right) \varepsilon\left(\frac{1}{2}(\mp \Omega - i\gamma_2), k\right) \times \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\pm \frac{\Omega}{2k}} \right\} \quad (5.15)$$

Зависимость эхового сигнала от времени носит несимметричный характер. Нарастание эховых колебаний определяется экспонентой  $\exp[-\gamma(\tau' - t)]$ , а затухание — слагаемыми с экспонентами  $\exp[-\gamma(t - \tau')]$  и  $\exp[-\gamma_2(t - \tau')]$ , где  $\gamma$  и  $\gamma_2$  — коэффициенты затухания Ландау волн с волновыми векторами соответственно  $k$  и  $k_2 = 2k$ . Заметим, что учет парных столкновений приводит к затуханию колебаний функции распределения, а следовательно, и к ослаблению амплитуды эховых колебаний в плазме [149, 165].

Определим форму эхового сигнала в случае, когда все три колебания соответствуют ленгмюровским частотам и  $ak \ll 1$ . Так как  $\gamma \sim \exp\left(-\frac{1}{2a^2 k^2}\right)$  и  $k_2 = 2k$ , то  $\gamma_2 \gg \gamma$ . Поэтому вкладом второго слагаемого в (5.15) можно пренебречь. Используя, далее, выражение (2.26), получаем

$$E^{(2)}(r, t) = -32\pi^2 i \frac{e \rho_1 \rho_2}{m \omega_0^2 k^2} \Omega t \sin \varphi k e^{ikr - \gamma |t - \tau'|} \cos[\Omega(t - \tau') + \varphi], \quad (5.16)$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{2k}{k - k_1} \frac{\gamma}{\Omega}.$$

Аналогично можно найти форму эхового сигнала в неизотермической плазме в случае ионно-звуковых колебаний:

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = 8\pi^2 i \frac{\rho_1 \rho_2 \Omega^2 \tau}{m\omega_0^2 \gamma_s} a^6 k^6 \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - \gamma_s |t - \tau'|} \cos[kv_s(t - \tau')], \quad (5.17)$$

где  $\gamma_s$  — декремент затухания ионно-звуковых колебаний (в этом случае форма эхового сигнала при любом соотношении волновых векторов симметрична во времени).

В результате наложения ленгмюровских колебаний на ленгмюровские образуются эховые ионно-звуковые колебания, а при наложении ионно-звуковых на ленгмюровские — эховые ленгмюровские колебания. Выражения для амплитуд эховых колебаний в этих случаях соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{32\pi^2}{3} i \frac{e\rho_1\rho_2}{m\omega_0^2 k^2} \Omega \tau \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ & \times \begin{cases} \sin \varphi e^{-\gamma(\tau' - t)} \cos[\Omega(\tau' - t) + \varphi], & t < \tau', \\ -\frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\Omega} e^{-\frac{1}{2} \gamma_2(t - \tau')} \cos\left[\frac{1}{2} \Omega(t - \tau')\right] - \\ -\frac{3}{4} \frac{k^2 v_s^2}{\Omega \gamma_s} a^4 k^4 e^{-\gamma_s(t - \tau')} \cos[kv_s(t - \tau')], & t > \tau', \end{cases} \quad (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & -\frac{32\pi^2}{3} i \frac{e\rho_1\rho_2}{m\omega_0^2 k^2} \Omega \tau \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ & \times \begin{cases} -\frac{3}{4} \frac{k^2 v_s^2}{\Omega \gamma_s} a^4 k^4 e^{-\gamma_s(\tau' - t)} \cos[kv_s(\tau' - t)], & t < \tau', \\ \sin \varphi e^{-\gamma(t - \tau')} \cos[\Omega(t - \tau') + \varphi], & t > \tau'. \end{cases} \quad (5.19) \end{aligned}$$

Эховые колебания последних двух типов несимметричны во времени.

Если плазма ограничена, то картина эховых явлений усложняется, так как возникают дополнительные эховые эффекты, связанные с отражением частиц, а следовательно, и колебаний отклонения функции распределения от границ плазмы. Очевидно, эховые явления в ограниченной плазме существенно зависят от граничных условий, накладываемых на функцию распределения на поверхности, ограничивающей плазму [101, 102].

### Трехимпульсные эховые колебания

В качестве примера нелинейного взаимодействия волн третьего порядка (в нерезонансных условиях) рассмотрим эховые эффекты в плазме, возникающие в результате наложения трех последовательных возмущений, разделенных промежутками времени, большими характерных времен затухания соответствующих колебаний [99]. Возмущения выберем в виде плоских волн и предположим, что условия коллинеарности волновых векторов возмущений не выпол-

няются. Это исключает возможность возникновения эха в результате взаимодействия двух каких-либо возмущений, однако если волновые векторы всех трех возмущений лежат в одной плоскости, то могут возникнуть эховые колебания третьего порядка, имеющие не только продольную, но и поперечную составляющие. Время возникновения и форма эхового сигнала существенно зависят от времени задержки между последовательными возмущениями.

Ограничимся рассмотрением продольных внешних возмущений. Выберем плотность внешних зарядов в виде

$$\rho_0(\mathbf{r}, t) = \rho_1 e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}} \delta(\omega_0 t) + \rho_2 e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}} \delta[\omega_0(t - \tau)] + \rho_3 e^{i\mathbf{k}_3 \mathbf{r}} \delta[\omega_0(t - (1 + \lambda)\tau)], \quad (5.20)$$

т. е. будем считать, что внешние возмущения подаются в плазму в моменты времени  $t = 0$ ,  $t = \tau$  и  $t = (1 + \lambda)\tau$ , где  $\tau \gg \gamma^{-1}$  и  $\lambda \ll 1$ . Под действием возмущения (5.20) в плазме возникают затухающие колебания электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с частотами, равными частотам собственных колебаний плазмы, и незатухающие колебания функции распределения  $f_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с частотами  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ . Вследствие продольного характера возмущений в линейном приближении поперечные колебания электрического поля отсутствуют.

Если между волновыми векторами последовательных возмущений  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  попарно не соблюдаются условия антипараллельности, то эффекты эха второго порядка в результате наложения двух каких-либо возмущений не возникают. Рассмотрим возможность возникновения эха в следующем приближении при наложении трех возмущений. Используя основное нелинейное уравнение (2.66), получаем поправку к амплитуде поля в третьем приближении

$$E_i^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) = -\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \sum_{\omega', \omega'', \mathbf{k}', \mathbf{k}''} \chi_{jklm}^{(3)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega' - \omega'', \mathbf{k}' - \mathbf{k}''; \omega'', \mathbf{k}'') E_k^{(1)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') E_l^{(1)}(\omega' - \omega'', \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \times E_m^{(1)}(\omega'', \mathbf{k}''), \quad (5.21)$$

где  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор, обратный (2.67),

$$\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l^{-1}(\omega, k) - \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (\varepsilon_l(\omega, k) - \eta^2)^{-1}, \quad (5.22)$$

$\chi_{jklm}^{(3)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega' - \omega'', \mathbf{k}' - \mathbf{k}''; \omega'', \mathbf{k}'')$  определяется выражениями (2.71) и (2.72). Учитывая (5.20), записываем выражение для поля эховых колебаний третьего порядка:

$$E_i^{(3)}(\mathbf{r}, t) = 32\pi i \frac{e^4 \rho_1 \rho_2 \rho_3}{m^3 \omega_0^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{v} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'' \frac{e^{-i[\omega(t - (1 + \lambda)\tau) + \omega'\lambda\tau + \omega''\tau]}}{\varepsilon_l(\omega - \omega', k_1) \varepsilon_l(\omega' - \omega'', k_2) \varepsilon_l(\omega'', k_3)} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1}{\omega (\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v} + i0)} \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) v_j}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \right) \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \\ & \times \left( \frac{1}{\omega'' - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$  и  $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Так как эффект эха возможен только в результате наложения трех последовательных возмущений, то в (5.23) сохранены только перекрестные слагаемые. Согласно этому выражению волновой вектор результирующего сигнала определяется суммой волновых векторов последовательных возмущений.

Электрическое поле (5.23) содержит как продольную, так и поперечную составляющие:

$$\mathbf{E}^{(3)} \equiv \frac{\mathbf{k}}{k} E^l + \boldsymbol{\eta} E^t, \quad (5.24)$$

где  $\boldsymbol{\eta}$  — единичный вектор, перпендикулярный  $\mathbf{k}$ . Интегрируя по  $\omega''$ ,  $\omega'$  и  $\omega$  для продольной составляющей электрического поля получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} E^l(\mathbf{r}, t) &= \frac{e^4}{m^3 \omega_0^3 k_1^2 k_2^2 k_3^2} (4\pi)^4 (\mathbf{k}\mathbf{k}_3) (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2) [t - (1 + \lambda)\tau] \tau e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{e^{-i[\mathbf{k}\mathbf{v}t - \mathbf{k}_2\mathbf{v}\tau - (1+\lambda)\mathbf{k}_3\mathbf{v}\tau]}}{\varepsilon_l(\mathbf{k}\mathbf{v}, k) \varepsilon_l(\mathbf{k}_1\mathbf{v}, k_1) \varepsilon_l(\mathbf{k}_2\mathbf{v}, k_2) \varepsilon_l(\mathbf{k}_3\mathbf{v}, k_3)} \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Очевидно, колебания поля (5.25) характеризуются максимальной амплитудой в момент времени  $t = \tau'$ , для которого коэффициент при  $\mathbf{v}$  в экспоненте обращается в нуль, т. е.

$$\mathbf{k}_1\tau' + \mathbf{k}_2(\tau' - \tau) + \mathbf{k}_3[\tau' - (1 + \lambda)\tau] = 0. \quad (5.26)$$

Из этого условия находим

$$\tau' = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2 + (1 + \lambda)\mathbf{k}\mathbf{k}_3}{k^2} \tau. \quad (5.27)$$

Уравнение (5.26) имеет решение только в том случае, если векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  лежат в одной плоскости. Таким образом, условие возможности возникновения эховых колебаний сводится к требованию компланарности волновых векторов последовательных возмущений. Проектируя векторное равенство (5.26) на направление, перпендикулярное вектору  $\mathbf{k}$ , находим

$$k_{2\perp} + (1 + \lambda)k_{3\perp} = 0, \quad (5.28)$$

$$k_{1\perp} + k_{2\perp} + k_{3\perp} = 0. \quad (5.29)$$

Соотношения (5.28) и (5.29) являются условиями, при которых возможно возникновение эха. Этим условиям можно удовлетворить, положив

$$k_{1\perp} = \lambda k_{3\perp}, \quad k_{2\perp} = -(1 + \lambda)k_{3\perp}. \quad (5.30)$$

Так как эхо может возникнуть только после третьего возмущения, т. е.  $\tau' > (1 + \lambda)\tau$ , то необходимо, чтобы

$$k_{2\parallel} + (1 + \lambda)k_{3\parallel} > (1 + \lambda)k. \quad (5.31)$$

Считая условия (5.30) и (5.31) выполненными, в (5.25) нетрудно произвести интегрирование по скоростям. Ограничиваясь для упрощения рассмотрением случая

$$k_{1\parallel} = -k, \quad k_{2\parallel} = k_{3\parallel} = k, \quad (5.32)$$

получаем следующее выражение для продольной составляющей электрического поля эховых колебаний:

$$E^l(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \begin{cases} |A_0| e^{-\gamma(\tau'-t)} \sin(\Omega(t-\tau') + \delta_0), & t < \tau', \\ |A'| e^{-\tilde{\gamma}'(t-\tau')} \sin(\Omega(t-\tau') + \delta') + \\ + \sum_{i=1,2,3} |A_i''| e^{-\gamma(t-\tau')} \sin(\Omega(t-\tau') + \delta_i), & t > \tau'. \end{cases} \quad (5.33)$$

Здесь введены обозначения:

$$E_0 \equiv (4\pi)^4 i \frac{e^2 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \Omega^5 \tau^2}{m^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2 k_{3\perp} s^4 \omega_0^3} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) (\mathbf{k}_3 \mathbf{k}) \exp \left[ -\frac{1}{2a^2 k^2} \right],$$

$$A_0 = \frac{1}{\varepsilon_I(\Omega + i\tilde{\gamma}, k) \varepsilon_I(\Omega + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \tilde{\gamma}), k_3)},$$

$$A' = \frac{1}{(\lambda + 2) \varepsilon_I(-\Omega - i\tilde{\gamma}, k) \varepsilon_I(\Omega + i(\gamma_2 + \gamma_3 - \tilde{\gamma}'), k_1)}$$

$$A_1'' = \frac{\lambda \Omega^4}{[(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) + 2i\Gamma_1 \Omega] [(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) - 2i\Gamma_2 \Omega]},$$

$$A_2'' = \frac{(1 + \lambda) \Omega^4}{[(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) + 2i\Gamma_1 \Omega] [(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) - 2i\Gamma_3 \Omega]},$$

$$A_3'' = \frac{\Omega^4}{[(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) - 2i\Gamma_2 \Omega] [(\Omega^2 - \tilde{\omega}_0^2) - 2i\Gamma_3 \Omega]},$$

$$\tilde{\gamma} = (1 + \lambda) \gamma_1 + \lambda \gamma_2, \quad \tilde{\gamma}' = \frac{1}{\lambda + 2} (\gamma_2 + (1 + \lambda) \gamma_3),$$

$$\delta_0 = \arg A_0, \quad \delta' = \arg A', \quad \delta_i = \arg A_i'' \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{k}{k_{12}} \Omega, \quad k_{12} = -(1 + \lambda) k_{1\parallel} - \lambda k_{2\parallel},$$

$$\Gamma_1 = \gamma + \tilde{\gamma}, \quad \Gamma_2 = (1 + \lambda) \gamma + \gamma_1 - \lambda \gamma_3, \quad \Gamma_3 = (\lambda + 2) \gamma - \gamma_2 - (\lambda - 1) \gamma_3,$$

$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  — декременты затухания Ландау соответственно для волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ . Отметим резонансный характер амплитуд колебаний продольного поля.



Аналогичным образом для поперечной составляющей поля эховых колебаний получаем выражение

$$E^t(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{ikr} \begin{cases} e^{-\gamma(\tau-t)} \{ |B_0| \sin(\Omega(t-\tau) + \tilde{\delta}_0) + \\ + |B_1| \sin((2\lambda+1)\Omega(t-\tau) + \tilde{\delta}_1) \}, & t < \tau', \\ e^{-\tilde{\gamma}(t-\tau')} \{ |B'_0| \sin(\Omega(t-\tau') + \tilde{\delta}'_0) + \\ + |B'_1| \sin(\Omega(t-\tau') + \tilde{\delta}'_1) \}, & t > \tau', \end{cases} \quad (5.34)$$

где

$$B_0 = i \frac{(\gamma_1 - \gamma_2) \Omega}{kk_{3\perp} c^2 \varepsilon_l (\Omega + i(\gamma_1 + \gamma_2 + \tilde{\gamma}), k_3)},$$

$$B'_0 = \frac{\Omega(2\Omega - i\gamma_2 + i\gamma_3)}{\lambda(\lambda+2)kk_{3\perp} c^2 \varepsilon_l (\Omega, k_1)} \exp\left(-\frac{1}{2a^2 \kappa_0^2}\right),$$

$$B_1 = \frac{k(2\lambda+1)\Omega(2\Omega - i\gamma_1 - i\gamma_2)}{k_{3\perp}(4(1+\lambda)\lambda\Omega^2 - k^2 c^2) \varepsilon_l ((1-2\lambda)\Omega, k_3)} \exp\left(-\frac{1}{2a^2 \kappa^2}\right),$$

$$B'_1 = -i \frac{(\gamma_2 - \gamma_3) \Omega}{(\lambda+2)^2 kk_{3\perp} c^2 \varepsilon_l (\Omega + i(\gamma_2 + \gamma_3 - \tilde{\gamma}'), k_1)},$$

$$\tilde{\delta}_i = \arg B_i, \quad \tilde{\delta}'_i = \arg B'_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\kappa_0^{-2} = \frac{4}{(\lambda+2)^2} \left( \frac{1}{k_{3\perp}^2} - \frac{1+\lambda}{k^2} \right), \quad \kappa^{-2} = 4 \left( \frac{1}{k_{3\perp}^2} + \frac{\lambda(1+\lambda)}{k^2} \right).$$

Амплитуды продольных и поперечных эховых колебаний в общем случае являются величинами одного порядка.

Рассмотрим предельный случай  $\lambda \gg 1$ , когда интервал времени между вторым и третьим возмущениями значительно больше интервала времени между первым и вторым возмущениями. Если  $\lambda \gg 1$ , то для продольных эховых колебаний коэффициент нарастания  $\tilde{\gamma}$  значительно больше коэффициента ослабления колебаний  $\gamma$ , а отношение амплитуд  $|A_{1,2}|$  и  $|A_0|$  составляет величину порядка  $\lambda$ . Для поперечных эховых колебаний в этом случае коэффициент нарастания  $\tilde{\gamma}$  также много больше коэффициента ослабления  $\tilde{\gamma}'$ , при этом отношение амплитуд  $|B_0|$  и  $|B'_{0,1}|$  составляет величину порядка  $\lambda^2$ .

Подобно случаю двухимпульсного эха можно показать, что нарушение условия компланарности волновых векторов  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  приводит к исчезновению трехимпульсного эха. Это означает, что угол  $\theta$  между одним из волновых векторов и плоскостью, в которой лежат два других вектора, должен удовлетворять неравенству  $\theta \ll (\tau ks)^{-1}$ . (5.35)

Рассмотрим случай, когда волновые векторы  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  компланарны, но нарушается условие (5.28). Легко видеть, что при  $(k_{2\perp} \tau +$

+  $(1 + \lambda) k_{3\perp} \tau / k_{3\perp} \sim \tau$  эхо невозможно. Для возникновения эха необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left| \frac{k_{2\perp} + (1 + \lambda) k_{3\perp}}{k_{3\perp}} \gamma \tau \right| \ll 1,$$

т. е.

$$\frac{k_{2\perp} + (1 + \lambda) k_{3\perp}}{k_{3\perp}} \ll 1. \quad (5.36)$$

Положим  $k_{2\perp} = -(1 + \lambda)k_{\perp} - \delta k_{\perp}$ ,  $k_{3\perp} = k_{\perp} + \delta k_{\perp}$  и  $k_{1\perp} = \lambda k_{\perp}$ . Тогда условие (5.36) сводится к требованию  $\delta k_{\perp} / k_{\perp} \ll 1$ . С другой стороны, потребуем, чтобы

$$\delta k_{\perp} / k_{\perp} \gg (\tau k_{\perp} s)^{-1}. \quad (5.37)$$

Можно показать, что, если  $\delta k_{\perp} < 0$  и выполняется условие

$$(\gamma_1 \tau)^{-1} \ll |\delta k_{\perp} / k_{\perp}| \ll (\lambda \gamma_s \tau)^{-1}, \quad (5.38)$$

амплитуда поля эховых колебаний резко возрастает при  $t = \tau_3$  ( $\tau_3 = \tau' + \lambda \left| \frac{\delta k_{\perp}}{k_{\perp}} \right| \tau$ ) и затем убывает по экспоненциальному закону  $\exp[-\gamma(t - \tau_3)]$ . Если

$$(\gamma_1 \tau)^{-1} \gg \left| \frac{\delta k_{\perp}}{k_{\perp}} \right| \gg (\lambda \gamma_s \tau)^{-1}, \quad (5.39)$$

то поперечные эховые колебания нарастают по экспоненциальному закону до момента времени  $t = \tau_1$  ( $\tau_1 = \tau' - \left| \frac{\delta k_{\perp}}{k_{\perp}} \right| \tau$ ), а затем резко затухают. Неравенствам (5.38) и (5.39) можно удовлетворить соответствующим подбором параметра  $\lambda$ .

Приведенный пример показывает, что, выбирая параметры  $\tau$  и  $\lambda$  и соответственно подбирая волновые векторы возмущений, можно существенно влиять на форму и характер трехимпульсных эховых колебаний.

## 2. ТРЕХВОЛНОВОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

### Динамическое уравнение для взаимодействующих волн

При выполнении резонансных условий между частотами и волновыми векторами амплитуды взаимодействующих волн медленно изменяются в зависимости от времени. Уравнения, описывающие временную зависимость таких амплитуд, могут быть получены из условия устранения секулярностей в системе уравнений последовательных приближений. Рассмотрим резонансное взаимодействие трех волн

$$\left. \begin{aligned} E_k(t) &= E_k \cos(\omega_k t + \Phi_k), \\ E_{k_1}(t) &= E_{k_1} \cos(\omega_{k_1} t + \Phi_{k_1}), \\ E_{k_2}(t) &= E_{k_2} \cos(\omega_{k_2} t + \Phi_{k_2}), \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

частоты и волновые векторы которых удовлетворяют резонансным условиям

$$\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (5.41)$$

Каждая из взаимодействующих волн характеризуется энергией

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi} \omega_{\mathbf{k}} \frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} |E_{\mathbf{k}}|^2. \quad (5.42)$$

Энергии отдельных взаимодействующих волн могут быть как положительными, так и отрицательными. Очевидно, характер энергии волны определяется знаком производной  $\frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}}$ . (Напомним, что по определению частоты  $\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}_2}$  — положительные величины.) Согласно (2.55) временная зависимость амплитуды  $E_{\mathbf{k}}$ , обусловленная нелинейным резонансным взаимодействием волн, описывается уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}} e^{-i\Phi_{\mathbf{k}}} = \frac{i}{2} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}}} \sum_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}} \chi^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{\mathbf{k}_2}, \mathbf{k}_2) \times \\ \times E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2} e^{-i(\Phi_{\mathbf{k}_1} + \Phi_{\mathbf{k}_2})}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Заметим, что в правой части уравнения (5.43) учитывается взаимодействие волн с различными частотами и волновыми векторами, которые согласуются с условиями (5.41).

Введем амплитуды  $A_{\mathbf{k}}$  и знаковые множители  $s_{\mathbf{k}}$ :

$$A_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \sqrt{\left| \frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} \right|} E_{\mathbf{k}} e^{-i\Phi_{\mathbf{k}}}, \quad (5.44)$$

$$s_{\mathbf{k}} \equiv \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}} \right), \quad (5.45)$$

при этом выражение для энергии волны (5.42) можно переписать в виде

$$W_{\mathbf{k}} = s_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |A_{\mathbf{k}}|^2. \quad (5.46)$$

Очевидно, множитель  $s_{\mathbf{k}}$  определяет знак энергии волны. Волна характеризуется положительной энергией, если  $s_{\mathbf{k}} > 0$ , и отрицательной, если  $s_{\mathbf{k}} < 0$ . Нормировка амплитуды  $A_{\mathbf{k}}$  в (5.44) выбрана так, чтобы величина  $|A_{\mathbf{k}}|^2$  имела смысл числа квантов с заданной частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$ :

$$N_{\mathbf{k}} \equiv |A_{\mathbf{k}}|^2. \quad (5.47)$$

С помощью (5.47) энергия волны (5.46) представляется в виде

$$W_{\mathbf{k}} = s_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}. \quad (5.48)$$

Аналогично импульс волны определяется равенством

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}} = s_{\mathbf{k}} \mathbf{k} N_{\mathbf{k}}. \quad (5.49)$$

Используя (5.44) и (5.46), основное уравнение (5.43) можно записать в форме уравнения Шредингера в представлении взаимодействия [27]:

$$i \frac{\partial A_k}{\partial t} = s_k \sum_{k_1 + k_2 = k} V_{k; k_1, k_2} A_{k_1} A_{k_2}, \quad (5.50)$$

где  $V_{k; k_1, k_2}$  — матричный элемент взаимодействия, определяемый посредством равенства

$$V_{k; k_1, k_2} \equiv -\sqrt{4\pi} \frac{\kappa^{(2)}(\omega_{k_1}, k_1; \omega_{k_2}, k_2)}{\sqrt{|\varepsilon'_k \varepsilon'_{k_1} \varepsilon'_{k_2}|}}, \quad \varepsilon'_k \equiv \frac{\partial \varepsilon(\omega_k, k)}{\partial \omega_k}. \quad (5.51)$$

Уравнение (5.50) полностью описывает динамику резонансно взаимодействующих волн. Учитывая свойства симметрии (2.21) и (2.22), которыми характеризуется продольная нелинейная восприимчивость плазмы  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ , легко установить, что матричные элементы взаимодействия (5.51) удовлетворяют условиям

$$V_{k; k_1, k_2} = V_{k; k_2, k_1} = V_{k, -k_1, -k_2}. \quad (5.52)$$

Из условия вещественности (2.20) следует соотношение

$$V_{k; k_1, k_2}^* = -V_{-k; -k_1, -k_2}. \quad (5.53)$$

В области прозрачности плазмы вещественной частью нелинейной восприимчивости  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  можно пренебречь, поэтому

$$V_{k; k_1, k_2}^* = -V_{k; k_1, k_2}, \quad (5.54)$$

и, следовательно,

$$V_{k; k_1, k_2} = V_{-k; -k_1, -k_2}. \quad (5.55)$$

Соотношения (5.54) и (5.55) справедливы только в пренебрежении линейной диссипацией, обусловленной резонансным взаимодействием волн с частицами плазмы.

Используя свойства симметрии матричных элементов нелинейного взаимодействия волн, нетрудно показать, что полная энергия и полный импульс системы взаимодействующих волн сохраняются. Действительно, с помощью (5.46) и (5.50) получаем

$$\frac{d}{dt} \sum_k W_k = 2 \operatorname{Re}(-i) \sum_{k_1, k_2, k} \omega_k V_{k; k_1, k_2} A_k^* A_{k_1} A_{k_2}. \quad (5.56)$$

Согласно (5.52)

$$\sum_{k_1, k_2, k} \omega_k V_{k; k_1, k_2} A_k^* A_{k_1} A_{k_2} = \sum_{k_1, k_2, k} \omega_k V_{k_1; k, -k_2} A_k^* A_{k_1} A_{k_2}.$$

Выполняя замену  $k \rightarrow -k_1$  и  $k_1 \rightarrow -k$ ,  $\omega_k \rightarrow -\omega_{k_1}$  и  $\omega_{k_1} \rightarrow -\omega_k$ ,  $\Phi_k \rightarrow -\Phi_{k_1}$  и  $\Phi_{k_1} \rightarrow -\Phi_k$  (при такой замене резонансное условие (5.41) не нарушается, не изменяется также величина фазы, входящей в произведение амплитуд в правой части (5.56)) и учитывая (5.55), получаем

$$\sum_{k_1, k_2, k} \omega_k V_{k; k_1, k_2} A_k^* A_{k_1} A_{k_2} = - \sum_{k_1, k_2, k} \omega_{k_1} V_{k_1; k_1, k_2} A_k^* A_{k_1} A_{k_2}.$$

Следовательно, правую часть (5.56) можно представить в виде

$$-\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} = \frac{2}{3} \operatorname{Re}(-i) \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2}) V_{\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2},$$

откуда при условии (5.41) вытекает закон сохранения энергии взаимодействующих волн

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.57)$$

Аналогично можно получить равенство

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} = \frac{2}{3} \operatorname{Re}(-i) \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) V_{\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}}^* A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2},$$

из которого в силу условия  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$  следует закон сохранения импульса взаимодействующих волн

$$\frac{d}{dt} \sum_{\mathbf{k}} P_{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.58)$$

Заметим, что законы сохранения (5.57) и (5.58) справедливы только в том случае, если не учитывается линейная диссипация (обусловленная резонансным взаимодействием волн с частицами плазмы), и являются непосредственным следствием сохранения энергии и импульса в элементарных процессах распада кванта на два или слияния двух квантов.

Основываясь на законах сохранения энергии и импульса, можно сформулировать условия устойчивости системы взаимодействующих волн. Если все взаимодействующие волны характеризуются энергиями одного знака, то в силу сохранения полной энергии (5.57) амплитуды волн  $|A_{\mathbf{k}}|$  не могут возрасти неограниченно. Если одни волны характеризуются отрицательной энергией ( $s_{\mathbf{k}'} < 0$ ), а другие — положительной ( $s_{\mathbf{k}} > 0$ ), то система неустойчива. В этом случае волны с отрицательной энергией могут отдавать энергию волнам с положительной энергией и амплитуды волн  $|A_{\mathbf{k}'}|$  и  $|A_{\mathbf{k}}|$  могут неограниченно нарастать, несмотря на сохранение полной энергии системы:

$$\sum_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} |A_{\mathbf{k}}|^2 - \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} |A_{\mathbf{k}'}|^2 = \text{const}. \quad (5.59)$$

Рассмотрим подробнее взаимодействие трех волн с частотами  $\omega_{\mathbf{k}}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}_2}$  и фиксированными значениями волновых векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ . Основное динамическое уравнение (5.50) в этом случае упрощается:

$$i \frac{\partial A_{\mathbf{k}}}{\partial t} = s_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2}. \quad (5.60)$$

Учитывая свойства симметрии (5.52), записываем также

$$i \frac{\partial A_{\mathbf{k}_1}}{\partial t} = s_{\mathbf{k}_1} V_{\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}_2}, \quad (5.61)$$

$$i \frac{\partial A_{\mathbf{k}_2}}{\partial t} = s_{\mathbf{k}_2} V_{\mathbf{k}; \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^* A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}}. \quad (5.62)$$

Система уравнений (5.60) — (5.62) полностью описывает динамику трех взаимодействующих волн с фиксированными частотами и волновыми векторами. Заметим, что во все уравнения системы входит один и тот же матричный элемент взаимодействия  $V_{\mathbf{k};\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}$ . Модуль его в дальнейшем обозначается через  $V$ :

$$|V_{\mathbf{k};\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2}| \equiv V. \quad (5.63)$$

Используя эту систему уравнений, нетрудно показать, что выполняются законы сохранения

$$|A_{\mathbf{k}}|^2 + s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_1}|A_{\mathbf{k}_1}|^2 = P, \quad (5.64)$$

$$|A_{\mathbf{k}}|^2 + s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_2}|A_{\mathbf{k}_2}|^2 = Q, \quad (5.65)$$

где  $P$  и  $Q$  — некоторые постоянные, связанные с полной энергией системы соотношением

$$W_{\mathbf{k}} + W_{\mathbf{k}_1} + W_{\mathbf{k}_2} = s_{\mathbf{k}}(\omega_{\mathbf{k}_1}P + \omega_{\mathbf{k}_2}Q). \quad (5.66)$$

Уравнения (5.60) — (5.62) можно представить также в другой форме, которая иногда оказывается более удобной. Дифференцируя по времени левую и правую части (5.60) и используя (5.61) и (5.62), получаем

$$\frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} = -V^2 \{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_1}|A_{\mathbf{k}_2}|^2 + s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_2}|A_{\mathbf{k}_1}|^2\} A_{\mathbf{k}}. \quad (5.67)$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_1}}{\partial t^2} = -V^2 \{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_1}|A_{\mathbf{k}_2}|^2 - s_{\mathbf{k}_1}s_{\mathbf{k}_2}|A_{\mathbf{k}}|^2\} A_{\mathbf{k}_1}, \quad (5.68)$$

$$\frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_2}}{\partial t^2} = -V^2 \{s_{\mathbf{k}}s_{\mathbf{k}_2}|A_{\mathbf{k}_1}|^2 - s_{\mathbf{k}_1}s_{\mathbf{k}_2}|A_{\mathbf{k}}|^2\} A_{\mathbf{k}_2}. \quad (5.69)$$

Системы связанных уравнений (5.60) — (5.62) или (5.67) — (5.69) допускают точное решение [117]. Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением случаев

$$s_{\mathbf{k}} = s_{\mathbf{k}_1} = s_{\mathbf{k}_2}, \quad (5.70)$$

$$s_{\mathbf{k}} = -s_{\mathbf{k}_1} = -s_{\mathbf{k}_2}. \quad (5.71)$$

В первом из них в результате нелинейного взаимодействия волн в системе возникнет так называемая распадная неустойчивость, во втором — взрывная неустойчивость; в обоих случаях система оказывается нестабильной.

### Распадная и взрывная неустойчивости

В случае волн с энергией одинакового знака (положительной или отрицательной), т. е. при выполнении соотношения (5.70), резонансное условие для частот  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$  может выполняться, только если  $\omega_{\mathbf{k}} > \omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}} > \omega_{\mathbf{k}_2}$ . Уравнения (5.67) — (5.69)

при этом принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= -V^2 \{ |A_{\mathbf{k}_1}|^2 + |A_{\mathbf{k}_2}|^2 \} A_{\mathbf{k}}, \\ \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_1}}{\partial t^2} &= V^2 \{ |A_{\mathbf{k}}|^2 - |A_{\mathbf{k}_2}|^2 \} A_{\mathbf{k}_1}, \\ \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_2}}{\partial t^2} &= V^2 \{ |A_{\mathbf{k}}|^2 - |A_{\mathbf{k}_1}|^2 \} A_{\mathbf{k}_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

Рассмотрим простейший случай. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  амплитуды взаимодействующих волн удовлетворяют условию  $|A_{\mathbf{k}}|^2 \gg |A_{\mathbf{k}_{1,2}}|^2$ , т. е. волна с частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$  характеризуется большой амплитудой  $A_{\mathbf{k}}$ , а волны с частотами  $\omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}_2}$  — малыми амплитудами  $A_{\mathbf{k}_1}$  и  $A_{\mathbf{k}_2}$ . Согласно (5.72) амплитуда  $A_{\mathbf{k}}$  на начальном этапе временной эволюции изменяется незначительно, в то время как амплитуды  $A_{\mathbf{k}_1}$  и  $A_{\mathbf{k}_2}$  возрастают в зависимости от времени по экспоненциальному закону. Инкремент нарастания волн с частотами  $\omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}_2}$  определяется интенсивностью волны с частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$ :

$$|\gamma| \simeq V \sqrt{|A_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (5.73)$$

Величина, обратная (5.73), называется временем распада. Таким образом, волна с частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$  в результате нелинейного взаимодействия распадается на две волны с частотами  $\omega_{\mathbf{k}_1}$  и  $\omega_{\mathbf{k}_2}$ . Впервые распадная неустойчивость была рассмотрена В. Н. Ораевским и Р. З. Сагдеевым на примере распада ленгмюровской волны в неизотермической плазме на ленгмюровскую (распространяющуюся в обратном направлении) и ионно-звуковую волны [71]. (Примеры различных распадных неустойчивостей в плазме рассмотрены в работе [29], где даны также ссылки на оригинальные работы.)

Система связанных уравнений (5.72) допускает точное решение в явном виде. Анализ такого решения показывает, что процесс распада в системе трех взаимодействующих волн обратим [29] (обратимость непосредственно связана с устойчивостью системы в указанном выше смысле при выполнении условия (5.70)).

Если энергии волн имеют разные знаки, т. е. выполняется соотношение (5.71), система уравнений (5.67) — (5.69) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= V^2 \{ |A_{\mathbf{k}_1}|^2 + |A_{\mathbf{k}_2}|^2 \} A_{\mathbf{k}}, \\ \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_1}}{\partial t^2} &= V^2 \{ |A_{\mathbf{k}}|^2 + |A_{\mathbf{k}_2}|^2 \} A_{\mathbf{k}_1}, \\ \frac{\partial^2 A_{\mathbf{k}_2}}{\partial t^2} &= V^2 \{ |A_{\mathbf{k}}|^2 + |A_{\mathbf{k}_1}|^2 \} A_{\mathbf{k}_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

Отсюда следует, что независимо от выбора начальных условий амплитуды взаимодействующих волн могут неограниченно возрастать.

тать<sup>3</sup>. Представим амплитуды волн в виде

$$A_k = |A_k| e^{i\psi_k}, \quad A_{k_1} = |A_{k_1}| e^{i\psi_{k_1}}, \quad A_{k_2} = |A_{k_2}| e^{i\psi_{k_2}}, \quad (5.75)$$

где  $\psi_k$ ,  $\psi_{k_1}$  и  $\psi_{k_2}$  — вещественные фазы. Используя (5.74), нетрудно показать, что суммарная фаза

$$\theta = \psi_k + \psi_{k_1} + \psi_{k_2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial t} \ln \{|A_k| |A_{k_1}| |A_{k_2}|\}. \quad (5.76)$$

Это уравнение допускает интеграл

$$|A_k| |A_{k_1}| |A_{k_2}| \cos \theta = G, \quad (5.77)$$

где  $G$  — некоторая постоянная. Подставляя (5.75) в первое из уравнений (5.74) и оставляя в нем мнимую часть, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} |A_k| = s_k V |A_{k_1}| |A_{k_2}| \sin \theta. \quad (5.78)$$

Величины  $|A_{k_1}|$ ,  $|A_{k_2}|$  и  $\theta$  выражаем через интегралы движения  $P$ ,  $Q$  и  $G$  и величину  $|A_k|^2$ . Полученное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} |A_k|^2 = 2s_k V \sqrt{|A_k|^2 (|A_k|^2 - P) (|A_k|^2 - Q) - G^2} \quad (5.79)$$

может быть проинтегрировано в общем виде:

$$t = \frac{1}{2V} \int_{|A_k|_0^2}^{|A_k|^2} \frac{d\beta}{\sqrt{(\beta - \beta_1)(\beta - \beta_2)(\beta - \beta_3)}}, \quad (5.80)$$

где  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  — корни кубического уравнения

$$\beta(\beta - P)(\beta - Q) - G^2 = 0; \quad (5.81)$$

$|A_k|_0^2$  — квадрат модуля амплитуды в начальный момент времени  $t = 0$ . Решение (5.80) может быть выражено через эллиптические интегралы [129].

Для определенности рассмотрим случай  $s_k = -s_{k_1} = -s_{k_2} = 1$  и выберем начальные условия так, чтобы корни уравнения (5.81) были вещественными и удовлетворяли условию  $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ . Предполагая, что  $N_k(0) \equiv |A_k|_0^2 \geq \beta_3 > Q > P$ , и вводя новые переменные

$$y(t) = \sqrt{\frac{\beta_3 - \beta_1}{N_k(t) - \beta_1}}, \quad \varkappa = \sqrt{\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_3 - \beta_1}} \quad (N_k(t) \equiv |A_k|^2), \quad (5.82)$$

<sup>3</sup> Взрывная неустойчивость в системе взаимодействующих волн с положительной и отрицательной энергиями впервые была рассмотрена на основе кинетического уравнения для волн В. М. Дикасовым, Л. И. Рудаковым и Д. Д. Рютовым [43], взрывная неустойчивость волн с фиксированными фазами — в работах [129, 196].



интеграл (5.80) сводим к стандартному эллиптическому интегралу

$$t = - \frac{1}{V \sqrt{\beta_3 - \beta_1}} \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)}}. \quad (5.83)$$

Полагая

$$y(0) \equiv - \operatorname{sn}(V \sqrt{\beta_3 - \beta_1} t_\infty, \kappa), \quad (5.84)$$

решение (5.83) представляем в виде

$$N_k(t) = \beta_1 + \frac{\beta_3 - \beta_1}{\operatorname{sn}^2(V \sqrt{\beta_3 - \beta_1} (t_\infty - t), \kappa)}. \quad (5.85)$$

Так как  $\operatorname{sn}(V \sqrt{\beta_3 - \beta_1} (t_\infty - t), \kappa)$  обращается в нуль при  $t \rightarrow t_\infty$ , то  $N_k(t)$  обращается в бесконечность как  $(t_\infty - t)^{-2}$  в момент времени  $t = t_\infty$ . Следовательно, неустойчивость системы носит взрывной характер: амплитуды взаимодействующих волн обращаются в бесконечность при некотором конечном так называемом взрывном времени  $t_\infty$ . Время  $t_\infty$  определяется из условия (5.84) и зависит от начальной интенсивности волны  $N_k(0)$ :

$$t_\infty = - \frac{1}{V \sqrt{\beta_3 - \beta_1}} \operatorname{sn}^{-1} \left( \frac{\beta_3 - \beta_1}{N_k(0) - \beta_1}, \kappa \right). \quad (5.86)$$

В частности, если  $P = Q = G = 0$ , то

$$N_k(t) = \frac{N_k(0)}{\left(1 - \frac{t}{t_\infty}\right)^2}, \quad (5.87)$$

где

$$t_\infty \equiv \frac{1}{V \sqrt{N_k(0)}}. \quad (5.88)$$

Заметим, что при  $t$ , близком к взрывному времени  $t_\infty$ , когда амплитуды взаимодействующих волн становятся достаточно большими, полученными формулами пользоваться нельзя.

Учет нелинейного взаимодействия волн более высокого порядка, а также воздействия самосогласованного поля на распределение частиц приводит к насыщению взрывной неустойчивости. Механизмы насыщения взрывной неустойчивости рассмотрены в работах [148, 167, 183].

### 3. ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

В отсутствие трехволновых резонансов существенную роль в плазме могут играть четырехволновые резонансы или резонансы с большим числом волн. Рассмотрим четырехволновое резонансное взаимодействие, которое проявляется при выполнении резонансных условий между частотами и волновыми векторами четырех взаимо-

действующих волн. Обозначим через  $\omega_{k_1}$ ,  $\omega_{k_2}$  и  $\omega_{k_3}$  частоты, через  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$  — соответственно волновые векторы трех волн, нелинейное взаимодействие которых приводит к резонансу с четвертой волной, характеризуемой частотой  $\omega_{\mathbf{k}}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Выберем временную и пространственную зависимость волновых функций в виде

$$E_{\mathbf{k}}(t) = E_{\mathbf{k}} \cos(\omega_{\mathbf{k}}t + \Phi_{\mathbf{k}}). \quad (5.89)$$

Резонанс проявляется, если частоты и волновые векторы удовлетворяют условиям

$$\omega_{\mathbf{k}} = |\omega_{k_1} \pm \omega_{k_2} \pm \omega_{k_3}|, \quad (5.90)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (5.91)$$

(частоты  $\omega_{k_1}$ ,  $\omega_{k_2}$ ,  $\omega_{k_3}$  и  $\omega_{\mathbf{k}}$  предполагаются положительными). В результате резонансного взаимодействия амплитуды волн  $E_{\mathbf{k}}$  и т. д. оказываются зависящими от времени  $t''$  (в дальнейшем время  $t''$  обозначается через  $t$ ). Эта зависимость определяется уравнениями, которые непосредственно следуют из условий устранения секулярностей в системе уравнений третьего приближения. Согласно (2.61) временная зависимость амплитуды  $E_{\mathbf{k}}$ , обусловленная нелинейным резонансным взаимодействием волн, определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial t} = & -\frac{i}{4\varepsilon_{\mathbf{k}}} \sum'_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=\mathbf{k}} A(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \times \\ & \times e^{i(\Phi_{\mathbf{k}} - \Phi_{\mathbf{k}_1} - \Phi_{\mathbf{k}_2} - \Phi_{\mathbf{k}_3})} E_{\mathbf{k}_1} E_{\mathbf{k}_2} E_{\mathbf{k}_3}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathbf{k}}' & \equiv \frac{\partial \varepsilon(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\partial \omega_{\mathbf{k}}}, \\ A(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) & \equiv \\ & \equiv \frac{1}{3} \left\{ \left( 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \chi^{(2)}(\omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3)}{\varepsilon(\omega_{k_2} + \omega_{k_3}, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_{k_1}, \mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \right) + (1 \rightleftharpoons 2) + (1 \rightleftharpoons 3) \right\}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Уравнение (5.92) справедливо только при выполнении резонансного условия (5.90). Штрих у знака суммы означает, что необходимо учесть все возможные реализации резонансного условия (5.90). Аналогичные уравнения можно написать для других амплитуд,  $E_{\mathbf{k}_1}$  и т. д. Эти уравнения можно получить из (5.92) простым переобозначением частот и волновых векторов. Получаемая таким образом система уравнений полностью описывает динамику взаимодействующих волн в плазме.

Если предположить, что в плазме существуют волны только определенного типа (например, в изотермической плазме возможны только слабозатухающие ленгмюровские колебания с частотами  $\omega_{\mathbf{k}} =$

$= \sqrt{\Omega^2 + k^2 s^2}$ ), то резонанс оказывается возможным лишь тогда, когда в правую часть (5.90) одна из частот входит со знаком «минус», например, если выполнено условие

$$\omega_k = -\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}. \quad (5.94)$$

В случае симметрии уравнения (5.92) относительно  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  резонансы  $\omega_k = \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$  и  $\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3}$  простым переобозначением могут быть сведены к (5.94).

Одним из важнейших проявлений четырехволнового резонансного взаимодействия является возникновение сдвигов собственных частот взаимодействующих волн. В частности, в результате резонансного взаимодействия ленгмюровских волн возникает нелинейный сдвиг их собственных частот. Нелинейный сдвиг собственных частот ленгмюровских волн исследован в работах [40, 95, 158, 184, 185, 195].

В качестве примера рассмотрим резонансное взаимодействие четырех ленгмюровских волн с фиксированными значениями волновых векторов  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  и  $k$ . При взаимодействии бегущих ленгмюровских волн амплитуды, входящие в волновые функции (5.89), необходимо выбирать в виде

$$E_{k'} = (2\pi)^3 \delta(k' - k) E e^{i\Phi_k}, \quad (5.95)$$

где  $E$  — произвольная комплексная амплитуда ( $E \equiv E_0 e^{-i\Phi_0}$ ,  $E_0$  — абсолютное значение амплитуды,  $\Phi_0$  — вещественная фаза). Действительно, учитывая соотношение вещественности  $E_k = E_{-k}$ , пространственно-временную компоненту Фурье поля при таком выборе амплитуды можно записать в виде

$$E_{k'\omega} = \frac{1}{2} (2\pi)^4 \{E \delta(k' - k) \delta(\omega - \omega_k) + E^* \delta(k' + k) \delta(\omega + \omega_k)\}, \quad (5.96)$$

и, следовательно, волновая функция (5.89) описывает бегущую монохроматическую плоскую волну:

$$E(r, t) = E_0 \cos(\omega_k t - kr + \Phi_0). \quad (5.97)$$

Согласно (5.96) значению волнового вектора  $k' = k$  в бегущей волне соответствует частота  $\omega = \omega_k$ , а значению волнового вектора  $k' = -k$  — частота  $\omega = -\omega_k$ .

Предположим, что волновые векторы рассматриваемых четырех бегущих ленгмюровских волн удовлетворяют условию

$$k = -k_1 + k_2 + k_3. \quad (5.98)$$

Тогда резонансное взаимодействие этих волн возможно только при

$$\omega_k = -\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}. \quad (5.99)$$

Если пренебречь дисперсией, т. е. зависимостями частот рассматриваемых волн от волновых векторов, то все частоты в (5.99) сводятся к ленгмюровской частоте  $\Omega$ , при этом условие резонанса строго выполняется. Так как ленгмюровские волны слабо затухают только в длинноволновом пределе, когда добавки к частотам, связанные

с учетом теплового движения частиц, малы, то условие резонанса может выполняться и при учете тепловых поправок в собственных частотах взаимодействующих волн.

При выполнении резонансных условий (5.98) и (5.99) уравнение, описывающее временную зависимость амплитуды  $E$ , имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{i}{4\epsilon_k} A(-\omega_{k_1}, -\mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) E_1^* E_2 E_3. \quad (5.100)$$

Для простоты ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}', \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}. \quad (5.101)$$

Тогда

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{i}{4\epsilon_k} A(-\omega_{k'}, -\mathbf{k}'; \omega_{k'}, \mathbf{k}'; \omega_{k'}, \mathbf{k}) |E'|^2 E. \quad (5.102)$$

Решение уравнения (5.102) выбираем в виде

$$E(t) = E e^{i\Delta\omega_k t}, \quad (5.103)$$

и для сдвига частоты  $\Delta\omega_k$  получаем общую формулу

$$\Delta\omega_k = \frac{1}{4\epsilon_k} A(-\omega_{k'}, -\mathbf{k}'; \omega_{k'}, \mathbf{k}'; \omega_{k'}, \mathbf{k}) |E'|^2, \quad (5.104)$$

где в соответствии с (5.93)

$$\begin{aligned} & A(-\omega', -\mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{3} \left\{ 2 \frac{\chi^{(2)}(-\omega', -\mathbf{k}'; \omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}') \chi^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k})}{\epsilon(\omega + \omega', \mathbf{k} + \mathbf{k}')} - \right. \\ & \quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(-\omega', -\mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \chi^{(2)}(-\omega', -\mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k})}{\epsilon(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')} - \right. \\ & \quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega', \mathbf{k}'; -\omega', -\mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; 0, 0) \chi^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; -\omega', -\mathbf{k}')}{\epsilon(0, 0)} - \right. \\ & \quad \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}'; -\omega', -\mathbf{k}') \right\}. \quad (5.105) \end{aligned}$$

Решение (5.103) справедливо, если сдвиг частоты (5.104) веществен или содержит малую мнимую часть. Согласно (5.104) величина нелинейного сдвига частоты собственных колебаний пропорциональна квадрату модуля амплитуды взаимодействующих волн.

Определим величину нелинейного сдвига (5.104) частоты ленгмюровских колебаний в пренебрежении тепловым движением частиц в плазме. Используя выражения для диэлектрической проницаемости и нелинейных восприимчивостей холодной плазмы (2.26), (2.30) и (2.37), устанавливаем следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \chi^{(2)}(\omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)}{\varepsilon(\omega_2 + \omega_3, \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)} - \\
& \quad - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = \\
& = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega [(\omega_2 + \omega_3)^2 - \Omega^2]} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 k} \times \\
& \times \left\{ \left( (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2 k_2 k_3 + \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_2} k^2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathbf{k} + \frac{\omega_2 + \omega_3}{\omega_3} k_2 (\mathbf{k}_2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{k}_3) k_3^2 \right) \mathbf{k} \mathbf{k}_1 + \frac{\Omega^2}{(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2} \left( \frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \frac{k_1^2}{\omega_1} \mathbf{k} (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right) \times \right. \\
& \quad \times \left( \frac{k_2^2}{\omega_2} (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \mathbf{k}_3 + \frac{k_3^2}{\omega_3} k_2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right) + \\
& \quad \left. + (\omega_2 + \omega_3) \left( \frac{k^2}{\omega} \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \frac{k_1^2}{\omega_1} \mathbf{k} (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right) k_2 k_3 \right\}. \quad (5.106)
\end{aligned}$$

С помощью этого соотношения для нелинейного сдвига частоты ленгмюровской волны, резонансно взаимодействующей с тремя другими ленгмюровскими волнами в холодной плазме, при выполнении условия (5.101) находим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{\mathbf{k}} = & \frac{1}{48} \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{\Omega^3} \left\{ \frac{(k^2 - k'^2)^2 \cos^2 \vartheta}{k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \vartheta} - \right. \\
& - \frac{1}{3} \frac{((k^2 + k'^2) \cos \vartheta + 2kk')^2}{k^2 + k'^2 + 2kk' \cos \vartheta} - \frac{2}{3} (k^2 - k'^2) \cos^2 \vartheta - \\
& \left. - \frac{4}{3} kk' \cos \vartheta \cos 2\vartheta \right\} |E'|^2, \quad (5.107)
\end{aligned}$$

где  $\vartheta$  — угол между направлениями векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ . Таким образом, величина нелинейного сдвига частоты ленгмюровской волны, резонансно взаимодействующей с тремя другими ленгмюровскими волнами, зависит от взаимной ориентации волновых векторов взаимодействующих волн. В одномерном случае, когда  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{k}'$  и  $\vartheta = 0$ , нелинейный сдвиг (5.107) обращается в нуль. Этот вывод соответствует результатам работ А. И. Ахиезера, Г. Я. Любарского и Р. В. Половина [7, 8, 72], в которых показано, что в холодной бесстолкновительной плазме частота одномерных нелинейных ленгмюровских волн не зависит от их амплитуд <sup>4</sup>.

Вычислим теперь величину нелинейного сдвига, определяемого общей формулой (5.104), с учетом тепловых поправок. Рассмотрим наиболее интересный случай одномерного распространения волн, когда в пренебрежении тепловым движением сдвиг вообще отсутствует, т. е. будем считать, что  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{k}'$ . Воспользуемся для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  и нелинейных восприимчивостей  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1$ ;

<sup>4</sup> См. также работы [121, 130, 152]. В работе [130] показано, что в холодной плазме осцилляции усредненного электрического поля возможны только с ленгмюровскими частотами.

$\omega_2, \mathbf{k}_2$ ) и  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  приближенными выражениями, в которых учтем поправочные члены, пропорциональные квадратам отношения тепловой скорости частиц к фазовым скоростям волн. В соответствии с (2.23), (2.24) и (2.41) эти выражения для одномерного случая можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 s^2}{\omega^2} \right), \quad (5.108)$$

$$\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = -\frac{i}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega}{\omega_1 \omega_2 \omega} \left\{ \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k}{\omega} + \left[ \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k}{\omega} \right) \left( \frac{k_1^2}{\omega_1^2} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) + \frac{k_1 k_2 k}{\omega_1 \omega_2 \omega} \right] s^2 \right\}, \quad (5.109)$$

$$\begin{aligned} \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = & \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \frac{k_{23}}{\omega_{23}} \left\{ \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \right. \\ & + \frac{k_3}{\omega_3} + \frac{k_{23}}{\omega_{23}} + \frac{k}{\omega} + \left[ \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k_3}{\omega_3} + \frac{k_{23}}{\omega_{23}} + \frac{k}{\omega} \right) \left( \frac{k_1^2}{\omega_1^2} + \right. \right. \\ & + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} + \frac{k_3^2}{\omega_3^2} + \frac{k_{23}^2}{\omega_{23}^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \left. \right) + \frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + \frac{k_1 k_2 k_{23}}{\omega_1 \omega_2 \omega_{23}} + \frac{k_1 k_2 k}{\omega_1 \omega_1 \omega} + \\ & + \frac{k_1 k_3 k_{23}}{\omega_1 \omega_3 \omega_{23}} + \frac{k_1 k_3 k}{\omega_1 \omega_3 \omega} + \frac{k_1 k_{23} k}{\omega_1 \omega_{23} \omega} + \frac{k_2 k_3 k_{23}}{\omega_2 \omega_3 \omega_{23}} + \frac{k_2 k_3 k}{\omega_2 \omega_3 \omega} + \frac{k_2 k_{23} k}{\omega_2 \omega_{23} \omega} + \\ & \left. \left. + \frac{k_3 k_{23} k}{\omega_3 \omega_{23} \omega} \right] s^2 \right\}, \quad (5.110) \end{aligned}$$

где  $\omega_{23} = \omega_2 + \omega_3$  и  $k_{23} = k_2 + k_3$ . Напомним, что несимметризованная восприимчивость  $\bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, k_1; \omega_2, k_2; \omega_3, k_3)$  определяется с точностью до аддитивного слагаемого, антисимметричного относительно перестановок  $\omega_1, k_1 \rightleftharpoons \omega_2, k_2$  и  $\omega_1, k_1 \rightleftharpoons \omega_3, k_3$ . Так как величина (5.105) симметрична относительно этих перестановок, то нелинейный сдвиг частоты  $\Delta\omega_k$  не зависит от указанной неоднозначности. Используя формулы (5.108), (5.109) и (5.110), нетрудно вычислить величину  $A(-\omega_{k'}, -k'; \omega_k k', \omega_k, k)$ , определяющую сдвиг частоты. В частности,

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_1, k_1; \omega_2 + \omega_3, k_2 + k_3) \chi^{(2)}(\omega_2, k_2; \omega_3, k_3)}{\varepsilon(\omega_2 + \omega_3, k_2 + k_3)} - \\ & - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_1, k_1; \omega_2, k_2; \omega_3, k_3) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega (\omega_{23}^2 - \Omega^2)} \times \\ & \times \left\{ \Omega^2 \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k}{\omega} \right) \left( \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k_3}{\omega_3} \right) + \omega_{23} \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k_3}{\omega_3} + \frac{k}{\omega} \right) k_{23} + \right. \\ & + k_{23}^2 + \left[ \left( \Omega^2 \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k}{\omega} \right) \left( \frac{k_2}{\omega_2} + \frac{k_3}{\omega_3} \right) + \omega_{23} \left( \frac{k_1}{\omega_1} + \frac{k_2}{\omega_2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_3}{\omega_3} + \frac{k}{\omega} \right) k_{23} + k_{23}^2 \right) \left( \frac{k_1^2}{\omega_1^2} + \frac{k_2^2}{\omega_2^2} + \frac{k_3^2}{\omega_3^2} + \frac{k_{23}^2}{\omega_{23}^2} + \frac{k^2}{\omega^2} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + \frac{k_1 k_2 k_{23}}{\omega_1 \omega_2 \omega_{23}} + \frac{k_1 k_2 k}{\omega_1 \omega_1 \omega} + \frac{k_1 k_3 k_{23}}{\omega_1 \omega_3 \omega_{23}} + \frac{k_1 k_3 k}{\omega_1 \omega_3 \omega} + \frac{k_1 k_{23} k}{\omega_1 \omega_{23} \omega} + \frac{k_2 k_3 k_{23}}{\omega_2 \omega_3 \omega_{23}} + \frac{k_2 k_3 k}{\omega_2 \omega_3 \omega} + \frac{k_2 k_{23} k}{\omega_2 \omega_{23} \omega} + \frac{k_3 k_{23} k}{\omega_3 \omega_{23} \omega} \right] s^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \omega_{23} \left( \frac{k_1 k_2 k_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} + \frac{k_1 k_2 k}{\omega_1 \omega_2 \omega} + \frac{k_1 k_3 k}{\omega_1 \omega_3 \omega} + \frac{k_2 k_3 k}{\omega_2 \omega_3 \omega} \right) k_{23} + \\
& + \left( \frac{k_1 k_2}{\omega_1 \omega_2} + \frac{k_1 k_3}{\omega_1 \omega_3} + \frac{k_1 k}{\omega_1 \omega} + \frac{k_2 k_3}{\omega_2 \omega_3} + \frac{k_2 k}{\omega_2 \omega} + \frac{k_3 k}{\omega_3 \omega} \right) k_{23}^2 \Big] s^2 \Big\}. \quad (5.111)
\end{aligned}$$

С помощью этого соотношения находим  $A(-\omega_k', -k'; \omega_k', k';$

$$\omega_k, k) = \frac{10}{3} \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2 k'^2 s^2}{\Omega^6}, \text{ и, следовательно, для нелинейного}$$

сдвига частоты окончательно получаем выражение

$$\Delta \omega_k = \frac{5}{12} \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2 k'^2 s^2}{\Omega^5} |E'|^2. \quad (5.112)$$

Таким образом, при учете теплового движения частиц в плазме резонансное четырехволновое взаимодействие и в одномерном случае приводит к возникновению сдвигов собственных частот взаимодействующих волн<sup>5</sup>.

Перейдем теперь к рассмотрению резонансного взаимодействия ленгмюровских волн с разными значениями волновых векторов, приводящего к возникновению нелинейных сдвигов собственных частот. Рассмотрим взаимодействие четырех ленгмюровских волн с волновыми векторами, удовлетворяющими условию

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (5.113)$$

Предположим, что выполняется условие резонанса

$$\omega_k = -\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}. \quad (5.114)$$

Так как при условии (5.113) уравнение (5.92) симметрично относительно взаимной замены  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  и  $\mathbf{k}_3$ , то резонансы  $\omega_k = \omega_{k_1} - \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$  и  $\omega_k = \omega_{k_1} + \omega_{k_3} - \omega_{k_2}$  с помощью простого переобозначения сводятся к (5.114). Учитывая это и переобозначая  $\mathbf{k}_1 \rightarrow -\mathbf{k}_1$  с учетом, что  $\mathbf{E}_{-\mathbf{k}_1} = \mathbf{E}_{k_1}^*$ , уравнение (5.92) переписываем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial t} = & - \frac{3i}{4\epsilon_k'} \sum_{-\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}} A(-\omega_{k_1}, -\mathbf{k}_1; \omega_{k_2}, \mathbf{k}_2; \omega_{k_3}, \mathbf{k}_3) \times \\
& \times e^{i(\Phi_k + \Phi_{k_1} - \Phi_{k_2} - \Phi_{k_3})} E_{k_1}^* E_{k_2} E_{k_3}. \quad (5.115)
\end{aligned}$$

(В правой части дополнительный множитель 3 соответствует возможным перестановкам в условии резонанса (5.114), поэтому штрих у знака суммы опущен.)

В случае холодной плазмы условие резонанса между частотами

<sup>5</sup> Нелинейная поправка к собственной ленгмюровской частоте, учитывающая тепловое движение электронов, найдена в работе [195]. Заметим, что использование выражений (5.108) — (5.110) при вычислении сдвига (5.112) оправдано, если тепловая скорость частиц мала по сравнению с фазовыми скоростями не только волн, но и биений. Так как последнее условие не выполняется, то необходимо использовать более точные кинетические выражения для восприимчивостей. В результате в правой части формулы (5.112) появляется добавочный множитель  $\frac{2}{5}$  [95].

(5.114) выполняется. Это условие может выполняться также в длинноволновом пределе, когда добавки к частотам, связанные с учетом теплового движения частиц, малы. Введем в (5.115) вместо  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  величины  $\mathbf{k}' = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$  и  $\Delta = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$ . Очевидно, при достаточно малых значениях  $\Delta$  условие резонанса (5.114) также выполняется. Положим в правой части (5.115) под знаком суммы  $\Delta = 0$ , тогда уравнение (5.115) примет вид

$$\frac{\partial E_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -i \frac{3}{4\epsilon_{\mathbf{k}}} \sum_{\mathbf{k}', \Delta} A(-\omega_{\mathbf{k}'}, -\mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) |E_{\mathbf{k}'}|^2 E_{\mathbf{k}}. \quad (5.116)$$

Выбирая решение этого уравнения в виде экспоненты, получаем

$$\Delta \omega_{\mathbf{k}} = \frac{3}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} V \sum_{\mathbf{k}', \Delta} A(-\omega_{\mathbf{k}'}, -\mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) I_{\mathbf{k}'}, \quad (5.117)$$

где  $I_{\mathbf{k}'}$  — интенсивность колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}'$ , определяемая соотношением (4.35). Величина (5.117), вообще говоря, может быть комплексной; в этом случае под величиной сдвига собственной частоты следует понимать вещественную часть (5.117), мнимая часть будет определять нелинейное затухание. Очевидно, метод последовательных разложений применим, если величины нелинейного сдвига или нелинейного затухания малы по сравнению с собственной частотой.

Из резонансного условия (5.114) и закона дисперсии для ленгмюровских волн следует, что при малых значениях  $\Delta$  вектор  $\mathbf{k}'$  может отличаться от  $\mathbf{k}$  только на величину порядка  $\Delta$ . Поэтому под знаком суммы в (5.117)  $\mathbf{k}'$  можно заменить вектором  $\mathbf{k}$ , при этом  $V \sum_{\mathbf{k}'} \rightarrow 1$ , а суммирование по  $\Delta$  ограничить,  $\Delta_{\max} \simeq k$ . В результате для сдвига ленгмюровской частоты, обусловленного резонансным взаимодействием волн, получаем приближенное выражение

$$\Delta \omega_{\mathbf{k}} \simeq \beta_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}} \quad \beta_{\mathbf{k}} \equiv \frac{k^3}{4\pi^2 \epsilon_{\mathbf{k}}} A(-\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}). \quad (5.118)$$

Таким образом, нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн приводит к возникновению сдвига собственных частот, величина которого пропорциональна интенсивности волн (коэффициент пропорциональности определяется нелинейными восприимчивостями).

Далее, применяя (5.93), находим

$$\beta_{\mathbf{k}} = \frac{k^3}{12\pi^2 \epsilon_{\mathbf{k}}} \left\{ 2 \frac{\chi^{(2)}(-\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}; 2\omega_{\mathbf{k}}, 2\mathbf{k}) \chi^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})}{\epsilon(2\omega_{\mathbf{k}}, 2\mathbf{k})} - \bar{\chi}^{(3)}(-\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) + \right. \\ \left. + 2 \left( 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; 0, 0) \chi^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k})}{\epsilon(0, 0)} - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) \right) \right\}. \quad (5.119)$$



С помощью (5.106) нетрудно установить, что в холодной плазме величина нелинейного сдвига (5.119) обращается в нуль. (Заметим, что условия  $\mathbf{k}' \simeq \mathbf{k}$  и  $\Delta = 0$  практически означают одномерность взаимодействующих волн.) Следовательно, в холодной плазме нелинейное взаимодействие ленгмюровских волн не приводит к возникновению сдвигов собственных частот.

Используя выражение (5.111), находим величину нелинейного сдвига собственной частоты с учетом теплового движения частиц:

$$\Delta\omega_k \simeq \beta_k I_k, \quad \beta_k = \frac{5}{12\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2 s^2}{\Omega^3}, \quad (5.120)$$

где  $s^2$  — среднее значение квадрата скорости электрона, зависящее от температур плазмы. Величина  $I_k$  в равновесной плазме также определяется температурой. Поэтому для такой плазмы отношение сдвига (5.120) к самой частоте по порядку величины равно  $\frac{k^3}{n_0} k^4 a^4$ .

Однако в неравновесной плазме  $I_k$  может значительно отличаться от своего теплового значения и учет нелинейных сдвигов частот собственных ленгмюровских колебаний может быть весьма существенным.

#### 4. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ПЛАЗМЕ

Под воздействием сильного электромагнитного поля дисперсионные свойства плазмы могут изменяться со временем, вследствие чего возможно возникновение параметрического резонанса: под действием внешнего поля в плазме интенсивно нарастает флуктуационное поле, что в конечном итоге приводит к так называемой параметрической неустойчивости плазмы. Впервые параметрический резонанс в плазме, связанный с раскачкой продольных возмущений в слабом высокочастотном электромагнитном поле, был рассмотрен В. П. Силиным [84], затем параметрическая неустойчивость плазмы изучалась в работах [3, 139, 163]. Теория параметрических эффектов в плазме, учитывающая неоднородность внешнего поля, развита в работах [37, 86, 135].

Элементарным процессом, лежащим в основе параметрической неустойчивости плазмы, так же как и в случае распадной неустойчивости, является превращение одной (падающей) волны с частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$  в две другие волны с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ . При этом должны выполняться законы сохранения  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  и  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Следует, однако, иметь в виду, что в отличие от распадной неустойчивости, при которой частоты и волновые векторы образующихся волн определяются свойствами плазмы и не зависят от интенсивности падающей волны, при параметрической неустойчивости частоты и волновые векторы образующихся волн существенно зависят от амплитуды падающей волны. Поэтому для описания параметрической неустойчивости необходимо учитывать не только квадратичное взаимодействие полей, но и кубическое нелинейное взаимодействие.

Пусть в плазме распространяется плоская монохроматическая волна большой амплитуды (волна накачки)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r}). \quad (5.121)$$

Предположим, что частота  $\omega_0$  и волновой вектор  $\mathbf{k}_0$  волны накачки удовлетворяют линейному дисперсионному соотношению

$$\omega_0^2 = \Omega^2 + k_0^2 c^2, \quad (5.122)$$

и ограничимся нерелятивистским рассмотрением (для этого на величину амплитуды  $E_0$  необходимо наложить ограничение  $eE_0/mc\omega_0 \ll \ll 1$ ). Кроме того, будем считать, что поле волны накачки не влияет на распределения частиц, которые предполагаются стационарными и пространственно-однородными.

В электромагнитном поле волны накачки электроны плазмы осциллируют с большими скоростями, в то же время ионы создают только компенсирующий положительно заряженный фон. Если в плазме возникает какое-либо возмущение (например, возмущение плотности) с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , то под воздействием поля волны накачки возникают также моды с частотами  $\omega \pm \omega_0$  и волновыми векторами  $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$ . Взаимодействие этих мод с полем волны накачки приводит к возникновению ponderomotive силы, которая может усиливать первоначальные возмущения<sup>6</sup>. Таким образом, плазма может рассматриваться в качестве системы с положительной обратной связью, наличие которой, как известно, может приводить к неустойчивости системы.

Обозначим поле возмущения в плазме при наличии волны накачки (5.121) через  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}$  и ограничимся рассмотрением низкочастотных возмущений плазмы, для которых  $\omega \ll \omega_0$ . Воспользуемся общим нелинейным уравнением для поля в плазме (2.66), в котором положим  $\mathbf{j}_0 = 0$  и удержим члены, квадратичные по внешнему полю (5.121) и линейные по полю возмущения:

$$\begin{aligned} T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{2} \{ \chi_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) E_j(\omega - \\ - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) E_j(\omega + \\ + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \} E_{0k} = 0, \end{aligned} \quad (5.123)$$

где

$$\begin{aligned} T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{1}{4} \{ \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) + \\ + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \} E_{0k} E_{0l}. \end{aligned} \quad (5.124)$$

В (5.123) отброшены члены, квадратичные по внешнему полю и изменяющиеся в зависимости от времени с удвоенной частотой поля накачки, поскольку в дисперсионном уравнении они приводят к поправкам высшего порядка по степеням напряженности поля.

<sup>6</sup> Такая сила (называемая иногда силой Миллера) независимо введена в работах [23, 31, 78].

Дисперсионное уравнение для волн возмущения с точностью до квадратичных членов по степеням напряженности поля волны накачки можно записать в виде

$$\text{Det} \left\{ T_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - \frac{1}{4} [\chi_{i'j'k'}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) T_{j'i'}^{-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \chi_{i'jk}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0 - \mathbf{k}_0) + \chi_{i'j'k'}^{(2)}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \times \right. \\ \left. \times T_{j'i'}^{-1}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \chi_{i'jk}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)] E_{0k} E_{0k'} \right\} = 0, \quad (5.125)$$

где  $T_{ij}^{-1}$  — тензор, обратный (5.124). Будем считать, что фазовая скорость волны накачки значительно превышает тепловую скорость электронов и, кроме того,  $\omega_0 \gg ks$ . В этом случае в выражениях для нелинейных тензорных восприимчивостей  $\chi_{ijk}^{(2)}$  и  $\chi_{ijkl}^{(3)}$  можно ограничиться учетом только вклада электронов:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) = \\ = -\chi_{kji}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) \simeq -i \frac{e}{m\omega_0^2} \chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) k_i \delta_{jk}, \quad (5.126)$$

$$\chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0; -\omega_0, -\mathbf{k}_0) + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega, \mathbf{k}; -\omega_0, -\mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \simeq \\ \simeq \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2}{\omega_0^4} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}{k^2} \right) \chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (5.127)$$

Используя эти приближенные соотношения, тензор (5.124) представим в виде

$$T_{ij}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) \simeq \Lambda_{ij}(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) + \\ + \frac{1}{4} \frac{k^2}{\omega_0^4} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}{k^2} \right) \chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) v_{Ei} v_{Ej}, \quad (5.128)$$

где  $\mathbf{v}_E \equiv \frac{eE_0}{m\omega_0}$ . С помощью (2.67), (2.75) и (5.126) нетрудно показать, что дисперсионное уравнение (5.125) распадается на два дисперсионных уравнения: для поперечных волн (оно не зависит от поля волны накачки) и для продольных низкочастотных возмущений —

$$\varepsilon_l(\omega, k) - \frac{1}{4} \frac{k^2}{\omega_0^2} |\chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k})|^2 [T_{ij}^{-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \\ + T_{ij}^{-1}(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)] v_{Ei} v_{Ej} = 0. \quad (5.129)$$

Сохраняя члены, квадратичные по  $v_E$ , уравнение (5.129) переписываем в виде

$$\frac{1}{\chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left\{ \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \left( \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E)^2}{\varepsilon_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{\varepsilon_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \eta_{-}^2} \Bigg) + \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \left( \frac{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E)^2}{\varepsilon_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{\varepsilon_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) - \eta_{+}^2} \right) \Bigg\} = 0. \quad (5.130)
 \end{aligned}$$

Это уравнение определяет дисперсию волн в плазме при наличии высокочастотной волны накачки, характеризуемой частотой  $\omega_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ . Благодаря полю волны накачки в плазме возникает параметрическая связь между низкочастотными возмущениями, характеризуемыми частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  и высокочастотными продольными и поперечными биениями с частотами  $\omega \pm \omega_0$  и волновыми векторами  $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$ .

Если частота волны накачки  $\omega_0$  близка к ленгмюровской частоте  $\Omega$ , то в фигурных скобках в (5.130) главную роль играют слагаемые, отвечающие биениям продольного поля (поскольку  $\varepsilon_l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) \simeq 0$ ). Дисперсионное уравнение в этом случае описывает (при  $ak \ll 1$ ) параметрическое возбуждение падающей электромагнитной волной двух продольных плазменных волн (например, ленгмюровской и ионно-звуковой). Такое возбуждение сопровождается аномальным поглощением энергии волны накачки плазмой [84].

Если частота волны накачки  $\omega_0$  такова, что  $\varepsilon_l(\omega \pm \omega_0, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0) = \eta_{\pm}^2$ , то в фигурных скобках в (5.130) основными являются слагаемые, отвечающие биениям поперечного поля. Дисперсионное уравнение (5.130) в этом случае описывает параметрическое возбуждение падающей электромагнитной волной продольной волны и электромагнитной волны с измененной частотой, т. е. вынужденное комбинационное рассеяние электромагнитной волны.

Рассмотрим более подробно вынужденное комбинационное рассеяние электромагнитных волн в плазме [135]. Пренебрегая в дисперсионном уравнении (5.130) слагаемыми, отвечающими биениям продольного поля, переписываем его в виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \chi^{(i)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{k^2}{4\omega_0^2} \left\{ \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \frac{[\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{\varepsilon_l(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \eta_{-}^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)^2} \frac{[\mathbf{k} + \mathbf{k}_0, \mathbf{v}_E]^2}{\varepsilon_l(\omega + \omega_0, \mathbf{k} + \mathbf{k}_0) - \eta_{+}^2} \right\} = 0. \quad (5.131)
 \end{aligned}$$

Слагаемое с  $\omega - \omega_0$  в этом уравнении соответствует возбуждению стоксовой компоненты при вынужденном рассеянии, а с  $\omega + \omega_0$  — антистоксовой.

Не учитывая пространственную дисперсию в  $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$  (в которых, однако, феноменологически будем учитывать столкновения), ограничиваемся рассмотрением случая, когда в (5.131) существен учет только стоксовой компоненты. Нетрудно убедиться, что это справедливо при  $\omega \ll k k_0 c^2 / \omega_0$  (условие нарушается при достаточно

малых значениях  $k$  и при  $\mathbf{k} \perp \mathbf{k}_0$ ). При  $\omega \ll \omega_0$  справедливо приближенное равенство

$$\varepsilon_i(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - \eta_-^2 \simeq \frac{2}{\omega_0} \left( \omega - \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_0}{\omega_0} c^2 + \frac{k^2 c^2}{2\omega_0} \right),$$

правая часть которого мала, если  $k \simeq 2k_0 \cos \vartheta$ ,  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_0$ . (Так как для стоксовой компоненты  $\omega - \omega_0 < 0$ , то  $\vartheta = 0$  соответствует рассеянию назад, а  $\vartheta = \pi/2$  — рассеянию вперед.) Пренебрегая далее в (5.131) нерезонансным слагаемым (отвечающим антистоксову рассеянию) и заменяя в полученном соотношении  $k$  величиной  $2k_0 \cos \vartheta$  всюду, за исключением знаменателя, получаем

$$\frac{1}{\kappa^{(e)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \kappa^{(i)}(\omega, \mathbf{k})} = \frac{k_0^2 v_E^2}{2\omega_0 (\omega - \Delta\omega + i\tilde{\gamma})} \Psi^2(\vartheta, \varphi), \quad (5.132)$$

где  $\Delta\omega \equiv \mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \frac{c^2 k^2}{2\omega_0}$  ( $\mathbf{v}_0 = \frac{c_2}{\omega_0} \mathbf{k}_0$  — групповая скорость падающей волны;  $\tilde{\gamma}$  — затухание электромагнитной волны, связанное с учетом парных столкновений;  $\Psi^2(\vartheta, \varphi) = \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta$  ( $\varphi$  — угол между векторами поляризации падающей и рассеянной волн).

При частотах  $\omega \gg ks$  в (5.132) ионной составляющей восприимчивости  $\kappa^{(i)}(\omega, \mathbf{k})$  можно пренебречь, а для электронной составляющей восприимчивости  $\kappa^{(e)}(\omega, \mathbf{k})$  можно воспользоваться высокочастотным приближением. В результате получаем

$$(\omega - \omega_k + i\gamma)(\omega - \Delta\omega + i\tilde{\gamma}) = -\frac{1}{4} \omega_0 \Omega \frac{v_E^2}{c^2} \Psi^2, \quad (5.133)$$

где  $\omega_k = \sqrt{\Omega^2 + k^2 s^2}$  и  $\gamma$  — затухание Ландау ленгмюровской волны. Полагая  $\omega = \omega_k + i\Gamma$  и  $\Delta\omega = \omega_k$ , для инкремента  $\Gamma$  находим значение

$$\Gamma = -\frac{1}{2} (\gamma + \tilde{\gamma}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma - \tilde{\gamma})^2 + \omega_0 \Omega \frac{v_E^2}{c^2} \Psi^2}. \quad (5.134)$$

Пороговое значение амплитуды волны накачки  $\bar{v}_E$  определяется из условия  $\Gamma = 0$ :

$$\bar{v}_E^2 = \frac{1}{4} \frac{c^2}{\Psi^2} \frac{\gamma}{\Omega} \frac{\tilde{\gamma}}{\omega_0}. \quad (5.135)$$

Вблизи порога инкремент нарастания (при  $\gamma \gg \tilde{\gamma}$ ,  $\Gamma$ ) пропорционален квадрату амплитуды волны накачки:

$$\Gamma = \frac{1}{4} \frac{v_E^2 - \bar{v}_E^2}{c^2} \frac{\Omega}{\gamma} \omega_0 \Psi^2. \quad (5.136)$$

Максимальное значение инкремента нарастания (при  $\Omega \gg \Gamma \gg \gamma$ ) линейно зависит от амплитуды волны накачки:

$$\Gamma_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_E}{c} \sqrt{\omega_0 \Omega} \Psi. \quad (5.137)$$

Заметим, что вынужденное комбинационное рассеяние возможно только при  $ak = 2ak_0 \cos \vartheta \ll 1$ , т. е. когда ленгмюровская волна характеризуется малым затуханием.

В сильно неизотермической плазме возможно вынужденное рассеяние электромагнитных волн на ионно-звуковых колебаниях.

Если  $s \gg \frac{\omega}{k} \gg s_i$ , то из (5.132) получаем

$$(\omega - kv_s + i\gamma_s)(\omega - \Delta\omega + i\tilde{\gamma}) = -\frac{1}{8} \Omega_i^2 \frac{v_E^2}{v_s} \frac{k_0}{\omega_0} \frac{\Psi^2}{\cos \vartheta} \quad (5.138)$$

( $\gamma_s$  — затухание ионно-звуковой волны), откуда для инкремента нарастания находим

$$\Gamma = -\frac{1}{2}(\gamma_s + \tilde{\gamma}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma_s - \tilde{\gamma})^2 + \frac{1}{2} \Omega_i^2 \frac{v_E^2}{v_s} \frac{k_0}{\omega_0} \sin^2 \varphi \cos \vartheta}. \quad (5.139)$$

Пороговое значение амплитуды волны накачки определяется выражением

$$\bar{v}_E^2 = \frac{1}{2} \frac{v_s}{\sin^2 \varphi \cos \vartheta} \frac{\omega_0}{k_0} \frac{\gamma_s \tilde{\gamma}}{\Omega_i^2}. \quad (5.140)$$

Вблизи порога инкремент нарастания (при  $\gamma_s \gg \tilde{\gamma}$ ,  $\Gamma$ ) определяется формулой

$$\Gamma = \frac{1}{8} \frac{v_E^2 - \bar{v}_E^2}{v_s} \frac{k_0}{\omega_0} \frac{\Omega_i^2}{\gamma_s} \sin^3 \varphi \cos \vartheta, \quad (5.141)$$

максимальное значение инкремента (при  $kv_s \gg \Gamma \gg \gamma_s$ ) —

$$\Gamma_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_E}{v_s} \Omega_i \sqrt{\frac{k_0 v_s}{2\omega_0} \cos \vartheta} |\sin \varphi|. \quad (5.142)$$

Заметим, что вынужденное рассеяние электромагнитных волн как на ленгмюровских, так и на ионно-звуковых колебаниях характеризуется минимальным пороговым значением амплитуды и максимальным инкрементом нарастания при  $\vartheta = 0$  и  $\varphi = \pi/2$ .

Анализ дисперсионного уравнения (5.131) показывает, что кроме вынужденного рассеяния в плазме под воздействием поля высокочастотной электромагнитной волны могут возбуждаться длинноволновые возмущения, приводящие к возникновению так называемой параметрической или модуляционной неустойчивости. Предположим, что  $k < 2k_0 \cos \vartheta$  и  $\omega \ll \Omega_i$ . Так как в этом случае  $\omega$  и  $kv_0$  ( $v_0$  — групповая скорость волны накачки) одного порядка, то в (5.131) необходимо одновременно учитывать слагаемые, зависящие как от  $\omega - \omega_0$ , так и от  $\omega + \omega_0$ . Указанные возмущения обусловлены движением ионов и приводят к модуляции плотности плазмы с большей по сравнению с  $k_0^{-1}$  длиной модуляции. Для  $\omega \ll kc$  и  $\varphi = \pi/2$ ,

т. е. при  $\mathbf{k}$  перпендикулярном  $\mathbf{E}_0$ , уравнение (5.131) можно записать в виде

$$\frac{1}{\kappa^{(e)}(\omega, \mathbf{k})} + \frac{1}{1 + \kappa^{(i)}(\omega, \mathbf{k})} = -\frac{1}{2} \frac{v_E^2}{c^2} \frac{\delta^2}{\left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0 + \frac{i}{2} \tilde{\gamma}\right)^2 - \delta^2}, \quad \delta \equiv \frac{k^2 c^2}{2\omega_0}. \quad (5.143)$$

Если  $\omega \ll ks_i$ , то  $\kappa^{(i)}(\omega, \mathbf{k}) \simeq \frac{1}{a_i^2 k^2}$  и решение уравнения (5.143) имеет вид

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0 - \frac{i}{2} \tilde{\gamma} \pm \left(1 - \frac{1}{2a^2 k^2} \frac{1}{1 + \frac{T_i}{T_e}} \frac{v_E^2}{c^2}\right) \delta. \quad (5.144)$$

Это решение становится неустойчивым при

$$v_E^2 > \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\omega_0}{\delta} a^2 (\tilde{\gamma}^2 + 4\delta^2). \quad (5.145)$$

Правая часть этого неравенства определяет пороговое значение амплитуды, которое оказывается минимальным при  $\tilde{\gamma} \simeq 2\delta$ :

$$\bar{v}_E = \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\tilde{\gamma}}{\omega_0} a^2 k_0^2 c^2. \quad (5.146)$$

Если  $\mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$ , то  $\omega$  в (5.144) становится чисто мнимым, т. е. соответствующее возмущение характеризуется экспоненциальным нарастанием<sup>7</sup>. При  $\Omega_i \gg \omega \gg ks_i$  и  $\mathbf{k}\mathbf{v}_0 = 0$  аналогичным способом получаем

$$\omega \simeq \sqrt{\frac{1}{2} (k^2 v_s^2 + \delta^2) \pm \sqrt{(k^2 v_s^2 - \delta^2)^2 + 2 \frac{v_E^2}{c^2} \Omega_i^2 \delta^2}}. \quad (5.147)$$

Если  $\omega \gg kv_s$  и  $|\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0| \gg \delta$ , то

$$\omega \simeq \frac{1}{2} \mathbf{k}\mathbf{v}_0 \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\mathbf{k}\mathbf{v}_0)^2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_E}{c} \Omega_i \delta}. \quad (5.148)$$

Нетрудно видеть, что в рассмотренных случаях неустойчивость возникает только при больших длинах волн возмущений  $k \ll \ll k_0 \sqrt{\frac{\Omega_i}{\omega_0} \frac{v_E}{c}}$  в области углов  $\cos \vartheta \simeq 0$ .

<sup>7</sup> Впервые неустойчивость плазмы в поле электромагнитной волны была обнаружена в работе [26].

## ФЛУКТУАЦИИ В ПЛАЗМЕ

## 1. ФЛУКТУАЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ОДНОРОДНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Различные физические величины, вводимые для описания состояния плазмы (как и любой другой статистической системы), характеризуются отклонениями от своих средних значений. Эти отклонения, называемые флуктуациями физических величин, определяются состоянием системы<sup>1</sup>. Так как среднее значение флуктуаций любой величины по определению равно нулю, то для описания флуктуаций вводятся корреляционные функции. В случае пространственно-распределенных величин корреляционные функции определяются как средние значения произведений флуктуаций величин в различных точках пространства в различные моменты времени. При этом усреднение в общем случае производится как по квантовомеханическому состоянию системы, так и по статистическому распределению различных состояний системы. Такие функции называются пространственно-временными корреляционными функциями. Если система пространственно-однородна и рассматриваются стационарные состояния системы, то квадратичная пространственно-временная корреляционная функция зависит только от абсолютного значения интервала времени и относительного расстояния между точками, в которых рассматриваются флуктуации.

Выберем для определенности в качестве пространственно-распределенной величины плотность частиц определенного сорта в плазме, например плотность электронов  $n(\mathbf{r}, t)$ . Если среднее значение плотности равно  $n_0$  (для пространственно-однородной системы, находящейся в стационарном состоянии, это значение является постоянной величиной), то под флуктуацией плотности частиц

---

<sup>1</sup> Общая теория флуктуаций развита в работах Г. Каллена и Т. Велтона [125], М. А. Леонтовича и С. М. Рытова [67, 77], Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [64]. Электромагнитные флуктуации в средах с пространственной дисперсией впервые рассмотрены В. П. Силиным [80]. Теоретическому изучению флуктуаций в плазме посвящено большое количество работ, в частности работы [6, 50, 58, 81, 89, 93, 103, 156, 170, 173, 174, 182, 187]. Теория электромагнитных флуктуаций в плазме детально изложена в монографиях [5, 88], где даны подробные ссылки на оригинальные работы. Рассмотрению равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике посвящена монография [66].



$\delta n(\mathbf{r}, t)$  следует понимать разность величин  $n(\mathbf{r}, t)$  и  $n_0$ :

$$\delta n(\mathbf{r}, t) \equiv n(\mathbf{r}, t) - n_0. \quad (6.1)$$

Определим квадратичную пространственно-временную корреляционную функцию для флуктуаций плотности согласно

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1, t_1) \delta n(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \equiv \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{r}t}, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  и  $t = t_1 - t_2$  (угловые скобки в левой части равенства обозначают операцию статистического усреднения).

Пространственно-временное преобразование Фурье корреляционной функции будем называть спектральным распределением или спектральной плотностью флуктуаций

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \int d\mathbf{r} \int dt e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{r}t} \quad (6.3)$$

(иногда — также корреляционной функцией в пространстве  $(\mathbf{k}, \omega)$  или спектральным представлением корреляционной функции). Легко убедиться, что среднее значение произведения компонент Фурье флуктуаций величин связано со спектральным распределением флуктуаций соотношением

$$\langle \delta n_{\mathbf{k}\omega} \delta n_{\mathbf{k}'\omega'}^+ \rangle = (2\pi)^4 \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \quad (6.4)$$

(символ  $+$  означает операцию эрмитовского сопряжения).

Среднее значение произведения флуктуаций каких-либо величин в различных точках пространства в один и тот же момент времени называется пространственной корреляционной функцией:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1, t) \delta n(\mathbf{r}_2, t) \rangle \equiv \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (6.5)$$

Нетрудно показать, что преобразование Фурье пространственной корреляционной функции совпадает с интегралом по всем частотам от спектрального распределения флуктуаций:

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (6.6)$$

Среднее значение произведения флуктуаций каких-либо величин в одной и той же точке пространства в различные моменты времени называется временной корреляционной (или автокорреляционной) функцией:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}, t_1) \delta n(\mathbf{r}, t_2) \rangle \equiv \langle \delta n^2 \rangle_t. \quad (6.7)$$

Преобразование Фурье временной корреляционной функции равно интегралу по пространству волновых векторов от спектрального распределения флуктуаций:

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (6.8)$$

Кроме квадратичной корреляционной функции  $\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{r}t}$  вводятся также корреляционные функции более высоких порядков, например кубическая (или тройная), четверная:

$$\langle \delta n(\mathbf{r}_1, t_1) \delta n(\mathbf{r}_2, t_2) \delta n(\mathbf{r}_3, t_3) \rangle \equiv \langle \delta n^3 \rangle_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 = t_2; \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, t_2 = t_3}; \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta n(\mathbf{r}_1, t_1) \delta n(\mathbf{r}_2, t_2) \delta n(\mathbf{r}_3, t_3) \delta n(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle &\equiv \\ &\equiv \langle \delta n^4 \rangle_{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2; \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3, t_2 - t_3; \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4, t_3 - t_4}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

В силу пространственной однородности системы и стационарности состояний эти функции, как и квадратичная корреляционная функция, зависят только от абсолютных значений интервалов времени и относительных расстояний между точками, в которых рассматриваются флуктуации.

Аналогично можно ввести корреляционные функции для других пространственно-распределенных величин в плазме. Если рассматриваемая величина — вектор, то соответствующая квадратичная корреляционная функция является тензором второго ранга, а корреляционные функции более высокого порядка — тензорными величинами высших рангов.

Определим пространственно-временные корреляционные функции для флуктуаций плотности заряда и плотности тока в плазме. Будем считать, что плазма электрически нейтральна и среднее значение плотности тока равно нулю. В этом случае флуктуации плотностей заряда и тока совпадают с теми же плотностями:

$$\delta \rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t); \quad \delta \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Заметим, что флуктуации плотности заряда непосредственно связаны с флуктуациями плотностей частиц компонент плазмы соотношением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum e \delta n(\mathbf{r}, t), \quad (6.11)$$

где суммирование производится по различным компонентам плазмы. Пространственно-временную корреляционную функцию для флуктуаций плотности заряда определяем согласно соотношению

$$\langle \rho(\mathbf{r}_1, t_1) \rho(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \equiv \langle \rho^2 \rangle_{rt}, \quad (6.12)$$

и аналогично — пространственно-временную корреляционную функцию для флуктуаций плотности тока

$$\langle j_i(\mathbf{r}_1, t_1) j_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \equiv \langle j_i j_j \rangle_{rt}. \quad (6.13)$$

Спектральные распределения для флуктуаций плотности заряда и плотности тока соответственно записываем в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \int d\mathbf{r} \int dt e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \langle \rho^2 \rangle_{rt}, \quad (6.14)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega} = \int d\mathbf{r} \int dt e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t} \langle j_i j_j \rangle_{rt}. \quad (6.15)$$

Корреляционные функции, введенные в гл. 1, являются примером пространственных (одновременных) корреляционных функций и непосредственно связаны с флуктуациями функций распределения частиц в плазме. Действительно, одночастичная функция распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  представляет собой среднее значение микроскопической плотности в фазовом пространстве  $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , определяемой равенством

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}(t)) \quad (6.16)$$

и зависящей от динамических переменных всех частиц. Будем подразумевать под флуктуацией функции распределения  $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$ : разность микроскопической плотности (6.16) и ее среднего значения)

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (6.17)$$

Так как микроскопическая плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  зависит от координат и скоростей всех частиц, то  $\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  является случайной величиной, зависящей от микроскопического состояния системы. Очевидно, среднее значение величины (6.17) равно нулю. Нетрудно показать, что среднее значение произведения флуктуаций функции распределения в двух различных точках пространства в один и тот же момент времени выражается через введенную ранее двухчастичную корреляционную функцию  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t)$ :

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'; t). \quad (6.18)$$

В случае стационарного распределения в плазме правая часть равенства (6.18) от времени не зависит, т. е.

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'). \quad (6.19)$$

Напомним, что если плазма пространственно-однородна, то в правой части (6.19) одночастичная функция распределения  $f$  не зависит от  $\mathbf{r}$ , а двухчастичная корреляционная функция  $g$  зависит только от разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ . Из равенства (6.19) видно, что при стационарных распределениях корреляционные функции для отклонений любых величин, взятых в один и тот же момент времени, от времени не зависят.

При рассмотрении электродинамических свойств плазмы более важную роль по сравнению с пространственными играют временные корреляционные функции, определяемые как средние значения произведений флуктуаций величин в разные моменты времени. Особенно важное значение имеют пространственно-временные корреляционные функции для флуктуаций функции распределения частиц в плазме

$$\langle \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle \equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}. \quad (6.20)$$

В пространственно-однородной и стационарной плазме корреляционная функция  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}$  зависит только от разности координат точек пространства и разности времен. Знание корреляционной функции для флуктуаций функции распределения частиц позволяет находить корреляционные функции для любых величин в плазме.

Квадратичная пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения может быть выражена через одночастичную функцию распределения  $f(\mathbf{v}')$  и условную вероятность перехода отдельной частицы из одного определенного состояния  $(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$  в другое  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  за промежуток времени  $t - t'$ :

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'} \equiv W_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f(\mathbf{v}'). \quad (6.21)$$

Условная вероятность перехода  $W_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  определяется характером взаимодействия между частицами, а также граничными условиями для ограниченных плазменных систем [106]. В случае парного взаимодействия между частицами пространственно-временные корреляционные функции высших порядков, так же как и квадратичная пространственно-временная корреляционная функция, выражаются через одночастичную функцию распределения и условную вероятность перехода.

## 2. ФЛУКТУАЦИИ В СИСТЕМЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРЕНЕБРЕЖЕНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ

Рассмотрим флуктуации различных величин в системе заряженных частиц (которую будем считать квазинейтральной) в предположении, что можно полностью пренебречь кулоновским или электромагнитным взаимодействием между частицами. Прежде всего определим квадратичную пространственно-временную корреляционную функцию для флуктуаций функции распределения частиц. Так как в отсутствие взаимодействия между частицами отдельные частицы движутся вдоль прямолинейных траекторий, то

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}^0(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}^0(t)), \quad (6.22)$$

где

$$\mathbf{v}_{\alpha}^0(t) = \mathbf{v}_{\alpha}^0, \quad \mathbf{r}_{\alpha}^0(t) = \mathbf{r}_{\alpha}^0 + \mathbf{v}_{\alpha}^0(t - t_0) \quad (6.23)$$

( $\mathbf{r}_{\alpha}^0$  и  $\mathbf{v}_{\alpha}^0$  — радиус-вектор и скорость частицы в некоторый начальный момент времени  $t_0$ ). Функция распределения для многочастичной системы, если пренебречь взаимодействием между частицами, представляется в виде произведения одночастичных функций:

$$D_N^0(\mathbf{r}_1^0, \mathbf{v}_1^0; \mathbf{r}_2^0, \mathbf{v}_2^0; \dots; \mathbf{r}_N^0, \mathbf{v}_N^0) = \prod_{\alpha=1}^N f_0(\mathbf{v}_{\alpha}^0). \quad (6.24)$$

Так как система пространственно-однородна и стационарна, то одночастичные функции распределения  $f_0(\mathbf{v})$  не зависят от координат и времени и могут зависеть только от скорости  $\mathbf{v}$ . Если система находится в термодинамическом равновесии, то в качестве  $f_0(\mathbf{v})$  следует взять максвелловскую функцию. В общем случае неравновесной системы функция распределения  $f_0(\mathbf{v})$  отличается от максвелловской. (Вопрос о нахождении функции  $f_0(\mathbf{v})$  рассмотрен в гл. 9.)

Усредняя (6.22) по распределению (6.24), легко убедиться, что действительно

$$\langle \mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_0(\mathbf{v}). \quad (6.25)$$

Определяя флуктуацию функции распределения в отсутствие взаимодействия между частицами,

$$\delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{v}), \quad (6.26)$$

нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} & \langle \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle = \\ & = \left\langle \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}^0(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}^0) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{\alpha}^0(t')) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_{\alpha}^0) \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Проводя, далее, усреднение с помощью распределения (6.24), можно показать, что пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения в пренебрежении взаимодействием между частицами имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle & \equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0 = \\ & = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.28)$$

Полученное соотношение допускает простое физическое истолкование. Наличие корреляции между флуктуациями функции распределения в точках пространства, удаленных друг от друга на расстояние  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , в моменты времени, различающиеся на интервал  $t - t'$ , связано с тождественностью частиц и обусловлено возможностью перемещения частицы, характеризуемой скоростью  $\mathbf{v}$ , на расстояние  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  за время  $t - t'$ . Очевидно, множитель, стоящий перед функцией  $f_0(\mathbf{v})$  в правой части (6.28), можно интерпретировать как условную вероятность перехода частицы в неограниченной системе в отсутствие взаимодействия между частицами:

$$W_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')]. \quad (6.29)$$

Так как частицы разных сортов (в отсутствие взаимодействия) движутся независимо друг от друга, то корреляционная функция для флуктуаций функций распределения частиц разных сортов равна нулю:

$$\begin{aligned} \langle \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f'_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \rangle & \equiv \\ & \equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0 = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Выражения (6.28) и (6.30) удобно объединить:

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'}^0 = \delta' \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] f_0(\mathbf{v}), \quad (6.31)$$

где  $\delta' = 1$  для одинаковых частиц и  $\delta' = 0$  — для разных. Выполняя пространственно-временное преобразование Фурье над (6.31), для спектрального распределения флуктуаций функций распределения в отсутствие взаимодействия между частицами получаем следующее выражение:

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi \delta' \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.32)$$

Это выражение позволяет находить в явном виде спектральные распределения для флуктуаций любых величин в системе заряженных частиц в пренебрежении взаимодействием между ними.

Проинтегрировав (6.32) дважды по скоростям, получим спектральное распределение для флуктуаций плотности частиц

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.33)$$

Корреляция между флуктуациями плотности частиц разных сортов в пренебрежении взаимодействием между частицами отсутствует.

Согласно (6.33) зависимость спектрального распределения флуктуаций плотности частиц от частоты определяется видом одночастичной функции распределения. Введем обозначение для интеграла от функции распределения по составляющим скорости, перпендикулярным направлению волнового вектора  $\mathbf{k}$ :

$$f_{0\parallel}(v_{\parallel}) \equiv \int dv_{\perp} f_0(\mathbf{v}_{\perp}, v_{\parallel}). \quad (6.34)$$

Тогда

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = \frac{2\pi}{k} f_{0\parallel}\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (6.35)$$

Так как предполагается, что функция распределения удовлетворяет условию нормировки, то распределение (6.35) должно иметь максимум при малых частотах и характеризоваться спадом с ростом частоты. Выбирая в качестве  $f_0(\mathbf{v})$  максвелловскую функцию, для равновесной системы получаем

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = \sqrt{6\pi} \frac{n_0}{ks} e^{-\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{k^2 s^2}}. \quad (6.36)$$

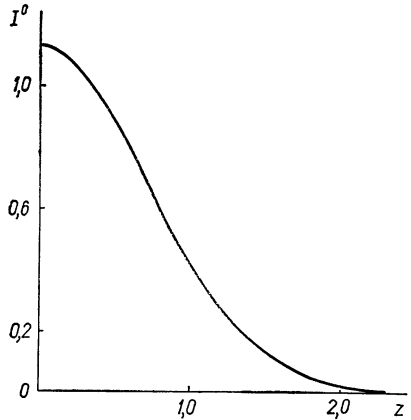


Рис. 4. Спектральное распределение флуктуаций плотности частиц.

Это распределение характеризуется максимумом при нулевой частоте, ширина которого определяется температурой плазмы (рис. 4;

$$I^0(z) \equiv \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 / 2\pi \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}}^0, \quad z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega}{ks}.$$

Используя (6.33), нетрудно найти спектральное распределение для флуктуаций плотности заряда в отсутствие взаимодействия между частицами:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi \sum e^2 \int dv \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.37)$$

Умножая (6.32) на диадное произведение векторов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  и интегрируя по скоростям, находим спектральное распределение для флуктуаций плотности тока в отсутствие взаимодействия между частицами:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi \sum e^2 \int dv v_i v_j \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.38)$$

Спектральные распределения, характеризующие корреляцию в системе невзаимодействующих частиц между флуктуациями функции распределения и флуктуациями плотностей заряда и тока,

описываются формулами

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \rho \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi e \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}), \quad (6.39)$$

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) j_i \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = 2\pi e v_i \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.40)$$

Аналогично, используя (6.26) и (6.24), можно вычислить в пренебрежении взаимодействием между частицами пространственно-временные корреляционные функции для флуктуаций функции распределения более высокого порядка:

$$\begin{aligned} & \langle \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \delta f_0(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t'') \rangle \equiv \\ & \equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \delta f(\mathbf{v}'') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'; \mathbf{r}'-\mathbf{r}'', t'-t''}^0 = \\ & = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] \times \\ & \times \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}'' - \mathbf{v}'(t' - t'')] f_0(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} & \langle \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f_0(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \delta f_0(\mathbf{r}'', \mathbf{v}'', t'') \delta f_0(\mathbf{r}''', \mathbf{v}''', t''') \rangle \equiv \\ & \equiv \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \delta f(\mathbf{v}'') \delta f(\mathbf{v}''') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'; \mathbf{r}'-\mathbf{r}'', t'-t''; \mathbf{r}''-\mathbf{r}''', t''-t'''}^0 = \\ & = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \delta(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}''') \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{v}(t - t')] \times \\ & \times \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}'' - \mathbf{v}'(t' - t'')] \delta[\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''' - \mathbf{v}''(t'' - t''')] f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Как видим, в пренебрежении взаимодействием между частицами корреляционные функции любого порядка выражаются через одночастичную функцию распределения и условную вероятность перехода (6.29). С помощью пространственно-временного преобразования Фурье из (6.41) и (6.42) получаем следующие формулы для спектральных распределений:

$$\begin{aligned} & \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \delta f(\mathbf{v}'') \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}^0 = \\ & = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}') f_0(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} & \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \delta f(\mathbf{v}'') \delta f(\mathbf{v}''') \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \mathbf{k}''\omega''}^0 = \\ & = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'') \delta(\mathbf{v}'' - \mathbf{v}''') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}') \times \\ & \times \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}'') f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Интегрируя полученные выражения по скоростям, находим спектральные представления для высших корреляционных функций флуктуаций плотности заряда:

$$\langle \rho^3 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}^0 = 4\pi^2 \sum e^3 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}') f_0(\mathbf{v}), \quad (6.45)$$

$$\langle \rho^4 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \mathbf{k}''\omega''}^0 = 8\pi^3 \sum e^4 \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}') \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}'') f_0(\mathbf{v}). \quad (6.46)$$

Спектральное представление корреляционной функции  $n$ -го порядка для флуктуаций плотности заряда в отсутствие взаимодействия между частицами имеет вид

$$\begin{aligned} & \langle \rho^n \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \dots; \mathbf{k}^{(n-1)}\omega^{(n-1)}}^0 = \\ & = (2\pi)^{n-1} \sum e^n \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \dots \delta(\omega^{(n-1)} - \mathbf{k}^{(n-1)}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Аналогично получаем спектральные представления корреляционных функций для флуктуаций плотности тока:

$$\langle j_i j_j j_k \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}^0 = 4\pi^2 \sum e^3 \int d\mathbf{v} v_i v_j v_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}), \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} & \langle j_i j_j j_k j_l \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega', \mathbf{k}''\omega''} = \\ & = 8\pi^3 \sum e^4 \int d\mathbf{v} v_i v_j v_k v_l \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}) \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (6.49)$$

При выводе корреляционных функций и спектральных распределений флуктуаций в системе заряженных частиц до сих пор мы не только пренебрегали взаимодействием между частицами, но и предполагали, что внешние поля отсутствуют. Если система заряженных частиц находится во внешних полях, то последние могут существенным образом влиять на характер флуктуаций. В качестве простейшего примера рассмотрим флуктуации в системе невзаимодействующих заряженных частиц, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ . (Рассматриваемая модель описывает флуктуации в магнитоактивной плазме в пренебрежении взаимодействием между частицами.) В магнитном поле отдельные заряженные частицы движутся по винтовым линиям, при этом уравнение траектории для определенной частицы  $\alpha$  можно записать в виде

$$\mathbf{r}_\alpha^0(t) = \mathbf{r}_\alpha^0 + \mathbf{R}_\alpha(t - t_0, \mathbf{v}_\alpha^0), \quad (6.50)$$

где

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{v}) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\omega_B} [v_x \sin \omega_B t - v_y (\cos \omega_B t - 1)], \\ \frac{1}{\omega_B} [v_x (\cos \omega_B t - 1) + v_y \sin \omega_B t], \\ v_{\parallel} t \end{cases} \quad (6.51)$$

( $\mathbf{r}_\alpha^0$  и  $\mathbf{v}_\alpha^0$  — радиус-вектор и скорость частицы  $\alpha$  в начальный момент времени  $t_0$ ; система координат выбрана так, чтобы ось  $z$  была направлена вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ).

Пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения определяется равенством (6.27). Усредняя (6.27) по распределению (6.24) и учитывая (6.50), получаем

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}t}^0 = \delta\left(\mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t, \mathbf{v}')\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(t, \mathbf{v}')) f_0(\mathbf{v}'). \quad (6.52)$$

Вследствие наличия магнитного поля скоррелированными оказываются скорости  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ , сдвинутые по фазе на величину  $\omega_B t$ . Спектральное распределение флуктуаций функции распределения записываем в виде

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\mathbf{k}\mathbf{R}(t, \mathbf{v}') + i\omega t} \delta\left(\mathbf{v} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t, \mathbf{v}')\right) f_0(\mathbf{v}). \quad (6.53)$$

Подставляя (6.51) и используя разложение (3.4), спектральное распределение (6.53) можно представить в виде ряда по гармоникам циклотронной частоты. Интегрируя затем полученное выражение



по скоростям, нетрудно получить явные формулы для спектральных распределений флуктуаций плотностей частиц, заряда и тока.

Выражения для спектральных распределений флуктуаций плотностей заряда и тока в системе заряженных частиц в пренебрежении взаимодействием между ними (если функции распределения частиц характеризуются аксиальной симметрией по отношению к направлению магнитного поля) имеют вид

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = 2\pi \sum e^2 \int dv \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \quad (6.54)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^0 = 2\pi \sum e^2 \int dv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_B) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}). \quad (6.55)$$

Тензор  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  в (6.55) определяется по формуле (3.35). Выбирая в качестве  $f_0(\mathbf{v})$  максвелловские функции, для равновесной системы получаем

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = V \sqrt{6\pi} \sum \frac{e^2 n_0}{|k_{\parallel}|^s} e^{-\beta} \sum_n I_n(\beta) e^{-z_n^2}, \quad (6.56)$$

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^0 = V \sqrt{\frac{2}{3}} \pi \sum \frac{e^2 n_0}{|k_{\parallel}|} s e^{-\beta} \sum_n \pi_{ij}(z_n) e^{-z_n^2}, \quad (6.57)$$

где тензор  $\pi_{ij}(z_n)$  находится по формуле (3.38).

Аналогично можно определить корреляционные функции высших порядков. Спектральные представления корреляционных функций третьего и четвертого порядков для флуктуаций плотности заряда имеют вид

$$\begin{aligned} \langle \rho^3 \rangle_{k_1\omega_1; k_2\omega_2}^0 &= 4\pi^2 \sum e^3 \int dv \sum_{n_1, n_1', n_2} e^{-i(n_1 - n_1')(\varphi_1 - \varphi_2)} J_{n_1} \left( \frac{k_{1\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \times \\ &\times J_{n_1'} \left( \frac{k_{1\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_2} \left( \frac{k_{2\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_1 - n_1' + n_2} \left( \frac{k_{2\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \delta(\omega_1 - k_{1\parallel} v_{\parallel} - \\ &- n_1\omega_B) \delta(\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2\omega_B) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}), \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} &\langle \rho^4 \rangle_{k_1\omega_1; k_2\omega_2; k_3\omega_3}^0 = \\ &= 8\pi^3 \sum e^4 \int dv \sum_{n_1, n_1', n_2, n_2', n_3} e^{-i(n_1 - n_1')(\varphi_1 - \varphi_2) - i(n_1 - n_1' + n_2 - n_2')(\varphi_2 - \varphi_3)} \times \\ &\times J_{n_1} \left( \frac{k_{1\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_1'} \left( \frac{k_{1\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_2} \left( \frac{k_{2\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_2'} \left( \frac{k_{2\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \times \\ &\times J_{n_3} \left( \frac{k_{3\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) J_{n_1 - n_1' + n_2 - n_2' + n_3} \left( \frac{k_{3\perp} v_{\perp}}{\omega_B} \right) \delta(\omega_1 - k_{1\parallel} v_{\parallel} - n_1\omega_B) \times \\ &\times \delta(\omega_2 - k_{2\parallel} v_{\parallel} - n_2\omega_B) \delta(\omega_3 - k_{3\parallel} v_{\parallel} - n_3\omega_B) f_0(v_{\perp}, v_{\parallel}). \end{aligned} \quad (6.59)$$

### 3. ФЛУКТУАЦИИ В СИСТЕМЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ (ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Рассмотрим флуктуации различных величин в плазме с учетом самосогласованного взаимодействия между частицами. Напомним, что микроскопические свойства плазмы полностью определяются заданием микроскопической функции распределения или микроскопической плотности

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}(t)). \quad (6.60)$$

Для простоты ограничимся вначале учетом только кулоновского взаимодействия между частицами плазмы. В этом случае микроскопическая плотность определяется системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \left\{ \int d\mathbf{v} \mathcal{F} - n_0 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.61)$$

где  $\mathbf{E}$  — микроскопическое самосогласованное поле в плазме. Предположим, что одночастичная функция распределения, определяемая как среднее от микроскопической плотности (6.60) по распределению Лиувилля  $D_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N; t)$ , стационарна и однородна, т. е.

$$\langle \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle = f_0(\mathbf{v}). \quad (6.62)$$

Под флуктуацией функции распределения будем подразумевать разность

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{v}). \quad (6.63)$$

Случайный характер этой величины определяется микроскопическим характером плотности  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ .

Наряду с точной микроскопической плотностью  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  введем также микроскопическую плотность  $\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , которая описывала бы систему в отсутствие взаимодействия между частицами,

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}^0 - \mathbf{v}_{\alpha}^0(t - t_0)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\alpha}^0) \quad (6.64)$$

( $\mathbf{r}_{\alpha}^0$  и  $\mathbf{v}_{\alpha}^0$  — радиус-вектор и скорость частицы в некоторый начальный момент времени  $t_0$ ), и будем считать, что среднее значение (6.64) совпадает с (6.62). Плотность  $\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  удовлетворяет очевидному равенству

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (6.65)$$

Флуктуации функции распределения в отсутствие взаимодействия между частицами определяем по формуле

$$\delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - f_0(\mathbf{v}). \quad (6.66)$$

Обозначим разность между точной микроскопической плотностью  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и микроскопической плотностью в отсутствие взаимодействия между частицами  $\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  через  $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (6.67)$$

Очевидно, эта величина обусловлена кулоновским взаимодействием между частицами плазмы и при выключении взаимодействия между частицами обращается в нуль. Используя определения (6.63), (6.66) и (6.67), получаем

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (6.68)$$

Это соотношение связывает флуктуации функции распределения для частиц в плазме с флуктуациями функции распределения в системе не взаимодействующих частиц<sup>2</sup>.

Подставляя в уравнения (6.61) микроскопическую плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в виде

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{v}) + \delta f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (6.69)$$

и учитывая (6.65), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f_0 + \delta f_0 + \tilde{f}) &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \int d\mathbf{v} (\delta f_0 + \tilde{f}). \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

С помощью пространственно-временного преобразования Фурье первое из полученных уравнений может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) &= -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \left\{ \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} + \right. \\ &+ \left. \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 + \tilde{f}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}(\mathbf{v})) \right\}. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Пренебрегая в правой части (6.71) нелинейными слагаемыми, получаем

$$\tilde{f}_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) = -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (6.72)$$

Применяя затем пространственно-временное преобразование Фурье ко второму из уравнений (6.70) и исключая с помощью (6.72) из полученного соотношения  $\tilde{f}_{\mathbf{k}\omega}$ , находим

$$i\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{k} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi \rho_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (6.73)$$

где  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  (продольная диэлектрическая проницаемость плазмы) определяется по формуле (2.16);  $\rho_{\mathbf{k}\omega}^0$  — компонента Фурье флуктуа-

<sup>2</sup> Аналогичный подход использован в работе [128].

ции плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами,

$$\rho_{k\omega}^0 = \sum e \int d\mathbf{v} \delta f_{k\omega}^0(\mathbf{v}). \quad (6.74)$$

Заметим, что флуктуации плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами (6.74) обусловлены случайным движением отдельных частиц в плазме.

Соотношение (6.73) непосредственно связывает напряженность флуктуационного поля  $\mathbf{E}_{k\omega}$  с флуктуациями движения отдельных заряженных частиц в плазме. Учитывая продольный характер электрического поля, записываем

$$\mathbf{E}_{k\omega} = -4\pi i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \frac{\rho_{k\omega}^0}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})}. \quad (6.75)$$

Наличие в знаменателе правой части (6.75) диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  связано с эффектом экранирования флуктуаций плотности заряда, обусловленного поляризацией плазмы.

Подставляя (6.72) в (6.68) и используя выражение (6.75), нетрудно получить соотношение, связывающее флуктуации функции распределения для частиц в плазме с флуктуациями функции распределения и плотности заряда для системы, в которой частицы предполагаются не взаимодействующими друг с другом:

$$\delta f_{k\omega}(\mathbf{v}) = \delta f_{k\omega}^0(\mathbf{v}) - \frac{4\pi e}{mk^2} \frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \rho_{k\omega}^0. \quad (6.76)$$

С помощью этого соотношения, можно в явном виде найти корреляционную функцию для флуктуаций функции распределения частиц в плазме с учетом кулоновского взаимодействия между частицами.

Квадратичная пространственно-временная корреляционная функция для флуктуаций функции распределения частиц в плазме с учетом кулоновского взаимодействия между частицами определяется равенством

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'} &\equiv \int \prod_{\alpha=1}^N d\bar{x}_\alpha D_N(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; \bar{t}) \times \\ &\times \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'), \end{aligned} \quad (6.77)$$

где  $D_N(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; \bar{t})$  — точная функция распределения Лиувилля в некоторый момент времени  $\bar{t}$ , который, вообще говоря, должен удовлетворять условию  $\bar{t} \leq t, t'$ . Учитывая сохранение функции распределения Лиувилля вдоль траектории движения всей системы, усреднение в (6.77) в момент времени  $\bar{t}$  можно заменить усреднением по распределению в начальный момент времени  $t_0$ :

$$\int \prod_{\alpha=1}^N d\bar{x}_\alpha D_N(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N; \bar{t}) \dots = \int \prod_{\alpha=1}^N dx_\alpha^0 D_N(x_1^0, \dots, x_N^0; t_0) \dots \quad (6.78)$$

Выбирая начальный момент времени  $t_0$  достаточно удаленным от рассматриваемых моментов времени  $t$  и  $t'$ , можно воспользоваться

принципом ослабления корреляций. В соответствии с (1.67) в пределе  $t_0 \rightarrow -\infty$  можно полностью пренебречь корреляциями в функции распределения Лиувилля<sup>3</sup>, т. е. сделать замену

$$D_N(x_1^0, \dots, x_N^0; t_0) \xrightarrow{t_0 \rightarrow -\infty} D_N^0(x_1^0, \dots, x_N^0) \rightarrow \prod_{\alpha=1}^N f_0(\mathbf{v}_\alpha^0). \quad (6.79)$$

При этом процедура усреднения в правой части (6.77) формально совпадает с процедурой усреднения в отсутствие взаимодействия между частицами. Поэтому под усреднением в (6.77) следует понимать

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{r-r', t-t'} \equiv \int \prod_{\alpha=1}^N (d\mathbf{v}_\alpha^0 f_0(\mathbf{v}_\alpha^0)) \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \delta f'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t'). \quad (6.80)$$

Спектральное представление этой функции имеет вид

$$\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} \equiv \int \prod_{\alpha=1}^N (d\mathbf{v}_\alpha^0 f_0(\mathbf{v}_\alpha^0)) \delta f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) \delta f'_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}'). \quad (6.81)$$

Используя соотношение (6.76), получаем

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 - \frac{4\pi e}{mk^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta f'(\mathbf{v}') \rho \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 - \frac{4\pi e'}{m'k^2 \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \langle \delta f(\mathbf{v}) \rho \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \times \\ &\times \mathbf{k} \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} + \frac{16\pi^2 ee'}{mm'k^4 |\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \times \\ &\times \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \mathbf{k} \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \end{aligned} \quad (6.82)$$

где  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ ,  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \rho \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  и  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  — спектральные представления корреляционных функций для флуктуаций функций распределения и плотности заряда в системе невзаимодействующих частиц. Используя явный вид указанных спектральных представлений, определяемых формулами (6.32), (6.37) и (6.49), окончательно находим

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 2\pi \left\{ \delta' \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) - \right. \\ &\left. - \frac{4\pi ee'}{mk^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') f'_0(\mathbf{v}') - \right. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> При учете коллективных свойств плазмы следовало бы считать, что функция распределения Лиувилля зависит не только от динамических переменных  $N$  частиц, но и от колебательных степеней свободы плазмы. В действительности, однако, принцип ослабления корреляций предполагает, что при  $t_0 \rightarrow -\infty$  возбуждением коллективных степеней свободы можно пренебречь.

$$\begin{aligned}
& - \frac{4\pi e e'}{m' k^2 \varepsilon^*(\omega, k)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} + \\
& + \frac{16\pi^2 e e'}{m m' k^4 |\varepsilon(\omega, k)|^2} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \times \\
& \times \mathbf{k} \frac{\partial f_0'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \sum e^{n^2} \int d\mathbf{v}'' \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'') f_0''(\mathbf{v}'') \}. \quad (6.83)
\end{aligned}$$

Это соотношение дает представление спектрального распределения флуктуаций функций распределения частиц в плазме с учетом кулоновского взаимодействия между частицами в явном виде. Заметим, что три последних слагаемых в (6.83) непосредственно обусловлены кулоновским взаимодействием, которое приводит не только к корреляции между флуктуациями функции распределения частиц одного сорта, но и к корреляциям между флуктуациями функций распределения частиц различных сортов в плазме. Соотношение (6.83) получено в линейном приближении.

С помощью соотношения (6.83) можно получить явные выражения для спектральных представлений различных корреляционных функций. Интегрируя (6.83) по скоростям, нетрудно найти корреляционные функции для флуктуаций плотностей частиц одного и разных сортов в плазме. Спектральное распределение для флуктуаций плотности частиц определенного сорта описывается выражением

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{|1 + \Sigma' \kappa'(\omega, \mathbf{k})|^2 \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 + |\varkappa(\omega, \mathbf{k})|^2 \Sigma' \langle \delta n'^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (6.84)$$

Здесь и в дальнейшем введены следующие обозначения:  $\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  — спектральное распределение для флуктуаций плотности частиц выделенного сорта в отсутствие взаимодействия между частицами,

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 \equiv 2\pi \int d\mathbf{v} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}), \quad (6.85)$$

$\langle \delta n'^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  — то же для частиц других сортов,  $\varkappa(\omega, \mathbf{k})$  и  $\varkappa'(\omega, \mathbf{k})$  — парциальные составляющие линейной восприимчивости плазмы (2.16);  $\Sigma'$  означает суммирование по всем сортам частиц плазмы, за исключением выделенного.

Аналогично находим спектральное распределение для флуктуаций плотностей частиц разных сортов в плазме:

$$\begin{aligned}
& \langle \delta n \delta n' \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \\
& = \frac{(\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - \varkappa(\omega, \mathbf{k})) \varkappa'^*(\omega, \mathbf{k}) \langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 + (\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) - \varkappa'(\omega, \mathbf{k}))^* \varkappa(\omega, \mathbf{k}) \langle \delta n'^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (6.86)
\end{aligned}$$

Напомним, что корреляция между флуктуациями плотностей частиц разных сортов в плазме обусловлена кулоновским взаимодействием между частицами.

Спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в плазме определяется выражением

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (6.87)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$  — спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в системе невзаимодействующих частиц, которое непосредственно выражается через спектральные распределения флуктуаций плотностей отдельных компонент,  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = \Sigma e^2 \langle \delta n^2 \rangle_{k\omega}^0$ . Множитель  $\frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}$  в правой части (6.87) описывает эффект экранирования заряда, обусловленный самосогласованным кулоновским взаимодействием, вследствие которого в спектре флуктуаций (6.87) возникают дополнительные максимумы при частотах, совпадающих с частотами собственных колебаний плазмы. Используя соотношения (6.75) и проводя усреднение в соответствии с (6.80), получаем следующее выражение для спектрального распределения флуктуаций электрического поля в плазме:

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (6.88)$$

Заметим, что функция  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  непосредственно определяет спектральное распределение энергии флуктуационного поля в плазме. Так же, как и в спектре флуктуаций плотности заряда (6.87), в спектре флуктуаций поля (6.88) кроме широкого максимума в области малых частот, связанного со случайным движением отдельных заряженных частиц, возникают резкие максимумы при частотах, совпадающих с частотами собственных колебаний плазмы. Эти дополнительные максимумы обусловлены коллективными флуктуациями, т. е. случайными собственными колебаниями плазмы.

Спектральная корреляционная функция для флуктуаций поля и флуктуаций функции распределения электронов имеет вид

$$\langle E \delta f(\mathbf{v}) \rangle_{k\omega} = -\frac{4\pi i}{k} \frac{\langle \rho \delta f(\mathbf{v}) \rangle_{k\omega}^0}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} + i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \frac{1}{k} \mathbf{k} \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \langle E^2 \rangle_{k\omega}. \quad (6.89)$$

Если распределения частиц в плазме максвелловские (в случае так называемой неизотермической плазмы распределения для разных компонент могут характеризоваться различными температурами), то величины  $\langle \delta n^2 \rangle_{k\omega}^0$  и  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$  непосредственно выражаются через мнимые части парциальных восприимчивостей плазмы и температуры отдельных компонент плазмы:

$$\langle \delta n^2_{(e,i)} \rangle_{k\omega}^0 = \frac{k^2}{2\pi e^2 \omega} T_{e,i} \text{Im } \chi^{(e,i)}(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.90)$$

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = \frac{k^2}{2\pi \omega} \{ T_e \text{Im } \chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k}) + T_i \text{Im } \chi^{(i)}(\omega, \mathbf{k}) \}. \quad (6.91)$$

Поэтому спектральные распределения флуктуаций (6.84), (6.86), (6.87) и (6.89) полностью определяются заданием электронной и ионной восприимчивостей  $\chi^{(e)}(\omega, \mathbf{k})$  и  $\chi^{(i)}(\omega, \mathbf{k})$  и температур  $T_e$  и  $T_i$ . В случае равновесной плазмы величина  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  выражается через мнимую часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  и температуру плазмы  $T$ :

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = \frac{k^2}{2\pi\omega} T \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.92)$$

Следовательно, спектральные распределения флуктуаций плотности заряда и электрического поля в равновесной плазме  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  и  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  полностью определяются заданием диэлектрической проницаемости и температуры:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{2\pi} \frac{T}{\omega} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (6.93)$$

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi \frac{T}{\omega} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (6.94)$$

Формулы (6.93) и (6.94) представляют собой обобщение флуктуационно-диссипативного соотношения Найквиста, определяющего спектр флуктуаций в равновесных системах [164]. Заметим, что формулу (6.94) нетрудно получить путем непосредственного сопоставления корреляционной функции для флуктуаций поля с величиной средней энергии, поглощаемой системой вследствие диссипации.

Используя соотношение Крамерса — Кронига, спектральные распределения (6.93) и (6.94) в общем виде можно проинтегрировать по частотам. Таким образом, получим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{4\pi} T \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon(0, \mathbf{k})} \right\}, \quad (6.95)$$

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 4\pi T \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon(0, \mathbf{k})} \right\}. \quad (6.96)$$

На рис. 5 представлено спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в равновесной плазме  $I(z) \equiv \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} / 2\pi \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}}$  при различных значениях параметра  $a^2 k^2$ .

При выводе формул для спектральных распределений флуктуаций (6.84), (6.86), (6.87) и (6.88) предполагалось, что внешние поля в плазме отсутствуют. Однако эти формулы применимы и для плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле. В этом случае в указанных формулах следует воспользоваться выражениями (6.54) и (6.56) для спектральных

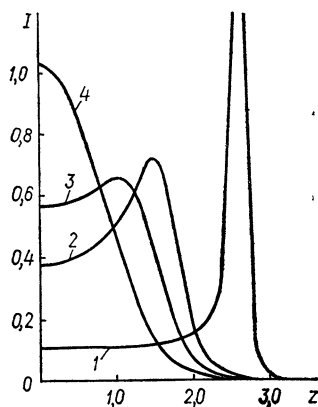


Рис. 5. Спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в равновесной плазме при  $a^2 k^2 = 0,1$  (1);  $0,5$  (2);  $1$  (3);  $10$  (4).



распределений  $\langle \delta n^2 \rangle_{k\omega}^0$  и  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$  и использовать соответствующие выражения для восприимчивостей магнитоактивной плазмы [96].

Проведенное рассмотрение флуктуаций в плазме нетрудно обобщить на случай учета произвольного электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами в плазме. В этом более общем случае микроскопическая плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  определяется системой уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (6.97)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (6.98)$$

где

$$\mathbf{j} = \Sigma e \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \mathcal{F}. \quad (6.99)$$

Представляя микроскопическую плотность  $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , так же как и в продольном случае, в виде

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

где  $\mathcal{F}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — микроскопическая плотность в отсутствие взаимодействия между частицами, для величины  $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  взамен (6.71) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k\omega}(\mathbf{v}) = & -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - k\mathbf{v} + i0} \left\{ \left( \mathbf{E}_{k\omega} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{k\omega}]] \right) \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} + \right. \\ & + \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{\omega'} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}', \mathbf{E}_{\mathbf{k}'\omega'}]] \right) \times \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0(\mathbf{v}) + \tilde{f}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}(\mathbf{v})) \right\}, \quad (6.100) \end{aligned}$$

откуда в линейном приближении находим

$$\tilde{f}_{k\omega}(\mathbf{v}) = -i \frac{e}{m} \frac{1}{\omega - k\mathbf{v} + i0} \left( \mathbf{E}_{k\omega} + \frac{1}{\omega} [\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{E}_{k\omega}]] \right) \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}}. \quad (6.101)$$

Подставляя это выражение в (6.98) и (6.99), нетрудно получить следующее уравнение, определяющее напряженность флуктуационного электрического поля:

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i^0(\omega, \mathbf{k}), \quad (6.102)$$

где

$$\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) + \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) \eta^2, \quad (6.103)$$

$\epsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы;  $j_i^0(\omega, \mathbf{k})$  — компонента Фурье плотности флуктуационного тока, обусловленного случайным движением отдельных частиц плазмы,

$$j_{k\omega}^0 = \Sigma e \int d\mathbf{v} \mathbf{v} \delta f_{k\omega}^0(\mathbf{v}). \quad (6.104)$$

Вводя тензор, обратный (6.103), решение уравнения (6.102) записываем в виде

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi i}{\omega} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) j_j^0(\omega, \mathbf{k}). \quad (6.105)$$

Подставляя это выражение в (6.101) и используя соотношение (6.68), для флуктуаций функции распределения частиц в плазме с учетом электромагнитного взаимодействия между частицами получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta f_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{v}) &= \delta f_{\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v}) - \frac{4\pi e}{m\omega} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v_i}{\omega} \right] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_k} j_j^0(\omega, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (6.106)$$

Умножая левую и правую части полученного равенства на комплексно-сопряженные выражения и выполняя усреднение в соответствии с (6.81), для спектрального распределения флуктуаций функций распределения получаем следующую общую формулу:

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 - \frac{4\pi e}{m\omega} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v_i}{\omega} \right] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_k} \langle \delta f'(\mathbf{v}') j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 - \\ &- \frac{4\pi e'}{m'\omega} \Lambda_{ij}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v'_i}{\omega} \right] \times \\ &\times \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial v'_k} \langle \delta f(\mathbf{v}) j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 + \frac{16\pi^2 e e'}{m m' \omega^2} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{i'j'}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v_i}{\omega} \right] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_k} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \times \\ &\times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta_{i'k'} + \frac{k_{k'} v'_{i'}}{\omega} \right] \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial v'_{k'}} \langle j_j j_{j'} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \end{aligned} \quad (6.107)$$

где спектральные распределения  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ ,  $\langle j_j j_{j'} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  и  $\langle \delta f \times \mathbf{v} j_i \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ , определены согласно формулам (6.32), (6.38) и (6.40). Воспользовавшись этими формулами, переписываем спектральное распределение частиц в явном виде:

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 2\pi \left\{ \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) - \frac{4\pi e e'}{m\omega} \times \right. \\ &\times \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v_i}{\omega} \right] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_k} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) v'_j \delta(\omega - \\ &- \mathbf{k}\mathbf{v}') f'_0(\mathbf{v}') - \frac{4\pi e e'}{m'\omega} \Lambda_{ij}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) v_j \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v'_i}{\omega} \right] \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial v'_k} + \frac{16\pi^2 e e'}{m m' \omega^2} \Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{i'j'}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \times \\
& \times \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega} \right) \delta_{ik} + \frac{k_k v_i}{\omega} \right] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial v_k} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \times \\
& \quad \times \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega} \right) \delta_{i'k'} + \frac{k_{k'} v'_{i'}}{\omega} \right] \times \\
& \quad \times \frac{\partial f'_0(\mathbf{v}')}{\partial v'_{k'}} \sum e^{n^2} \int d\mathbf{v}'' v''_j v''_{j'} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'') f'_0(\mathbf{v}''). \quad (6.108)
\end{aligned}$$

Обозначим парциальную составляющую плотности тока, связанную с частицами определенного сорта, через  $j^\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ). С помощью формулы (6.107) (или (6.108)) нетрудно получить явные выражения для спектральных распределений флуктуаций плотностей парциальных токов и полного тока, а также напряженности поля в плазме <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}
\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \sum_\gamma (\delta_{i\gamma} \delta_{\alpha\gamma} - \varkappa_{ik}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{ki}^{-1}(\omega, \mathbf{k})) \times \\
& \times (\delta_{j\gamma} \delta_{\beta\gamma} - \varkappa_{jl}^\beta(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}))^* \langle j_l^\gamma j_l^\gamma \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (6.109)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle j_i^\alpha j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \sum_\beta (\delta_{i\beta} \delta_{\alpha\beta} - \varkappa_{ik}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{ki}^{-1}(\omega, \mathbf{k})) \times \\
& \times (\delta_{j\beta} - \varkappa_{jl}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}))^* \langle j_l^\beta j_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (6.110)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= (\delta_{i\beta} - \varkappa_{ik}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{ki}^{-1}(\omega, \mathbf{k})) (\delta_{j\beta} - \varkappa_{jl}(\omega, \mathbf{k}) \times \\
& \times \Lambda_{jl}^{-1}(\omega, \mathbf{k}))^* \langle j_l j_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (6.111)
\end{aligned}$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \Lambda_{ik}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jl}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \langle j_k j_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (6.112)$$

В квазиравновесной (неизотермической) плазме корреляционные функции для флуктуаций невзаимодействующих частиц выражаются через парциальные составляющие электрической восприимчивости плазмы и температуры компонент:

$$\langle j_i^\alpha j_j^\alpha \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 = -i\omega T_\alpha \{ \varkappa_{ij}^\alpha(\omega, \mathbf{k}) - \varkappa_{ji}^{*\alpha}(\omega, \mathbf{k}) \}. \quad (6.113)$$

В равновесной плазме спектральные распределения (6.111) и (6.112) выражаются через тензор диэлектрической проницаемости плазмы  $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  и температуру  $T$ .

Формулами (6.109) — (6.112) полностью определяются флуктуации электродинамических величин в плазме. Эти формулы применимы также для описания флуктуаций и в магнитоактивной плазме, для этого следует только воспользоваться соответствующими

<sup>4</sup> Компактный вывод спектральных распределений для электромагнитных флуктуаций предложен также в работе [58].

выражениями для корреляционных функций свободных частиц и парциальных составляющих электрической восприимчивости плазмы.

В заключение приведем явные выражения для спектральных распределений флуктуаций различных электродинамических величин с учетом электромагнитного взаимодействия между частицами в случае изотропной плазмы. Так как в изотропной плазме поле разделяется на продольное и поперечное, в линейном приближении взаимно независимые, то независимыми оказываются и соответствующие флуктуации. Вводя продольную и поперечную диэлектрические проницаемости плазмы  $\varepsilon_l(\omega, k)$  и  $\varepsilon_t(\omega, k)$ , в обратном тензоре  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$  (так же как и в тензоре  $\Lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ ) можно выделить продольную и поперечную части:

$$\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1}{\varepsilon_l(\omega, k)} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2}. \quad (6.114)$$

Используя такую структуру тензора  $\Lambda_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})$ , в корреляционной функции (6.108) выделяем части, связанные с продольным кулоновским и поперечным электромагнитным взаимодействиями между частицами:

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 2\pi \delta' \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) + \\ &+ \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^l + \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^t. \end{aligned} \quad (6.115)$$

При этом продольная часть в сумме с корреляционной функцией для свободных частиц соответствует выражению (6.83) (следует помнить, что  $\varepsilon_l(\omega, k) = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ ), а поперечная записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f'(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}\omega}^t &= \frac{8\pi e e'}{k^2 \omega^2} \left\{ \frac{1}{m} \frac{1}{\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}']] \times \right. \\ &\times \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') f_0'(\mathbf{v}') + \frac{1}{m'} \frac{1}{\varepsilon_t^*(\omega, k) - \eta^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}) \times \\ &\times \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}']] \frac{\partial f_0'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{4\pi}{mm'k^2} \frac{1}{|\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2|^2} \times \\ &\times \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' - i0} \sum e^{n^2} \int d\mathbf{v}'' \left( [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}']] \frac{\partial f_0(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right) \times \\ &\times \left. \left( [\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}']] \frac{\partial f_0'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}'') f_0''(\mathbf{v}'') \right\}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

С помощью этой формулы нетрудно найти спектральные распределения для флуктуаций плотности поперечного тока, а также поперечных электрического и магнитного полей в плазме:

$$\langle j_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{(1 - \eta^2)^2}{|\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2|^2} \langle j_i^{2,0} \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (6.117)$$

$$\langle E_i^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{1}{|\varepsilon_i(\omega, k) - \eta^2|^2} \langle j_i^2 \rangle_{k\omega}^0, \quad (6.118)$$

$$\langle B^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{\eta^2}{|\varepsilon_i(\omega, k) - \eta^2|^2} \langle j_i^2 \rangle_{k\omega}^0, \quad (6.119)$$

где

$$\langle j_i^2 \rangle_{k\omega}^0 \equiv \sum \frac{2\pi e^2}{k^2} \int dv [kv]^2 \delta(\omega - kv) f_0(v). \quad (6.120)$$

Заметим, что в спектрах поперечных флуктуаций имеются максимумы при частотах, соответствующих собственным частотам поперечных колебаний (4.40).

#### 4. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ И ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕМПЕРАТУРА (ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ)

Спектральные распределения для флуктуаций поля и других электродинамических величин в области прозрачности плазмы характеризуются резкими дельтаобразными максимумами при частотах  $\omega$  и волновых векторах  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному соотношению  $\text{Re } \Lambda(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . Исследуем структуру спектральных распределений вблизи таких максимумов, ограничиваясь вначале рассмотрением случая потенциального поля. Согласно (6.89) спектральное распределение флуктуаций электрического поля  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  в линейном приближении полностью определяется заданием диэлектрической проницаемости плазмы  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  и спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$ :

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (6.121)$$

В области малых частот спектральное распределение  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$  характеризуется широким максимумом, форма которого зависит от вида функций распределения частиц в плазме. Так как  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  пропорционально  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$ , то спектральное распределение  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  также характеризуется широким максимумом в области малых частот (область некогерентных флуктуаций). Кроме этого максимума, обусловленного случайным движением отдельных частиц, в спектре флуктуаций электрического поля в плазме существуют дополнительные максимумы, связанные с флуктуационными колебаниями электрического поля на собственных частотах плазмы (коллективные или когерентные флуктуации). Заметим, что в случае некогерентных флуктуаций определенная связь между частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  отсутствует, в то же время для коллективных флуктуационных колебаний частота  $\omega$  и волновой вектор  $\mathbf{k}$  связаны обычным дисперсионным соотношением.

В линейном приближении частоты собственных продольных колебаний плазмы  $\omega_k$  определяются из условия  $\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ . Если  $|\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})| \ll |\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})|$  (область прозрачности плазмы), то собственные колебания характеризуются малым затуханием,  $\gamma_k \ll \omega_k$ . Используя (6.121), нетрудно показать, что спектральное распределение флуктуаций электрического поля в области собственных частот описывается выражением

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^3}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})|} \delta\{\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\}. \quad (6.122)$$

Спектральные распределения флуктуаций плотностей заряда и частиц в области прозрачности плазмы непосредственно выражаются через спектральное распределение флуктуаций электрического поля:

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E^2 \rangle_{k\omega}, \quad (6.123)$$

$$\langle \delta n_e^{(e)} \rangle_{k\omega} = \frac{k^2}{e^2} (\kappa^{(e)}(\omega, \mathbf{k}))^2 \langle E^2 \rangle_{k\omega}, \quad (6.124)$$

где  $\kappa^{(e)}(\omega, \mathbf{k})$  — парциальная составляющая электрической восприимчивости плазмы.

Формулы (6.122) — (6.124) справедливы как для равновесной, так и для неравновесной плазмы.

В случае равновесной плазмы величина  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$  выражается через температуру  $T$  и мнимую часть диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  согласно (6.92), поэтому

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = 8\pi^2 \frac{T}{|\omega|} \delta\{\text{Re } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\}, \quad (6.125)$$

или

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \pi I_k \{\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)\}, \quad (6.126)$$

где  $I_k$  — интенсивность флуктуационных колебаний, связанная с температурой плазмы  $T$  соотношением

$$I_k = 8\pi \frac{T}{\omega_k \varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k \equiv \frac{\partial \text{Re } \varepsilon(\omega_k, \mathbf{k})}{\partial \omega_k}. \quad (6.127)$$

В равновесной плазме возможны слабозатухающие продольные ленгмюровские колебания с частотами  $\omega_k = \sqrt{\Omega^2 + k^2 s^2}$ . Формула (6.126) описывает спектральное распределение ленгмюровских флуктуаций электрического поля, при этом  $I_k = 4\pi T$ . Средняя энергия флуктуационных ленгмюровских колебаний равна

$$\frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle_k = \frac{1}{2} T. \quad (6.128)$$

Относительный вес коллективных ленгмюровских флуктуаций для равновесной плазмы в общем спектре составляет величину порядка  $a^2 k^2$ .

В случае неравновесной плазмы соотношение (6.92) не выполняется. Однако спектральное распределение флуктуаций электрического поля по-прежнему можно описывать формулой вида (6.126):

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi I_{\mathbf{k}}(\omega) \{ \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \}, \quad (6.129)$$

если интенсивность флуктуаций  $I_{\mathbf{k}}(\omega)$  определить посредством равенства

$$I_{\mathbf{k}}(\omega) \equiv 8\pi \frac{\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})}{\omega \frac{\partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega}}, \quad (6.130)$$

где

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{2\pi |\omega|}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})|}. \quad (6.131)$$

В равновесной плазме величина  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  совпадает с температурой плазмы  $T$ . В общем случае величина  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  может рассматриваться как эффективная температура, характеризующая среднее значение квадрата амплитуды флуктуационных колебаний электрического поля в плазме. Заметим, что эффективная температура в общем случае зависит от знака частоты, поэтому интенсивности флуктуационных колебаний, отвечающие двум слагаемым в (6.129), вообще говоря, различны. Эффективная температура удовлетворяет соотношению  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{T}(-\omega, -\mathbf{k})$ .

Для неизотермической плазмы эффективная температура выражается через температуры отдельных компонент и парциальные восприимчивости

$$T(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\sum_{\alpha} T_{\alpha} \operatorname{Im} \kappa^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k})}{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \quad (6.132)$$

(суммирование производится по различным сортам частиц). В неизотермической плазме помимо высокочастотных ленгмюровских флуктуаций электрического поля возможны также низкочастотные флуктуации с частотами  $\omega_{\mathbf{k}} = k v_s$ , где  $v_s$  — скорость неизотермического звука. Средняя энергия низкочастотных звуковых флуктуаций составляет величину порядка  $a^2 k^2$  от величины энергии высокочастотных ленгмюровских флуктуаций.

В неравновесной плазме эффективная температура  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  может принимать большие значения, особенно если состояние плазмы находится вблизи границы области кинетической устойчивости (определяемой условием обращения мнимой части диэлектрической проницаемости плазмы в нуль). Согласно (6.129)  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow \infty$  при  $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow 0$ . Это означает, что интенсивность флуктуационных колебаний вблизи границы области кинетической устойчивости зна-

чительно возрастает по сравнению с тепловым уровнем и на границе этой области в линейном приближении обращается в бесконечность (критические флуктуации) [14, 96, 153, 155]. Неограниченный рост интенсивности флуктуационных колебаний, очевидно, указывает на неудовлетворительность линейного приближения и на необходимость учета нелинейных эффектов при рассмотрении флуктуаций в неравновесной плазме.

Заметим, что вблизи границы области кинетической устойчивости плазмы большие значения могут принимать (в линейном приближении) также корреляционные функции высших порядков [91]. Покажем это на примере кубической корреляционной функции для флуктуаций электрического поля. Используя соотношение (6.75), нетрудно получить

$$\langle E^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'} = i \frac{64\pi^3}{kk' |k - k'|} \frac{\langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0}{\varepsilon(\omega, k) \varepsilon^*(\omega', k') \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} , \quad (6.133)$$

где  $\langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0$  определяется по (6.45). Вместо (6.133) введем корреляционную функцию для флуктуаций потенциала электрического поля  $\langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$ :

$$\langle E^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'} = ikk' |k - k'| \langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'} . \quad (6.134)$$

Ограничимся для простоты рассмотрением частного случая  $k' \parallel k$ . Кубическая корреляционная функция  $\langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0$  при этом сводится к квадратичной корреляционной функции  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$ :

$$\langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0 = 2\pi e \delta\left(\omega' - \frac{k'}{k}\omega\right) \langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 . \quad (6.135)$$

В результате  $\langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'} &= \frac{128\pi^4 e}{k^2 k'^2 (k - k')^2} \frac{1}{\varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} \times \\ &\times \delta\left(\omega' - \frac{k'}{k}\omega\right) \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{\varepsilon(\omega, k) \varepsilon^*(\omega', k')} . \end{aligned} \quad (6.136)$$

Пусть  $\omega' = \omega$ , тогда

$$\langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega} \rightarrow \frac{8\pi^2 e}{Ck\omega} \delta(k - k') \langle E^2 \rangle_{k\omega} , \quad (6.137)$$

где  $C = \lim_{q \rightarrow 0} q^2 \varepsilon(0, q)$ . Если  $k' = k$ , то

$$\langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k\omega} \rightarrow \frac{8\pi^2 e \omega^2}{C' k^4} \delta(\omega - \omega') \langle E^2 \rangle_{k\omega} , \quad (6.138)$$

где  $C' = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \Delta\omega^2 \varepsilon(\Delta\omega, 0)$ . Так как квадратичная корреляционная функция для поля  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  обращается в бесконечность при  $\text{Im } \varepsilon(\omega_k, k) \rightarrow 0$ , то кубическая корреляционная функция  $\langle \varphi^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$  также аномально возрастает вблизи границы области кинетической устойчивости плазмы.



Формулы (6.129) — (6.131) описывают флуктуации поля в плазме с произвольными неравновесными, но устойчивыми функциями распределения частиц. При этом средние направленные скорости частиц не обязательно должны равняться нулю, поэтому указанные формулы применимы и для описания флуктуаций в плазме, через которую проходит пучок частиц, а также в плазме с электронами, движущимися относительно ионов, если только скорость пучка (или скорость электронов) не превышает критическое значение, соответствующее возникновению неустойчивости. Рассмотрим более подробно критические флуктуации в случае, когда через плазму проходит компенсированный пучок заряженных частиц. Обозначим направленную скорость пучка через  $u$  и предположим, что частицы плазмы и пучка характеризуются максвелловскими распределениями с температурами  $T$  и  $T'$ . Для такой системы

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = V \sqrt{6\pi} \left\{ \sum \frac{e^2 n_0}{ks} e^{-z^2} + \sum \frac{e'^2 n'_0}{ks'} e^{-y^2} \right\}, \quad (6.139)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{1}{a^2 k^2} \{1 - \varphi(z) + i \sqrt{\pi} z e^{-z^2}\} + \\ + \sum \frac{1}{a'^2 k'^2} \{1 - \varphi(y) + i \sqrt{\pi} y e^{-y^2}\}, \end{aligned} \quad (6.140)$$

где  $z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega}{ks}$ ;  $y = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\omega - \mathbf{k}u}{ks'}$ ; штрихами отмечены величины, относящиеся к пучку, суммирование производится по различным сортам частиц плазмы и пучка.

В области прозрачности системы плазма — пучок спектральное распределение флуктуаций электрического поля определяется формулами (6.129) — (6.131). Если пренебречь тепловым движением ионов и считать выполненным условие  $(\omega - \mathbf{k}u)^2 \ll k^2 s'^2$ , выражение для эффективной температуры можно представить в виде

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{a_k}{1 - \mathbf{k}u/\tilde{u}} T, \quad (6.141)$$

где

$$a_k = \frac{1 + (n'_0/n_0) (T/T')^{\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{k}}}{1 + (n'_0/n_0) (T/T')^{\frac{3}{2}} e^{\frac{z^2}{k}}}, \quad (6.142)$$

$$\tilde{u} = \frac{\omega_k}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{z^2}{k}} \right\}. \quad (6.143)$$

Величина  $\tilde{u}$  играет роль критической скорости пучка, при достижении которой состояние системы плазма — пучок становится неустойчивым.

Ограничимся рассмотрением пучка малой плотности ( $n_0' \ll n_0$ ). В этом случае влиянием пучка на дисперсию волн в плазме можно пренебречь. Однако влияние пучка будет существенным образом сказываться на эффективной температуре флуктуационных колебаний. В высокочастотной области при рассмотрении дисперсии волн можно пренебречь также тепловым движением частиц. Спектральное распределение для ленгмюровских флуктуаций поля имеет вид

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \{ \delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) \}, \quad (6.144)$$

где эффективная температура определяется выражением (6.141) при  $z_k^2 = \frac{1}{2a^2 k^2} + \frac{3}{2}$ . Критическая скорость при этом оказывается порядка тепловой скорости электронов в покоящейся плазме:

$$\tilde{u} = \frac{\Omega}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n_0'} \left( \frac{T'}{T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2a^2 k^2} - \frac{3}{2}} \right\}, \quad (6.145)$$

средняя энергия флуктуационных ленгмюровских колебаний равна

$$\frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4} \{ \tilde{T}(\Omega, \mathbf{k}) + \tilde{T}(-\Omega, \mathbf{k}) \}. \quad (6.146)$$

(при скоростях пучка, близких к  $\tilde{u}$ , эта энергия может значительно превышать тепловую).

В двухтемпературной плазме с горячими электронами и холодными ионами возможны также низкочастотные флуктуационные колебания:

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) a^2 k^2 \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}, \quad (6.147)$$

где  $v_s$  — скорость неизотермического звука;

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{T}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\tilde{u}}, \quad (6.148)$$

$$\tilde{u} = \frac{n_0}{n_0'} \left( \frac{T'}{T} \right)^{\frac{3}{2}} v_s. \quad (6.149)$$

В отличие от высокочастотной, в низкочастотной области величина  $\tilde{u}$  может быть как больше, так и меньше тепловой скорости электронов. Средняя энергия флуктуационных звуковых колебаний равна

$$\frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{a^2 k^2}{4} \{ \tilde{T}(kv_s, \mathbf{k}) + \tilde{T}(-kv_s, \mathbf{k}) \}. \quad (6.150)$$

В соответствии с (6.123) и (6.124) спектральные распределения флуктуаций плотности заряда и плотности частиц в высокочастотной области записываются в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{1}{4} k^2 \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \{ \delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) \}, \quad (6.151)$$

$$\langle \delta n^2 \rangle_{k\omega} = \frac{k^2}{4e^2} \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \{ \delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) \}, \quad (6.152)$$

где  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  определяется выражением (6.141). В низкочастотной области соответственно

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{a^2 k^4}{4} \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}, \quad (6.153)$$

$$\langle \delta n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi n_0 \frac{\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})}{T} \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}. \quad (6.154)$$

Формулы (6.144), (6.147) и (6.151) — (6.154) получены на основе линейной теории и применимы только к флуктуациям с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющими условию  $u < \tilde{u}(\mathbf{k})$ . При  $u > \tilde{u}(\mathbf{k})$  флуктуационные колебания приводят к неустойчивости плазмы.

В качестве другого примера критических флуктуаций рассмотрим коллективные флуктуации в плазме с анизотропным распределением скоростей, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$  [94]. Обозначим температуру, характеризующую распределение составляющих скорости в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, через  $T_{\perp}$ ; температуру для распределения составляющей скорости вдоль поля — через  $T_{\parallel}$ . Диэлектрическая проницаемость такой плазмы в случае потенциального поля определяется выражением (3.16). Предположим, что плотность плазмы недостаточно велика (при  $\Omega < \omega_B$  плазма гидродинамически устойчива [69]). В такой плазме возможны слабозатухающие колебания, если волновой вектор почти перпендикулярен направлению магнитного поля. Собственные частоты определяются из условия обращения в нуль вещественной части выражения (3.16):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\mathbf{k}} &= \Omega \sqrt{\frac{a_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 I_0(\beta_{\perp}) e^{-\beta_{\perp}}}{1 + a_{\perp}^2 k^2 - I_0(\beta_{\perp}) e^{-\beta_{\perp}}}}, \\ \gamma_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2 e^{-\beta_{\perp}}}{(1 + a_{\perp}^2 k^2 - I_0(\beta_{\perp}) e^{-\beta_{\perp}}) |k_{\parallel}| s_{\parallel}} \times \\ &\times \sum_n \left( 1 - \frac{n\omega_B}{\omega_{\mathbf{k}}} \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right) I_n(\beta_{\perp}) e^{-\frac{(\omega_{\mathbf{k}} - n\omega_B)^2}{2k_{\parallel}^2 s_{\parallel}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.155)$$

Рассмотрим случай, когда существуют собственные колебания с частотами, близкими (но несколько меньшими) к электронной циклотронной частоте. Предположим, что  $\Omega > \frac{1}{2} \omega_B$ , и выберем собственную частоту  $\omega_{\mathbf{k}}$  в интервале  $\frac{1}{2} \omega_B < \omega_{\mathbf{k}} < \omega_B$ . Плазма будет устойчива ( $\gamma_{\mathbf{k}} > 0$ ) только при выполнении условия

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} < \frac{\omega_B}{\omega_B - \omega_{\mathbf{k}}}. \quad (6.156)$$

(В случае выполнения обратного неравенства плазма оказывается неустойчивой,  $\gamma_{\mathbf{k}} < 0$ .) Спектральное распределение флуктуаций

электрического поля вблизи собственной частоты  $\omega_k$  описывается выражением

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \pi I_k(\omega) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}, \quad (6.157)$$

где

$$I_k(\omega) \equiv \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{1}{\left| \frac{\partial}{\partial \omega_k} \operatorname{Re} \varepsilon(\omega_k, \mathbf{k}) \right|} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\operatorname{Im} \varepsilon(\omega_k, \mathbf{k})|},$$

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^2 n_0}{|k_{\parallel}| s_{\parallel}} e^{-\beta_{\perp}} \sum_n I_n(\beta_{\perp}) e^{-z_n^2}.$$

Используя для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  выражение (3.16), получаем

$$I_k(\omega) = 16\pi^2 e^2 n_0 a_{\parallel}^2 \frac{a_{\perp}^2 k^2}{1 + a_{\perp}^2 k^2 - I_0(\beta_{\perp}) e^{-\beta_{\perp}}} \frac{1}{\left| 1 - \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \frac{\omega_B}{\omega_k} \right|}. \quad (6.158)$$

Граница области кинетической устойчивости анизотропной плазмы определяется из условия

$$T_{\perp}/T_{\parallel} = \omega_B/(\omega_B - \omega_k).$$

Если выполняется условие (6.156), то плазма устойчива и спектральное распределение флуктуаций поля описывается формулой (6.157). По мере уменьшения продольной температуры состояние системы приближается к границе области кинетической устойчивости, при этом интенсивность флуктуационных колебаний возрастает и на границе области устойчивости в линейном приближении обращается в бесконечность (критические флуктуации анизотропной плазмы).

## 5. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Рассмотрим теперь коллективные флуктуации в плазме, отказавшись от допущения о потенциальном характере поля. Спектральное распределение флуктуаций электрического поля в общем случае описывается формулой

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \Lambda_{ik}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \Lambda_{jl}^{*-1}(\omega, \mathbf{k}) \langle j_{kj} \rangle_{k\omega}^0. \quad (6.159)$$

Так как в области прозрачности плазмы  $\operatorname{Im} \Lambda \ll \operatorname{Re} \Lambda$ , то

$$\Lambda_{ik}^{-1} \Lambda_{jl}^{*-1} \rightarrow \pi \frac{\lambda_{ik} \lambda_{jl}^*}{|\operatorname{Im} \Lambda|} \delta(\Lambda). \quad (6.160)$$

Следовательно, спектральное распределение флуктуаций электрического поля (6.159) характеризуется резкими дельтаобразными максимумами при частотах собственных колебаний плазмы.

Замечая, далее, что при частотах  $\omega$  и волновых векторах  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному условию, справедливо соотношение

$$\lambda_{ij} = e_i e_j^* \text{Sp } \lambda \quad (6.161)$$

( $\mathbf{e}$  — вектор поляризации соответствующих колебаний), а также учитывая, что

$$\frac{\text{Sp } \lambda}{\omega} \text{Im } \Lambda > 0, \quad (6.162)$$

спектральное распределение коллективных флуктуаций электрического поля можно представить в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 e_i e_j^* \tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) \frac{|\text{Sp } \lambda(\omega, \mathbf{k})|}{|\omega|} \delta\{\Lambda(\omega, \mathbf{k})\}, \quad (6.163)$$

где

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi \frac{\text{Sp } \lambda(\omega, \mathbf{k})}{\omega \text{Im } \Lambda(\omega, \mathbf{k})} e_i^* e_j \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (6.164)$$

Поскольку

$$\text{Im } \Lambda = -\frac{i}{2} (e_{ij} - e_{ji}^*) e_i^* e_j \text{Sp } \lambda, \quad (6.165)$$

эффективную температуру (6.164) записываем в виде

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i}{\omega} \frac{e_i^* e_j \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{e_k^* e_l (e_{kl} - e_{lk}^*)}. \quad (6.166)$$

В неизотермической плазме

$$\tilde{T}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\sum e_i^* e_j (\kappa_{ij} - \kappa_{ji}^*) T}{\sum e_k^* e_l (\kappa_{kl} - \kappa_{lk}^*)}. \quad (6.167)$$

Отсюда непосредственно видно, что в равновесной плазме величина  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  совпадает с температурой плазмы. В неравновесной плазме эффективная температура  $\tilde{T}(\omega, \mathbf{k})$  может принимать большие значения. Если состояние плазмы приближается к границе области кинетической устойчивости, то  $\text{Im } \Lambda \rightarrow 0$  и эффективная температура (6.164) неограниченно возрастает [96].

Спектральные распределения флуктуаций парциальных токов в области прозрачности плазмы непосредственно выражаются через спектральное распределение флуктуаций электрического поля:

$$\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \omega^2 \kappa_{ik}^{(\alpha)}(\omega, \mathbf{k}) \kappa_{jl}^{(\beta)}(\omega, \mathbf{k}) \langle E_k E_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (6.168)$$

Заметим, что в области прозрачности плазмы спектральные распределения любых других величин также выражаются через спектральное распределение флуктуаций электрического поля.

В качестве примера приложения полученных общих формул рассмотрим флуктуации в неизотермической двухтемпературной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ . Так как в об-

ласти высоких частот основную роль в коллективных движениях плазмы играют электроны, то влиянием ионов можно пренебречь. Корреляционные функции для флуктуаций в высокочастотной области оказываются такими же, как и в равновесном случае с температурой, равной температуре электронов:

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 8\pi^2 e_i e_j^* T_e \frac{|\text{Sp } \lambda(\omega, \mathbf{k})|}{|\omega|} \delta\{\Lambda(\omega, \mathbf{k})\}. \quad (6.169)$$

Используя соотношение

$$\begin{aligned} & \delta\{\Lambda(\omega, \mathbf{k})\} = \\ & = \frac{1}{|\text{Sp } \lambda(\omega, \mathbf{k})|} \left\{ \frac{1}{|e|^2 - \frac{|\mathbf{k}e|^2}{k^2}} [\delta(\eta^2 - \eta_0^2) + \delta(\eta^2 - \eta_e^2)] + \delta(A) \right\}, \end{aligned} \quad (6.170)$$

спектральные распределения для флуктуаций поля, связанных с обыкновенными и необыкновенными волнами, записываем в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 8\pi^2 \frac{e_i e_j^*}{|e|^2 - \frac{|\mathbf{k}e|^2}{k^2}} \frac{T_e}{|\omega|} \delta(\eta^2 - \eta_{0,e}^2), \quad (6.171)$$

где векторы поляризации определяются выражением (4.55). Спектральное распределение для ленгмюровских флуктуаций описывается выражением

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 8\pi^2 \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{T_e}{|\omega|} \frac{\eta_L^2}{A_0} \delta(\eta^2 - \eta_L^2), \quad (6.172)$$

которое в пренебрежении дисперсией ленгмюровских волн принимает более простой вид:

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 \frac{k_i k_j}{k^2} T_e \frac{|\omega^2 - \omega_B^2|}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \{ & \delta(\omega - \omega_+) + \delta(\omega + \omega_+) + \\ & + \delta(\omega - \omega_-) + \delta(\omega + \omega_-) \}. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Спектральные распределения высокочастотных флуктуаций электрического поля в отсутствие внешнего магнитного поля описываются формулами (6.171) и (6.172) (или (6.173)), в которых величину  $B_0$  следует положить равной нулю.

В низкочастотной области флуктуации в неизотермической плазме существенно отличаются от флуктуаций в равновесной плазме. Как отмечалось выше, в неизотермической плазме в отсутствие внешнего магнитного поля возможны низкочастотные флуктуации, связанные с неизотермическими звуковыми колебаниями. Существование слабозатухающих магнитогидродинамических колебаний в неизотермической плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, приводит к появлению в низкочастотной области спектра флуктуаций дополнительных максимумов.

Флуктуации, связанные с альфвеновскими и магнитозвуковыми колебаниями в магнитоактивной неизотермической плазме, описываются общими формулами (6.163) и (6.167), в которых для определения электрических восприимчивостей следует воспользоваться соответствующими приближенными выражениями. Сохраняя наивысшие степени большого параметра  $\omega_{Bi}/\omega$ , можно получить для корреляционных функций при  $\omega \ll \omega_{Bi}$  простые формулы. Так, спектральное распределение флуктуаций электрического поля вблизи альфвеновских частот можно представить в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i e_j^* T_e \frac{v_A^2}{c^2} \{ \delta(\omega - kv_A \cos \vartheta) + \delta(\omega + kv_A \cos \vartheta) \}, \quad (6.174)$$

где вектор поляризации определяется выражением

$$\mathbf{e} = \left\{ 1, -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \operatorname{ctg}^2 \vartheta, -\frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} \frac{1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} \right\}. \quad (6.175)$$

Магнитозвуковые флуктуации электрического поля характеризуются спектральными распределениями

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i e_j^* T_e \frac{v_A^2}{c^2} \{ \delta(\omega - kv_A) + \delta(\omega + kv_A) \}, \quad (6.176)$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i e_j^* T_e a^2 k^2 \{ \delta(\omega - kv_s \cos \vartheta) + \delta(\omega + kv_s \cos \vartheta) \}, \quad (6.177)$$

где векторы поляризации для быстрой и медленной магнитозвуковых волн соответственно имеют вид

$$\mathbf{e} = \left\{ -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \frac{1}{\sin^2 \vartheta}, 1, -i \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\}, \quad (6.178)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ \sin \vartheta, -i \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Bi}}{\omega} \sin \vartheta \cos \vartheta, \cos \vartheta \right\}. \quad (6.179)$$

Заметим, что спектральные распределения для низкочастотных флуктуаций пропорциональны квадрату отношения фазовой скорости соответствующей волны к скорости света в вакууме.

Спектральные распределения для флуктуаций электрического поля в магнитоактивной плазме, через которую проходит скомпенсированный пучок заряженных частиц, а также в магнитоактивной плазме с электронами, движущимися относительно ионов, рассмотрены в работе [96].

## ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН НА ФЛУКТУАЦИИ В ПЛАЗМЕ

### 1. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ (ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ)

Как показано в предыдущей главе, спектральные распределения флуктуаций в плазме характеризуются широким максимумом в области малых частот, связанным со случайным движением отдельных частиц, и рядом резких максимумов при частотах, соответствующих собственным колебаниям плазмы. Эти резкие максимумы обусловлены коллективными флуктуациями, т. е. случайными собственными колебаниями плазмы. В термодинамически равновесной плазме уровень коллективных флуктуаций определяется температурой; этот уровень, однако, может очень сильно возрасти в неравновесной плазме, особенно если состояние последней находится вблизи области кинетической неустойчивости. В линейном приближении уровень коллективных флуктуаций вообще неограниченно увеличивается при приближении к границе области кинетической устойчивости плазмы. Неограниченный рост амплитуды флуктуационных колебаний, очевидно, указывает на неприменимость линейного приближения в данном случае. Поэтому при рассмотрении флуктуационных колебаний вблизи границы области кинетической устойчивости плазмы необходимо учитывать нелинейные эффекты [29, 51, 91]. В частности, нелинейные эффекты играют определяющую роль в установлении стационарного спектра флуктуаций в турбулентной плазме.

При исследовании флуктуаций в турбулентной плазме удобно использовать нелинейное уравнение для поля, непосредственно следующее из уравнений Максвелла и уравнения для микроскопической плотности, описывающего движение отдельных частиц в плазме. Ограничимся вначале рассмотрением простейшего случая, а именно: предположим, что электрическое поле потенциально, а плазма однородна и находится в стационарном состоянии. В качестве исходной системы уравнений при этом можно выбрать систему уравнений (6.61). Выделяя в микроскопической плотности флуктуационную часть в соответствии с (6.69) и решая уравнение (6.71) методом последовательных приближений, из второго уравнения системы (6.71) получаем следующее нелинейное уравнение для



флуктуационного поля в плазме [91]:

$$\begin{aligned}
 ik \{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} + \\
 + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} + \dots \\
 \dots + \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \delta\varepsilon(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') E_{\mathbf{k}'\omega'} + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \\ \omega', \mathbf{k}'}} \delta\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \\
 \omega', \mathbf{k}') E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}'\omega'} + \dots \} = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

(Мы ограничились учетом в (7.1) только линейных, квадратичных и кубических по напряженности флуктуационного поля слагаемых.) Под величиной  $\rho^0$  в правой части уравнения (7.1) следует понимать плотность заряда, связанную со случайным движением отдельных заряженных частиц в плазме (6.79). Случайное движение заряженных частиц приводит также к эффекту неоднородности диэлектрических свойств плазмы, обусловленному зависимостью диэлектрической проницаемости и нелинейных электрических восприимчивостей от функции распределения частиц. Учет этого эффекта приводит к появлению в левой части уравнения (7.1) двух последних слагаемых. Величины  $\delta\varepsilon(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  и  $\delta\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}')$  представляют собой изменения диэлектрической проницаемости и нелинейной электрической восприимчивости второго порядка, связанные со случайными флуктуациями функции распределения  $\delta f_{\mathbf{k}\omega}^0(\mathbf{v})$ . Эти изменения удобно представить в виде

$$\delta\varepsilon(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \equiv \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0, \quad (7.2)$$

$$\delta\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}') \equiv \Delta^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}') \delta f_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}', \omega_2-\omega'}^0, \quad (7.3)$$

где операторные величины  $\Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  и  $\Delta^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2, \omega', \mathbf{k}')$  определены равенствами

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 &\equiv \sum \frac{\Omega^2}{kk'} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\
 &\times \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0(\mathbf{v}), \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}') \delta f_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}', \omega_2-\omega'}^0 &\equiv -i \sum \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{k_1 | \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 | k'} \times \\
 &\times \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \times \\
 &\times \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}', \omega_2-\omega'}^0(\mathbf{v}). \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

(В принятом приближении изменением нелинейной восприимчивости  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$  в уравнении (7.1) можно пренебречь.)

Нелинейное уравнение (7.1) определяет флуктуационное поле в плазме  $E_{\mathbf{k}\omega}$ , среднее значение которого равно нулю. В линейном приближении для описания флуктуационного поля достаточно задать квадратичную корреляционную функцию  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ . Для описания флуктуационного поля с учетом нелинейного взаимодействия волн задания квадратичной корреляционной функции недостаточно, необходимо также задать корреляционные функции третьего и четвертого порядков  $\langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}$  и  $\langle E^4 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \mathbf{k}''\omega''}$ . В принятом приближении (в нелинейном уравнении учитываются слагаемые включительно до кубических по напряженности флуктуационного поля) последовательность корреляционных функций  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ ,  $\langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}$  и  $\langle E^4 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \mathbf{k}''\omega''}$  достаточна для описания флуктуационного поля. Определим корреляционные функции  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ ,  $\langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'}$  и  $\langle E^4 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k}'\omega'; \mathbf{k}''\omega''}$  так, чтобы они были связаны со средними значениями квадратичных, кубических и четверных произведений амплитуд напряженности поля следующим образом:

$$\langle E_{\mathbf{k}\omega} E_{\mathbf{k}'\omega'} \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (7.6)$$

$$\langle E_{\mathbf{k}\omega} E_{\mathbf{k}'\omega'} E_{\mathbf{k}''\omega''} \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega' + \omega'') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'') \times \\ \times \langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \omega'}, \quad (7.7)$$

$$\langle E_{\mathbf{k}\omega} E_{\mathbf{k}'\omega'} E_{\mathbf{k}''\omega''} E_{\mathbf{k}'''\omega'''} \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega' + \omega'' + \omega''') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \mathbf{k}''') \times \\ \times \{ (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}''\omega''} + (2\pi)^4 [\delta(\omega + \omega'') \times \\ \times \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'') + \delta(\omega' + \omega'') \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}'')] \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} + \\ + \langle E^4 \rangle_{\mathbf{k}\omega; \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \omega'; \mathbf{k} + \mathbf{k}' + \mathbf{k}'' + \omega' + \omega''} \}. \quad (7.8)$$

Для нахождения корреляционных функций флуктуационного поля в явном виде воспользуемся нелинейным уравнением (7.1), в котором слагаемые, связанные с флуктуационными изменениями диэлектрической проницаемости и нелинейной восприимчивости, перенесем в правую часть. С помощью последовательного перемножения левой и правой частей равенства (самых на себя) и последующего усреднения в соответствии с (6.80) нетрудно получить систему неоднородных интегральных уравнений, однозначно определяющую последовательность корреляционных функций для флуктуационного поля в плазме [91].

Ограничимся учетом в полученных уравнениях всех слагаемых вплоть до величин, пропорциональных четвертой степени напряженности поля. Среднее значение от четверного произведения амплитуд напряженности поля выразим через квадратичные и собственную четверную корреляционные функции согласно (7.8). Заметим, что учет флуктуационных изменений диэлектрической проницаемости и нелинейной восприимчивости, связанных с флуктуациями функции распределения, существен в случае уравнения для квадратичной корреляционной функции; в уравнении для

кубической корреляционной функции необходим учет только флуктуационного изменения диэлектрической проницаемости; в уравнении для четверной корреляционной функции флуктуационными изменениями диэлектрической проницаемости и нелинейной восприимчивости в принятом приближении можно пренебречь. При вычислении корреляционных функций (в правых частях получаемых равенств), характеризующих корреляцию между флуктуационной плотностью заряда  $\rho_{k\omega}^0$  и флуктуационным электрическим полем  $E_{k\omega}$ , напряженность поля  $E_{k\omega}$  можно заменить приближенным решением уравнения (7.1):

$$E_{k\omega} \rightarrow - \frac{4\pi i}{k\varepsilon(\omega, k)} \rho_{k\omega}^0. \quad (7.9)$$

Таким образом, в результате довольно громоздких выкладок можно получить следующее уравнение для квадратичной корреляционной функции  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(\omega, k) \left\{ \varepsilon(\omega, k) \langle E^2 \rangle_{k\omega} - \frac{2}{\varepsilon^*(\omega, k)} \sum_{\omega', k'} |\chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')|^2 \times \right. \\ \left. \times \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'} - \sum_{\omega', k'} a(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k\omega} \right\} - \\ - \varepsilon(\omega, k) \sum_{\omega', k'} a^*(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k\omega} = \\ = \sum_{\omega', k'} b(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} + q_{k\omega}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где

$$\begin{aligned} a(\omega, k; \omega', k') \equiv 2 \left\{ 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k') \chi^{(2)}(\omega, k; -\omega', -k')}{\varepsilon(\omega - \omega', k - k')} - \right. \\ \left. - \bar{\chi}^{(3)}(\omega', k'; \omega, k; -\omega', -k') \right\} + 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega, k; 0, 0) \chi^{(2)}(\omega', k'; -\omega', -k')}{\varepsilon(0, 0)} - \\ - \bar{\chi}^{(3)}(\omega, k; \omega', k'; -\omega', -k'), \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} b(\omega, k; \omega', k') \equiv \Delta(\omega, k; \omega', k') \Delta(-\omega, -k; -\omega', -k') \times \\ \times \langle \delta f \delta f \rangle_{k-k', \omega-\omega'}^0 - 16\pi \operatorname{Im} \frac{\chi^{(2)*}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')}{|k - k'| \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} \times \\ \times \Delta(\omega, k; \omega', k') \langle \delta f \rho \rangle_{k-k', \omega-\omega'}^0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$q_{k\omega} = q_{k\omega}^{(1)} + q_{k\omega}^{(2)} + q_{k\omega}^{(3)}, \quad (7.13)$$

$$q_{k\omega}^{(1)} \equiv \frac{16\pi^2}{k^2} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0, \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} q_{k\omega}^{(2)} \equiv - \frac{32\pi^2}{k} \sum_{\omega', k'} \frac{1}{k'} \left\{ 4\pi \operatorname{Im} \frac{\chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')}{|k - k'| \varepsilon(\omega - \omega', k - k') \varepsilon(\omega', k')} \times \right. \\ \left. \times \langle \rho^3 \rangle_{k\omega, k'\omega'}^0 + \operatorname{Re} \frac{1}{\varepsilon(\omega', k')} \Delta(\omega, k; \omega', k') \langle \delta f \rho^2 \rangle_{k\omega, k'\omega'} \right\}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned}
q_{k\omega}^{(3)} = & \frac{32\pi^2}{k^2} P_{k\omega} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0 + \frac{8\pi}{k} \text{Im} \sum_{\omega', k'} \left[ \Delta^{(2)}(\omega', k'; \omega - \omega', k - k'; \right. \\
& - \omega', -k') - 2 \frac{\varkappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')}{\varepsilon(\omega - \omega', k - k')} \Delta(\omega - \omega', k - k'; \\
& \left. - \omega', -k') \right] \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle \delta f \rho \rangle_{k\omega}^0 - 32\pi^2 \text{Re} \sum_{\omega', k} \frac{1}{k k' \varepsilon(\omega - \omega', k - k') \varepsilon^*(\omega', k')} \times \\
& \times \Delta(\omega, k; \omega - \omega', k - k') \langle \delta f \rho \rangle_{k'\omega'}^0 \cdot \Delta(\omega - \omega', k - k'; -\omega', -k') \times \\
& \times \langle \delta f \rho \rangle_{k\omega}^0 + 16\pi^2 \sum_{\omega', k} \frac{1}{|k - k'| k' \varepsilon(\omega', k') \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} \Delta(\omega, k; \\
& \omega', k') \langle \delta f \rho \rangle_{k - k', \omega - \omega'}^0 \cdot \Delta(-\omega, -k; -\omega + \omega', -k + k') \langle \delta f \rho \rangle_{-k', -\omega' +}^0 + \\
& + 16\pi^2 \sum_{\omega', k'} \sum_{\omega'', k''} \frac{\Delta(\omega, k; \omega', k')}{k'' \varepsilon(\omega', k') \varepsilon(\omega'', k'')} \left[ \frac{2}{k} \Delta(\omega', k'; \omega'', k'') - \right. \\
& \left. - \frac{1}{k'} \Delta(-\omega, -k; \omega'', k'') \right] \langle \delta f^2 \rho^2 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}^0 + \\
& + \frac{128\pi^3}{k} \text{Im} \sum_{\omega', k'} \sum_{\omega'', k''} \frac{1}{|k - k'| k'' \varepsilon(\omega - \omega', k - k') \varepsilon(\omega'', k'')} \times \\
& \times \left\{ \frac{\varkappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')}{\varepsilon(\omega', k')} \left[ 2\Delta(\omega', k'; \omega'', k'') - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{k}{k'} \Delta(-\omega, -k; \omega'', k'') \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\varkappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega'', k'') \Delta(\omega, k; \omega - \omega' + \omega'', k - k' + k'')}{\varepsilon(\omega - \omega' + \omega'', k - k' + k'')} \right\} \langle \delta f \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}^0 + \frac{256\pi^4}{k} \times \\
& \times \sum_{\omega', k'} \sum_{\omega'', k''} \frac{1}{|k - k'| k'' \varepsilon(\omega - \omega', k - k') \varepsilon^*(\omega'', k'')} \left\{ \frac{k}{k' |k - k''|} \times \right. \\
& \times \frac{\varkappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k') \varkappa^{(2)*}(\omega - \omega'', k - k''; \omega'', k'')}{\varepsilon(\omega', k') \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} + \\
& \left. + \frac{2}{|k' + k''| \varepsilon(\omega' + \omega'', k' + k'')} \right\} \times \\
& \times \left[ 2 \frac{\varkappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k') \varkappa^{(2)}(\omega' + \omega'', k' + k''; -\omega'', -k'')}{\varepsilon(\omega', k')} - \right. \\
& \left. - \varkappa^{(3)}(\omega - \omega', k - k'; \omega' + \omega'', k' + k''; -\omega'', -k'') \right] \left. \right\} \langle \rho^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}^0, \tag{7.16}
\end{aligned}$$

$$P_{k\omega} \equiv 4\pi \text{Im} \frac{1}{\varepsilon(\omega, k)} \sum_{\omega', k'} \frac{1}{\varepsilon(\omega', k')} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{1}{k'} \left[ 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')}{\varepsilon(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')} \Delta(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \Delta^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) \right] \langle \delta f \rho \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; \omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k})}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \varepsilon^*(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}')} \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle \delta f \rho \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 \right\} + \\
& + \operatorname{Re} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \varepsilon(\omega', \mathbf{k}')} \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \Delta(\omega', \mathbf{k}'; \omega, \mathbf{k}) \langle \delta f^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Напомним, что величины  $\Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  и  $\Delta^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}', \omega'', \mathbf{k}'')$ , входящие в приведенные выражения для  $b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$ ,  $q_{\mathbf{k}\omega}$  и  $P_{\mathbf{k}\omega}$ , представляют собой интегральные операторы, которые применяются к корреляционным функциям, стоящим справа от них. В качестве иллюстрации приведем запись некоторых из величин, входящих в выражения (7.12) и (7.15) — (7.17) в явном виде:

$$\begin{aligned}
\Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle \delta f \rho \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 & \equiv \sum \frac{4\pi e^2}{m} \frac{1}{kk'} \times \\
& \times \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \langle \delta f(\mathbf{v}) \rho \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0,
\end{aligned} \tag{7.18}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \Delta(-\omega, -\mathbf{k}; -\omega', -\mathbf{k}') \langle \delta f^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 \equiv \\
& \equiv \sum \sum \frac{4\pi e^2}{m} \frac{4\pi e'^2}{m'} \frac{1}{k^2 k'^2} \int d\mathbf{v} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times \\
& \times \int d\mathbf{v}' \frac{1}{\omega - \mathbf{k}'\mathbf{v}' + i0} \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Так как при выводе основного нелинейного уравнения (7.1) было использовано разложение по степеням напряженности электрического поля, то уравнение (7.10) справедливо только в том случае, если при его решении можно использовать метод последовательных приближений. Учитывая это, уравнение (7.10) удобно представить в эквивалентном виде, перенеся последнее слагаемое из левой части в правую и заменив корреляционную функцию  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  ее значением в линейном приближении,

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \rightarrow \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}.$$

Таким образом, уравнение для квадратичной корреляционной функции можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} & - \frac{2}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} |\chi^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')|^2 \times \\
& \times \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} - \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \left\{ \sum_{\omega', \mathbf{k}'} b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} + q'_{\mathbf{k}\omega} \right\},
\end{aligned} \tag{7.20}$$

где

$$q'_{k\omega} \equiv q_{k\omega} + \frac{16\pi^2}{k^2 \varepsilon^*(\omega, k)} \sum_{\omega', k'} a^*(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0. \quad (7.21)$$

Уравнение для кубической корреляционной функции  $\langle E^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \langle E^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'} + \frac{2}{\varepsilon^*(\omega', k')} \chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; -\omega, -k) \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'} \times \\ \times \langle E^2 \rangle_{k\omega} + \frac{2}{\varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} \chi^{(2)}(\omega, k; -\omega', -k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k\omega} + \\ + \frac{2}{\varepsilon(\omega, k)} \chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'} = \\ = B(-\omega + \omega', -k + k'; -\omega', -k') \langle E^2 \rangle_{k\omega} + \\ + B(\omega, k; -\omega + \omega', -k + k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} + \\ + B(-\omega', -k'; \omega, k) \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'} + Q_{k\omega; k'\omega'}, \quad (7.22) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B(\omega, k; \omega', k') \equiv \frac{4\pi i}{\varepsilon(\omega, k) \varepsilon(\omega', k')} \left\{ \frac{1}{k} \Delta(\omega', k'; \omega + \omega', k + k') \times \right. \\ \left. \times \langle \delta f \rho \rangle_{-k, -\omega}^0 + \frac{1}{k'} \Delta(\omega, k; \omega + \omega', k + k') \langle \delta f \rho \rangle_{-k', -\omega'}^0 \right\}, \quad (7.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{k\omega, k'\omega'} \equiv \frac{64\pi^3 i}{kk' |k - k'|} \frac{1}{\varepsilon(\omega, k) \varepsilon^*(\omega', k') \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k')} \times \\ \times \left\{ \langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0 + 4\pi i \sum_{\omega'', k''} \frac{1}{k'' \varepsilon(\omega'', k'')} \left( \frac{k}{|k - k''|} \frac{\chi^{(2)}(\omega - \omega'', k - k''); \omega'', k''}{\varepsilon(\omega - \omega'', k - k'')} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k'}{|k' + k''|} \frac{\chi^{(2)}(-\omega' - \omega'', -k' - k''); \omega'', k''}{\varepsilon^*(\omega' + \omega'', k' + k'')} + \frac{|k - k'|}{|k - k' + k''|} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\chi^{(2)*}(\omega - \omega' + \omega'', k - k' + k''); -\omega'', -k''}{\varepsilon^*(\omega - \omega' - \omega'', k - k' - k'')} \right) \langle \rho^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}^0 \right\}. \quad (7.24) \end{aligned}$$

Неоднородные части в уравнениях (7.20) и (7.22) выражаются через корреляционные функции для флуктуаций функции распределения и плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами (см. гл. 6). Величины  $b(\omega, k; \omega', k')$  и  $B(\omega, k; \omega', k')$  непосредственно связаны с корреляционными функциями  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{k\omega}^0$  и  $\langle \delta f(\mathbf{v}) \rho \rangle_{k\omega}^0$ , которые определяются формулами (6.32) и (6.39).

Четверная корреляционная функция для поля  $\langle E^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}$  непосредственно выражается через четверную корреляционную функцию для плотности заряда, связанной со случайным движением отдельных частиц в плазме,

$$\begin{aligned} \langle E^4 \rangle_{k\omega, k'\omega'; k''\omega''} = \frac{256\pi^4}{k |k - k'| |k' - k''| k''} \times \\ \times \frac{\langle \rho^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}^0}{\varepsilon(\omega, k) \varepsilon^*(\omega - \omega', k - k') \varepsilon^*(\omega' - \omega'', k' - k'') \varepsilon^*(\omega'', k'')} \cdot \quad (7.25) \end{aligned}$$

Система уравнений (7.20), (7.22) и (7.25) полностью определяет последовательность корреляционных функций для электрического поля в плазме  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$ ,  $\langle E^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$  и  $\langle E^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}$  с учетом нелинейного взаимодействия волн [91]. Это взаимодействие существенно проявляется в неравновесной плазме, особенно вблизи границы области кинетической устойчивости, а также в области неустойчивости, соответствующей турбулентному состоянию плазмы.

## 2. СПЕКТР СТАЦИОНАРНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОПРАВК

В предположении, что флуктуационные поля не очень велики, а спектральные распределения флуктуационных полей стационарны во времени, систему уравнений (7.20), (7.22) и (7.25) можно решать методом последовательных приближений.

Представим квадратичную корреляционную функцию  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$ , определяющую спектральное распределение энергии флуктуационного электрического поля, в виде ряда

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)} + \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(2)} + \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(3)} + \dots \quad (7.26)$$

Используя уравнение (7.20), нетрудно найти выражения для членов разложения (7.26):

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)} = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, k)|^2}, \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(2)} = & -\frac{128\pi^3}{k} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \sum_{\omega', k'} \frac{1}{k'} \times \\ & \times \left\{ \text{Im} \frac{\kappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')}{|k - k'| \varepsilon(\omega - \omega', k - k') \varepsilon(\omega', k')} \langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \text{Re} \frac{1}{\varepsilon(\omega', k')} \Delta(\omega, k; \omega', k') \langle \delta f \rho^2 \rangle_{k\omega; k'\omega'}^0 \right\}, \quad (7.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(3)} = & \frac{1}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} \left\{ 2 \sum_{\omega', k'} |\kappa^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')|^2 \langle E^2 \rangle_{k'\omega'}^{(1)} \times \right. \\ & \times \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'}^{(1)} + 2 \text{Re} \varepsilon^*(\omega, k) \sum_{\omega', k'} a(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'}^{(1)} \langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)} + \\ & \left. + \sum_{\omega', k'} b(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'}^{(1)} + q_{k\omega}^{(3)} \right\}, \quad (7.29) \end{aligned}$$

где величина  $q_{k\omega}^{(3)}$  определяется с помощью (7.16) и (7.17).

Первый член разложения (7.26), соответствующий линейному приближению, описывает спектральное распределение энергии флуктуационного электрического поля в пренебрежении взаимодействием флуктуационных полей в плазме. Спектральное распределение в этом случае определяется выражением (7.27), которое совпадает с полученным ранее выражением (6.89). Согласно (7.27)

в линейном приближении спектральное распределение для флуктуационного электрического поля в плазме  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)}$  полностью определяется заданием квадратичной корреляционной функции для флуктуаций плотности заряда системы невзаимодействующих частиц  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0$ .

Второй член разложения (7.26) соответствует учету квадратичного взаимодействия между флуктуационными полями, характеризуемого нелинейной восприимчивостью  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  и величиной  $\Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$ , определяющей флуктуационное изменение диэлектрической проницаемости плазмы. В этом случае спектральное распределение флуктуационного электрического поля  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(2)}$  определяется кубической корреляционной функцией для флуктуаций плотности заряда системы невзаимодействующих частиц  $\langle \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$  и корреляционной функцией для флуктуационного изменения функции распределения и квадрата флуктуационной плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами  $\langle \delta f \rho^2 \rangle_{k\omega; k'\omega'}$ .

Наконец, третий член разложения (7.26) соответствует учету кубического взаимодействия между флуктуационными полями, характеризуемого нелинейной восприимчивостью  $\chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3)$ , а также величиной  $\Delta^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}')$ , определяющей флуктуационное изменение нелинейной восприимчивости  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ . Кубическое взаимодействие наряду с квадратичным приводит к спектральному распределению для флуктуационного электрического поля  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(3)}$ , которое зависит как от четверных корреляционных функций для флуктуаций плотности заряда и функции распределения системы невзаимодействующих частиц  $\langle \rho^4 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}$ ,  $\langle \delta f \rho^3 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}$  и  $\langle \delta f^2 \rho^2 \rangle_{k\omega; k'\omega'; k''\omega''}$ , так и от произведений различных квадратичных корреляционных функций для этой системы  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}$ ,  $\langle \delta f \rho \rangle_{k\omega}$  и  $\langle \delta f \delta f \rangle_{k\omega}$ .

Если плазма находится в состоянии теплового равновесия, то  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(2)}$  и  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(3)}$  определяют малые поправки к спектральному распределению  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)}$ . Относительный вес этих поправок к полному спектру флуктуаций составляет величины соответственно порядка  $\sqrt{\epsilon}$  и  $\epsilon$ . Заметим, что спектральное распределение  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(3)}$  характеризуется кроме максимумов при собственных частотах плазмы  $\omega_k$  также дополнительными максимумами при комбинационных частотах, соответствующих суммам и разностям собственных частот плазмы  $\omega_{k-k'} \pm \omega_{k'}$ .

Нелинейное взаимодействие волн в плазме приводит к возможности существенного усиления уровня флуктуаций при возбуждении каких-либо собственных колебаний под воздействием внешних источников. Обозначим спектральное распределение возбуждаемых внешними источниками собственных колебаний через  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^0$ . В пренебрежении затуханием спектральное распределение  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(0)}$  имеет



вид ряда дельтаобразных максимумов, соответствующих частотам возбуждаемых собственных колебаний. Спектральное распределение  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  удовлетворяет условию

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 0. \quad (7.30)$$

Используя уравнение (7.20) и ограничиваясь учетом нелинейного взаимодействия флуктуационного поля с полем возбуждаемых колебаний в наиниžшем порядке (существен учёт кубического взаимодействия), для спектрального распределения флуктуационного поля в плазме  $\langle \tilde{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  нетрудно получить выражение

$$\langle \tilde{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \right\} \times \\ \times \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} + \dots, \quad (7.31)$$

где  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$  — спектральное распределение флуктуационного поля в отсутствие возбуждаемых внешними источниками колебаний. Очевидно, при достаточно высокой интенсивности возбуждаемых внешними источниками колебаний интенсивность флуктуационных колебаний в плазме  $\langle \tilde{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  может значительно превышать интенсивность тепловых флуктуаций  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)}$ . Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}^{(0)} \gg 1. \quad (7.32)$$

(Напомним, что формула (7.31) получена в предположении стационарности спектрального распределения флуктуаций. Это означает, что использовать ее при рассмотрении флуктуаций можно только для интервалов времен, малых по сравнению со временем релаксации.)

В неравновесных условиях разложением (7.26) следует пользоваться осторожно, так как даже линейное приближение вблизи границы области устойчивости плазмы приводит к расходящимся результатам. Как показано выше, вблизи границы области кинетической устойчивости плазмы обращается в бесконечность (в линейном приближении) не только квадратичная корреляционная функция для флуктуаций поля, но и корреляционные функции более высокого порядка.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ ЧАСТОТ И НАСЫЩЕНИЕ УРОВНЯ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕРАВНОВЕСНОЙ ПЛАЗМЕ

Важнейшим проявлением нелинейного взаимодействия волн в плазме является возникновение сдвига собственных частот. Очевидно, при рассмотрении флуктуационных колебаний в области спектра вблизи собственных частот учёт нелинейных сдвигов по-

следних может оказаться весьма существенным, особенно, если плазма находится в условиях, при которых интенсивности флуктуационных колебаний очень велики.

Для описания собственных колебаний плазмы с учетом эффектов нелинейного взаимодействия можно использовать уравнение (7.20), в котором правую часть следует положить равной нулю. (Уравнение для частот взаимодействующих волн в плазме получено в работе [74].) Собственные частоты плазменных колебаний определяются из условия обращения в нуль вещественной части указанного уравнения:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} - \frac{2}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} |\kappa^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')|^2 \times \right. \\ & \times \left. \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} - \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Обозначим частоты, являющиеся решениями этого уравнения, через  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$ . В общем случае частоты  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  отличаются от собственных частот  $\omega_{\mathbf{k}}$ , получаемых в линейном приближении. Запишем

$$\tilde{\omega}_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}} + \Delta\omega_{\mathbf{k}}. \quad (7.34)$$

Величина  $\Delta\omega_{\mathbf{k}}$  представляет собой поправку к собственной частоте  $\omega_{\mathbf{k}}$ , обусловленную нелинейным взаимодействием волн. Если предположить, что поправки к собственным частотам, обусловленные нелинейным взаимодействием волн, малы по сравнению с самими частотами, то из (7.33) для величины  $\Delta\omega_{\mathbf{k}}$  нетрудно получить приближенное выражение

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathbf{k}}} \operatorname{Re} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}^{(1)}. \quad (7.35)$$

В линейном приближении

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}^{(1)} = \pi I_{\mathbf{k}'} \{ \delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}) + \delta(\omega' + \omega_{\mathbf{k}'}) \}.$$

поэтому

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}'} \{ a(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}') + a(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; -\omega_{\mathbf{k}'}, -\mathbf{k}') \} I_{\mathbf{k}'}. \quad (7.36)$$

Если предположить, что в плазме существенны волны только определенного типа (например, ленгмюровские), то, используя резонансные условия и соответствующие дисперсионные связи, нетрудно убедиться, что при суммировании в (7.36) существенны только значения  $\mathbf{k}'$ , близкие к  $\mathbf{k}$ . Поэтому приближенно можно положить

$$\Delta\omega_{\mathbf{k}} \simeq \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \operatorname{Re} \{ a(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}) + a(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}; -\omega_{\mathbf{k}}, -\mathbf{k}) \} I_{\mathbf{k}}.$$

Используя (7.11), получаем

$$\Delta\omega_k \simeq \frac{1}{\varepsilon_k} \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\chi^{(2)}(2\omega_k, 2k; -\omega_k, -k) \chi^{(2)}(\omega_k, k; \omega_k, k)}{\varepsilon(2\omega_k, 2k)} - \bar{\chi}^{(3)}(-\omega_k, -k; \omega_k, k; \omega_k, k) + 2 \left( 2 \frac{\chi^{(2)}(\omega_k, k; 0, 0) \chi^{(2)}(\omega_k, k; -\omega_k, -k)}{\varepsilon(0, 0)} - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_k, k; \omega_k, k; -\omega_k, -k) \right) \right\} I_k. \quad (7.37)$$

Это выражение совпадает с выражением для сдвига частоты, полученным ранее при рассмотрении резонансного четырехволнового взаимодействия.

Заметим, что знак поправки к частоте совпадает со знаком самой частоты:

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{|\omega|} |\Delta\omega|. \quad (7.38)$$

Согласно (7.37) величина сдвига собственных частот зависит от интенсивности волн в плазме:

$$\Delta\omega_k = \beta_k I_k, \quad (7.39)$$

где  $\beta_k$  — некоторый коэффициент, зависящий от закона дисперсии рассматриваемого колебания. Так как с увеличением интенсивности колебаний возрастает величина сдвига, то учет его имеет весьма существенное значение при рассмотрении флуктуаций в неравновесной плазме в условиях, когда интенсивность флуктуационных колебаний неограниченно увеличивается.

Определим спектральное распределение флуктуаций в стационарной неравновесной плазме с учетом сдвига собственных частот, обусловленного нелинейным взаимодействием волн [180]. Основное уравнение (7.10) для квадратичной корреляционной функции  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  переписываем в виде

$$\begin{aligned} \{ |\varepsilon(\omega, k)|^2 - 2 \operatorname{Re} \varepsilon^*(\omega, k) \sum_{\omega', k'} a(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \} \langle E^2 \rangle_{k\omega} - \\ - 2 \sum_{\omega', k'} |\chi^{(2)}(\omega - \omega', k - k'; \omega', k')|^2 \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} \langle E^2 \rangle_{k-k', \omega-\omega'} = \\ = \sum_{\omega', k'} b(\omega, k; \omega', k') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'} + q_{k\omega}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

В области частот, близких к собственным частотам плазмы, и при выполнении условия  $|\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, k)| \ll |\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, k)|$  выражение, стоящее в фигурных скобках в левой части уравнения (7.40), приближенно можно представить как квадрат модуля диэлектрической проницаемости, в вещественной части которой частота сдвинута на величину  $\Delta\omega_k$ . Предполагая, далее, что распадные условия не вы-

полняются, и ограничиваясь учетом основного слагаемого в правой части (7.40), записываем это уравнение в виде

$$\{[\operatorname{Re} \varepsilon(\omega - \Delta\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})]^2 + [\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})]^2\} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{k^2} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (7.41)$$

Таким образом, для спектрального распределения флуктуаций электрического поля вблизи собственных частот плазмы получаем выражение

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi I_{\mathbf{k}} \{ \delta(\omega - \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \tilde{\omega}_{\mathbf{k}}) \}, \quad (7.42)$$

где  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  — собственная частота, определяемая с учетом нелинейного взаимодействия волн, и

$$I_{\mathbf{k}} = \frac{16\pi^2}{k^2 e_{\mathbf{k}}'} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega_{\mathbf{k}}}^0}{|\operatorname{Im} \varepsilon(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})|}. \quad (7.43)$$

Так как собственная частота с учетом нелинейного взаимодействия волн  $\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}$  является функцией  $I_{\mathbf{k}}$ , то соотношение (7.43) можно рассматривать в качестве уравнения для нахождения  $I_{\mathbf{k}}$ , т. е. интенсивности флуктуаций в области неустойчивости плазмы. Уравнение (7.43) удобно переписать в виде

$$I_{\mathbf{k}} |\operatorname{Im} \varepsilon(\tilde{\omega}_{\mathbf{k}}(I_{\mathbf{k}}), \mathbf{k})| = I_{\mathbf{k}}^0 |\operatorname{Im} \varepsilon^0(\omega_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})|, \quad (7.44)$$

где  $I_{\mathbf{k}}^0$  — интенсивность флуктуационных колебаний в отсутствие неустойчивости;  $\varepsilon^0(\omega, \mathbf{k})$  — диэлектрическая проницаемость устойчивой плазмы. В частности, для равновесной плазмы  $I_{\mathbf{k}}^0$  определяется температурой, согласно (6.127).

Наличие решения уравнения (7.44) означает, что взаимодействие между волнами в неустойчивой плазме приводит к установлению стационарного турбулентного состояния. Само решение уравнения (7.44) при этом определяет стационарный уровень турбулентных флуктуаций<sup>1</sup>. Характерная особенность турбулентного состояния состоит в том, что спектральное распределение флуктуаций определяется нелинейным взаимодействием волн и слабо зависит от температуры плазмы.

Формула (7.42) в общем виде определяет спектральное распределение флуктуаций в неравновесной плазме с учетом нелинейного взаимодействия волн. В качестве примера рассмотрим флуктуации в плазме, пронизываемой скомпенсированным пучком частиц малой плотности [180]. Обозначим направленную скорость частиц пучка через  $\mathbf{u}$ . Если плотность пучка достаточно мала, то влиянием пучка на дисперсию волн в плазме можно пренебречь. При рассмотрении дисперсии волн в высокочастотной области можно пренебречь также

<sup>1</sup> Объяснение насыщения уровня коллективных флуктуаций в критических условиях на основе допущения о сильнотурбулентном состоянии плазмы, характеризуемом кубической корреляционной функцией специального вида, предложено в работе [154]. Вопрос о стабилизации плазменных неустойчивостей в результате учета нелинейного сдвига собственных частот рассмотрен в работах [18, 75].

тепловым движением частиц. Однако наличие пучка и тепловое движение существенно сказываются на интенсивности флуктуационных колебаний (7.43). Учитывая ленгмюровский характер флуктуационных колебаний, при выполнении указанных требований находим

$$I_k = \frac{\tilde{u}(k) + \beta'_k I_k}{|\tilde{u}(k) + \beta'_k I_k - u_{\parallel}|} I_0, \quad \beta'_k \equiv \frac{\beta_k}{k}, \quad (7.45)$$

где  $I_0 = 4\pi T$  — интенсивность флуктуационных колебаний в равновесной плазме,  $\tilde{u}(k) = \frac{\omega k}{k}$  и  $u_{\parallel} = \frac{ku}{k}$ . Коэффициент  $\beta'_k$ , характеризующий нелинейный сдвиг собственной частоты ленгмюровских колебаний, приближенно записываем в виде

$$\beta'_k \simeq \frac{5}{12\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \frac{k^6 s^2}{\Omega^6}. \quad (7.46)$$

Если пренебречь нелинейным взаимодействием волн ( $\beta'_k \rightarrow 0$ ), то из (7.45) следует

$$I_k^0 = \frac{\tilde{u}(k)}{|\tilde{u}(k) - u_{\parallel}|} I_0. \quad (7.47)$$

Величина  $\tilde{u}(k)$  играет роль критической скорости, при достижении которой флуктуации неограниченно возрастают в линейном приближении, а сама плазма становится неустойчивой. Как нетрудно проверить, учет нелинейного взаимодействия волн приводит к насыщению уровня флуктуаций и при скоростях пучка, равных или больших критической скорости  $\tilde{u}(k)$ . Действительно, полагая  $\tilde{u}(k) + \beta'_k I_k > u_{\parallel}$ , из (7.45) находим

$$I_k = \frac{1}{2\beta'_k} \left\{ -(\tilde{u}(k) - \beta'_k I_0 - u_{\parallel}) \pm \sqrt{(\tilde{u}(k) - \beta'_k I_0 - u_{\parallel})^2 + 4\beta'_k I_0 \tilde{u}(k)} \right\}. \quad (7.48)$$

Так как по определению интенсивность  $I_k$  — положительно определенная величина, то в (7.48) следует учитывать только знак «плюс». (Непосредственной проверкой легко убедиться, что неравенство  $\tilde{u}(k) + \beta'_k I_k > u_{\parallel}$  всегда выполняется.)

Если скорость пучка достаточно мала, то интенсивность флуктуационных колебаний определяется температурой плазмы и равна тепловому значению  $I_0$  (при этом температура частиц пучка не играет роли, поскольку плотность пучка предполагается достаточно малой). С увеличением скорости пучка интенсивность флуктуационных колебаний возрастает, однако вследствие нелинейного взаимодействия волн этот рост оказывается слабее по сравнению с пред-

сказанием линейного приближения (рис. 6). При критическом значении скорости,  $u_{\parallel} = \tilde{u}(\mathbf{k})$ , интенсивность флуктуационных колебаний (7.48), в отличие от линейного рассмотрения (7.47), конечна:

$$\tilde{I}_k = \frac{1}{2\beta'_k} \left\{ \beta'_k I_0 + \sqrt{\beta_k'^2 I_0^2 + 4\beta'_k I_0 \tilde{u}(\mathbf{k})} \right\}. \quad (7.49)$$

Уровень флуктуаций, однако, значительно превышает тепловой уровень, если  $4\tilde{u}(\mathbf{k}) \gg \beta'_k I_0$ . При достаточно больших скоростях пучка,  $u_{\parallel} - \tilde{u}(\mathbf{k}) \gg \beta'_k I_0$ , интенсивность флуктуационных колебаний  $I_k$  стремится к асимптотическому значению,

$$I_k^{\infty} = \frac{u_{\parallel} - \tilde{u}(\mathbf{k})}{\beta'_k}, \quad (7.50)$$

не зависящему от теплового уровня и линейно возрастающему с увеличением скорости пучка. Следовательно, учет нелинейного взаимодействия волн приводит к тому, что и при скоростях пучка  $u_{\parallel}$ , превышающих критическое значение  $\tilde{u}(\mathbf{k})$ , флуктуации характеризуются стационарным уровнем, который при достаточно больших значениях скорости не зависит от температуры. Значения

$u_{\parallel} > \tilde{u}(\mathbf{k})$  соответствуют турбулентному состоянию плазмы.

В качестве другого примера стационарных флуктуаций в неравновесной плазме рассмотрим флуктуации в магнитоактивной плазме с анизотропным распределением скоростей [94]. Согласно линейному приближению (6.158) интенсивность флуктуаций поля в такой плазме неограниченно возрастает, если поперечная температура  $T_{\perp}$  достигает критического значения, равного  $\frac{\omega_B}{\omega_B - \omega_k} T_{\parallel}$ , где  $\omega_k$  — частота собственных колебаний (6.155). Учет нелинейного взаимодействия волн позволяет найти величину сдвига собственных частот:

$$\Delta\omega_k = \beta_k I_k, \quad \beta_k \simeq \frac{5}{12\pi^2} \frac{e^2}{m^2} \frac{k^2 s^2}{\Omega^5}. \quad (7.51)$$

Используя (6.158), уравнение для определения стационарного уровня флуктуаций в неравновесной плазме можно записать в виде

$$I_k = \frac{\omega_k + \beta_k I_k}{\left| \omega_k + \beta_k I_k - \omega_B \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) \right|} I_0, \quad (7.52)$$

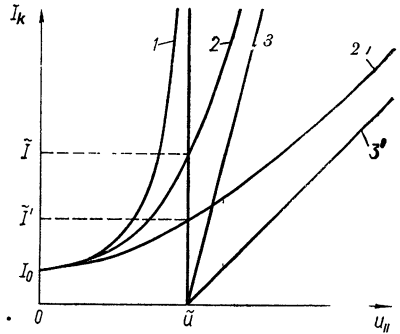


Рис. 6. Зависимость интенсивности ленгмюровских флуктуаций от величины скорости направленного движения частиц  $u_{\parallel}$ :

1 — (7.47); 2, 2' — (7.48); 3, 3' — (7.50); 2, 3 —  $\beta'_k I_0 / \tilde{u} = 0,05$ ; 2', 3' —  $\beta'_k I_0 / \tilde{u} = 0,2$ .

где

$$I_0 \equiv 4\pi T_{\parallel} \frac{a_{\perp}^2 k^2}{|1 + a_{\perp}^2 k^2 - I_0(\beta_{\perp}) e^{-\beta_{\perp}}|}.$$

Положительный корень этого уравнения определяет стационарный уровень флуктуаций:

$$I_k = \frac{1}{2\beta_k} \left\{ \beta_k I_0 + \omega_B \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) - \omega_k + \sqrt{(\beta_k I_0 + \omega_B \left( 1 - \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}} \right) - \omega_k)^2 + 4\beta_k I_0 \omega_k} \right\}. \quad (7.53)$$

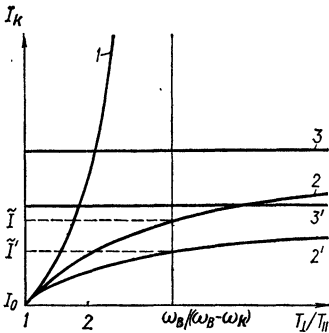


Рис. 7. Зависимость интенсивности флуктуаций в магнитоактивной плазме с анизотропным распределением скоростей  $I_k$  от отношения температур  $T_{\perp}/T_{\parallel}$ :

1 — (7.52) при  $\beta_k = 0$ ; 2, 2' — (7.53); 3, 3' — (7.55); 2, 3 —  $\beta_k I_0 / \omega_B = 0,2$ ; 2', 3' —  $\beta_k I_0 / \omega_B = 0,4\pi$ .

Отношение температур  $T_{\perp}/T_{\parallel}$ , равное  $\omega_B / (\omega_B - \omega_k)$ , определяет границу области устойчивости плазмы (рис. 7). При больших значениях этого отношения плазма находится в турбулентном состоянии, уровень флуктуаций в котором и определяется (7.53). На границе области устойчивости плазмы

$$\tilde{I}_k = \frac{1}{2\beta_k} \{ \beta_k I_0 + \sqrt{4\omega_k + \beta_k I_0} \beta_k I_0 \}. \quad (7.54)$$

С ростом отношения температур  $I_k$  асимптотически стремится к предельному значению,

$$\infty I_k = \frac{1}{2\beta_k} \{ \beta_k I_0 + \omega_B - \omega_k +$$

$$+ \sqrt{(\beta_k I_0 + \omega_B - \omega_k)^2 + 4\beta_k I_0 \omega_k} \}, \quad (7.55)$$

которое зависит от продольной температуры  $T_{\parallel}$ .

#### 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

##### Система уравнений для последовательности корреляционных функций

Перейдем теперь к рассмотрению произвольных электромагнитных флуктуаций в стационарной плазме, отказавшись от допущения о потенциальном характере флуктуационного поля [97]. Решая нелинейное уравнение (6.100) методом последовательных приближений и подставляя итерационное решение в (6.98) и (6.99), получаем основное нелинейное уравнение для флуктуационного

электрического поля в плазме:

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ij}(k) E_j(k) + \sum_{1+2=k} \kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2) E_j(1) E_k(2) + \\ & + \sum_{1+2+3=k} \kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) E_j(1) E_k(2) E_l(3) + \dots \\ & \dots + \sum_{k'} \delta \epsilon_{ij}(k, k') E_j(k') + \\ & + \sum_{1+2=k} \sum_{k'} \delta \kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2; k') E_j(1) E_k(k') + \dots = -\frac{4\pi i}{\omega} f_i^0(k). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Здесь  $k$  обозначает совокупность величин  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , т. е.  $k \equiv \omega, \mathbf{k}$ , соответственно  $1 \equiv \omega_1, \mathbf{k}_1$  и т. д.; под дважды встречающимися индексами подразумевается суммирование. Вводим обозначение

$$\beta_{ij}(k) \equiv \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) \delta_{ij} + \frac{v_i k_j}{\omega} \quad (7.57)$$

и записываем тензор диэлектрической проницаемости и тензорные нелинейные восприимчивости плазмы в виде

$$\epsilon_{ij}(k) = \delta_{ij} + \sum \frac{\Omega^2}{\omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \beta_{ij'}(k) \frac{\partial}{\partial v_{j'}} f_0(\mathbf{v}), \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2) &= \sum \frac{(-i)}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1 + \omega_2} \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{v} + i0} \times \\ & \times \left\{ \beta_{ij'}(1) \frac{\partial}{\partial v_{j'}} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \beta_{kk'}(2) \frac{\partial}{\partial v_{k'}} + \right. \\ & \left. + \beta_{kk'}(2) \frac{\partial}{\partial v_{k'}} \frac{1}{\omega_1 - \mathbf{k}_1\mathbf{v} + i0} \beta_{ij'}(1) \frac{\partial}{\partial v_{j'}} \right\} f_0(\mathbf{v}), \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) = \frac{1}{3} \{ \bar{\kappa}_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) + \bar{\kappa}_{ikjl}^{(3)}(2, 1, 3) + \bar{\kappa}_{iljk}^{(3)}(3, 2, 1) \}, \quad (7.60)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) &= \sum \frac{(-i)^2}{2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\Omega^2}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} \times \\ & \times \int d\mathbf{v} \frac{v_i}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v} + i0} \beta_{ij'}(1) \frac{\partial}{\partial v_{j'}} \times \\ & \times \frac{1}{\omega_2 + \omega_3 - (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\mathbf{v} + i0} \left\{ \beta_{kk'}(2) \frac{\partial}{\partial v_{k'}} \frac{1}{\omega_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{v} + i0} \times \right. \\ & \left. \times \beta_{ll'}(3) \frac{\partial}{\partial v_{l'}} + \beta_{ll'}(3) \frac{\partial}{\partial v_{l'}} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \beta_{kk'}(2) \frac{\partial}{\partial v_{k'}} \right\} f_0(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Тензорные нелинейные восприимчивости  $\kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2)$  и  $\kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3)$  симметричны относительно перестановок аргументов и соответствующих индексов<sup>2</sup>.

Ограничимся учетом в (7.56) линейных, квадратичных и кубических по напряженности флуктуационного поля слагаемых. Это

<sup>2</sup> Уравнение (7.56) справедливо также для магнитоактивной плазмы. Выражения для тензора диэлектрической проницаемости и тензорных нелинейных восприимчивостей магнитоактивной плазмы приведены в гл. 3.



уравнение непосредственно связывает напряженность флуктуационного поля  $E(k)$  с плотностью флуктуационного тока  $j^0(k)$ , возникающего вследствие случайного движения отдельных частиц. Случайное движение частиц проявляется также в неоднородности диэлектрических свойств плазмы. Величины  $\delta\varepsilon_{ij}(k, k')$  и  $\delta\kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2; k')$  характеризуют изменения тензора диэлектрической проницаемости и тензорной нелинейной электрической восприимчивости, связанные со случайными флуктуациями функции распределения  $\delta f_{k\omega}^0(v)$ . Эти изменения представим в виде

$$\delta\varepsilon_{ij}(k, k') \equiv \Delta_{ij}(k, k') \delta f^0(k - k'), \quad (7.62)$$

$$\delta\kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2; k') \equiv \Delta_{ijk}^{(2)}(1, 2; k') \delta f^0(2 - k'), \quad (7.63)$$

где операторные величины  $\Delta_{ij}(k, k')$  и  $\Delta_{ijk}^{(2)}(1, 2; k')$  определены равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_{ij}(k, k') \delta f^0(k - k') &\equiv \sum \frac{\Omega^2}{\omega} \int dv \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \beta_{ijr}(k') \frac{\partial}{\partial v_r} \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0(v), \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{ijk}^{(2)}(1, 2; k') \delta f^0(2 - k') &\equiv \sum (-i) \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega} \int dv \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ &\times \beta_{ijr}(1) \frac{\partial}{\partial v_r} \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{v} + i0} \beta_{kk'}(k') \frac{\partial}{\partial v_{k'}} \delta f_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}', \omega_2-\omega'}^0(v). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Изменением нелинейной восприимчивости  $\kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3)$  в уравнении (7.56) в принятом приближении можно пренебречь.

С помощью нелинейного уравнения (7.56) нетрудно получить систему уравнений для корреляционных функций флуктуационного поля. Последовательность корреляционных функций  $\langle E_i E_j \rangle_k$ ,  $\langle E_i E_j E_k \rangle_{k, k'}$  и  $\langle E_i E_j E_k E_l \rangle_{k, k', k''}$  определяем так, чтобы они были связаны со средними значениями квадратичных, кубических и четверных произведений амплитуд напряженности флуктуационного поля посредством соотношений

$$\langle E_i(k) E_j(k') \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta(k + k') \langle E_i E_j \rangle_k, \quad (7.66)$$

$$\langle E_i(k) E_j(k') E_k(k'') \rangle \equiv (2\pi)^4 \delta(k + k' + k'') \langle E_i E_j E_k \rangle_{k, k+k'}, \quad (7.67)$$

$$\begin{aligned} \langle E_i(k) E_j(k') E_k(k'') E_l(k''') \rangle &\equiv (2\pi)^4 \delta(k + k' + k'' + k''') \times \\ &\times \{ (2\pi)^4 \delta(k + k') \langle E_i E_j \rangle_k \langle E_k E_l \rangle_{k''} + (2\pi)^4 \delta(k + k'') \langle E_i E_k \rangle_k \times \\ &\times \langle E_j E_l \rangle_{k'} + (2\pi)^4 \delta(k + k''') \langle E_i E_l \rangle_k \langle E_j E_k \rangle_{k'} + \\ &+ \langle E_i E_j E_k E_l \rangle_{k, k+k', k+k'+k''} \}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Переносим в уравнении (7.56) слагаемые, связанные с флуктуационными изменениями диэлектрической проницаемости и нелинейной восприимчивости, в правую часть. С помощью последовательного перемножения самих на себя левой и правой частей полученного равенства и последующего усреднения в соответствии с (6.80) по-

лучаем систему неоднородных интегральных уравнений, однозначно определяющую последовательность корреляционных функций для флуктуационного электромагнитного поля в плазме [97].

Ограничимся учетом в полученных уравнениях всех слагаемых вплоть до величин, пропорциональных четвертой степени напряженности поля, и проведем усреднение подобно тому, как это было сделано в случае потенциального флуктуационного поля. При вычислении корреляционных функций, характеризующих корреляцию флуктуационной плотности тока  $\mathbf{j}^0(k)$  и флуктуационного электрического поля  $\mathbf{E}(k)$ , в правых частях равенств напряженность поля можно заменять приближенным решением уравнения (7.56):

$$E_i(k) \rightarrow -\frac{4\pi i}{\omega} \Lambda_{i'}^{-1}(k) j_j^0(k). \quad (7.69)$$

В результате громоздких выкладок получаем следующее уравнение для квадратичной корреляционной функции  $\langle E_i E_j \rangle_k$ :

$$\begin{aligned} \Lambda_{i'j'}^*(k) \{ \Lambda_{ij}(k) \langle E_j E_{j'} \rangle_k - 2\Lambda_{j'i'}^{*-1}(k) \sum_1 \chi_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \times \\ \times \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} - \sum_1 a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_k \} - \\ - \Lambda_{i'j'}(k) \sum_1 a_{i'jkk'}^*(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_k^* = \\ = \sum_1 b_{ii'kk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 + q_{ii'}(k), \end{aligned} \quad (7.70)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{ijkk'}(k, 1) \equiv 2 \{ 2\chi_{ij'k}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{j'i'}^{-1}(k-1) \chi_{i'jk'}^{(2)}(k, -1) - \\ - \bar{\chi}_{ikjk'}^{(3)}(1, k, -1) \} + 2\chi_{ij'k}^{(2)}(k, 0) \Lambda_{j'i'}^{-1}(0) \chi_{i'jk'}^{(2)}(1, -1) - \\ - \bar{\chi}_{ikjk'}^{(3)}(k, 1, -1), \end{aligned} \quad (7.71)$$

$$\begin{aligned} b_{ii'kk'}(k, 1) \equiv \Delta_{ik}(k, 1) \Delta_{i'k'}^*(k, 1) \langle \delta f \delta f \rangle_{k-1}^0 + \\ + \frac{8\pi i}{\omega - \omega_1} \{ \Delta_{ik}(k, 1) \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \Lambda_{j'l'}^{*-1}(k-1) \langle \delta f j_{l'} \rangle_{k-1}^0 - \\ - \chi_{ij'k}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{jl}^{-1}(k-1) \Delta_{i'k'}^*(k, 1) \langle \delta f j_l \rangle_{k-1}^{0*} \}, \end{aligned} \quad (7.72)$$

$$q_{ii'}(k) \equiv q_{ii'}^{(1)}(k) + q_{ii'}^{(2)}(k) + q_{ii'}^{(3)}(k), \quad (7.73)$$

$$q_{ii'}^{(1)}(k) \equiv \frac{16\pi^2}{\omega^2} \langle j_i j_{i'} \rangle_k^0, \quad (7.74)$$

$$\begin{aligned} q_{ii'}^{(2)}(k) \equiv \frac{16\pi^2}{\omega^2} \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \left\{ \frac{4\pi i}{\omega - \omega_1} (\chi_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{jl}^{-1}(k-1) \Lambda_{km}^{-1}(1) \times \right. \\ \times \langle j_m j_l j_i \rangle_{1,k}^0 - \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \Lambda_{j'l'}^{*-1}(k-1) \Lambda_{k'm'}^{-1}(1) \langle j_m j_l j_i \rangle_{1,k}^{0*} \left. - \right. \\ \left. - \Delta_{ik}(k, 1) \Lambda_{kj}^{-1}(1) \langle \delta f j_j j_i \rangle_{k-1,k}^0 - \Delta_{i'k'}^*(k, 1) \Lambda_{k'j'}^{*-1}(1) \langle \delta f j_j j_i \rangle_{k-1,k}^{0*} \right\}, \end{aligned} \quad (7.75)$$

$$q_{i' i}^{(3)}(k) \equiv \frac{16\pi^2}{\omega^2} (P_{ij}(k) \delta_{i' j'} + \delta_{ij} P_{i' j'}^*(k)) \langle j j' j' \rangle_k^0 + R_{i' i}(k) + R_{i' i}^*(k), \quad (7.76)$$

$$P_{ij}(k) \equiv 4\pi i \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \{ \Delta_{ln}^{(2)}(1, k-1; k) - 2\kappa_{ikl}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{km}^{-1}(k-1) \times \\ \times \Delta_{mn}(k-1, k) - 2\Delta_{ik}(k, k+1) \Lambda_{km}^{-1}(k+1) \kappa_{mln}^{(2)}(1, k) \} \times \\ \times \Lambda_{ip}^{-1}(1) \Lambda_{nj}^{-1}(k) \langle \delta f j_p \rangle_{-1}^0 + \\ + \sum_1 \Delta_{ik}(k, 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \Delta_{lm}(1, k) \Lambda_{mj}^{-1}(k) \langle \delta f \delta f \rangle_{k-1}^0, \quad (7.77)$$

$$R_{i' i}(k) \equiv \frac{4\pi i}{\omega} \sum_1 \{ 2\kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{jl}^{-1}(k-1) \Delta_{lk'}(k-1, -1) - \\ - \Delta_{kk'}^{(2)}(1, k-1; -1) \rangle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle \delta f j_{i'} \rangle_k^0 - \frac{16\pi^2}{\omega} \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \Delta_{ij}(k, k-1) \times \\ \times \Lambda_{jk}^{-1}(k-1) \Delta_{kl}(k-1, -1) \Delta_{im}^{*-1}(1) \langle \delta f j_m \rangle_1^0 \langle \delta f j_{i'} \rangle_k^0 + \\ + 8\pi^2 \sum_1 \frac{1}{(\omega - \omega_1) \omega_1} \Delta_{ij}(k, 1) \Lambda_{jk}^{-1}(1) \Delta_{i'l}(k, k-1) \Lambda_{lm}^{*-1}(k-1) \times \\ \times \langle \delta f j_m^- \rangle_{k-1}^0 \langle \delta f j_k \rangle_1^0 - 8\pi^2 \sum_{1,2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \Delta_{ij}(k, 1) \Delta_{i'k}(-k, 2) \Lambda_{jl}^{-1}(1) \times \\ \times \Lambda_{km}^{-1}(2) \langle \delta f \delta f j_{lm} \rangle_{k,1,2}^0 + \frac{16\pi^2}{\omega} \sum_{1,2} \frac{1}{\omega_2} \Delta_{ij}(k, 1) \Lambda_{jk}^{-1}(1) \Delta_{kl}(1, 2) \times \\ \times \Lambda_{lm}^{-1}(2) \langle \delta f \delta f j_{mj} \rangle_{k,1,2}^0 + 64\pi^3 i \sum_{1,2} \frac{1}{(\omega - \omega_1) \omega_1 \omega_2} \kappa_{ijk}^{(2)}(1, k-1) \times \\ \times \Delta_{i'l}(-k, 2) \Lambda_{jm}^{-1}(1) \Lambda_{kp}^{-1}(k-1) \Lambda_{ln}^{-1}(2) \langle \delta f j_{mj} j_{lp} \rangle_{k,1,2}^0 - \\ - \frac{64\pi^3 i}{\omega} \sum_{1,2} \frac{1}{(\omega - \omega_1) \omega_2} \{ \Delta_{ik}(k, k-1+2) \Lambda_{kl}^{-1}(k-1+2) \times \\ \times \kappa_{lmj}^{(2)}(2, k-1) + 2\kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \Delta_{lm}(1, 2) - \\ - \Delta_{ijm}^{(2)}(k-1, 1, 2) \} \Lambda_{mn}^{-1}(2) \Lambda_{ip}^{-1}(k-1) \langle \delta f j_{nj} j_{i'} \rangle_{k,1,2}^0 + \\ + 128\pi^4 \sum_{1,2} \frac{1}{(\omega - \omega_1) (\omega + \omega_2) \omega_1 \omega_2} \kappa_{ijk}^{(2)}(1, k-1) \kappa_{ilm}^{(2)}(2, -k-2) \times \\ \times \Lambda_{jn}^{-1}(1) \Lambda_{kp}^{-1}(k-1) \Lambda_{mr}^{-1}(2) \Lambda_{ns}^{*-1}(k+2) \langle j_{nj} j_{ip} j_{is} \rangle_{k,1,2}^0 + \\ + \frac{256\pi^4}{\omega} \sum_{1,2} \frac{1}{(\omega - \omega_1) (\omega_1 - \omega_2) \omega_2} \{ 2\kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \kappa_{lmn}^{(2)}(2, 1-2) - \\ - \kappa_{imnj}^{(3)}(2, 1-2, k) \} \Lambda_{mp}^{-1}(2) \Lambda_{nr}^{-1}(1-2) \Lambda_{js}^{-1}(k-1) \langle j_{pj} j_{is} j_{i'} \rangle_{k,1,2}. \quad (7.78)$$

Напомним, что величины  $\Delta_{ij}(k, 1)$  и  $\Delta_{ijk}^{(2)}(1, k-1; k)$ , входящие в выражения для  $b_{i' i' k k'}(k, 1)$ ,  $P_{ij}(k)$  и  $R_{i' i}(k)$ , представляют собой

интегральные операторы, которые применяются к корреляционным функциям, стоящим справа от них. В качестве иллюстрации приведем запись некоторых из этих величин в явном виде:

$$\Delta_{ik}(k, 1) \langle \delta f j_l \rangle_{k-1}^0 = \sum \frac{\Omega^2}{\omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_l}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ \times \beta_{kk'}(1) \frac{\partial}{\partial v_{k'}} \langle \delta f(\mathbf{v}) j_l \rangle_{k-1}^0,$$

$$\Delta_{ik}(k, 1) \Delta_{i'k'}^*(k, 1) \langle \delta f \delta f \rangle_{k-1}^0 = \sum \sum \frac{\Omega^2}{\omega} \frac{\Omega'^2}{\omega} \int d\mathbf{v} \frac{v_l}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \times \\ \times \beta_{kl}(1) \frac{\partial}{\partial v_l} \int d\mathbf{v}' \frac{v'_{l'}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} \beta_{k'l'}^*(1) \frac{\partial}{\partial v'_{l'}} \langle \delta f(\mathbf{v}) \delta f(\mathbf{v}') \rangle_{k-1}^0.$$

Так как при выводе основного нелинейного уравнения (7.56) было использовано разложение по степеням напряженности электрического поля, то уравнение (7.70) применимо только в том случае, если при его решении можно использовать метод последовательных приближений. Поэтому уравнение для квадратичной корреляционной функции  $\langle E_i E_j \rangle_k$  можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\Lambda_{ij}(k) \langle E_j E_{j'} \rangle_k - 2\Lambda_{j'i'}^{*-1}(k) \sum_I \chi_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \chi_{i'j'rk'}^{(2)}(k-1, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \times \\ \times \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} - \sum_I a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_k = \\ = \Lambda_{j'i'}^{*-1}(k) \left\{ \sum_I b_{i'kkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 + q'_{i'}(k) \right\}, \quad (7.79)$$

где

$$q'_{i'}(k) \equiv q_{i'v}(k) + \frac{16\pi^2}{\omega^2} \Lambda_{j'i'}^{*-1}(k) \sum_I a_{i'jkk'}^*(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle j_l j_{l'} \rangle_k^{0*}. \quad (7.80)$$

Уравнение для кубической корреляционной функции  $\langle E_i E_{i'} \times E_{i''} \rangle_{k,k'}$  имеет вид

$$\langle E_i E_{i'} E_{i''} \rangle_{k,k'} + 2\Lambda_{ij}^{-1}(k) \chi_{jkl}^{(2)}(k-k', k') \langle E_k E_{i'} \rangle_{k-k'} \langle E_l E_{i''} \rangle_{k'} + \\ + 2\Lambda_{i'j'}^{-1}(k-k') \chi_{jkl}^{(2)}(-k, k') \langle E_k E_i \rangle_{-k} \langle E_l E_{i''} \rangle_{k'} + \\ + 2\Lambda_{i''j''}^{-1}(k') \chi_{jkl}^{(2)}(-k, k-k') \langle E_k E_i \rangle_{-k} \langle E_l E_{i'} \rangle_{k-k'} = \\ = B_{ii'j}(k, -k+k') \langle E_j E_{i''} \rangle_{k'} + B_{ii'j}(-k', k) \langle E_j E_{i'} \rangle_{k-k'} + \\ + B_{i'i''j}(-k+k', -k') \langle E_j E_i \rangle_{-k} + \\ + \Lambda_{ij}^{-1}(k) \Lambda_{i'j'}^{-1}(k-k') \Lambda_{i''j''}^{-1}(k') Q_{j'i''j''}(k), \quad (7.81)$$

где

$$B_{ijk}(k, k') = 4\pi i \Lambda_{il}^{-1}(k) \Lambda_{jm}^{-1}(k') \left\{ \frac{1}{\omega} \Delta_{mk}(k', k+k') \langle \delta f j_l \rangle_{-k}^0 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega'} \Delta_{lk}(k, k+k') \langle \delta f j_m \rangle_{-k'}^0 \right\}, \quad (7.82)$$

$$\begin{aligned}
Q_{i'i''}(k, k') &= i \frac{(4\pi)^3}{\omega\omega'(\omega-\omega')} \langle j_i j_{i'} j_{i''} \rangle_{k, k'}^0 + \\
&+ i (4\pi)^3 \left\{ \frac{1}{\omega\omega'} \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \Delta_{i'k}(-k+k', 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \langle \delta f j_{ij} j_{i''} \rangle_{k, k', 1}^0 + \right. \\
&+ \frac{1}{\omega(\omega-\omega')} \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \Delta_{i''k}(-k', 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \langle \delta f j_{ij} j_{i'} \rangle_{k, k', 1}^0 - \\
&- \left. \frac{1}{\omega'(\omega-\omega')} \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \Delta_{ik}(k, 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \langle \delta f j_{ij} j_{i''} \rangle_{k, k', 1}^0 \right\} - \\
&- (4\pi)^4 \left\{ \frac{1}{\omega'(\omega-\omega')} \sum_1 \frac{1}{(\omega-\omega_1)\omega_1} \chi_{ikl}^{(2)}(1, k-1) \Lambda_{km}^{-1}(1) \Lambda_{ln}^{-1}(k-1) \times \right. \\
&\quad \times \langle j_m j_n j_{i'} j_{i''} \rangle_{k, k', 1}^0 + \frac{1}{\omega\omega'} \times \\
&\times \sum_1 \frac{1}{(\omega-\omega'+\omega_1)\omega_1} \chi_{i'kl}^{(2)}(1, -k+k'-1) \Lambda_{km}^{-1}(1) \Lambda_{ln}^{*-1}(k-k'+1) \times \\
&\quad \times \langle j_m j_n j_{i'} j_{i''} \rangle_{k, k', 1}^0 + \frac{1}{\omega(\omega-\omega')} \times \\
&\times \left. \sum_1 \frac{1}{(\omega'+\omega_1)\omega_1} \chi_{i'kl}^{(2)}(1, -k'-1) \Lambda_{km}^{-1}(1) \Lambda_{ln}^{*-1}(k'+1) \langle j_m j_n j_{i'} j_{i''} \rangle_{k, k', 1}^0 \right\}. \tag{7.83}
\end{aligned}$$

Неоднородные части в уравнениях (7.79) и (7.81) выражаются через корреляционные функции для флуктуаций функции распределения и плотности тока в пренебрежении взаимодействием между частицами.

Четверная корреляционная функция для поля  $\langle E_i E_j E_k E_l \rangle_{k, k', k''}$  непосредственно выражается через четверную корреляционную функцию для плотности тока, связанной со случайным движением отдельных частиц в плазме:

$$\begin{aligned}
\langle E_i E_j E_k E_l \rangle_{k, k', k''} &= - \frac{(4\pi)^4}{\omega(\omega-\omega')(\omega'-\omega'')\omega''} \Lambda_{ii'}^{-1}(k) \Lambda_{jj'}^{*-1}(k-k') \times \\
&\times \Lambda_{kk'}^{-1}(k'-k'') \Lambda_{ll'}^{-1}(k'') \langle j_i j_j j_k j_l \rangle_{k, k', k''}^0. \tag{7.84}
\end{aligned}$$

Система уравнений (7.79), (7.81) и (7.84) полностью определяет последовательность корреляционных функций для флуктуационного электрического поля в плазме  $\langle E_i E_j \rangle_k$ ,  $\langle E_i E_j E_k \rangle_{k, k'}$  и  $\langle E_i E_j E_k E_l \rangle_{k, k', k''}$ . В случае потенциального электрического поля  $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{k}}{k} E$  эта система непосредственно переходит в рассмотренную ранее систему уравнений (7.20), (7.22) и (7.25).

Так же как и в случае потенциального поля, систему уравнений для спектральных корреляционных функций флуктуационного электромагнитного поля будем решать методом последовательных при-

ближней. Для этого представим квадратичную корреляционную функцию  $\langle E_i E_j \rangle_k$  в виде ряда

$$\langle E_i E_j \rangle_k = \langle E_i E_j \rangle_k^{(1)} + \langle E_i E_j \rangle_k^{(2)} + \langle E_i E_j \rangle_k^{(3)} + \dots \quad (7.85)$$

Используя уравнение (7.79), нетрудно получить выражения для отдельных членов разложения:

$$\langle E_i E_j \rangle_k^{(1)} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \Lambda_{ik}^{-1}(k) \Lambda_{jl}^{*-1}(k) \langle j_k j_l \rangle_k^0, \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle_k^{(2)} = & \frac{16\pi^2}{\omega} \Lambda_{i'k}^{-1}(k) \Lambda_{j'k}^{*-1}(k) \sum_1 \frac{1}{\omega_1} \left\{ \frac{4\pi i}{\omega - \omega_1} \chi_{i'kl}^{(2)}(k-1, 1) \times \right. \\ & \times \Lambda_{km}^{-1}(k-1) \Lambda_{ln}^{-1}(1) \langle j_{j'} j_m j_n \rangle_{k,1}^0 - \chi_{j'kl}^{(2)*}(k-1, 1) \Lambda_{km}^{*-1}(k-1) \Lambda_{ln}^{*-1}(1) \times \\ & \times \langle j_{j'} j_m j_n \rangle_{k,1}^0 - \Delta_{i'k}(k, 1) \Lambda_{kl}^{-1}(1) \langle \delta f j_{j'} j_l \rangle_{k,1}^0 - \\ & \left. - \Delta_{j'k}^*(k, 1) \Lambda_{kl}^{*-1}(1) \langle \delta f j_{j'} j_l \rangle_{k,1}^0 \right\}, \quad (7.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle_k^{(3)} = & \Lambda_{i'k}^{-1}(k) \Lambda_{j'k}^{*-1}(k) \left\{ 2 \sum_1 \chi_{i'kl}^{(2)}(k-1, 1) \chi_{j'k'l'}^{(2)*}(k-1, 1) \times \right. \\ & \times \langle E_k E_{k'} \rangle_{k-1}^{(1)} \langle E_l E_{l'} \rangle_1^{(1)} + \Lambda_{j'k}^*(k) \sum_1 a_{i'kl'l'}(k, 1) \langle E_l E_{l'} \rangle_1^{(1)} \langle E_k E_{k'} \rangle_k^{(1)} + \\ & + \Lambda_{i'k}(k) \sum_1 a_{j'kl'l'}^*(k, 1) \langle E_l E_{l'} \rangle_1^{(1)*} \langle E_k E_{k'} \rangle_k^{(1)*} + \\ & \left. + \sum_1 b_{i'j'kk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1^{(1)} + q_{i'j'}^{(3)}(k) \right\}. \quad (7.88) \end{aligned}$$

Первый член разложения (7.85), соответствующий линейному приближению, описывает спектральное распределение энергии флуктуационного электрического поля в пренебрежении взаимодействием флуктуационных полей в плазме. Спектральное распределение в этом приближении (7.86) полностью определяется заданием квадратичной корреляционной функции для флуктуаций плотности тока системы невзаимодействующих частиц  $\langle j_i j_j \rangle_k^0$ .

Второй член разложения (7.85) соответствует учету квадратичного нелинейного взаимодействия между флуктуационными электромагнитными полями. Спектральное распределение флуктуационного электрического поля (7.87) определяется кубической корреляционной функцией для флуктуаций плотности тока системы невзаимодействующих частиц  $\langle j_i j_j j_k \rangle_{k,k'}^0$  и корреляционной функцией флуктуационного изменения функции распределения и квадрата флуктуационной плотности тока в пренебрежении взаимодействием между частицами  $\langle \delta f j_i j_j \rangle_{k,k'}^0$ .

Наконец, третий член разложения (7.85) соответствует учету кубического взаимодействия между флуктуационными электромагнитными полями. Кубическое взаимодействие наряду с квадратичным приводит к спектральному распределению (7.88), которое зависит как от четверных корреляционных функций для флук-

туаций плотности тока и функции распределения системы взаимодействующих частиц  $\langle j_i j_j k l \rangle_{k, k', k''}^0$ ,  $\langle \delta f j_i j_j k \rangle_{k, k', k''}^0$  и  $\langle \delta f \delta f j_i j_j \rangle_{k, k', k''}^0$ , так и от произведений различных квадратичных корреляционных функций для этой системы  $\langle j_i j_j \rangle_k^0$ ,  $\langle \delta f j_i \rangle_k^0$  и  $\langle \delta f \delta f \rangle_k^0$ . Спектральное распределение  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(3)}$  характеризуется максимумами при собственных частотах плазмы  $\omega_k$ , а также дополнительными максимумами при комбинационных частотах, соответствующих суммам и разностям собственных частот плазмы  $\omega_k - k' \pm \omega_{k'}$ .

Если плазма находится в состоянии теплового равновесия, то  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(2)}$  и  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(3)}$  определяют малые поправки к спектральному распределению  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(1)}$ . Как было показано на примере потенциального поля, нелинейное взаимодействие волн в плазме приводит к возможности существенного усиления флуктуаций при возбуждении каких-либо собственных колебаний под воздействием внешних источников. Обозначим спектральное распределение возбуждаемых внешними источниками каких-либо собственных электромагнитных колебаний в плазме через  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(0)}$ . Это распределение удовлетворяет условию

$$\Lambda_{ij}(k) \langle E_i E_j \rangle_k^{(0)} = 0.$$

Спектральное распределение для флуктуационного поля вблизи частот собственных электромагнитных колебаний можно представить в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_k = e_i e_j^* \langle E^2 \rangle_k, \quad (7.89)$$

где  $e_i$  и  $e_j$  — векторы поляризации соответствующих собственных колебаний. Эти векторы связаны с тензором алгебраических дополнений  $\lambda_{ij}(k)$  к элементам  $\Lambda_{ij}(k)$ , значения компонент которого берутся при соответствующих собственных частотах, соотношением  $e_i e_j^* = \lambda_{ij} / \text{Sp} \lambda$ . Воспользуемся уравнением (7.79) и ограничимся учетом нелинейного взаимодействия флуктуационного поля с полем возбуждаемых колебаний в наименьшем порядке (существен учет кубического взаимодействия). В результате для спектрального распределения флуктуационного поля  $\langle \tilde{E}^2 \rangle_k$  получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle \tilde{E}^2 \rangle_k = & \left\{ 1 + \Lambda_{ij}^{-1}(k) \sum_1 a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_l^{(0)} + \right. \\ & \left. + \Lambda_{ij}^{*-1}(k) \sum_1 a_{ijkk'}^*(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_l^{(0)*} \right\} \langle E^2 \rangle_k^{(1)}, \quad (7.90) \end{aligned}$$

где  $\langle E^2 \rangle_k^{(1)}$  — спектральное распределение для флуктуационного поля в отсутствие возбуждаемых внешними источниками колебаний. При достаточно высокой интенсивности возбуждаемых внешними источниками колебаний  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(0)}$  интенсивность флуктуационных колебаний  $\langle \tilde{E}^2 \rangle_k$  может значительно превышать интенсивность тепловых флуктуаций  $\langle E^2 \rangle_k^{(1)}$ . Очевидно, индуцированное усиление

ние флуктуаций будет существенным при выполнении условия

$$\begin{aligned} & \left| \Lambda_{ji}^{-1}(k) \sum_1 a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1^{(0)} + \right. \\ & \left. + \Lambda_{ij}^{*-1}(k) \sum_1 a_{ijkk'}^*(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1^{(0)*} \right| \gg 1. \end{aligned} \quad (7.91)$$

Отметим, что индуцированное усиление потенциальных флуктуаций в плазме возможно при возбуждении как потенциальных, так и непотенциальных колебаний. В частности, индуцированное усиление потенциальных флуктуаций происходит при накачке в плазму электромагнитного излучения.

### Нелинейный сдвиг частот собственных электромагнитных колебаний

Для нахождения сдвига частот собственных электромагнитных колебаний, обусловленного нелинейным взаимодействием, используем уравнение (7.79), в котором правую часть полагаем равной нулю:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(k) \langle E_j E_{j'} \rangle - 2\Lambda_{j'i'}^{*-1}(k) \sum_1 \chi_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \times \\ \times \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} - \sum_1 a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_k = 0. \end{aligned} \quad (7.92)$$

В пренебрежении эффектами нелинейного взаимодействия уравнение для собственных колебаний имеет вид

$$\Lambda_{ij}(k) \langle E_j E_k \rangle_k^{(1)} = 0. \quad (7.93)$$

Выделяем у тензора  $\Lambda_{ij}(k)$  эрмитовскую и антиэрмитовскую части,

$$\Lambda_{ij}(k) = \Lambda_{ij}^H(k) + \Lambda_{ij}^A(k),$$

и ограничиваемся рассмотрением колебаний в области прозрачности, для которой выполняется неравенство

$$|\Lambda_{ij}^A(k)| \ll |\Lambda_{ij}^H(k)|. \quad (7.94)$$

Собственные частоты в линейном приближении  $\omega_k$  находим из условия обращения в нуль определителя, составленного из элементов эрмитовской части тензора  $\Lambda_{ij}(k)$ :

$$\text{Det}(\Lambda_{ij}^H(k)) = 0. \quad (7.95)$$

Очевидно, это условие эквивалентно

$$\text{Re} \Lambda(k) = 0, \quad (7.96)$$

где  $\Lambda(k) \equiv \Lambda_{ij}(k) \lambda_{ji}(k)$ . Подставляя спектральное распределение  $\langle E_i E_j \rangle_k^{(1)}$  в виде (7.89) в (7.93) и беря свертку, получаем

$$\Lambda(k) \langle E^2 \rangle_k^{(1)} = 0. \quad (7.97)$$



Так как величина  $\langle E^2 \rangle_k$  вещественна, то условие (7.96) (из которого определяются частоты собственных колебаний в линейном приближении) непосредственно следует из требования обращения в нуль вещественной части (7.97):

$$\operatorname{Re} \Lambda(k) \langle E^2 \rangle_k^{(1)} = 0. \quad (7.98)$$

При этом спектральное распределение, согласно (7.97), отлично от нуля только при частотах, совпадающих с собственными частотами электромагнитных колебаний в плазме:

$$\langle E^2 \rangle_k = B(k) \delta(\operatorname{Re} \Lambda(k)), \quad (7.99)$$

где коэффициент пропорциональности  $B$  выражается через эффективную температуру,

$$B(k) = 8\pi^2 \frac{|S_p \lambda|}{|\omega|} \tilde{T}(k).$$

Далее представляем частоты собственных колебаний с учетом эффектов нелинейного взаимодействия  $\tilde{\omega}_k$  в виде  $\tilde{\omega}_k = \omega_k + \Delta\omega_k$ . Предполагая, что поправки к собственным частотам, обусловленные нелинейным взаимодействием волн, малы по сравнению с самими частотами, для величин  $\Delta\omega_k$  находим выражения в явном виде. По аналогии с (7.98) частоты собственных колебаний с учетом эффектов нелинейного взаимодействия волн определяем из условия обращения в нуль вещественной части свертки уравнения (7.92):

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \{ \Lambda_{ij}(k) \langle E_j E_i \rangle_k - 2\Lambda_{ii'}^{-1}(k) \sum_I \chi_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \chi_{i'jk'}^{(2)*}(k-1, 1) \times \\ & \times \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} - \sum_I a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_i \rangle_k \} = 0. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Записываем спектральные распределения  $\langle E_i E_j \rangle_k$  в виде ряда

$$\langle E_i E_j \rangle_k = e_i e_j^* (\langle E^2 \rangle_k^{(1)} + \langle E^2 \rangle_k^{(2)} + \dots)$$

и подставляем в (7.100). Получаем

$$\operatorname{Re} \{ \Lambda(k) - \sum_I a_{ijkk'}(k, 1) \lambda_{ji}(k) \langle E_k E_{k'} \rangle_1^{(1)} (\langle E^2 \rangle_k^{(1)} + \langle E^2 \rangle_k^{(2)} + \dots) \} = 0. \quad (7.101)$$

В предположении, что  $\Delta\omega_k \ll \omega_k$ , величину  $\Lambda(\tilde{\omega}_k, \mathbf{k})$  можно разложить в ряд по степеням  $\Delta\omega_k$ :

$$\Lambda(\tilde{\omega}_k, \mathbf{k}) = \Lambda(\omega_k, \mathbf{k}) + \frac{\partial \Lambda(\omega_k, \mathbf{k})}{\partial \omega_k} \Delta\omega_k + \dots \quad (7.102)$$

Подставляя (7.102) в (7.101) и удерживая члены одинакового порядка, находим для сдвига частоты  $\Delta\omega_k$  приближенное выражение

$$\Delta\omega_k = \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \Lambda(\omega_k, \mathbf{k})}{\partial \omega_k} \right)^{-1} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a_{ijkk'}(\omega_k, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \lambda_{ji}(\omega_k, \mathbf{k}) \langle E_k E_{k'} \rangle_{k'\omega'}^{(1)}. \quad (7.103)$$

При получении (7.103) не учитывалось второе слагаемое в левой части (7.100), которое соответствует резонансному трехволновому взаимодействию, поэтому нелинейный сдвиг (7.103) связан с резонансным четырехволновым взаимодействием. Величина сдвига определяется интенсивностью волн в плазме. Если в плазме существенно только взаимодействие волн определенного типа, можно показать, что в (7.103) основной вклад вносят значения  $k'$ , близкие к  $k$ .

Определим теперь спектральное распределение электромагнитных флуктуаций в стационарной неравновесной плазме с учетом сдвига собственных частот, обусловленного нелинейным взаимодействием волн. В предположении, что распадные условия не выполняются, основное уравнение для квадратичной корреляционной функции (7.70) можно переписать в виде

$$(\Lambda_{i'j'}(k) - \sum_1 a_{i'j'kk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1)^* \times \\ \times (\Lambda_{ij}(k) - \sum_1 a_{ijl'l'}(k, 1) \langle E_l E_{l'} \rangle_1) \langle E_i E_j \rangle_k = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \langle j_{ij'} \rangle_k^0 \quad (7.104)$$

(в правой части учтено только основное слагаемое). В области частот, близких к собственным частотам плазмы, и при выполнении условия прозрачности (7.94) левую часть (7.104) с учетом (7.103) можно представить в виде

$$(\Lambda_{i'j'}^H(\omega - \Delta\omega_k, \mathbf{k}) + \Lambda_{i'j'}^A(\omega, \mathbf{k}))^* \times \\ \times (\Lambda_{ij}^H(\omega - \Delta\omega_k, \mathbf{k}) + \Lambda_{ij}^A(\omega, \mathbf{k}) \langle E_j, E_j \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \langle j_{ij'} \rangle_{k\omega}^0. \quad (7.105)$$

Таким образом, учет нелинейного взаимодействия волн сводится к сдвигу частот, входящих в эрмитовскую часть тензора  $\Lambda_{ij}(k)$ , на величину  $\Delta\omega_k$ . Используя (7.105), получаем

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \pi I_k \{ \delta(\omega - \tilde{\omega}_k) + \delta(\omega + \tilde{\omega}_k) \}, \quad (7.106)$$

где  $\tilde{\omega}_k$  — собственная частота, определенная с учетом нелинейного взаимодействия волн;

$$I_k = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\text{Sp } \lambda(\tilde{\omega}_k, \mathbf{k})}{\left| \frac{\partial \text{Re } \Lambda(\tilde{\omega}_k, \mathbf{k})}{\partial \tilde{\omega}_k} \right|} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\tilde{\omega}_k}^0}{|\text{Im } \Lambda(\tilde{\omega}_k, \mathbf{k})|}. \quad (7.107)$$

Согласно (7.106) учет нелинейного взаимодействия волн приводит к смещению максимумов в спектральном распределении флуктуаций электрического поля в плазме. Так как собственная частота с учетом нелинейного взаимодействия волн  $\tilde{\omega}_k$  является функцией  $I_k$ :  $\tilde{\omega}_k = \omega_k + \beta_k I_k$ , то соотношение (7.107) можно рассматривать в качестве уравнения для нахождения интенсивности флуктуаций

$I_k$  в области неустойчивости плазмы. Как и в случае потенциального поля, наличие решения уравнения (7.107) означает, что взаимодействие волн приводит к установлению в неравновесной плазме (неустойчивой в линейном приближении) стационарного турбулентного состояния. Решение уравнения при этом определяет стационарный уровень турбулентных электромагнитных флуктуаций.

Например, в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, при наличии дрейфа заряженных частиц возможно возникновение электромагнитных неустойчивостей, если скорость дрейфа частиц превышает фазовую скорость соответствующих электромагнитных волн. В случае электромагнитных волн, распространяющихся вдоль магнитного поля,  $\omega_k = \sqrt{\Omega^2 + k^2 c^2} \pm \omega_D$ , где знак «плюс» соответствует правой поляризации волны, а знак «минус» — левой. Учитывая сдвиги частот, обусловленные нелинейным взаимодействием, для интенсивности турбулентных флуктуаций в области неустойчивости плазмы можно получить выражение, формально совпадающее с (7.48). Уровень интенсивности электромагнитных флуктуаций в области неустойчивости плазмы может значительно превышать тепловой уровень.

## ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНОЕ СООТНОШЕНИЕ

## 1. ОБРАЩЕНИЕ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНОГО СООТНОШЕНИЯ

В случае систем, находящихся в термодинамическом равновесии, флуктуационно-диссипативное соотношение устанавливает общую связь между диссипативными свойствами и флуктуациями различных величин. Так как диссипативные свойства электродинамических систем определяются макроскопическими коэффициентами линейной связи между индуцированными токами и полями, то задание таких коэффициентов полностью определяет спектральные распределения флуктуаций электродинамических величин. Для равновесной плазмы спектральное распределение электромагнитных флуктуаций полностью определяется заданием тензора диэлектрической проницаемости. (Общий вывод флуктуационно-диссипативного соотношения для термодинамически равновесных систем дан в работах [64, 125, 159].) Наоборот, зная спектр электромагнитных флуктуаций, путем обращения флуктуационно-диссипативного соотношения можно найти диэлектрическую проницаемость среды. В случае плазмы диэлектрическая проницаемость полностью определяется заданием парной корреляционной функции для флуктуаций плотности тока в пренебрежении взаимодействием между частицами [88]. Такой подход позволяет полностью описать электродинамические свойства равновесной плазмы без использования кинетического уравнения, что оказывается весьма существенным при рассмотрении ограниченных плазменных систем, а также в ряде других случаев [92, 106].

Рассмотрим вначале случай потенциальных флуктуаций в плазме. Электродинамические свойства плазмы в линейном приближении полностью определяются заданием диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ . Если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, то справедливо флуктуационно-диссипативное соотношение, согласно которому спектральные распределения флуктуаций электрического поля и плотности заряда выражаются через мнимую часть диэлектрической проницаемости  $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ :

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi \frac{T}{\omega} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (8.1)$$

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{2\pi} \frac{T}{\omega} \frac{\text{Im } \epsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\epsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}, \quad (8.2)$$

где  $T$  — температура плазмы. Разложим левую и правую части равенства (8.2) в ряд по степеням  $e^2$  и удержим основные члены. Так как линейная электрическая восприимчивость плазмы пропорциональна  $e^2$ , то из (8.2) для мнимой части линейной электрической восприимчивости  $\text{Im } \kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  (совпадающей с мнимой частью диэлектрической проницаемости  $\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ ) получим

$$\text{Im } \kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{k^2} \frac{\omega}{T} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (8.3)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  — спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами. Полученное равенство может рассматриваться в качестве обращения соотношения (8.2).

Электрическая восприимчивость  $\kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  является аналитической функцией на комплексной плоскости  $\omega$ , имеющей линию разреза вдоль вещественной оси. Очевидно, мнимая часть функции  $\kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  при вещественных значениях  $\omega$  определяет скачок электрической восприимчивости на линии разреза:

$$\text{Im } \kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \text{Im}_\omega \kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2i} \{ \kappa^{(1)}(\omega + i0, \mathbf{k}) - \kappa^{(1)}(\omega - i0, \mathbf{k}) \}. \quad (8.4)$$

Согласно (8.3) скачок электрической восприимчивости на линии разреза, проходящего вдоль вещественной оси на комплексной плоскости  $\omega$ , определяется корреляционной функцией для флуктуаций плотности заряда системы невзаимодействующих заряженных частиц:

$$\text{Im}_\omega \kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{k^2} \frac{\omega}{T} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (8.5)$$

Это соотношение, являющееся обращением флуктуационно-диссипативного соотношения, вместе с дисперсионным соотношением Крамерса — Кронига

$$\kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im}_\omega \kappa^{(1)}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega - i0} \quad (8.6)$$

полностью определяет линейную электрическую восприимчивость плазмы в равновесном состоянии:

$$\kappa^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2}{Tk^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\omega' \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^0}{\omega' - \omega - i0}. \quad (8.7)$$

Используя явный вид корреляционной функции  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ , нетрудно убедиться, что формула (8.7) согласуется с общей формулой (2.16), если в последней в качестве функции распределения выбрать максвелловскую функцию.

Аналогично можно рассмотреть произвольные (не обязательно потенциальные) флуктуации в плазме. Обращение флуктуационно-

диссипативного соотношения в этом случае позволяет выразить антиэрмитовскую часть тензора линейной электрической восприимчивости  $\chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  (совпадающую с антиэрмитовской частью тензора диэлектрической проницаемости плазмы) через спектральное распределение флуктуаций плотности тока без учета электромагнитного взаимодействия между частицами  $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ :

$$\frac{1}{2i} \{ \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) - \chi_{ji}^{(1)*}(\omega, \mathbf{k}) \} = -\frac{2\pi}{T\omega} \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (8.8)$$

В случае изотропной плазмы соотношение (8.8) можно переписать в виде

$$\text{Im}_\omega \chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{T\omega} \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0. \quad (8.9)$$

Используя дисперсионное соотношение Крамерса — Кронига, находим

$$\chi_{ij}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2}{T\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^0}{\omega' - \omega - i0}. \quad (8.10)$$

Таким образом, зная спектр равновесных флуктуаций  $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ , можно с помощью (8.10) определить тензор диэлектрической проницаемости для равновесной плазмы, полностью описывающий ее электродинамические свойства в линейном приближении.

Флуктуационно-диссипативное соотношение допускает обобщение на случай неравновесной (но находящейся в стационарном устойчивом состоянии) плазмы. Действительно, при выводе флуктуационно-диссипативного соотношения для равновесных систем используется связь между корреляционной функцией флуктуаций тока и средней энергией, поглощаемой системой вследствие диссипации. Аналогичная связь справедлива и в отсутствие термодинамического равновесия, что и позволяет установить обобщенное флуктуационно-диссипативное соотношение, применяемое для описания флуктуаций в неравновесных системах [89, 178].

В случае потенциальных флуктуаций в неравновесной плазме обобщенное флуктуационно-диссипативное соотношение определяется общей формулой

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{\hbar\omega} - \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2\hbar \text{Im}_\omega \alpha(\omega, \mathbf{k}), \quad (8.11)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{\hbar\omega}$  — корреляционная функция, в которой усреднение производится по распределению с энергией, сдвинутой на величину  $\hbar\omega$  ( $\hbar$  — постоянная Планка);  $\alpha(\omega, \mathbf{k})$  — коэффициент линейной связи между потенциалом поля и плотностью заряда,

$$\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k^2}{2\pi} \frac{\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})}{1 + \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})}.$$

В классическом случае формулу (8.11) можно упростить, воспользовавшись разложением функции распределения  $f(E - \hbar\omega)$ ,

входящей в  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^{\hbar\omega}$ , в ряд по степеням передаваемой энергии  $\hbar\omega$ . В пределе,  $\hbar \rightarrow 0$ ,

$$-\frac{k^2}{m} \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \text{Im}_\omega \alpha(\omega, \mathbf{k}).$$

Используя эту формулу, нетрудно найти обращение обобщенного флуктуационно-диссипативного соотношения, которое связывает линейную восприимчивость неравновесной плазмы с корреляционной функцией флуктуаций плотности заряда в системе невзаимодействующих частиц:

$$\text{Im}_\omega \chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0. \quad (8.12)$$

Заметим, что соотношение (8.12) можно также получить путем непосредственного сопоставления выражений (2.16) и (6.37).

Зная скачок восприимчивости на линии разреза, проходящего вдоль вещественной оси на комплексной плоскости  $\omega$ , с помощью дисперсионного соотношения (8.6) нетрудно найти электрическую восприимчивость для неравновесной плазмы  $\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$  при любом комплексном значении  $\omega$ :

$$\chi^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\frac{\partial}{\partial \omega'} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega'}^0}{\omega' - \omega - i0}. \quad (8.13)$$

Соответственно диэлектрическая проницаемость неравновесной плазмы определяется выражением

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{2}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\frac{\partial}{\partial \omega'} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega'}^0}{\omega' - \omega - i0}. \quad (8.14)$$

Таким образом, диэлектрическая проницаемость как для равновесной, так и для неравновесной плазмы полностью определяется заданием квадратичной корреляционной функции для флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами.

Следует иметь в виду, что для описания флуктуаций в неравновесной плазме (в отличие от равновесной) задания диэлектрической проницаемости или линейной электрической восприимчивости оказывается недостаточно. Спектральное распределение флуктуаций электрического поля в неравновесной плазме выражается не только через диэлектрическую проницаемость (в отличие от (8.1)), но и через спектральное распределение флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц:

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}. \quad (8.15)$$

Следовательно, в неравновесных условиях условия диэлектрическая проницаемость не описывает полностью электродинамические свойства плазмы. Такое описание, однако, дается заданием спектрально-

го распределения для флуктуаций плотности заряда взаимодействующих частиц  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ , через которое непосредственно выражается как диэлектрическая проницаемость неравновесной плазмы, так и спектральное распределение флуктуаций в такой плазме [89].

В случае непотенциальных флуктуаций обобщенное флуктуационно-диссипативное соотношение для неравновесной изотропной плазмы можно записать в виде

$$\text{Im}_\omega \kappa_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{m} \frac{1}{\omega^2} \left( (k_i \delta_{jl} + \delta_{il} k_j) \frac{k_k}{\omega} - \delta_{ik} \delta_{jl} k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \right) \langle j_{kjl} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0, \quad (8.16)$$

где  $\langle j_{kjl} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  — спектральное распределение для флуктуаций плотности тока в неравновесной системе в отсутствие взаимодействия между частицами. С помощью (8.16) для тензора диэлектрической проницаемости неравновесной плазмы получаем выражение

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left( 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right) \delta_{ij} + \frac{2}{m\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\left( (k_i \delta_{jl} + \delta_{il} k_j) \frac{k_k}{\omega'} - \delta_{ik} \delta_{jl} k^2 \frac{\partial}{\partial \omega'} \right) \langle j_{kjl} \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^0}{\omega' - \omega - i0}. \quad (8.17)$$

Обобщение приведенных результатов на случай пространственно-неоднородной плазмы проведено в работе [106].

## 2. НЕЛИНЕЙНОЕ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНОЕ СООТНОШЕНИЕ

Флуктуационно-диссипативное соотношение, рассмотренное в предыдущем параграфе как для равновесной, так и для неравновесной плазмы, устанавливает общую связь между линейной электрической восприимчивостью и квадратичными корреляционными функциями для флуктуаций в системе. Очевидно, такая связь существует как в линейных, так и в нелинейных электродинамических системах. (Применимость флуктуационно-диссипативного соотношения к нелинейным диссипативным системам показана в работах [17, 122], обсуждение этого вопроса см. в монографии М. Л. Левина и С. М. Рытова [66].) При рассмотрении нелинейных электродинамических систем наряду с обычным флуктуационно-диссипативным соотношением можно установить ряд дополнительных соотношений, связывающих нелинейные электрические восприимчивости с корреляционными функциями более высокого порядка (по сравнению с квадратичными) для флуктуаций в системе [90, 179]. В случае плазмы подобные дополнительные соотношения удобно записать в форме обобщенного флуктуационно-диссипативного соотношения, связывающего скачки нелинейных электрических восприимчивостей плазмы  $\chi^{(n)}$  ( $\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n$ ) на линиях разреза в комплексных плоскостях  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  с спектральными корреляционными



функциями высших порядков для флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц  $\langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n}^0$ :

$$\begin{aligned} & \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \} = \\ & = \mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2; \dots; \mathbf{k}_n, \omega_n}^0, \quad (8.18) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n)$  — дифференциальный оператор  $n$ -го порядка по переменным  $\omega_1, \omega_2, \dots$  и  $\omega_n$ , зависящий от параметров  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots$  и  $\mathbf{k}_n$ . Если  $n$  — нечетное, то величина  $\text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \dots \{ \text{Im}_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \}$  вещественна; если же  $n$  — четное, то — мнима. Заметим, что обычное флуктуационно-диссипативное соотношение (8.12) является частным случаем (8.18) при  $n = 1$ .

Явный вид оператора  $\mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n)$  нетрудно получить, сопоставив общие формулы для нелинейной восприимчивости  $n$ -го порядка (2.19) и для спектральной корреляционной функции флуктуаций плотности заряда в системе невзаимодействующих частиц  $(n + 1)$ -го порядка (6.47):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) = & - \frac{i^{(n-1)}}{n!} \frac{4\pi}{(2m)^n} \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n k} \times \\ & \times \mathcal{P} \left\{ \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_2 + \dots \right. \right. \\ & \dots + \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \left. \right) \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_3} \right) \times \dots \\ & \dots \times \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \dots + \mathbf{k}_n^2 \frac{\partial}{\partial \omega_n} \right) \left. \right\}, \quad (8.19) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}$  означает всевозможные перестановки;  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n$ .

Приведем явный вид величин  $\mathcal{L}^{(n)}$  при значениях  $n = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) &= - \frac{2\pi}{m} \frac{\partial}{\partial \omega}, \\ \mathcal{L}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= - i \frac{\pi}{2m^2} \frac{1}{k_1 k_2 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|} \left\{ \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \times \right. \\ & \times \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2^2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \left( \mathbf{k}_1^2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \left. \right\}, \\ \mathcal{L}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) &= \frac{\pi}{12} \frac{1}{m^3} \frac{1}{k_1 k_2 k_3 |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|} \times \\ & \times \left\{ \mathbf{k}_1 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \left[ \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{k}_3^2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\partial}{\partial \omega_3} \right) \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3} + k_2^2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \Big] + \\ + (1 \not\geq 2) + (1 \not\geq 3) \Big\} .$$

Дисперсионное соотношение, выражающее принцип причинности, для нелинейной восприимчивости  $n$ -го порядка можно записать в виде

$$\chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_2 \dots \\ \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_n \frac{\text{Im}_{\omega'_1} \{ \text{Im}_{\omega'_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega'_n} \chi^{(n)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega'_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega'_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \}}{(\omega'_1 + \omega'_2 + \dots + \omega'_n - \omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_n - i0) \times \\ \times (\omega'_2 + \dots + \omega'_n - \omega_2 - \dots - \omega_n - i0) \dots (\omega'_n - \omega_n - i0)} . \quad (8.20)$$

Это соотношение позволяет восстановить нелинейную восприимчивость  $\chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n)$  при любых значениях комплексных частот  $\omega_1, \omega_2, \dots$  и  $\omega_n$  по скачкам восприимчивости на линиях разреза в соответствующих комплексных плоскостях. Согласно (8.18) скачки восприимчивости на линиях разреза определяются спектральными корреляционными функциями для флуктуаций плотности заряда невзаимодействующих частиц.

Таким образом, электродинамические (линейные и нелинейные) свойства плазмы полностью определяются, если задана последовательность корреляционных функций различных порядков для флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между частицами. При этом соотношение (8.18) можно рассматривать в качестве обобщения флуктуационно-диссипативного соотношения на случай нелинейной электродинамической среды.

С помощью (8.18) спектральные корреляционные функции различных порядков для флуктуаций плотности заряда и электрического поля могут быть выражены через нелинейные восприимчивости. В качестве иллюстрации приведем выражения для спектральных корреляционных функций третьего порядка:

$$\langle \rho^3 \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k} \omega} = \frac{\{ \mathcal{L}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}^{-1} \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{\varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1) \varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2) \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} , \quad (8.21)$$

$$\langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k} \omega} = \frac{64\pi^3 i}{k_1 k_2 k} \frac{\{ \mathcal{L}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}^{-1} \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{\varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1) \varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2) \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} . \quad (8.22)$$

Если плазма находится в равновесии, то  $\mathcal{L}^{(n)}$  есть оператор умножения:

$$\mathcal{L}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = i \frac{\pi}{2T^2} \frac{(\omega_1^2 k_2 k + \omega_2^2 k_1 k) k_1 k_2 - \omega_1 \omega_2 (k_1^2 k_2 k + k_2^2 k_1 k)}{k_1 k_2 k (k_1^2 k_2^2 - k_1 k_2^2)} . \quad (8.23)$$

Спектральные кубические корреляционные функции для флуктуаций плотности заряда и электрического поля при этом принимают вид

$$\langle \rho^3 \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k} \omega} = -\frac{2i}{\pi} T^2 \frac{k_1 k_2 k (k_1^2 k_2^2 - k_1 k_2^2)}{(\omega_1^2 k_2 k + \omega_2^2 k_1 k) k_1 k_2 - \omega_1 \omega_2 (k_1^2 k_2 k + k_2^2 k_1 k)} \times \\ \times \frac{\text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{\varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1) \varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2) \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})}, \quad (8.24)$$

$$\langle E^3 \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k} \omega} = 128\pi^2 T^2 \frac{k_1 k_2 k (k_1^2 k_2^2 - k_1 k_2^2)}{(\omega_1^2 k_2 k + \omega_2^2 k_1 k) k_1 k_2 - \omega_1 \omega_2 (k_1^2 k_2 k + k_2^2 k_1 k)} \times \\ \times \frac{\text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{\varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1) \varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2) \varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})}. \quad (8.25)$$

Аналогично можно записать спектральные корреляционные функции более высокого порядка для флуктуаций плотности заряда и электрического поля.

Используя явный вид спектральных корреляционных функций для флуктуаций плотности заряда в отсутствие взаимодействия между частицами, нетрудно установить общее интегральное соотношение, связывающее линейную и нелинейные электрические восприимчивости различного порядка для плазмы. Действительно, согласно (6.47) справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k}_2 \omega_2; \dots; \mathbf{k}_n \omega_n}^0 = 2\pi e \langle \rho^n \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k}_2 \omega_2; \dots; \mathbf{k}_{n-1} \omega_{n-1}}^0. \quad (8.26)$$

Выражая с помощью (8.18) спектральные корреляционные функции  $\langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n \omega_n}^0$  и  $\langle \rho^n \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \dots; \mathbf{k}_{n-1} \omega_{n-1}}^0$  через скачки соответствующих нелинейных восприимчивостей на линиях разреза в комплексных плоскостях частот, получаем следующую общую формулу:

$$\mathcal{L}^{(n-1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \{ \mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \}^{-1} \times \\ \times \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \} = \\ = 2\pi e \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega_{n-1}} \chi^{(n-1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}) \} \dots \}. \quad (8.27)$$

В частности, диэлектрическая проницаемость и квадратичная нелинейная восприимчивость плазмы связаны соотношением

$$\mathcal{L}^{(1)}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \{ \mathcal{L}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}^{-1} \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \} = \\ = 2\pi e \text{Im}_{\omega_1} \varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1). \quad (8.28)$$

Для случая равновесной плазмы это соотношение принимает вид

$$T \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \frac{\text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{(\omega_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + \omega_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \omega_1 \omega_2 (k_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + k_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k})} = \\ = i \frac{\pi}{2} \frac{e}{\omega_1} \frac{k_1}{k_2 k} \frac{\text{Im}_{\omega_1} \varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1)}{k_1^2 k_2^2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^2}. \quad (8.29)$$

Используя (6.47), можно получить также ряд других соотношений для нелинейных восприимчивостей различных порядков.

### 3. ПРАВИЛА СУММ

Нелинейные электрические восприимчивости плазмы (так же как и диэлектрическая проницаемость) удовлетворяют определенным правилам сумм. Используя формулу (6.47), спектральную корреляционную функцию  $\langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \dots; \mathbf{k}_n \omega_n}^0$  нетрудно проинтегрировать по всем частотам:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \langle \rho^{n+1} \rangle_{\mathbf{k}_1 \omega_1; \mathbf{k}_2 \omega_2; \dots; \mathbf{k}_n \omega_n}^0 = (2\pi)^n e^{n+1} n_0. \quad (8.30)$$

Выражая корреляционную функцию  $\langle \rho^{n+1} \rangle_{1, 2, \dots, n}^0$  с помощью формулы (8.18) через нелинейную восприимчивость  $\chi^{(n)}(1, 2, \dots, n)$ , получаем интегральное правило сумм:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \{ \mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \}^{-1} \times \\ \times \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega_n} \chi^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \} = (2\pi)^n e^{n+1} n_0. \quad (8.31)$$

Это соотношение оказывается практически полезным, если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия. В этом случае величина  $\{ \mathcal{L}^{(n)}(1, 2, \dots, n) \}^{-1}$  является оператором умножения. В качестве примера приведем правила сумм для диэлектрической проницаемости и квадратичной нелинейной восприимчивости:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\text{Im}_{\omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\omega} = \frac{4\pi^2 e^2 n_0}{T k^2}, \\ (k_1^2 k_2^2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \frac{\text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{(\omega_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + \omega_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \omega_1 \omega_2 (k_2^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + k_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k})} = \\ = i \frac{2\pi^3 e^3 n_0}{T^2 k_1 k_2 k}. \quad (8.32)$$

Для равновесной плазмы справедливы также правила сумм вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_n \omega_1 \omega_2 \{ \mathcal{L}^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \}^{-1} \times$$

$$\begin{aligned} \times \operatorname{Im}_{\omega_1} \{ \operatorname{Im}_{\omega_2} \dots \{ \operatorname{Im}_{\omega_n} \kappa^{(n)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \} \dots \} = \\ = (2\pi)^n e^{n+1} \frac{T}{m} n_0 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Приведем простейшие примеры таких правил:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \operatorname{Im}_{\omega} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) &= \frac{4\pi^2 e^2 n_0}{m}, \\ (k_1^2 k_2^2 - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2^2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \frac{\omega_1 \omega_2 \operatorname{Im}_{\omega_1} \{ \operatorname{Im}_{\omega_2} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \}}{(\omega_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + \omega_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \omega_1 \omega_2 (k_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + k_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k})} = \\ = i \frac{2\pi^3 e^3 n_0}{m T k_1 k_2 k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Рассмотрим правила сумм для нелинейных восприимчивостей  $\kappa^{(2)}(1, 2)$  и  $\kappa^{(3)}(1, 2, 3)$ , представляющие собой аналог правила сумм для линейной проводимости. Запишем для квадратичной нелинейной восприимчивости  $\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  дисперсионное соотношение по одному из частотных аргументов, например по частоте  $\omega_1$ :

$$\kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_1 \frac{\operatorname{Im} \kappa^{(2)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\omega'_1 - \omega_1 - i0} \quad (8.35)$$

(частота  $\omega_2$  при этом предполагается вещественной). Выделяем в приведенном соотношении вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_1 \frac{\operatorname{Im} \kappa^{(2)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\omega'_1 - \omega_1}, \\ \operatorname{Im} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_1 \frac{\operatorname{Re} \kappa^{(2)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)}{\omega_1 - \omega'_1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Интересующее нас правило сумм можно получить из второго соотношения, если в нем перейти к пределу  $\omega_1 \rightarrow \infty$  и  $\omega_2 \rightarrow \infty$ . Действительно, разлагая подынтегральное выражение в правой части равенства в ряд по степеням отношения  $\omega'_1/\omega_1$  и учитывая нечетный характер вещественной части нелинейной восприимчивости ( $\operatorname{Re} \kappa^{(2)}(-\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = -\operatorname{Re} \kappa^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ ), получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'_1 \frac{\operatorname{Re} \kappa^{(2)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_2)}{\omega_1 - \omega'_1} = \\ = \lim_{\omega_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_1^2} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} d\omega'_1 \omega'_1 \operatorname{Re} \kappa^{(2)}(\omega'_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_2). \end{aligned}$$

Заметим, что под знаком интеграла следует использовать выражение для вещественной части нелинейной восприимчивости при  $\omega_2 \rightarrow \infty$  и конечном значении  $\omega_1$ .

Предельное значение для мнимой части нелинейной восприимчивости  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$  нетрудно найти с помощью формулы (2.30), полученной в гидродинамическом приближении:

$$\text{Im } \chi^{(2)}(\omega_1 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_1; \omega_2 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_2) = -\frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} R(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad (8.37)$$

где

$$R(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \begin{cases} \frac{k_1}{k_2 k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}, & \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \infty, \\ \frac{k_2}{k_1 k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}, & \frac{\omega_1}{\omega_2} \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Таким образом, для квадратичной нелинейной восприимчивости получаем следующие общие правила сумм:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \omega_1 \text{Re } \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_2) &= -\frac{\pi}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_2^2} \frac{k_1}{k_2 k} \mathbf{k}_2 \mathbf{k}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_2 \omega_2 \text{Re } \chi^{(2)}(\omega_1 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) &= -\frac{\pi}{2} \frac{e}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_1^2} \frac{k_2}{k_1 k} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что квадратичная нелинейная восприимчивость, определяемая общей формулой (2.16), тождественно удовлетворяет полученным правилам. (Правила сумм (8.38) установлены в работе [145].)

Аналогично можно получить правила сумм для кубической нелинейной восприимчивости:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_1 \omega_1 \text{Im } \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_2; \omega_3 \rightarrow \infty, \mathbf{k}_3) = \\ &= \frac{\pi}{6} \frac{e^2}{m^2} \frac{\Omega^2}{\omega_2 \omega_3 (\omega_2 + \omega_3)^2} \frac{k_1}{k_2 k_3 k} \left\{ 2\mathbf{k}_2 \mathbf{k} \mathbf{k}_3 \mathbf{k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_2}{\omega_3} k_3^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k} + \frac{\omega_3}{\omega_2} k_2^2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k} \right\}. \end{aligned} \quad (8.39)$$

#### 4. НЕЛИНЕЙНОЕ ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНОЕ СООТНОШЕНИЕ В СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

Обобщенное нелинейное флуктуационно-диссипативное соотношение можно сформулировать также для произвольных электромагнитных (не обязательно потенциальных) флуктуаций [60]. В случае произвольного электромагнитного поля обобщенное флуктуационно-диссипативное соотношение устанавливает связь между

мнимыми частями тензорных нелинейных восприимчивостей и спектральными распределениями флуктуаций тока без учета взаимодействия между частицами:

$$\begin{aligned} & \text{Im}_{\omega_1} \{ \text{Im}_{\omega_2} \dots \{ \text{Im}_{\omega_n} \mathcal{X}_{ijk\dots pr}^{(n)}(1, 2, \dots, n-1, n) \} \dots \} = \\ & = \mathcal{L}_{ijk\dots pr; i'j'k'\dots p'r'}^{(n)}(1, 2, \dots, n-1, n) \langle j_i j_j j_k \dots j_{p'} j_{r'} \rangle_{1,2,\dots,n-1,n}^0 \end{aligned} \quad (8.40)$$

По дважды встречающимся индексам в (8.40) производится суммирование. Дифференциальный оператор  $\mathcal{L}_{ijk\dots pr; i'j'k'\dots p'r'}^{(n)}(1, 2, \dots, n-1, n)$  в общем случае определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ijk\dots pr; i'j'k'\dots p'r'}^{(n)}(1, 2, \dots, n-1, n) & = \frac{(-i)^{n-1}}{n!} \frac{4\pi}{(2m)^n} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \dots \omega_n \omega} \times \\ & \times \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{\omega_1} (k_{1i} k_{1i'} \delta_{jj'} + \delta_{ii'} k_{1j} k_{1j'}) - \delta_{ii'} \delta_{jj'} \mathbf{k}_1 \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega_2} [k_{2i} k_{2i'} \delta_{jj''} \delta_{kk''} + \delta_{ii''} k_{2j} k_{2j''} \delta_{kk''} + \delta_{ii''} \delta_{jj''} (\mathbf{k}_2 + \dots \right. \\ & \dots + \mathbf{k}_n)_k k_{2k''}] - \delta_{ii''} \delta_{jj''} \delta_{kk''} \left[ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\omega_3} [k_{3i} k_{3i'} \delta_{jj'''} \delta_{kk'''} \delta_{ll'''} + \delta_{ii'''} k_{3j} k_{3j'''} \delta_{kk'''} \delta_{ll'''} + \right. \\ & + \delta_{ii'''} \delta_{jj'''} k_{3k} k_{3k'''} \delta_{ll'''} + \delta_{ii'''} \delta_{jj'''} \delta_{kk'''} (\mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n)_l k_{3l'''}] - \\ & - \delta_{ii'''} \delta_{jj'''} \delta_{kk'''} \delta_{ll'''} \left[ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_3 + \dots + \mathbf{k}_n) \frac{\partial}{\partial \omega_3} \right] \right\} \times \dots \\ & \dots \times \left\{ \frac{1}{\omega_n} [k_{ni(n)} k_{ni'} \delta_{j(n)r} \delta_{k(n-1)r'} \dots \delta_{p''p'} \delta_{r'r'} + \right. \\ & + \delta_{i(n)i'} k_{nj(n)} k_{nj'} \delta_{k(n-1)r'} \dots \delta_{p''p'} \delta_{r'r'} + \dots + \delta_{i(n)i'} \delta_{j(n)r} \delta_{k(n-1)r'} \dots \\ & \dots k_{np''} k_{nr'} \delta_{r'r'} + \delta_{i(n)i'} \delta_{j(n)r} \delta_{k(n-1)r'} \dots \delta_{p''p'} k_{nr} k_{nr'} - \\ & - \delta_{i(n)i'} \delta_{j(n)r} \delta_{k(n-1)r'} \dots \delta_{p''p'} \delta_{r'r'} \left[ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_n \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \dots \right. \\ & \left. \left. \dots + k_n^2 \frac{\partial}{\partial \omega_n} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

где  $\mathcal{P}$  означает симметризацию относительно аргументов  $1, 2, \dots, n-1, n$  и соответствующих индексов  $i, j, k, \dots, p, r$ .

Приведем явные выражения для оператора (8.41) при  $n = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij; i'j'}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) & = \frac{2\pi}{m} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \frac{1}{\omega} (k_i k_{i'} \delta_{jj'} + \delta_{ii'} k_j k_{j'}) - \delta_{ii'} \delta_{jj'} k^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \right\}, \quad (8.42) \\ \mathcal{L}_{ijk; i'j'k'}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) & = -i \frac{\pi}{2m^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega} \times \\ & \times \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{\omega_1} (k_{1i} k_{1i'} \delta_{jj''} + \delta_{ii''} k_{1j} k_{1j''}) - \delta_{ii''} \delta_{jj''} \mathbf{k}_1 \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right\} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\omega_2} [(k_{2i} k_{2i'} \delta_{j'j''} + \delta_{i'i''} k_{2j'} k_{2j''}) \delta_{kk'} + \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} k_{2k} k_{2k'}] - \right. \\ \left. - \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} \delta_{kk'} \left( \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + k_2^2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right) \right\}, \quad (8.43)$$

$$\mathcal{L}_{ijk;l;i'j'k'l'}^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) = -\frac{\pi}{12m^3} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega} \times \\ \times \mathcal{P} \left\{ \frac{1}{\omega_1} (k_{1i} k_{1i'} \delta_{j'j''} + \delta_{i'i''} k_{1j'} k_{1j''}) - \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} \mathbf{k}_1 \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega_2} [(k_{2i} k_{2i'} \delta_{j'j''} + \delta_{i'i''} k_{2j'} k_{2j''}) \delta_{kk'} + \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)_R k_{2k'}] - \right. \\ \left. - \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} \delta_{kk'} \left[ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{\partial}{\partial \omega_2} \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega_3} [(k_{3i} k_{3i'} \delta_{j'j''} \delta_{kk'} + \delta_{i'i''} k_{3j'} k_{3j''} \delta_{kk'} + \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} k_{3k} k_{3k'}) \delta_{ll'} + \right. \\ \left. + \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} \delta_{kk'} k_{3l} k_{3l'}] - \delta_{i'i''} \delta_{j'j''} \delta_{kk'} \delta_{ll'} \left[ \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + k_3^2 \frac{\partial}{\partial \omega_3} \right] \right\}. \quad (8.44)$$

Если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, то оператор  $\mathcal{L}_{ijk\dots pr; i'j'k'\dots p'r'}^{(n)}$  (1, 2, ..., n) сводится к оператору умножения. В качестве иллюстрации приведем выражение  $\mathcal{L}_{ijk; i'j'k'}^{(2)}$  (1, 2) в явном виде для равновесной плазмы:

$$\mathcal{L}_{ijk; i'j'k'}^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = i \frac{\pi}{2T^2} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 - k_1 k_2^2} \times \\ \times \left\{ \frac{T}{m} [\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k} \cdot k_{2i} - \mathbf{k}_2 \mathbf{k} \cdot k_{1i}) (k_{1i'} - k_{2i'}) \delta_{jj'} \delta_{kk'} + \right. \\ + \mathbf{k}_1 \mathbf{k} (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdot k_{2k} - k_2^2 \cdot k_{1k}) (k_{1k'} - k_{2k'}) \delta_{ii'} \delta_{jj'} + \\ + \mathbf{k}_2 \mathbf{k} (k_1^2 k_{2j} - \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \cdot k_{1j}) (k_{1j'} - k_{2j'}) \delta_{ii'} \delta_{kk'}] + \\ \left. + [(\omega_2^2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k} + \omega_1^2 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - \omega_1 \omega_2 (\mathbf{k}_1 \mathbf{k} \cdot k_2^2 + \mathbf{k}_2 \mathbf{k} \cdot k_1^2)] \delta_{ii'} \delta_{jj'} \delta_{kk'} \right\}. \quad (8.45)$$

В отличие от продольного случая величина  $\{\mathcal{L}_{ijk; i'j'k'}^{(2)}(1, 2)\}^{-1}$  содержит кроме слагаемых, пропорциональных квадрату температуры  $T^2$ , также слагаемые, пропорциональные  $T$ .

Используя соотношения причинности (8.20), нетрудно восстановить тензорную нелинейную восприимчивость  $\kappa_{ij\dots pr}^{(n)}$  (1, 2, ..., n) при любых значениях комплексных частот по ее мнимой части, определяемой обобщенным флуктуационно-диссипативным соотношением (8.41). Таким образом, согласно (8.20) и (8.41) по заданной последовательности спектральных корреляционных функций для флуктуаций плотности тока в пренебрежении взаимодействием между частицами можно получить любую информацию об электродинамических свойствах неравновесной изотропной плазмы. Представляется очевидным обобщение полученных результатов на случай магнитоактивной плазмы.



## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦ

Уравнение для одночастичной функции  
и интеграл столкновений

В предыдущих главах рассматривались стационарные и пространственно-однородные распределения частиц в плазме и изучались спектральные распределения флуктуационных полей, также стационарные во времени и однородные в пространстве. Если плазма находится в равновесном состоянии, то распределения частиц и спектральные распределения флуктуационных полей стационарны и пространственно-однородны. В плазме, находящейся в неравновесном состоянии, возможны медленные необратимые процессы, характеризующиеся временами релаксации, значительно превышающими времена свободного пробега частиц. Особенности таких необратимых процессов обусловлены дальнедействующим характером электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами. Временная и пространственная зависимость функций распределения частиц при этом определяется кинетическими уравнениями, в которых интегралы столкновений как раз и обусловлены наличием электромагнитной корреляции между частицами.

Ограничимся учетом кулоновского взаимодействия между частицами и воспользуемся уравнениями для микроскопической плотности и микроскопического самосогласованного поля в плазме (6.61). Определим одночастичную функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  как среднее от микроскопической плотности по распределению Лиувилля, не предполагая, однако, что она стационарна и однородна:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \langle \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rangle. \quad (9.1)$$

Усредняя систему микроскопических уравнений (6.61), получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} &= - \frac{e}{m} \left\langle \delta \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f \right\rangle, \\ \operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} &= 4\pi e \int d\mathbf{v} f, \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

где  $\bar{\mathbf{E}}$  — усредненное самосогласованное поле;  $\delta \mathbf{E}$  — флуктуационное электрическое поле,

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{E} - \bar{\mathbf{E}}; \quad (9.3)$$

$$\delta f \text{ — флуктуация функции распределения,} \\ \delta f = \mathcal{F} - f. \quad (9.4)$$

Правая часть первого уравнения системы (9.2) представляет собой интеграл столкновений.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением случая, когда усредненное самосогласованное поле мало и этим полем в системе (9.2) можно пренебречь. В этом случае уравнение для одночастичной функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \delta f \right\rangle. \quad (9.5)$$

В правую часть этого уравнения входит среднее значение произведения флуктуационного электрического поля  $\mathbf{E}$  и флуктуации функции распределения  $\delta f$ , взятых в одной и той же точке пространства в один и тот же момент времени (операции усреднения и дифференцирования по скорости можно поменять местами). Такое среднее может быть выражено через спектральную корреляционную функцию для соответствующих величин:

$$\langle \mathbf{E} \delta f(\mathbf{v}) \rangle = \text{Re} \sum_{\omega, \mathbf{k}} \langle \mathbf{E} \delta f(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (9.6)$$

В случае стационарного и однородного распределения частиц в плазме спектральная корреляционная функция  $\langle \mathbf{E} \delta f(\mathbf{v}) \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  определяется выражением (6.89). Очевидно, указанным выражением можно воспользоваться для вычисления правой части (интеграла столкновений) в (9.5), если время релаксации и пространственный параметр неоднородности для функции  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , определяемые с помощью уравнения (9.5), окажутся большими по сравнению с характерными временем корреляции и корреляционной длиной.

При кулоновском взаимодействии частиц характерное время корреляции по порядку величины равно обратной ленгмюровской частоте  $\Omega^{-1}$ , а корреляционная длина определяется дебаевским радиусом  $a$ . Поэтому, если  $\tau \gg \Omega^{-1}$  и  $l \gg a$  ( $\tau$  и  $l$  — время и длина релаксации для одночастичной функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ), уравнение (9.5) можно записать в форме кинетического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = J(f), \quad (9.7)$$

где интеграл столкновений  $J(f)$  в соответствии с (6.89) и (9.6) определяется выражением [81, 105]

$$J(f) = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \text{Im} \frac{1}{\varepsilon^*(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})} f + \frac{1}{8\pi m} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\}. \quad (9.8)$$

Спектральное распределение флуктуаций электрического поля  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  выражается через одночастичную функцию распределения  $f$  согласно (6.37) и (6.88), а диэлектрическая проницаемость плазмы

$\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$  — согласно (2.15). Поэтому интеграл столкновений  $J(f)$  является функционалом функции распределения  $f$  и, таким образом, уравнение (9.7) оказывается замкнутым. Это уравнение можно рассматривать в качестве кинетического уравнения, определяющего одночастичную функцию распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Заметим, что пространственно-временная зависимость интеграла столкновений  $J(f)$  определяется пространственно-временной зависимостью функции распределения  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ .

При учете движения различных компонент плазмы получается система кинетических уравнений вида (9.7) для функций распределения отдельных компонент. Приведем явные выражения для спектрального распределения флуктуаций электрического поля и диэлектрической проницаемости плазмы, определяющие функциональную зависимость интегралов столкновений от одночастичных функций распределения:

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{32\pi^2}{k^2} \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \sum e'^2 \int d\mathbf{v}' \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') f'(\mathbf{v}'), \quad (9.9)$$

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \sum \frac{4\pi e'^2}{m'k^2} \int d\mathbf{v}' \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} \mathbf{k} \frac{\partial f'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \quad (9.10)$$

(суммирование производится по различным компонентам плазмы). Система кинетических уравнений с указанными интегралами столкновений полностью определяет одночастичные распределения в плазме с учетом кулоновского взаимодействия между частицами.

Воспользуемся теперь соотношениями (9.9) и (9.10) и выразим интеграл столкновений (9.8) непосредственно через функции распределения частиц в плазме. Замечая, что

$$\text{Im } \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = - \sum \frac{4\pi^2 e'^2}{m'k^2} \int d\mathbf{v}' \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') \mathbf{k} \frac{\partial f'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'}, \quad (9.11)$$

получаем

$$J(f) = \sum \frac{16\pi^3 e^2 e'^2}{mm'} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^4} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int d\mathbf{v}' \frac{\delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \mathbf{k}\mathbf{v}')}{|\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})|^2} \times \\ \times \left\{ \mathbf{k} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} f'(\mathbf{v}') - f(\mathbf{v}) \mathbf{k} \frac{\partial f'(\mathbf{v}')}{\partial \mathbf{v}'} \right\}. \quad (9.12)$$

Интеграл столкновений для системы частиц с кулоновским взаимодействием в такой форме впервые получен Р. Балеску [119] и А. Ленардом [160] (интеграл столкновений Балеску — Ленарда) путем решения интегрального уравнения для двухчастичной корреляционной функции.

Интеграл столкновений Балеску — Ленарда определяет изменение одночастичной функции распределения, обусловленное кулоновским взаимодействием между заряженными частицами с учетом динамической поляризации плазмы<sup>1</sup>. Динамическая поляри-

<sup>1</sup> Кинетические уравнения для плазмы в магнитном поле с учетом динамической поляризации рассматривались в работах [45, 169].

зация плазмы проявляется в ослаблении поля движущегося заряда со скоростью  $\mathbf{v}$  в  $\epsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})$  раз. Учет этого эффекта и приводит к появлению множителя  $|\epsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})|^{-2}$  под знаком интеграла в (9.12). Заметим, что в результате интегрирования по  $k$  в (9.12) возникает логарифмическая расходимость при больших значениях  $k$ . Это связано с тем, что большие значения  $k$  соответствуют малым расстояниям, на которых кулоновское взаимодействие, вообще говоря, не малó. Поэтому область интегрирования по  $k$  необходимо ограничивать верхним пределом  $k_{\max}$ , в качестве которого следует выбирать величину, обратно пропорциональную расстоянию наибольшего сближения двух заряженных частиц. Так как расходимость интеграла носит логарифмический характер, то неопределенность в выборе  $k_{\max}$  мало сказывается на величине интеграла.

Если пренебречь эффектом динамической поляризации, т. е. заменить диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\mathbf{kv}, \mathbf{k})$  единицей, то (9.12) переходит в интеграл столкновений Ландау (при этом в (9.12) область интегрирования по  $k$  необходимо ограничить со стороны малых значений  $k$ , выбрав  $k_{\min} \simeq \frac{1}{a}$ ). Кинетическое уравнение с интегралом столкновений Ландау позволяет вычислять электрическую проводимость, а также коэффициенты вязкости и теплопроводности плазмы, определяемые столкновениями заряженных частиц. Следует, однако, иметь в виду, что замена интеграла столкновений Балеску — Ленарда более простым интегралом столкновений Ландау не всегда оправдана. В неравновесной плазме с высоким уровнем коллективных флуктуаций учет динамической поляризации играет определяющую роль (более детально этот вопрос рассмотрен в монографии [85]).

Остановимся вкратце на некоторых основных свойствах интеграла столкновений (9.12) (свойства интеграла столкновений Балеску — Ленарда и других интегралов столкновений подробно рассмотрены в монографиях [57, 85]). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что интеграл столкновений (9.12) обращается в нуль, если в качестве одночастичных функций распределения выбраны максвелловские функции

$$f(\mathbf{v}) = n_0 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T}} \quad (9.13)$$

с одинаковыми значениями  $T$  и  $\mathbf{u}$  для всех компонент плазмы. Следовательно, функции распределения Максвелла (9.13) являются решениями кинетических уравнений (9.7) с интегралами столкновений (9.12). Используя кинетические уравнения (9.7), легко показать, что полная энтропия системы возрастает и достигает максимального значения, когда функции распределения становятся равновесными, т. е. устанавливаются распределения Максвелла для всех компонент плазмы с одинаковыми значениями температуры  $T$  и макроскопической скорости  $\mathbf{u}$ .

Запись интеграла столкновений в виде (9.8) чрезвычайно удобна, так как позволяет представить кинетическое уравнение (9.7) в форме уравнения Фоккера — Планка, в котором эффект столкновений сводится к динамическому трению и диффузии частиц в пространстве скоростей [105]. Рассматривая ради простоты пространственно-однородный случай, уравнение Фоккера — Планка можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial v_i} (D_i f) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D_{ij} f), \quad (9.14)$$

где  $D_i$  — коэффициент динамического трения, определяемый как среднее изменение скорости частицы за единицу времени,

$$D_i \equiv \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t}; \quad (9.15)$$

$D_{ij}$  — тензор коэффициентов диффузии в пространстве скоростей,

$$D_{ij} \equiv \frac{\langle \Delta v_i \Delta v_j \rangle}{\Delta t}. \quad (9.16)$$

При выводе уравнения Фоккера — Планка предполагается, что малые изменения скорости  $\Delta v_i$  наиболее вероятны и степенями  $\Delta v_i$  выше второй можно пренебречь. Непосредственное сравнение правой части уравнения (9.14) с (9.8) позволяет получить следующие выражения для коэффициентов трения  $D_i$  и диффузии  $D_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} D_i &\equiv \frac{v_i}{v} D, \\ D &= \frac{e^2}{2\pi^2 m v} \operatorname{Im} \int d\mathbf{k} \frac{\omega}{k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} + \frac{e^2}{16\pi^3 m^2 v} \int d\mathbf{k} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

$$D_{ij} = \frac{e^2}{8\pi^3 m^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad \omega = \mathbf{k}v. \quad (9.18)$$

Таким образом, коэффициенты динамического трения и диффузии полностью определяются спектральным распределением флуктуаций электрического поля в плазме. Возможность сведения кинетического уравнения к уравнению Фоккера — Планка обусловлена тем, что вследствие дальнедействующего характера кулоновских сил в плазме существенную роль играют лишь далекие столкновения, при которых происходят отклонения сталкивающихся частиц только на малые углы и с малым изменением скорости.

Уравнение Фоккера — Планка с коэффициентами трения и диффузии (9.17) и (9.18) можно непосредственно вывести, рассматривая движение некоторой пробной частицы и учитывая ее взаимодействие с поляризационным и флуктуационным полями в плазме. Действительно, запишем уравнение движения пробной частицы в виде

$$\dot{v}_i(t) = \frac{e}{m} E_i(\mathbf{r}(t), t), \quad (9.19)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)$  — электрическое поле в точке нахождения частицы ( $e$  и  $m$  — заряд и масса частицы). Интегрируя уравнение движе-

ния, получаем

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{e}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{E}(\mathbf{r}(t''), t''), \quad (9.20)$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — радиус-вектор и скорость частицы в начальный момент времени  $t_0$ . Выбирая отрезок времени  $\Delta t$  достаточно большим по сравнению с периодом случайных флуктуаций поля в плазме, но малым по сравнению со временем, за которое движение частицы существенно изменяется, уравнение движения (9.19) приближенно можно переписать в виде

$$\dot{v}_i(t) = \frac{e}{m} E_i(\mathbf{r}_0(t), t) + \frac{e^2}{m^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{r}_0(t''), t'') \frac{\partial}{\partial r_{0j}} E_i(\mathbf{r}_0(t), t) \quad (9.21)$$

$$(\mathbf{r}_0(t) \equiv \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0), \quad t \equiv t_0 + \Delta t).$$

Усредняя это равенство, находим коэффициент динамического трения (9.17). Заметим, что величина  $D$  непосредственно связана с потерями энергии направленного движения частицы за единицу времени  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  соотношением

$$D = \frac{1}{mv} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \quad (9.22)$$

Первое слагаемое в выражении (9.17) для  $D$  определяет динамическое трение пробной частицы, обусловленное ее взаимодействием с электрическим полем, возникающим в плазме при движении самой частицы. Это взаимодействие приводит к обычным поляризационным потерям энергии частицы, и поэтому связанное с ними динамическое трение можно назвать поляризационным трением. Второе слагаемое определяет дополнительное динамическое трение пробной частицы, связанное с пространственно-временными корреляциями флуктуационных электрических полей в плазме, приводящими к дополнительным потерям энергии направленного движения частицы. Заметим, что динамическое трение частицы обусловлено только флуктуациями продольного электрического поля.

Если в плазме движется не одна, а совокупность пробных частиц, характеризуемая функцией распределения  $f(\mathbf{v}, t)$ , то, зная их коэффициент динамического трения, можно определить изменение функции распределения, обусловленное поляризационными и флуктуационными потерями:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{p+f} = - \frac{\partial}{\partial v_i} (Dif). \quad (9.23)$$

Это изменение происходит очень медленно, так как энергия взаимодействия пробных частиц с полем в плазме предполагается малой по сравнению с их кинетической энергией. Величина  $\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{p+f}$  не

определяет, однако, полностью изменение функции распределения пробных частиц, так как наряду с указанным изменением следует учесть еще и изменение функции распределения, вызванное диффузией пробных частиц в пространстве их скоростей. Диффузия пробных частиц представляет собой медленный процесс, обусловленный, как и флуктуационные потери энергии, флуктуациями поля в плазме. Поскольку происхождение диффузионных коэффициентов чисто флуктуационное, при нахождении  $D_{ij}$  достаточно воспользоваться уравнением движения пробной частицы (9.21), в котором учтены только члены, линейные по полю. Легко показать, что

$$D_{ij} = \frac{e^2}{m^2} \int_0^{\Delta t} d\xi \langle E_j(\mathbf{r}_0(t - \xi), t - \xi) E_i(\mathbf{r}_0(t), t) \rangle, \quad (9.24)$$

и так как согласно условию величина  $\Delta t$  велика по сравнению с периодом флуктуаций поля, то ее можно устремить к бесконечности. Переходя в (9.24) к компонентам Фурье, получаем (9.18).

В изотропной плазме тензор коэффициентов диффузии удобно представить в виде

$$D_{ij} = \frac{v_i v_j}{v^2} D_{\parallel} + \left( \delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{v^2} \right) D_{\perp}, \quad (9.25)$$

$$D_{\parallel} = \frac{e^2}{8\pi^3 m^2 v} \int d\mathbf{k} \frac{\omega^2}{k^2} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (9.26)$$

$$D_{\perp} = \frac{e^2}{16\pi^3 m^2} \int d\mathbf{k} \left( 1 - \frac{\omega^2}{k^2 v^2} \right) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (9.27)$$

Продольный коэффициент диффузии  $D_{\parallel}$  характеризует среднее изменение квадрата составляющей скорости вдоль направления движения частицы, поперечный коэффициент диффузии  $D_{\perp}$  — среднее изменение квадрата составляющей скорости в перпендикулярном направлении.

Зная коэффициенты диффузии  $D_{ij}$ , можно определить изменение функции распределения пробных частиц, обусловленное их диффузией в пространстве скоростей:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_d = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} (D_{ij} f). \quad (9.28)$$

Складывая это выражение с (9.23), получаем уравнение Фоккера — Планка, согласующееся с кинетическим уравнением Балеску — Ленарда.

Впервые кинетическое уравнение типа (9.14), учитывающее кулоновские столкновения заряженных частиц, было выведено Л. Д. Ландау [62]. Коэффициенты трения и диффузии для изотропной плазмы без учета движения ионов вычислялись С. Чандрасекаром [113], Л. Спитцером и др. [107, 127]. При этом учитывались только далекие столкновения с прицельными параметрами, меньшими дебаевского радиуса в плазме. Результаты работ [107, 127]

можно получить на основе макроскопического рассмотрения без введения произвольного параметра обрезания, если коэффициенты трения и диффузии выразить через спектральное распределение флуктуаций электрического поля. Такой способ определения диффузионных коэффициентов был предложен в работах [105, 151, 152, 187]. В работе [105] вычислены коэффициенты динамического трения и диффузии в двухтемпературной плазме.

### Квазилинейное приближение

Кинетическое уравнение (9.7) описывает релаксацию функции распределения, обусловленную учетом кулоновского взаимодействия между заряженными частицами в плазме. Кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме (9.8) удобно также для описания процесса квазилинейной релаксации, обусловленного обратным воздействием поля колебаний на сглаженную функцию распределения. Квазилинейная релаксация — простейший нелинейный процесс в плазме, при котором воздействие поля колебаний на усредненную функцию распределения предполагают существенным, в то же время нелинейным взаимодействием волн друг с другом пренебрегают (такой подход получил название квазилинейного приближения). В квазилинейном приближении учитывается влияние флуктуационных колебаний только на распределения резонансных частиц, т. е. частиц, скорости которых близки к фазовым скоростям соответствующих волн. Резонансные частицы сильно взаимодействуют с собственными колебаниями плазмы, поэтому они ответственны как за затухание, так и за раскачку колебаний. Нерезонансные частицы в среднем не обмениваются энергией с волнами, поэтому распределения нерезонансных частиц фактически не испытывают влияния со стороны колебаний.

Согласно (9.14) изменение функции распределения связано с поляризационным и флуктуационным трением частиц, а также с их диффузией в пространстве скоростей. В отличие от поляризационного трения флуктуационное трение и диффузия определяются флуктуационным полем в плазме, которое в неравновесных условиях может принимать значения, существенно превышающие тепловой уровень. Поэтому, если вообще пренебречь поляризационным трением, то кинетическое уравнение для такой неравновесной (слаботурбулентной) плазмы можно переписать в форме уравнения диффузии

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} \left\{ D_{ij}(\mathbf{v}, t) \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} \right\} \quad (9.29)$$

(при этом использовано соотношение  $D_i = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{ij}}{\partial v_j}$ , в справедливости которого нетрудно убедиться непосредственной проверкой). Коэффициент диффузии  $D_{ij}$ , входящий в уравнение (9.29), определяется общим выражением (9.18).



Предположим, что спектральное распределение флуктуационного поля имеет вид

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi I_{\mathbf{k}}(t) \{ \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \}, \quad (9.30)$$

где частота  $\omega_{\mathbf{k}}$  колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}$  определяется дисперсионным уравнением линейной теории, а интенсивность  $I_{\mathbf{k}}(t)$  предполагается медленно изменяющейся функцией времени. Изменение величины  $I_{\mathbf{k}}(t)$  со временем определяется затуханием колебаний или их нарастанием, связанным с немонотонной зависимостью функции распределения от скоростей частиц. Заметим, что для справедливости квазилинейного рассмотрения необходимо, чтобы декремент затухания или инкремент нарастания  $\gamma_{\mathbf{k}}$  был достаточно мал, т. е. чтобы выполнялось условие

$$|\gamma_{\mathbf{k}}| \ll \omega_{\mathbf{k}}. \quad (9.31)$$

Кроме того, волновой пакет (9.30) следует считать достаточно узким (в  $\mathbf{k}$ -пространстве), чтобы число резонансных частиц, взаимодействующих с ним, было меньше полного числа частиц.

Используя (9.30), коэффициент диффузии (9.18) переписываем в виде

$$D_{ij}(\mathbf{v}, t) = \frac{e^2}{4\pi^2 m^2} \int d\mathbf{k} \frac{k_i k_j}{k^2} I_{\mathbf{k}}(t) \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_{\mathbf{k}}). \quad (9.32)$$

Наличие дельта-функции в (9.32) означает, что это выражение справедливо только для резонансных частиц. Уравнение диффузии (9.29) с таким значением коэффициента  $D_{ij}$  определяет изменение функции распределения частиц под воздействием флуктуационных колебаний поля в плазме. Это уравнение следует дополнить уравнением, описывающим временную зависимость интенсивности флуктуационных колебаний поля,

$$\frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}, \quad (9.33)$$

где декремент затухания или инкремент нарастания  $\gamma_{\mathbf{k}}$  определяется линейным выражением.

Система уравнений (9.29) и (9.33) описывает изменение усредненной функции распределения резонансных частиц, а также затухание или нарастание колебаний в плазме в квазилинейном приближении<sup>2</sup>. Используя (9.29) и (9.33), можно показать, что в результате диффузии частиц, обусловленной их рассеянием на флуктуационных колебаниях, при  $t \rightarrow \infty$  в плазме устанавливается стационарное состояние, характеризуемое определенным распределением резонансных частиц и определенным уровнем флуктуационных колебаний.

<sup>2</sup> Квазилинейная теория колебаний плазмы развита в работах А. А. Веденова, Е. П. Велихова и Р. З. Сагдеева [20, 21], В. Е. Драмонда и Д. Пайнса [137], а также Ю. А. Романова и Г. Ф. Филиппова [76].

Умножим обе стороны уравнения (9.29) на функцию распределения  $f$  и проинтегрируем по скоростям:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{v} f^2 = - \frac{e^2}{8\pi^2 m^2} \int d\mathbf{v} \int d\mathbf{k} \frac{1}{k^2} I_{\mathbf{k}}(t) \left( \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \delta(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_{\mathbf{k}}). \quad (9.34)$$

Так как правая часть полученного равенства отрицательна, то положительно определенная величина  $\sigma(t) \equiv \int d\mathbf{v} f^2$  с ростом  $t$  убывает и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к некоторому постоянному значению.

Поэтому  $\frac{d\sigma}{dt} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и, следовательно, правая часть равенства (9.34) также должна обращаться в нуль. Поскольку под знаком интеграла в правой части (9.34) стоят неотрицательные величины, при  $t \rightarrow \infty$  должно выполняться условие

$$\lim I_{\mathbf{k}}(t) \left( \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\mathbf{k}\mathbf{v}=\omega_{\mathbf{k}}}^2 = 0.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  должно выполняться по крайней мере одно из равенств

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_{\mathbf{k}}(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\mathbf{k}\mathbf{v}=\omega_{\mathbf{k}}} = 0. \quad (9.35)$$

Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  флуктуационные колебания поля должны затухнуть или на функции распределения должно образоваться плато (функция распределения не должна изменяться вдоль направления распространения волны):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}, t) = f(\mathbf{v}_{\perp}).$$

Возможность образования плато на функции распределения в случае одномерных колебаний показана в работе [20] (см. также [79]).

Рассмотрим детальнее квазилинейную релаксацию в одномерном случае. Причем для простоты ограничимся рассмотрением только ленгмюровских колебаний. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  выражения для спектральной плотности флуктуационных колебаний и функции распределения электронов имеют вид

$$I_{\mathbf{k}}(t = 0) = \begin{cases} I_0(k) & \text{при } k_1 < k < k_2, \\ 0 & \text{при } k < k_1 \quad \text{или} \quad k > k_2, \end{cases}$$

$$f(v, t = 0) = f_0(v), \quad \frac{\Omega}{k_2} < v < \frac{\Omega}{k_1}.$$

Если  $\frac{\partial f_0}{\partial v} < 0$ , то колебания затухают. При этом величина производной от функции распределения с ростом  $t$  уменьшается, пока не образуется плато и не прекращается обмен энергией между флуктуационными колебаниями и частицами (рис. 8). Нетрудно найти энергию колебаний в установившемся состоянии с плато. Используя (9.29) и (9.33), в одномерном случае получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ f(v, t) - \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\Omega}{32\pi^4 m v^3} I_{\mathbf{k}}(t) \right) \right\} = 0.$$

Отсюда для спектральной плотности флуктуационных колебаний находим

$$I_k(t) = I_k(0) + \frac{32\pi^4 m \Omega^2}{k^3} \int_{\Omega/k_2}^{\Omega/k} dv \{f(v, t) - f_0(v)\}; \quad (9.36)$$

при  $t \rightarrow \infty$

$$I_k(\infty) = I_k(0) + \frac{32\pi^4 m \Omega^2}{k^3} \int_{\Omega/k_2}^{\Omega/k} dv \{f_\infty(v) - f_0(v)\}. \quad (9.37)$$

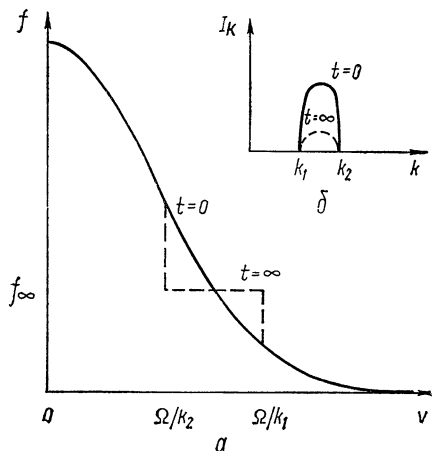


Рис. 8. Функция распределения резонансных частиц (а) и спектральная плотность флуктуационных колебаний (б) при  $t = 0$  (—) и  $t \rightarrow \infty$  (---).

существует область скоростей  $v' < v < v''$ , в которой  $\frac{\partial f_0}{\partial v} > 0$  (например, при прохождении через плазму пучка малой плотности), то колебания с фазовыми скоростями, лежащими в указанном интервале, нарастают во времени, а колебания с фазовыми скоростями вне этого интервала затухают. При этом из-за деформации функции распределения область неустойчивых колебаний с течением времени расширяется и в конечном установившемся состоянии на функции распределения образуется плато.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН (ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ПОЛЕ)

### Временная эволюция флуктуационных спектров

В предыдущих главах рассматривались спектральные распределения флуктуационных полей в плазме, стационарные во времени. При этом предполагалось, что распределения частиц также стационарны. В действительности, однако, даже в равновесной плаз-

Высота плато  $f_\infty$  определяется из условия сохранения числа резонансных частиц:

$$f_\infty = \frac{1}{\frac{\Omega}{k_1} - \frac{\Omega}{k_2}} \int_{\Omega/k_2}^{\Omega/k_1} dv f_0(v). \quad (9.38)$$

Резонансные частицы в результате релаксации получают энергию

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{k_1}^{k_2} dk \{I_k(0) - I_k(\infty)\}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Если начальное распределение неустойчиво, т. е. су-

ме любые собственные колебания затухают. Затухание определяется взаимодействием колебаний с частицами плазмы, характеризуемыми тепловым разбросом скоростей. Взаимодействие между волной и частицей проявляется при выполнении резонансного условия  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ , где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор волны, а  $\mathbf{v}$  — скорость частицы. В неравновесных условиях такое взаимодействие может приводить и к усилению колебаний. Если интенсивность флуктуационных колебаний в плазме достигает достаточно высокого уровня, то существенную роль играет диффузия частиц, обусловленная рассеянием их на колебаниях и приводящая к квазилинейной релаксации распределения частиц в плазме. Другим эффектом, который оказывается существенным при достаточно высоком уровне интенсивности колебаний, является нелинейное взаимодействие колебаний. Учет нелинейного взаимодействия колебаний, как и их линейного затухания или усиления, приводит к изменению со временем спектрального распределения флуктуационного поля в плазме.

Для нахождения временной зависимости спектрального распределения флуктуационного поля воспользуемся методом многовременных последовательных приближений. Как отмечалось выше, при использовании этого метода вводится иерархия времен с периодами, последовательно увеличивающимися в  $\alpha^{-1}$  раз ( $\alpha$  — безразмерная постоянная взаимодействия). Зависимость величин от более медленного времени определяется из условия, устранения секулярности в уравнении, описывающем зависимость от более быстрого времени. В применении к уравнению для поля (7.1) эта процедура сводится к формальной замене

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega} \rightarrow \left\{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + i \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} \right) + i \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right\} E_{\mathbf{k}\omega}. \quad (9.40)$$

В случае нестационарного распределения частиц, когда в кинетическом уравнении (9.5) интеграл столкновений отличен от нуля, вместо (7.1) необходимо использовать нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} ik \{ & \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) E_{\mathbf{k}\omega} + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}}} \chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) (E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} - \langle E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} \rangle) + \\ & + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}}} \chi^{(3)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega_3, \mathbf{k}_3) (E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} - \\ & - E_{\mathbf{k}_1\omega_1} \langle E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} \rangle - \langle E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}_2\omega_2} E_{\mathbf{k}_3\omega_3} \rangle) + \dots \\ & \dots + \sum_{\omega', \mathbf{k}'} \Delta(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') (\delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 E_{\mathbf{k}'\omega'} - \langle \delta f_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}^0 E_{\mathbf{k}'\omega'} \rangle) + \\ & + \sum_{\substack{\omega_1 + \omega_2 = \omega \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \\ \omega', \mathbf{k}'}} \Delta^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2; \omega', \mathbf{k}') (\delta f_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}', \omega_2-\omega'}^0 E_{\mathbf{k}_1\omega_1} E_{\mathbf{k}'\omega'} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - E_{\mathbf{k}_1, \omega_1} \langle \delta f_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}', \omega_2 - \omega'} E_{\mathbf{k}' \omega'} \rangle - \langle \delta f_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}', \omega_2 - \omega'} E_{\mathbf{k}_1, \omega_1} E_{\mathbf{k}' \omega'} \rangle + \dots \} = \\
& = 4\pi \rho_{\mathbf{k}\omega}^0.
\end{aligned} \tag{9.41}$$

Следует, однако, отметить, что из (9.41) вытекает уравнение для спектральной корреляционной функции  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ , точно совпадающее с (7.10) или (7.20).

В применении к уравнению для спектральной корреляционной функции  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  процедура учета зависимости от медленного времени сводится к замене

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \rightarrow & \left\{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + i \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{i}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}.
\end{aligned} \tag{9.42}$$

Таким образом, вместо (7.20) получаем

$$\begin{aligned}
& \left\{ \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + i \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} \right) + \frac{i}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} - \\
& - \frac{2}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} |\kappa^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')|^2 \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} - \\
& - \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \\
& = \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \left\{ \sum_{\omega', \mathbf{k}'} b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} + q_{\mathbf{k}\omega} \right\}.
\end{aligned} \tag{9.43}$$

Приравнявая в этом уравнении мнимую часть нулю, получаем уравнение, описывающее временную зависимость спектральной плотности флуктуационного поля  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ , обусловленную нелинейным взаимодействием флуктуационных полей и линейной диссипацией.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = & - \left\{ \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial t} \right) \right\} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \\
& + 2 \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} |\kappa^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega', \mathbf{k}')|^2 \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} \times \\
& \times \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'} + \operatorname{Im} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \\
& + \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \left\{ \sum_{\omega', \mathbf{k}'} b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} + q_{\mathbf{k}\omega} \right\}.
\end{aligned} \tag{9.44}$$

Уравнение (9.44) следует дополнить кинетическим уравнением, определяющим временную зависимость функции распределения частиц,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4\pi e^2}{m} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\{ \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^*(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{k})} f + \frac{1}{8\pi m} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}, \mathbf{k}\mathbf{v}} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right\}, \tag{9.45}$$

и учитывающим воздействие флуктуационного электрического поля на функцию распределения частиц (в дальнейшем, однако, рассмат-

ривается только случай, когда функции распределения частиц предполагаются заданными).

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что в стационарном случае уравнение (9.44) сводится к уравнению (7.10). Действительно, из (9.44) в стационарном случае следует

$$0 = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} + 2 \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} |\kappa^{(2)}(\omega - \omega', \mathbf{k} - \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} + \operatorname{Im} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})} \left( \sum_{\omega', \mathbf{k}'} b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} + q'_{\mathbf{k}\omega} \right). \quad (9.46)$$

Замечая, что

$$\operatorname{Im} \mathcal{D} + \operatorname{Im} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} \mathcal{D}^* \simeq \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{|\varepsilon|^2} 2 \operatorname{Re} \varepsilon^* \mathcal{D},$$

$$\mathcal{D} \equiv \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega},$$

и учитывая, что  $q'_{\mathbf{k}\omega}$  и  $b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  — вещественные величины, из (9.46) с учетом (7.21) непосредственно получаем (7.10).

Рассмотрим вначале решение уравнения (9.43) без учета нелинейного взаимодействия. Пренебрегая нелинейными слагаемыми в (9.43) (и учитывая стационарность распределений  $f$ ), записываем

$$\left( \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) + \frac{i}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{\varepsilon^*(\omega, \mathbf{k})}.$$

Отсюда, приравнявая в отдельности вещественные и мнимые части, получаем два уравнения:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \left\{ \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} - \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \right\} = 0, \quad (9.47)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \left\{ \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} - \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \right\}. \quad (9.48)$$

Общее решение уравнения (9.47) можно представить в виде

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(1)} = \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 + C_{\mathbf{k}}(t) \delta \{ \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \}, \quad (9.49)$$

где

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0 \equiv \frac{16\pi^2}{k^2} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2}; \quad (9.50)$$

$C_{\mathbf{k}}(t)$  — некоторая произвольная функция  $\mathbf{k}$ , зависящая от времени  $t$ . Очевидно, стационарная часть решения  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  определяется неоднородной частью уравнения (9.47), в то время как нестационар-

ная часть является решением соответствующего однородного уравнения и зависит от начальных условий. Стационарная часть решения (9.49) в отличие от нестационарной содержит весь спектр частот. Выбираем функцию  $C_k(t)$  так, чтобы решение (9.49) имело вид

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)} = \langle E^2 \rangle_{k\omega}^0 + \pi I_k(t) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}, \quad (9.51)$$

при этом интенсивность колебаний в начальный момент времени  $I_k(0)$  определяется начальными условиями. Временную зависимость интенсивности  $I_k(t)$  нетрудно найти с помощью уравнения (9.48). Действительно, общее решение (9.48) представляется в виде суммы стационарной и нестационарной частей:

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega}^{(1)} = \langle E^2 \rangle_{k\omega}^0 + \langle E^2 \rangle_{k\omega}^t. \quad (9.52)$$

Стационарная часть по-прежнему определяется выражением (9.50), а нестационарная часть удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^2 \rangle_{k\omega}^t = - \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \langle E^2 \rangle_{k\omega}^t.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega}^t = B_{k\omega} e^{-\frac{2 \operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})} t}, \quad (9.53)$$

где величина  $B_{k\omega}$  не зависит от  $t$ . Если частота  $\omega$  близка к собственной частоте колебаний плазмы  $\omega_k$ , то  $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) / \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} = \gamma_k$  и  $\gamma_k \ll \omega_k$ , т. е. нестационарная часть решения (9.52) в этом случае описывает слабозатухающие собственные колебания, обусловленные начальным возмущением. Если  $\omega$  отличается от собственных частот  $\omega_k$ , то  $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) / \frac{\partial \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, \mathbf{k})}{\partial \omega} \geq \omega$  и нестационарная добавка в решении (9.52) быстро обращается в нуль. Поэтому при  $t \geq \omega_k^{-1}$  нестационарное решение (9.53) можно записать в виде

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega}^t = \pi I_k^{\mathbf{R}}(t) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}, \quad (9.54)$$

где

$$I_k(t) = I_k(0) e^{-2\gamma_k t}. \quad (9.55)$$

Это решение согласуется с (9.51).

Таким образом, если в уравнении (9.43) пренебречь нелинейным взаимодействием, то общее решение представляется в виде

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \langle E^2 \rangle_{k\omega}^0 + \pi I_k(t) \{ \delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k) \}, \quad (9.56)$$

где  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^0$  и  $I_k(t)$  определены согласно (9.50) и (9.55). Первое слагаемое в (9.56), определяемое неоднородной частью уравнения (9.43), характеризует стационарный уровень флуктуаций электрического поля в плазме. Второе слагаемое в (9.56), являющееся ре-

шением соответствующего однородного уравнения, описывает собственные колебания электрического поля в плазме, связанные с начальными условиями. Согласно (9.55) интенсивность таких колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону. Поэтому спектральное распределение колебаний электрического поля  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}$  в устойчивой плазме, характеризуемой стационарным распределением  $f(\mathbf{v})$ , при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному уровню  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^0$ . Как отмечалось выше, в стационарном спектре  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^0$  кроме некогерентных флуктуаций содержатся также собственные флуктуационные колебания. В равновесной плазме интенсивность собственных флуктуационных колебаний определяется температурой (6.127). В неравновесной плазме стационарный уровень флуктуаций определяется соответствующим решением уравнения (7.44) и по величине может значительно превышать тепловой уровень. Если функция распределения такова, что  $\gamma_k < 0$ , то интенсивность  $I_k(t)$  в (9.56) может достигать больших значений. Однако в этом случае пренебрежение нелинейными слагаемыми в уравнении (9.43) становится незаконным и временная зависимость  $I_k(t)$  будет в значительной степени определяться нелинейным взаимодействием волн в плазме.

### Кинетическое уравнение для продольных волн и нелинейное затухание Ландау

Если функции распределения частиц фиксированы и существует стационарный уровень флуктуаций  $\langle E^2 \rangle_{k\omega}^0$ , то из (9.44) трудно получить кинетическое уравнение для волн. Подставляя в (9.44) спектральное распределение электрического поля в виде

$$\langle E^2 \rangle_{k\omega} = \langle E^2 \rangle_{k\omega}^0 + \pi \sum_{\alpha} I_k^{\alpha}(t) \{ \delta(\omega - \omega_k^{\alpha}) + \delta(\omega + \omega_k^{\alpha}) \}, \quad (9.57)$$

где суммирование производится по различным типам продольных собственных колебаний, получаем следующее уравнение для интенсивности колебаний определенного типа  $I_k^{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_k^{\alpha}}{2} \frac{\partial I_k^{\alpha}}{\partial t} = - \operatorname{Im} \varepsilon(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) I_k^{\alpha} + \\ & + \frac{\pi}{\varepsilon_k^{\alpha}} \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{\mathbf{k}'} | \kappa^{(2)}(\omega_k^{\alpha} \mp \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \pm \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k}') |^2 \delta(\omega_k^{\alpha} \mp \omega_{k'}^{\beta} \mp \\ & \mp \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}) I_k^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'} + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} a(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \pm \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k}') I_k^{\beta} I_{\mathbf{k}'}^{\alpha} + \\ & + \operatorname{Im} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \langle E^2 \rangle_{k'\omega'}^0 I_k^{\alpha} + \\ & + \frac{1}{2\varepsilon_k^{\alpha}} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} \{ b(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \pm \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k}') + 4 | \kappa^{(2)}(\omega_k^{\alpha} \mp \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \\ & \pm \omega_{k'}^{\beta}, \mathbf{k}') |^2 \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_k^{\alpha} - \omega_{k'}^{\beta}}^0 \} I_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \quad (9.58) \end{aligned}$$



где знаки  $\pm$  возле  $\beta$  и  $\beta'$  означают, что суммирование по  $\beta$  и  $\beta'$  учитывает также знаки  $\pm$  перед частотами  $\omega_k^\beta$  и  $\omega_{k-k'}^{\beta'}$ ; величины  $a(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  и  $b(\omega, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}')$  определяются соответственно равенствами (7.11) и (7.12);  $\varepsilon_k^\alpha \equiv \frac{\partial \text{Re} \varepsilon(\omega_k^\alpha, \mathbf{k})}{\partial \omega_k^\alpha}$ .

Уравнение (9.58) описывает динамику волн в плазме с учетом их взаимодействия как между собой, так и с флуктуационными колебаниями. Если пренебречь интенсивностью флуктуационных колебаний  $\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  и величиной  $b(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}; \omega_{k-k'}^{\beta'}, \mathbf{k}')$ , связанной с флуктуациями распределений частиц в плазме, то получим хорошо известное кинетическое уравнение для волн

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial I_k^\alpha}{\partial t} = -\gamma_k^\alpha I_k^\alpha + \\ & + \frac{\pi}{(\varepsilon_k^\alpha)^2} \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{\mathbf{k}'} |\chi^{(2)}(\omega_k^\alpha \mp \omega_{k-k'}^\beta, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \pm \omega_{k-k'}^{\beta'}, \mathbf{k}')|^2 \delta(\omega_k^\alpha \mp \omega_{k-k'}^\beta \mp \\ & \mp \omega_{k-k'}^{\beta'}) I_k^\beta I_{k-k'}^{\beta'} + \frac{1}{2\varepsilon_k^\alpha} \text{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} a(\omega_k^\alpha, \mathbf{k}; \pm \omega_{k-k'}^\beta, \mathbf{k}') I_k^\beta I_k^\alpha. \quad (9.59) \end{aligned}$$

Впервые кинетическое уравнение для волн в плазме получено Б. Б. Кадомцевым и В. И. Петвиашвили [53]. В дальнейшем кинетическое уравнение на основе различных подходов было выведено в ряде работ [2, 28, 38, 51, 59, 83, 138] (см. также монографии [19, 29, 111, 131]). Кинетическое уравнение для волн с учетом их взаимодействия с флуктуационным полем в плазме получено в работе [91].

Кинетическое уравнение (9.59) описывает изменение спектральной плотности волн в плазме  $I_k$ , обусловленное линейной диссипацией и нелинейным взаимодействием. Линейная диссипация в плазме непосредственно связана с линейным взаимодействием между волнами и частицами, которое проявляется при условии резонанса  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ . Если скорость частицы удовлетворяет резонансному условию, то частица по отношению к волне характеризуется постоянной фазой и эффективно ускоряется электрическим полем волны. Такое ускорение сопровождается передачей энергии поля частицам плазмы и приводит к затуханию амплитуды поля волны. Так как линейное взаимодействие между частицами и волнами имеет место только для резонансных частиц, то оно может быть описано только в рамках кинетической теории.

Помимо линейного взаимодействия в плазме возможно также нелинейное взаимодействие между волнами и нелинейное взаимодействие между частицами и волнами. Действительно, так как плазма представляет собой нелинейную электродинамическую среду, то при распространении двух волн с отличающимися частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и волновыми векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  в ней возникают биекции с комбинационными частотами  $\omega_1 \pm \omega_2$  и волновыми векто-

рами  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$ . Резонанс между таким биением и третьей волной с соответствующей частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  лежит в основе распадного взаимодействия волн. В кинетическом уравнении (9.59) учитываются только трехволновые распадные процессы, т. е. процессы слияния двух волн и распада одной волны на две. Подобные процессы разрешены лишь для так называемых распадных спектров  $\omega_{\mathbf{k}} \equiv \omega(\mathbf{k})$ , когда одновременно удовлетворяются законы сохранения энергии и импульса  $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2}$  и  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Такое взаимодействие проявляется и в пренебрежении тепловым движением частиц, т. е. оно может быть описано и на основе гидродинамического рассмотрения.

В системах с нераспадными спектрами более существенны процессы рассеяния волн на частицах. В резонанс с биениями попадают частицы со скоростями, удовлетворяющими условию  $\omega_1 \pm \omega_2 = (\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2) \mathbf{v}$ . В результате резонансного взаимодействия частиц с биениями возникает дополнительное затухание волн — нелинейное затухание Ландау. Как и линейное затухание, нелинейное затухание может быть описано только в рамках кинетической теории. Резонансное взаимодействие частиц с биениями соответствует процессам рассеяния волн на частицах, т. е. переизлучению волны с частотой  $\omega_1$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  в волну с частотой  $\omega_2$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_2$ , в то время как линейное затухание соответствует простому поглощению волн частицами. Нелинейное затухание существенно, когда число частиц, резонансно взаимодействующих с одним колебанием, мало, в то время как в резонанс с биениями попадает большое число частиц. Нелинейное взаимодействие волн с частицами приводит в общем случае к эффектам того же порядка величины, что и распадное взаимодействие волн; однако в случае нераспадных спектров нелинейное взаимодействие волн с частицами основное.

Кинетическому уравнению (9.59) можно придать более наглядную форму, если вместо спектральной плотности  $I_{\mathbf{k}}$  ввести плотность числа волн  $N_{\mathbf{k}}$ . Спектральная плотность энергии  $W_{\mathbf{k}}$  связана с величиной  $I_{\mathbf{k}}$  соотношением

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi} \omega_{\mathbf{k}} \varepsilon'_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}. \quad (9.60)$$

Определим плотность числа волн  $N_{\mathbf{k}}$  согласно

$$N_{\mathbf{k}} \equiv W_{\mathbf{k}} / s_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}},$$

где  $s_{\mathbf{k}} \equiv \text{sgn } \varepsilon'_{\mathbf{k}}$ . Поэтому плотность числа волн  $N_{\mathbf{k}}$  связана с величиной  $I_{\mathbf{k}}$  соотношением

$$N_{\mathbf{k}} = \frac{1}{16\pi} |\varepsilon'_{\mathbf{k}}| I_{\mathbf{k}}. \quad (9.61)$$

Используя это определение, кинетическое уравнение (9.59) можно переписать в виде

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = -2\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} N_{\mathbf{k}}^{\alpha} +$$

$$\begin{aligned}
& + 32\pi^2 \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{k'} \frac{1}{|\varepsilon_k^\alpha \varepsilon_{k'}^\beta \varepsilon_{k-k'}^{\beta'}|} |\chi^{(2)}(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta, k - k'; \omega_{k'}^\beta, k')|^2 \times \\
& \quad \times \delta(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta - \omega_{k-k'}^{\beta'}) N_{k'}^\beta N_{k-k'}^{\beta'} + \\
& + 16\pi s_k^\alpha \text{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{k'} \frac{1}{|\varepsilon_k^\alpha \varepsilon_{k'}^\beta|} a(\omega_k^\alpha, k; \omega_{k'}^\beta, k') N_{k'}^\beta N_k^\alpha. \quad (9.62)
\end{aligned}$$

Выделяя в последнем слагаемом правой части вычит и главное значение интеграла и учитывая свойства симметрии  $\chi^{(2)}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2)$ , кинетическое уравнение для волн в плазме представляем в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_k^\alpha}{\partial t} = -2\gamma_k^\alpha N_k^\alpha + \\
& + 32\pi^2 \sum_{\beta} \sum_{\beta'} \sum_{k'} \frac{|\chi^{(2)}(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta, k - k'; \omega_{k'}^\beta, k')|^2}{|\varepsilon_k^\alpha \varepsilon_{k'}^\beta \varepsilon_{k-k'}^{\beta'}|} \delta(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta - \omega_{k-k'}^{\beta'}) \times \\
& \quad \times S_k^\alpha (S_k^\alpha N_k^\beta N_{k-k'}^{\beta'} - S_{k'}^\beta N_{k'}^\alpha N_{k-k'}^{\beta'} - S_{k-k'}^{\beta'} N_{k-k'}^\alpha N_{k'}^\beta) + \\
& + 16\pi s_k^\alpha \text{Im} \sum_{\beta} \sum_{k'} \frac{1}{|\varepsilon_k^\alpha \varepsilon_{k'}^\beta|} \left\{ 2\chi^{(2)}(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta, k - k'; \omega_{k'}^\beta, k') \chi^{(2)}(\omega_k^\alpha, k; \right. \\
& \quad \left. - \omega_{k'}^\beta, k') P \frac{1}{\varepsilon(\omega_k^\alpha - \omega_{k'}^\beta, k - k')} - \bar{\chi}^{(3)}(\omega_{k'}^\beta, k'; \omega_k^\alpha, k; -\omega_{k'}^\beta, -k') \right\} \times \\
& \quad \times N_{k'}^\alpha N_{k'}^\beta. \quad (9.63)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (9.63) описывает линейное затухание или усиление колебаний и связано с резонансным взаимодействием волна — частица. Второе слагаемое в правой части (9.63) описывает трехволновые процессы распада одной волны на две или же слияние двух волн в одну. (Первый член в фигурных скобках под знаком суммирования  $\sum_{k'}$  описывает процесс спонтанного распада исходной волны, а второй и третий, соответствующие вычитам последнего слагаемого в (9.62), — процессы индуцированного распада, поскольку они пропорциональны плотности числа первоначально распадающихся волн  $N_{k'}^\alpha$ .) Третье слагаемое в правой части (9.63) описывает индуцированное рассеяние волн на частицах. (Первый член в фигурных скобках под знаком суммирования  $\sum_{k'}$

соответствует распаду исходного колебания на колебание с близкой частотой и биение, резонансно взаимодействующее с частицами; второй член в фигурных скобках последнего слагаемого (9.63) описывает комptonовское рассеяние волн на частицах плазмы.)

Кинетическое уравнение (9.63) является основным уравнением при описании турбулентных процессов в плазме. Заметим, однако, что оно справедливо только в том случае, если интенсивности волн

достаточно велики и флуктуационными колебаниями в плазме можно пренебречь. Поэтому процессы рассеяния и трансформации волн в плазме, обусловленные взаимодействием с флуктуационными полями, не описываются уравнением (9.63). В отличие от (9.63) кинетическое уравнение (9.58) учитывает взаимодействие волн с флуктуационными полями, и поэтому оно может быть использовано для описания процессов рассеяния и трансформации волн на флуктуациях в плазме.

Выше отмечалось, что из-за нелинейности электродинамических свойств плазмы при распространении в ней каких-либо двух волн возникают биения. Резонансное взаимодействие этих биений с частицами плазмы приводит к нелинейному затуханию волн. В качестве примера рассмотрим нелинейное затухание ленгмюровских волн [51].

При нелинейном взаимодействии ленгмюровских волн возникают низкочастотные биения с фазовыми скоростями, которые могут быть значительно меньше тепловой скорости электронов. Эти биения, поглощение которых электронами и приводит к нелинейному затуханию, взаимодействуют с последними значительно интенсивнее, чем исходные ленгмюровские волны. Если среднее значение волнового числа рассматриваемого волнового пакета значительно меньше обратного дебаевского радиуса, то линейное затухание Ландау экспоненциально мало и уменьшение энергии ленгмюровских волн в основном определяется их нелинейным взаимодействием.

В равновесной плазме или же в плазме, находящейся в близком к равновесному состоянию, спектр ленгмюровских волн нераспадный, поэтому в кинетическом уравнении (9.63) следует сохранить только последнее нелинейное слагаемое, отвечающее индуцированному рассеянию волн на частицах. (В сильно неизотермической плазме спектр ленгмюровских волн распадный, поэтому вследствие взаимодействия ленгмюровских волн с ионно-звуковыми волнами возникает распадная неустойчивость, как и в случае волн с фиксированными фазами. Заметим, что время распада пакета ленгмюровских волн, определяемое с помощью кинетического уравнения (9.63), отличается от времени распада ленгмюровской волны с фиксированной фазой только численным коэффициентом.) В отсутствие распадного взаимодействия кинетическое уравнение (9.63) можно переписать в виде

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -2(\gamma_k + \gamma'_k) N_k, \quad (9.64)$$

где  $\gamma'_k$  — декремент нелинейного затухания Ландау,

$$\gamma'_k = -\frac{1}{2\varepsilon_k} \operatorname{Im} \sum_{\mathbf{k}'} \{a(\omega_k, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}, \mathbf{k}') + a(\omega_k, \mathbf{k}; -\omega_{\mathbf{k}'}, -\mathbf{k}')\} I_{\mathbf{k}'}. \quad (9.65)$$

(Интересно сравнить выражение для декремента нелинейного затухания (9.65) с соответствующим выражением для нелинейного сдвига частоты ленгмюровских волн (7.36).)

Как и в случае нелинейного сдвига собственных частот, величина декремента нелинейного затухания (9.65) обращается в нуль, если пренебречь тепловым движением частиц. Поэтому при вычислении декремента нелинейного затухания необходимо воспользоваться общими формулами (2.15), (2.16) и (2.18), с помощью которых можно учесть тепловые поправки. Таким образом, для декремента нелинейного затухания ленгмюровских волн можно получить следующую приближенную формулу [51]:

$$\gamma'_k = \frac{e^2 T}{n^3 \Omega^5 k^2} \sum_{k'} (\mathbf{k}\mathbf{k}')^2 [k, k']^2 \text{Im } \varepsilon(\omega_k - \omega_{k'}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') I_{k'}. \quad (9.66)$$

По порядку величины  $\gamma'_k \sim a^3 k^3 \frac{W}{n_0 T} \Omega$ , где  $n_0$  — равновесная плотность электронов;  $T$  — температура плазмы;  $W$  — полная плотность энергии ленгмюровских волн,  $W = \sum_{k'} W_{k'}$ . Используя выражение для декремента линейного затухания ленгмюровских волн (4.41), нетрудно убедиться, что нелинейное затухание становится определяющим при интенсивностях волн, удовлетворяющих условию  $I_k > I_{k\min}$ , где

$$I_{k\min} \simeq \frac{1}{16\pi} \frac{n_0 T}{a^6 k^6} e^{-\frac{1}{2a^2 k^2}}.$$

Используя уравнение (9.64) и выражение (9.66), можно показать, что при нелинейном затухании число и энергия ленгмюровских волн сохраняются. В то же время величина суммарного импульса ленгмюровских волн, благодаря нелинейному затуханию убывает. Поэтому декремент (9.66) определяет время затухания импульса волн, а не время изменения энергии.

Для нахождения характерного времени изменения энергии ленгмюровских волн необходимо при вычислении (9.65) учесть следующие члены разложения по скоростям частиц. Характерное время изменения энергии ленгмюровских волн связано с (9.66) соотношением

$$\tau_e \simeq \frac{1}{a^2 k^2} \frac{1}{\gamma'_k}. \quad (9.67)$$

Следовательно, время изменения энергии ленгмюровских волн значительно превышает время затухания импульса. Это обусловлено тем, что нелинейное затухание (в отличие от линейного) связано не с поглощением волн частицами, а с рассеянием их на частицах, т. е. с диффузией волн в пространстве волновых чисел. Поэтому «размешивание» волн по направлениям волновых векторов происходит значительно быстрее, чем уменьшение их частот. Заметим,

что если функция распределения частиц не убывает с ростом их энергии, то нелинейное взаимодействие волн с частицами может приводить не к уменьшению, а к увеличению энергии волн [82].

### 3. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛН (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Перейдем теперь к выводу кинетического уравнения для волн в плазме, отказавшись от допущения о потенциальном характере поля. Прежде всего определим временную зависимость спектральной корреляционной функции для флуктуационного электромагнитного поля. Как и в случае потенциального поля, воспользуемся для этой цели методом многовременных последовательных приближений.

Электромагнитное флуктуационное поле в плазме в общем случае определяется нелинейным уравнением (7.56). Если распределение частиц в плазме нестационарно и в кинетическом уравнении для частиц интеграл столкновений отличен от нуля, то вместо (7.56) необходимо использовать нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ij}(k) E_j(k) + \sum_{1+2=k} \kappa_{ijk}^{(2)}(1, 2) (E_j(1) E_k(2) - \langle E_j(1) E_k(2) \rangle) + \\ & + \sum_{1+2+3=k} \kappa_{ijkl}^{(3)}(1, 2, 3) (E_j(1) E_k(2) E_l(3) - E_j(1) \langle E_k(2) E_l(3) \rangle - \\ & - \langle E_j(1) E_k(2) E_l(3) \rangle) + \dots + \sum_{k'} \Delta_{ij}(k, k') (\delta f^0(k - k') E_j(k') - \\ & - \langle \delta f^0(k - k') E_j(k') \rangle) + \sum_{\substack{1+2=k \\ k'}} \Delta_{ijk}^{(2)}(1, 2; k') (\delta f^0(2 - k') E_j(1) E_k(k') - \\ & - E_j(1) \langle \delta f^0(2 - k') E_k(k') \rangle - \\ & - \langle \delta f^0(2 - k') E_j(1) E_k(k') \rangle) + \dots = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i^0(k), \quad (9.68) \end{aligned}$$

с помощью которого можно получить для спектральной корреляционной функции  $\langle E_i E_j \rangle_k$  уравнение, совпадающее с (7.70) или (7.79). Учет зависимости спектральной корреляционной функции для поля от медленного времени сводится к следующей замене в уравнении (7.79):

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(k) \langle E_i E_j \rangle_k \rightarrow & \left\{ \Lambda_{ij} e_j e_i^* + i \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial \operatorname{Re} (e_{ij}(k) e_j e_i^*)}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{i}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} (\Lambda_{ij}(k) e_j e_i^*)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \langle E^2 \rangle_k. \quad (9.69) \end{aligned}$$

Напомним, что вблизи собственных частот спектральное распределение  $\langle E_i E_j \rangle_k$  представляется в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_k = e_i e_j^* \langle E^2 \rangle_k, \quad (9.70)$$

где  $e_i$  и  $e_j$  — векторы поляризации соответствующих собственных колебаний. Приравнявая в полученном соотношении мнимую часть нулю, получаем уравнение, описывающее временную зависимость спектральной корреляционной функции для электромагнитного поля, обусловленную нелинейным взаимодействием полей и линейной диссипацией:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} (\Lambda_{ij}(k) e_j e_i^*)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^2 \rangle_k = - \left\{ \operatorname{Im} (e_{ij}(k) e_j e_i^*) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{\partial \operatorname{Re} (e_{ij}(k) e_j e_i^*)}{\partial t} \right\} \langle E^2 \rangle_k + 2 \operatorname{Im} \Lambda_{ii'}^{*-1}(k) \sum_1 \kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \times \\ & \times \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} + \operatorname{Im} \sum_1 a_{ijkk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 \times \\ & \times \langle E_j E_i \rangle_k + \operatorname{Im} \Lambda_{ii'}^{*-1}(k) \left\{ \sum_1 b_{i'kk'}(k, 1) \langle E_k E_{k'} \rangle_1 + q_{i'w}(k) \right\}. \quad (9.71) \end{aligned}$$

Это уравнение следует дополнить кинетическими уравнениями для частиц, определяющими временную зависимость функций распределения. В дальнейшем ограничимся рассмотрением стационарных распределений для частиц, однако будем интересоваться временной эволюцией спектрального распределения поля. В стационарном случае уравнение (9.71) непосредственно сводится к (7.79). Если в уравнении (9.71) пренебречь источниками флуктуационного поля, т. е. положить величины  $b_{i'kk'}(k, 1)$  и  $q_{i'w}(k)$  равными нулю, то (9.71) переходит в уравнение Горбунова, Пустовалова и Силина [38].

В пренебрежении нелинейным взаимодействием общее решение (9.71) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \langle E_i E_j \rangle_k &= \langle E_i E_j \rangle_k^0 + \\ &+ \pi \sum_{\alpha} e_i^{\alpha} e_j^{\alpha*} I^{\alpha}(\mathbf{k}, t) \{ \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) + \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}) \}, \quad (9.72) \end{aligned}$$

где  $\langle E_i E_j \rangle_k^0$  — стационарное распределение флуктуационного поля, определяемое состоянием плазмы;  $I^{\alpha}(\mathbf{k}, t) = I^{\alpha}(\mathbf{k}, 0) e^{-2\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} t}$  ( $I^{\alpha}(\mathbf{k}, 0)$  — значение спектральной плотности в начальный момент времени). Экспоненциальная зависимость от времени спектральной плотности собственных колебаний  $I^{\alpha}(\mathbf{k}, t)$  в (9.72) связана с пренебрежением нелинейным взаимодействием. В общем случае временная зависимость спектральной плотности собственных колебаний  $I^{\alpha}(\mathbf{k}, t)$  определяется также нелинейным взаимодействием между волнами и частицами.

Используя (9.71), нетрудно установить кинетическое уравнение для произвольных электромагнитных волн в плазме в предположении, что существует стационарный уровень флуктуаций, характеризуемый спектральной корреляционной функцией  $\langle E_i E_j \rangle_k^0$  и

величинами  $b_{ii'kk'}$  ( $k, k'$ ), и что распределения частиц также стационарны. Подставляем в (9.71) спектральное распределение электрического поля в виде (9.72). В области прозрачности выполняются условия  $|\operatorname{Re} \Lambda(k)| \gg |\operatorname{Im} \Lambda(k)|$ , поэтому можно воспользоваться соотношением

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\Lambda^*(k)} \rightarrow \pi \sum_{\alpha} \frac{1}{\Lambda_k^{\alpha}} \{ \delta(\omega - \omega_k^{\alpha}) + \delta(\omega + \omega_k^{\alpha}) \}, \quad (9.73)$$

где

$$\Lambda_k^{\alpha} \equiv \frac{\partial \operatorname{Re} \Lambda(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k})}{\partial \omega_k^{\alpha}}. \quad (9.74)$$

Для временной зависимости интенсивности колебаний определенного типа  $I_k^{\alpha}(t)$  из (9.71) получаем уравнение [98]

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda_k^{\alpha}}{2} \frac{\partial I_k^{\alpha}}{\partial t} = -\operatorname{Im}(\varepsilon_{ij}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) \lambda_{ji}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k})) I_k^{\alpha} + \\ & + \frac{\pi}{\Lambda_k^{\alpha}} \lambda_{ii'}^*(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\operatorname{Sp} \lambda_k^{\alpha}}{\operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta} \operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}} \varkappa_{ijk}^{(2)}(\omega_k^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \\ & \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \varkappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega_k^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{j'j'}(\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') \times \\ & \quad \times \lambda_{kk'}(\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \delta(\omega_k^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}) I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'} + \\ & + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta}} a_{ijkk'}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{ji}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) \lambda_{kk'}(\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \\ & + \operatorname{Im} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a_{ijkk'}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \lambda_{ji}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) \langle E_k E_{k'} \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^0 I_k^{\alpha} + \frac{1}{2\Lambda_k^{\alpha}} \lambda_{ii'}^*(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}) \times \\ & \times \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\operatorname{Sp} \lambda_k^{\alpha}}{\operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta}} \{ b_{ii'kk'}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') + 4\varkappa_{ijk}^{(2)}(\omega_k^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \times \\ & \times \varkappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega_k^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \langle E_j E_{j'} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}}^0 \} \lambda_{kk'}(\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta}. \end{aligned} \quad (9.75)$$

При этом мы воспользовались соотношениями

$$\Lambda(k) \equiv \Lambda_{ij}(k) \lambda_{ji}(k) \quad \text{и} \quad e_i^{\alpha} e_j^{\alpha*} = \frac{\lambda_{ij}(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k})}{\operatorname{Sp} \lambda(\omega, \mathbf{k})}$$

и ввели обозначение

$$\lambda_k^{\alpha} \equiv \lambda(\omega_k^{\alpha}, \mathbf{k}). \quad (9.76)$$

Уравнение (9.75) описывает динамику электромагнитных волн в плазме с учетом их взаимодействия как между собой, так и с флуктуационными колебаниями в плазме. Если пренебречь интенсивностью флуктуационных колебаний  $\langle E_i E_j \rangle_k^0$  и величиной  $b_{ii'kk'}(\omega_k^{\alpha},$



$\mathbf{k}$ ;  $\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}$ ,  $\mathbf{k}'$ ), связанной с флуктуациями распределений частиц, то получим обычно используемое кинетическое уравнение для волн

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = -\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \frac{\pi}{(\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha})^2} \lambda_{i i'}^* (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \times \\ & \times \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta} \text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}} \mathcal{X}_{ijk}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \mathcal{X}_{i'j'k'}^{(2)*} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \\ & - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{jj'} (\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') \lambda_{kk'} (\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \times \\ & \times \delta (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}) I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'} + \\ & + \frac{1}{2\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \text{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta}} a_{ijkk'} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{ji} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \lambda_{kk'} (\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\beta} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

В этом уравнении учитывается изменение интенсивности волн определенного типа, обусловленное линейной диссипацией, распадным взаимодействием волн и индуцированным рассеянием волн на частицах.

В соответствии с (4.25) плотность энергии волн  $W_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  связана с величиной  $I_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  соотношением

$$W_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}. \quad (9.78)$$

Вводя плотность числа волн определенного типа  $N_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  согласно соотношению

$$N_{\mathbf{k}}^{\alpha} \equiv W_{\mathbf{k}}^{\alpha} / s_{\mathbf{k}}^{\alpha} \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \quad (9.79)$$

где  $s_{\mathbf{k}}^{\alpha} \equiv \text{sgn } \Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ , кинетическое уравнение (9.77) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = -2\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} N_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \\ & + 32\pi^2 \lambda_{i i'}^* (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \sum_{\pm\beta} \sum_{\pm\beta'} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{|\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} \Lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta} \Lambda_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}|} \mathcal{X}_{ijk}^{(2)} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \times \\ & \times \mathcal{X}_{i'j'k'}^{(2)*} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{jj'} (\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k} - \mathbf{k}') \lambda_{kk'} (\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \times \\ & \times \delta (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta} - \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'}) N_{\mathbf{k}'}^{\beta} N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{\beta'} + \\ & + 16\pi s_{\mathbf{k}}^{\alpha} \text{Im} \sum_{\pm\beta} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{|\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} \Lambda_{\mathbf{k}'}^{\beta}|} a_{ijkk'} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') \lambda_{ji} (\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \times \\ & \times \lambda_{kk'} (\omega_{\mathbf{k}'}^{\beta}, \mathbf{k}') N_{\mathbf{k}'}^{\beta} N_{\mathbf{k}}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (9.80)$$

В отличие от кинетического уравнения (9.77) уравнение (9.75) можно назвать обобщенным кинетическим уравнением, так как в

нем помимо нелинейных эффектов, учитываемых в обычном кинетическом уравнении, учитываются также эффекты взаимодействия волн с флуктуационным полем и флуктуационные изменения функций распределения частиц. Эти эффекты описываются двумя последними слагаемыми в правой части (9.75). Предпоследнее слагаемое соответствует нелинейному затуханию волн, обусловленному взаимодействием их с флуктуационным полем в плазме, последнее — процессам рассеяния и трансформации волн на флуктуациях поля и флуктуациях распределений частиц. В неравновесной плазме с высоким уровнем флуктуаций указанные процессы могут играть существенную роль.

# РАССЕЯНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ ВОЛН

### 1. РАССЕЯНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Перейдем теперь к рассмотрению рассеяния электромагнитных волн, возникающего при распространении последних в плазме. Это рассеяние обусловлено наличием флуктуаций плотности и других величин в плазме, приводящих к изменению диэлектрических свойств плазмы. Как уже отмечалось, в плазме существуют различные типы волн, которые в линейном приближении не зависят друг от друга. В действительности, вследствие нелинейности материальных уравнений, каждая из этих волн, взаимодействуя с другими волнами или с частицами плазмы, может рассеяться или трансформироваться в волну другого типа. Будем говорить о рассеянии, если волна, возникающая в плазме, является волной того же типа, что и падающая, и о трансформации, если возникающая волна является волной другого типа. Так как в спектре флуктуаций помимо основного максимума при малых частотах, отвечающего случайному движению отдельных частиц, имеются также максимумы при частотах, соответствующих собственным колебаниям плазмы, то кроме некогерентного рассеяния электромагнитных волн с малым изменением частоты на отдельных частицах плазмы возможно комбинационное рассеяние, сопровождающееся изменением частоты рассеянной волны на величину, равную частоте собственных колебаний плазмы. Интенсивности комбинационного рассеяния и трансформации волн определяются уровнем флуктуаций в плазме. В неравновесных условиях эти интенсивности могут аномально возрастать, если плазма находится вблизи области кинетической неустойчивости. Изучение процессов рассеяния и трансформации волн является одним из важнейших методов диагностики плазмы (определения параметров, характеризующих состояние плазмы).

Исследованию процессов рассеяния и трансформации волн в плазме посвящено большое количество работ. Впервые явления комбинационного рассеяния и трансформации волн в плазме были предсказаны в работе [9]. В дальнейшем последовательная теория рассеяния волн на флуктуациях в плазме была развита в работах

[6, 134, 168, 173]<sup>1</sup>. Рассеяние и трансформация волн в магнитоактивной плазме детально рассмотрены в работе [96].

Обычно при рассмотрении рассеяния волн вводится на основе кинетических или гидродинамических уравнений индуцирующий рассеянные волны ток, с помощью которого и находятся интенсивность и распределение рассеянных волн. Развитый в предыдущих главах формализм нелинейного взаимодействия волн чрезвычайно удобен для рассмотрения рассеяния и трансформации волн. В частности, полученное в предыдущей главе обобщенное кинетическое уравнение для волн позволяет полностью описывать процессы рассеяния и трансформации волн в плазме<sup>2</sup>.

Если интенсивности падающих волн не очень велики, то в обобщенном кинетическом уравнении (9.75) можно пренебречь процессами индуцированного рассеяния и индуцированной трансформации и ограничиться учетом только спонтанных процессов, обусловленных взаимодействием падающих волн с флуктуационным полем и флуктуационными изменениями распределений частиц в плазме. Это означает, что в правой части уравнения (9.75) следует сохранить из нелинейных только два последних слагаемых:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & -2\gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \frac{2}{\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \operatorname{Im} \sum_{\omega', \mathbf{k}'} a_{ijkk'}(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega', \mathbf{k}') \lambda_{ji}(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \times \\ & \times \langle E_k E_{k'} \rangle_{\mathbf{k}'\omega'}^0 I_{\mathbf{k}}^{\alpha} + \frac{1}{(\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha})^2} \lambda_{ii'}^*(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}) \times \\ & \times \sum_{\pm \alpha'} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{\operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\operatorname{Sp} \lambda_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}} \{ b_{ii'kk'}(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \mathbf{k}; \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k}') + 4\chi_{ij'k}^{(2)}(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \\ & \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k}') \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k} - \mathbf{k}'; \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k}') \langle E_j E_{j'} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega_{\mathbf{k}}^{\alpha} - \omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}}^0 \} \times \\ & \times \lambda_{kk'}(\omega_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}, \mathbf{k}') I_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Уравнение (10.1) следует дополнить начальным условием, которое выберем в виде

$$I_{\mathbf{k}'}^{\alpha'}(0) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_0) \delta_{\alpha'\alpha_0} I_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}, \quad (10.2)$$

где  $I_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}$ ,  $\omega_0$  и  $\mathbf{k}_0$  — соответственно интенсивность, частота и волновой вектор падающей волны определенного типа  $\alpha_0$ . Учитывая малость нелинейного взаимодействия, в правой части уравнения (10.1) интенсивности волн можно заменить их начальными значе-

<sup>1</sup> Теория рассеяния и трансформации волн в плазме изложена в монографиях [5, 13, 88, 177]. Различные возможности использования рассеяния волн в целях диагностики плазмы рассмотрены в работах [36, 110].

<sup>2</sup> Заметим, что попытка описания процессов рассеяния в рамках формализма нелинейного взаимодействия волн, предпринятая в работе [74], практически свелась к введению в кинетическое уравнение добавочного тока, индуцирующего рассеянные волны.

ниями. Пренебрегая, далее, линейным и нелинейным затуханием рассеянной волны  $\alpha$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = & \frac{1}{(\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha})^2} \lambda_{ii'}^*(\omega, \mathbf{k}) \frac{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}} \{b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \\ & + 4\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\ & \times \langle E_j E_{j'} \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0}^0 \} \lambda_{kk'}(\omega_0, \mathbf{k}_0) I^{\alpha_0}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор рассеянной волны  $\alpha$ . Равенство (10.3) непосредственно определяет приращение энергии волны  $\alpha$ , возникающее в результате взаимодействия падающей волны  $\alpha_0$  с флуктуационным полем и флуктуационными изменениями распределений частиц в плазме. Действительно, плотность энергии рассеянной волны  $W_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  связана с величиной  $I_{\mathbf{k}}^{\alpha}$  соотношением

$$W_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} I_{\mathbf{k}}^{\alpha}, \quad (10.4)$$

поэтому

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha}} \Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} \frac{\partial I_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t}. \quad (10.5)$$

Процесс рассеяния или трансформации волн обычно характеризуется сечением, которое определяется как отношение приращения плотности энергии рассеянных волн, характеризуемых некоторым значением волнового вектора, к плотности потока энергии падающих волн. Плотность потока энергии падающих волн равна произведению плотности энергии падающих волн

$$W_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0} = \frac{1}{16\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}}{\text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}} \Lambda_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0} I^{\alpha_0} \quad (10.6)$$

и их групповой скорости

$$\mathbf{v}_g^{\alpha_0}(\omega_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}) = \frac{\partial \omega_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}}{\partial \mathbf{k}_0}. \quad (10.7)$$

Таким образом, выражение для дифференциального сечения процесса рассеяния или трансформации волн имеет вид

$$d\Sigma_{\alpha_0 \rightarrow \alpha} \equiv \frac{\frac{\partial W_{\mathbf{k}}^{\alpha}}{\partial t}}{v_g^{\alpha_0}(\omega_0) W_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}, \quad (10.8)$$

где  $\frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$  — элемент объема в пространстве волновых векторов рассеянных волн. Используя соотношения (10.3), (10.5) и (10.6), для сечения процесса рассеяния или трансформации окончательно по-

лучаем следующую общую формулу:

$$d\Sigma_{\alpha_0 \rightarrow \alpha} = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\lambda_{ii'}^*(\omega, \mathbf{k}) \lambda_{kk'}(\omega_0, \mathbf{k}_0)}{\Lambda_{k_0}^{\alpha_0} \Lambda_k^{\alpha} v_g^{\alpha_0}(\omega_0)} \{b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) +$$

$$+ 4\chi_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times$$

$$\times \langle E_j E_{j'} \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}_0, \omega - \omega_0}^0 \frac{dk}{(2\pi)^3}. \quad (10.9)$$

При нахождении сечений для конкретных процессов рассеяния и трансформации волн необходимо использовать выражения для тензорной нелинейной восприимчивости  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  (7.59) и тензорной величины  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  (7.72). Если фазовые скорости волн велики по сравнению с тепловыми скоростями электронов, то в (7.59) и (7.72) можно использовать разложения по степеням отношения указанных скоростей. Сечения при этом в основном определяются величиной  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ , которая выражается через спектральное распределение флуктуаций плотности электронов в плазме.

Формула (10.9) определяет сечения рассеяния и трансформации волн в общем случае и применима для описания указанных процессов как в отсутствие, так и при наличии внешних полей. Для свободной и изотропной плазмы она может быть существенно упрощена.

Выведем общие формулы для сечений различных процессов рассеяния и трансформации волн в простейшем случае изотропной плазмы в отсутствие внешних полей. Для такой плазмы тензорные величины  $\lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k})$  имеют вид

$$\lambda_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = (\varepsilon_l - \eta^2) \left[ \varepsilon_t \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + (\varepsilon_t - \eta^2) \frac{k_i k_j}{k^2} \right], \quad (10.10)$$

где  $\varepsilon_l(\omega, k)$  и  $\varepsilon_t(\omega, k)$  — продольная и поперечная диэлектрические проницаемости плазмы;  $\eta^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$  — квадрат показателя преломления. Величина  $\Lambda(\omega, \mathbf{k})$ , определяющая дисперсию волн, при этом записывается

$$\Lambda(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l(\varepsilon_t - \eta^2)^2. \quad (10.11)$$

Легко заметить, что в произведении тензорных величин  $\lambda_{ii'}^*(\omega, \mathbf{k})$  и  $\lambda_{kk'}(\omega_0, \mathbf{k}_0)$ , входящем в качестве множителя в сечение (10.9),

$$\lambda_{ii'}^*(\omega, \mathbf{k}) \lambda_{kk'}(\omega_0, \mathbf{k}_0) \equiv (\varepsilon_l(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2)^* \times$$

$$\times \left\{ \varepsilon_t(\omega_0, k_0) \varepsilon_l^*(\omega, k) \left( \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_l(\omega_0, k_0) (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2)^* \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (\varepsilon_t(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) \varepsilon_l^*(\omega, k) \left( \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} + \\
& + (\varepsilon_t(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2)^* \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \Big\}, \quad (10.12)
\end{aligned}$$

выражение в фигурных скобках представляет собой по существу проекционный множитель, отдельные слагаемые в котором выделяют различные возможные процессы рассеяния и трансформации волн в изотропной плазме.

Первое слагаемое в фигурных скобках (10.12) выделяет рассеяние поперечных волн ( $t_0 \rightarrow t$ ), второе слагаемое — трансформацию поперечных волн в продольные ( $t_0 \rightarrow l$ ), третье слагаемое — трансформацию продольных волн в поперечные ( $l_0 \rightarrow t$ ) и четвертое слагаемое — рассеяние продольных волн ( $l_0 \rightarrow l$ ). Замечая, что

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathbf{k}_0}^{\alpha_0} &= (\varepsilon_t(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) \left[ (\varepsilon_t(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) \frac{\partial \varepsilon_l(\omega_0, k_0)}{\partial \omega_0} + \right. \\
& \quad \left. + 2\varepsilon_t(\omega_0, k_0) \frac{\partial}{\partial \omega_0} (\varepsilon_t(\omega_0, k_0) - \eta_0^2) \right], \\
\Lambda_{\mathbf{k}}^{\alpha} &= (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2) \left[ (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2) \frac{\partial \varepsilon_l(\omega, k)}{\partial \omega} + \right. \\
& \quad \left. + 2\varepsilon_t(\omega, k) \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_t(\omega, k) - \eta^2) \right],
\end{aligned}$$

для сечений процессов рассеяния и трансформации волн в изотропной плазме получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
d \sum_{t_0 \rightarrow t} &= \frac{1}{4} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \omega_0} (\varepsilon_t^0 - \eta_0^2) \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_t - \eta^2) v_g^0} \left( \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \times \\
& \quad \times \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) B_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (10.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d \sum_{t_0 \rightarrow l} &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \omega_0} (\varepsilon_t^0 - \eta_0^2) \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \omega} v_g^0} \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) \times \\
& \quad \times B_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (10.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d \sum_{l_0 \rightarrow t} &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_l^0}{\partial \omega_0} \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_t - \eta^2) v_g^0} \left( \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \times \\
& \quad \times B_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (10.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d \sum_{l_0 \rightarrow l} &= \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon_l^0}{\partial \omega_0} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \omega} v_g^0} \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} B_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \frac{dk}{(2\pi)^3}, \\
& \quad (10.16)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) &\equiv b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \\
 + 4\kappa_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\
 \times \langle E_j E_{j'} \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^0.
 \end{aligned} \quad (10.17)$$

Напомним, что величина  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  выражается через корреляционные функции  $\langle \delta f \delta f \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$  и  $\langle \delta f j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^0$ :

$$\begin{aligned}
 b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) &= \Delta_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \Delta_{i'k'}^*(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle \delta f \delta f \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^0 + \\
 + \frac{8\pi i}{\omega - \omega_0} \{ &\Delta_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\
 \times \Lambda_{j'l}^{*-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \langle \delta f j l \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^0 - \\
 - \kappa_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0; \omega_0, \mathbf{k}_0) \Lambda_{j'l}^{-1}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \times \\
 \times \Delta_{i'k'}^*(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle \delta f j l \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^0 \}.
 \end{aligned} \quad (10.18)$$

Формулы (10.13) — (10.16) точные и описывают все возможные процессы рассеяния и трансформации волн на флуктуациях в изотропной плазме.

## 2. РАССЕЯНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

### Рассеяние электромагнитных волн

Основываясь на полученных в предыдущем параграфе общих формулах, остановимся теперь более детально на рассмотрении отдельных процессов. В первую очередь исследуем рассеяние высокочастотных электромагнитных волн в плазме — наиболее интересный и важный процесс с точки зрения возможных практических приложений. В случае высокочастотных электромагнитных волн зависимостью поперечной диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_t$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$  можно пренебречь. Поэтому  $\epsilon_t(\omega, k) = \epsilon(\omega)$ , где

$$\epsilon(\omega) \equiv 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}. \quad (10.19)$$

Частота и волновой вектор высокочастотных электромагнитных волн связаны соотношением

$$\omega^2 = \Omega^2 + k^2 c^2, \quad (10.20)$$

которое можно записать также в виде

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)}. \quad (10.21)$$

Групповая скорость электромагнитных волн определяется выражением

$$v_g = c \sqrt{\epsilon(\omega)}. \quad (10.22)$$



Так как для распространяющихся волн  $\omega > \Omega$ , то групповая скорость меньше скорости света.

Замечая, что  $\frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon_l - \eta^2) = \frac{2}{\omega}$  и  $dk = \frac{V \sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c^3} \omega^2 d\omega do$ , где  $do$  — элемент телесного угла, общую формулу для сечения рассеяния электромагнитных волн в плазме (10.13) переписываем в виде

$$d \sum_{i \rightarrow t} = \frac{1}{64\pi^3} \frac{\omega^4}{c^4} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( \delta_{ii'} - \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \right) \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) \times \\ \times \{ b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + 4\kappa_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\ \times \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle E_j E_{j'} \rangle_{q\Delta\omega}^0 \} d\omega do, \quad (10.23)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  — изменение частоты и  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$  — изменение волнового вектора при рассеянии. Так как мы не интересуемся поляризацией волн (падающие волны также предполагаются неполяризованными), то в правой части (10.23) учтен добавочный множитель 2, отвечающий двум возможным поляризациям рассеянных волн.

Рассеяние высокочастотных электромагнитных волн в основном обуславливается электронами, поэтому в выражениях для величин  $\Delta_{ik}$  и  $\kappa_{ijk}^{(2)}$ , входящих в (10.18) и (10.23), следует учитывать только электронные компоненты (отбрасывая тем самым величины порядка  $m/m_i$ ). Заметим, что флуктуационное поле  $\mathbf{E}$ , входящее в (10.23), определяется флуктуациями как электронного, так и ионного тока.

Поскольку фазовые скорости высокочастотных электромагнитных волн значительно больше тепловой скорости электронов, при вычислении интегралов, входящих в выражения для  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  и  $\kappa_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ , можно воспользоваться разложением подынтегральных выражений по степеням отношений скорости электронов к фазовым скоростям волн. В результате такого разложения для части величины  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ , не связанной с самосогласованным взаимодействием между заряженными частицами, получим выражение

$$b_{ii'kk'}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \equiv \Delta_{ik}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \Delta_{i'k'}^*(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle \delta f \delta f \rangle_{q\Delta\omega}^0 = \\ = 2\pi \frac{\Omega^4}{\omega^4} \int d\mathbf{v} \delta(\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) \left( \delta_{ik} + \frac{k_{0i} v_k - k_0 v \delta_{ik}}{\omega_0} + \frac{k_k v_i + k v \delta_{ik}}{\omega} \right) \times \\ \times \left( \delta_{i'k'} + \frac{k_{0i'} v_{k'} - k_0 v \delta_{i'k'}}{\omega_0} + \frac{k_{k'} v_{i'} + k v \delta_{i'k'}}{\omega} \right) f_0(v) \quad (10.24)$$

Если ограничиться рассмотрением рассеяния электромагнитных волн на продольных флуктуациях, то в подынтегральном выражении в (10.24) необходимо сохранить только продольные составляющие скорости ( $\mathbf{v} \parallel \mathbf{q}$ ). При этом (10.24) непосредственно выражается через спектральную корреляционную функцию для флуктуаций

плотности электронов в плазме:

$$\begin{aligned}
 b_{ii'kk'}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = & \frac{\Omega^4}{\omega^4} \left( \delta_{ik} + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0 q k - k_0 q \delta_{ik}}{q^2} + \right. \\
 & + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k_k q i + k q \delta_{ik}}{q^2} \left. \right) \left( \delta_{i'k'} + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k_0 i' q k' - k_0 q \delta_{i'k'}}{q^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k_k q i' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \right) \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0. \quad (10.25)
 \end{aligned}$$

С помощью аналогичных разложений нетрудно вычислить оставшуюся часть величины  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  (связанную с самоогласованным взаимодействием между частицами плазмы), а также нелинейные восприимчивости  $\kappa_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$ , входящие в последнее слагаемое в фигурных скобках (10.23). Ограничиваясь учетом продольного флуктуационного поля, последнее удобно выразить через флуктуации плотности заряда. В результате несложных выкладок получаем

$$\begin{aligned}
 b_{ii'kk'}^{(2)}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = & \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 \omega^2} \left\{ 2 \left( \delta_{ik} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_i q k + k q \delta_{ik}}{q^2} \right) \times \right. \\
 & \times \left( \delta_{i'k'} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_{i'} q k' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \right) (1 - \text{Re } \varepsilon(\Delta\omega, q)) + \\
 & + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \left[ \left( \delta_{ik} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_i q k + k q \delta_{ik}}{q^2} \right) \frac{k_k q i' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \varepsilon^*(\Delta\omega, q) + \right. \\
 & \left. + \frac{k_k q i + k q \delta_{ik}}{q^2} \left( \delta_{i'k'} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_{i'} q k' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \right) \varepsilon(\Delta\omega, q) \right] \left. \right\} \frac{\langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}}{|\varepsilon(\Delta\omega, q)|^2}, \quad (10.26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4\kappa_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle E_j E_{j'} \rangle_{q\Delta\omega}^0 = \\
 = \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 \omega^2} \left( \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{k_i q k + k q \delta_{ik}}{q^2} + \left[ \delta_{ik} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_i q k + k q \delta_{ik}}{q^2} \right] \times \right. \\
 \times (\varepsilon(\Delta\omega, q) - 1) \left. \left( \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{k_{i'} q k' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \left[ \delta_{i'k'} - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_{i'} q k' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \right] (\varepsilon^*(\Delta\omega, q) - 1) \right) \frac{\langle (\delta n_e - \delta n_i)^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0}{|\varepsilon(\Delta\omega, q)|^2}. \quad (10.27)
 \end{aligned}$$

Складывая (10.25), (10.26) и (10.27), выражение в фигурных скобках в сечении (10.23) приводим к виду

$$\begin{aligned}
 \{ \dots \} = & \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 \omega^2} \left\langle \left( \delta_{ik} \delta n_e - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_k q i + k q \delta_{ik}}{q^2} \delta n_e + \right. \right. \\
 & + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{k_k q i + k q \delta_{ik}}{q^2} (\delta n_e - \delta n_i) \left. \left( \delta_{i'k'} \delta n_e - \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{k_k q i' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} \delta n_e + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{k_k q i' + k q \delta_{i'k'}}{q^2} (\delta n_e - \delta n_i) \right)^* \right\rangle_{q\Delta\omega}. \quad (10.28)
 \end{aligned}$$

Покажем, что в каждом из сомножителей, стоящих под знаком усреднения в (10.28), можно не учитывать два последних слагаемых. В этой связи напомним, что продольные флуктуации в плазме происходят в основном с частотами  $\Delta\omega$ , значительно меньшими ленгмюровской частоты  $\Omega$ , или с частотами, близкими к  $\Omega$ .

Рассмотрим прежде всего флуктуации с частотами  $\Delta\omega \ll \Omega$ . Для таких флуктуаций

$$\langle (\delta n_e - \delta n_i)^2 \rangle_{q\Delta\omega} \simeq a^4 q^4 \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}.$$

Поэтому при  $\Delta\omega \ll \Omega$  отношение третьего слагаемого к первому в каждом из сомножителей в (10.28) равно по порядку величины  $k^2 s^2 / \omega^2$ , т. е. значительно меньше единицы (предполагается, что  $\omega/k \gg s$ ). Вторыми слагаемыми в сомножителях в (10.28) при  $\Delta\omega \ll \ll \Omega$  также можно пренебречь, так как они содержат  $\Delta\omega^2 / \omega^2$  ( $\omega > \Omega$ ). Предположим теперь, что флуктуационные колебания ленгмюровские, т. е.  $\Delta\omega \simeq \Omega$ . В этом случае  $\delta n_i \ll \delta n_e$  и второе слагаемое в каждом из сомножителей в (10.28) сокращается с третьим. Таким образом, выражение в фигурных скобках в (10.28) приближенно можно аппроксимировать выражением

$$\{ \dots \} \simeq \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 \omega^2} \delta_{ik} \delta_{i'k'} \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}$$

и для сечения (10.23) получаем [6]

$$d \sum_{t_0 \rightarrow t} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} (1 + \cos^2 \vartheta) \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\vartheta, \quad (10.29)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_0$ .

Формула (10.29) определяет дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных электромагнитных волн в плазме, отнесенное к элементу телесного угла  $d\vartheta$  и интервалу частот  $d\omega$ . Эта формула справедлива для произвольного изменения частоты; предполагается лишь, что частоты  $\omega_0$  и  $\omega$  превышают  $\Omega$ . Если  $\Delta\omega \ll \omega$ , то множитель  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}}$  обращается в единицу и формула (10.29)

переходит в хорошо известную формулу, определяющую сечение рассеяния на флуктуациях плотности с малым изменением частоты. Подчеркнем, что формула (10.29) справедлива, если фазовые скорости падающих и рассеянных волн значительно больше средней скорости электронов.

Согласно (10.29) спектральное распределение рассеянных волн определяется спектральным распределением флуктуаций плотности электронов. Следует, однако, отметить, что спектральное распределение флуктуаций плотности электронов  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}$ , благодаря самосогласованному взаимодействию между электронами и ионами, существенным образом зависит от движения ионов плазмы.

В равновесной плазме спектр рассеянного излучения содержит доплеровски уширенную основную линию  $\Delta\omega \leq q s_i$  ( $s_i$  — тепло-

вая скорость ионов) и резкие максимумы при  $\Delta\omega \simeq \pm \Omega$  (предполагается, что  $aq \ll 1$ ). В случае больших падающих частот ( $\omega_0 \gg \Omega$ ) множитель  $\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}}$  в (10.27) можно положить равным единице, при этом сечение рассеяния можно проинтегрировать по частотам, воспользовавшись соотношением Крамерса — Кронига. В результате получаем следующее выражение для сечения рассеяния поперечных электромагнитных волн в равновесной плазме, отнесенное к элементу телесного угла:

$$d \sum_{i_0 \rightarrow i} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + a^2 q^2}{2 + a^2 q^2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta, \quad (10.30)$$

где  $q = 2 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2}$  ( $\vartheta$  — угол рассеяния). Интегрируя последнее отношение по углам, находим полное сечение рассеяния:

$$\begin{aligned} \sum_{i_0 \rightarrow i} = & \left\{ 1 + \frac{3 \ln(1 + 2a^2 k_0^2)}{8a^2 k_0^2} + \right. \\ & \left. + \frac{3}{4a^2 k_0^2} \left[ (1 - a^2 k_0^2) \frac{\arctg(\sqrt{2} a k_0)}{\sqrt{2} a k_0} - 1 \right] \right\} n_0 \sigma_0, \end{aligned} \quad (10.31)$$

где  $\sigma_0 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$  — томсоновское сечение рассеяния электромагнитных волн свободным электроном. В предельных случаях малых и больших длин волн полное сечение рассеяния определяется следующими формулами:

$$\sum_{i_0 \rightarrow i} = n_0 \sigma_0, \quad ak_0 \gg 1; \quad \sum_{i_0 \rightarrow i} = \frac{1}{2} n_0 \sigma_0, \quad ak_0 \ll 1. \quad (10.32)$$

При выводе сечения (10.29) мы с самого начала ограничились учетом только продольных флуктуаций в плазме. При определенных условиях, однако, оказывается, что существенную роль может играть рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях вихревого тока [39]. Используя общую формулу (10.23), нетрудно найти поправку к сечению (10.29), учитывающую эффект рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях вихревого тока.

Действительно, учет поперечных составляющих скорости в подинтегральном выражении в (10.24) приводит к следующей добавке к величине (10.25):

$$\begin{aligned} b_{ii'kk'}^{(1)\perp}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) = & \frac{1}{2} \frac{\Omega^4}{\omega_0^2 \omega^4} \left[ k_{0i} k_{0i'} \left( \delta_{kk'} - \frac{q_k q_{k'}}{q^2} \right) + \right. \\ & + k_{0i} k_{k'} \left( \delta_{i'k} - \frac{q_{i'} q_k}{q^2} \right) + k_{0i'} k_k \left( \delta_{ik'} - \frac{q_i q_{k'}}{q^2} \right) + \\ & \left. + k_k k_{k'} \left( \delta_{i'i} - \frac{q_i q_{i'}}{q^2} \right) \right] \langle v_{e\perp}^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0, \end{aligned} \quad (10.33)$$

где  $\langle v_{e\perp}^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0$  — спектральная корреляционная функция для флуктуаций вихревой скорости электронов,

$$\langle v_{e\perp}^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0 = 2\pi \int d\mathbf{v} v_{\perp}^2 \delta(\mathbf{q}\mathbf{v} - \Delta\omega) f_0(v) \quad (10.34)$$

(для упрощения здесь рассматривается только случай  $\Delta\omega \ll \omega_0$ ). Учитывая (10.33), для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн в плазме получаем формулу

$$\begin{aligned} d \sum_{t_0 \rightarrow t} = & \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left\{ (1 + \cos^2 \vartheta) \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} + \right. \\ & + \frac{1}{\omega_0^2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \right) q^2 - \frac{(k^2 - k_0^2)^2}{2q^2} \cos^2 \vartheta + \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_0 k \cos \vartheta}{q^2} \left( \frac{k_0 q^2}{k_0^2} + \frac{k q^2}{k^2} \right) \right] \langle v_{e\perp}^2 \rangle_{q\Delta\omega}^0 \right\} d\omega d\vartheta. \end{aligned} \quad (10.35)$$

В отличие от (10.29) в (10.35) учитывается рассеяние электромагнитных волн как на продольных, так и на поперечных флуктуациях в плазме. Согласно этой формуле рассеяние электромагнитных волн на поперечных флуктуациях определяется спектральным распределением флуктуаций вихревой скорости электронов. Поскольку в области малых частот спектральные распределения флуктуаций практически не зависят от самосогласованного взаимодействия, в формулу для сечения (которая выписана для случая рассеяния волн с малым изменением частоты) входит корреляционная функция флуктуаций вихревой скорости электронов в отсутствие взаимодействия между последними. В работе [39] рассмотрены случаи, когда рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях вихревой скорости электронов играет существенную роль. Заметим, что относительный вклад эффекта рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях вихревого тока в полное сечение составляет величину порядка  $k_0^2 s^2 / \omega_0^2$ .

Рассмотрим более подробно спектральное распределение рассеянного излучения в плазме<sup>3</sup>. В случае малых длин волн, когда  $a q \gg 1$ , спектральное распределение флуктуаций плотности  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}$  имеет вид гауссовской функции частоты  $\Delta\omega$ , поэтому спектральное распределение рассеянных волн также носит гауссовский характер:

$$d \Sigma = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{q s} (1 + \cos^2 \vartheta) e^{-\frac{3}{2} \frac{\Delta\omega^2}{q^2 s^2}} d\omega d\vartheta, \quad a^2 q^2 \gg 1. \quad (10.36)$$

Эта формула справедлива, если  $\Delta\omega \neq \Omega_i$ . Из нее следует, что доплеровское уширение линии определяется тепловой скоростью электронов. Полное сечение рассеяния (10.32) равно сумме сечений

<sup>3</sup> Спектральное распределение рассеянного излучения в равновесной плазме исследовано в работах [6, 134], в двухтемпературной — в работе [6].

рассеяния на отдельных электронах. Кулоновское взаимодействие электронов и ионов несущественно, и рассеяние носит некогерентный характер <sup>4</sup>.

Более интересен предельный случай больших длин волн  $a^2 k_0^2 \ll 1$ , когда проявляются коллективные свойства плазмы. Приведем выражения для спектрального распределения рассеянного излучения в различных интервалах частот, предполагая, что  $a^2 k_0^2 \ll 1$ . При этом будем учитывать возможность различия температур электронов и ионов в плазме  $T_e$  и  $T_i$ .

Если изменение частоты при рассеянии мало,  $\Delta\omega \ll qs_i$ , где  $s_i$  — тепловая скорость ионов, то дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой

$$d\Sigma = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\sqrt{m} T_e^{3/2} + \sqrt{m_i} T_i^{3/2}}{q(T_e + T_i)} (1 + \cos^2 \theta) d\omega d\Omega. \quad (10.37)$$

В случае сильно неизотермической плазмы сечение рассеяния с малым изменением частоты в  $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{m_i}{m}}$  раз меньше соответствующего сечения для изотермической плазмы с температурой  $T_e$ .

Если  $\Delta\omega \ll qs_i$ , то для дифференциального сечения в случае изотермической плазмы получаем выражение

$$d\Sigma = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{qs_i} \frac{e^{-z^2}}{[2 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 e^{-2z^2}} (1 + \cos^2 \theta) d\omega d\Omega, \quad (10.38)$$

где  $z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\omega}{qs_i}$ . Дифференциальное сечение рассеяния (10.38) резко уменьшается при  $\Delta\omega \simeq qs_i$ ; поэтому величина  $\Delta\omega \simeq qs_i$  характеризует ширину спектрального распределения рассеянного излучения в изотермической плазме. Заметим, что эта величина определяется тепловой скоростью ионов, несмотря на то что рассеяние происходит на электронах.

Если  $qs_i < \Delta\omega \ll qs_e$ , то сечение рассеяния для изотермической плазмы очень мало. В случае неизотермической плазмы сечение рассеяния имеет дополнительные максимумы при смещениях частоты  $\Delta\omega$ , совпадающих с частотами низкочастотных колебаний плазмы с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . В частности, если  $T_e \gg T_i$  и  $a^2 q^2 \ll 1$ , то максимумы появляются при смещениях частоты  $\Delta\omega = \pm qv_s$ , где  $v_s$  — скорость неизотермического звука. Дифференциальное сечение рассеяния вблизи максимумов имеет вид

$$d\Sigma = \frac{1}{4} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \{ \delta(\Delta\omega - qv_s) + \delta(\Delta\omega + qv_s) \} d\omega d\Omega. \quad (10.39)$$

<sup>4</sup> Влияние столкновений между электронами на флуктуации в плазме и на некогерентное рассеяние электромагнитных волн рассмотрено в работах [93, 147].

Интегрируя (10.39) по углам и частотам, находим полное сечение рассеяния в сильно неизотермической плазме:

$$\Sigma \simeq n_0 \sigma_0, \quad a^2 k_0^2 \ll 1. \quad (10.40)$$

Заметим, что полное сечение в два раза больше сечения рассеяния в изотермической плазме, определяемого формулой (10.32).

В случае больших изменений частоты ( $\Delta\omega > qs_e$ ) сечение рассеяния имеет резкие максимумы при  $\nabla\omega \simeq \pm\Omega$ , связанные с рассеянием электромагнитных волн на продольных электронных колебаниях. При произвольном соотношении температур электронов и ионов дифференциальное сечение рассеяния в указанной области изменения частот определяется формулой

$$d\Sigma = \frac{1}{4} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} a^2 q^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \{ \delta(\Delta\omega - \Omega) + \delta(\Delta\omega + \Omega) \} d\omega d\vartheta. \quad (10.41)$$

Выражение для полного сечения рассеяния электромагнитных волн на ленгмюровских колебаниях при  $\omega_0 \gg \Omega$  имеет вид

$$\Sigma = 2a^2 k_0^2 n_0 \sigma_0, \quad a^2 k_0^2 \ll 1. \quad (10.42)$$

Таким образом, коллективные свойства плазмы проявляются в рассеянии особенно сильно, если  $a^2 k_0^2 \ll 1$ . При этом спектры рассеянных электромагнитных волн существенно различаются для изотермической и неизотермической плазмы.

В изотермической плазме в спектре рассеянного излучения имеется центральный максимум, обусловленный некогерентным рассеянием на флуктуациях плотности электронов, с доплеровской шириной, определяемой скоростями ионов, и боковые сателлиты, обусловленные рассеянием на продольных электронных колебаниях. Относительный вес сателлитов (по отношению к главному максимуму) составляет примерно  $2a^2 k_0^2$ .

В сильно неизотермической плазме в спектре рассеянного излучения центральный максимум отсутствует. Имеются два максимума, симметрично расположенные относительно  $\Delta\omega = 0$  и обусловленные рассеянием на ионно-звуковых колебаниях, и боковые сателлиты, связанные с рассеянием на ленгмюровских колебаниях. Относительный вес этих сателлитов по отношению к звуковым максимумам составляет около  $2a^2 k_0^2$ .

Спектральное распределение рассеянных электромагнитных волн в промежуточных случаях изображено на рис. 9. Заметим, что экспериментальное изучение спектрального распределения рассеянных электромагнитных волн в плазме является важным источником получения сведений о параметрах, характеризующих ее состояние. В частности, такое изучение позволяет судить не только о плотности и температуре электронов, но и о степени неизотермичности плазмы.

В неравновесной плазме сечения рассеяния электромагнитных волн на коллективных флуктуациях могут аномально возрастать, если состояние плазмы находится вблизи границы области кинетической устойчивости. В турбулентной плазме абсолютная величина сечения определяется стационарным уровнем неравновесных флуктуаций. В частности, сечение рассеяния электромагнитных волн на ионно-звуковых флуктуациях в турбулентной плазме описывается выражением

$$d \Sigma = \frac{1}{16\pi} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{I_q}{T_e} (1 + \cos^2 \theta) \times \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_s) + \delta(\Delta\omega + qv_s) \} d\omega d\Omega, \quad (10.43)$$

где  $I_q$  — интенсивность неравновесных флуктуаций. Комбинационное рассеяние электромагнитных волн на ленгмюровских флуктуационных колебаниях в турбулентной плазме определяется по формуле (10.41), в правой части которой следует ввести дополнительный множитель  $I_q/4\pi T_e$ . Аномальное увеличение сечения рассеяния электромагнитных волн вблизи границы области устойчивости плазмы было предсказано в работе [155]. Аномальное поведение сечений рассеяния и трансформации электромагнитных волн в магнитоактивной плазме исследовано в работах [96, 103]. Теория рассеяния электромагнитных волн в ионосфере детально рассмотрена в монографии [198].

### Трансформация электромагнитных волн

Как уже отмечалось, при распространении электромагнитных волн в плазме помимо рассеяния, обусловленного взаимодействием падающих волн с флуктуациями, возможны также процессы трансформации поперечных электромагнитных волн в продольные волны. Сечения таких процессов трансформации определяются общей формулой (10.14). Рассмотрим теперь более подробно возможные процессы трансформации поперечных электромагнитных волн. В изотропной плазме поперечные электромагнитные волны могут преобразовываться в продольные ленгмюровские или продольные ионно-звуковые волны.

Для возможности учета распространения продольных волн (в отличие от поперечных) необходимо учитывать пространственную дисперсию, т. е. зависимость продольной диэлектрической прони-

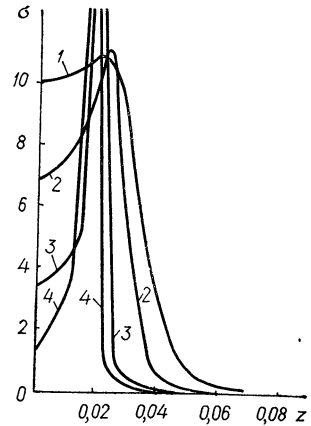


Рис. 9. Спектральное распределение рассеянного излучения в изотропической плазме при  $t = T_e/T_i = 1$  (1), 2 (2), 5 (3) и 10 (4);  $a^2 q^2 = 0, 1$ ;  $\sigma \equiv \frac{1}{\Sigma_0} \frac{d\Sigma}{dz d\Omega}$ ,  $\Sigma_0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \times \times n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \times \times (1 + \cos^2 \theta)$ .



цаемости плазмы  $\varepsilon_l$  от волнового вектора  $\mathbf{k}$ , так как в пренебрежении такой зависимостью групповая скорость продольных волн оказывается равной нулю. В изотропной плазме возможно распространение продольных высокочастотных ленгмюровских волн и низкочастотных ионно-звуковых волн (слабозатухающих в сильно неизотермической плазме). В приближении (4.41) закон дисперсии для ленгмюровских волн можно записать в виде

$$k^2 = \frac{\omega^2}{s^2} \varepsilon(\omega), \quad (10.44)$$

где  $\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}$  и  $s$  — тепловая скорость электронов. Соответственно для ионно-звуковых волн закон дисперсии (в случае сильно неизотермической плазмы) имеет вид

$$k = \frac{\omega}{v_s}, \quad (10.45)$$

где  $v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$  — скорость неизотермического звука.

Дифференциальное сечение или коэффициент трансформации поперечных электромагнитных волн в продольные определяется общей формулой

$$d \sum_{l \rightarrow l} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{\omega}{c \sqrt{\varepsilon(\omega_0)} \frac{\partial \varepsilon_l}{\partial \omega}} \frac{k_l k_{l'}}{k^2} \left( \delta_{kk'} - \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \right) \times \\ \times \{ b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + 4\chi_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\ \times \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle E_j E_{j'} \rangle_{q\Delta\omega}^0 \} d\mathbf{k}, \quad (10.46)$$

где величина  $b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0)$  определяется согласно (10.18). В случае преобразования электромагнитных волн в высокочастотные ленгмюровские волны в (10.46) следует подставить

$$d\mathbf{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{s^3} \omega^2 d\omega d\omega_0; \quad (10.47)$$

если электромагнитные волны преобразуются в низкочастотные ионно-звуковые волны, то —

$$d\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{v_s^3} d\omega d\omega_0. \quad (10.48)$$

Рассмотрим преобразование электромагнитных волн в ленгмюровские волны. Как и в случае рассеяния электромагнитных волн, главный вклад в выражения для величин  $b_{ii'kk'}$  и  $\chi_{ijk}^{(2)}$  вносят электронные составляющие и существенное значение имеют только продольные флуктуации. Учитывая, что фазовые скорости ленгмюровских волн в области прозрачности значительно больше тепловых скоростей электронов, при вычислении величин  $b_{ii'kk'}$  и  $\chi_{ijk}^{(2)}$  можно воспользоваться разложением соответствующих подынте-

гральных выражений в ряд по степеням отношения скорости электронов к фазовой скорости волн. В результате выражение в фигурных скобках в (10.46) принимает вид

$$\{ \dots \} = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 \omega^2} \left\langle \left| \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2}{q^2} \right) \delta n_e - 2 \frac{\Delta\omega^2}{\omega^2} \frac{kq}{q^2} \delta n_e + 2 \frac{\Omega^2}{\omega^2} \frac{kq}{q^2} (\delta n_e - \delta n_i) \right|^2 \right\rangle_{q\Delta\omega} \delta_{ik} \delta_{l'k'}. \quad (10.49)$$

Оценивая величины отдельных слагаемых под знаком модуля подобно тому, как это было сделано в случае рассеяния волн, убеждаемся, что в (10.49) следует сохранить только первое слагаемое. Таким образом, для дифференциального коэффициента трансформации поперечных электромагнитных волн в продольные ленгмюровские волны получаем выражение [88]

$$d \sum_{t_0 \rightarrow t} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^3}{s^3} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \times \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2}{q^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\omega_0. \quad (10.50)$$

Это выражение применимо только в области частот  $\omega$ , близких к ленгмюровской частоте  $\Omega$ , когда затухание продольных ленгмюровских волн мало.

Отношение коэффициента трансформации (10.50) к сечению рассеяния (10.29) пропорционально  $c^3/s^3$ :

$$\frac{d \sum_{t_0 \rightarrow t}}{d \sum_{t_0 \rightarrow t}} = \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2}{q^2} \right)^2 \frac{c^3}{s^3}. \quad (10.51)$$

Следовательно, в области частот  $\omega$ , близких к ленгмюровской частоте  $\Omega$ , поглощение электромагнитных волн, связанное с их трансформацией в продольные, более существенно по сравнению с рассеянием.

Если падающие электромагнитные волны характеризуются достаточно большими частотами  $\omega_0 \simeq \Omega$ , то процесс трансформации обусловлен в основном низкочастотными флуктуациями в плазме. Поэтому в изотермической плазме трансформация электромагнитных волн в ленгмюровские полностью определяется низкочастотными некогерентными флуктуациями плотности электронов. В сильно неизотермической плазме трансформация электромагнитных волн в ленгмюровские определяется флуктуациями плотности электронов, связанными с низкочастотными ионно-звуковыми колебаниями в плазме:

$$d \sum_{t_0 \rightarrow t} = \frac{1}{16\pi} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^3}{s^3} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \times \frac{I_q}{T_e} \sin^2 \vartheta \{ \delta(\Delta\omega - qv_s) + \delta(\Delta\omega + qv_s) \} d\omega d\omega_0, \quad (10.52)$$

где  $I_q$  — интенсивность ионно-звуковых флуктуационных колебаний. В неравновесной плазме (например, при наличии движения электронов относительно ионов) возможно аномальное увеличение коэффициента трансформации, связанное с высоким уровнем неравновесных коллективных флуктуаций [46].

В случае трансформации электромагнитных волн в ионно-звуковые при вычислении коэффициента  $d \Sigma_{t_0 \rightarrow l}$  следует учитывать, что фазовая скорость ионно-звуковых волн (в сильно неизотермической плазме) значительно меньше тепловой скорости электронов. Так как предполагается, что электромагнитные волны высокочастотные, то трансформация их в ионно-звуковые возможна только в случае, если частоты падающих электромагнитных волн близки к ленгмюровской частоте. При этом трансформация обусловлена взаимодействием падающих электромагнитных волн с ленгмюровскими флуктуационными колебаниями. Коэффициент трансформации поперечных электромагнитных волн в продольные ионно-звуковые волны определяется выражением

$$d \Sigma_{t_0 \rightarrow l} = \frac{3}{32} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^2}{s^2} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{k}{k_0} \frac{\sin^2 \theta}{a^2 q^2} \times \\ \times \frac{I_q}{T_e} \{ \delta(\Delta\omega - \Omega) + \delta(\Delta\omega + \Omega) \} d\omega d\mathbf{o}, \quad (10.53)$$

где  $I_q$  — интенсивность ленгмюровских флуктуационных колебаний. В двухтемпературной плазме величина  $I_q$  определяется температурой электронов, в неравновесной плазме  $I_q$  может значительно превышать свое тепловое значение.

### 3. РАССЕЯНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН

Перейдем теперь к изучению рассеяния и трансформации продольных волн в плазме. Рассмотрим прежде всего наиболее интересный случай рассеяния продольных ленгмюровских волн на продольных флуктуациях в плазме. Учитывая закон дисперсии для падающих и рассеянных ленгмюровских волн

$$k_0^2 = \frac{\omega_0^2}{s^2} \varepsilon(\omega_0) \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{s^2} \varepsilon(\omega)$$

и замечая, что групповая скорость для падающих волн определяется выражением

$$v_g^0 = s \sqrt{\varepsilon(\omega_0)}, \quad (10.54)$$

получаем для сечения рассеяния следующую общую формулу:

$$d \Sigma_{l \rightarrow l} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{\omega^4}{s^4} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \frac{k_i k_{i'}}{k^2} \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \{ b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + \\ + 4\chi_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \chi_{i'j'k'}^{(2)*}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle E_j E_{j'} \rangle_{q\Delta\omega}^0 \} d\omega d\mathbf{o}. \quad (10.55)$$

Заметим, что фазовые скорости падающих и рассеянных волн значительно превышают тепловую скорость электронов, поэтому выражение в фигурных скобках в (10.55) можно вычислить подобно тому, как это было сделано в случае рассеяния электромагнитных волн. Ограничиваясь учетом рассеяния ленгмюровских волн на продольных флуктуациях, выражение для сечения (10.55) приводим к виду [88]:

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^4}{s^4} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( \cos \vartheta + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0 k - k_0^2 \cos \vartheta}{q^2} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2 \cos \vartheta - k_0 k}{q^2} \right)^2 \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\omega_0, \quad (10.56)$$

т. е. сечение рассеяния в этом случае полностью определяется спектральным распределением флуктуаций плотности электронов.

Так как частоты падающих и рассеянных волн мало отличаются, то в изотермической плазме рассеяние ленгмюровских волн определяется некогерентными флуктуациями. В сильно неизотермической плазме возможно рассеяние ленгмюровских волн на ионно-звуковых флуктуационных колебаниях. Сечение рассеяния в этом случае записывается в виде

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{1}{8\pi} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^4}{s^4} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \frac{I_q}{T_e} \left( \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0 k - k_0^2 \cos \vartheta}{q^2} + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2 \cos \vartheta - k_0 k}{q^2} \right)^2 \{ \delta(\Delta\omega - qv_s) + \\ + \delta(\Delta\omega + qv_s) \} d\omega d\omega_0, \quad (10.57)$$

где  $I_q$  — интенсивность ионно-звуковых колебаний. В двухтемпературной плазме сечение рассеяния ленгмюровских волн, как и сечение рассеяния электромагнитных волн, определяется температурой электронов, в неравновесной плазме сечение (10.57) может сильно возрастать с увеличением  $I_q$ . Аномальное увеличение сечения рассеяния ленгмюровских волн при наличии относительного движения электронов и ионов в плазме рассматривалось в работе [10].

Приведем также формулу для сечения рассеяния ленгмюровских волн с учетом рассеяния последних на флуктуациях вихревой скорости электронов:

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{c^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^4}{s^4} \cos^2 \vartheta \left\{ \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\omega_0^2} \left( \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}q}{q^2} \mathbf{q} \right)^2 \langle v_{e\perp}^2 \rangle_{q\Delta\omega} \right\} d\omega d\omega_0. \quad (10.58)$$

Эта формула выписана для простейшего случая  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Далее, так как в сильно неизотермической плазме кроме продольных ленгмюровских волн существуют также продольные

ионно-звуковые волны, то в такой плазме возможна трансформация продольных волн одного типа в продольные волны другого типа. В частности, при распространении в сильно неизотермической плазме продольных ленгмюровских волн вследствие их взаимодействия с ленгмюровскими флуктуационными колебаниями возможна трансформация в продольные ионно-звуковые волны. Приближенное выражение для сечения такого процесса можно получить из общей формулы (10.16), если учесть, что фазовая скорость ионно-звуковых волн значительно меньше тепловой скорости электронов.

Дифференциальное сечение (или коэффициент) трансформации продольных ленгмюровских волн в продольные ионно-звуковые волны имеет вид

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{3}{16} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c^4}{s^4} \frac{\omega}{\omega_0} \frac{k}{k_0} \frac{1}{a^2 q^2} \frac{I_q}{T_e} \{ \delta(\Delta\omega - \Omega) + \delta(\Delta\omega + \Omega) \} d\omega d\Omega. \quad (10.59)$$

Очевидно, в неравновесных условиях коэффициент трансформации (10.59) может принимать аномальные значения. В заключение рассмотрим трансформацию продольных ленгмюровских волн в поперечные электромагнитные волны. Учитывая соответствующую дисперсию падающих и рассеянных волн, общую формулу (10.15) можно записать в виде

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{1}{32\pi^3} \frac{\omega^4}{c^3 s} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( \delta_{il'} - \frac{k_i k_{l'}}{k^2} \right) \times \\ \times \frac{k_{0k} k_{0k'}}{k_0^2} \{ b_{ii'kk'}(\omega, \mathbf{k}; \omega_0, \mathbf{k}_0) + 4\chi_{ijk}^{(2)}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \times \\ \times \chi_{ij'j'k'}^{(2)*}(\Delta\omega, \mathbf{q}; \omega_0, \mathbf{k}_0) \langle E_j E_{j'} \rangle_{q\Delta\omega}^0 \} d\omega d\Omega. \quad (10.60)$$

Так как фазовые скорости падающих и рассеянных волн велики по сравнению с тепловой скоростью электронов, то, проводя вычисления подобно предыдущим случаям, окончательно получаем для дифференциального коэффициента трансформации следующую формулу [88]:

$$d \sum_{l_0 \rightarrow l} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{s} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0^2}{q^2} \right)^2 \times \\ \times \sin^2 \vartheta \langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega d\Omega. \quad (10.61)$$

Отношение коэффициента трансформации ленгмюровских волн в электромагнитные волны (10.61) к сечению рассеяния ленгмюровских волн (10.56) при малом изменении частоты равно  $\frac{s^3}{c^3} \text{tg}^2 \vartheta$ .

Поскольку спектральное распределение флуктуаций плотности электронов  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}$  характеризуется максимумами при  $\Delta\omega = 0$  и  $\Delta\omega = \Omega$ , электромагнитные волны излучаются в основном с час-

тотами, близкими к частотам  $\Omega$  и  $2\Omega$ . В первом случае трансформация продольных ленгмюровских волн в поперечные электромагнитные волны обусловлена некогерентными флуктуациями, связанными со случайным движением отдельных частиц плазмы, во втором — взаимодействием падающих ленгмюровских волн с ленгмюровскими флуктуационными колебаниями. Коэффициент трансформации можно представить в виде

$$d \sum_{l_0 \rightarrow t} = \frac{1}{8\pi} n_0 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{c}{s} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega_0)}} a^2 q^2 \times \\ \times \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \frac{k_0^2}{q^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \frac{I_q}{T} \{ \delta(\Delta\omega - \Omega) + \delta(\Delta\omega + \Omega) \} d\omega d\omega_0. \quad (10.62)$$

В неравновесной плазме коэффициент трансформации ленгмюровских волн в электромагнитные может принимать большие значения.

Процессы рассеяния волн и их взаимной трансформации на флуктуациях в магнитоактивной плазме детально рассмотрены в работе [96].

#### 4. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЛАЗМЕ

Обобщенное кинетическое уравнение позволяет описывать не только рассеяние и трансформацию волн на флуктуациях плотности и скорости частиц, но и рассеяние заряженных частиц на флуктуациях электрического поля в плазме. Такое рассеяние заряженных частиц сопровождается излучением, а так как флуктуации электрического поля сами непосредственно связаны с микроскопическим движением отдельных заряженных частиц, то рассматриваемое излучение представляет собой не что иное, как тормозное излучение<sup>5</sup>.

При рассмотрении тормозного излучения в плазме удобно использовать уравнение (9.71), описывающее в общем виде временную зависимость спектрального распределения энергии электромагнитного поля. Предполагая, что распределения частиц в плазме стационарны, и пренебрегая затуханием волн и нелинейным взаимодействием излучаемых волн, в правой части (9.71) сохраняем второе и последнее слагаемые:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \operatorname{Re} (\Lambda_{ij}(k) e_j e_i^*)}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial t} \langle E^2 \rangle_k = \operatorname{Im} \Lambda_{ii'}^{-1}(k) \left\{ \sum_{l'} (b_{i'l'kk'}(k, 1) + \right. \\ \left. + 2\kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} \langle E_k E_{k'} \rangle_1 + q_{i'l'}(k) \right\}. \quad (10.63)$$

Это соотношение представляет собой уравнение баланса энергии. Так как диссипация, связанная с линейным затуханием волн, не учитывается, то приращение энергии поля полностью определяется

<sup>5</sup> Тормозное излучение в плазме исследовано в работах [1, 42, 123, 132, 133, 140, 188].

источниками излучения. Ограничиваясь рассмотрением случая изотропной плазмы, из (10.63) для приращения плотности энергии поперечного электромагнитного поля получаем выражение

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega_{\mathbf{k}} \text{Sp } \lambda_{\mathbf{k}}}{\Lambda_{\mathbf{k}}} e_i e_{i'} \left\{ \sum_1 (b_{ii'kk'}(k, 1) + 2\kappa_{ijk}^{(2)}(k-1, 1) \times \right. \\ \left. \times \kappa_{i'j'k'}^{(2)*}(k-1, 1) \langle E_j E_{j'} \rangle_{k-1} \rangle \langle E_k E_{k'} \rangle_1 + q_{ii'}'(k) \right\}. \quad (10.64)$$

В нерелятивистском случае в правой части (10.64) можно ограничиться учетом продольных флуктуаций. При этом из-за большого различия между массами электронов и ионов в (10.64) следует учитывать только электронные составляющие.

Интенсивность излучения, отнесенная к единичному интервалу частот и единичному телесному углу,  $\frac{dP}{d\omega d\Omega}$ , связана с величиной  $\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t}$  соотношением

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\omega^2}{c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t}. \quad (10.65)$$

Как и при вычислении сечений рассеяния и коэффициентов трансформации волн, воспользуемся в интегральных представлениях для величин  $b_{ii'kk'}$  и  $q_{ii'}'$  разложениями по степеням отношений скорости электронов к фазовым скоростям волн. При этом величина  $b_{ii'kk'}$  сводится к спектральной корреляционной функции для флуктуаций плотности электронов, а плотности источников  $q_{ii'}'$  выражаются через спектральные функции, учитывающие корреляцию между флуктуациями плотности электронов и флуктуациями плотности зарядов в плазме. В результате для спектрального распределения излучения получаем следующую формулу:

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\pi} \frac{e^4}{m^2 c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{k}']^2}{k^2 k'^2} \int d\omega' \left\{ \frac{1}{k'^2} \langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(k-k')^2} \text{Re} \langle \delta n_e \rho \rangle_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'} \langle \rho \delta n_e \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \right\}, \quad (10.66)$$

где  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$ ,  $\langle \delta n_e \rho \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  и  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  — спектральные корреляционные функции, учитывающие самосогласованное взаимодействие между заряженными частицами в плазме.

Для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов с зарядом  $-Ze$  ( $e$  — заряд электрона), флуктуации плотности заряда  $\rho$  связаны с флуктуациями плотностей электронов и ионов  $\delta n_e$  и  $\delta n_i$  соотношением

$$\rho = e(\delta n_e - Z\delta n_i). \quad (10.67)$$

Поэтому правую часть (10.66) можно выразить через корреляционные функции для флуктуаций плотностей электронов и ионов.

В формуле (10.66) волновой вектор  $\mathbf{k}$  соответствует излучаемой волне, а  $\mathbf{k}'$  — продольным флуктуациям в плазме. Предполагая, что  $k \ll k'$  (дипольное приближение), правую часть можно разложить по степеням  $k/k'$ . В результате для спектрального распределения тормозного излучения в плазме получаем формулу

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{\pi} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{k}']^2}{k^2 k'^4} \int d\omega' \{ \langle \delta n_e^2 \rangle_{-\mathbf{k}, \omega - \omega'} \langle \delta n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} - \langle \delta n_e \delta n_i \rangle_{-\mathbf{k}, \omega - \omega'} \langle \delta n_i \delta n_e \rangle_{\mathbf{k}' \omega'} \}. \quad (10.68)$$

Так как при рассеянии электрона на электроне дипольный момент системы не изменяется, то в этой формуле отсутствует слагаемое, пропорциональное произведению  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega'}$  и  $\langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}' \omega'}$ .

Согласно (10.68) спектральное распределение интенсивности тормозного излучения зависит от корреляции между ионами. Как показано в работе [133], тепловые корреляции ионов мало влияют на спектральное распределение излучаемых волн. Однако нетепловые корреляции ионов, например ионно-звуковые волны большой амплитуды, могут существенно сказываться на излучении.

В пренебрежении движением ионов формула для спектрального распределения излучения (10.68) упрощается. В предельном случае  $n_i \rightarrow \infty$  выражения для спектральных корреляционных функций принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \langle \delta n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 2\pi n_0 \left\{ \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{1}{ks} \frac{e^{-\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{k^2 s^2}}}{|\varepsilon(\omega, k)|^2} + \frac{Z}{1 + a^2 k^2} \delta(\omega) \right\}, \\ \langle \delta n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 2\pi \frac{n_0}{Z} \delta(\omega), \\ \langle \delta n_e \delta n_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \langle \delta n_i \delta n_e \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2\pi \frac{n_0}{1 + a^2 k^2} \delta(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (10.69)$$

При этом

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = 2 \sqrt{6\pi} \frac{Z e^6 n_0^2}{m^2 c^3 s} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{k}']^2}{k^2 k'^5} \frac{e^{-\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{k'^2 s^2}}}{|\varepsilon(\omega, k')|^2}. \quad (10.70)$$

Переходя от суммирования по  $\mathbf{k}'$  к интегрированию и выполняя интегрирование по углам, получаем

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{Z e^6 n_0^2}{m^2 c^3 s} \int_0^{k_m} dk' \frac{e^{-\frac{3}{2} \frac{\omega^2}{k'^2 s^2}}}{k' |\varepsilon(\omega, k')|^2}. \quad (10.71)$$

Во избежание логарифмической расходимости верхний предел интегрирования ограничен величиной  $k_m$ . В классическом случае  $k_m$  определяется обратным расстоянием максимального сближения двух заряженных частиц,  $k_m = \frac{2}{\gamma} \frac{ms^2}{Ze^2}$  ( $\gamma$  — постоянная Эйлера,



$\gamma = 1,78\dots$ ). В квантовом случае ( $s \geq \frac{Ze^2}{\hbar}$ ) следует положить  $k_m = 2ms/\hbar$ .

Очевидно, частота испускаемой волны  $\omega$  должна превышать ленгмюровскую частоту  $\Omega$ . С другой стороны, выражение, стоящее под знаком интеграла в (10.71), существенно отличается от нуля только при  $k's > \omega$ . Поэтому область эффективных значений  $k'$  удовлетворяет условию  $ak' > 1$ . Так как в указанной области  $\varepsilon(\omega, k') \simeq 1$ , то влиянием коллективных свойств плазмы на тормозное излучение практически можно пренебречь. Замечая, что

$$\int_{\alpha}^{\infty} dy \frac{e^{-y}}{y} = -\ln(\gamma\alpha) + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} + \dots,$$

окончательно получаем

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{Ze^6 n_0^2}{m^2 c^3 s} \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3\gamma}} \frac{k_m s}{\omega}\right). \quad (10.72)$$

Следовательно, спектральное распределение тормозного излучения характеризуется лишь слабой логарифмической зависимостью от частоты.

Заметим, что кроме тормозного излучения, связанного с испусканием поперечных волн, в плазме возможно также испускание продольных волн. В узкой области частот вблизи ленгмюровской частоты  $\Omega$  интенсивность испускания продольных волн превышает интенсивность тормозного излучения в  $(c/s)^3$  раз.

Численное интегрирование (10.71) показывает, что небольшой максимум при частотах  $\omega$ , близких к ленгмюровской частоте  $\Omega$ , в спектральном распределении тормозного излучения связан с возможностью испускания ленгмюровских волн. В неравновесной плазме такое усиление тормозного излучения в области частот  $\omega \simeq \Omega$  может достигать больших значений [188]. Спектральное распределение тормозного излучения в неравновесной плазме с учетом движения ионов детально исследовано в работе [150], тормозное излучение в анизотропной плазме — в работах [126, 157].

Кроме тормозного излучения, возникающего вследствие рассеяния частиц на флуктуациях электрического поля, в неравновесной плазме возможно также дополнительное излучение, связанное с превращением двух флуктуационных продольных волн в поперечную электромагнитную волну. Такое спонтанное свечение возможно только в неравновесной плазме, так как в равновесной плазме все излучение сводится к релеевскому. Интенсивность спонтанного свечения неравновесной плазмы достигает аномально больших значений, если состояние плазмы близко к неустойчивому<sup>6</sup>.

Интенсивность спонтанного свечения может быть определена на

<sup>6</sup> Спонтанное свечение неравновесной плазмы рассмотрено И. А. Ахизером, И. А. Данелия и Н. Л. Цинцадзе [11]. Излучение полуограниченной плазмы исследовано И. П. Якименко [197].

основе общего уравнения (9.71). Сохраняя в правой части уравнения только второе слагаемое и предполагая, что флуктуации поля связаны с продольными колебаниями, для интенсивности излучения поперечных электромагнитных волн получаем формулу

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{128\pi^5} \frac{\omega^4}{c^3} V \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sum_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''=\mathbf{k}} \frac{1}{k'^2 k''^2} \int d\omega' |e_i \chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega - \omega', \mathbf{k}'') k'_j k''_k|^2 \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}''\omega-\omega'}. \quad (10.73)$$

В изотропной сильно неизотермической плазме возможны продольные ленгмюровские и ионно-звуковые колебания. Очевидно, при рассеянии флуктуационных ленгмюровских волн на ленгмюровских волнах частота излучаемых электромагнитных волн близка к удвоенной ленгмюровской частоте, а при рассеянии флуктуационных ленгмюровских волн на флуктуационных ионно-звуковых волнах излучаемые электромагнитные волны характеризуются частотами, близкими к ленгмюровской частоте.

Рассмотрим двухтемпературную плазму, в которой электроны движутся относительно ионов, и определим интенсивность излучения электромагнитных волн, возникающего в результате рассеяния флуктуационных ленгмюровских волн на низкочастотных ионно-звуковых флуктуациях. В этом случае для нелинейной восприимчивости  $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'')$  можно воспользоваться приближенным выражением

$$e_i \chi_{ijk}^{(2)}(\omega', \mathbf{k}'; \omega'', \mathbf{k}'') k'_j k''_k \simeq -i \frac{e}{T} \frac{|[\mathbf{k}, \mathbf{k}']|}{k}, \quad \omega' \gg \omega''.$$

Используя общие формулы для спектральных распределений флуктуаций (6.144) и (6.147), таким образом получаем

$$\frac{dP}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{e^4 n_0 T}{m^2 c^3} \frac{\omega^3}{\Omega} V \sqrt{\varepsilon(\omega)} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{[\mathbf{k}, \mathbf{k}']^2}{k^2 k'^2} q^2 v_s^2 \times \\ \times \int d\omega' \frac{1}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) \delta\{(\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{u})^2 - \Omega^2\}, \quad (10.74)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega'$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ . Из этой формулы следует, что интенсивность спонтанного свечения плазмы аномально возрастает при  $u \rightarrow v_s$ , если  $\mathbf{q}\mathbf{u} \rightarrow qv_s$ . Заметим, что излучение плазмы, обусловленное трансформацией продольных флуктуационных волн в поперечные, велико только в длинноволновой области.

Кинетическое уравнение для волн, использованное нами для рассмотрения рассеяния и трансформации волн в плазме, широко применяется для изучения различных процессов в турбулентной плазме<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Например, в работах [22, 30, 190] развита теория модуляционной неустойчивости, в работе [47] — теория коллапса ленгмюровских волн. Оригинальный подход при рассмотрении сильной турбулентности в плазме предложен в работах Т. Х. Дюпри [141—143] и Дж. Вайнстока [191—194].

1. *Акопян А. В., Цытович В. Н.* Тормозное излучение в неравновесной плазме.— Физика плазмы, 1975, 1, с. 673—683.
2. *Альтшуль Л. М., Карпман В. И.* Кинетика волн в слаботурбулентной плазме.— ЖЭТФ, 1964, 47, с. 1552—1574.
3. *Андреев Н. Е., Кирий А. Ю., Силин В. П.* Параметрическое возбуждение продольных колебаний в плазме слабым высокочастотным электрическим полем.— ЖЭТФ, 1969, 57, с. 1024—1039.
4. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.* Коллективные колебания в плазме. М., Атомиздат, 1964. 164 с.
5. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н.* Электродинамика плазмы. М., «Наука», 1974. 720 с.
6. *Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Ситенко А. Г.* К теории флуктуаций в плазме.— ЖЭТФ, 1961, 41, с. 644—654.
7. *Ахиезер А. И., Любарский Г. Я.* К нелинейной теории колебаний электронной плазмы.— ДАН СССР, 1951, 80, с. 193—195.
8. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* О релятивистских колебаниях плазмы.— ДАН СССР, 1955, 102, с. 919—920.
9. *Ахиезер А. И., Прохода И. Г., Ситенко А. Г.* О рассеянии электромагнитных волн в плазме.— ЖЭТФ, 1957, 33, с. 750—757.
10. *Ахиезер И. А., Болотин Ю. Л.* Теория взаимодействия частиц и волн с неравновесной плазмой.— Ядерный синтез, 1963, 3, с. 271—275.
11. *Ахиезер И. А., Даниеля И. А., Цинцадзе Н. Л.* К теории трансформации и рассеяния электромагнитных волн в неравновесной плазме.— ЖЭТФ, 1964, 46, с. 300—306.
12. *Балеску Р.* Статистическая механика заряженных частиц. М., «Мир», 1967. 516 с.
13. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. М., «Мир», 1971. 438 с.
14. *Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А., Силин В. П.* О флуктуациях электромагнитного поля в неравновесной плазме.— Радиофизика, 1962, 5, с. 1093—1103.
15. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М., Гостехиздат, 1946. 120 с.
16. *Болъцман Л.* Лекции по теории газов. М., Гостехиздат, 1953. 556 с.
17. *Бункин Ф. В.* К феноменологической теории тепловых флуктуаций в макроскопических системах.— Радиофизика, 1962, 5, с. 83—94.
18. *Быченко В. Ю., Пустовалов В. В., Силин В. П., Тихончук В. Т.* Насыщение параметрической турбулентности нелинейным сдвигом частоты. Препринт ФИАН-164. М., 1975. 33 с.
19. *Веденов А. А.* Теория турбулентной плазмы. М., ИНИ, 1965. 116 с.
20. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* Нелинейные колебания разреженной плазмы.— Ядерный синтез, 1961, 1, с. 82—100.
21. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* Квазилинейная теория колебаний плазмы.— Ядерный синтез. Приложение, 1962, 2, с. 465—485.

22. Веденов А. А., Рудаков Л. И. О взаимодействии волн в сплошных средах.— ДАН СССР, 1964, 159, с. 767—770.
23. Векслер В. И., Коврижных Л. М. О циклическом ускорении частиц в высокочастотных полях.— ЖЭТФ, 1958, 35, с. 1116—1118.
24. Власов А. А. О вибрационных свойствах электронного газа.— ЖЭТФ, 1938, 8, с. 291—318.
25. Власов А. А. Теория многих частиц. М., Гостехиздат, 1950. 348 с.
26. Волков Т. Ф. Влияние высокочастотного электромагнитного поля на колебания в плазме.— Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций 1958, 4, с. 98—108.
27. Галеев А. А., Карпман В. И. Турбулентная теория слабонеровновесной разреженной плазмы и структура ударных волн.— ЖЭТФ, 1963, 44, с. 592—602
28. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Многочастичные аспекты теории турбулентной плазмы.— Ядерный синтез, 1965, 5, с. 20—40.
29. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы.— Вопросы теории плазмы, 1973, 7, с. 3—145.
30. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. Нелинейная теория модуляционной неустойчивости ленгмюровских волн.— В кн.: Проблемы теории плазмы. К., 1976, с. 154—163.
31. Гапонов А. В., Миллер М. А. О потенциальных ямах для заряженных частиц в высокочастотном электромагнитном поле.— ЖЭТФ, 1958, 34, с. 242—243
32. Гиббс Дж. Основные принципы статистической механики. М., Гостехиздат 1946. 204 с.
33. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М., «Наука» 1967. 684 с.
34. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., «Наука», 1975. 416 с
35. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. М., «Наука» 1970. 208 с.
36. Голант В. Е. Сверхвысокочастотные методы исследования плазмы. М., «Наука», 1968. 328 с.
37. Горбунов Л. М. Возмущение среды полем сильной электромагнитной волны.— ЖЭТФ, 1968, 55, с. 2298—2309.
38. Горбунов Л. М., Пустовалов В. В., Силин В. П. Нелинейные взаимодействия электромагнитных волн в плазме.— ЖЭТФ, 1964, 47, с. 1437—1453.
39. Горбунов Л. М., Силин В. П. О рассеянии волн в плазме.— ЖЭТФ, 1966, 50, с. 1095—1100.
40. Горбунов Л. М., Тиммербулатов А. М. О законе дисперсии и нелинейном взаимодействии ленгмюровских волн в слаботурбулентной плазме.— ЖЭТФ, 1967, 53, с. 1492—1498.
41. Гуров К. П. Основания кинетической теории. М., «Наука», 1966. 352 с.
42. Даусон Дж. Излучение плазмы.— В кн.: Физика высокотемпературной плазмы. М., 1972, с. 9—76.
43. Дикасов В. М., Рудаков Л. И., Рютков Д. Д. О взаимодействии волн с отрицательной энергией в слаботурбулентной плазме.— ЖЭТФ, 1965, 48, с. 913—920
44. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. О дисперсионном уравнении для обыкновенной волны, распространяющейся в плазме поперек внешнего магнитного поля.— ЖЭТФ, 1961, 40, с. 1404—1410.
45. Елеонский В. М., Зырянов П. С., Силин В. П. Интеграл столкновений заряженных частиц в сильном магнитном поле.— ЖЭТФ, 1962, 42, с. 896—904
46. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. М., «Наука», 1964. 560 с
47. Захаров В. Е. Коллапс ленгмюровских волн.— ЖЭТФ, 1972, 62, с. 1745—1759
48. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М., ИЛ, 1955. 480 с.
49. Ишимару С. Основные принципы физики плазмы. М., Атомиздат, 1975. 288 с.
50. Кадомцев Б. Б. О флуктуациях в газе.— ЖЭТФ, 1957, 32, с. 943—944.
51. Кадомцев Б. Б. Турбулентность плазмы.— Вопросы теории плазмы, 1964, 4, с. 188—339.
52. Кадомцев Б. Б., Михайловский А. Б., Тимофеев А. В. Волны с отрицательной энергией в диспергирующих средах.— ЖЭТФ, 1964, 47, с. 2266—2268.
53. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Слаботурбулентная плазма в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1962, 43, с. 2234—2244.

54. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973. 176 с.
55. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. М., Изд-во Моск. ун-та, 1964. 282 с.
56. *Климонтович Ю. Л.* О нелинейном взаимодействии волн в плазме.— ЖЭТФ, 1965, 48, с. 488—497.
57. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М., «Наука», 1975. 352 с.
58. *Климонтович Ю. Л., Силин В. П.* О флуктуациях в плазме без столкновений.— ДАН СССР, 1962, 145, с. 764—767.
59. *Коврижных Л. М.* К теории нелинейного взаимодействия волн в плазме.— Труды ФИАН, 1966, 32, с. 173—205.
60. *Кочерга О. Д.* Корреляционные функции токов и нелинейные восприимчивости неравновесной изотропной плазмы.— УФЖ, 1975, 20, с. 148—152.
61. *Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.* Введение в нелинейную механику. К., Изд-во АН УССР, 1937. 365 с.
62. *Ландау Л. Д.* Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия.— ЖЭТФ, 1937, 7, с. 203—209.
63. *Ландау Л. Д.* О колебаниях электронной плазмы.— ЖЭТФ, 1946, 16, с. 574—586.
64. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957. 532 с.
65. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М., «Наука», 1964. 568 с.
66. *Левин М. Л., Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М., «Наука», 1967. 308 с.
67. *Леонтович М. А., Рытов С. М.* О дифференциальном законе для интенсивностей электрических флуктуаций и о влиянии на них скин-эффекта.— ЖЭТФ, 1952, 23, с. 246—252.
68. *Ломинадзе Д. Г.* Циклотронные волны в плазме. Тбилиси, «Мецниереба», 1975. 224 с.
69. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 1. Неустойчивости однородной плазмы. М., Атомиздат, 1970. 296 с.
70. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. Неустойчивости неоднородной плазмы. М., Атомиздат, 1971. 312 с.
71. *Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З.* Об устойчивости установившихся продольных колебаний плазмы.— ЖТФ, 1962, 32, с. 1291—1296.
72. *Половин Р. В.* К нелинейной теории продольных колебаний плазмы.— ЖЭТФ, 1956, 31, с. 354—355.
73. *Пустовалов В. В., Романов А. Б., Савченко М. А., Силин В. П., Черников А. А.* Метод функционального среднего в кинетической теории плазмы. Препринт ФИАН-156. М., 1975. 74 с.
74. *Пустовалов В. В., Силин В. П.* Нелинейная теория взаимодействия волн в плазме.— Труды ФИАН, 1972, 61, с. 42—281.
75. *Пустовалов В. В., Силин В. П.* О стационарной турбулентности параметрически неустойчивой плазмы.— Письма в ЖЭТФ, 1972, 16, с. 308—311.
76. *Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф.* Взаимодействие потоков быстрых электронов с продольными плазменными волнами.— ЖЭТФ, 1961, 40, с. 123—132.
77. *Рытов С. М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. М., Изд-во АН СССР, 1953. 232 с.
78. *Сагдеев Р. З.* Об удержании плазмы давлением стоячей электромагнитной волны.— Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, 1958, 3, с. 346—361.
79. *Сизоненко В. Л., Степанов Н. К.* О квазилинейной релаксации продольных колебаний плазмы.— ЖЭТФ, 1965, 49, с. 1197—1210.
80. *Силин В. П.* Электромагнитные флуктуации в средах с пространственной дисперсией.— Радиофизика, 1959, 2, с. 198—202.
81. *Силин В. П.* К теории электромагнитных флуктуаций в плазме.— ЖЭТФ, 1961, 41, с. 969—976.
82. *Силин В. П.* Об одной возможности неустойчивости плазмы.— ЖЭТФ, 1963, 45, с. 816—818.

83. *Силин В. П.* К кинетической теории взаимодействия плазменных волн.— ПМТФ, 1964, 1, с. 31—40.
84. *Силин В. П.* Параметрический резонанс в плазме.— ЖЭТФ, 1965, 48, с. 1679—1691.
85. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. М., «Наука», 1971. 332 с.
86. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. М., «Наука», 1973. 288 с.
87. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961. 244 с.
88. *Ситенко А. А.* Электромагнитные флуктуации в плазме. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1965. 184 с.
89. *Ситенко А. Г.* О флуктуационно-диссипативном соотношении для неравновесных систем.— УФЖ, 1966, 11, с. 1161—1166.
90. *Ситенко А. Г.* Связь между нелинейными восприимчивостями и флуктуациями в плазме.— ДАН СССР, 1973, 211, с. 79—82.
91. *Ситенко А. Г.* Флуктуации в турбулентной плазме.— Физика плазмы, 1975, 1, с. 45—59.
92. *Ситенко А. Г.* Флуктуации в плазме и статистическое описание плазмы.— В кн.: Проблемы теории плазмы. К., 1976, с. 5—16.
93. *Ситенко А. Г., Гурин А. А.* О влиянии столкновений между частицами на флуктуации в плазме.— ЖЭТФ, 1965, 49, с. 1591—1600.
94. *Ситенко А. Г., Засенко В. И.* О насыщении уровня флуктуаций в плазме с анизотропной температурой. Препринт ИТФ-77-11Р. К., 1977. 12 с.
95. *Ситенко А. Г., Засенко В. И., Фальк Л. Р.* О четырехволновом резонансном взаимодействии в плазме. Препринт ИТФ-76-92Р. К., 1976. 22 с.
96. *Ситенко А. Г., Кирочкин Ю. А.* Рассеяние и трансформация волн в магнитоактивной плазме.— УФН, 1966, 89, с. 227—258.
97. *Ситенко А. Г., Кочерга О. Д.* Электромагнитные флуктуации в неравновесной плазме. 1. Нелинейное взаимодействие волн и спектр стационарных флуктуаций. Препринт ИТФ-76-10Р. К., 1976. 38 с.
98. *Ситенко А. Г., Кочерга О. Д.* Электромагнитные флуктуации в неравновесной плазме. 2. Кинетическое уравнение для волн и рассеяние волн в плазме. Препринт ИТФ-76-77Р. К., 1976. 23 с.
99. *Ситенко А. Г., Нгуен Ван Чонг, Павленко В. Н.* К теории эха в плазме. Трехимпульсные эховые колебания.— ЖЭТФ, 1970, 58, с. 1377—1383.
100. *Ситенко А. Г., Нгуен Ван Чонг, Павленко В. Н.* Пространственное эхо в плазме.— УФЖ, 1970, 15, с. 1372—1379.
101. *Ситенко А. Г., Павленко В. Н., Засенко В. И.* Эхо в полуограниченной плазме.— УФЖ, 1975, 20, с. 323—326.
102. *Ситенко А. Г., Павленко В. Н., Засенко В. И.* Эховые поверхностные волны в плазме. Препринт ИТФ-76-61Р. К., 1976. 12 с.
103. *Ситенко А. Г., Радзиевский В. Н.* О флуктуациях в неравновесной магнитоактивной плазме.— ЖТФ, 1965, 35, с. 1165—1176.
104. *Ситенко А. Г., Степанов К. Н.* О колебаниях электронной плазмы в магнитном поле.— ЖЭТФ, 1956, 31, с. 642—652.
105. *Ситенко А. Г., Цзянь-Ю-тай.* О коэффициентах динамического трения и диффузии в плазме.— ЖТФ, 1962, 32, с. 1325—1332.
106. *Ситенко А. Г., Якименко И. П.* Метод обращения флуктуационно-диссипативного соотношения в теории плазмы.— В кн.: Проблемы теории плазмы. К., 1972, с. 22—38.
107. *Спитцер Л.* Физика полностью ионизированного газа. М., «Мир», 1965. 212 с.
108. *Стикс Т.* Теория плазменных волн. М., Атомиздат, 1965. 344 с.
109. *Уленбек Дж., Форд Дж.* Лекции по статистической механике. М., «Мир», 1965. 308 с.
110. *Хилд М., Уортон С.* Микроволновая диагностика плазмы. М., Атомиздат, 1968. 392 с.
111. *Цытович В. Н.* Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967. 288 с.
112. *Цытович В. Н.* Теория турбулентной плазмы. М., Атомиздат, 1971. 424 с.
113. *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., ИЛ, 1947. 168 с.

114. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме.— Вопросы теории плазмы, 1963, 3, с. 3—140.
115. *Эккер Г.* Теория полностью ионизированной плазмы. М., «Мир», 1974. 432 с.
116. *Эллис В., Буксбаум С., Берс А.* Волны в анизотропной плазме. М., Атомиздат, 1966. 132 с.
117. *Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S.* Interactions between light waves in a nonlinear dielectric.— Phys. Rev., 1962, 127, p. 1918—1939.
118. *Bachmann P., Sauer K., Wallis G.* Zeitliche Phasenmischungsechos. Fortschr. Phys., 1972, 20, S. 147—200.
119. *Balescu R.* Irreversible processes in ionized gases.— Phys. Fluids, 1960, 3, p. 52—63.
120. *Bernstein I. B.* Waves in a plasma in a magnetic field.— Phys. Rev., 1958, 109, p. 10—21.
121. *Bernstein I. B., Greehe J. M., Kruskal M. D.* Exact nonlinear plasma oscillations.— Phys. Rev., 1957, 108, p. 546—550.
122. *Bernard W., Callen H. B.* Irreversible thermodynamics of a nonlinear R—C system.— Phys. Rev., 1960, 118, p. 1466—1470.
123. *Birmingham T., Dawson J., Oberman C.* Radiation processes in plasmas. — Phys. Fluids, 1965, 8, p. 297—307.
124. *Briggs R. J.* Electron-stream interaction with plasmas. Cambridge, MIT Press, 1964. 186 p.
125. *Callen H. B., Welton T. A.* Irreversibility and generalized noise.— Phys. Rev., 1951, 83, p. 34—40.
126. *Canuto V., Chiu H.* Nonrelativistic electron bremsstrahlung in a strongly magnetized plasma.— Phys. Rev., 1970, A2, p. 518—525.
127. *Cohen R., Spitzer L., Routly P.* The electrical conductivity of an ionized gas.— Phys. Rev., 1950, 80, p. 230—238.
128. *Cook I., Taylor J. B.* Electric field fluctuations in turbulent plasmas.— J. Plasma Phys., 1973, 9, p. 131—141.
129. *Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N.* Nonlinear interactions of positive and negative energy modes in rarefied plasmas. 1, 2.— Ann. Phys., 1969, 55, p. 207—247, 248—270.
130. *Davidson R. C.* Resonant four-wave interaction of electron-plasma oscillations.— Phys. Rev., 1968, 176, p. 344—350.
131. *Davidson R. C.* Methods in nonlinear plasma theory. New York, Acad. Press, 1972. 356 p.
132. *Dawson J., Oberman C.* High-frequency conductivity and the emission and absorption coefficients of a fully ionized plasma.— Phys. Fluids, 1962, 5, p. 517—524.
133. *Dawson J., Oberman C.* Effect of ion correlations on high frequency plasma conductivity.— Phys. Fluids, 1963, 6, p. 394—397.
134. *Dougherty J. P., Farley D. T.* A theory of incoherent scattering of radio waves by a plasma.— Proc. Roy. Soc. (London), 1960, A259, p. 79—99.
135. *Drake J. F., Kaw P. K., Lee Y. C., Schmidt G., Liu C. S., Rosenbluth M. N.* Parametric instabilities of electromagnetic waves in plasmas.— Phys. Fluids, 1974, 17, p. 778—785.
136. *Drummond J. E.* Basic microwave properties of a hot magnetoplasma.— Phys. Rev., 1958, 110, p. 293—306.
137. *Drummond W. E., Pines D.* Nonlinear stability of plasma oscillations.— Nucl. Fusion. Suppl., 1962, 3, p. 1049—1057.
138. *Drummond W. E., Pines D.* Nonlinear plasma oscillations.— Ann. Phys., 1964, 28, p. 478—499.
139. *Du Bois D. F., Goldman M. V.* Parametrically excited plasma fluctuations.— Phys. Rev., 1967, 164, p. 207—222.
140. *Dupree T. H.* Kinetic theory of plasma and electromagnetic field.— Phys. Fluids, 1963, 6, p. 1714—1729.
141. *Dupree T. H.* A perturbation theory for strong plasma turbulence.— Phys. Fluids, 1966, 9, p. 1773—1782.

142. *Dupree T. H.* Nonlinear theory of drift-wave turbulence and enhanced diffusion.— *Phys. Fluids*, 1967, **10**, p. 1049—1055.
143. *Dupree T. H.* Theory of phase space density granulation in plasma.— *Phys. Fluids*, 1972, **15**, p. 334—344.
144. *Frieman E. A.* On a new method in the theory of irreversible processes.— *J. Math. Phys.*, 1963, **4**, p. 410—418.
145. *Golden K. I., Kalman G., Datta T.* Sum rules for nonlinear plasma response functions.— *Phys. Rev.*, 1975, **A11**, p. 2147—2151.
146. *Gould R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H.* Plasma wave echo.— *Phys. Rev. Lett.*, 1967, **19**, p. 219—222.
147. *Hagford T., Brockelman R.* A theory of collision dominated electron density fluctuations in a plasma with application to incoherent scattering.— *Phys. Fluids*, 1971, **14**, p. 1143—1151.
148. *Hamasaki S., Krall N. A.* Self-consistent calculation of an explosive instability.— *Phys. Fluids*, 1971, **14**, p. 1441—1451.
149. *Hinton F. L., Oberman C.* Test-particle propagator and its application to the decay of plasma wave echoes.— *Phys. Fluids*, 1968, **11**, p. 1982—1989.
150. *Hirshfield J. L.* Wave-wave contribution to the high-frequency resistivity of nonequilibrium plasma.— *Phys. Fluids*, 1973, **16**, p. 1460—1463.
151. *Hubbard J.* The friction and diffusion coefficients of the Fokker — Planck equation in a plasma. 1.— *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1961, **A260**, p. 114—126.
152. *Hubbard J.* The friction and diffusion coefficients of the Fokker — Planck equation in a plasma. 2.— *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1961, **A261**, p. 371—387.
153. *Ichimaru S.* Theory of fluctuations in a plasma.— *Ann. Phys.*, 1962, **20**, p. 78—118.
154. *Ichimaru S.* Theory of strong turbulence in plasmas.— *Phys. Fluids*, 1970, **13**, p. 1560—1572.
155. *Ichimaru S., Pines D., Rostoker N.* Observation of critical fluctuations associated with plasma-wave instabilities.— *Phys. Rev. Lett.*, 1962, **8**, p. 231—233.
156. *Ichimaru S., Rosenbluth M. N.* Relaxation processes in plasmas with magnetic field.— *Phys. Fluids*, 1970, **13**, p. 2778—2789.
157. *Ichimaru S., Starr S.* Electromagnetic radiation from anisotropic turbulent plasma.— *Phys. Rev.*, 1970, **A2**, p. 821—825.
158. *Jackson E. A.* Nonlinear oscillations in a cold plasma.— *Phys. Fluids*, 1960, **3**, p. 831—833.
159. *Kubo R. J.* Statistical-mechanical theory of irreversible processes. General theory and simple applications to magnetic and conduction problem.— *J. Phys. Soc. Japan*, 1957, **12**, p. 570—586.
160. *Lenard A.* On Bogolubovs kinetic equation for a spatially homogeneous plasma.— *Ann. Phys.*, 1960, **10**, p. 390—400.
161. *Linhart J. G.* Plasma Physics. Brussels, EAEC, 1969. 332 p.
162. *Montgomery D. C., Tidman D. A.* Plasma kinetic theory. New York, McGraw-Hill, 1964. 294 p.
163. *Nishikawa K.* Instability of a weakly ionized plasma induced by an alternating electric field.— *Progr. Theor. Phys.*, 1967, **37**, p. 769—772.
164. *Nyquist H.* Thermal agitation of electric charge in conductors.— *Phys. Rev.*, 1928, **32**, p. 110—113.
165. *O'Neil T. M.* Effect of Coulomb collisions and microturbulence on the plasma wave echo.— *Phys. Fluids*, 1968, **11**, p. 2420—2425.
166. *O'Neil T. M., Gould R. W.* Temporal and spatial plasma wave echoes.— *Phys. Fluids*, 1968, **11**, p. 134—142.
167. *Oraevskii V. N., Wilhelmsson H., Kogan E. Ya., Pavlenko V. P.* On the stabilization of explosive instabilities by nonlinear frequency shifts.— *Phys. Scr.*, 1973, **7**, p. 217—221.
168. *Rosenbluth M. N., Rostoker N.* Scattering of electromagnetic waves by a nonequilibrium plasma.— *Phys. Fluids*, 1962, **5**, p. 776—788.
169. *Rostoker N.* Kinetic equation with a constant magnetic field.— *Phys. Fluids*, 1960, **3**, p. 922—927.
170. *Rostoker N.* Fluctuations of a plasma.— *Nucl. Fusion*, 1961, **1**, p. 101—120.
171. *Rostoker N., Rosenbluth M. N.* Test particles in a completely ionized plasma.— *Phys. Fluids*, 1960, **3**, p. 1—14.



172. *Sagdeev R. Z., Galeev A. A.* Nonlinear plasma theory. New York, Benjamin, 1969. 122 p.
173. *Salpeter E. E.* Electron density fluctuations in a plasma.— *Phys. Rev.*, 1960, **120**, p. 1528—1535.
174. *Salpeter E. E.* Plasma density fluctuations in a magnetic field.— *Phys. Rev.*, 1961, **122**, p. 1663—1674.
175. *Sandri G.* The foundations of nonequilibrium statistical mechanics. 1, 2.— *Ann. Phys.*, 1963, **24**, p. 332—379, 380—418.
176. *Sandri G.* A new method of expansion in mathematical physics.— *Nuovo cim.*, 1965, **36**, p. 67—93.
177. *Sheffield J.* Plasma scattering of electromagnetic radiation. New York, Acad. Press, 1975. 306 p.
178. *Sitenko A. G.* Electromagnetic fluctuations in plasma. New York, Acad. Press, 1967. 256 p.
179. *Sitenko A. G.* Fluctuations in plasma and nonlinear susceptibilities.— *Phys. Scr.*, 1973, **7**, p. 190—192.
180. *Sitenko A. G.* Nonlinear wave interaction and fluctuations in plasma.— *Phys. Scr.*, 1973, **7**, p. 193—197.
181. *Sitenko A. G., Nguyen-Van-Chong, Pavlenko V. N.* Contribution to the theory of echo phenomena in a plasma.— *Nucl. Fusion*, 1970, **10**, p. 259—267.
182. *Sitenko A. G., Oraevskii V. N.* Fluctuations in solid state plasmas.— *J. Phys. and Chem. Solids*, 1968, **29**, p. 1783—1796.
183. *Stenflo L.* Effects of collisions on resonant three-wave coupling.— *Plasma Phys.*, 1970, **12**, p. 509—518.
184. *Sturrock P. A.* Nonlinear effects in electron plasmas.— *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1957, **A242**, p. 277—299.
185. *Sturrock P. A.* Nonlinear theory of electrostatic waves in plasmas.— In: *Proceeding of the International School of Physics Enrico Fermi*. New York, 1964, p. 180—213.
186. *Thompson W. B.* An introduction to plasma physics. Oxford, Pergamon Press, 1962. 274 p.
187. *Thompson W. B., Hubbard J.* Long-range forces and the diffusion coefficients of a plasma.— *Rev. Mod. Phys.*, 1960, **32**, p. 714—718.
188. *Tidman D. A., Dupree T. H.* Enhanced bremsstrahlung from plasmas containing nonthermal electrons.— *Phys. Fluids*, 1965, **8**, p. 1860—1870.
189. *Vandenplas P. E.* Electron waves and resonances in bounded plasmas. New York, John Wiley, 1968. 222 p.
190. *Vedenov A. A., Gordeev A. V., Rudakov L. I.* Oscillations and instability of a weakly turbulent plasma.— *Plasma Phys.*, 1967, **9**, p. 719—735.
191. *Weinstock J.* New approach to the theory of fluctuations in a plasma.— *Phys. Rev.*, 1965, **139A**, p. 388—393.
192. *Weinstock J.* Formulation of a statistical theory of strong plasma turbulence.— *Phys. Fluids*, 1969, **12**, p. 1045—1058.
193. *Weinstock J.* Turbulent plasma in a magnetic field.— *Phys. Fluids*, 1970, **13**, p. 2308—2316.
194. *Weinstock J., Bezzerides B.* Nonlinear saturation of parametric instabilities. Spectrum of turbulence and enhanced collision frequency.— *Phys. Fluids*, 1973, **16**, p. 2287—2303.
195. *Wilhelmsson H.* Stationary nonlinear plasma oscillations.— *Phys. Fluids*, 1961, **4**, p. 335—340.
196. *Wilhelmsson H., Stenflo L., Engelmann F.* Explosive instabilities in the well-defined phase description.— *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, p. 1738—1742.
197. *Yakimenko I. P.* Fluctuations and correlations in bounded systems of charged particles. Preprint ITP-75-14E. K., 1975. 47 p.
198. *Yeh K. C., Liu C. H.* Theory of ionospheric waves. New York, Acad. Press, 1972. 464 p.