Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН

Парадокс близнецов

в теории относительности

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН

Парадокс близнецов в теории относительности

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1966

УДК 530.12 (088.3)

В книге подробно, в разных вариантах рассматривается известный парадокс теории относительности — «парадокс» двух близнецов, встречающихся после длительного полета одного из них в космосе со скоростью, близкой к скорости света.

Обсуждая с разных точек зрения этот парадокс, автор стремится ввести читателя в круг исходных идей специальной и отчасти общей теории относительности.

В связи с основной темой обзора рассматриваются преобразования Лоренца и вытекающие из них представления о пространственно-временных соотношениях, лежащие в основе теории относительности Эйнштейна.

Изложение предполагает знакомство читателя лишь с элементарными понятиями математического анализа и знание основ механики.

Книга может служить пособием для широких кругов читателей, интересующихся основами теории относительности.

2-3-2
476-66

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние годы как в популярной литературе, так и в специальных журналах появлялись (да и продолжают появляться) статьи и заметки, посвященные обсуждению вопроса, вызвавшего оживленную дискуссию более полувека тому назад в связи с внедрением в физику новых в то время идей созданной А. Эйнштейном теории относительности.

Внимание к этому вопросу было привлечено также и в связи с проблемами космонавтики и открывшейся уже возможностью осуществления в более или менее отдаленном будущем длительных космических путешествий.

Если, рассматривая различные аспекты вопросов, возникающих в этой связи, не считаться с определенными рамками разумных предположений и, экстраполируя далеко за пределы практически осуществимого, допустить возможность полета человека в космосе со скоростью, близкой к скорости света, то, основываясь на теории относительности, можно прийти к кажущимся парадоксам.

Космонавт, совершивший такое, достаточно длительное путешествие, по возвращении на Землю окажется моложе бывших своих сверстников, остававшихся неподвижными на Земле.

Подобные предсказания в принципе правильны. Выводы теории и соотношения, на которых они основаны, проверены непосредственно на опыте в области совершенно иных масштабов времени — в области явлений микромира.

Для того чтобы обрисовать необычность ситуации, которую влечет за собой предположение о движении человека со скоростью, близкой к скорости света, мы также прибегнем к такому, уже использованному в популярной литературе, «гротескному» приему и в гл. III подробно рассмотрим пример, предположив, что имеются условия квазиконкретной обстановки фантастического полета космонавтов, несущихся со субсветовой скоростью в межзвездном пространстве. Однако предварительно во введении мы подробно рассмотрим соображения, которые заставляют полностью исключить предположение о практической осуществимости, хотя бы и в отдаленном будущем, полетов человека со скоростью, приближающейся к скорости света. (Поскольку эти соображения не затрагивают вопросы, рассматриваемые затем в связи с основной темой обзора, они могут быть опущены читателем.)

О существе того кажущегося внутреннего противоречия, которое якобы кроется в указанных выводах теории относительности, т. е. собственно о парадоксе, будет сказано подробно во введении.

Обычно в научной литературе речь шла не о сравнении возрастов, а о сравнении показаний идентичных часов — покоящихся (A) и движущихся (B), и поэтому парадокс, о котором мы упомянули как о «парадоксе близнецов», в научной литературе чаще известен как «парадокс часов».

То, что в действительности теория относительности в применении к данной задаче не приводит к внутренне противоречивым результатам, было выяснено еще свыше полувека тому назад. Тем не менее за последние десять лет неожиданно снова вернулись к обсуждению этого старого вопроса даже на страницах специальных научных журналов.

Статьи на эту тему все еще продолжают появляться.

Автор может сослаться также на некоторые свои воспоминания о встречах в 1957—1958 гг. с зарубежными физиками и тех отзвуках на возникшую вновь дискуссию, о которых ему пришлось тогда слышать.

Так, летом 1957 г. мы встретились с группой физиков разных стран, направлявшихся на первую Пагуошскую конференцию ученых. Припоминаю, что еще в самолете на пути в местечко Пагуош, в Канаде, один известный физик, прибывший из Австралии, спросил меня, знаем ли мы о том, что вопрос о парадоксе часов и основах теории относительности вновь подвергается ревизии.

После этого, когда в 1958 г. в Лондоне я встретился с одним очень известным английским физиком и со своей стороны упомянул о парадоксе часов, мой собеседник, шутя, обронил характерную фразу: «Моих умственных способностей недостаточно для того, чтобы во всем этом разобраться».

С другой стороны, беседуя на ту же тему, примерно тогда же, с одним известным советским физиком-теоретиком, я услышал и такой отзыв: «Не понимаю, почему сейчас снова вернулись к этому старому вопросу. Все ведь в этом вопросе столь же ясно, как, например, то, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками».

Надо сказать, что ссылка на соотношение между длиной, измеряемой по прямой, проходящей через две точки обычного пространства, с одной стороны, и длиной какой-то криволинейной траектории, соединяющей данные точки пространства, с другой стороны, приводит к довольно близкой аналогии с вопросом о соотношении возрастов двух «близнецов» — неподвижного и путешествующего.

В 1909 г. Минковский ввел представление о четырехмерном пространстве — времени и, пользуясь этим представлением, изложил частную (или специальную) теорию относительности на новом, квазигеометрическом языке. Обращение к абстрактному представлению о четырехмерном континууме пространства — времени позволяет в очень «компактном» виде сформулировать основные положения и основное содержание частной теории относительности. В своем развитии именно этот формальный аппарат, оперирующий геометрическими образами, позволил Эйнштейну создать и так называемую общую теорию относительности, и теорию тяготения.

Вопрос о сравнении показаний покоящихся часов с показаниями путешествовавших (после завершения этими последними замкнутого цикла их движений) в рамках только что упомянутых представлений также в известном смысле сводится к вопросу о соотношении между длиной отрезка «прямой»[1] линии, проведенной через две точки «пространства — времени», и длиной криволинейной траектории, соединяющей эти точки. Однако в так называемом «псевдоевклидовом пространстве — времени»

---

[1] Речь здесь идет о так называемой геодезической линии.

теории относительности величина, соответствующая длине отрезка прямой, о котором идет речь, оказывается не меньшей, а большей длины любой другой траектории, соединяющей данные две точки. При этом «длина отрезка прямой» в этой квазигеометрической картине может быть сопоставлена с интервалом между двумя моментами времени, определенном по покоящимся часам A, тогда как длина криволинейной траектории оказывается мерой времени, определенного по часам, претерпевавшим ускорения и двигавшимся относительно часов A.

В терминах четырехмерного континуума пространства — времени существо вопроса может быть сформулировано в очень сжатом виде. Однако такой метод изложения требует от читателя более углубленной математической подготовки.

В различных вариантах выводов, излагаемых в четырех главах данной монографии, мы воздержимся от каких-либо ссылок на геометрические образы и соответствующие построения теории относительности, имея в виду читателя, владеющего лишь элементарным математическим аппаратом и знанием лишь основ физики. Дело здесь не только в том, чтобы по возможности избавить читателя от необходимости освоиться со вспомогательным математическим аппаратом, но также и в том, что при абстрактном изложении может оказаться невыявленным физическое содержание тех идей, которые излагаются на языке формул или обобщенных геометрических символов.

Выводы, заключенные в приведенных выше абстрактных формулировках, требуют перестройки привычных для нас представлений о пространстве и времени.

Вопросу об относительности представлений о пространстве и времени за послекние годы было уделено большое внимание. Но, видимо, приемы упрощенного изложения в рамках небольших журнальных статей и даже газетных заметок не дают возможности сколько-нибудь обстоятельно осветить существо этого вопроса, представляющего известные трудности для понимания.

Например, автор одной монографии [1], вышедшей в 1961 г. на французском языке, отмечает, что в этой (и предыдущих) его монографиях можно насчитать до 200 ссылок на литературу по вопросу о парадоксе часов и что статьи на эту тему все еще продолжают появляться. Он тут же добавляет следующий совет будущим авторам такого рода статей: «Семь раз обмакнуть перо в чернильницу, прежде чем начать снова писать на эту тему».

Предлагаемая читателю книга посвящена тем не менее этому старому вопросу о парадоксе часов. В ней, разумеется, не содержится и не может быть ничего нового. Оставаясь всегда в пределах только элементарных соображений и вычислений и рассматривая в разных вариантах один и тот же вопрос о «парадоксе близнецов», автор стремился ввести читателя в круг тех идей, которые лежат в основе теории относительности.

Хотя эта небольшая монография и написана физиком-экспериментатором, в ней полностью опущено описание различных экспериментов и их результатов, на которые и опирается все построение основных концепций теории относительности. Здесь имеются в виду прежде всего классический, относящийся еще к прошлому веку, опыт Майкельсона — Морли и разнообразные другие эксперименты, проведенные и в новейшее время с использованием методов и средств современной техники. Автор стремился к тому, чтобы дать возможность читателю, не обладающему специальной подготовкой, проследить более четко логическую нить рассуждений, приводящих к указанным выше парадоксам и основным положениям теории относительности.

Оправдано ли то, что в книге вывод одного и того же результата повторяется в разных вариантах? Об этом судить читателю.

Соображения, изложенные в первой главе, основанные на нескольких посылках весьма общего характера, приводят (следуя Г. Бонди) к выводу о «замедлении течения времени» в движущихся системах, а затем и к преобразованиям Лоренца.

Во второй главе в нескольких вариантах рассматривается «парадокс часов», или «парадокс близнецов», как следствие, вытекающее из этих преобразований Лоренца и некоторых упрощающих допущений.

В третьей главе подробно рассмотрена задача о фантастическом полете двух «космонавтов» со скоростью, близкой к скорости света. Автор сознательно не считается с критериями реально осуществимого и полностью пренебрегает вытекающими отсюда существенными ограничениями.

Используя квазиконкретные образы, автор стремится путем такой экстраполяции за пределы практически возможного оттенить парадоксы, вытекающие из относительности представлений об одновременности событий. При этом, прибегая к такой экстраполяции и допуская также определенную вульгаризацию изложения, автор, апеллируя к привычным представлениям, ссылается на обычные в земных условиях приемы измерения расстояний и промежутков времени.

Четвертая глава имеет более формальный характер.

В первой и второй главах при решении рассмотренных там задач в целях упрощения предполагается, что в определенные моменты времени происходят мгновенные изменения скорости движения «часов» на конечную величину.

Несложные соображения и преобразования, выполненные в четвертой главе, позволяют убедиться в том, что выводы, полученные в первой и второй главах, остаются в силе и в том случае, если не исходить из условий предельного случая, предполагающих действие в определенные моменты времени бесконечно больших ускорений и соответствующих мгновенных бесконечно больших сил.

Далее эти выкладки и преобразования четвертой главы приводят к формулировке исходных посылок общей теории относительности и теории тяготения Эйнштейна. Изложение основ этой теории выходит, однако, за пределы рамок данной книги. Вместе с тем в четвертой главе (и в особенности в Дополнении) затрагиваются некоторые вопросы, представляющие лишь специальный интерес.

Автор выражает большую благодарность М. А. Маркову, взявшему на себя труд прочесть рукопись этой книги и сделавшему ряд ценных замечаний, а также товарищам, прочитавшим первоначальный вариант, написанный в 1959 г. и послуживший основой книги, предлагаемой сейчас вниманию читателей.

1959 — 1965 гг.

ВВЕДЕНИЕ

I. В наше время — на пороге новой эры межпланетных космических путешествий многие комплексные проблемы разных областей знания, затрагиваемых космонавтикой будущего, привлекают к себе внимание. В частности, сейчас в этой связи вызывают широкий интерес и выдвинутые физикой уже полвека тому назад (или даже раньше) проблемы, связанные с необходимостью расширения рамок обычных наших представлений о пространстве и времени.

В последние годы в научно-популярных книгах, журналах и даже в газетных статьях неоднократно возвращались к обсуждению известного следствия теории относительности Эйнштейна, согласно которому любые процессы (включая и биологические, определяющие течение жизни простых или сложных организмов) в системах, движущихся со скоростью, близкой к скорости света, замедляются.

Оставляя для последующего все оговорки, которые при этом необходимы (и допуская, пожалуй, даже заведомо неточную формулировку), можно, если угодно, сказать, что в таких системах (если их наблюдать с Земли) «время течет медленнее». Следовательно, и человек в полете (если бы им была достигнута скорость, сравнимая со скоростью света) старился бы медленнее, мог бы продлить свою молодость в сравнении со своими сверстниками, оставшимися во время его длительного космического полета неподвижными на Земле.

В зависимости от скорости, дальности и продолжительности такого космического путешествия разность в возрасте космонавта и его бывших сверстников после завершения полета могла бы быть очень значительной. Логически следует, например, допустить и такую возможность: по возвращении из путешествия в глубины космоса отец становится моложе своего сына.

То, что нами выше изложено и что в принципе действительно вытекает из теории относительности как ее логическое следствие, могло бы иметь место в действительности, если бы предположенные выше условия не выходили за рамки практически осуществимого.

Прежде всего мы и остановимся на вопросе о том, какие факторы существенно лимитируют возможность реализации этих условий.

Однако самая возможность эффектов, о которых шла речь хотя бы и вне пределов практически достижимого, естественно, кажется парадоксальной и трудно приемлемой. Освоиться со всеми указанными следствиями, не вникая глубоко в сущность теории, психологически, конечно, трудно.

Естественно, что в те времена, когда теория относительности еще только «внедрялась» в науке и когда та база разнообразных экспериментальных подтверждений, на которую теория опирается в наше время, была еще существенно более ограниченной, оппонентами Эйнштейна и были выдвинуты определенные соображения, направленные на выявление внутреннего противоречия, которое якобы содержится в указанных нами выводах, и на дискредитацию в результате этого и самой теории.

На страницах специальных научных журналов обсуждался в то время выдвинутый в ходе этой дискуссии вопрос о так называемом «парадоксе часов» (о котором мы предпочли упомянуть как о «парадоксе близнецов»). Постановка этого вопроса сводится к следующему.

Если из двух партнеров A и B (возраст которых сравнивается до и после космического путешествия) один, скажем A, остается неподвижным (например, на Земле), а другой движется относительно A со скоростью, близкой к скорости света, то якобы с равным правом, следуя тому же принципу относительности, можно представить себе, что *в равных условиях* B остается неподвижным, а удаляется от него (вместе с Землей) партнер A, который затем снова возвращается к B, совершая свой полет туда и обратно со скоростью, близкой к скорости света. Будем называть такую скорость «релятивистской».

Если рассуждать согласно первой версии (A неподвижен), то моложе в сравнении с A становится B, согласно же второй версии (B неподвижен), наоборот, более молодым при встрече A и B после окончания путешествия окажется A. Мы предположили, что до начала полета A и B были ровесниками. Поскольку конечный результат по сути дела не может зависеть от способа рассмотрения (т. е. согласно первой или второй версии), то налицо якобы внутреннее противоречие.

Казалось бы уже в те времена, т. е. пятьдесят или даже больше лет тому назад, в этот вопрос была внесена полная ясность. Однако после того как английский физик Дж. Томсон в своей книге [2] снова мимоходом напомнил об этом, давно известном следствии теории относительности и проиллюстрировал его определенным конкретным примером, полемика, казалось бы и завершенная уже полвека тому назад, снова возобновилась.

Профессор Г. Дингль [3] (Англия) выступил с рядом статей и докладов, пытаясь доказать, что вывод о релятивистском «изменении масштабов времени» в движущихся системах якобы ошибочен. Пятьдесят лет тому назад оппоненты А. Эйнштейна утверждали, что этот вывод, приводящий к указанному самим Эйнштейном «парадоксу», якобы опровергает его теорию. Дингль выступил как адепт теории относительности, утверждая, однако, что сделанные самим Эйнштейном [4] выводы, к которым приводит относительность масштабов времени, ошибочны.

Соображения Дингля и его высказывания не заслуживали бы, вероятно, внимания, если бы его выступления не вызвали определенный и достаточно широкий резонанс даже и в среде физиков [1]. Объяснение этому следует искать в определенных психологических моментах, связанных с трудно преодолимым конфликтом между последовательной релятивистской картиной пространственно-временных соотношений и укоренившимся в нашем сознании представлении об *абсолютном* времени и пространстве (мыслимых вне зависимости одно от другого).

Дж. Томсон в упомянутой выше книге приводит конкретный пример: человек, совершивший полет в космическом корабле, достигает звезды «ближайшая Центавра» (proxima Centauri) [2] и затем возвращается на Землю. По окончании им этого космического путешествия оказывается, что он состарился на $14\,^1/_2$ лет, тогда как календарь (в соответствии с показаниями часов, находившихся на Земле) покажет, что он отсутствовал 17 лет.

Указанный автор достаточно осторожен в своих предположениях, допуская, что скорость полета космонавта в рассматриваемом им примере не превышала половины скорости света. Эффект, о котором идет речь, становится гораздо более разительным в случае существенно большего приближения скорости движения к скорости света.

Многие авторы популярных статей и книг, а также лекторы исходят часто из менее осторожных предположений, допуская, что скорость полета намного ближе к скорости света и что она порядка 0,9 или 0,99 скорости света или же отличается от этой предельной скорости на величину еще и существенно меньшего порядка.

Из дальнейшего будет ясно, что такого рода допущения можно делать, лишь полностью отвлекаясь от условий, осуществимых в действительности, хотя бы и в очень отдаленном будущем. Следует напомнить, что выводы о замедлении процессов, протекающих в системах, движущихся со скоростью, близкой к скорости света,

---

[1] В связи с полемикой, вызванной высказываниями Дингля, сошлемся на заметки [3] и [5]. Ссылки на выступления в этой связи других авторов можно найти в книге [1]. Литература по вопросу о пародоксе часов указана в [8].

[2] Как видно из названия, речь идет о ближайшей к Земле звезде.

были проверены и многократно подтверждены в совершенно иной области явлений, для которой характерны временны́е масштабы ничтожной величины,— в области явлений «микромира».

Физике известны сейчас разнообразные неустойчивые частицы — мезоны, гипероны и тому подобные частицы, которые существуют после их рождения (образования в тех или иных ядерных процессах высокой энергии) лишь ничтожное время — от миллионных долей секунды до 10^{-10} сек. или даже на много порядков меньше. Эти частицы характеризуются определенным средним временем жизни указанных порядков величины, по истечении которого (в среднем) они «выбывают из строя» — исчезают, распадаясь на те или другие (иногда также радиоактивные — неустойчивые) частицы. В частности, атмосферу Земли пронизывает поток короткоживущих частиц — μ-мезонов, входящих в состав космических лучей.

Разнообразные неустойчивые частицы и их распад наблюдаются и в составе излучений, создаваемых с использованием ускорителей заряженных частиц высокой энергии. Скорость (или энергия) таких частиц в «полете» может быть очень велика, и «жизнь» их в этом случае в соответствии с теорией относительности длится в представлении наблюдателя намного дольше того, что имеет место, если распадается та же частица, но уже при малой скорости движения. В частности, μ-мезоны космического излучения, образовавшиеся в верхних слоях атмосферы и достигающие поверхности Земли, обладают в среднем высокой энергией и поэтому в среднем живут достаточно долго для того, чтобы со значительной вероятностью *сохраниться* на протяжении всего своего пути в атмосфере порядка хотя бы многих десятков километров. Время этого полета порядка всего одной десятитысячной секунды, но оно все же велико в сравнении с временем жизни покоящейся частицы.

Измерения показали, что это время их жизни в полете, вычисленное согласно с теорией относительности и с учетом, следовательно, влияния скорости их движения, находится в соответствии с тем, что дает эксперимент в том случае, если распад этих же частиц наблюдается уже после потери ими скорости. Такие остановившиеся частицы можно наблюдать в лабораторных условиях, когда время их жизни оказывается в десятки или сотни раз меньшим, чем при распаде «на лету» тех же, не растративших еще свою энергию частиц.

Результаты такого рода измерений и сопоставлений, выполненных еще в конце 30-х годов нашего столетия, оказались в полном согласии с требованиями теории относительности, что позволило также и идентифицировать эти частицы в составе космического излучения.

Времена жизни порядка миллионных долей секунды, скорости, приближающиеся к скорости света и приводящие к замедлению процесса самопроизвольного распада (и соответственно к увеличению длительности «жизни») в десятки тысяч раз, — эти условия характерны для своеобразных «странных» и тому подобных частиц ничтожной массы, наблюдаемых в области явлений «микромира». Эта область явлений открылась исследователям сначала в наблюдениях космической радиации, а затем и в наблюдениях, проводимых с применением новейших средств «тяжелой атомной артиллерии» — сложнейших ускорителей заряженных частиц — синхрофазотронов и т. п.

II. Возможность перенесения всех тех соотношений, которые характерны для частиц и явлений «микромира», на такие объекты, как космические корабли и совершающие в них полеты космонавты, практически не только ограничена, но и исключена. Вместе с тем авторы научно-популярных или квазинаучно-популярных трудов и сочинений склонны обострять парадоксальность ситуаций, которые можно обрисовать, основываясь на правильных выводах из теории относительности, если их применить к воображаемой, нереализуемой, по существу фиктивной обстановке полетов в космосе со скоростью, близкой к скорости света. В некоторых случаях эти авторы, не склонные ограничивать определенными рамками допущение воображаемых ими ситуаций, идут очень далеко в построении целой цепи основанных на них фантастических гипотез [1].

Не ставя себе целью широкую популяризацию идей теории относительности и отнюдь не предполагая в этой книге дать место научной фантастике, мы, однако, в дальнейшем *условно* воспользуемся картиной космических путешествий и полетов с фантастической скоростью на протяжении сотен миллиардов километров в космосе и т. п. Такой прием изложения, возможно, целесообразен для того, чтобы на конкретных примерах выявить сущность концепций, которые заложены в том, что излагается на языке формул.

Однако прежде чем воспользоваться таким приемом изложения и перейти к рассмотрению тех вопросов, которым будет посвящено основное содержание данной книги, остановимся подробнее на тех соображениях, которые заставляют *исключить* версию о возможности полетов человека со скоростью, близкой к скорости света.

Каковы же те факторы, которые нацело исключают возможность приближения к релятивистским, или, лучше сказать, сверхрелятивистским, скоростям таких объектов, как космические корабли, летящие в просторах космоса?

В этой связи приведем два, вероятно, основных аргумента.

---

[1] См., например, Д. Д а н и н. Неизбежность странного мира. 1962, стр. 105—108.

1. О непреодолимости трудностей, которые возникают, если рассматривать задачу об ускорении массивных тел до скоростей, близких к скорости света, можно прежде всего судить, оценив порядок величины той энергии, которую для этого требуется затратить.

Еще в 1911 г. в яркой статье, появившейся в издававшемся тогда журнале «Scientia» [6], известный французский физик Поль Ланжевен, обсуждая вопрос о «парадоксе часов», обратил внимание на эту сторону задачи, подробно рассмотренную в новейшей литературе с учетом возможностей современной техники. Сошлемся, например, на выводы авторов статей, вошедших в сборник «Межзвездная связь» [7], изданный недавно в переводе на русский язык. Вопрос о предельных скоростях, которые могут быть сообщены идеальным ракетным двигателем, обсуждается, например, в статье Э. Парсела «Радиоастрономия и связь через космическое пространство».

Надо сказать, что, основываясь на теории относительности, можно, не вдаваясь в подробности того, как действует двигатель, сообщающий кораблю требуемое ускорение, установить, какую максимальную кинетическую энергию (или скорость) «идеальный» двигатель мог бы сообщить этому кораблю заданной массы за счет затраты определенного количества топлива.

Простые расчеты Парсела приводят, например, к следующим выводам.

Если исходить из того, что в условиях работы ракетного двигателя скорость v_e истечения продуктов сгорания топлива, запасенного в двигателе, остается за все время ускорения постоянной, то максимальная скорость v_m, сообщенная кораблю, связана с массой затраченного топлива соотношением

$$\frac{M_0+m_0}{m_0}=\left(\frac{c+v_m}{c-v_m}\right)^{\frac{c}{2v_e}}. \qquad (1)$$

Здесь M_0 — масса покоя топлива, m_0 — конечная масса (масса покоя корабля с грузом, но без топлива), а c — скорость света в пустоте, равная 300 000 *км/сек*. При этом речь идет о скорости v_e истечения (продуктов сгорания) относительно ускоряемого корабля, т. е. о скорости, определенной в системе координат, движущейся ускоренно вместе с кораблем,— следовательно, в такой системе координат, в которой корабль все время покоится.

Из рассмотрения формулы (1) видно, что если отношение $c/2v_e$ существенно больше единицы, то при приближении v_m к скорости света отношение $\frac{M_0+m_0}{m_0}$ резко возрастает.

Формула (1), приведенная Парселом без вывода, получается, как он говорит, очень просто — из сохранения количества движения и энергии. Если, как автор все же почему-то оговаривает, им не допущена какая-либо ошибка в самом выводе формулы, то соотношение (1) и вытекающее из него ограничение скорости полета, достижимой в идеальном случае, должны иметь место независимо от того, как устроен ракетный двигатель.

Например, если предположить, что используется «топливо идеального ядерного синтеза» с выделением энергии за счет образования гелия из водорода (реакция $4H \rightarrow He^4$)[1], то числовой расчет согласно формуле (1) приводит к следующему результату.

Если можно, как предполагает автор, положить, что максимальная скорость v_e порядка $^1/_8\ c$, то для того чтобы достичь скорость v_m, равную 0,99 c, потребуется начальная масса, *большая миллиарда* ($1{,}6 \cdot 10^9$) *конечных масс*, т. е. больше миллиарда тонн топлива на тонну веса корабля с полезным грузом. Действительно, при $c/2v_e = 4$ и $c - v_m = 0{,}01c$ из формулы (1) следует

$$\frac{M_0 + m_0}{m_0} = (200)^4 = 1{,}6 \cdot 10^9. \tag{2}$$

Соотношения, которые будут получены в гл. IV, позволяют дать простой вывод формулы (1), который мы и приводим в прилож. 8.

Следует заметить, что принятая в приведенном выше расчете оценка скорости истечения продуктов «сгорания» топлива ракеты $v_e = 1/8\ c$ представляется уже чрезмерно оптимистичной, так как предполагает, что вся энергия, освобождаемая при синтезе гелия из водорода, превращается, как указывает автор, «неким способом» (пока неуточняемым) в кинетическую энергию потока масс газа, выбрасываемого из сопла реактивного двигателя.

Расчеты, о которых мы упомянули, проводятся исходя из фундаментального соотношения Эйнштейна, связывающего энергию E и массу M:

$$E = Mc^2, \tag{3}$$

где E — полная энергия данного тела или системы тел, включая кинетическую энергию этих тел, так же как и энергию всех других компонент данной системы, а M — полная масса системы (см. прилож. 9).

При синтезе ядер некоторых легких элементов и образовании более сложных ядер из простейших, а также при распаде (или делении) атомных ядер наиболее тяжелых элементов масса покоя системы, образовавшейся в результате ядерной реакции, оказывается меньше суммы масс покоя частиц до их превращения. В соответствии с уравнением (3) при этом освобождается ядерная энергия. Процентное отношение освобожденной энергии к энергии, соответствующей массе покоя частиц, образующих «ядер-

[1] Для синтеза ядра атома гелия необходимы, разумеется, два нейтрона и два протона, а не четыре атома водорода. Но вопрос о том, как можно осуществить этот синтез при такого рода расчетах, вообще не затрагивается.

ное топливо», которое используется при такого рода реакциях синтеза или распада, однако, очень невелико.

В случае наиболее выгодной реакции синтеза ядра гелия (о чем мы выше упомянули) эта освобождаемая энергия меньше процента от полной энергии, соответствующей массе всего используемого топлива.

Рассматривая проблему осуществления релятивистской ракеты, необходимой для межзвездных сообщений, специалисты приходят к выводу, что единственно мыслимый путь к этой цели открылся бы лишь в том случае, если бы оказалось возможным использовать не какую-то очень малую часть энергии (массы) топлива (как это имеет место в ядерных реакторах), а полную массу всего запасенного топлива. Речь, следовательно, идет о том, чтобы осуществить «аннигиляцию» вещества этого топлива. В таком случае продуктами «сгорания топлива» должны были бы быть атомы света — фотоны, масса покоя которых равна нулю и которые движутся со скоростью света c (если не говорить еще о таких частицах, как нейтрино).

При таком воображаемом источнике энергии и таком процессе ее трансформации уравнения сохранения количества движения и энергии можно написать, исходя из следующих данных. Обозначим, как и прежде, массу топлива, запасенного в ракете, буквой M_0. Эта масса по предположению нацело конвертируется в массу потока фотонов, испускаемых фотонной ракетой, и массу самой ускоренной ракеты. Но импульс — количество движения, света (электромагнитной радиации вообще) равен массе, умноженной на скорость света, или энергии, деленной на скорость света (поскольку энергия равна массе, умноженной на квадрат скорости света).

Пусть после выгорания всего топлива, запасенного в ракете (масса которого M_0), полная масса испущенного ею потока фотонов равна μ. Если скорость, сообщенную ракете, обозначить βc, а полную массу ее m (включая и массу кинетической энергии) согласно релятивистской формуле положить равной $m_0\gamma$ (где m_0 масса покоя ракеты с полезным грузом, но без топлива и где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$), то сохранение количества движения (после окончания стадии ускорения) выражается следующим уравнением:

$$\mu = m_0\beta\gamma = m_0\sqrt{\gamma^2 - 1}. \tag{4}$$

(Вывод формулы $m = m_0\gamma$ дан в прилож. 6.) Уравнение сохранения энергии (или, что то же, сохранения масс) дает [1]

$$\mu + m_0\gamma = M_0 + m_0. \tag{5}$$

[1] В правой и левой частях уравнения (4) мы опустили множитель c, который следует написать, если величины, входящие в это уравнение, выражены в абсолютных единицах. Также опущен соответствующий множитель c^2 в уравнении (5), если его рассматривать как уравнение сохранения энергии.

Из уравнений (4) и (5) получаем выражения для γ и M_0/m_0

$$\gamma = \frac{\frac{M_0}{m_0}+1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{M_0}{m_0}+1\right)}, \tag{6}$$

$$\frac{M_0}{m_0} = \sqrt{\gamma^2 - 1} + \gamma - 1. \tag{7}$$

При $\frac{M_0}{m_0} \gg 1$

$$\gamma \simeq \frac{M_0}{2m_0}. \tag{8}$$

Величине $\beta \simeq 0{,}99$ соответствует $\gamma \simeq 7$.

Отношение M_0/m_0 (массы топлива к массе ракеты) оказывается при этих заданных условиях порядка всего 14 *т* на 1 *т* груза, тогда как полученное выше при тех же условиях отношение M_0/m_0 оказалось порядка миллиарда. Вычисление по формуле (1) при $v_m \approx 0{,}99c$ приводит к тому же результату.

Однако сейчас нельзя еще указать пути использования в рабочем режиме релятивистской ракеты даже хотя бы той идеальной реакции синтеза гелия из водорода, которую рассматривает Парсел. Что же касается создания «фотонной ракеты» с использованием полной аннигиляции вещества топлива, то возможность реализации этой идеи представляется еще и намного более отдаленной.

В гл. III «условно» рассматривается фантастический полет в космосе при [1] $\gamma_m = 10^7$. Формула (8) дает при этих условиях M_0/m_0 порядка 20 млн.!

Не стесняясь рамками разумных, с практической точки зрения, ограничений, в гл. III мы предполагаем при этом, что ускорение, сообщаемое ракетным двигателем (в течение одного года по земным часам), равно 10^{10} *см/сек*^{2}!

Если исходить из предположений, отвечающих в какой-то мере реальным условиям, и допустить, что ускорение работающего двигателя остается порядка g_0 (ускорения силы тяжести у поверхности Земли), то, для того чтобы достичь скорость порядка $0{,}99c$ и $\gamma_m \simeq 7$, ускорение должно было бы продолжаться семь лет по земным часам, или свыше года по часам космонавта.

Расчет, приводящий к такому результату, приведен в прилож. 8.

2. Стоит упомянуть и о другом факторе, на который должно быть обращено внимание, если допускать спекуляции о космических кораблях, летящих со скоростью, практически близкой к скорости света.

---

[1] γ_m — значение γ после завершения стадии ускорения.

Космическое пространство (в пределах окружающей нас Галактики или даже вне этих пределов) оказывается недостаточно «пустым». Вакуум в космосе на много порядков превышает то, что можно осуществить в лабораторных условиях, применяя наиболее мощные средства современной вакуумной техники. Он оказывается тем не менее недостаточно совершенным для того, чтобы были исключены нежелательные (или, вернее, опасные) эффекты, вызванные столкновениями космического снаряда субсветовой скорости с частицами космической материи [1].

Если представить себе поверхность космического корабля, летящего со скоростью, равной, например, средней скорости частиц космических лучей и отвечающей примерно значению $\gamma = 10$, то частицы материи, которыми заполнено космическое пространство (а это в основном, как и частицы космического излучения,— протоны [2]), будут сталкиваться с поверхностью корабля со скоростью, относительно нее весьма близкой к скорости света.

Таким образом, космический корабль будет пронизывать поток частиц с энергией, близкой к средней энергии космической радиации, но с интенсивностью, как оказывается, на много порядков превышающей интенсивность космических лучей.

Можно, рассматривая полет в указанных выше условиях, представлять себе, что корабль неподвижен, а что со скоростью, близкой к скорости света (например, при $\gamma = 10$), навстречу ему несется среда, заполняющая космическое пространство.

Из разного рода астрономических данных известно, что в космическом пространстве на каждый кубический сантиметр объема приходится в среднем от 0,1 до 1 протона (в пределах нашей Галактики или вблизи нее).

Если рассчитать в нерелятивистском приближении силу тока I частиц, пронизывающих корабль, то эта сила тока (или интенсивность потока) получится просто умножением указанной величины плотности ($\rho = 0{,}1 \div 1$ в числе частиц) на скорость.

В силу особенностей релятивистских соотношений войдет еще фактор γ, что можно связать с лоренцевым сокращением масштабов в движущихся системах, о чем будет сказано далее. Следовательно, $I = \rho c \gamma$, так как скорость полета принята нами практически равной скорости света, что дает $I = 3 \cdot 10^{10}$ или $3 \cdot 10^{11} \frac{\text{частиц}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$ при $\rho = 0{,}1$ или 1 и при $\gamma = 10$. Это значит, что наш корабль в полете будет подвержен действию на него потока протонов, как по энергии [3] (а следовательно, и проникающей способности),

---

[1] Г. Т. Зацепин обратил внимание автора на результаты приведенного ниже в тексте простого расчета.

[2] Если не учитывать еще и электроны, масса покоя которых очень мала.

[3] $\gamma = 10$ соответствует энергии протонов порядка 10 *Бэв*, или 10 *Гэв* (10 млрд. *эв*).

так и по *интенсивности* близкого, или, вернее, даже большего (если иметь в виду усредненные значения) того, что несет излучение самых мощных, уникальных ускорителей заряженных частиц — синхрофазотронов и т. п.

Известно, что для исключения вредного или даже смертельного действия такого чрезвычайно проникающего излучения необходимы громоздкие защитные сооружения, например стены из бетона или других материалов толщиной в несколько метров.

III. Рассмотрению и анализу тех выводов из теории относительности, которые приводят к кажущимся парадоксам и противоречиям (о чем мы уже упомянули), нам придется предпослать еще ряд и других предварительных замечаний весьма общего характера.

Специальная, или, как сейчас иногда говорят, «частная», теория относительности порывает с представлением об абсолютном пространстве и времени как о категориях, мыслимых вне их взаимозависимости. Общая теория относительности идет еще дальше в том же направлении — пересмотра привычных наших представлений о пространстве и времени.

В дальнейшем мы ограничиваем свою задачу тем, чтобы на ряде примеров, рассматривая по возможности скрупулезно в различных вариантах вопрос о существе «парадокса часов», показать, как именно лимитируются укоренившиеся в нашем сознании представления о пространстве и времени, если налицо условия, требующие применения теории относительности, т. е. если нам приходится иметь дело с релятивистскими скоростями — со скоростями, приближающимися к скорости света.

Как именно складываются в сознании человека те фундаментальные представления о пространстве и времени, на основе которых и построена физическая картина мира, обобщающая все многообразие явлений, охватываемых концепциями «классической физики»?

Вопрос этот, надо полагать, сложен.

Представления о трехмерном пространстве вырабатываются, вероятно, у ребенка на какой-то очень ранней стадии его умственного развития. Они, видимо, складываются, с одной стороны, прежде всего на основе его *собственного* опыта и, может быть, в какой-то мере на основе того, что заложено уже в его мозгу и унаследовано также от отдаленных поколений его предков, как продукт *приобретенного ими опыта*. Например, стены, пол и потолок комнаты — та рамка, в которой заключен мир явлений, воспринимаемых ребенком на самых ранних стадиях его развития,— оказываются прообразом трех измерений «мирового пространства», которое вместе с (рассматриваемым в отрыве от него) временны́м континуумом оказывается адекватной формой представлений о Вселенной и окружающей человека природе в той мере, в какой эти представления опираются на классическую — ньютонову (и, в частности, небесную) механику и классическую электродинамику.

Пожалуй, следует признать удивительным тот факт, что в рамки представлений, вырабатывавшихся в мозгу человека или даже скорее предков человека в незапамятные времена на основе примитивного опыта, укладывается картина мира, которая создана современной классической наукой и которая охватывает всю совокупность знаний человека о природе и космосе вплоть до границ, установленных лишь в XX в. теорией относительности [1].

Если, как мы уже сказали, создающиеся на какой-то стадии развития ребенка представления о трехмерном пространстве ассоциируются с определенными материальными ориентирами в его непосредственном окружении (например, многогранником, образуемым стенами, потолком и полом комнаты), то в основе картины, созданной наукой о Вселенной, лежит также некий базис — «система отсчета», связанная с определенными космическими телами — так называемыми неподвижными звездами.

Система отсчета, опирающаяся на такого рода ориентиры, является инерциальной системой: движение тел, описываемое в «координатах» инерциальной системы, подчиняется первому закону Ньютона — закону инерции.

Любая другая «система отсчета», которая может быть связана с той или иной совокупностью тел — пространственных ориентиров, движущихся прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд,— является также инерциальной.

Сущность частной (или специальной) теории относительности заключена в утверждении, что все такие возможные инерциальные системы [2] равноправны: законы всех явлений, протекающих (описываемых) в этих системах, в частности законы механики и электродинамики, тождественны. На более специальном языке говорят еще так: уравнения, описывающие физические процессы, «ковариантны» при преобразовании координат от одной инерциальной системы к другой.

Если иметь в виду только лишь законы механики, то сформулированный таким образом принцип относительности (галилеев принцип относительности) заключен уже в уравнениях классической механики. Теория Эйнштейна обобщает требование о «равноправии» (в указанном выше смысле) всех инерциальных систем, утверждая справедливость принципа относительности в применении к любым физическим явлениям и прежде всего к явлениям электромагнитным.

Поскольку химические и биологические процессы, как бы сложны они ни были, складываются из элементарных явлений (атомар-

---

[1] Мы здесь не говорим о других «границах», определяемых необходимостью исходить из концепций теории квант при рассмотрении явлений «микромира».

[2] А их бесконечное множество, так как скорость любой из них относительно исходной системы, связанной с неподвижными относительно нас звездами, может быть произвольной, но постоянной во времени.

ных или, может быть, в какой-то мере ядерных), законы их также подчинены принципу относительности. Такое распространение принципа относительности на любые явления, известные в настоящее время физике, оправдано, конечно, лишь постольку, поскольку оно подтверждается огромным многообразием фактов и законов, проверенных опытом.

Можно, пожалуй, отметить, что так блестяще подтвердившееся применение теории относительности к явлениям распада мезона (о чем упомянуто выше), а также других неустойчивых новых частиц материи, вторгшихся в физику лишь на протяжении последних 30 лет, *с чисто экспериментальной* точки зрения означает очень значительное расширение тех границ, в пределах которых теорию относительности можно рассматривать как непосредственно подтвержденную опытом.

В самом деле, в этом последнем случае речь идет о распространении исходных положений теории на совершенно новую область явлений и качественно новых представлений, введенных в физику на основе открытий новейшего времени и существенно отличных от всего того, что составляло содержание этой науки в прошлом.

Применение к распаду μ-мезона релятивистской формулы замедления процессов в движущихся системах следует в этом смысле признать существенно более решительным шагом в утверждении общности выводов теории относительности, чем то, на чем основано (и что влечет за собой) распространение этих выводов на область явлений биологии. (Поскольку в пределах того круга элементарных физических явлений, из которых слагаются биологические процессы, теория уже давно надежным образом подтверждена экспериментом.)

Когда мы до сих пор говорили об инерциальных «системах отсчета», в частности о системе отсчета, связанной с неподвижными звездами, как об определенном базисе, лежащем в основе описания всех явлений природы и космоса, мы имели в виду пространственный базис и «систему отсчета» как систему пространственных координат. Но динамика явлений включает представление о времени и о мере времени.

В классической ньютоновой механике (и классической физике) время мыслится как абсолютная категория в отрыве от также абсолютного трехмерного пространства. Время в классической механике при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой остается неизменным.

«Физическое» время (определяемое «отсчетом» по «шкалам» соответствующих приборов — различного рода «часов») следует рассматривать как четвертую координату наряду с тремя пространственными, причем, с точки зрения теории относительности, эту четвертую координату можно ввести в уравнения теоретической физики *формальным* образом так, что она оказывается «равноправной» с тремя пространственными координатами. Это значит, что может быть достигнута симметрия в формулировке любых законов природы относительно всех четырех координат.

С формальной точки зрения, в этом утверждении о равноправии четырех пространственно-временны́х координат в сочетании с «равноправием» всех возможных инерциальных «систем отсчета» и заключена основная идея, а если угодно, и все принципиальное содержание частной, или специальной, теории относительности.

Следует, может быть, особенно подчеркнуть, что если здесь мы и говорим о равноправии всех четырех «координат» (трех пространственных и четвертой временно́й), то имеем в виду лишь символику математических соотношений, которые описывают законы природы. Но, конечно, пространство и время и в теории относительности остаются совершенно различными по своей физической сущности категориями.

Переход от концепции о двух континуумах — пространственном и временном, мыслимых независимо один от другого, к формальной картине единого пространственно-временно́го континуума теории относительности требует, однако, отказа от обычных представлений, в рамках которых (и на основе которых) мы *привыкли* воспринимать и осмысливать все явления познаваемого нами мира.

В дальнейшем на ряде примеров мы попытаемся подчеркнуть и пояснить следующее следствие частной теории относительности. Описание явлений, основанное на обычном представлении о времени, может быть сохранено, но оно имеет смысл лишь постольку, поскольку мы «привязываем» это описание рассматриваемых явлений к определенной инерциальной системе отсчета. Такое ограничительное требование необходимо, конечно, лишь в том случае, если речь идет о явлениях, для которых характерны скорости, приближающиеся к скорости света.

Для данной инерциальной системы мы можем установить «время», единое на всем протяжении ее пространственных координат. В соответствии с этим вполне однозначный смысл имеет представление об одновременности или разновременности каких-либо событий в различных точках пространства.

Если же, следя (как это будет иметь место в ходе дальнейшего изложения) за течением во времени каких-либо явлений или процессов, мы в какой-то момент времени изменим систему отсчета, т. е. перейдем от одного базиса рассмотрения этих явлений к другому, то тем самым мы «спутаем все карты». Обычное представление о течении процессов во времени в результате изменения базиса в самом ходе их рассмотрения будет нарушено и потеряет смысл. В дальнейшем такой переход от одной системы отсчета к другой (в ходе рассмотрения определенной последовательности событий) будет нами использован в применении к конкретным примерам.

Мы столкнемся со следующей известной, но психологически всегда трудно осваиваемой особенностью релятивистских соотношений: понятие абсолютной, не зависимой от определенной системы отсчета, *одновременности* событий не имеет смысла.

Два события (например, появление на свет — рождение двух младенцев), происшедшие на значительном расстоянии одно от другого и оказывающиеся одновременными в определенной инерциальной системе отсчета, представляются уже *неодновременными* в другой системе координат, движущейся относительно первой с постоянной скоростью, близкой к скорости света.

Возьмем упомянутый только что конкретный пример. Положим, что появившиеся на свет младенцы оказываются ровесниками в том случае, если момент их рождения определен и зарегистрирован в системе отсчета, в которой оба они в момент появления на свет покоятся (как мы предположим, при достаточно большом расстоянии между ними в момент их рождения).

Обозначим эту систему как систему A. Если теперь мы поставим вопрос о том, каковы же данные о моменте рождения каждого из них по сведениям, полученным на основе наблюдений, проведенных применительно к другой системе координат (обозначим ее буквой B), проносящейся мимо них с постоянной скоростью, близкой к скорости света, то окажется, что даты рождения младенцев по этим сведениям, т. е. по данным системы A, с одной стороны, и B, с другой стороны, не совпадают. Если иметь в виду данные системы B, то один из новорожденных появился на свет позже другого и, следовательно, при сравнении их возрастов в какой-то определенный момент времени он окажется моложе другого; разность возрастов их к тому же зависит от расстояния между ними. Как мы убедимся в дальнейшем, здесь речь идет не о каких-то условных определениях.

Если установлено определенное начало отсчета времени и начало системы пространственных координат, то место и время рождения ребенка (или какого-либо другого события) определяются четырьмя координатами — тремя пространственными и четвертой временнóй.

Для всех событий, одновременных в некоторой фиксированной системе, например A, время t, по определению, одинаково независимо от значения пространственных координат. Однако время t' *тех же событий* в другой системе (например, B) различно и зависит от определяющих место событий пространственных координат x', y', z' (если речь идет о координатах системы B) или от соответствующих пространственных же координат x, y, z (определенных в системе A) в сочетании с временнóй координатой t.

События, одновременные в одной системе, как уже сказано, *неодновременны* в другой.

В дальнейшем изложении конкретные примеры покажут, к каким физическим следствиям приводит относительность одновременности событий.

Переход от совокупности значений x, y, z и t к совокупности данных x', y', z' и t', определяющих время и место одного и того же события на базисе двух различных систем координат, осуществляется путем преобразований Лоренца. Различные следствия этих преобразований, имеющие отношение к интерпретации «парадокса близнецов», и будут нами в дальнейшем подробно рассмотрены. Непосредственным таким следствием является эффект «замедления хода движущихся часов».

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ЭФФЕКТ ДОПЛЕРА. ФОРМУЛА ЗАМЕДЛЕНИЯ ХОДА ДВИЖУЩИХСЯ ЧАСОВ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

A и B, движущиеся один относительно другого с постоянной скоростью v, близкой к скорости света, поддерживают между собой связь, непрерывно посылая световые или радиосигналы определенной частоты, излучаемые идентичными передатчиками. В силу эффекта Доплера частота сигнала, принимаемого каждым из них, смещена относительно частоты передатчика.

Постулируется, что смещение частоты при заданной скорости зависит лишь от их (A и B) *относительного* движения и не зависит от того, движется ли с данной скоростью v приемник относительно источника или, наоборот, источник относительно приемника.

Отсюда можно прийти к следующему выводу. Промежуток времени ($2t_A$) между началом движения B (когда A и B находятся в одной и той же точке пространства) и моментом возвращения B в исходное положение по часам A оказывается длительнее промежутка времени ($2t_B$) между теми же моментами, определенного по идентичным часам, двигавшимся вместе с B. При этом, однако, предполагается, что A за время всего цикла остается неподвижным в одной и той же инерциальной системе координат, тогда как B в течение каких-то коротких промежутков времени ускоряется относительно этой системы координат.

Имеет место следующее соотношение: $t_B = t_A\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = v/c$ и c — скорость света в пустоте. «Время B в представлении A течет медленнее, чем время самого A». Если развить соображения, положенные в основу данного вывода, то можно прийти к преобразованиям Лоренца.

§ 1. Формула замедления течения времени в движущейся системе

Прежде чем обратиться к преобразованиям Лоренца, воспользуемся выводом, позволяющим прийти к интересующему нас результату, не опираясь явным образом на соотношения, вытекающие из этих преобразований.

Вывод, о котором идет речь, дан в статье М. Борна [8] со ссылкой на Г. Бонди [9]. Приводя здесь по существу те же рассуждения

Бонди, изложим их (что нам кажется более целесообразным), не прибегая к построению пространственно-временных графиков, как это делают Бонди и Борн.

Рассмотрим следующую задачу. Наблюдатель A остается все время неподвижным в какой-то определенной инерциальной системе координат. «Партнер» же его — наблюдатель B — в какой-то момент времени ускоряется (за время, которым практически можно пренебречь) до скорости, сравнимой со скоростью света. Он удаляется от A с этой, остающейся постоянной, скоростью в течение некоторого, может быть, очень длительного времени t_A. Затем, получив столь же кратковременный (и вдвое больший по величине) импульс в направлении к A, проходит за то же время (t_A) путь в обратном направлении, т. е. в направлении к A, двигаясь при этом с той же скоростью и в течение того же времени t_A. Оба партнера (A и B) имеют в своем распоряжении часы, как мы предположим, совершенно идентичные. Можно представить себе, что по завершении описанного цикла движение тела B будет заторможено и B остановится относительно A. После этого показания часов (A и B) могут быть сверены непосредственно.

В этом случае, разумеется, нет необходимости в остановке B, так как часы A и B могут быть сверены «непосредственно» и «в полете», если даже B проносится мимо A с большой скоростью. «Непосредственно» означает то, что время передачи светового сигнала от B к A (например, света, освещающего «циферблат» часов B) равно нулю, между тем как в том случае, если B находится на каком-то удалении от A, это время конечно.

В результате можно будет сравнить длительность всего цикла ($2t_B$), определенную по часам, путешествовавшим вместе с партнером B, с длительностью ($2t_A$), определенной по часам наблюдателя A, который все время оставался неподвижным в определенной инерциальной системе (системе A).

Положим, что A и B излучают световые волны и что осцилляторы — передатчики, излучающие эти волны, в случае A и B идентичны. Можно было бы предположить, что сами часы A и B являются такими осцилляторами. В этом случае частоту (число колебаний в единицу времени) следовало бы положить равной единице.

Для большей общности мы будем, однако, иметь в виду, что часами является какая-то другая система и что «собственная частота» ν каждого из передающих сигналы осцилляторов (A и B) не обязательно равна единице.

Речь идет о *собственной* частоте, т. е. о частоте, измеренной часами, покоящимися относительно данного осциллятора и, следовательно, двигающимися вместе с ним, если этот осциллятор движется.

Мы можем получить основное соотношение для изменения масштаба времени в движущейся системе координат, исходя из весьма общих соображений и опираясь на три допущения, которые прежде всего и сформулируем.

Из трех нижеследующих положений первое представляется само собой разумеющимся. Второе положение есть непосредственное следствие принципа относительности и, наконец, третье из них в значительной степени произвольно.

В том выводе, который дальше приводится, будем основываться на следующем.

1. Если источником света (например, B) испущен сигнал в виде «цуга» (отрезка синусоиды) световых волн и этот сигнал улавливается приемником (например, A) так, что он может сосчитать число принятых пульсаций — колебаний, то, каково бы ни было движение A и B (и одного из них относительно другого), полное число волн, *принятых* и сосчитанных A (за время всего цикла), равно числу волн, *излучэнных* B.

2. Любого из двух партнеров (A и B) за время, в течение которого они движутся по инерции, мы вправе считать покоящимся, а другого движущимся относительно него.

Если, следовательно, обозначим ν_x — частоту пульсаций, воспринимаемых приемником A от *удаляющегося* от него с постоянной скоростью v источника B, а ν_x' — частоту приема при *приближающемся* с той же скоростью источнике, то те же частоты будут соответственно наблюдаться, если удаляется или приближается (с той же, конечно, скоростью) не источник, излучающий волны с собственной частотой ν_0, а приемник, тогда как источник неподвижен. Речь в том и другом случае идет о равномерпом и прямолинейном движении.

Для вывода соотношений Лоренца это, второе, положение существенно. Оно перекрывается с основными принципиальными позициями, исходя из которых и строится теория относительности. Согласно этой теории, понятие *абсолютного* покоя не имеет смысла. Имеет смысл рассматривать движение данного тела лишь относительно каких-то других тел. (Здесь, однако, имеется в виду равномерное движение [1].)

Поэтому, если рассматривать данные два тела A и B изолированно от всех других тел [2], то мы можем с равным правом вести рассмотрение либо так, как если бы A покоился, а B двигался,

---

[1] Обобщения, направленные к устранению этой оговорки, ограничивающей применимость принципа относительности лишь группой *равномерных* прямолинейных движений, приводят к построению общей теории относительности (или теории тяготения) Эйнштейна.

[2] Так же и таких удаленных космических тел, как «неподвижные звезды». Поскольку речь идет о прямолинейном и равномерном движении относительно неподвижных звезд, такое движение, согласно специальной теории относительности, не оказывает влияния на явления, протекающие в какой-либо физической системе.

Поэтому абстракция, которая имеется в виду в тексте, допустима, поскольку рассматривается «свободное» движение тел — движение по инерции.

или, наоборот, B покоился, а A двигался. При этом мы исходим из того, что при движении обоих тел (A и B) по инерции скорость B относительно A, определенная по данным наблюдений A, равна скорости A относительно B, определенной по измерениям B.

Из сказанного следует, что в случае I (рис. 1), с одной стороны (неподвижен приемник), и в случае II того же рис. 1, с другой стороны (неподвижен источник), соответствующие частоты при заданной относительной скорости одинаковы.

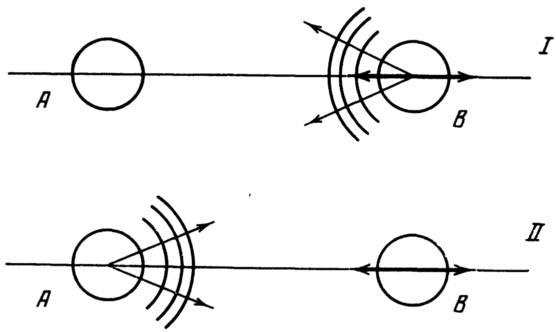


Рис. 1

Мы здесь опускаем подробности ряда оговорок, которые, быть может, необходимы для уточнения предлагаемого вывода. Обратим, однако, внимание на то, что условие, предпосланное изложенному в п. 2 и выраженное в словах «если можно рассматривать данные два тела A и B изолированно от всех других тел», оказывается выполненным только в том случае, если, согласно Эйнштейну, принять далеко идущую физическую гипотезу: «светоносного эфира» — *вещественной* среды, передающей свет, в действительности не существует.

Если бы носителем энергии электромагнитного поля и световых волн был гипотетический, наделенный всеми свойствами вещественной среды и заполняющий мировое пространство, «светоносный эфир» классической физики конца XIX в., абстракция, допускаемая сформулированным выше вторым постулатом, не имела бы смысла.

Кроме двух тел — передатчика излучения и его приемника, в рассматриваемом явлении участвовало бы третье «тело» — передающая свет вещественная среда.

Поэтому рассуждения, приведенные в применении к рассмотренной ниже задаче, не приложимы к вполне аналогичной задаче, относящейся к распространению (от движущегося источника к покоящемуся приемнику или, наоборот, от покоящегося источника к движущемуся приемнику) не световых, а звуковых волн.

Более подробно это замечание развито в § 5 данной главы.

3. Предположим, что короткий по своей длительности (Δt) импульс, сообщаемый B в момент наибольшего его удаления от A, изменяющий направление скорости B на противоположное, не оказывает влияния на *показание* часов, а также и на фазу колебаний осциллятора-передатчика постольку, поскольку в предельном случае можно положить $\Delta t = 0$. Часы, удовлетворяющие такому требованию, будем называть «идеальными», или стандартными. В этом предположении заключен значительный произвол.

В качестве часов мы можем выбирать среди определенного класса систем, в наибольшей степени удовлетворяющих только что сформулированному требованию и ведущих себя практически как «идеальные» часы, даже если импульсы, которым они подвергаются, очень кратковременны.

Вернемся к условиям поставленной выше задачи. Пока не будем уточнять «хронометрическую» (или хронологическую, развернутую во времени) последовательность событий так, как она представляется указанным двум партнерам (A и B), каждому с его собственной точки зрения (об этом будет сказано далее). Пока что путем простого расчета, основанного на трех вышеуказанных положениях, выясним, какой *результат* будет получен, если каждый из этих партнеров будет следить за ходом часов другого на *расстоянии*, принимая посылаемые этим последним световые сигналы. Сосчитав число принятых волн, излученных передатчиком (осциллятором) своего партнера за время всего цикла, каждый из наблюдателей может заранее на основании своих наблюдений, сделанных за время нахождения другого «в пути», *предсказать*, каков будет результат сравнения показаний их часов, после того как это сравнение они, встретившись, произведут уже непосредственно.

Описанная ситуация [1] схематически (или символически) иллюстрируется рис. 1.

Написав простые уравнения применительно к случаям I и II (см. рис. 1) соответственно, можно, опираясь на положения, приведенные выше в пп. 1—3, вывести соотношение, определяющее замедление хода движущихся часов, а также одновременно и известную релятивистскую формулу Доплер-эффекта — изменения, или «смещения», частоты световых колебаний, воспринимаемых движущимся наблюдателем от неподвижного источника колебаний или, наоборот, неподвижным наблюдателем от движущегося источника.

Выше мы уже условились обозначать ν_x — частоту, принимаемую от удаляющегося источника, а ν_x' — частоту приема при приближающемся источнике (при собственной частоте излучателя, в том и другом случае равной ν_0).

---

[1] B неподвижен в течение первой половины цикла в одной инерциальной системе, в течение же второй половины — в другой.

Должно иметь место соотношение

$$\frac{\nu_x}{\nu'_x} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \nu_x = \nu'_x \frac{1-\beta}{1+\beta}, \tag{I.1}$$

где $\beta = v/c$, v — скорость (источника или приемника, а c, как и везде в дальнейшем, скорость света). Это соотношение есть непосредственное следствие первого из трех вышеприведенных положений [1].

---

[1] Предположим, что свет (собственной частоты ν_0) испускается движущимся источником B, и что этот источник находится в положении I (рис. 2) в момент времени T'_A по часам A, при этом он движется, удаляясь от A, и что, наконец, в положении II он окажется в момент времени T_A (также по часам A; мы здесь оставляем в стороне вопрос о том, как A может определить эти моменты T'_A и T_A, о чем речь еще впереди).

Предположим также, что за время приема световой волны, испущенной B, A остается в покое в одной и той же инерциальной системе координат.

Промежуток времени, в течение которого A принимает волну, излученную B в интервале между указанными моментами времени (T_A и T'_A), очевидно, равен

$$T_A + \frac{x_2}{c} - \left(T'_A + \frac{x_1}{c}\right) = \Delta T_A + \frac{\Delta x}{c}, \tag{I.2}$$

где $\Delta T_A = T_A - T'_A$ и $\Delta x = x_2 - x_1$ (см. рис. 2; свет распространяется в инерциальной системе со скоростью c; в данном случае речь идет о системе координат, в которой A покоится).

Положим, что промежуток времени между моментами прохождения B соответственно через положения I и II, *определенный по часам* B, равен ΔT_B. Для большей ясности допустим, что испускание волн B имеет место только в течение времени ΔT_B.

Если сосчитать число волн ($\nu_0 \Delta T_B$), *испущенных* B, и число волн, *принятых* A в соответствии с (I. 2), то очевидно, согласно с приведенным в тексте положением 1, что сколько волн будет испущено B, столько же и будет принято A. Принимая во внимание, что $\Delta x = v\Delta T_A$ (v — скорость источника, определенная по часам A), и приравняв число волн, испущенных источником, числу волн, зарегистрированных приемником, получим

$$\nu_x\left(\Delta T_A + \frac{\Delta x}{c}\right) = \nu_x\left(\Delta T_A + \frac{v\Delta T_A}{c}\right) = \nu_x \Delta T_A (1+\beta) = \nu_0 \Delta T_B. \tag{I.3}$$

(Буквами A и B отмечены интервалы времени, определенные по двум различным часам — A и B. В связи с дальнейшим станет ясно, что было бы логично отметить буквой A также и интервал длины, обозначенный нами Δx. Но пока в этом нет надобности.)

Если источник B приближается к A и за время испускания света перемещается из положения II в положение I (см. рис. 2), то те же соображения приведут к уравнению

$$\nu'_x\left(\Delta T_A - \frac{v\Delta T_A}{c}\right) = \nu'_x \Delta T_A (1-\beta) = \nu_0 \Delta T_B. \tag{I.4}$$

Разделив правую и среднюю части уравнения (I. 3) на соответствующие выражения уравнения (I. 4), получаем

$$\frac{\nu_x}{\nu'_x} = \frac{1-\beta}{1+\beta}.$$

Рассмотрим уравнения, которые получаются, если приравнять число колебаний, испущенных источником, с одной стороны, числу волн, зарегистрированных приемником, с другой стороны, в двух случаях (*I* и *II*), обозначенных на рис. 1. В случае *I* *B* является передатчиком (и *A* приемником), в случае *II*, наоборот, *B* принимает волны, испускаемые передатчиком *A*.

В обоих случаях, как уже сказано, мы предполагаем, что число колебаний в «цуге» волн, испущенных передатчиком, равно

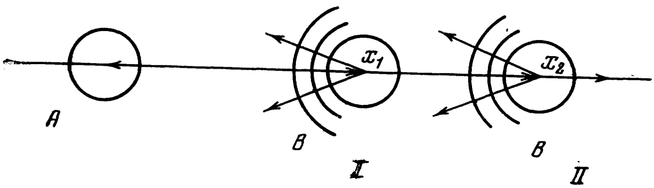


Рис. 2

числу волн, зарегистрированных при воздействии данного «цуга» волн на приемник. Уравнения, выражающие равенство этих чисел в двух показанных на рис. 1 случаях, имеют различный вид.

В самом деле, предположим сначала, что *A* принимает волны, излучаемые движущимся *B*. Пусть время, в течение которого *B* удаляется от *A*, определенное по часам *A*, есть t_A. По истечении этого времени *B* испытывает мгновенный импульс, обращающий его скорость относительно *A*. Однако после этого *A* в течение времени Δt_A будет все еще принимать сигналы с частотой ν_x удаляющегося источника, поскольку свет распространяется от *B* к *A* не мгновенно и, следовательно, момент времени приема запаздывает относительно момента испускания сигнала. Легко понять, что $\Delta t_A = \beta t_A$.

Действительно, сигнал, испущенный *B* в момент t_A на расстоянии x от *A*, дойдет до *A* за время $\Delta t_A = x/c$, но по заданным условиям задачи $x = vt_A$. Откуда [1]

$$\Delta t_A = \frac{vt_A}{c} = \beta t_A.$$

Продолжительность приема неподвижным *A* частоты ν_x равна, следовательно,

$$t_A + \beta t_A = t_A (1 + \beta). \tag{I.5}$$

По тем же соображениям время, в течение которого *A* принимает частоту ν'_x приближающегося источника *B*, равно $(1-\beta)\, t_A$,

[1] Следует отметить, что здесь мы базируемся на втором постулате, положенном Эйнштейном в основу его специальной теории относительности: скорость распространения света, испускаемого движущимся источником, не зависит от скорости движения источника.

так как согласно (I.5) прием этой частоты ν'_x начнется в момент времени $t_1 = t_A + \beta t_A$ и закончится в момент времени $t_2 = 2t_A$, когда положения B и A снова совпадут.

Полное же число N колебаний, принятых за время всего цикла (при движущемся источнике B), выражается так:

$$N_A = t_A [\nu_x (1 + \beta) + \nu'_x (1 - \beta)]. \tag{I.6}$$

Обозначим: ν_0 — «собственная частота» источника B (ν_0 — число колебаний B за единицу времени, определяемого по часам B), $2t_B$ — продолжительность всего цикла, определенная также по часам B. Тогда полное число n_B колебаний передатчика за время всего цикла выразится так:

$$n_B = 2t_B\nu_0. \tag{I.7}$$

Приравнивая (I.6) и (I.7), получаем следующее уравнение:

$$t_A [\nu_x (1 + \beta) + \nu'_x (1 - \beta)] = 2t_B\nu_0. \tag{I.8}$$

Рассматривая тот же цикл перемещений B и оставляя, следовательно, неизменными t_A и t_B, но предполагая на этот раз, что осциллятор A используется как излучатель, испускающий n_A волн, а осциллятор B как приемник, принимающий N_B волн, уравнение $n_A = N_B$ будет иметь вид, отличный от (I.8).

В поле волны, исходящей из A, приемник B движется сначала (в течение первой половины цикла, удаляясь от A) вправо (рис. 1, случай II).

В течение времени t_B половины цикла он принимает, следовательно, частоту ν_x и до момента мгновенной остановки в точке на расстоянии x от A зарегистрирует $\nu_x t_B$ колебаний. Затем скорость его в поле той же волны мгновенно меняется на противоположную. Также мгновенно меняется, следовательно, и частота принимаемых им колебаний от значения ν_x до значения ν'_x.

Таким образом, в соответствии с ситуацией II (см. рис. 1) уравнение, выражающее равенство числа испущенных и числа принятых волн, имеет вид

$$t_B (\nu_x + \nu'_x) = 2t_A\nu_0. \tag{I.9}$$

Подставив в (I.8) и (I.9) соотношение (I.1), получим

$$2t_A\nu'_x (1 - \beta) = 2t_B\nu_0, \tag{I.10}$$

$$2t_B \frac{\nu_x'}{1 + \beta} = 2t_A\nu_0. \tag{I.11}$$

Разделив (1.10) на (I.11), будем иметь

$$\frac{t_A}{t_B} (1 - \beta^2) = \frac{t_B}{t_A}. \tag{I.12}$$

Следовательно,

$$\frac{t_B}{t_A} = \sqrt{1-\beta^2}, \quad t_B = t_A\sqrt{1-\beta^2}. \tag{I.13}$$

С другой стороны, умножая (I.10) на (I.11) и исключая t_A и t_B, получаем

$$\begin{gathered} \nu_x'^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} = \nu_0^2, \\ \nu_x' = \nu_0 \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{gathered} \tag{I.14}$$

т. е. известную релятивистскую формулу Доплер-эффекта. Здесь $2t_A$ и $2t_B$ — промежутки времени между двумя событиями[1], определенные по различным часам (двух разных наблюдателей A и B) в одном и том же месте пространства данной инерциальной системы отсчета.

Как уже сказано, было бы проще предположить, что часами (A и B) являются те самые осцилляторы, которые и служат передатчиками — излучателями световых сигналов, и положить $\nu_0 = 1$. Однако для нас существенно то, что по смыслу теории относительности под «часами», о которых мы говорили, можно было бы понимать и любую систему, определенные параметры которой изменяются регулярным образом (и не обязательно периодически) во времени. Иными словами, речь могла бы идти о любых процессах, изменяющихся закономерно во времени.

Полученные нами соотношения означают, что *любые процессы* (в том числе и процессы жизнедеятельности организмов) в системе, движущейся равномерно относительно некоторой инерциальной системы, наблюдателю, покоящемуся в этой последней системе, представляются замедленными в соответствии с формулой (I.13).

Таким образом, мы пришли к фундаментальному результату, что интервалы времени t_A и t_B не равны и связаны релятивистским соотношением (I.13).

Время в системе движущегося наблюдателя (B) его покоящемуся партнеру (A) представляется протекающим медленнее его (A) «собственного времени».

Следует еще раз обратить внимание на то, что в приведенном выводе (в случаях *I* и *II*) покоящимся мы считаем того из двух партнеров, а именно A, который все время остается неподвижным в одной и той же определенной инерциальной системе.

В этой связи отметим следующее кажущееся противоречие. В духе тех посылок, которые были положены в основу приведенного выше вывода, казалось бы, соотношения (I.8) и (I.9) должны были бы быть симметричны относительно перестановки t_A

[1] «События» эти — начало движения B относительно A и окончание его.

и t_B. Такая симметрия, действительно, имеется, но только в случае соотношения (I.13), если его применить к стадии движения A и B по инерции: поменяв в этом случае местами t_A и t_B в уравнении (I.13), получим соотношение $t_A = t_B \sqrt{1-\beta^2}$, которое также справедливо (если покоится B, а движется A). Разумеется, значения t_A и t_B в этом последнем уравнении нельзя отождествлять со значениями t_A и t_B в уравнении (I.13).

Вместе с тем, если иметь в виду уравнения (I.8) и (I.9), относящиеся ко всему циклу в целом, то уравнения, которые получаются в результате замены в них t_A на t_B (и t_B на t_A), несправедливы.

В течение первой, так же как и второй, половины цикла A и B находятся в равных условиях в том отношении, что результирующая сил, действующих как на A, так и на B, равна нулю. Равенство же нулю равнодействующей сил за все время цикла в целом предполагается только в отношении A, тогда как B в начале и в середине цикла получает импульс очень значительной (в пределе бесконечно большой) силы.

Таким образом, симметрия условий, в которых находятся как A, так и B, в этом случае (т. е. при рассмотрении всего цикла в целом) не имеет места.

К отмеченному здесь кажущемуся противоречию и сводится сущность так называемого «парадокса часов». Соображения, разъясняющие это кажущееся противоречие, подробно будут развиты в следующей (второй) главе.

Поведение «часов» в состоянии равномерного прямолинейного движения может быть предсказано на основе частной теории относительности. Принцип относительности не дает, однако, оснований для утверждений о поведении часов в их ускоренном или замедленном движении.

Выше (см. п. 3) было введено предположение об «идеальности» часов. Целесообразно это представление об идеальных часах еще обобщить. Допустим, что изменение показаний таких часов наблюдателю, покоящемуся в некоторой инерциальной системе и следящему за этими движущимися часами, представляется соответствующим закону

$$\Delta t_B = \int_0^{\Delta t_A} \sqrt{1-\beta^2(t_A)}\, dt_A, \tag{I.15}$$

где Δt_A — некоторый промежуток времени, определенный по часам A; Δt_B — соответствующий, с точки зрения A, промежуток времени t_B; $\beta(t_A)$ — выражение в функции времени скорости $\beta = v/c$. Формула (I.15) — естественное обобщение уже выведенного нами соотношения $t_B = t_A \sqrt{1-\beta^2}$ (при $\beta = \text{const}$).

В действительности соотношение (I.15), примененное к каким-либо реальным часам, будет выполнено лишь приближенно и лишь для не чрезмерно больших ускорений. Если, однако, его принять, то в пределе (при $\Delta t_A = 0$) согласно (I.15) $\Delta t_B = 0$, что нами и было выше предположено.

Мы «сбросили со счетов» влияние кратковременных движущих сил, воздействующих на B. Изменением *показаний* часов за время действия таких сил при указанных выше условиях всегда можно пренебречь. Не следует, однако, упускать из виду, что именно ускорение (изменение скорости часов B относительно некоторой инерциальной системы) и можно рассматривать как причину того эффекта *замедления «течения времени»* в системе B (по отношению к A), который и приводит к соотношению (I.13). А именно, *с точки зрения инерциальной системы* A, замедление хода часов B вполне логично рассматривать как результат их *ускорения* относительно этой системы (A). Здесь имеется в виду начальное ускорение.

В нашем примере, в момент «старта» B — в начале цикла, часы B ускорены в определенном направлении, и в результате этого «ход» их замедлился (в отношении $\sqrt{1-\beta^2}:1$). В течение времени t_A равномерного движения B в указанном направлении ход «часов» B остается неизменным — замедленным относительно A.

В момент обращения скорости B относительно A на расстоянии x от A, т. е. в середине рассматриваемого нами цикла, с проводимой нами точки зрения, имеет место сначала замедление B, а затем снова его ускорение до первоначального значения скорости, но уже в обратном направлении — в направлении к A. В результате воздействия (замедляющих, а затем ускоряющих) сил в момент обращения скорости движения скорость хода часов B в итоге остается прежней. Это находится в согласии с формулой (I.13). Ведь изменилось лишь направление скорости на противоположное, величина же скорости осталась прежней. Поскольку в формулу (I.13) входит квадрат скорости движения, скорость хода часов за время второй половины цикла та же, что и за время первой его половины.

Таким образом, логично считать причиной эффекта «ускорение», которое испытывает B в начале своего движения в отличие от A, который действию каких-либо ускоряющих сил не подвергается, и, следовательно, все время остается неподвижным в одной и той же инерциальной системе.

Мы уже говорили, что часами могли бы быть сами осцилляторы — передатчик A и приемник B.

Полагая $\nu_0 = 1$, $t_B = n_B$ и $t_A = n_A$, получим вместо (I.13)

$$2n_B = 2n_A\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (I.16)$$

Сосчитав число колебаний B за время всего цикла, наблюдатель A обнаружит, что оно меньше числа колебаний его собственного осциллятора в отношении $\sqrt{1-\beta^2}:1$ (хотя оба осциллятора идентичны).

§ 2. Преобразования Лоренца

В простом выводе, приведенном выше, мы ввели два различные (для разных систем отсчета) значения t_B и t_A интервала времени, протекающего между определенными событиями. Как оказалось, это необходимо, чтобы принять исходное положение, утверждающее, что частоты ν_x и ν'_x не зависят от того, движется ли источник света (с постоянной скоростью) относительно неподвижного приемника или, наоборот, приемник движется с такой же скоростью относительно неподвижного источника. Мы убедились в том, что t_B и t_A различны.

Если продолжить те же рассуждения, то нетрудно прийти к выводу, что и пространственные координаты (так же как и временны́е) двум наблюдателям, каждый из которых движется с постоянной во времени скоростью относительно другого, представляются различными.

В нашем примере B движется с одной и той же скоростью v, сначала (первая половина цикла) удаляясь от A, а затем (вторая половина цикла) приближаясь к нему с той же скоростью v, измеренной в системе отсчета A.

В соответствии с рассуждениями, вытекающими из принципа относительности, подобными тем, какие были приведены выше (§ 1, п. 2), следует потребовать, чтобы скорость A *относительно* B, *определенная наблюдателем* B в течение времени равномерного движения, т. е. опять же за время первой и второй половины *цикла*, была бы также равна v.

Наблюдатель B может определять (в функции времени), скажем, радиолокационным методом, расстояние от приближающегося к нему или удаляющегося от него тела A. На основании таких наблюдений и измерений он может установить, на каком расстоянии (x_B) находится от него A в момент окончания первой половины цикла или в момент начала второй его половины, т. е., например, в момент приведения в действие, скажем, того реактивного двигателя, который изменит его скорость относительно A на противоположную и в момент выключения этого двигателя. (Эти моменты отделены промежутком времени Δt_B; как указывалось, в пределе условно будем полагать $\Delta t_B = 0$.) Разделив известное B расстояние x_B на промежуток времени t_B, определенный по его собственным часам, он вычислит скорость $v_B = x_B / t_B$.

В соответствии с изложенным следует потребовать, чтобы скорость v_A (определенная таким же способом наблюдателем A) была бы равна v_B. Следовательно, должно иметь место равенство

$$\frac{x_A}{t_A} = \frac{x_B}{t_B}. \tag{I.17}$$

Поскольку мы раньше пришли к выводу, что $t_B = t_A\sqrt{1-\beta^2}$, из (I.17) и (I.13) следует

$$x_B = x_A \sqrt{1-\beta^2} \tag{I.18}$$

(ср. ниже рис. 7, положения I и II; x_A и β, приведенные в тексте, соответствуют [1] x_0 и β_0 рис. 7).

Под системой отсчета мы можем понимать систему пространственных и временны́х координат. Речь идет о системе реальных тел. Будем представлять ее себе в виде совокупности жестких, сочлененных стержней единичной длины и цепочек, синхронизированных в данной системе часов. Можно представлять себе прямоугольную, составленную из таких стержней, решетку с постоянной решетки, равной единице длины, в равноотстоящих узлах которой находятся часы, показывающие время t (или t') в каждой данной точке пространства — x, y, z (или x', y', z').

Условимся, что решетка x', y', z' движется относительно решетки x, y, z в совпадающем направлении *положительных* осей (x и x') или, наоборот, что решетка x, y, z движется в противоположном направлении и что начало системы координат x', y', z' в начальный момент времени $t = t' = 0$ совпадает с началом системы x, y, z.

Заранее очевидно, что при указанных условиях оси x (и x') физически никак не выделены [2]. Отсюда следует, что при переходе от одной системы координат (x, y, z) к другой (x', y', z') значения y и z остаются неизменными:

$$y' = y \text{ и } z' = z.$$

В дальнейшем координаты y, z и y', z' будем опускать.

Рассмотрим, как преобразуется координата x, т. е. определим функцию $x' = f(t, x, \beta)$, где $\beta = v/c$.

Приведем рассуждения, которые позволяют, исходя из соотношений (I.13) и (I.18), найти эту функцию $x' = f(x, t, \beta)$ и прийти к преобразованиям Лоренца.

В соответствии со сказанным выше две рассмотренные системы отсчета отличаются тем, что обозначения координат одной из них отмечены штрихами («штрихованная» система), координаты другой записаны без штрихов («нештрихованная» система). Одну из них (как уже сказано) мы можем считать неподвижной, а другую движущейся в том или ином направлении — вправо или влево в

---

[1] Следует иметь в виду, что в верхней части рис. 7 (система III) отмечены *неодновременные* положения объектов b''_n и B. Расстояние между отметками объектов A и B, засеченных одновременно в системе III (см. рис. 8, отметки b''_k и B), также равно $x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$.

[2] Имеется в виду, что перенос осей x (и x') параллельно первоначально выбранному их направлению не изменяет условий задачи.

зависимости от условного выбора «неподвижной» системы. Знак скорости, следовательно, меняется на противоположный, если вместо перехода от x, t к x', t' рассматривается обратный переход — от x', t' к x, t. В остальном формулы преобразования в этих двух случаях должны совпасть, так как налицо полная симметрия в соотношении между этими двумя системами (I и II).

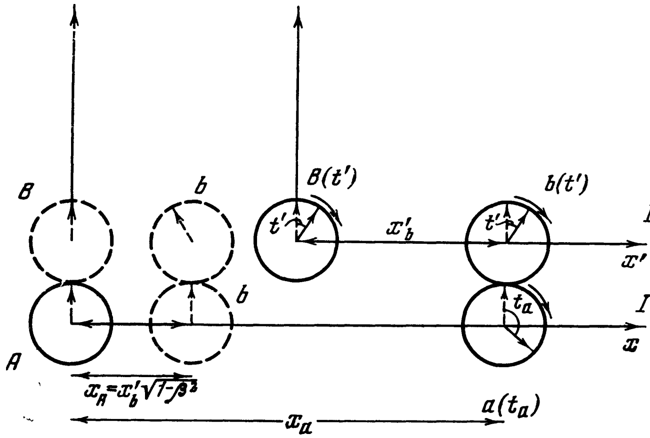


Рис. 3

Было условлено, что в момент времени $t = t' = 0$ начала обеих систем отсчета (I и II) совпадают и что, следовательно, стрелки часов, находящихся в начале систем I и II, стоят в этот момент времени на нулевых делениях соответствующих циферблатов.

В штрихованной системе (системе II — рис. 3) отметим две жестко (неподвижно) связанные между собой точки B и b и в покоящейся — нештрихованной системе (I) также две жестко связанные и неподвижные в этой системе точки A и a.

Вернемся к соотношению (I.18). Для дальнейшего следует вдуматься в смысл полученного выше и выраженного этим соотношением результата.

Объект A, как было предположено, неподвижен в некоторой определенной инерциальной системе. При выводе (I.18) предполагалось, что B движется со скоростью v относительно A вместе с другой инерциальной системой. Для наглядности и для того, чтобы фиксировать внимание читателя, прибегая к классическому сравнению, которым будем пользоваться и в дальнейшем, скажем, что объект B движется вместе с воображаемым «поездом» (система B) по железнодорожному полотну (неподвижная система координат). На железнодорожном полотне имеются «станции». В определенный момент «своего времени», который мы имели в виду, выводя (I.18), объект B проносится мимо определенной станции. Обозначим ее для конкретности отметкой a_n.

Полученный результат перефразируем и уточним так: в указанный только что момент времени B определяет (именно для данного момента времени) расстояние от него объекта A. Как было показано, найденное им расстояние (x_B согласно принятым выше обозначениям) оказывается равным $x_A\sqrt{1-\beta^2}$ (см. (I.18)), где x_A — расстояние между «станциями» A и a_n, определенное по данным «путевых» измерений, выполненных с масштабами, неподвижными относительно «железнодорожного полотна».

Воспользуемся только что сформулированным результатом для вывода преобразований Лоренца. Как было отмечено выше, любую из систем координат — штрихованную или нештрихованную — можно считать неподвижной («железнодорожное полотно и станции на нем»), другую — движущейся («поезд»). Мы не допустим какой-либо ошибки, если, применяя соотношение (I.18), в ходе вывода изменим это условное соглашение, т. е. воспользуемся соотношением (I.18), считая сначала штрихованную систему неподвижной. Затем то же соотношение применим, рассматривая систему x', t' как «поезд»: в уравнение (I.18) входит квадрат скорости, и, поскольку при изменении указанного предположения изменяется лишь знак скорости, оно одинаково применимо независимо от того, которая из двух систем отсчета (x, t или x', t') предполагается движущейся относительно другой, покоящейся.

Пока, имея в виду упомянутое выше сравнение, скажем, что B — b (t') (ось x') рис. 3 есть железнодорожное полотно и что сплошными кружками на оси x' обозначены станции на нем. Объект же A (так же как и неподвижный относительно него объект a) будем пока обозначать как «поезд», движущийся влево.

В момент «своего» времени (начальный), когда A проносится мимо B влево, наблюдатель A, со своей точки зрения, определяет расстояние от него объекта b («станции» b на пути x'). Это, определенное *по измерениям движущегося A* расстояние между сплошным кружком A и пунктирным b на оси x' обозначено на рисунке x_A. В данном случае можно применить уравнение (I.18), написав в нем A вместо B и b вместо A. Следовательно,

$$x_A = x'_b\sqrt{1-\beta^2}, \tag{1.19}$$

где x'_b—расстояние между «станциями» (B и b) на «железнодорожном полотне» B. Эти станции показаны на рис. 3 сплошными кружками в какой-то определенный момент времени t'[1], который может быть выбран произвольно, так как расстояние x'_b между «станциями» на оси x' остается неизменным, не зависящим от времени.

[1] Положения же B и b, отмеченные штрихованными кружками на рис. 3, относятся к двум *различным* моментам времени t'.

Для получения искомого результата следует фиксировать внимание на объектах b (t') и a, обозначенных на рис. 3 сплошными кружками.

Будем теперь считать, что движется вправо система B (рис. 3, система II — «поезд»), а система I («полотно») неподвижна. Соотношение Лоренца, которое мы хотим вывести, позволяет перейти от координат x_a и t_a (см. рис. 3) некоторого объекта a, неподвижного в системе I, к координатам x'_b и t'_b объекта b (см. рис. 3), неподвижного в системе II; a совпадает с b в пространстве в данный момент времени (t и t').

Под координатами t_a и t'_b понимаются показания соответственно часов a и b в момент совпадения этих двух часов в пространстве. Показания часов определяются по положению на соответствующих циферблатах a и b стрелок, схематически обозначенных на рис. 3 сплошными линиями. Пунктирный кружок b (рис. 3) определяет положение объекта b, «засеченное» в системе x, t в момент времени $t = 0$. Согласно изображенному на рис. 3, часы b за время t_a пройдут в системе I путь от точки, отмеченной на оси x пунктирным кружком b, до точки, отмеченной сплошным кружком a и совпадающим с ним в пространстве сплошным кружком b (t'). Длина этого пройденного объектом b за время t_a пути по измерениям наблюдателя, неподвижного в системе I, равна

$$\Delta x = x_a - x'_b \sqrt{1 - \beta^2} \tag{I.20}$$

(см. рис. 3). Скорость же перемещения по этому пути (длина которого Δx) по условию равна v. Таким образом,

$$t_a = \frac{\Delta x}{v}.$$

Следовательно, согласно (I.20)

$$t_a = \frac{x_a - x'_b \sqrt{1-\beta^2}}{v}. \tag{I.21}$$

Переписывая (I.21), получаем первое из уравнений Лоренца для перехода от x, t к x', t'. Это уравнение имеет вид

$$x'_b = \frac{x_a - vt_a}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{I.22}$$

или, опуская индексы,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.23}$$

В прилож. 1 более подробно рассмотрена расстановка стрелок часов, зависящая от того, которая из систем координат (I или II) считается неподвижной.

Вернемся к выводу преобразований Лоренца. В силу указанной уже симметрии и возможности с равным правом считать любую из систем (*I* или *II*) неподвижной, а другую движущейся (с учетом, однако, изменения знака v при замене одного из только что указанных предположений другим) наряду с соотношениями (I.21) и (I.22) должны быть справедливы уравнения

$$t_b' = \frac{x_b' - x_a\sqrt{1-\beta^2}}{-v} = \frac{x_a\sqrt{1-\beta^2} - x_b'}{v}, \tag{I.24}$$

$$x_a = \frac{x_b' + vt_b'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.25}$$

Если опустить индексы при x' и x, то уравнение (I.25) можно переписать в виде

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.26}$$

Исключив из уравнений (I.23) и (I.26) x', получим второе уравнение Лоренца для преобразования от координат x, t к координате t'

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.27}$$

Решая систему уравнений (I.23) и (I.27) относительно x и t, получаем формулы преобразования от координат x', t' к координатам x, t

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{I.28}$$

т. е. снова уравнение (I.26), а также уравнение

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.29}$$

Как заранее можно было предвидеть (поскольку можно произвольно считать одну из систем — *I* или *II* — неподвижной, а другую движущейся), система уравнений (I.28), (I.29) отличается от уравнений (I.23), (I.27) лишь тем, что скорость v входит в эти системы уравнений с противоположным знаком.

Формулы для перехода от координат движущейся системы (штрихованной), стоящих в правых частях уравнений (I.28) и (I.29), к координатам системы неподвижной (нештрихованной) запишем в несколько ином виде.

Полагая в уравнениях (I.28) и (I.29) $x' = 0$, получаем соответственно выражения для координат $x_B(t')$ и $t_B(t')$ начала B движущейся системы отсчета x', t'

$$x_B(t') = \frac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{I.30}$$

и

$$t_B(t') = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.31}$$

Учитывая (I.30) и (I.31), уравнения (I.28) и (I.29) можно тогда переписать в виде

$$x(t') = x_B(t') + \frac{x'(t')}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{I.32}$$

$$t(t') = t_B(t') + \frac{\beta x'(t')}{c\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{I.33}$$

Формулы (I.32) и (I.33) потребуются для приложений в гл. IV.

§ 3. О лоренцевом сокращении продольных размеров тел

Рассмотрим два непосредственных следствия преобразований Лоренца, на которые в последующем нам придется неоднократно ссылаться.

Положим, что мы фиксируем на оси абсцисс «движущейся» системы x', t' две точки, координаты которых обозначим $x_2' = \text{const}$ и $x'_1 = \text{const}$, а неизменное во времени t' расстояние между ними обозначим $\Delta x' = x_2' - x_1'$.

Пусть в определенный — в покоящейся системе x, t — момент времени t мы «засекаем» (отмечаем) на оси x *одновременные* для системы x, t положения точек x_2' и x_1', движущихся относительно x, t.

Согласно уравнению (I.23)

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - \beta c \Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и отсюда, поскольку в нашем случае $\Delta t = 0$,

$$\Delta x_t = \Delta x' \sqrt{1-\beta^2}. \tag{I.34}$$

Так как расстояние Δx_t определено между *одновременными* в системе x, t положениями разных точек x_2 и x_1, отметки этих точек сделаны в различные моменты времени t' движущейся системы (см. [I.27]). Так же, конечно, верно и обратное равенство

$$\Delta x'_{t'} = \Delta x \sqrt{1-\beta^2}, \tag{I.35}$$

где $\Delta x'_{t'}$ — разность координат x' двух определенных точек, *одновременных в системе* x', t', а Δx— разность координат этих точек, отмеченных неодновременно — в разные моменты времени t — на оси x.

Следовательно, в (I.34) и (I.35) мы переходим от неодновременных значений (x' или x) в правых частях (и их разности) к одновременным значениям в левых частях этих уравнений.

Если наблюдатель, покоящийся в системе x, t, измеряет длину какого-либо тела, например, масштабной линейки B, движущейся вместе с системой координат x', t', то это измерение он выполнит так: в какой-то определенный момент своего времени он отметит («засечет») на своем неподвижном масштабе «начало и конец» линейки B — точки, абсциссы которых в системе x', t' — x'_2 и x'_1, и определит с помощью своего масштаба расстояние между этими отметками. Согласно (I.34) он найдет длину

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-\beta^2}. \tag{I.36}$$

Если покоящийся масштаб, который служит для выполнения этого измерения, тождествен с «линейкой B», то наблюдатель в системе x, t придет к заключению, что линейка, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, стала короче, поскольку значение $\sqrt{1-\beta^2}$ меньше единицы; Δx есть число делений, укладывающихся между началом и концом движущейся линейки, отмеченными одновременно по тождественному с ней, неподвижному в системе x, t масштабу, а $\Delta x'$ — *полное* число делений на всей длине линейки.

В результате такого рода измерений наблюдатель, о котором шла речь, установит, что продольные размеры тел, движущихся равномерно со скоростью, сравнимой со скоростью света, сокращаются — они подвержены «лоренцеву сокращению». Поперечные же размеры остаются неизменными.

§ 4. О сложении скоростей

Речь идет о следующей задаче. Дано, что тело b движется прямолинейно и равномерно в направлении положительной оси x и что скорость его относительно тела B, которое в свою очередь движется равномерно и прямолинейно в том же направлении, равна $\beta_2 c$. Скорость B относительно неподвижного (в системе x, t) A обозначим $\beta_1 c$. Требуется определить скорость (β) b относительно A.

Совместим B с началом системы координат x', t', а A с началом системы отсчета x, t. Если координаты b в системах B и A обозначим соответственно x'_b, t'_b и x_b, t_b, то согласно (I.28) и (I.29)

$$x_b = \frac{x'_b + \beta_1 c t'_b}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \tag{I.37}$$

$$t_b = \frac{t_b' + \frac{\beta_1 x_b'}{c}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{I.38}$$

Дифференцирование уравнений (I. 37) и (I. 38) дает

$$dx_b = \frac{dx_b' + \beta_1 c dt_b'}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \tag{I.39}$$

$$dt_b = \frac{dt_b' + \beta_1 \frac{dx_b'}{c}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{I.40}$$

Деля правые и левые части уравнения (I. 39) на соответствующие выражения (I. 40), получаем известную формулу сложения релятивистских скоростей

$$\beta = \frac{dx_b}{cdt_b} = \frac{\frac{dx_b'}{c} + \beta_1 dt_b'}{dt_b' + \beta_1 \frac{dx_b'}{c}} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{1 + \beta_1\beta_2}, \tag{I.41}$$

$$\beta_2 = \frac{dx_b'}{cdt_b'}, \qquad \beta_1 = \frac{dx_B}{cdt_B}.$$

При $\beta_1 \simeq 1$ и $\beta_2 \simeq 1$ $\beta \simeq 1$. При $\beta_1 \ll 1$ и $\beta_2 \ll 1$ $\beta \simeq \beta_1 + \beta_2$.

§ 5. О Доплер-эффекте звуковых волн и о «светоносном эфире»

Если рассматривать Доплер-эффект звуковых волн, то частоту приема (обозначим ее $\nu_x(R)$) в случае I (см. рис. 1), когда *«источник»* движется со скоростью v относительно неподвижного приемника, нельзя отождествлять с частотой $\nu_x(S)$ колебаний, регистрируемых в случае II, когда *приемник* движется с той же скоростью v относительно покоящегося источника (при одной и той же собственной частоте ν_0 передатчика — источника).

Если в уравнении (I.3) (см. примеч. на стр. 30) положить $\Delta T_A = \Delta T_B$ и применить его к случаю I приема звуковых волн от движущегося источника, то это уравнение дает

$$\nu_x(R) \times (1 \pm \beta) = \nu_0, \tag{I.42}$$

где $\beta = v/u$ и u — скорость распространения звука.

В случае же II при неподвижном источнике и движущемся приемнике те же рассуждения при $\Delta T_B = \Delta T_A$ приводят к соотношению

$$\nu_x(S) = \nu_0(1 \mp \beta) \tag{I.43}$$

На этот раз мы не вводим обозначения ν_x'; частоты — $\nu_x(R)$, стоящая в левой части уравнения (I.42) при знаке минус, и $\nu_x(S)$ уравнения (I.43) при знаке плюс — дают величину, которая раньше была обозначена ν_x'. Теперь $\nu_x(R) \neq \nu_x(S)$ и лишь при $v/u \ll 1$ $\nu_x(R) \simeq \nu_x(S)$. В данном случае мы не подчиняли наши выводы требованию, чтобы частота приема зависела лишь от *относительной* скорости приемника и излучателя, и не предполагали, что нельзя различать между двумя возможностями: 1) источник движется относительно неподвижного приемника B и 2) приемник B движется относительно неподвижного источника A (в том и другом случае равномерно и с одинаковой относительной скоростью v). В данном примере, когда имеется в виду распространение звука, эти два случая не эквивалентны, так как в одном случае *приемник* движется относительно *среды*, передающей звук, в другом же случае относительно этой среды движется *источник*. A priori ниоткуда не следует, что это различие не влияет на результат. Наоборот, физически эти две ситуации различны.

Отсюда следует , что если бы свет распространялся в *вещественной* среде — «светоносном эфире», то симметрия между ситуациями I и II (в указанном нами выше смысле) не имела бы места и те выводы, к которым мы пришли, исходя из предположения о такого рода симметрии, были бы лишены какого-либо основания. Более того, они оказались бы противоречащими опыту, поскольку в этом случае и в применении к свету должны были бы оправдываться соотношения вида (I.42) и (I. 43), тогда как на опыте подтверждена противоречащая им (при $\beta \simeq 1$) формула (I. 14) Доплер-эффекта для смещения частоты принимаемого света, вызванного относительным движением источника и приемника.

Разнообразные попытки обнаружить движение Земли относительно «светоносного эфира» в экспериментах, выполненных в конце прошлого века (а затем подтвержденных и значительно позже), привели к отрицательному результату.

Здесь мы лишь мимоходом коснулись начала той эволюции в науке на протяжении четверти века, включая два последних десятилетия прошлого столетия, которая и привела Эйнштейна к постулированию принципа относительности и исходных идей развитой затем и развиваемой и до настоящего времени (в ее обобщенном виде) теории относительности. Этот этап истории физики заполняет много ее страниц, которые нами полностью опущены.

Преобразования (I.23) и (I.27), а следовательно, если угодно, и весь формальный аппарат частной теории относительности были открыты Г. Лоренцем. Однако в поисках решения задач, выдвинутых в то время экспериментом, Лоренц все еще исходил из гипотезы о существовании вещественной среды — «светоносного эфира». Для объяснения же отрицательных результатов многообразных попыток обнаружить движение Земли относительно этой среды он вводил различные гипотезы, объяснявшие известные в то время результаты определенного круга экспериментов.

Эйнштейн пошел существенно дальше, положив в основу своей теории утверждение о том, что и любые эксперименты вообще не могут привести к обнаружению движения относительно «светоносного эфира» или же движений в этой гипотетической среде, поскольку такого эфира как вещественной среды, в которой распространяется свет (и электромагнитные волны вообще), не существует.

Мы полностью опускаем здесь все, что относится к той дискуссии, которая была вызвана в науке и философии в связи с обсуждением принципиальных основ теории относительности и которая продолжалась вплоть до нашего времени.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА, ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ОДНОВРЕМЕННОСТИ И «ПАРАДОКС БЛИЗНЕЦОВ»

Рассматриваются два партнера A и B и так же, как и в гл. I, определенный цикл их относительных движений. Один из них (A) за время указанного цикла покоится в одной и той же инерциальной системе (I). Другому (B) в начальный момент времени мгновенно сообщается значительное ускорение, в результате которого он в течение времени T_0 (определенного в системе I) удаляется от A на расстояние x_0, двигаясь с постоянной во времени скоростью $c\beta_0$. Затем B получает мгновенное ускорение в направлении к A и возвращается в исходное положение, двигаясь в обратном направлении с той же скоростью $c\beta_0$ в течение того же времени T_0.

Часы, путешествовавшие вместе с B, в конце цикла окажутся отставшими от идентичных часов, покоившихся вместе с A в системе I: показание их $2T_0'$ в конце цикла равно $2T_0\sqrt{1-\beta_0^2}$, тогда как показание часов A равно $2T_0$. Если β_0 близко к единице, то $2T_0' \ll 2T_0$. Основываясь на уравнениях Лоренца, указанный результат ($2T_0' = 2T_0\sqrt{1-\beta_0^2}$) можно получить, исходя из двух различных предположений.

Версия № 1: A покоится, а B *движется*, сначала удаляясь от A и затем приближаясь к нему, как это было описано выше. Версия № 2: B покоится, а (с точки зрения B) *движется* A, также удаляясь на некоторое расстояние от B в течение первой половины цикла и затем приближаясь к нему.

При том и другом способе рассмотрения *ход* движущихся часов оказывается замедленным относительно покоящихся часов. В соответствии с этим согласно версии № 1 часы B отстают от часов A (в течение как первой, так и второй половины цикла) и в конце всего цикла в целом, как уже сказано выше, показывают время $2T_0' < 2T_0$.

Согласно версии № 2 (в кажущемся противоречии с версией № 1) ход *часов A замедлен* относительно B. Однако если наблюдатель B проследит за тем, как при осуществлении описанного цикла движений изменяются показания часов A то он установит следующую хронометрическую (или хронологическую) последовательность этих изменений.

За время первой половины цикла в течение времени T_0' по его B часам, так же как и за время T_0' второй половины цикла, часы A, за которыми он наблюдает на расстоянии, отстают от его — B часов. Однако в представлении наблюдателя B в середине цикла, в момент времени $t' = T_0'$ (по часам B), происходит скачкообразный сдвиг показаний часов A. В момент времени

$t' = T_0'$ они в результате этого сдвига мгновенно уходят вперед на $\frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T_0'$ своих делений.

Согласно версии № 1 такие скачки в показании движущихся часов B не имеют места.

Конечный результат сравнения показаний часов A и B не зависит, разумеется, от способа рассмотрения и в обоих случаях определяется уже полученным в гл. I соотношением $2T_0' = 2T_0\sqrt{1-\beta_0^2}$.

Мы говорили о «показаниях часов», определяемых положением стрелок на их циферблатах. Но то же относится к течению во времени любых процессов, если отвлечься от побочных влияний, какие могут оказать значительные, испытываемые телом (или системой тел) B, ускорения и связанные с ними «перегрузки», т. е. если эти побочные влияния исключить.

Согласно теории относительности мы вынуждены «привязывать» временны́е координаты (временны́е представления) к определенному пространственному базису — определенной пространственной системе отсчета.

Согласно версии № 1 инерциальная система отсчета, в которой проводится рассмотрение (система I), остается неизменной на протяжении времени всего рассматриваемого процесса.

Если же рассматривать задачу, придерживаясь версии № 2, то в ходе описания — в определенный момент времени $t' = T_0'$ — мы изменяем систему отсчета, переходя от системы отсчета (система II), в которой B покоится в течение *первой* половины цикла, к другой системе отсчета (системе III — рис. 7), в которой B неподвижен за время *второй* половины цикла.

Результат измерения отрезков времени в этом последнем случае, с точки зрения теории относительности, в известном смысле аналогичен тому, какой имел бы место, если бы, измеряя расстояние между двумя определенными точками с помощью масштабной линейки, мы осуществили измерения следующим образом. Отсчитав число делений, определяющих положение одной из этих точек, внезапно сдвинули бы масштабную линейку на определенное число ее делений и уже после этого сделали бы отсчет положения второй из отмеченных точек по той же масштабной линейке, остающейся снова неподвижной после указанного внезапного перемещения.

Для определения искомого расстояния по разности начального и конечного отсчетов нам пришлось бы учесть (введя соответствующее дополнительное слагаемое) и длину смещения самой линейки.

В предыдущей главе мы наметили схему вывода преобразований Лоренца, исходя из весьма общих положений. При этом нами были опущены многие оговорки, которыми должен был бы быть дополнен такой упрощенный вывод для того, чтобы оттенить все звенья логической цепи рассуждений, и мы лишь в неявном виде подразумевали определения некоторых фундаментальных понятий.

Прежде всего необходимо уточнить понятие одновременности. Соотношения Лоренца приводят к относительности представлений об одновременности событий, о чем мы уже упоминали. Выяснению своеобразия вытекающих отсюда следствий и посвящено изложенное в этой и следующей главах. В дальнейшем будем основываться на преобразованиях Лоренца.

Обратим внимание читателя на рис. 4. Здесь изображены две одномерные «решетки» — две цепочки часов, расположенных в узлах этих решеток. Одна из цепочек (нижняя) покоится в определенной инерциальной системе. Эту цепочку (A) будем *считать* неподвижной. Другая цепочка (B) движется со скоростью, близкой к скорости света, в направлении направо. Пусть это будет направление положительных осей x и x'. Положения всех часов цепочки A в выбранный нами момент времени (определенный *в системе* A) совпадают в пространстве с положением соответствующих часов системы B.

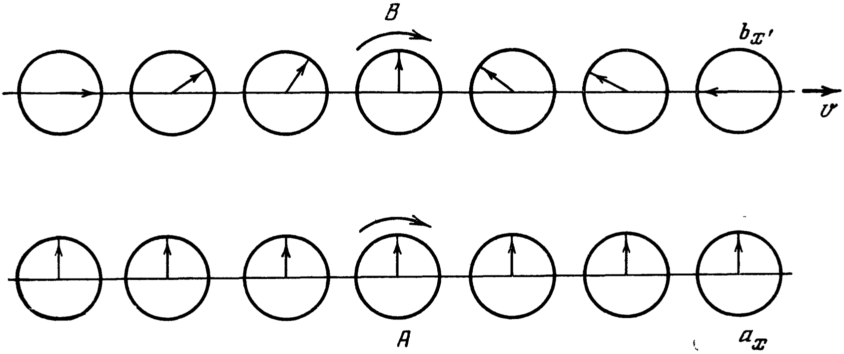


Рис. 4

Положим, что мы фиксируем положения стрелок часов в начальный (для системы A) момент времени, т. е. что в выбранный нами момент времени стрелки часов цепочки A все стоят на нулевом делении.

Надо оговорить, что все часы системы A (так же как и системы B) синхронизированы (сверены) *каждые в своей собственной системе.* Из этого следует, что если мы выбрали определенный (для системы A) момент времени, то показания всех часов $A \ldots a_x \ldots$ одинаковы, и, поскольку мы предположили, что речь идет о начальном моменте счета времени, стрелки всех этих часов стоят на нуле (как и показано на рис. 4).

В цепочке B выделим определенные часы (центральные на рис. 4), стрелку которых поставим также на нулевое деление. После этого положения стрелок всех других часов определены уравнениями Лоренца, если соответствующие расстояния (определяемые «номером» равноотстоящих часов и «шагом» цепочек) известны и если часы $b_{x'}$ все синхронизированы в своей собственной системе покоя. Согласно тому, что нами обусловлено, стрелки всех часов $A \ldots a_x \ldots$ стоят на нулевых делениях их циферблатов, тогда как, как легко видеть и как следует из уравнения (I.27) (где надо положить $t = 0$), стрелки часов $b_{x'}$ расположены так, как схематически изображено на рис. 4. Это значит, что мы фиксировали положения часов $b_{x'}$ в *разные моменты времени в их собственной системе.*

Если вместе с часами $b_{x'}$ движутся неподвижные относительно них наблюдатели, то при выборе момента времени так, как указано выше, все они увидят, что стрелки совпадающих с ними часов a_x стоят на нуле, но в соответствии с показаниями их собственных часов они придут к заключению, что зафиксированные таким образом положения стрелок различных часов a_x относятся к разным моментам времени. В противоположность наблюдателю A они фиксируют эти положения *неодновременно*: наблюдатели, расположенные направо от A, т. е. удаленные от A в направлении движения,— раньше, при удалении против направления движения — позже начального момента времени (как это следует из уравнения (I.27)).

Напомним, как производится синхронизация двух часов на расстоянии.

Положим, что a_1 и a_2 — часы двух наблюдателей, покоящихся в определенной инерциальной системе (например, A), и что расстояние $x_{a_1a_2}$ между ними (определенное в той же системе) уже измерено и известно. a_1 посылает световой сигнал в направлении a_2, положим, в тот момент, когда стрелка его часов проходит через нуль. В момент получения сигнала a_2 ставит стрелку своих часов на деление $x_{a_1a_2}/c$, поскольку известно, что в любой инерциальной системе свет распространяется в пустоте со скоростью c и что, следовательно, расстояние $x_{a_1a_2}$ сигнал проходит за время $x_{a_1a_2}/c$. Для дальнейшего важно подчеркнуть, что такое определение положения «стрелок часов», по которым отсчитываются интервалы времени, определяется не какими-либо условными соглашениями, которые могли бы допускать возможность по произволу передвигать стрелки часов, а вытекающими из объективных законов природы соотношениями. (Выбор начала счета времени остается, разумеется, произвольным.)

В этой связи существенно еще отметить, что если *достаточно медленно* перемещать часы a_2 в направлении к a_1 или, наоборот, a_1 к a_2 и в результате такого перемещения совместить в пространстве a_1 с a_2, то синхронизм данной пары часов в пределах сколь угодно малой погрешности Δt не нарушится. То, что a_1 и a_2 синхронны, может быть проверено тогда уже непосредственно без необходимости обмена световыми сигналами с учетом конечного времени их распространения.

Речь идет о том, что показания часов a_1 после их совмещения с часами a_2 совпадут с показаниями этих последних часов a_2 со сколь угодно большой точностью — с точностью до величины порядка [1]

$$\Delta t = \frac{1}{2}\frac{ux_{a_1a_2}}{c^2}, \qquad (\text{II}.1)$$

[1] Формула (II. 1) прямо следует из «формулы замедления». Если показание часов a_2, определенное на основе правила синхронизации в момент начала их медленного продвижения к a_1, есть t (и таково же показание часов a_1),

где u — скорость, с которой перемещались часы a_2. Таким образом, $\Delta t \to 0$ при $u \to 0$, тогда как $T \to \infty \left(T = \frac{x_{a_1 a_2}}{u}\right)$.

В дальнейшем мы рассмотрим ряд примеров, имея в виду близнецов или ровесников, совершающих космические полеты со скоростью, близкой к скорости света. Используя такие примеры, мы попытаемся оттенить парадоксы психологического характера, которые при этом возникают. Предварительно, однако, приведем снова вывод «формулы замедления» (I.13), рассматривая при этом цепь логических рассуждений в обратном порядке.

Иначе говоря, приведем этот вывод, основываясь теперь уже на преобразованиях Лоренца. Формула «замедления» хода часов следует непосредственно из уравнения (I.29).

В самом деле, положим, что часы B находятся в начале координат движущейся системы x', t'. Время t'_B, показываемое этими часами, дает уравнение (I.29), если в нем положить $x' = 0$. Тогда согласно (I.29)

$$t = \frac{t'_B}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{II.2}$$

или

$$t'_B = t\sqrt{1-\beta^2}, \tag{II.3}$$

где t'_B и t — интервалы времени, определенные соответственно по движущимся часам B и по часам неподвижной системы x, t.

На первый взгляд может показаться, что налицо противоречие (II. 2) с тем соотношением

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{II.4}$$

которое вытекает из уравнения (I. 27), если в нем положить $x = 0$.

то, если бы мы пренебрегли (в силу малости значения u/c) эффектом замедления движущихся часов, то, как a_1, так и a_2 в момент их совмещения в пространстве показали бы время $t + \Delta t$, где Δt — время нахождения a_2 «в пути», определенное по неподвижным часам a_1.

Если учесть эффект замедления, то показание часов a в момент совмещения будет $t_{a_1} = t + \Delta t$, а показание движущихся часов a_2 будет $t_{a_2} = t + \Delta t'$, где согласно (I. 13) $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$. Здесь $\Delta t = \frac{x_{a_1 a_2}}{u}$ и $x = x_{a_1 a_2}$ — начальное расстояние $x_{a_2} - x_{a_1}$, определенное в системе A.

Поскольку $(u/c) \ll 1$, разность показаний часов в момент совмещения равна

$$t_{a_1} - t_{a_2} \simeq \Delta t - \Delta t' \simeq \Delta t\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right] \simeq \frac{1}{2}\frac{xu}{c^2}.$$

В действительности здесь нет противоречия, поскольку величины t и t' в (II. 2), с одной стороны, и в (II. 4), с другой стороны, имеют различный смысл.

Обратим внимание читателя на рис. 4, где изображены две «цепочки» часов — ряд часов a_x и ряд часов $b_{x'}$.

Формула (II. 2) следует из формулы (I. 29), если, как мы уже сказали, в этой последней формуле положить $x' = 0$; формула (II. 4) есть следствие

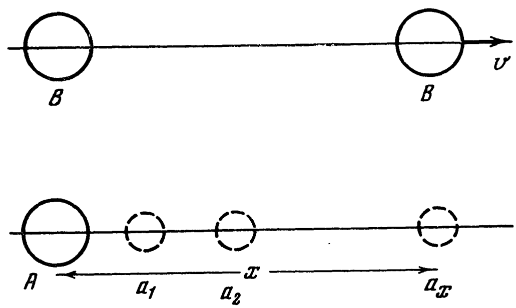


Рис. 5

(I. 27) при $x = 0$. Таким образом, в числителе дроби в правой части уравнения (II. 2) стоит показание (t') часов, находящихся в начале координат системы x', t', а в числителе правой части равенства (II.4)—показание часов, совмещенных с началом координат другой системы — системы x, t.

Условимся о следующем: 1) в начале координат x', t' находятся часы B; 2) начало координат x, t совмещено с часами A (см. рис. 4).

Первое условие уже учтено в (II. 2), поскольку координату t' мы снабдили буквой B.

В соответствии со вторым условием также и в (II. 4) мы буквой A отметим координату t. Тогда соотношение (II. 4) можно переписать в виде

$$t' = \frac{t_A}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

(Изображенное на рис. 4 соответствует предположению, что «неподвижна» система A, а движется система B. Сейчас для нас не важно, которую из двух систем (A или B) мы «считаем» движущейся и которую «неподвижной». Одна из них движется в ту или иную сторону *относительно* другой. Расстановка стрелок часов в случае этих двух предположений различна. Сейчас мы и не имеем в виду именно ту расстановку стрелок часов, которая показана на рис. 4.)

Для нас в данный момент существенно лишь следующее. В формуле (II.2) мы в правой части равенства подразумеваем отсчет по циферблату часов B, или, точнее, *разность* двух отсчетов: отсчета, сделанного в какой-то момент времени t' по этим часам B, и отсчета *по тем же часам* B в нулевой момент времени $t' = 0$ (к которому и относится положение часов B, изображенное на рис. 4).

Вместе с тем в левой части (II. 2) величина t получена как разность отсчетов *по двум различным часам* ряда (или цепочки) часов a_x, а именно, разность отсчетов по циферблатам различных часов из ряда a_x, оказывающихся совмещенными в пространстве с B — противостоящих B, в разные моменты времени — заданный момент t'_B и нулевой момент $t'_B = 0$ (рис. 5).

В обоих случаях, т. е. движутся ли B (и все $b_{x'}$) относительно системы A или, наоборот, весь ряд часов a_x (включая и A) относительно B, если речь идет о величине, стоящей *в левой части* уравнения (II. 2), имеется в виду разность отсчетов по двумя *различным* часам из ряда a.

В случае же (II. 4) то, что выше было сказано в отношении часов B, должно быть отнесено к часам A: t_A есть разность показаний *одних и тех же часов* (A). Вместе с тем t' в этом случае есть разность отсчетов *по двум различным часам* — часам из ряда bx', противостоящим в различные моменты времени одним и тем же часам A.

Таким образом, если мы в наших обозначениях опустим индексы A и B и соотношения (II. 2) и (II. 4) напишем соответственно в виде

$$t_{(x'=0)} = \frac{t'_{(x'=0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{II.5}$$

$$t'_{(x=0)} = \frac{t_{(x=0)}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{II.6}$$

то из только что сказанного вытекает, что значения t и t' в этих соотношениях имеют различный смысл и (II. 6) отнюдь не противоречит (II. 5).

Хотя согласно (II.2) «формула замедления» (II.3) получена уже сразу как непосредственное следствие уравнения (I.29) для перехода от движущейся — штрихованной системы отсчета к неподвижной — нештрихованной, все же мы рассмотрим и притом подробно еще два варианта того же вывода.

Вариант № 1. Будем считать B, находящегося в начале системы штрихованных координат, движущимся, а цепочку часов $A \ldots a_x \ldots$ неподвижной,

Сравним показания часов B в различные моменты времени (в соответствии с рис. 5), основываясь, в отличие от вывода (II. 2), на этот раз на уравнении (I. 27).

В начальный момент $t'_B = t = 0$ положение B в пространстве совпадало с A. По истечении какого-то времени (t'_x и t_x в соответствующих системах) часы B, двигаясь со скоростью v вправо, окажутся совмещенными в пространстве с определенными часами a_x неподвижной цепочки часов A, a_1, $a_2, \ldots, a_x$ (рис. 5).

Показания t'_x часов B определяются теперь уравнением (I. 27) Лоренца, если известны показание t_x часов a_x и расстояние x этих последних часов от начала A ««неподвижной»» цепочки часов.

Согласно (I. 27)

$$t'_x = \frac{t_x - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{II.7}$$

Но

$$x = vt_x = \beta c t_x. \tag{II.8}$$

Подставляя (II.8) в (II.7), получаем

$$t'_x = \frac{t_x - \beta^2 t_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} t_x = \sqrt{1-\beta^2} t_x. \qquad \text{(II.9)}$$

Если продолжительность половины цикла, определенная по часам A и B, есть T_0 и T'_0 соответственно, то, полагая $t_x = T_0$, имеем согласно (II.9)

$$T'_0 = T_0 \sqrt{1-\beta^2}. \qquad \text{(II. 10)}$$

Если B после мгновенной остановки возвращается с той же скоростью v в направлении к A, то, очевидно, что в соответствии с (II.10)

$$2T'_0 = 2T_0 \sqrt{1-\beta^2}. \qquad \text{(II.11)}$$

Вариант № 2. Можно, однако, получить тот же результат (II.11), основываясь снова на уравнении (I.29), но полагая на этот раз *B неподвижным*, а движущейся всю цепочку часов a_x. Условимся так же, как и раньше, что в начальный момент времени положение B в пространстве совпадает с A, т. е. что $x_B = x'_A = 0$ при $t = t' = 0$.

Поскольку рассматривается тот же цикл перемещений B относительно A (но мы считаем B неподвижным), наблюдателю, неподвижному вместе с B, представляется следующая последовательность движений часов a_x: за время первой половины цикла этот ряд часов проносится мимо него со скоростью v, двигаясь влево. Затем, после мгновенной остановки, следует перемещение с такой же скоростью вправо.

В начале цикла, так же как и в конце его, часы B оказываются совмещенными в пространстве с часами A.

Здесь мы ведем рассмотрение, предполагая, что B в любой момент своего времени наблюдает только противостоящие ему (совпадающие с ним в пространстве) часы из ряда $A \ldots a_x \ldots$, оставляя в стороне вопрос о том, как представляются ему показания других, удаленных от него, часов.

Положим, что наблюдатель B отмечает (регистрирует) положение стрелок тех часов из ряда a_x, которые в данный момент времени проносятся мимо него. Координата x' остается все время равной нулю (x' есть координата системы, в начале которой мы и предполагаем находящимся B).

Показания часов a_x, проносящихся мимо часов B (которые считаем неподвижными), за время первой половины цикла определяются, следовательно, уравнением (I.29), если в нем положить $x' = 0$.

Согласно уравнению (I.29) имеем

$$t = \frac{t'_B}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad \text{(II.12)}$$

Формула (II.12) отличается от (II.2) тем, что теперь мы *считаем* B неподвижным, а ряд часов $A \ldots a_x \ldots$ движущимся относительно B.

В соответствии с условиями задачи все часы a_x (включая и A) все время *покоятся в одной и той же инерциальной системе координат*. Учитывая это, можно утверждать, что формула (II.12) остается

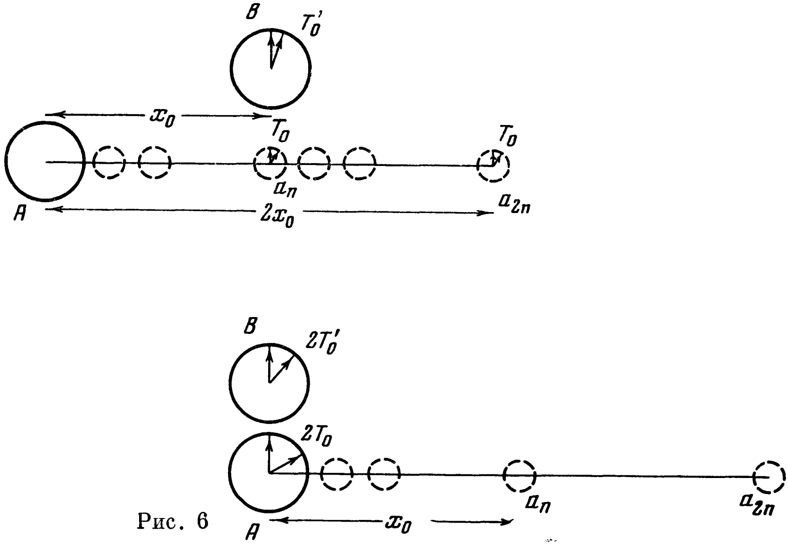


Рис. 6

справедливой и в течение второй половины цикла, как вытекающая из преобразований Лоренца. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе, что одновременно с изменением направления скорости v на противоположное начало координат системы A переносится из A в a_{2n} (рис. 6) вправо — в направлении положительной оси x на расстояние $2\ x_0$, и что при этом показания *всех* часов a_x системы A и часов B системы B (речь идет только об этих часах B системы B) остаются неизменными. Здесь имеется в виду момент времени t, т. е. момент времени с точки зрения A. Этот мысленный перенос начала координат системы A приводит к следующему.

Если начало координат при $t \geqslant T_0$[1] совпадает с a_{2n} и если бы часы a_{2n} и при $t \leqslant T_0$ двигались относительно A так же (в том же направлении и с той же скоростью), как они движутся при $t \geqslant T_0$, то было бы выполнено следующее условие: стрелка часов a_{2n} в тот момент, когда они проносятся мимо B (которого мы считаем

[1] $t = T_0$ — определенный в системе A момент времени мгновенного изменения, с точки зрения A, направления скорости B на противоположное в «конечном пункте» пути B, т. е. при максимальном удалении его от A. Следовательно, стрелка часов a_{2n} в только что указанный момент времени стоит на делении T_0 (см. рис. 6).

неподвижным), стояла бы на нулевом делении их (часов a_{2n}) циферблата, тогда как при этом часы B показывали бы время t', также равное нулю[1].

В соответствии же с уравнениями Лоренца это, только что сформулированное условие достаточно для того, чтобы соотношение (II.12) было справедливо и при $t \geqslant T_0$. То, что теперь система $A \ldots a_x \ldots$ движется в направлении положительных x, тогда как раньше скорость v была направлена в сторону отрицательных x, не имеет значения, поскольку рассматриваются часы B, положение которых определяется координатой $x'_B = \text{const} = 0$. Если $x'_B = 0$, то в формулу (I.29) входит лишь квадрат скорости, и знак скорости (направление движения) системы $A \ldots a_x \ldots$ при осуществлении преобразования Лоренца роли не играет.

Поскольку, следовательно, и при $t' > T'_0$ (и $t_A > T_0$) соотношение (II.12) остается справедливым, полагая $t = 2T_0$ и $t' = 2T'_0$, согласно (II.12) получаем

$$2T_0 = \frac{2T'_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

т. е. по-прежнему

$$2T'_0 = 2T_0\sqrt{1-\beta^2}, \qquad \text{(II.13)}$$

несмотря на то, что мы считали часы B неподвижными, тогда как двигались часы A.

Во втором, рассмотренном только что варианте вывода (так же как и в первом) существенно, конечно, то, что мы знали, т. е. что было дано заранее, что система A в течение *всего времени* $2T'_0$ инерциальна и что часы B мы *рассматривали как идеальные*.

Однако здесь сразу возникает кажущееся противоречие с предыдущим выводом, основанным на предположении, что неподвижны $A \ldots a_x \ldots$, а движутся B.

Действительно, соотношения (II.12) и (II.13), на первый взгляд, казалось бы, приводят к выводу, что *ход* покоящихся часов (в данном случае B) *замедлен* в сравнении с движущимися часами — на этот раз $A \ldots a_x \ldots$, тогда как раньше мы справедливо заключили, что, наоборот, движущиеся часы отстают от покоящихся.

---

[1] Действительно, если бы система a_x двигалась с самого начала так, как только что указано, и если t — показание тех часов a_{2n}, с которыми мы совместили новое начало координат, то, поскольку мы выбрали момент времени (переноса начала координат) так, что $t = T_0$ (t для всех a_x одинаково), в момент времени $t = 0$ (и $t' = 0$) совпадающими в пространстве с B оказались бы часы a_{2n}, поскольку a_{2n} в момент времени $t = T_0$ находятся на расстоянии x_0 от B вправо (см. рис. 6) в направлении положительных x и поскольку перемещения всех a_x за время T_0 равно x_0.

Уточним, однако, те условия, при которых только что упомянутый поспешный вывод из соотношения (II.12), а следовательно, и отмеченное только что кажущееся противоречие имели бы на самом деле место.

Положим, что мы хотим сверить целую серию идентичных часов (a_x) с определенными стандартными часами (B). Предположим, что все часы a_x сверены между собой, и мы знаем, что все они идут синхронно. Представим себе, что часы a_x расположены на равномерно движущейся ленте конвейера так, что расстояния между каждой парой соседних часов одинаковы.

Если известно, что показания всех часов a_x в любой «момент времени» одинаковы, т. е. что они синхронны, то сверить ход этих часов a_x, проносящихся вместе с лентой конвейера мимо покоящихся часов B, с ходом этих последних часов можно, например, так. Предположим, что мы фотографируем на ленте киноаппарата, неподвижного относительно B, циферблаты *различных* часов a_x и *одних и тех же* часов B каждый раз в момент совпадения такой пары часов в пространстве, т. е. всегда при $x' = 0$. Затем, просматривая киноленту, сравниваем положения стрелок соответствующей пары часов (a_x и B).

Мы предположили уже, что все a_x синхронны между собой. Если a_x лежат на ленте конвейера, движущейся со скоростью v, то при указанных выше условиях результат описанного только что сравнения определяется формулой (II.12) и, казалось бы, приводит к неверному заключению, что неподвижные часы B идут быстрее движущихся часов a_x, поскольку для любой пары одновременных изображений циферблатов на киноленте мы обнаружим, что согласно (II.12) $t > t'$ — часы a_x опережают B.

Где же допущена ошибка?

Мы потребовали, чтобы все часы a_x были синхронизированы между собой. Это условие выполнено, однако, с той оговоркой, что часы a_x приведены к синхронизму в *их собственной системе покоя*, т. е. что показания всех часов a_x в любой момент времени представляются одинаковыми наблюдателю, *движущемуся вместе с лентой конвейера* (т. е. что речь идет о моменте «времени наблюдателя», покоящегося на конвейере).

Для наблюдателя же B, мимо которого эта лента проносится со скоростью, сравнимой со скоростью света, часы a_x уже не представляются идущими в указанном смысле синхронно (см. рис. 4), и поэтому описанный выше метод сверки хода часов несостоятелен, а полученный таким путем вывод неверен (если, конечно, лента конвейера движется со субсветовой скоростью).

Вместе с тем мы могли бы, рассматривая в *отдельности* первую и вторую половины полного цикла перемещений часов $A \ldots a_x \ldots$, применить рассуждения, которые были приведены нами в варианте № 1 предложенного выше вывода, и в результате пришли бы к правильному заключению о том, что ход любых движущихся часов из ряда $A...a_x...$ (в том числе и часов A) замедлен в сравнении с неподвижными часами B. Но если только что высказанное утверждение верно, то как примирить его с конечным результатом — формулой (II.13)? Казалось бы, мы снова наталкиваемся на противоречие.

Дело в том, что если сравнить показания B и A после завершения всего цикла, т. е. по истечении времени $t = 2T_0$, то в *конечном итоге* в соответствии с формулой (II.13) обнаружится, что *B отстали* от A. Получается так, что путем правильных рассуждений мы приходим к выводу, что все часы ряда $A...a_x...$ (в том числе и A) идут медленнее, чем B, а в *конечном итоге* обнаруживаем, что те же часы A (из ряда $A...a_x...$) *ушли вперед* в сравнении с B.

Рассматривая ряд часов $A...a_x...$, лежащих на условно введенной нами ленте конвейера, мы, вместе с тем, намеренно выделили из ряда часов b_x одни только часы B.

Для того чтобы разрешить возникшее противоречие, следует теперь ввести в рассмотрение всю совокупность часов b_x и особое внимание, в частности, уделить тем из них, которые в определенный момент времени — момент обращения скорости часов B (и всех часов b_x) совмещены в пространстве с часами A. (Здесь мы снова рассматриваем весь цикл с точки зрения системы A.)

Далее убедимся в том, что в словах «в определенный момент времени — момент обращения скорости часов B (и всех часов b_x)» кроется существенная неопределенность. Момент времени, о котором идет речь, условиями задачи определен неоднозначно. Однако эту неоднозначность можно устранить, если принять во внимание соответствующие оговорки.

Предположим, что наблюдатель B и часы B так же, как и все b_x, находятся в контейнерах (или капсулах), которым воображаемыми «ракетными двигателями» может быть сообщена любая скорость за сколь угодно малое время. В дальнейшем будем иметь в виду три различные инерциальные системы, которые и обозначим римскими цифрами — *I*, *II*, *III* (рис. 7). Эти инерциальные системы таковы. Система *I* — это система A, т. е. такая инерциальная система координат, в которой все a_x (в частности, и A) *за все время* $2T_0$, т. е. за все время полного цикла рассматриваемых перемещений, согласно условиям задачи неподвижны. Система *II* — инерциальная система, в которой B покоится в течение *первой* половины цикла, и система *III* — система, в которой B представляется неподвижным за время *второй* половины цикла.

В дальнейшем там, где это допускают соображения размерности, в обозначении скорости $v = \beta c$ будем опускать множитель c, т е., говоря о скорости, будем подразумевать скорость β, выраженную в долях скорости света.

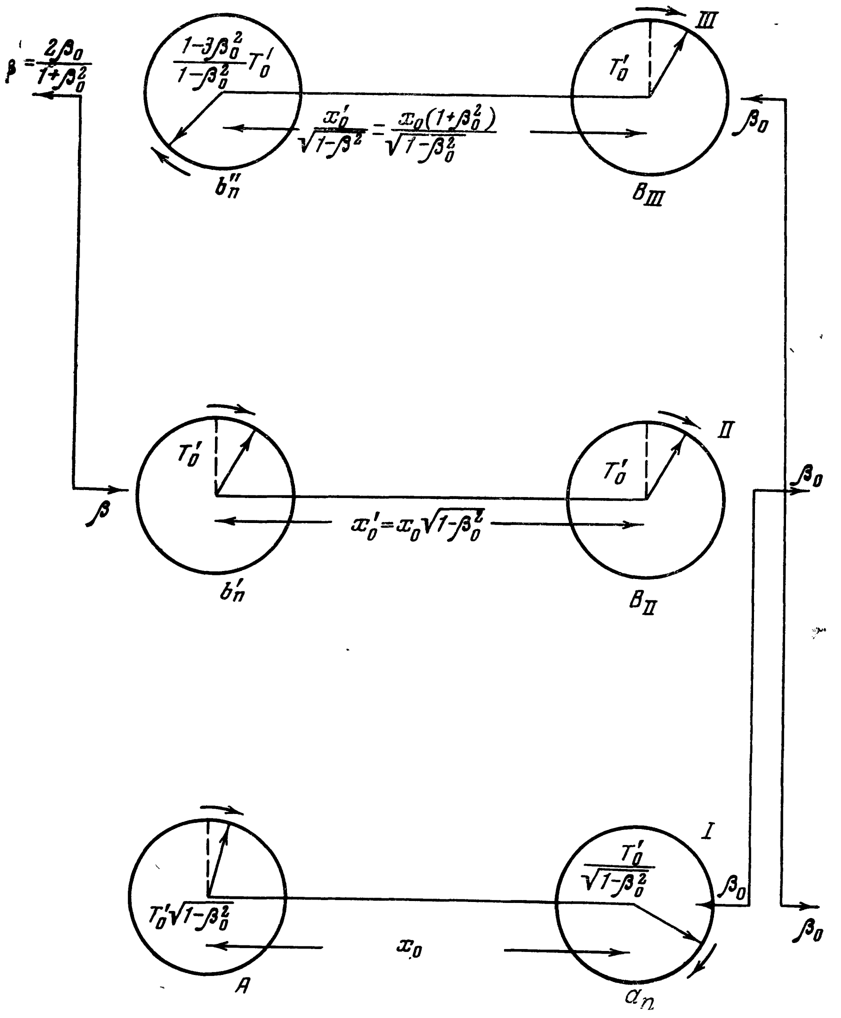


Рис. 7*

* С точки зрения A, в течение (времени T_0' по часам B) первой половины цикла B движется вправо относительно A и a_n. Система II — инерциальная система, начало которой движется в течение этого промежутка времени вместе с B, т. е. система II — та, в которой B покоится (при $0 \leqslant t' \leqslant T_0'$).

За время второй половины цикла ($T_0' \leqslant t' \leqslant 2T_0'$) B неподвижен в инерциальной системе III и движется вместе с ней влево относительно A (а также a_n и b_n'). t' (и T_0') — время, определяемое в системе II.

Из сказанного следует, что система II (вместе со всеми неподвижными в ней объектами) движется с постоянной скоростью β_0 вправо относительно системы I (как показано на рис. 7). Система III движется относительно системы I с той же постоянной скоростью β_0 влево (как указано стрелками на рис. 7). Наконец, относительно системы II система III движется также влево, но с показанной на рис. 7 скоростью $\beta > \beta_0$.

Первая половина цикла завершается в момент $t = T_0$ (определенный в системе I) или в момент времени $t' = T_0'$, если его определять в системе II.

Уточним теперь, что в тот момент времени, когда все *синхронизированные в системе II часы b_x* показывают время $t' = T_0'$, ракетные двигатели, о которых было упомянуто, сообщают им соответствующий импульс так, что скорость часов b_x относительно a_x меняет знак практически мгновенно.

После сделанной оговорки, что имеется в виду система II, момент обращения скорости становится уже определенным однозначно.

Представим себе двух наблюдателей, находящихся в соответствующих контейнерах, получающих в определенный выше момент времени импульс, который меняет знак их скорости относительно a_x на противоположный. Один из этих наблюдателей, а именно B,— тот, положение которого в пространстве в начале и в конце всего цикла совпадает с A. Другой, назовем его b_n',— тот, который оказывается совмещенным в пространстве с A в момент, когда его (b_n') часы показывают время $t' = T_0'$ и когда скорость его относительно A меняет знак (в результате импульса, сообщенного упомянутыми выше ракетными двигателями).

Выполняя инструкцию, полученную, скажем, от B, наблюдатель b_n' включит свой двигатель в момент, когда его «идеальные»

Изображенные на рисунке пары объектов ($A - a_n$), ($b_n' - B_{II}$) и ($b_n'' - B_{III}$), расположенные на горизонтальных прямых, неподвижны каждая в своей системе координат, т. е. соответственно в системах I, II и III. Показанные на рисунке расстояния между ними (измеренные в каждом случае соответственно в I, II и III системах отсчета) неизменны — не зависят от времени. Стрелками указаны направления относительных скоростей для различных попарных сочетаний систем отсчета I, II, III (значения скорости в каждом случае также указаны).

Объекты, расположенные один над другим по вертикали, т. е. A, b_n' и b_n'', а также a_n, B_{II} и B_{III} показаны в такие моменты времени, когда положения их совпадают в пространстве. Радиальными стрелками соответствующих кружков показаны положения стрелок часов (A, b_n', b_n'' и т. д.) в данный момент времени, т. е. в момент совпадения в пространстве часов, расположенных на рисунке один над другим по вертикали.

В соответствии со сказанным только в случае системы II положения часов (b_n' и B_{II}), расположенных по горизонтали, отмечены одновременно. В двух других случаях (системы I и III) отмечены неодновременные положения часов (b_n'' и B_{III}), (A и a_n).

часы, *сверенные с B в системе II*, показывают время T_0'. В результате этого он увидит, что часы A, двигавшиеся относительно него влево, после мгновенной остановки [1] стали двигаться вправо (имеются в виду направления, показанные на рис. 7).

Как видно из всего изложенного выше и как показано на рис. 7, если b_n' прочтет в этот момент времени показание часов A, то он увидит, что стрелка на циферблате этих последних часов показывает время $T_0'\sqrt{1-\beta_0^2}$. Он сможет также констатировать, что за время действия очень короткого (в пределе — мгновенного) импульса, сообщенного ему его собственным двигателем, показания часов A, так же как и его собственных часов, не изменились.

Наблюдатель b_n' знает, что B также включил свой мотор в момент, когда его (т. е. B) часы показывали время $t' = T_0'$. Если непосредственно вслед за этим b_n' (далее будем его обозначать как b_n'') [2] пожелает сверить свои часы с часами B, которые, как он знает, шли синхронно с ними до приведения в действие мотора b_n, то обнаружится следующее.

Получив от b_n'' световой сигнал, посланный в момент, когда часы b_n показывали T_0' (уже после того как мотор b_n сработал), B, проделав соответствующие вычисления, придет к выводу, что указанный сигнал был послан b_n'' не в момент времени T_0' (как этот последний считает), а раньше, а именно в момент времени

$$T_0' - \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0' = \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0'. \tag{II.14}$$

Здесь мы привели результат вычислений, ход которых будет намечен в нижеследующем тексте данной главы и подробнее в прилож. 2.

О результате (II.14) этих вычислений B сообщит b_n'', и наблюдатель b_n'', если он считает, что часы B дают истинное время, придет к выводу, что его (b_n'') часы в результате импульса, вызванного действием мотора, включенного в момент времени $t' = T_0'$, скачкообразно *ушли вперед*. Однако если b_n'' и придет к такому, в известном смысле, правильному заключению, то он вынужден будет признать, что, как ему покажется вследствие какой-то своей оплошности, он не заметил мгновенного сдвига стрелок своих часов за время действия сил двигателя.

---

[1] Вновь предполагаем, что импульс, сообщенный b_n' его двигателем, можно рассматривать как мгновенный.

[2] Или же просто b_n; b_n' обозначает объект b_n до приведения в действие ускоряющего его мотора, b_n'' — то же после срабатывания указанного мотора.

В действительности он и не мог этого заметить, так как согласно нашим предположениям такого сдвига (перемещения стрелок часов b_n по их циферблату) на самом деле и не происходит.

О сдвиге — скачке в показании часов приходится говорить лишь вследствие того, что b_n сверяет свои часы (в начале и в конце импульса сил) с часами B и считает, что часы B задают правильное время.

Однако, рассуждая как только что сказано, b_n'' не допустит какой-либо ошибки.

Дело в том, что теперь, после действия импульса, полученного как им, так и B в момент $t' = T_0'$, синхронизм этой пары часов (b_n и B) нарушается. Это относится, конечно, и ко всей системе часов b_x, если все они получают одинаковый и одновременный (с точки зрения системы II) импульс сил, обращающих направление их скорости.

Для того чтобы *восстановить* синхронизм часов b_n и B, b_n должен отодвинуть стрелку своих часов на $\frac{2\beta_0^2 T_0'}{1-\beta_0^2}$ делений назад (см. (II.14))[1].

Поскольку он констатирует, что показания часов A оставались неизменными относительно его b_n собственных часов, он заключит при этом, что и эти часы (A) ушли скачкообразно вперед. Часам A, однако, он припишет внезапное упреждение относительно его собственных часов (а также часов B) на число делений, равное не $\Delta t' = \frac{2\beta_0^2 T_0'}{1-\beta_0^2}$, а

$$\Delta t = \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \qquad \text{(II.15)}$$

поскольку он знает, что ход движущихся относительно него со скоростью β_0 часов A замедлен в отношении $\sqrt{1-\beta_0^2} : 1$ и $\Delta t = \sqrt{1-\beta_0^2}\,\Delta t'$.

Сделанный b_n'' вывод о том, что часы A (с точки зрения B) ушли вперед на $\frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$ их делений, подтвердится, когда A соединится с B и часы обоих наблюдателей будут сверены уже непосредственно в конце цикла.

Мы упомянули выше о вычислениях, которые выполнит B после получения сигнала, посланного b_n'' (и уже тогда, когда оба партнера b_n'' и B покоятся в системе III).

---

[1] В данном случае речь идет о синхронизме по отношению к системе III.

Приведем ход этих вычислений вкратце здесь и более подробно в прилож. 2.

Если, основываясь на известной релятивистской формуле (I.41) сложения скоростей, вычислить, с какой скоростью β система *III* (и покоящиеся в ней b''_x)[1] движется относительно системы *II*, то легко установить, что

$$\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}. \tag{II.16}$$

Когда стрелка часов b''_n проходит через деление T'_0 их циферблата, эти часы испускают световой сигнал в направлении к B (как мы предполагаем, уже после обращения скорости A относительно b_n).

В тот момент, когда сигнал дойдет до часов B, положение стрелки этих последних часов фиксируется.

Обозначим отсчет, сделанный по часам наблюдателя B в момент получения им сигнала $n_{\text{св}}$.

Проделав соответствующие вычисления, можно получить следующий результат:

$$n_{\text{св}} = T'_0 + \beta_0 \frac{1-\beta_0}{1+\beta_0} T'_0$$

(см. прилож. 2). Вычитая из этого отсчета время распространения сигнала $\Delta T''_{\text{св}}$, наблюдатель B со своей точки зрения определит момент отправления сигнала наблюдателем b''_n. Легко убедиться в том, что

$$\Delta T''_{\text{св}} = \frac{\beta_0(1+\beta_0^2)}{1-\beta_0^2} T'_0.$$

(см. прилож. 2). Следовательно, по мнению наблюдателя B, сигнал был послан в момент времени

$$T''_1 = T'_0 + \frac{\beta_0(1-\beta_0)}{1+\beta_0} T'_0 - \frac{\beta_0(1+\beta_0^2)}{1-\beta_0^2} T'_0 = T'_0 - \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2} T'_0.$$

Поскольку наблюдатель B «распоряжается»[2] расстановкой стрелок часов в системе B (мы предположили, что все эти часы приводятся к синхронизму с B), он сообщит о полученном результате b''_n и тот придет к сформулированному уже выше выводу.

То, что этот вывод будет сделан b''_n и B ретроспективно, поскольку на обмен сигналами между b''_n и B потребуется возмож-

---

[1] Напомним, что знаком b''_x мы обозначили часы b'_x после того, как им сообщено ускорение в момент времени $t' = T'_0$.

[2] То, что часы приводятся к синхронизму именно с часами B, вытекает из постановки рассматриваемого вопроса и условий задачи. Однако самый метод синхронизации не является результатом каких-либо условных соглашений и вытекает из объективных законов природы.

но значительное время, не играет роли и не затрагивает существа рассуждений, о которых шла речь.

Итак, несколько сложным путем мы пришли к выводу, что при условиях, которые нами были заданы, необходимо считаться с тем, что, с точки зрения B, в момент времени T_0' имеет место скачкообразное изменение показаний часов A на величину $\frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T_0'$ их делений.

Можно более непосредственно прийти к тому же результату, поставив вопрос (согласно второй, изложенной ниже схеме рассуждений) следующим образом.

Будем считать цепочку часов b_x'' уже «заготовленной», т. е. предположим, что ряд таких синхронизированных между собой часов движется влево (рис. 7) со скоростью β_0 относительно системы I и $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ относительно системы II. Предположим еще сверх того, что стрелки всех часов ряда b_x'' расставлены так, что те из этих часов, которые проносятся мимо B (системы II) в момент $t' = T_0'$, показывают время t'', также равное T_0'.

Спрашивается, какое показание на циферблате часов A зарегистрирует тот из наблюдателей, неподвижно связанных с определенным объектом b_k'' из ряда b_x'', мимо которого часы A проносятся в момент его (b_k'') собственного времени $t'' = T_0'$?

Ответ на этот вопрос легко получить, основываясь на преобразованиях Лоренца.

Положим, что в начале координат системы III находятся те часы этой системы, положение которых по оси x'' в момент $t'' = T_0'$ совпадает с B. (Обозначим их той же буквой B, как на рис. 7.)

Ось положительных x'' направим на этот раз от B к A. Учитывая указанные условия, напишем уравнение Лоренца, связывающее t, x с t'', x'' (для перехода от системы III к системе I). Уравнение (I. 29) в применении к данному случаю дает

$$t = \frac{t'' + \frac{x''\beta_0}{c}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\,. \qquad \text{(II.17)[1]}$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (II. 17), достаточно констатировать, что при $x'' = 0$ и $t'' = T_0'$ (II. 17) дает $t = \frac{T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, как и должно быть в соответствии с рис. 7.

---

[1] В зависимости от того, как было условлено поставить стрелку часов при $x'' = 0$ (т. е. часов системы III в определенный момент времени, например, в тот момент времени, когда B системы II останавливается относительно системы III в точке $x'' = 0$), формула (II. 17) могла бы содержать дополнительный постоянный член K и имела бы, вообще говоря, вид

$$t = \frac{t'' + \frac{x''\beta_0}{c} + K}{\sqrt{1-\beta_0^2}}.$$

В данном случае $K = 0$.

В момент $t'' = T_0'$ часы A должны находиться на расстоянии от B, равном $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$ (если это расстояние измерено в системе *III*). Это прямо следует из того, что налицо симметрия перемещений во времени: длина пути, пройденного (за первую половину цикла) A относительно B, измеренная в системе *II*, должна быть равна длине *обратного* пути, измеренного в системе *III*. В том и другом случае имеются в виду измерения, выполненные B, считающим себя неподвижным.

Но согласно рис. 7 и приведенным уже выше соображениям длина пути «вперед», измеренная B, равна $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$, а следовательно, и длина[1] обратного пути (в системе *III*) также равна $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$.

Подставив в (II. 17) $x'' = x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$ и $t'' = T_0'$ и определив из (II. 17) t_A, получим ответ на поставленный выше вопрос, т. е. определим показание t_A часов A в тот момент, когда противостоящие им часы[2] b_k'' системы *III* показывают время $t'' = T_0'$. Согласно (II. 17)

$$T_A(III) = \frac{T_0' + x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}\,\frac{\beta_0}{c}}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \tag{II.18}$$

Принимая во внимание, что $x_0 = \beta_0 c T_0 = \beta_0 c \dfrac{T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, согласно условиям задачи и (II. 18) получаем

$$T_{A\,(t''=T_0')}(III) = \frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\,T_0'. \tag{II.19}$$

Теперь, имея в виду по-прежнему психологический аспект вопроса, представим себе, что наблюдатель B, остававшийся неподвижным в течение первой половины цикла в системе *II*, получив соответствующий импульс, мгновенно «перебрасывается» на ходу в соответствующую проносящуюся мимо него «капсулу» системы *III* в тот момент, когда его часы показывают время $t' = T_0'$. Затем он остается неподвижным в этой системе *III*.

Положим, что после этого он произведет опрос всех b_x'' с целью найти того из них, мимо которого A пронесся в момент времени $t'' = T_0'$, а также и для того, чтобы получить от него сведения о том, какое показание стрелок часов A «засек» именно этот наблюдатель в момент $t'' = T_0'$. Тот ответ, который получит B, выражен формулой (II. 19).

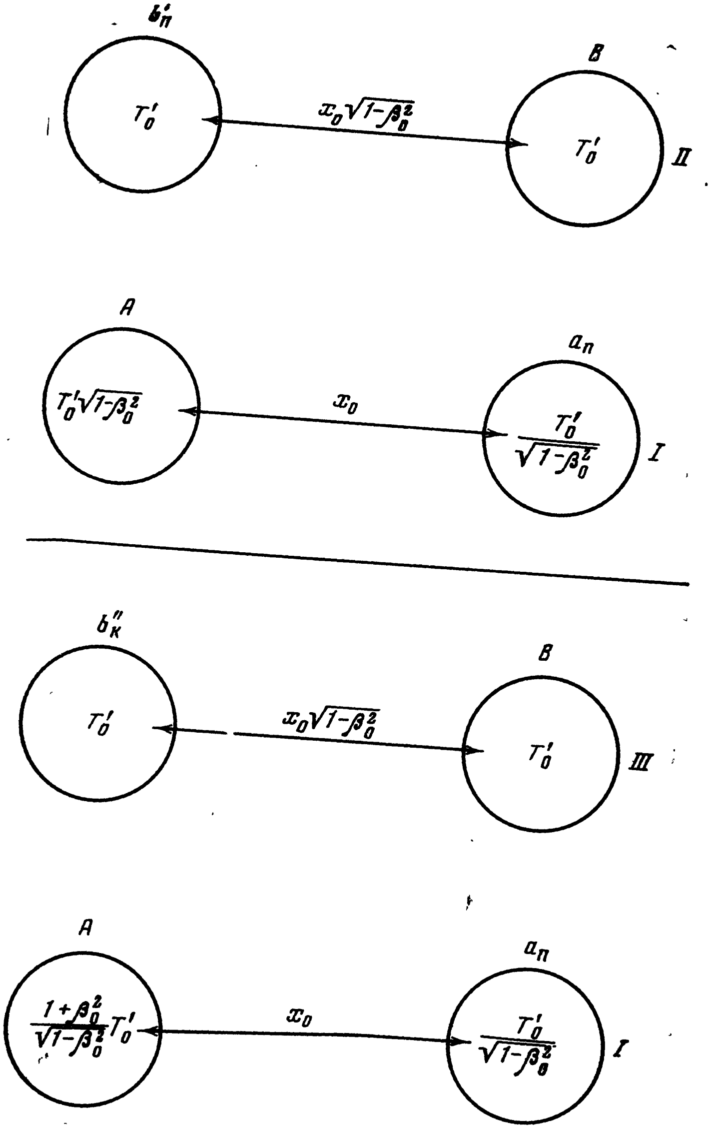
Если B следил за показаниями A на расстоянии посредством опрашиваемых им *наблюдателей* b_x' (*системы II*), то он знает (экстраполируя[3] свои

---

[1] Речь идет о длине l пути, пройденном A, движущимся со скоростью β_0: $l = \beta_0 c T_0'$; поскольку $T_0' = T_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$ и $\beta_0 c T_0 = x_0$, $l = x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$. Следует иметь в виду, что на рис. 7 показано расстояние между *неодновременными* в системе *III* положениями b_n'' и B. Вместе с тем $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$ есть расстояние между одновременными в системе *III* положениями b_k'' и B (рис. 8) в момент времени $t'' = T_0'$.

[2] Необходимо различать b_n'' и b_k''.

[3] Речь идет об *экстраполяции* к моменту $t' = T_0'$, поскольку сигналы b_n' будут получены с опозданием — при $t' > T_0'$.



b'_n
B
T'_0
$x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$
T'_0
II
A
a_n
$T'_0\sqrt{1-\beta_0^2}$
x_0
$\frac{T'_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$
I
b''_k
B
T'_0
$x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$
T'_0
III
A
a_n
$\frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}T'_0$
x_0
$\frac{T'_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$
I

Рис. 8

наблюдения), что при $t' = T_0'$ показание часов A равно

$$T_A(II) = T_0' \sqrt{1 - \beta_0^2}$$

(см. верхнюю половину рис. 8).

С другой стороны, по данным b_x'' (системы III) согласно (II. 19) время

$$t_A'' = \frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T_0'$$

(см. нижнюю половину рис. 8).

Если наблюдатель B считает, что его собственные часы в продолжение всего цикла показывали «истинное» время, то он придет к заключению, что показания часов A мгновенно сдвинулись на величину

$$\Delta T_A = \left(\frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \sqrt{1-\beta_0^2}\right) T_0' = \frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T_0', \tag{II.20}$$

т. е. что налицо то скачкообразное изменение во времени, показываемом часами A (которое мы уже усмотрели выше, исходя из несколько иных соображений и идя окольным путем).

Теперь ясно, что «скачок во времени», который следует учесть, подводя итог сравнения показаний A и B, есть результат отождествления наблюдателем B моментов времени $t' = T_0'$ и $t'' = T_0'$.

Как было предположено, «идеальные» часы, имеющиеся в распоряжении B, действительно показывают время непрерывно, не обнаруживая каких-либо сдвигов в момент мгновенного изменения их скорости, о котором шла речь.

Становится, наконец, понятным то, как именно устраняются отмеченные выше противоречия.

Согласно только что изложенному, хронометрическая последовательность засекаемых в определенные моменты времени показаний часов A в представлении наблюдателя B такова.

В продолжение первой половины цикла, длительность которой по часам B есть T_0', движущиеся относительно него часы A *отстают* от его собственных часов так, что показание A к концу первой половины цикла равно $\Delta T_1 = T_0' \sqrt{1-\beta_0^2}$ (если в начале стрелка их, так же как и стрелка часов B, была поставлена на нуль). Таким образом, ΔT_1 меньше T_0', так как $\sqrt{1-\beta_0^2} < 1$.

Далее, согласно (II.15) и (II.20) имеет место скачкообразный сдвиг вперед в показании часов A на

$$\Delta T_2 = \frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T_0'$$

их делений.

За время прохождения пути назад приращение в показании часов A есть $\Delta T_3 = \sqrt{1-\beta_0^2} T_0' = \Delta T_1$ (т. е. опять налицо отставание часов A от часов B). В итоге получаем

$$2T_A = \Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 =$$

$$= \left(2\sqrt{1-\beta_0^2} + \frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}\right) T_0' = \frac{2T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

как и было нами найдено раньше (см. (11.13)).

Из изложенного ясно, что наблюдать *непосредственно* введенный нами в сущности искусственным путем сдвиг времени ΔT_2 невозможно.

Согласно второй схеме рассуждений наблюдатель B лишь делает вывод о таком сдвиге, сопоставляя показания двух различных наблюдателей b_n' и b_k'', которые он относит к одному и тому же моменту его собственного времени.

Заметим, что если мы говорили о циферблатах и стрелках цепочек часов, то это лишь прием для терминологического упрощения в целях придания известной наглядности изложению. В действительности речь шла о ходе во времени любых процессов, протекающих в системе, движущейся равномерно относительно некоторой инерциальной системы со скоростью, приближающейся к скорости света. (Более подробно соотношения, представленные графиком рис. 7, рассмотрены в прилож. 3.)

Что касается тех разрывов во времени, которые нам пришлось ввести в рассмотрение, то они не имели бы смысла, если бы было оправдано представление об *абсолютном времени*, не зависящем от пространственной системы отсчета. Мы вынуждены «привязывать» временны́е координаты к определенной системе пространственных координат. Поскольку эта последняя система нами выбрана и остается неизменной, все рассмотрение можно провести, оставаясь в рамках обычных представлений о времени, с учетом, однако, релятивистских особенностей «поведения во времени» движущихся систем (это верно и относительно таких систем, как организм живых существ). В нашем случае все свелось к «замедлению», как мы говорили, «хода часов», но в действительности любого процесса, с точки зрения покоящегося наблюдателя.

Выше мы ввели три различные инерциальные системы. Представление о замедлении (в отношении $\sqrt{1-\beta^2} : 1$) хода движущихся часов, с точки зрения определенной *неизменной инерциальной* системы, позволяет рассмотреть задачу, не выходя за рамки обычных представлений, и получить правильный результат, пользуясь *любой* из этих трех инерциальных систем (I, II и III). Проще всего этот результат получается (как мы уже и видели,— см. выше вариант № 1) в системе A (I).

Если воспользоваться другой системой, например системой II, то ход рассуждений был бы таким.

Наблюдатель (связанный часами B) в начальный момент времени видит часы A, проносящиеся мимо него влево (см. рис. 7). Наблюдая за часами A с помощью системы синхронизированных *с ним* (т. е. с B и неподвижных в системе B) часов b_x (системы II), наблюдатель B убедится, что за время T_0' стрелка движущихся часов A (идентичных с его собственными) передвинется на $T_0'\sqrt{1-\beta_0^2}$ делений. В момент $t' = T_0'$ происходит следующее: часы A продолжают двигаться влево (*не замедляя скорости*); наблюдатель *остается неподвижным* в системе II, но часы B отделяются от него, получают мгновенное ускорение и, *не изменив положения своей стрелки*, начинают двигаться (относительно наблюдателя) влево со скоростью $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ (бо́льшей β_0)[1], догоняя часы A. В момент времени t_x' они догонят часы A[2]. За время этой второй половины цикла, поскольку они движутся относительно наблюдателя *быстрее*, чем часы A, ход их будет замедлен относительно этого наблюдателя, покоящегося в системе II, *больше*, чем ход часов A, и настолько больше, что в момент времени t_x', когда положения их (часов A и B) снова совпадут в пространстве (т. е. B догонят A), они отстанут от часов A так, что показания их окажутся меньшими, чем показания часов A, опять же в отношении $\sqrt{1-\beta_0^2} : 1$ (см. прилож. 4).

Опираясь на полученные уже результаты, вернемся снова к парадоксу близнецов.

Мы говорили о показаниях часов, определяемых положением стрелок часов на их соответствующих циферблатах.

Дальнейшее изложение проведем на несколько ином языке.

Введем представление о некотором «условном» человеке, предположив, что можно говорить о его возрасте как о некотором возрастающем во времени параметре, однозначно определяющем состояние его организма. В соответствии с этим будем, следовательно, предполагать, что и длительность его жизни имеет вполне определенное значение, т. е. что, «рождаясь» в определенный момент времени (записанный в его паспорте), этот условный человек и «умирает» также по истечении всегда вполне определенного времени, т. е. что время жизни дано не как некоторая *средняя* величина, характеризующая лишь статистически множество людей, живущих в определенных условиях, но что это время жизни имеет вполне определенное, одно и то же в каждом отдельном индивидуальном случае значение.

Кроме того, предположим, что, используя такой идеализиро-

---

[1] Поскольку $\beta_0 < 1$.

[2] t_x' — время, отсчитываемое с момента начала второй половины цикла движений A.

ванный образ, можно пренебречь различными побочными влияниями ускорений, испытываемых данным субъектом, полагая, что возраст его $\tau(t)$ определяется обобщенным «законом замедления времени» $\left(\tau(t) \sim \int\limits_0^t \sqrt{1-\beta^2(t)}\, dt\right)$; $\tau(t)$ — «возраст» в момент t времени, измеряемого в определенной инерциальной системе, относительно которой данный объект (или субъект) движется со скоростью $\beta(t)$.

При указанных условиях возраст и является мерой времени — собственного времени—данного объекта, и терминологически можно говорить одинаково или о возрасте определенного индивидуума, или о показании идеальных часов, остающихся всегда неподвижными относительно него.

В популярном изложении основ своей теории относительности Эйнштейн, а следуя ему, и другие авторы часто прибегали к сравнению движущейся системы отсчета с поездом, пассажиры которого производят различные измерения, пользуясь часами и эталонами длины (масштабами), тождественными с такими же измерительными приборами, которые имеются в распоряжении наблюдателей, находящихся на станциях, неподвижных относительно железнодорожного полотна, по которому движется поезд. Выше мы уже пользовались терминологией, подсказанной такой аналогией.

Если оторваться от обстановки наблюдений в земных условиях и учесть возможности современной космической связи, то, говоря о соотношениях Лоренца, может быть, и целесообразно, конкретизируя обстановку различных примеров, представлять себе какие-то объекты, населенные людьми, несущиеся в космическом пространстве так, что движение их характеризуется космическими масштабами.

Словом, перенесем «поезд» Эйнштейна, движущийся со субсветовой скоростью, с его пассажирами в космическое пространство.

В приводимых далее сравнениях будем представлять себе два «мира», вполне тождественные по совокупности образующих их тел и пространственно-временных соотношений (внутри каждого из них). Один из этих миров несется в космическом пространстве с постоянной скоростью β порядка скорости света относительно другого. Между обитателями этих «миров» поддерживается связь так, что любые события в одном из этих миров могут быть зарегистрированы в другом с указанием соответствующих координат пространства и времени. Обозначим эти «миры» — эти системы отсчета—римскими цифрами I и II.

Будем говорить о двух партнерах A и B. Положим, что они родились одновременно в системе I, в которой они ровесники, поэтому в паспортах каждого из них, выданных «с точки зрения» этой системы, даты их рождения и обозначены соответственно, т. е. эти даты совпадают. Предположим, однако, что A и B находятся на значительном расстоянии друг от друга.

Допустим, что в какой-то определенный (один и тот же в системе I для обоих ровесников) момент времени оба они — A и B, получив соответствующие мгновенные ускорения, перебрасываются из системы I в систему II так, что при этом они останавливаются относительно системы II. После этого они оказываются покоящимися в этой последней системе II (и несутся вместе с ней со субсветовой скоростью относительно первоначальной системы — системы I).

Положим затем, что один из них, например A, станет очень медленно перемещаться (в системе II) в направлении к другому. Потребуем, чтобы скорость u перемещения A была настолько мала, что условие[1] $\frac{ux'}{c^2} \ll 1$ было бы выполнено.

Положим, что A — тот из партнеров, который был переброшен на расстоянии x' (в системе II) в точке, расположенной относительно B в направлении, противоположном направлению движения (системы II относительно системы I).

Тогда, после того как A, двигаясь в соответствии с условием (II.1) очень медленно в направлении к B, достигнет B, обнаружится, что он *моложе* B и именно настолько моложе, что разность их возрастов окажется равной[2] $x'\beta_0/c$, что следует из уравнения (I.29) Лоренца.

Спрашивается, как согласовать этот факт с записями в паспортах?

Если речь идет о «паспортах», в которых записаны даты рождения обоих (т. е. A и B) так, как они были зарегистрированы по данным системы II, то никакого согласования и не потребуется, так как разность возрастов A и B, встретившихся в определенном месте в системе II, будет соответствовать тем датам рождения, которые указаны в их паспортах. Согласно этим паспортам (системы II) они родились в *разное* время (A позже на $x'\beta_0/c$ сек., чем B) и, следовательно, они и не являются ровесниками[3].

Несколько иначе будет обстоять дело, если при решении вопроса о том, кто из двух партнеров (A или B) младше и насколько

---

[1] В этом случае (см. формулу (II. 1)) в системе II можно пренебречь релятивистским эффектом скорости u.

[2] Подробнее об этом см. пример в гл. III.

[3] Это вытекает из условий задачи и уравнений Лоренца. Из (I. 29) следует $\Delta T = \frac{\Delta t' + \frac{x'\beta}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Если $\Delta t'_{BA}$ — разность дат рождения B и A, то, как условлено, $\Delta T_{BA} = 0$ (мы пишем здесь T вместо t в (I. 29)). Следовательно, $\Delta t'_{BA} = -\frac{x'\beta}{c}$: партнер B родился на $x'\beta/c$ сек. времени t' раньше A.

младше, оба они предъявят паспорта, выданные по данным регистрации их рождений в системе I. В этом случае, если верить паспортам, их следует считать ровесниками.

Наблюдателями системы II записи в этих паспортах не будут признаны правильными (если, конечно, они не примут во внимание требования теории относительности).

Вместе с тем наблюдатель, неподвижный в системе I, следивший за перемещениями A и B в системе II и их старением, в своих суждениях будет основываться на том, что записи в паспортах A и B, определяющие даты их рождения, правильны. Он будет исходить из того, что в момент «переброски» из системы I в систему II A и B были и остались ровесниками. Однако, основываясь на теории относительности, он не согласится с тем, что выполнение условия $\frac{ux'}{c^2} \ll 1$ достаточно для того, чтобы можно было пренебречь релятивистским эффектом влияния на старение A (движущегося относительно B) скорости его перемещения в системе II, какой бы малой ни была эта скорость.

Дело в том, что A и B движутся относительно наблюдателя, неподвижно связанного с системой I, со скоростями (соответственно V_A и V_B), близкими к скорости света. Однако в течение того времени, когда A сближается с B, $V_A > V_B$, поскольку скорость V_A есть результат сложения скорости V_B и скорости u (с точки зрения наблюдателя системы I, A догоняет B).

В силу того, что V_B и V_A близки к скорости света, малая разность их (u) дает эффект, которым нельзя уже пренебречь. Релятивистское *замедление* «старения» B будет сказываться меньше, чем это будет иметь место в отношении A (поскольку $V_B < V_A$), и при встрече обоих B окажется старше A и, конечно, именно настолько, насколько это следовало бы по записи в паспортах о датах рождения A и B, выданных по данным системы II (см. прилож. 5).

Очевидно, что если бы B стал двигаться в направлении к A со скоростью u, удовлетворяющей условию $\frac{ux'}{c^2} \ll 1$, то результат и в этом случае был бы тот же.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПОЛЕТ ДВУХ КОСМОНАВТОВ В КОСМОСЕ СО СКОРОСТЬЮ, БЛИЗКОЙ К СКОРОСТИ СВЕТА ($\gamma_0=10^7$)

Два космонавта (A и B) — ровесники, располагающие идентичными идеальными часами, стартуют в космическое путешествие одновременно по земным, а также и их собственным синхронизированным до старта часам.

Постоянная во времени и одинаковая как в случае A, так и B движущая сила, создаваемая сверхмощными ракетными двигателями, ускоряе их за короткое время до скорости β_0, близкой к скорости света ($\gamma_0 = 10^7$). В соответствии с условиями примера действие моторов космических кораблей A и B и ускорение этих кораблей длятся около $3 \cdot 10^7$ сек. по земным часам и, как оказывается, всего лишь около 50 сек. по собственным часам A и B. Оба мотора выключаются одновременно по земным, а также по собственным часам A и B.

В момент старта B находится на расстоянии около 100 тыс. *км* ($9 \cdot 10^9$ *см*) от A. Оба они движутся по одной и той же прямолинейной траектории — B впереди A, с точки зрения земного наблюдателя.

Уравнения движения (т. е. выражения длины пройденного пути в функции времени) обоих космонавтов тождественны. Судя по земным часам, они пролетают по своим тождественным траекториям синхрон о, иначе говоря, через «соответствующие точки» этих траекторий одновременно. Следовательно, с точки зрения земного наблюдателя, расстояние AB между ними остается неизменным.

Иначе, однако, обстоит дело, если судить по результатам наблюдений самих космонавтов. Так, например, когда B по истечении 50 сек. с момента старта (по его — B часам) выключит, как было условлено заранее, свой мотор, то, произведя соответствующие измерения, он найдет, что расстояние AB возросло почти в 10 раз и стало равным примерно 1 млн. *км*.

Следя после этого за движением A, B убедится в том, что A продолжает от него удаляться, двигаясь теперь с постепенным замедлением относительно B. Это замедление он (B) припишет тому, что A еще не выключил свой мотор, создающий силу, действующую в направлении от A к B, т. е. замедляющую A относительно B. При этом если B не учтет особенностей движения с релятивистской скоростью, то он может сделать неправильный вывод о том, что A по ошибке не выключил свой двигатель тогда, когда, как было условлено, стрелка его (A) часов показывала время 50 сек., если считать с момента старта.

B будет наблюдать замедляющееся удаление от него A еще в течение примерно месяца, точнее, 1/10 года ($3 \cdot 10^6$ сек.) по его (B) часам, после чего в момент выключения мотора A этот последний остановится относительно B на расстоянии порядка уже 10^{12} *км*.

В момент выключения мотора A часы A показывают время, равное 50 сек. после момента старта. Однако часы A и B уже не синхронны, с точки зрения инерциальной системы, в которой A и B, в конце концов, останавливаются. С точки зрения этой последней системы, моторы их выключаются неодновременно: мотор A примерно на один месяц позже, чем мотор B. Иначе говоря, к моменту[1] выключения мотора A часы B ушли вперед относительно часов A примерно на один месяц. (Часы B показывают «в этот момент» время $\tau_B = 3 \cdot 10^6$ сек., а часы A — время $\tau_A = 50$ сек.)

Но в соответствии с показаниями идеальных часов каждого из космонавтов изменяется и их возраст (если отвлечься от побочных влияний на их организм испытываемых ими ускорений и учитывать лишь релятивистский эффект увеличения скорости одного относительно другого).

Следовательно, космонавт B стал примерно на один месяц старше космонавта A, хотя до старта они были ровесниками.

Рассматриваемые с точки зрения конечной инерциальной системы (в которой A покоится относительно B) траектории обоих космонавтов также тождественны, но A и B проносятся по этим траекториям не синхронно — A с опозданием на один месяц (или $3 \cdot 10^6$ сек.) относительно B.

В соответствии с условиями рассматриваемого примера этот месяц жизни B (в полете) равен *миллиону лет* по земным часам!

Рассмотим подробно описанный выше пример, имея в виду некоторую «квазиконкретную» обстановку космических полетов.

На этот раз мы откажемся от предположения о том, что ускорение, сообщающее данному объекту скорость, близкую к скорости света, можно рассматривать как мгновенное. Все же, однако, речь будет идти об ускорении, которое ни в какой мере не мыслимо в условиях, сколько-нибудь отвечающих реальным возможностям. Двигателю, вызывающему это ускорение, придется приписать мощность фантастической величины, а в качестве «космонавтов» иметь в виду тех условных или символических людей, о которых было упомянуто выше.

В этом новом, так же как и в предыдущем примере, обоим партнерам (A и B) сообщается одинаковое ускорение относительно исходной инерциальной системы, однако они ускоряются в течение достаточно длительного времени, а именно около одного года (по земным часам).

Поскольку в данном примере ускорение имеет конечную величину, нет необходимости вводить в рассмотрение «разрывы во времени» — скачкообразные изменения в показаниях приборов, измеряющих время. В данном случае, так же как и в предыдущем примере, A и B вначале покоятся в определенной инерциальной системе координат. В дальнейшем буквами X и T обозначим координаты этой системы.

После завершения стадии ускорения A и B останавливаются в другой инерциальной системе (координаты x, t), скорость которой относительно X, T равна β_0.

---

[1] Имеется в виду момент времени в конечной системе покоя A и B.

Можно проследить за непрерывным изменением координат от начальных значений X, T до значений x, t в конце времени ускорения.

Для того чтобы легче было уследить за ходом дальнейших рассуждений, предварительно фиксируем еще раз внимание читателя на следующем следствии, вытекающем из преобразований Лоренца. Положим, что измерено и известно расстояние между *одновременными* положениями (A и B) двух объектов в определенной инерциальной системе. Пусть в данном случае расстояние это дано в системе X, T и равно $\Delta X_0 = \text{const}$ [1]. Нас интересует расстояние Δx между положениями тех же объектов A и B, но зафиксированными в системе x, t (в тот же момент времени T).

Поскольку A и B — положения данных объектов, отмеченные *одновременно* в системе X, T, положения их в системе x, t *неодновременны*.

Как это следует из уравнений Лоренца, согласно (I.21)

$$(\Delta X)_T = \Delta X_0 = \Delta x \sqrt{1-\beta_0^2} \qquad \text{(III.1)}$$

(если β_0 — скорость системы x, t относительно X, T).

Как оговорено выше, $\Delta X = \text{const}$ (от времени не зависит). Это было отмечено при введении обозначения $\Delta X = \Delta X_0$.

Положим, что a и b — положения двух объектов, которые *неподвижны* в системе x, t. Это будет иметь место в отношении космонавтов A и B, но лишь по истечении определенного, как увидим, весьма длительного времени, причем сначала «остановится» B, а позднее A (если B стартует впереди A в направлении положительных X — в направлении движения).

Если только что указанное условие выполнено (т. е. если a и b неподвижны в системе x, t), то оговорка, что положения их определены *неодновременно*, не имеет значения (в отношении системы x, t), и мы можем, положив $\Delta x = \Delta x_0 = \text{const}$, записать (III.1) в виде

$$\Delta X_0 = \Delta x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}, \qquad \text{(III.2)}$$

где ΔX_0 и Δx_0 — постоянные во времени значения.

Читая это соотношение (III.2), следует все же помнить, что мы переходим от *неодновременных* (по отношению к системе x, t) значений в *правой* части уравнения к *одновременным* (в координатах X, T) значениям в левой его части.

В дальнейшем буквами a и b будем обозначать положения космонавтов A и B в системе x, t после «остановки» в этой системе *их обоих*.

---

[1] Таковы условия конкретного примера, который здесь рассматривается.

A и *B в конце концов* останавливаются в системе x, t, но они все время движутся — вначале ускоренно, а затем равномерно, если их рассматривать с точки зрения системы X, T (при $T \geqslant 0$).

После этих предварительных замечаний перейдем к конкретному примеру и определенным числовым данным. Нас не должно смущать то, что вся обстановка предполагаемого нами космического полета и эти числовые данные фантастичны.

Эффект «постарения» одного из космонавтов относительно другого, даже и при допущении таких ускорений фантастической величины и расстояний порядка астрономических длин, невелик. Окажется, что по завершении времени ускорения B стал старше A всего примерно на один месяц (или, точнее, на 1/10 часть года), если, как мы и предполагаем, до старта оба они были ровесниками.

Однако данным примером могут быть достаточно рельефно проиллюстрированы особенности релятивистских соотношений и выявлены некоторые новые кажущиеся «парадоксы».

Итак, допустим следующее. В начальный момент времени — момент старта, A находится на Земле, а B где-то на расстоянии от него, равном примерно 1/3 расстояния от Земли до Луны. Для удобства выкладок положим, что это начальное расстояние AB между A и B (обозначим его ΔX_0) равно $9 \cdot 10^9$ *см*, т. е. что B находится на расстоянии около 100 тыс. *км* от A, т. е. от Земли.

Расстояние ΔX между A и B в течение всего рассматриваемого времени, как уже сказано, остается постоянным, равным ΔX_0.

Далее предположим, что A и B стартуют одновременно (в системе X, T), набирая скорость в направлении от A к B. Мощнейшие ракетные двигатели, сообщающие им обоим ускорение, одинаковы, и, следовательно, ускоряющая сила одинакова. Постоянное «собственное» ускорение g (см. гл. IV) положим равным 10^{10} *см/сек*^{2}, т. е. примерно в 10 млн. раз большим ускорения силы тяжести у поверхности Земли. Это ускорение сообщается космонавтам в течение времени T_0, равного примерно одному году, если время измеряется по часам, остающимся неподвижными на Земле[1] (в системе, X, T). Положим $T_0 = 3 \cdot 10^7$ сек.

По истечении примерно одного года по земным часам (следовательно, одновременно по этим часам) моторы обоих космонавтов (A и B) выключаются.

Из условий задачи ясно, что в системе X, T траектории A и B тождественны. Прямолинейная траектория B лишь «сдвинута» в направлении от A к B на расстояние, равное $\Delta X_0 = 9 \cdot 10^9$ *см*, остающееся постоянным во время движения.

Спрашивается, на каком расстоянии один от другого окажутся космонавты, после того как они «остановятся» в конечной инер-

---

[1] Разумеется, здесь и в дальнейшем изложении можно пренебречь скоростью Земли и считать Землю неподвижной.

циальной системе (системе x, t)? Это расстояние обозначим символом Δx_0.

Для того чтобы ответить на поставленный выше вопрос, определим скорость системы x, t относительно X, T, т. е. конечное значение скорости, сообщенной каждому из двух космических кораблей, в которых совершают полет наши космонавты.

Тот тип движения, который рассматривается, называется гиперболическим.

Нетрудно получить уравнения движения A и B в системе X, T. Уравнения эти имеют вид

$$X_A = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}-1\right) = \frac{c^2}{g}(\gamma - 1) \tag{III.3}$$

и

$$X_B = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}-1\right) + \Delta X_0 = \frac{c^2}{g}(\gamma - 1) + \Delta X_0, \tag{III.4}$$

$$X_B - X_A = \Delta X_0 = \text{const}$$

(см. прилож. 6). При этом

$$\gamma = \sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{III.5}$$

где $\beta = v/c$ — скорость в каждый данный момент времени, выраженная в долях скорости света и равная

$$\beta = \frac{dx}{cdT} = \frac{gT}{c\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}}. \tag{III.6}$$

Конечное значение скорости каждого из космонавтов A и B после выключения моторов космических кораблей мы уже обозначили буквой $\beta_0 = v_0/c$ и соответственно конечное значение «гамма» обозначим

$$\gamma_0 = \sqrt{1+\left(\frac{gT_0}{c}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \tag{III.7}$$

Поскольку при сделанных выше предположениях

$$\frac{gT_0}{c} \gg 1, \quad \gamma_0 \simeq \frac{gT_0}{c},$$

и в нашем примере $\gamma_0 \simeq 10^7$. Это означает, что полная масса корабля (с точки зрения системы X, T, т. е. с точки зрения наблюдателя на Земле) стала в 10 млн. раз больше начальной массы.

С учетом всех этих данных (III.2) дает ответ на поставленный выше вопрос. Подставляя числа, получаем

$$\Delta x_0 = \Delta X_0 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^{16}\ \textit{см}. \tag{III.8}$$

Таким образом, расстояние между космонавтами возросло в 10 млн. раз и стало равным примерно $^1/_{10}$ светового года, хотя, с точки зрения земного наблюдателя, оно все время оставалось и остается постоянным, равным примерно 100 тыс. *км*.

Если, невзирая на дальность удаления A от B, предположить, что A и B были связаны жестким тросом, то по мере ускорения A и B в этом тросе возникнут напряжения и он разорвется. Как же такое предсказание связать с тем, что в своей начальной системе координат оба партнера (A и B) движутся по тождественным, но лишь сдвинутым одна относительно другой траекториям и расстояние AB между ними не изменяется?

На этот вопрос следует ответить так: воображаемый нами мысленно трос, связывающий A и B, разорвется вследствие того, что продольные размеры тел, движущихся со скоростью, близкой к скорости света, сокращаются. Они в этих условиях подвержены лоренцеву сокращению [1] (см. § 3 гл. I).

---

[1] В различных трудах, посвященных теории относительности, неоднократно ставился и обстоятельно обсуждался вопрос о том, «реально» или «нереально» лоренцево сокращение продольных размеров тел, движущихся относительно определенной инерциальной системы со скоростью, близкой к скорости света.

Хотя, казалось бы, здесь и нет места для какой-либо неоднозначности толкования и эффект, о котором идет речь, вполне реален («так же реален, как реально, например, расширение тел вследствие их нагревания»,— это сравнение приписывается Лоренцу), высказывания различных авторов по этому вопросу тем не менее расходятся. Например, в известных лекциях по физическим основам теории относительности, прочитанных академиком Л. И. Мандельштамом [10] в 1934—1935 гг. в Москве, уделено немало места соображениям, показывающим, что эффект реален. Вместе с тем Сингх — автор вышедшей в 1956 г. монографии [11] — придерживается терминологии, акцентирующей интерпретацию эффекта как кажущегося. Касаясь этого вопроса, автор всюду в своей монографии говорит о «кажущемся (apparant) сокращении» продольных размеров движущихся тел.

По-видимому, пример, подробно рассматриваемый в настоящей главе, может служить для отчетливого выяснения позиций в вопросе о том, идет ли речь о «кажущемся» или «реальном» релятивистском эффекте сокращения размеров движущихся тел.

Разрыв троса, связывающего «космонавтов» A и B, в условиях указанного примера это вполне реальный эффект. Объяснение его как следствия вполне реального сокращения размеров троса при движении его со субсветовой скоростью есть единственно возможное объяснение, если исходить из того, что расстояние между A и B при их движении остается неизменным, что и имеет место с точки зрения системы XT.

Вместе с тем, как это будет подробно показано в данной главе, при описании того, что в тех же условиях происходит с точки зрения системы x, t, все объясняется или описывается иначе: кинематика наблюдаемых явлений в этом случае такова, что расстояние между A и B отнюдь не остается постоянным; оно возрастает (в конечном итоге в 10 млн. раз). Об изменении же длины масштаба, которым измеряется это расстояние, здесь нет речи.

Наконец, если пойти еще дальше и рассматривать ту же задачу в *неинерциальной* система координат, а именно в системе координат, в начале которой находится B, движущийся в течение одного года времени T *ускоренно*, то можно получить и такой ответ на поставленный здесь вопрос: «трос», о ко-

Если бы A и B не были связаны таким тросом жестко, если бы, например, представить себе, что один конец троса (или плоской гибкой ленты) привязан к A, а другой намотан на свободно, без трения, вращающийся барабан вала, скрепленного с B, то такой «трос» или, скажем, лента «рулетки» для измерения расстояний будут сматываться вследствие лоренцева сокращения продольных размеров тел, вызванного движением их со скоростью порядка скорости света.

Так, однако (имея в виду ссылку на лоренцево сокращение продольных размеров тел), будет обстоять дело, если всю картину рассматривать с точки зрения земного наблюдателя.

То, что трудно или невозможно представить себе трос длиной порядка миллиарда километров или даже порядка длины светового года, не затрагивает существа полученного результата. Можно указать метод, каким B мог бы измерять (уже вполне реально) расстояние, отделяющее его от A, если бы космический полет в указанных условиях можно было осуществить.

Наблюдая высокочастотные сигналы, посылаемые A, и следя за Доплер-эффектом, который будет наблюдаться, поскольку A удаляется от него, B мог бы, анализируя эти наблюдения, проследить за тем, как изменялось во времени расстояние от него до A[1].

О Доплер-эффекте, который будет наблюдать B, и о времени, в течение которого этот Доплер-эффект будет наблюдаться, речь еще впереди.

По истечении определенного интервала времени B обнаружит, что доплеровское смещение частоты сигналов, посылаемых A, исчезло. После этого в принципе он сможет измерить расстояние между ним и его партнером, применив уже обычные методы радиолокации.

Разумеется, и в этом случае мы допускаем, что B располагает такими возможностями космической радиосвязи, которые выходят далеко за рамки мыслимого в условиях современной техники.

После того как B убедился бы в том, что A остановился относительно него и осуществил бы указанные выше измерения, полученный им результат совпал бы с результатом, который он получил бы, измерив длину той воображаемой ленты, протянутой от A до B, о которой мы упомянули выше [2].

Путем радиолокационных измерений B убедился бы в том, что A находится на расстоянии от него около 1/10 светового года — в 10 млн. раз большем начального расстояния между космонавтами в момент их старта.

тором идет речь, разрывается силой тяготения, направленной от B к A и действующей, если всю картину рассматривать с точки зрения системы x, t гл. IV (см. примеч. на стр. 137).

[1] Не следует забывать, что вследствие запаздывания момента приема наблюдателем B сигнала, посланного A, этот анализ может быть сделан лишь *ретроспективно*.

[2] В этом случае лента была бы уже неподвижной.

Можно проследить за тем, как по часам B изменяется во времени это расстояние от начального до конечного своего значения.

Как оказывается, в условиях нашего примера можно упростить все рассмотрение и проследить за изменением во времени t расстояния $(x_A - x_B)$ от A до B, совместив начало координат системы x, t с B в тот момент времени, когда B мгновенно выключает свой мотор.

В гл. IV мы вернемся еще к этой задаче и рассмотрим ее с иных позиций, обратив внимание на тот промежуток времени, в течение которого оба мотора (A и B) продолжают работать. Здесь же начало счета времени мы будем вести по часам B, начиная с указанного момента времени, т. е. положим, что мотор B выключается в момент времени $t = 0$. Перенесем теперь в момент времени $t = 0$ и $T_B = T_0$ начало координат системы X, T, совместив его с положением B в этот момент времени $T_B = T_0$, т. е. в момент выключения мотора B.

Следовательно, мы переходим к новой системе координат X' T', положив, что $T' = 0$ при $T = T_0$, т. е. что, кроме переноса начала пространственных координат, сдвигается также и начало счета времени. Эта новая система координат X', T', однако, неподвижна относительно системы X, T — это та же инерциальная система отсчета. Отличается она от системы X, T лишь выбором начала координат. Новые координаты X', T' связаны с прежними X, T соотношениями

$$T = T_0 + T' \quad \text{и} \quad X = X' + K, \tag{III.9}$$

где K и T_0 — постоянные.

Как легко видеть, учитывая (III.3),

$$K = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{gT_0}{c}\right)^2} - 1\right] + \Delta X_0. \tag{III.10}$$

Действительно, при $T' = 0$, $T = T_0$ и согласно (III.9) и (III.3)

$$X'_A(T_0) = X_A(T_0) - K = -\Delta X_0,$$

т. е. X'_A (T_0) равно взятому со знаком минус постоянному расстоянию AB. Так и должно быть в соответствии с указанными выше условиями, поскольку A удален теперь от B на расстояние ΔX_0 в направлении отрицательных X.

Что касается системы x, t, то, совместив начало ее неподвижно с B, положительную ось x направим теперь от B к A, т. е. противоположно направлению осей X и X' и противоположно направлению движения x, t относительно X, T и (X', T').

Начальный момент времени $t = 0$ определяется условием, что $T_B = T_0$ при $t = 0$.

Легко убедиться в том, что преобразования Лоренца (I.28) и (I.29) при только что указанных предположениях дают

$$X' = X - K = (-x + \beta_0 ct)\gamma_0, \tag{III.11}$$

$$T' = T - T_0 = \left(t - \beta_0 \frac{x}{c}\right)\gamma_0, \tag{III.12}$$

где

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}}.$$

Поскольку X_A — заданная функция T, а K и T_0 — заданные постоянные (см. (III.10)), после подстановки (III.3) в (III.11) в левой части уравнений (III.11) и (III.12) будем иметь определенные функции T (или T_A).

Проделав, хотя и несколько длительные, но вполне элементарные выкладки, можно исключить T из уравнений (III.11) и (III.12). Опустив указанные выкладки, приведем лишь их результат, который дает выражение x_A в функции t:

$$x_A = \gamma_0 \Delta X_0 + \frac{c^2}{g} - \sqrt{\frac{c^4}{g^2} + (\beta_0\gamma_0\Delta X_0 - ct)^2}. \tag{III.13}$$

(Что касается обозначений β_0 и γ_0, см. выражение (III.7).)

Следует, может быть, еще раз подчеркнуть, что система координат x, t инерциальна, поскольку, как было предположено, начало ее движется вместе с B уже после выключения мотора B, и, следовательно, движение это равномерно и прямолинейно относительно X, T.

$x_A(t)$ может быть вычислено по данным развертки во времени хода Доплер-эффекта, наблюдаемого B.

Как видно, согласно (III.13) $x(t)$ есть возрастающая функция t.

Применительно к заданному уже числовому примеру можно теперь, пользуясь соотношением (III.13), определить расстояние AB как в начальный момент времени $t = 0$ (т. е. в момент остановки мотора B), так и в момент времени t_A остановки мотора A.

Известно, что A останавливает свой мотор в момент времени $T_A = T_0$. При $T_A = T_0$ левая часть уравнения (III.12) обращается в ноль, в правой же части $t = t_A$. Отсюда имеем

$$\left(t_A - \beta_0 \frac{x_A}{c}\right)\gamma_0 = 0 \tag{III.14}$$

и, следовательно,

$$t_A = \beta_0 \frac{x_A}{c} = \frac{\beta_0 \Delta x_0}{c} = \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}.\ [1] \tag{III.15}$$

---

[1] Так как согласно (III. 2) $x_A(t_A) = \Delta x_0$ и $\Delta x_0 = \Delta X_0 \gamma_0$.

(Что касается обозначения Δx_0, см. выражение (III.2)).

Подставив в (III.13) выражение t_A из (III.15), убеждаемся, что формула (III.13) действительно дает

$$x_A(t_A) = \gamma_0 \Delta X_0,$$

т. е. результат, который был уже получен ранее (см. формулу (III.2)) и который мы учли в правой части уравнения (III.13).

С другой стороны, при $t = 0$ формула (III.13) приводит к следующему выражению:

$$x_A(t = 0) = \gamma_0 \Delta X_0 + \frac{c^2}{g} - \sqrt{\frac{c^4}{g^2} + \beta_0^2 \gamma_0^2 \Delta X_0^2}. \qquad \text{(III.16)}$$

Подставляя данные нашего числового примера, получаем

$$t = 0,\ x_A \simeq 9 \cdot 10^{10}\ \textit{см} \simeq 10^6\ \textit{км}, \qquad \text{(III.17)}$$

$$t_A = \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c},\ x_A = \Delta x_0 = \gamma \Delta X_0 \simeq 9 \cdot 10^{16}\ \textit{см} \simeq 10^{12}\ \textit{км}. \qquad \text{(III.18)}$$

Следовательно, за время действия мотора B расстояние B от A, измеренное в системе x, t, увеличилось всего раз в десять в сравнении с ΔX_0 и стало равным примерно 1 млн. *км* (см. (III.17)). Однако *уже после выключения* мотора B это расстояние увеличивается еще в 1 млн. раз и становится равным $9 \cdot 10^{16}$ *см* (см. (III.18)), т. е. равным приблизительно $^1/_{10}$ светового года [1].

Время $t_A = \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}$, в течение которого расстояние от A до B нарастает (в системе x, t) до указанного значения, оказывается практически равным $t_A \simeq 3 \cdot 10^6$ сек. (можно положить $\beta_0 \simeq 1$).

Таким образом, B обнаружит, что «символическая» лента рулетки, которая «находится в его руках» и начало которой прикреплено к A, «сматывается», судя по показаниям его (B) часов, в течение примерно одного месяца, или, точнее, $^1/_{10}$ года. Понятно, что для наглядности мы прибегаем к совершенно условному жаргону.

Как покажет Доплер-эффект, наблюдаемый B, скорость dx_A/dt постепенно уменьшается.

В представлении B лента «рулетки» сматывается вследствие того, что в начальный момент времени $t = 0$ (т. е. в момент выключения мотора B) он застает A движущимся с некоторой скоростью v в направлении удаления от него A. Скорость движения A относительно B, равная dx_A/dt, получается путем дифференцирования выражения x (t), которое дает (III.13). Выражение dx_A/dt оказывается убывающей функцией t.

[1] Световой год — единица длины, которой пользуются для измерения астрономических расстояний. Световой год — расстояние, на которое свет распространяется в пустоте за один год при скорости распространения, равной 300 тыс. *км/сек*.

B обнаружит, что движение A относительно него замедляется и что, следовательно, мотор A продолжает работать[1] вплоть до момента $t_A = \frac{\Delta X_0 \gamma_0}{c} \beta_0$, когда скорость dx_A/dt становится равной нулю.

Таким образом, B вынужден будет заключить, что по его часам в течение свыше месяца после того, как он сам выключил свой мотор, мотор A продолжал еще работать. Однако B знает, что в соответствии с условиями нашего примера он и его партнер (космонавт A) снабжены идентичными «идеальными» часами и что до старта было условлено, что оба мотора (A и B), также идентичные, будут работать в течение *одинакового* времени (порядка всего 1 мин.), определяемого по этим идентичным часам. Можно даже предположить, что подача топлива—мощность каждого из моторов — регулируется автоматически соответствующей передачей в зависимости от положения стрелок на циферблатах часов.

Столкнувшись с таким противоречием, B придет к выводу, что с часами A что-то случилось, так как они стали идти медленнее, чем предполагалось, и сильно отстали от его собственных часов (в конечном итоге более чем на месяц).

В такой, только что сформулированной, редакции его заключение будет лишь частично верно. Известно, что с часами A ничего «не случилось» и они по-прежнему тождественны часам B. Однако же верно и то, что они стали отставать *относительно* часов B. Они ведь движутся относительно B со скоростью, близкой к скорости света, а мы знаем, что в этих условиях, с точки зрения B, ход их «замедляется». Стрелки часов A и B были поставлены на нуль в момент старта.

Выясним прежде всего, на каком делении, показывающем «собственное» время τ_0, стоит стрелка часов B в тот момент времени, когда мотор B выключается[2]. Ответ на этот вопрос мы получим, основываясь на (III.6) и исходных данных для системы X, T.

«Собственное» время

$$\tau_0 = \int_0^{T_0} \sqrt{1-\beta^2(T)}\, dT, \qquad \text{(III.19)}$$

поскольку, по предположению, A и B определяют «собственное» время по «идеальным» часам. Согласно (III.6) и числовым данным рассматриваемого примера имеем[3]

---

[1] Сила, вызванная действием мотора A, направлена против направления его движения в системе x, t.

[2] Этот «момент времени», конечно, зависит от выбора системы координат (системы отсчета). Однако τ_0, по сути дела, от выбора системы координат зависеть не может.

[3] В дальнейшем, в особенности в гл. IV, используются гиперболические функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$. Напомним определения этих функций и некоторые

$$\tau_0=\int_0^{T_0}\frac{dT}{\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}}=\frac{c}{g}\operatorname{arcsh}\frac{gT_0}{c}. \qquad \text{(III.20)}$$

Подставляя заданные значения $g=10^{10}$ *см/сек*^{2} и $T_0=3\cdot 10^7$ сек., вычисляем

$$\tau_0=\operatorname{arcsh}10^7\simeq 50 \text{ сек.} \qquad \text{(III.21)}$$

(т. е. порядка всего 1 мин., о чем было сказано выше).

С другой стороны, приращение $\Delta\tau_A$ собственного времени часов A за время $t_A=\frac{\Delta X_0\gamma_0}{c}$, протекшее в системе $x,\ t$ с момента выключения мотора B и до момента выключения мотора A, получим на основании аналогичного соотношения, отнесенного к системе $x,\ t$.

Продифференцировав (III.13), получаем [1]

$$\beta_A(t)=\frac{\beta_0\gamma_0\Delta X_0-ct}{\sqrt{\frac{c^4}{g^2}+(\beta_0\gamma_0\Delta X_0-ct)^2}}. \qquad \text{(III.22)}$$

Согласно (III.22)

$$\sqrt{1-\beta_A^2(t)}=\frac{c^2}{g}\frac{1}{\sqrt{\frac{c^4}{g^2}+(\beta_0\gamma_0\Delta X_0-ct)^2}}.$$

Откуда

$$\Delta\tau_A=\int_0^{t_A}\sqrt{1-\beta_A^2(t)}\,dt=\int_0^{\frac{\beta_0\gamma_0\Delta X_0}{c}}\sqrt{1-\beta_A^2(t)}\,dt=$$

$$=\frac{c}{g}\operatorname{arcsh}\frac{g}{c^2}\beta_0\gamma_0\Delta X_0. \qquad \text{(III.23)}$$

Подставляя в (III.23) численные значения, получаем

$$\Delta\tau_A\simeq 43{,}5 \text{ сек.} \qquad \text{(III.24)}$$

Поскольку оба мотора выключаются при одном и том же показании часов A и B (т. е. тогда, когда A и B показывают одно и

простейшие соотношения

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \operatorname{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,\ \operatorname{ch}^2x=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2x},$$

$$\frac{d(\operatorname{sh}x)}{dx}=\operatorname{ch}x,\quad \frac{d(\operatorname{ch}x)}{dx}=\operatorname{sh}x,\quad \frac{d(\operatorname{th}x)}{dx}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$

$$\operatorname{arcsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

[1] $\beta(T)$ в ранее приведенной формуле (III.19) есть скорость, определенная в системе $X,\ T$ (в долях скорости света); $\beta(t)$ — то же в системе $x,\ t$.

то же «собственное» время τ_0), должно иметь место следующее равенство:

$$\tau_0 = \tau_A\ (t = 0) + \Delta\tau_A. \qquad \text{(III.25)}$$

Подставляя численные значения (III.21) и (III.24) в (III.25), определяем τ_A $(t = 0)$:

$$\tau_0 = 50 \text{ сек.} = \tau_A\ (t = 0) + 43{,}5 \text{ сек.} \qquad \text{(III.26)}$$

Начальное показание в системе x, t часов A в момент времени $t = 0$ равно, следовательно,

$$\tau_A\ (t = 0) \simeq 6{,}5 \text{ сек.} \qquad \text{(III.27)}$$

Согласно (III.27) в момент времени $t = 0$ часы A показывают время τ_A $(t = 0)$, равное примерно 6,5 сек. Они, следовательно, отстали от B на 43,5 сек., так как при $t = 0$ $\tau_B\ (t = 0) = \tau_0 \simeq \simeq 50$ сек. (см. (III.21); $t = 0$ совпадает с моментом выключения мотора B).

Далее, отставание часов A от часов B нарастает и в момент выключения мотора A. Часы A, с точки зрения системы x, t, оказываются отставшими от B практически на $3 \cdot 10^6$ сек., т. е. на $^1/_{10}$ года (так как мотор A выключается при $t \simeq \tau_B \simeq \frac{\Delta X_0 \gamma_0}{c} = 3 \cdot 10^6$ сек., а часы A показывают при этом время $\tau_A = \tau_0 \simeq \simeq 50$ сек.). Следовательно, в течение времени $t = 3 \cdot 10^6$ сек. они практически стояли.

Одновременные в системе x, t показания часов A и B дают следующие значения τ_A и τ_B:

$$\tau_A = 6{,}5 \text{ сек.}, \quad \tau_B \simeq 50 \text{ сек.}, \quad t = 0;$$

$$\tau_A \simeq 50 \text{ сек.}, \quad \tau_B \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ сек.}, \quad t \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ сек.} \qquad \text{(III.28)}$$

(принимая во внимание, что можно пренебречь $\tau_B\ (t = 0) \simeq \simeq 50$ сек. в сравнении с τ_B $(t = 3 \cdot 10^6$ сек.$) = 3 \cdot 10^6 + 50$ сек.).

Итак, в «собственной системе» A и B, т. е. в той системе, в которой A и B, в конце концов, остановятся (и будут двигаться относительно X, T по инерции), часы A окажутся отставшими от часов B на $^1/_{10}$ года. Этот результат, так же как и предсказание относительно изменения расстояния между ними почти в миллион раз, можно сделать непосредственно, основываясь на преобразованиях Лоренца и минуя вычисления, приводящие к формуле (III.13).

Перейдем сразу же на несколько иной «жаргон».

Вместо того чтобы говорить о показаниях идеальных часов, летящих вместе с космонавтами A и B, можно говорить об их возрасте, имея в виду возраст «условного» человека, о котором упоминали выше.

Было предположено, что, по данным системы X, T, космонавты A и B—ровесники—они родились одновременно, как можно для упрощения предположить, на расстоянии ΔX_0 один от другого, т. е. там же, где и начинается их космический полет.

Если T'_A и T'_B — моменты рождения соответственно A и B, определенные по часам T', причем $T'_A = T'_B$, то по часам t соответствующее время $t_A = t_B + \Delta t$. Время Δt определим, основываясь на (III.11) и (III.12). Можно легко убедиться в том, что $t = \left(T' - \frac{X'\beta_0}{c}\right)\gamma_0$ и, следовательно,

$$\Delta t = \left(\Delta T' - \frac{\Delta X'_A \beta_0}{c}\right)\gamma_0. \tag{III.29}$$

При $\Delta T' = 0$ и $\Delta X'_A = -\Delta X_0$ (как это следует из условий задачи), согласно (III.29)

$$\Delta t = \frac{\beta_0\gamma_0\Delta X_0}{c}. \tag{III.30}$$

$\Delta t = \frac{\beta_0\gamma_0\Delta X_0}{c}$ — разность времен рождения A и B по данным регистрации их в системе x, t, причем согласно (III.30) A появился на свет позже, чем B.

Так обстоит дело до космического полета и, следовательно, до того, как контейнеры A и B подвергнутся воздействию ускоряющих их моторов.

Однако, поскольку оба космонавта A и B испытывают одно и то же *замедление* относительно x, t, это замедление (или ускорение относительно X, T) не окажет влияния на величину Δt, т. е. на разность возрастов A и B, которая будет иметь место после того, как оба космонавта остановятся [1] в системе x, t. В соответствии с (III.30) B окажется старше A примерно на один месяц ($3 \cdot 10^6$ сек.).

A и B подвергаются совершенно одинаковому ускорению (или замедлению) в течение одинакового времени t_0, как увидим, равного $3 \cdot 10^7$ сек. (т. е. в течение времени $t_0 = T_0$).

Различие воздействий ускоряющих сил лишь в том, что тождественные траектории движения по тождественному закону, определяющему зависимость скорости от времени, сдвинуты в пространстве на расстояние, равное ΔX_0 в системе X, T и $\gamma_0 \Delta X_0$ [2] в системе x, t.

Поскольку пространство однородно, такой перенос траектории на какое-то определенное расстояние не может сказаться на конечном эффекте полета; надо иметь в виду, что в системе x, t, как это следует из теории относительности согласно изложенному выше, A и B проносятся по своим *тождественным*

[1] Однако именно лишь после того, *как оба они* остановятся в системе x, t, A останавливается с опозданием примерно на один месяц.

[2] $\gamma_0 \Delta X_0$ — расстояние между A и B после того, как они останавливаются один относительно другого.

траекториям *в разное время* — отсюда указанная нами зависимость от времени $x(t)$ расстояния между A и B, если фиксировать их *одновременные* ($t_A = t_B$) положения на их *соответствующих траекториях.*

Говоря о траекториях A и B, до сих пор имелись в виду *пространственные* их траектории — прямолинейные как в системе X, T, так и в системе x, t.

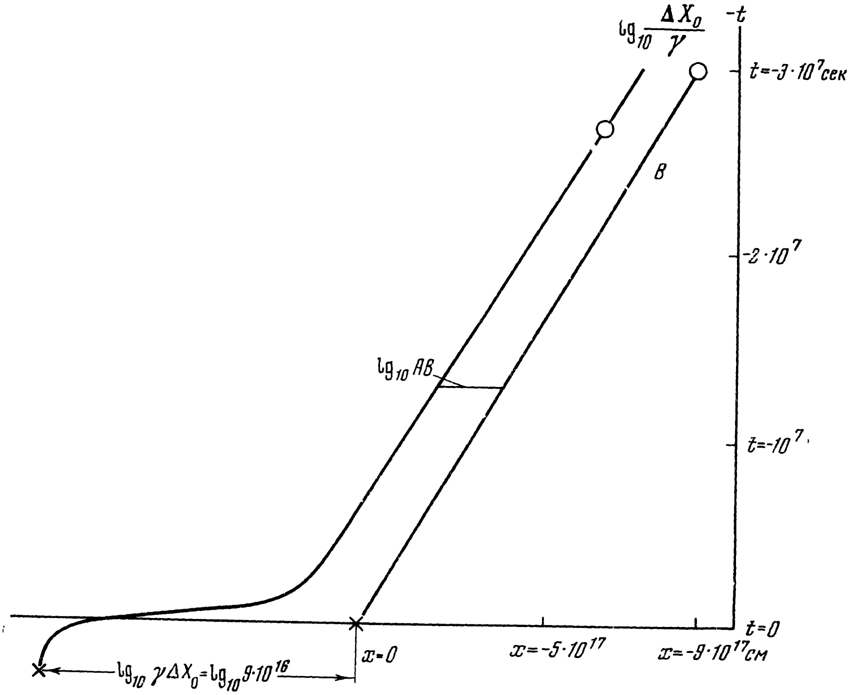


Рис. 9

Для сокращения дальнейшего изложения будем пользоваться также термином «траектория» (траектория в кавычках), имея в виду «пространственно-временную траекторию», т. е. кривую, описывающую в нашем случае движение в координатах X, T (или x, t) и определяющую зависимость X (или x) от T (или t).

Такая «траектория» космонавта B в координатах x, t показана на рис. 9 (кривая B).

Мы проследили за изменением расстояния от A до B практически во всем интервале значений $x_A - x_B$, хотя и начали рассмотрение лишь с того момента ($t = 0$), когда B выключает свой мотор. После этого остановившийся в системе x, t космонавт B наблюдает замедляющееся относительно него движение A в течение еще около одного месяца по своим часам. Однако мы застаем при этом B в конце его пути в системе x, t. Если представить себе третьего партнера (обозначим его C), который *все время* находился в точке $x = 0$ и, будучи неподвижным в системе x, t, наблюдал за замедляющимся относительно него (т. е. C) движением B, то нетрудно понять, что C, следя по своим часам за полетом B до момента остановки последнего в точке $x = 0$, $t = 0$, найдет, что полет B после приведения в действие мотора B и до момента выключения этого мотора длился один год, или, точнее, $3 \cdot 10^7$ сек.

В самом деле, движение B представлялось бы C (в его системе x, t) таким же, каким оно представлялось бы наблюдателю, неподвижному в системе X, T, если бы B в момент остановки своего мотора включил бы его мгновенно снова, изменив, однако, на противоположное направление вызываемой им движущей силы.

Ясно, что обращенное движение, с момента начала замедления до момента остановки, длилось бы так же долго, как и прямое движение с начала положительного ускорения до его окончания.

Длительность времени, в течение которого A и B проносятся по своим соответственным траекториям, ускоряясь в системе X, T (определенная по часам этой системы), совпадает, следовательно, с длительностью замедленного движения по траектории в системе x, t, определенной по часам этой последней системы.

Таким образом, если время, в течение которого C по своим часам наблюдает замедление B (или A), обозначить t_0, то имеет место равенство

$$t_0 = T_0 \tag{III.31}$$

(как это и было отмечено выше).

Мы уже получили уравнение для x_A в функции t, исходя из системы уравнений (III.11) и (III.12) после того, как исключили из них T_A, подставив предварительно в (III.11) выражение (III.3) для X_A в функции T_A.

Таким же образом, введя в уравнение (III.11) вместо X_A выражение (III. 4) для X_B в функции T_B и исключив затем из системы уравнений (III.11) и (III.12) T_B, можно получить и уравнение движения, или уравнение «траектории» B для интервала времени действия замедляющей это движение (с точки зрения C) силы мотора B.

Не приводя элементарных, хотя и несколько запутанных выкладок, которые пришлось бы проделать, запишем лишь их результат, который, впрочем (если принять во внимание (III. 31)), вытекает непосредственно из приведенных выше рассуждений, а именно при условии, что $-3 \cdot 10^7$ сек. $< t \leqslant 0$,

$$x_B = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \left(\frac{gt}{c}\right)^2}. \tag{III.32}$$

Из (III. 32) видно, что $x_B = 0$ при $t = 0$ и $x_B = -\left(\frac{c^2}{g}\gamma_0 - \frac{c^2}{g}\right)$ при $t = -t_0 \simeq -3 \cdot 10^7$ сек., причем скорость $\frac{dx_B}{dt} = \frac{gt}{\sqrt{1+\left(\frac{gt}{c}\right)^2}}$ равна нулю при $t = 0$.

Далее, принимая во внимание, что движение A повторяет движение B с опозданием во времени на $\frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}$ и со сдвигом на длину $\Delta X_0 \gamma_0$ по оси x в конце пути A и B, получим, что уравнение движения может быть представлено в виде

$$x_A = \gamma_0 \Delta X_0 + \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{g^2\left(t - \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}\right)^2}{c^2}}. \tag{III.33}$$

Уравнение (III.33) справедливо в интервале t от

$$t_1 = -t_0 + \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c} \text{ до } t_2 = \frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}.$$

При этом видно, что (III. 33) совпадает с ранее выведенным уравнением (III. 13) для x_A.

На рис. 9 показана «траектория» B в координатах x, t и в масштабе, указанном по осям x и t (кривая B), на что мы уже сослались выше.

Разность абсцисс A и B (при одном и том же t) дает зависящее от t расстояние от A до B в момент времени t, вычисленное по формулам (III.33) и (III.32) и показанное на рис. 9 в логарифмическом масштабе. Кружками на соответствующих кривых отмечены моменты старта, соответствующими крестиками — моменты остановки моторов A и B.

Наблюдатель C видит объекты A и B приближающимися к нему вначале (до включения мотора B) с одинаковой скоростью, близкой к скорости света. Он «видит» A и B удаленными при этом один от другого на расстояние, равное $\Delta X_0/\gamma_0$, т. е. всего лишь 9 *м*. A летит впереди B (относительно наблюдателя C).

В силу того, что замедляющий B мотор начинает действовать раньше, скорость движения B (dx_B/dt) становится меньше скорости A; он начинает отставать от A, расстояние от A до B увеличивается. Это увеличение расстояния в конечном итоге в 10 млн. раз есть прямое следствие запаздывания движения A относительно движения B.

Здесь имеется в виду сравнение расстояния (конечного), измеренного в системе x, t, с расстоянием (начальным) в системе X, T. Речь, следовательно, идет о сравнении расстояний с точки зрения космонавтов. Если же сравнивать конечное расстояние в системе x, t, равное $9 \cdot 10^{16}$ *см*, с начальным расстоянием, определенным в той же системе x, t (следовательно, с точки зрения C), то соотношение между ними выражается числом, равным 10^{14} (γ_0^2).

Когда в момент времени $t = 0$ B остановится относительно C, A будет еще в течение $^1/_{10}$ года (времени t) продолжать свой полет, и расстояние от A до B, равное теперь x_A, будет возрастать вплоть до момента остановки A (относительно B и C), когда это расстояние станет равным, как мы видели, примерно $^1/_{10}$ светового года [1].

Подведем итог полученным нами выводам. Наблюдатель, неподвижный в системе X, T, «видит» A и B ускоряющимися *синхронно* в течение времени $T_0 = 3 \cdot 10^7$ сек. по тождественным «траекториям», сдвинутым на расстояние ΔX_0 по оси X одна относительно другой.

Наблюдателю C движение B и A (каждого в отдельности) представляется таким, каким оно наблюдалось бы в системе X, T, если бы по достижении конечной скорости (A и B) действие их моторов было обращено и скорость A и B уменьшалась затем до нуля. Следовательно, по наблюдениям C скорость A и B уменьшается от первоначального значения, равного $\simeq \frac{gt_0}{\gamma_0} \simeq c$, до нуля за время $t_0 = T_0 = 3 \cdot 10^7$ сек. Однако движение A запаздывает относительно

---

[1] A движется относительно B (после остановки B) в течение $^1/_{10}$ года со скоростью, практически равной скорости света.

При сравнении с ΔX_0 *начального* расстояния, с точки зрения системы x, t, объекты A и B движутся в системе x, t и они неподвижны в системе X, T (при $T \leqslant 0$).

Когда же рассматривается *конечное* расстояние, объекты A и B, или, точнее (как мы условились выше,— см. (III.1) и (III.2)), a и b, неподвижны в системе x, t (и движутся со скоростью β_0 относительно системы XT).

Нетрудно понять, что в связи с этим согласно (I.34) и (I.35) в первом случае искомое (т. е. начальное) расстояние равно (в системе x, t) $\Delta X_0/\gamma_0$, тогда как во втором случае искомое расстояние (конечное) равно

$$\frac{\Delta X_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \gamma_0 \Delta X_0$$

(см. формулу (III. 2)).

движения B на время, равное $\frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c} \simeq 3 \cdot 10^6$ сек. «Траектория» A сдвинута при этом по оси x относительно траектории B на расстояние, равное $\gamma_0 \Delta X_0$, и, кроме того, в соответствии с только что сказанным на $\frac{\beta_0 \Delta X_0 \gamma_0}{c}$ по оси t.

По часам A, так же как и B, действие их моторов длится всего около 1 мин. (точнее, около 50 сек.).

Имея выражение (III.22) для скорости dx_A/dt в инерциальной системе x, t в функции t, можно вычислить величину доплеровского смещения частоты излучения .

Если ν' — принимаемая B частота, а ν_0 — собственная частота передатчика A, то (см. (I. 14))

$$\frac{\nu'}{\nu_0} = \frac{1 - \frac{dx_A}{cdt}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx_A}{cdt}\right)^2}} . \tag{III.34}$$

Подставив в (III.34) выражение (III.22) для dx_A/dt и численные значения рассмотренного нами примера, можем убедиться в том, что при $t=0$ $\nu' = 5 \cdot 10^{-7} \nu_0$, т. е. налицо такое значительное инфракрасное смещение, что если бы источник A испускал, например, одну из интенсивных линий γ-лучей радия (RaC), частота которой $\sim 10^{20}$ 1/*сек*, то принимаемая B частота сместилась бы в инфракрасную область спектра.

Положив $t = 0$, имеем в виду момент *испускания* высокочастотного сигнала. При $t = t_A = \frac{\beta_0 \gamma_0 \Delta X_0}{c}$, имея в виду, что t_A — момент времени испускания сигнала, формула (III.34) дает $\nu'/\nu_0 = 1$, как и должно быть, поскольку при $t = t_A = \frac{\beta_0 \gamma_0 \Delta X_0}{c}$ скорость A становится равной нулю.

Вычисляя промежуточные значения ν'/ν_0, которые изменяются от $5 \cdot 10^{-7}$ до 1, и рассматривая ход смещения частоты ν' в зависимости от *времени приема* t_B, можно было бы убедиться в том, что в течение длительного времени $\simeq 3 \cdot 10^6$ сек. частота приема изменяется незначительно — всего в 2 раза:

$$\frac{\nu'}{\nu_0} = 10^{-6} \text{ (при } t_B = 3 \cdot 10^6 \text{ сек.)}.$$

Времени приема сигнала $t_B = 3 \cdot 10^6$ сек. соответствует время его испускания $t_A = 1{,}5 \cdot 10^6$ сек. (В течение большей части интервала времени $t=3 \cdot 10^6$ сек. A движется в системе x, t со скоростью, практически равной скорости света.)

Поскольку расстояние между A и B после завершения замедления A относительно B оказывается равным $9 \cdot 10^{16}$ *см*, или $^1/_{10}$ светового года, время, необходимое для того, чтобы световой сигнал, посланный A в момент его остановки, достиг B, равно $^1/_{10}$ года (речь идет о промежутке времени t).

После того как наблюдатель B убедится в том, что доплеровское смещение стало равным нулю и что A, следовательно, уже неподвижен относительно него (а это он констатирует в момент времени $t_B = 6 \cdot 10^6$ сек. [1]), он в принципе сможет уже и радиолокационным методом определить, на каком расстоянии от него остановился A. Это определение и даст длину, равную $9 \cdot 10^{16}$ *см* (о чем уже упоминалось), тогда как начальное расстояние от A до B было равно $9 \cdot 10^9$ *см* (т. е. оно было в $\gamma_0 = 10^7$ раз меньшим).

---

[1] Так как, начиная с момента времени $t_A = 3 \cdot 10^6$ сек., сигнал испускается неподвижным источником A, но лишь по истечении также $3 \cdot 10^6$ сек. после этого, т. е. в момент времени $t_B = 6 \cdot 10^6$ сек., B начинает принимать сигналы неподвижного относительно него источника A.

Если мы продолжим выяснение всех особенностей нашего примера, предполагающего обстановку фантастического полета, то придем к ряду следствий, которые могут показаться парадоксальными.

Положим, что возможности космической радиосвязи, которыми располагают наблюдатели на Земле, почти уже неограниченны. «Корабли» A и B стали космическими телами, удаляющимися от Земли со скоростью, практически равной скорости света. Как мы видели, космонавт B после остановки своего мотора движется еще относительно A в течение $^1/_{10}$ года по своим собственным часам. Но что значит этот промежуток собственного времени B ($\Delta\tau_B = 3\cdot10^6$ сек.) для наблюдателей на Земле?

Поскольку ход часов B замедлен в $\gamma_0 = 10^7$ раз относительно хода земных часов, за время $\Delta\tau_B = 3\cdot10^6$ сек. пройдет $\Delta T_B = 3\cdot10^6\cdot10^7 = 3\cdot10^{13}$ сек. земного времени.

Но $3\cdot10^{13}$ сек.— это миллион лет!

Да, на время передачи сигнала от A к B уйдет еще 1 млн. земных лет (см. примеч. на стр. 89).

Поскольку A и B все это время движутся практически со скоростью света, то в момент исчезновения доплеровского смещения, наблюдаемого B, он будет находиться на расстоянии от Земли, равном 2 млн. световых лет. Если B радирует на Землю сведения о том, что он наблюдает, и если поставить вопрос о том, когда сообщение о прекращении доплеровского смещения сигнала A, регистрируемого приборами B, достигнет Земли, то окажется, что на Земле об этом узнают еще через 2 млн. лет после того, как это сообщение будет послано.

Таким образом, сообщение это будет получено на Земле через 4 млн. лет после старта космонавтов!

Нетрудно видеть, что сообщение от A о конце наблюдаемого им доплеровского смещения излучения передатчика B придет по истечении практически примерно всего лишь двух лет (!) после момента старта космонавтов. С учетом времен распространения светового сигнала это и будет означать, что B остановился относительно A по истечении года с момента старта [1].

В определении момента времени остановки одного из космонавтов относительно другого налицо неоднозначность и кажущееся противоречие в постановке вопроса об относительном движении A и B.

По данным сообщений, получаемых от B (на основании наблюдаемого им доплеровского смещения), движение космонавта A относительно B прекращается по истечении миллиона лет после момента старта. (В самом деле, B сообщит на Землю, что A остановился относительно него по истечении $^1/_{10}$ года после старта по его, B, часам. Наблюдатель на Земле знает, что практически в течение всего этого времени — времени t — часы B шли в 10 млн. раз медленнее земных часов, поскольку $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = 10^7$.)

---

[1] Время, необходимое для того, чтобы сигнал, посланный B, достиг A, оказывается всего порядка малых долей секунды по земным часам, а время нахождения в пути сигнала от A на Землю — порядка одного года. Напомним, что до момента остановки мотора A он двигался со скоростью, практически равной скорости света (по земным часам) и, следовательно, удалился от Земли на расстояние, близкое к одному световому году.

Следует помнить, что сигнал от A к B *догоняет* B, удаляющегося от A со скоростью, практически равной скорости света. Наоборот, A движется практически с такой же скоростью навстречу сигналу, испущенному передатчиком B.

Так обстоит дело, если обмен сигналами рассматривать с точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле.

Вместе с тем, по данным сообщений, поступающих от A, момент остановки B относительно A наступает по истечении всего одного года времени T после старта.

Таким образом, на первый взгляд налицо следующая парадоксальная ситуация.

Если, с точки зрения земного наблюдателя, поставить вопрос о времени (после старта) остановки B относительно A, то получится ответ: миллион лет. Если же спросить, когда, с точки зрения того же, т. е. земного, наблюдателя, A остановился относительно B, то ответ на этот вопрос оказывается уже совершенно иным: A остановился относительно B по истечении всего лишь одного года с момента старта.

В действительности, конечно, B относительно A и A относительно B останавливаются одновременно. То, что они остановились один относительно другого, означает, однако, то, что оба они остановились относительно той инерциальной системы координат, в которой они затем (после остановки) покоятся. Это имеет место в определенный момент времени (t_A) указанной системы (x, t). Однако система отсчета x, t движется относительно земного наблюдателя со скоростью, близкой к скорости света, и в момент остановки расстояние между A и B в ней равно $9 \cdot 10^{16}$ *см*, или $^1/_{10}$ светового года. Времена T_A и T_B, соответствующие одному и тому же (для A и B) моменту времени t_A, поэтому не совпадают. В соответствии с (III.12) момент T_B для земного наблюдателя наступает на миллион лет позже T_A [1]. При $\Delta t = 0$ (III.12) дает

$$\Delta T = T_A - T_B = -\frac{\beta_0 \Delta x_A}{c}\gamma_0 \simeq -\frac{\Delta x_0}{c}\gamma_0,$$

$$\Delta x_0 = 9 \cdot 10^{16}\,\textit{см},\ \Delta T \simeq -\frac{9 \cdot 10^{16} \cdot 10^7}{3 \cdot 10^{10}} = -3 \cdot 10^{13}\ \text{сек}.$$

---

[1] Таким образом, мы пришли к выводу, что в течение миллиона лет (времени T) после старта A представляется движущимся относительно B и что лишь по истечении этого времени A останавливается относительно B.

Налицо определенное противоречие с формулой сложения скоростей (I. 41).

Если скорость A относительно B обозначить β_{AB}, скорости же A и B в системе X, T обозначить β_A и β_B соответственно, то согласно условиям задачи постоянные при $T \geqslant 3 \cdot 10^7$ сек. скорости β_A и β_B равны ($\beta_A = \beta_B$) и (I.41) в противоречии с вышеуказанным выводом дает

$$\beta_{AB} = \frac{\beta_A - \beta_B}{1 - \beta_A \beta_B} = 0$$

при $T \geqslant 3 \cdot 10^7$ сек. Однако формула (I.41) безоговорочно применима лишь в случае, если A и B движутся прямолинейно и равномерно не только в данный момент времени (или позже определенного момента времени), но если движение их было равномерным и прямолинейным и в течение достаточно длительного времени и в прошлом.

В условиях рассмотренной нами задачи о космонавтах соотношение (I.41) становится справедливым лишь по истечении миллиона лет после старта.

Следует, однако, подчеркнуть, что так обстоит дело постольку, поскольку речь идет об определении скорости одного из объектов относительно другого в условиях, когда расстояние между ними очень велико.

В гл. IV мы убедимся в том, что формула сложения скоростей справедлива и в случае неравномерного движения при условии, если речь идет о сложении мгновенных значений скоростей двух объектов, совмещенных в данный момент времени в пространстве.

Вместе с тем, если иметь в виду не момент времени остановки A относительно B (или B относительно A), а моменты времени выключения моторов A и B, то в представлении самих A и B их моторы останавливаются *неодновременно* (мотор A на $^1/_{10}$ года времени t позже, чем мотор B). Однако в соответствии с исходными данными задачи, с точки зрения земного наблюдателя, оба мотора выключаются *одновременно* при $T = T_0$.

Здесь мы снова сталкиваемся с относительностью представлений об одновременности событий.

Мы только что рассмотрели задачу о фантастическом полете двух космонавтов со скоростью, очень близкой к скорости света. Из того, что было изложено, выяснилось, что если оба космических корабля (A и B) будут подвержены ускорению в течение одного и того же собственного времени в совершенно тождественных условиях (если их «собственные ускорения» — см. (IV. 32) — одинаковы), то космонавт A, летящий позади своего партнера B, станет от него отставать: расстояние между A и B по мере их ускорения увеличивается.

Допустим, что осуществление космического полета с некоторой субсветовой скоростью становится реальным и что требуется этот полет провести так, чтобы расстояние B от A (и A от B) в полете при приближении к скорости света оставалось постоянным.

Как в этом случае должны работать двигатели A и B? Качественно ответ на этот вопрос можно дать сразу, не прибегая к каким-либо вычислениям: сила тяги мотора B, летящего впереди A, должна быть меньше силы мотора A и соответственно «собственное ускорение» — ускорение, определяемое по часам космонавта B, должно быть меньше ускорения A.

Несложное вычисление покажет, что собственное ускорение g_B должно быть в определенном, постоянном во времени, отношении меньшим ускорения g_A. А именно, как это вытекает из соотношений, приведенных в гл. IV (см. Дополнение, п. 1, формула (IV.138)) g_B и g_A должны быть связаны следующей зависимостью:

$$g_B = \frac{g_A}{1 + \frac{g_A x_0}{c^2}}.$$

Здесь x_0 — заданное, остающееся постоянным, расстояние между A и B[1].

Если с точки зрения космонавтов, расстояние между ними остается неизменным (равным x_0) и поэтому в каком-либо проводе (или же тросе), протянутом между их кораблями, не возникнут натяжения и он не разорвется, то, с точки зрения наблюдателя, остающегося на Земле, оба корабля (A и B) по мере возрастания их скорости сближаются.

---

[1] Разность $g_B - g_A$ не пренебрежимо мала лишь в случае расстояний x_0 порядка астрономических длин, а именно при $\frac{gx_0}{c^2} \approx 1$.

Расстояние ΔX_{AB} между ними, по данным земных наблюдений, уменьшается. Изменение этого расстояния ΔX_{AB} во времени T дают формулы (III.3) и (III.4) с учетом (IV.138).

Подставив в (III.3) и (III.4) соответственно g_A и g_B (согласно (IV.138)) и вычтя X_A из X_B, получим

$$\Delta X_{AB} = \frac{c^2\left(1+\frac{g_A x_0}{c^2}\right)}{g_A}\left\{\sqrt{1+\left[\frac{g_A T}{c\left(1+\frac{g_A x_0}{c^2}\right)}\right]^2}-1\right\} - \frac{c^2}{g_A}\left[\sqrt{1+\left(\frac{g_A T}{c}\right)^2}-1\right]+x_0 = \frac{c^2}{g_B}\sqrt{1+\left(\frac{g_B T}{c}\right)^2} - \frac{c^2}{g_A}\sqrt{1+\left(\frac{g_A T}{c}\right)^2}. \tag{III.35}$$

(Мы учли, что согласно принятым в (III.3) и (III.4) обозначениям в рассматриваемой нами сейчас задаче начальное расстояние между A и B в момент старта $\Delta X_0 = x_0$.)

Согласно (III.35) при $T \to \infty$ $\Delta X_{AB} \to 0$, тогда как $\Delta x_{AB} = x_0 = \text{const}$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

«ПАРАДОКС ЧАСОВ» И ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В данной главе мы подробно рассмотрим простые соображения, позволяющие разрешить так называемый «парадокс часов», не предполагая условий предельного случая бесконечно больших ускорений и бесконечно малого времени действия ускоряющей или замедляющей силы.

Получим формулы, описывающие движение тела A (неподвижного в некоторой инерциальной системе X, T), рассматривая это движение в системе координат, начало которой в течение данного интервала времени, или какой-то части этого времени, движется ускоренно.

Интересующие нас соотношения получатся, если «смоделировать» неинерциальную систему B (картина x, t) как совокупность множества «мгновенных» инерциальных систем, выбирая их для любого заданного момента времени t_0 так, что тело B представляется в данный момент времени покоящимся в соответствующей «мгновенной» инерциальной системе.

Если рассматривать движение A в «картине x, t», имея в виду замкнутый цикл перемещений B относительно A, то на протяжении какой-то, более или менее длительной, части этого цикла часы A представляются идущими быстрее часов B, хотя при рассмотрении в указанной картине часы A движутся, а часы B покоятся.

К такому выводу можно прийти непосредственно, не прибегая к каким-либо, хотя бы и не сложным математическим преобразованиям, основываясь при этом только на соотношениях Лоренца и на предположении об идеальности часов.

Для того чтобы выявить некоторые особенности рассматриваемого решения задачи и для того также, чтобы подвести к некоторым существенным обобщениям, целесообразно, введя определенные обозначения, представить формулы преобразования от координат x, t к координатам X, T в виде уравнений, содержащих гиперболические функции, аргументом которых является некоторая функция $\theta(t)$, зависящая от ускорения g начала координат.

Выполнив несложные вычисления и приняв во внимание, что, как показали точнейшие измерения, «гравитационная» масса пропорциональна массе «инертной», можно убедиться в том, что движение тела A в картине B представляется как движение тела, свободно падающего в некотором эффективном поле тяготения, потенциал которого определяется ускорением начала B системы координат x, t.

Далее оказывается, что собственное время часов A, выраженное в функции времени t, зависит от значения потенциала эффективного поля тяготения в той точке x, где находятся эти часы A.

Таким образом, вводя эффективное гравитационное поле (взамен учета влияния ускорения начала координат), мы вынуждены допустить, что в известном смысле это эффективное гравитационное поле оказывает влияние на ход находящихся в нем идеальных часов. Убыстрение хода движущихся часов A относительно покоящихся B, о котором шла речь выше, можно тогда приписать влиянию эффективного гравитационного поля.

Согласно принципу эквивалентности Эйнштейна зависимость собственного времени τ от времени координатного (t), полученную таким образом для эффективного поля, можно применить и в том случае, если рассматриваются часы, находящиеся в истинном (или перманентном) гравитационном поле.

«Локально», т. е. в непосредственном окружении данной точки пространства, истинное статическое поле тяготения может быть заменено «эффективным» полем соответствующим образом ускоренной системы координат. Истинное поле тяготения в целом (во всем пространстве) можно «смоделировать», введя представление о множестве таких «локальных» ускоренных систем координат, подобно тому как неинерциальную систему (закон ускорения начала которой задан) можно «смоделировать», представив ее как совокупность множества «мгновенных» *инерциальных* систем отсчета, о чем мы упомянули.

Этим путем, на основе принципа эквивалентности и указанных выше соотношений, можно прийти к выводу о существовании гравитационного смещения спектральных линий. О новейших измерениях гравитационного смещения кратко говорится в § 5 данной главы.

§ 1. Координатное время и «парадокс часов»

В § 1 гл. I, рассматривая двух партнеров A и B, один из которых движется равномерно и прямолинейно относительно другого, мы получили соотношения, характеризующие «замедление течения времени» в движущихся системах, основываясь на трех сформулированных постулатах.

Как наиболее существенное для развитых затем выводов следует выделить то положение, согласно которому любого из двух «партнеров» (A или B) мы вправе считать покоящимся, а — другого движущимся относительно него. Нами, однако, была сделана тогда оговорка, что это положение верно лишь в применении к группе равномерных и прямолинейных движений.

Основные идеи созданной Эйнштейном и развитой затем его последователями общей теории относительности и теории тяготения были направлены к устранению упомянутого нами ограничения и обобщению «принципа относительности» на случай также и неравномерного движения одного из тел (A или B) относительно другого [1].

---

[1] В последнее время были высказаны определенные возражения против укоренившейся в научной литературе интерпретации принципиальных основ теории тяготения Эйнштейна (из которой исходил и сам автор этой теории) как обобщения так называемой специальной (или «частной») теории относительности (см., например, [12]).

Не ставя своей задачей изложение основ общей теории относительности (или теории тяготения) Эйнштейна, мы, однако же, коснемся в дальнейшем некоторых ее исходных положений в той мере, в какой они имеют отношение к «парадоксу часов».

Прежде чем проиллюстрировать на определенных простых и уже рассмотренных нами примерах применение некоторых идей общей теории относительности, предварительно продолжим еще рассуждения, приведенные в гл. I и II.

Выше, рассматривая определенные замкнутые циклы относительных движений (A и B), мы при этом предполагали, что одному из указанных тел в определенный момент времени сообщается мгновенное, бесконечно большое ускорение в течение бесконечно малого промежутка времени. Такое предположение было введено лишь для упрощения и для большей наглядности изложения.

Не представляет труда убедиться в том, что выводы, к которым мы пришли в гл. II, верны и в том случае, если силы, сообщающие ускорение одному из «партнеров», действуют на определенном отрезке его пути в течение *конечного промежутка* времени Δt.

С другой стороны, следует также вникнуть и в то, что влечет за собой переход к предположенному нами ранее предельному случаю: $\Delta t = 0$ и ускорение $g = \infty$, тогда как значение интеграла

$$v = \int_0^{\Delta t} \frac{dv}{dt} dt \qquad \text{(IV.1)}$$

задано и остается равным определенной конечной величине.

В дальнейшем будем рассматривать систему координат x, t, в начале которой находится B, движущийся *ускоренно* относительно неизменной инерциальной системы X, T. Следовательно, B все время находится в начале координат x, t и остается неподвижным в этой системе координат.

Система x, t — «система B» — не инерциальна.

В дальнейшем будем еще говорить о «мгновенной инерциальной системе — системе B_0».

Начало этой последней системы координат в каждый данный, фиксированный, но произвольно выбранный момент времени совпадает с B.

Постоянная во времени скорость v_0 системы B_0 относительно системы A (X, T) совпадает с *мгновенным* значением [1] скорости

[1] Речь идет, следовательно, о множестве инерциальных систем, из которых в каждый данный, произвольно выбранный момент времени t_0 может быть выделена определенная инерциальная система, удовлетворяющая указанным в тексте условиям.

B для данного момента времени t_0, т. е. эта скорость

$$v_0 = \left(\frac{dX_B}{dT}\right)_{t=t_0}. \qquad \text{(IV.2)}$$

Таким образом, будем рассматривать три различные системы отсчета, из которых одна — система B (координаты x, t) — неинерциальна и две другие системы — B_0 и A (X, T) — инерциальны.

Для того чтобы фиксировать внимание читателя, будем и в дальнейшем изложении иногда пользоваться сравнением систем отсчета с «поездом» и «железнодорожным полотном». B и B_0 можно сравнить с поездами, несущимися со субсветовой скоростью. Системе X, T можно тогда сопоставить железнодорожное полотно с отметками на нем расстояний и часами, находящимися на станциях.

В поездах, о которых идет речь, имеются часы, идентичные со станционными, и масштабы, также идентичные с теми, которыми измерены расстояния вдоль железнодорожного пути.

Если системам отсчета B и B_0 сопоставить такого рода поезда, то следует представлять себе, что поезд B движется, ускоряясь [1], и, набирая скорость, обгоняет поезд B_0, движущийся с постоянной скоростью.

В выбранный момент времени t_0 «поезд B», поравнявшись с B_0 (и имея в данный момент скорость, равную скорости B_0), обгоняет этот поезд B_0.

Для того чтобы уточнить определение координат x, t в целях конкретизации изложения, воспользуемся, однако, другим представлением. Будем представлять себе «координатную решетку» системы B сложенной из ряда соединенных в ее узлах «масштабных стержней». Эти масштабы подвержены лоренцеву сжатию. Длина их относительно некоторой инерциальной системы вследствие этого сжатия изменяется, как мы предположим, «безынерционно», в соответствии с изменением скорости $(dX/dT)_x$ различных точек системы x, t относительно X, T.

Ось x системы B параллельна оси X исходной инерциальной системы X, T, и направление скорости ее начала B всегда совпадает с направлением осей x и X.

Заметим, что только что сформулированное «определение» воображаемых масштабных элементов («стержней»), из которых составлена решетка B, означает, что в каждый данный, произвольно выбранный нами момент времени все узлы решетки B могут быть совмещены с узлами мгновенной инерциальной системы, т. е. решетки B_0.

---

[1] Или, наоборот, замедляя скорость, если ускорение B отрицательно. В этом последнем случае B_0 обгоняет B.

В узлах той и другой координатной решетки (B и B_0) будем представлять себе расположенными часы. Что касается решетки B_0, то часы в ее узлах — это обычные часы (как мы всегда предполагаем, идеальные), синхронизированные между собой в соответствии с критерием Эйнштейна. Все они показывают свое «собственное время», причем положения стрелок часов в начале системы B_0 и совмещенных с ними (в момент t_0) часов B совпадают.

Что же касается часов, находящихся в узлах решетки B, то предположим, что они обладают свойствами, отличающими их от обычных часов. Ход этих часов определен так, что их показания (в любой произвольно выбранный нами момент времени) совпадают с показанием совмещенных с ними часов мгновенной инерциальной системы B_0. Они показывают координатное время t системы B. Речь здесь идет об определении понятия координатного времени. Для уточнения этого определения необходимо, однако, иметь в виду еще и следующее.

Координатное время, показываемое часами, находящимися в начале системы B, мы положили равным собственному времени этих ускоренно движущихся часов. Если часы, находящиеся в начале ускоряемой системы B, показывают «собственное время», то показания всех других координатных часов той же системы B *не совпадают* с их «собственным временем».

Координатные часы, вообще говоря, фиктивны. В частности, координатные часы, рассматриваемые нами, не могут быть хотя бы даже и с некоторым приближением реализованы в виде какой-либо физической системы тел, поскольку из определения координатного времени вытекает, что *скорость хода* таких часов зависит от выбора начала координат системы B.

Оговорим, что следует, конечно, еще уточнить смысл слов «скорость хода часов» (в данном случае «координатных»), так как речь идет о «скорости хода» одних часов относительно каких-то других. Однако к этому вопросу мы вернемся после того, как будут выведены формулы для перехода от инерцильной системы отсчета (A) к неинерциальной (B).

Отметим здесь же, кроме того, еще и некоторые другие положения, к уточнению и доказательству которых вернемся в ходе дальнейшего изложения, после того как будут выведены только что указанные соотношения.

1. Мгновенную инерциальную систему мы определили, потребовав, чтобы скорость движения начала системы координат B относительно совпадающего с ним начала координат B_0 в данный, выбранный нами, момент времени была равна нулю.

Из самого определения координатного времени следует, что скорость также и всех остальных узлов координатной решетки B относительно совмещенных с ними узлов решетки B_0 в данный выбранный момент времени t_0 не зависит от x и, следовательно, равна нулю.

2. В то же время *ускорение* узлов B относительно B_0, о котором речь еще впереди, непостоянно вдоль оси x; оно зависит от x (при заданном t).

Поскольку скорость узлов B_0 мгновенной инерциальной системы относительно узлов системы B равна нулю, численное значение расстояния от начала координат B какого-либо n-го ее узла (или точки с произвольной, постоянной во времени t, координатой x), измеренное с помощью стандартного масштаба, покоящегося в мгновенной инерциальной системе (а также, следовательно, и в системе x, t), и по определению совпадающее с номером данного узла, от времени не зависит.

3. В этом смысле система B покоящемуся в ней наблюдателю представляется жесткой.

Однако она не представляется таковой наблюдателю, остающемуся неподвижным в исходной инерциальной системе. С точки зрения такого наблюдателя, «узлы» координатной решетки B, т. е. точки с постоянным значением $x = \text{const}$, при движении системы B стягиваются к началу координат.

Наоборот, решетка, узлы которой движутся ускоренно так, что расстояние между ними остается неизменным, с точки зрения исходной инерциальной системы, представляется *расширяющейся* наблюдателю, движущемуся вместе с одним из этих узлов (см. в предыдущей главе задачу о полете двух космонавтов).

К обоснованию и уточнению положений 1—3 мы еще вернемся (см. Дополнение, п. 1).

Как следует из сказанного выше, все координатные часы системы x, t синхронизированы в смысле критерия Эйнштейна в любой момент времени t с часами B, находящимися в начале координат этой неинерциальной системы. Речь идет о том, что они синхронизированы, как выше указано, в мгновенной системе B_0. Они непрерывно «следят» в этом смысле за показаниями часов B. Если в какой-то момент времени ускоряющая (или замедляющая) B сила перестает действовать, система B становится инерциальной.

Начиная с этого момента времени, координатные часы ведут себя в этой конечной инерциальной системе как обычные часы, синхронизированные уже заранее между собой и с часами B.

Оговорим еще раз, что если ранее и было введено представление о координатной решетке B как о ряде «сочлененных стержней», то при этом имелось в виду лишь конкретизировать изложение. Масштабные «стержни» *нельзя отождествлять с реальными телами*, и в этом существенное отличие введенной нами фиктивной системы координат x, t от инерциальных систем отсчета. Не только координатные часы, но и «координатные масштабы» системы x, t фиктивны.

Пользуясь представлением о координатных системах B и B_0 и описывая движение A относительно B в координатах B, изложим теперь выводы гл. I и II, не прибегая к предельному предположению ($g = \infty$).

Для упрощения будем сначала иметь в виду условия, относящиеся лишь ко второй половине рассмотренного уже ранее цикла движений [1]. А именно условия задачи зададим так: при $t = T = 0$ часы B находятся в начале координат, а часы A — на расстоянии $x_0 + \Delta x_0 = X_0 + \Delta X_0$ от B в направлении (как условимся на этот раз) положительной оси x (и X). Таким образом, положительную ось X будем предполагать направленной от B к A. (Часы A неподвижны в инерциальной системе X, T.)

Скорость B относительно A (и A относительно B) в начальный момент времени равна нулю. Затем на протяжении пути ΔX_0 часы B ускоряются по какому-то произвольному закону в направлении к A и в момент времени t_1 приобретают скорость β_0 (относительно A), после чего (при $t \geqslant t_1$) движутся равномерно с этой скоростью β_0 в направлении к A (так же как A движется с той же скоростью *относительно* B, но в противоположном направлении).

Определим изменение показаний ΔT_A часов A за время ускорения B с «*точки зрения системы* B (x, t)».

В дальнейшем слова «с точки зрения системы B» будем понимать условно так, как если бы координаты какого-то объекта, например A (т. е. x_A и t_A), удаленного от B, могли бы быть *измерены* наблюдателем B на расстоянии («дистанционные измерения»).

Координаты x, t ускоренной системы B совпадают в каждый данный, фиксированный момент времени t (который выше обозначили t_0) с координатами X', T' «мгновенной инерциальной системы B_0». Эти же последние связаны с координатами X, T формулами преобразования Лоренца (см. (I.32) и (I.33)), которые в соответствии с введенными выше условиями, как легко убедиться, имеют вид

$$X_A(t) = X_B(t) + \frac{x_A(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}}, \tag{IV.3}$$

$$T_A(t) = T_B(t) + \frac{\beta(t)\, x_A(t)}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}}. \tag{IV.4}$$

(Знак плюс при втором слагаемом правой части уравнений (IV.3)

[1] Цикл, о котором говорится сейчас, отличается от того, который мы имели в виду в гл. I. Мы не предполагаем, что скорость B меняется на противоположную мгновенно. За временем T_0 равномерного движения B относительно A (или же временем T_0' удаления с постоянной скоростью A от B) следует отрезок времени замедленного движения. Середина цикла совпадает с окончанием замедленного движения и, следовательно, с моментом остановки B относительно A.

и (IV.4) соответствует выбранному нами теперь направлению осей X и x; $\beta(t)$— скорость B: $c\beta(t) = (dX_B/dT)_t$).

Согласно сформулированному выше определению координат x и t уравнения (IV.3) и (IV.4) справедливы как за время ускоренного движения системы B (т. е. при $t \leqslant t_1$), так и при $t \geqslant t_1$, когда система B движется (относительно A) равномерно.

Заменив обозначения [1] $X_B(t)$ и $T_B(t)$ в (IV.3) и (IV.4) символами $X_a(t)$ и $T_a(t)$, перепишем эти уравнения

$$X_A(t) = X_a(t) + \frac{x_A(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}}, \tag{IV.5}$$

$$T_A(t) = T_a(t) + \frac{\beta(t)\, x_A(t)}{c\sqrt{1-\beta^2(t)}}. \tag{IV.6}$$

При этом мы имели в виду подчеркнуть, какой именно смысл вкладывается в представление о координатах X и T.

В соответствии с моделями, которые использовались в гл. I, следует и в данном случае представить себе ряд (или «цепочку») часов a_x, *неподвижных* в системе A и синхронизированных между собой в этой *инерциальной* системе A.

Предположим, что B проносится мимо цепочки часов a_x, двигаясь, вообще говоря, ускоренно: скорость B в (IV.3) и (IV.4) есть какая-то функция $\beta(t)$ от t. Буквой a отмечаем те часы из ряда a_x — ту «веху» на пути X, T, мимо которой B проносится в данный определенный момент $t = t_1$ (a — часы, которые совпадают в пространстве с B в этот момент времени t; $X_a(t)$ и $T_a(t)$ — это, следовательно, координаты часов a; $T_a(t)$ в уравнении (IV.6) — это, если угодно, показание часов, находящихся «на станции» (a), мимо которой проносится B, что и подчеркнуто нами в уравнении (IV.6), где вместо $T_B(t)$ мы написали $T_a(t)$).

Что касается t, то эта координата совпадает с показанием других часов — часов a_0, мимо которых B проносится в тот же момент времени, но которые, говоря образно, находятся «в поезде B_0» (см. выше).

$x_A(t)$ — координата A, определенная по измерениям наблюдателя, находящегося в движущемся, как указано, равномерно «поезде», т. е. в мгновенной инерциальной системе B_0.

Формулы приводят к выражению приращения ΔT_A времени, показываемого часами A за время $\Delta t = t_1$, *с точки зрения наблюдателя B*, т. е. в координатах x, t.

Поскольку при $t = T = 0$ $T_A = 0$ и $T_a = 0$, согласно формуле (IV. 6) имеем

$$\Delta T_A = T_a + \frac{\beta(t_1)\, x_A(t_1)}{c\sqrt{1-\beta^2(t_1)}} \quad (\Delta T_a = T_a). \tag{IV.7}$$

---

[1] $X_B(t)$ и $T_B(t)$ — координаты начала системы B_0 в момент времени t.

Имея в виду привести в соответствие обозначения данного параграфа с рис. 7, положим $\beta(t_1) = \beta_0$. Сохраняя обозначения рис. 7, введем T_0' — время (системы B), в течение которого B, двигаясь теперь (при $t \geqslant t_1$) с постоянной скоростью β_0, достигнет A[1]. Тогда согласно условиям задачи

$$x_A(t_1) = \beta_0 c T_0'$$

и (IV.7) дает

$$\Delta T_A = T_a + \frac{\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = \Delta T_a + \frac{\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \qquad \text{(IV.8)}$$

Выражение (IV.8) дает показание часов A так, как оно представляется наблюдателю B, если он (B) определит это «показание» согласно отсчетам в координатах x, t в момент его (B) времени t_1, т. е. находясь от A на расстоянии $x_A(t_1)$.

Таким образом, ΔT_A есть в известном (условном, однако) смысле «отсчет показаний времени», сделанный наблюдателем B по циферблату часов A «дистанционно» — тогда, когда эти часы A удалены от него (B) на расстояние $x_A(t_1)$.

Если после этого (т. е. после момента времени $t = t_1$) B, двигаясь уже равномерно в течение своего времени T_0', соединится с A, то, исходя из своих «наблюдений» о времени A, *проведенных на расстоянии*, он будет ожидать, что часы A в момент совпадения с ним в пространстве будут показывать время, равное

$$\Delta T_A + T_0' \sqrt{1-\beta_0^2} \qquad \text{(IV.9)}$$

(ΔT_A — определенное, с точки зрения B, приращение времени, которое дает (IV. 8) при $t = t_1$, т. е. в момент прохождения «путешествующим» B станции a, а $T_0' \sqrt{1-\beta_0^2}$ — приращение показаний часов A за время равномерного их движения относительно B).

Обозначим показание часов A *в момент встречи их с* B, определенное по данным «дистанционных измерений» B, следующим символом (Пок. $A)_B$. Вместе с тем отсчет положения стрелки часов A, сделанный *непосредственно* по циферблату часов A также в момент встречи A и B, обозначим (Пок. $A)_A$. Тогда согласно (IV.8) и (IV.9)

$$(\text{Пок. } A)_B = T_a + \frac{\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}} + T_0' \sqrt{1-\beta_0^2}. \qquad \text{(IV.10)}$$

Отсюда

$$(\text{Пок. } A)_B = T_a + \frac{T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \qquad \text{(IV.11)}$$

[1] Если $t = t_2$ — момент времени, когда B достигнет A, то $T_0' = t_2 - t_1$.

Очевидно, что и

$$(\text{Пок. } A)_A = T_a + T_0 = T_a + \frac{T'_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \qquad \text{(IV.12)}$$

так как T_a совпадает с T_A, с точки зрения A, в момент времени начала стадии равномерного движения (все часы системы A синхронны), длительность времени равномерного движения, определенного по часам A, равна T_0 и, наконец, время

$$T'_0 = T_0 \sqrt{1-\beta_0^2}, \qquad \text{(IV.13)}$$

поскольку T'_0 — время, показываемое часами B, движущимися равномерно со скоростью β_0 относительно A. Часы B в силу этого отстают от часов A в отношении $\sqrt{1-\beta_0^2} : 1$ (точно так же, как и часы A отстают от часов B, с точки зрения B, что учтено третьим членом суммы в правой части уравнения (IV.10)).

Еще раз подчеркнем, что в приведенных только что рассуждениях мы применили в (IV.9) соотношение (I.13) к часам A, считая их движущимися, и (в кажущемся противоречии с этим) то же соотношение (I.13) затем (в (IV.13)) применили к часам B как движущимся, поменяв при этом местами T_0 и T'_0.

Следовательно, в соответствии с (IV. 11) и (IV. 12)

$$(\text{Пок. } A)_B = (\text{Пок. } A)_A, \qquad \text{(IV.14)}$$

т. е. рассмотрение с точки зрения B (левая часть уравнения (IV.14)) дает тот же результат, что и рассмотрение с точки зрения A (правая часть уравнения).

Наконец, можно поставить вопрос еще и так: B, начиная двигаться при $t = 0$ с расстояния $X_0 + \Delta X_0$ относительно A (сначала с ускорением — на пути ΔX_0, а затем равномерно), встречается с A, который отсчитывает как свое время (с начала движения), так и время B (по своим данным). То же делает B, и каждый из них определяет разность (Пок. A — Пок. $B)_A$, (Пок. A — Пок. $B)_B$ в момент встречи обоих. (Индекс A в первом случае означает, что теперь имеются в виду наблюдения A, так же как во втором случае индекс B означает, что речь идет о наблюдениях B.)

Основываясь на приведенных выше рассуждениях, легко убедиться в том, что

$$(\text{Пок. } A - \text{Пок. } B)_A = (\text{Пок. } A - \text{Пок. } B)_B. \qquad \text{(IV.15)}$$

На этот раз речь идет о выражениях для (Пок. A — Пок. $B)_A$ и (Пок. A — Пок. $B)_B$, которые можно получить, не предполагая, что ускорение B происходит мгновенно, в течение бесконечно малого промежутка времени.

Более того, для вывода выражений (IV.11) и (IV.12), а следовательно, и для доказательства того, что результат сравнения отсчетов A и B не зависит от «точки зрения», предположение об «идеальности» часов B не необходимо (к выяснению этого вопроса мы вернемся в дальнейшем).

В выражения (IV.10) и (IV.11) входит T_a, т. е. отсчет по часам системы A, тогда как при последовательном проведении «точки зрения B» этот отсчет должен был бы быть выражен в координатах x, t.

Но легко видеть, что при сделанных предположениях

$$(dT)_{x=0} = \frac{dt_B}{\sqrt{1-\beta^2(t)}}. \tag{IV.16}$$

Соотношение (IV. 16) совпадает с формулой (II.2). Отметим, что $(dT)_{x=0}$ в (IV. 16), так же как и t в (II.2), есть, вообще говоря, разность отсчетов по циферблатам двух *различных* часов «системы A» (поскольку в (IV.16) фиксирована координата движущихся часов, $x = \text{const} = 0$), тогда как dt_B — разность показаний одних и тех же часов B, находящихся в точке $x = \text{const}$ [1].

Из (IV.16) следует

$$T_a = \int_0^{t_1} \frac{dt_B}{\sqrt{1-\beta^2(t)}}. \tag{IV.17}$$

(В данном случае имеются в виду часы, удовлетворяющие критерию идеальности.)

Подставив (IV. 17) в (IV.7), получаем выражение показаний часов A в координатах x, t, т. е. с точки зрения B. Тогда уравнение (IV.7) переписываем в виде

$$\Delta T_A = \int_0^{t_1} \frac{dt_B}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} + \frac{\beta(t_1)\, x_A(t_1)}{c\sqrt{1-\beta^2(t_1)}}. \tag{IV.18}$$

Теперь нетрудно получить результат и применительно к замкнутому, симметричному во времени, циклу движений B: A удаляется от B в течение его (B) собственного времени T_0', двигаясь при этом с постоянной скоростью β_0 на пути, длина которого, с точки зрения A, равна X_0. По истечении времени T_0' на протяжении отрезка пути ΔX_0 B испытывает действие замедляющих его сил, в результате чего B останавливается относительно A на расстоянии $X_0 + \Delta X_0$ от A. Затем движение B относительно A обращается, т. е. на отрезке пути ΔX_0 B подвергается действию сил, ускоряющих его в направлении к A. Далее, пройдя за время

[1] То, что здесь обозначено как x, в гл. II обозначалось как x'.

$t = T_0'$ путь, длина которого X_0, в конце цикла B снова соединяется с A.

Выше была рассмотрена вторая половина только что описанного замкнутого цикла. Очевидно, в силу симметрии, для того чтобы определить приращение собственного времени часов A за время всего замкнутого цикла движений B, нужно лишь удвоить выражение (IV.8).

Таким образом, в соответствии с новыми условиями задачи (т. е. для замкнутого симметричного цикла) получим

$$\Delta T_A = \Delta T_a + \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = 2T_a + \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \qquad \text{(IV.19)}$$

Здесь ΔT_a — приращение показания часов a за все время замедления и обратного ускорения B; ΔT_A — приращение собственного времени часов A за то же время $(2t_1)$, определенное наблюдателем B «на расстоянии». (При этом сохраняем условие: в середине цикла $t=0$, $T=0$ и $X_B = x_B = 0$. Следовательно, первую половину цикла относим ко времени $T < 0$, так же как и $t < 0$.) Показание «станционных часов» a в тот момент, когда мимо них проносится B на пути вперед, равно, таким образом, $-T_a$ и $\Delta T_a = T_a - (-T_a) = 2T_a$. Теперь удваиваются также выражения (Пок. A — Пок. $B)_A$ и (Пок. A — Пок. $B)_B$. Если $\Delta T_a \ll T_0'$ (а в предельном случае $g = \infty$, $\Delta T_a = 2T_a = 0$), то $\Delta T_A \simeq \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, что совпадает с результатом, полученным в гл. I.

В этом последнем случае часы a — это часы системы A, находящиеся в той точке пути B, в которой происходит мгновенное обращение скорости B относительно A. $\Delta T_A = \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$ — это (также мгновенный при $g = \infty$) сдвиг показаний часов A в представлении наблюдателя B, полученный нами в гл. I.

Уравнение (IV.18) можно также применить к случаю замкнутого цикла *неравномерного* движения B относительно A. Нет необходимости предполагать, что этот цикл симметричен во времени, т. е. что B удаляется от A так же долго, как он к нему приближается.

Если цикл движений замкнутый, то A совпадает с B в начале и в конце цикла, A движется все время ускоренно [1] относительно B (так же как и B относительно A). A и a в этом случае совпадают: $x_A = 0$ в начале и в конце цикла, тогда как t_1 — показание часов

[1] Ускорение, разумеется, меняет знак в какой-то точке пути.

B в конце цикла. Уравнение (IV.18) тогда дает

$$\Delta T_A = \int\limits_0^{\Delta t_B} \frac{dt_B}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} \tag{IV.20}$$

(мы положили $t_1 = \Delta t_B$, где Δt_B — приращение показаний часов B за все время цикла, а ΔT_A — соответствующее приращение показаний часов A). В данном случае как в левой, так и в правой частях уравнения стоят разности ΔT и Δt показаний, отсчитанных по циферблатам одних и тех же часов — A и B соответственно.

Что касается функции $T_A(t)$, определяющей скорость хода dT_A/dt (в функции t) часов A в сравнении со скоростью хода часов наблюдателя B, с точки зрения этого последнего, то в зависимости от заданного закона изменения скорости A относительно B эта функция может иметь тот или иной вид.

Однако ясно, что $dT_A \neq \sqrt{1-\beta^2(t)}dt$, т. е. что многократно применявшееся нами при рассмотрении инерциальных систем выражение для dT_A/dt в случае неинерциальных систем отсчета неприменимо.

Ясно также, что в случае замкнутого цикла перемещений движущиеся часы A, с точки зрения B, на каких-то участках пути отстают от его собственных часов, на других участках они их опережают так, что в конечном итоге в соответствии с уравнением (IV.20) налицо всегда отставание часов B от часов A, если часы A все время покоятся в одной и той же инерциальной системе [1]. При этом не следует забывать, что если говорится о сравнении скорости хода движущихся часов на *расстоянии*, то в общем случае речь идет лишь о чисто формальных преобразованиях и чисто формальном описании.

Соотношениям (IV.5) и (IV.6), которые в дальнейшем будут преобразованы, придан такой вид, как если бы речь шла о переходе от координат x, t, *измеренных* в системе B, к координатам X, T — о переходе от описания хронометрической последовательности событий, с точки зрения B, к описанию их в представлении A. Однако определенное физическое содержание в эти соотношения было бы вложено лишь в том случае, если бы было указано, как наблюдатель B может определять координаты x, t удаленных от него объектов [2].

---

[1] При этом предполагаем, что A и B не подвержены действию «истинных» (или перманентных) полей тяготения (см. ниже).

[2] Если воспользоваться принятой в современной физике терминологией, то можно сказать, что специальная теория относительности построена на основе точного «операционного» определения координат и других рассматриваемых этой теорией величин.

В вопросе о последовательном «операционном» обосновании общей теории относительности и до настоящего времени нет достаточной ясности. Этот

Но если координаты X, T инерциальной системы и имеют такой простой физический смысл, поскольку они являются результатом *прямых* физических измерений и в этом смысле реальны, то координаты x, t, как подчеркивалось выше, вводятся чисто формально и в этом смысле они, вообще говоря, фиктивны.

Измерение расстояний и времени в точках, удаленных от начала координат на основе *инерциальных* систем отсчета, есть результат вполне определенных операций, выполненных с определенными физическими телами — масштабами и часами. Причем эти операции включают определенный метод синхронизации часов на расстоянии.

В основу системы измерения координат X, T положен вытекающий из *данных эксперимента* постулат о неизменности скорости света в пустоте, определенной из наблюдений в любой, произвольно выбранной инерциальной системе отсчета.

Если же мы имеем дело с неинерциальной системой отсчета, подобной введенной нами выше системе x, t, то определенное правило — определенный рецепт для *прямых* физических измерений координат x, t — не может быть указано [1].

Эти величины, входящие в написанные выше формулы, получены не непосредственно как результат прямых физических измерений, а лишь путем пересчета — преобразований, исходя из данных о величинах X, T — координат *инерциальной* системы. Введение в рассмотрение координат x, t как вспомогательных величин приводит, однако, к широким обобщениям.

В дальнейшем мы коснемся некоторых связанных с этими обобщениями идей и определенных физических гипотез, приведших Эйнштейна к построению его общей теории относительности (или теории тяготения). Предварительно, однако, целесообразно, выполнив простые преобразования и воспользовавшись лишь вполне элементарным математическим аппаратом, придать уравнениям (IV.5) и (IV.6) несколько иную форму.

Как было указано, основное соотношение

$$d\tau_A = \sqrt{1-\beta^2}\,dt, \qquad \text{(IV.21)}$$

которым мы постоянно пользовались, рассматривая инерциальные системы, неприменимо к системам неинерциальным.

Преобразования, о которых только что упоминалось, приведут нас к обобщению выражения $d\tau$ на случай системы координат x, t, начало которой движется ускоренно.

вопрос все еще обсуждается в научной литературе. (Обсуждаются также, например, и такие вопросы, как уточнение формулировок принципа эквивалентности, точного определения понятия инерциальной системы и т. п.)

[1] Заметим, что скорость света при описании в координатах x, t, вообще говоря, не равна скорости света c и к тому же есть функция пространственных координат (функция x, если рассматривать одномерный случай).

Оговорим, что нижеследующие выкладки в значительной части представляют собой «парафразу» в упрощенном виде выводов, содержащихся в книге Меллера [13], рассмотревшего впервые в 1943 г. [14] в достаточно общем виде вопрос о «парадоксе часов» с точки зрения общей теории относительности [1].

Уравнения (IV.3) и (IV.4) для преобразования координат $x,\ t \to X, T$ перепишем, введя новые обозначения. Положим

$$\frac{\beta(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \operatorname{sh}\theta(t), \tag{IV.22}$$

где

$$\beta(t) = \frac{1}{c}\frac{dX}{dT} \tag{IV.23}$$

и $\theta(t)$ — произвольная функция t (определяемая заданной зависимостью $\beta(t)$).

Поскольку $\operatorname{ch}^2\theta(t) - \operatorname{sh}^2\theta(t) = 1$, из (IV.22) следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \operatorname{ch}\theta(t). \tag{IV.24}$$

Вторые члены выражений, стоящих в правой части уравнений (IV.3) и (IV.4), записываются тогда соответственно в виде

$$\frac{x_A(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = x_A \operatorname{ch}\theta(t), \tag{IV.25}$$

$$\frac{x_A}{c}\frac{\beta(t)}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \frac{x_A}{c}\operatorname{sh}\theta(t). \tag{IV.26}$$

Далее, принимая во внимание (IV.26), получаем выражение X_B в новых обозначениях

$$X_B = \int\limits_0^T dX_B = \int\limits_0^T c\beta(t)\,dT = c\int\limits_0^t \frac{\beta(t)\,dt}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = c\int\limits_0^t \operatorname{sh}\theta(t)dt \tag{IV.27}$$

$$\left(dT = \frac{dt_B}{\sqrt{1-\beta^2(t)}};\ \text{см. (II.2)}\right).$$

Наконец, также находим и выражение первого члена ($T_B = T_a$) в правой части уравнений (IV.4) и (IV.6)

$$T_B = \int dT_B = \int \frac{dt}{\sqrt{1-\beta^2(t)}} = \int\limits_0^t \operatorname{ch}\theta(t)\,dt. \tag{IV.28}$$

---

[1] См. также [15].

Подставив (IV.25) — (IV.28) в (IV.3) и (IV.4), получаем

$$X = c\int_0^t \operatorname{sh}\theta(t)\,dt + x\operatorname{ch}\theta(t), \tag{IV.29}$$

$$T = \int_0^t \operatorname{ch}\theta(t)\,dt + \frac{x}{c}\operatorname{sh}\theta(t). \tag{IV.30}$$

(Мы опустили индекс A при x.)

Нетрудно раскрыть физический смысл функции $\theta(t)$, а именно убедиться в том, что

$$\theta(t) = \frac{1}{c}\int_0^t g(t)\,dt, \tag{IV.31}$$

где $g(t)$ — «собственное ускорение B».

Под «собственным ускорением» понимаем ускорение относительно мгновенной инерциальной системы [1] B_0, т. е. такой инерциальной системы, в которой скорость B в данный фиксированный момент времени t_0 равна нулю.

Если координаты в инерциальной системе B_0, фиксированной для определенного момента времени t_0, обозначим X', T', то

$$g(t) = \left(\frac{d^2X'_B}{dT'^2}\right)_{t=t_0}. \tag{IV.32}$$

Если время отсчитывается по идеальным часам, движущимся вместе с B, то, как легко видеть [2], «собственное ускорение» выра-

---

[1] Иначе говоря, четырехмерный вектор ускорения.

[2] В самом деле,

$$d\tau_B = dT'\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dX'_B}{dT'}\right)^2},$$

$$\frac{dX'_B}{dT'} = \frac{dX'_B}{d\tau_B}\frac{d\tau_B}{dT'} = \frac{dX'_B}{d\tau_B}\sqrt{1 - \left(\frac{dX'_B}{cdT'}\right)^2},$$

$$\frac{d^2X'_B}{dT'^2} = \frac{d^2X'_B}{d\tau^2_B}\left[1 - \left(\frac{dX'_B}{cdT'}\right)^2\right] - \frac{\dfrac{dX'_B}{d\tau_B}\dfrac{1}{c}\dfrac{dX'_B}{dT'}\dfrac{d\left(\dfrac{dX'_B}{cdT'}\right)}{dT'}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{dX'_B}{cdT'}\right)^2}}. \tag{IV.33}$$

Однако по определению $\frac{dX'_B}{dT'} = 0$ при $t = t_0$ и, следовательно, согласно (IV. 33)

$$g(t_0) = \left(\frac{d^2X'_B}{dT'^2}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{d^2X'_B}{d\tau^2_B}\right)_{t=t_0}.$$

жается также второй производной $d^2X'_B/d\tau_B^2$, где τ_B — «собственное время» B. (Следует различать координаты x, t и x', T'; они совпадают лишь в момент времени $t = t_0$.)

Но по определению значение координатного времени в начале системы координат x, t (и только в начале этой системы) совпадает с собственным временем τ_B. Поэтому можем положить при $x = 0$

$$g(t) = \left(\frac{d^2X'_B}{dt^2}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{d^2X'_B}{dT'^2}\right)_{t=t_0}. \qquad \text{(IV.34)}$$

Преобразуем выражение (IV.34). Предварительно получим следующий результат: скорость $\beta(t)$ мгновенной инерциальной системы относительно X, T равна $\operatorname{th}\theta(t)$.

Действительно, дифференцируя (IV.29) и (IV.30) при $x = \text{const}$ и разделив dX на dT, получаем

$$\beta(t) = \left(\frac{dX}{cdT}\right)_{x=\text{const}} = \frac{dX_B}{cdT} = \frac{\operatorname{sh}\theta(t)\left(dt + \frac{x}{c}\,d\theta\right)}{\operatorname{ch}\theta(t)\left(dt + \frac{x}{c}\,d\theta\right)} = \operatorname{th}\theta(t). \quad \text{(IV.35)}$$

Как видно из (IV.35) и как было отмечено выше, $\beta(t)$ при заданном t от x не зависит.

Выражение для $g(t)$ получим, исходя из (IV.34) и (IV.35), а также (IV.29) и (IV.30).

Для выбранного момента времени t_0 можно перейти от координат X, T к координатам X', T' движущейся равномерно и прямолинейно (относительно X, T) мгновенной инерциальной системы, если принять во внимание только что полученный результат: скорость $\beta(t)$ (системы X', T' относительно X, T) равна $\operatorname{th}\theta(t_0)$.

Уравнения Лоренца (I.23) и (I.27) для перехода от X, T к X', T' могут быть записаны тогда так[1]:

$$X' = \frac{X - c\operatorname{th}\theta(t_0)\,T}{\sqrt{1-\beta^2(t_0)}} = [X - c\operatorname{th}\theta(t_0)\,T]\operatorname{ch}\theta(t_0), \qquad \text{(IV.36)}$$

$$T' = \left[T - \frac{\operatorname{th}\theta(t_0)}{c}\,X\right]\operatorname{ch}\theta(t_0). \qquad \text{(IV.37)}$$

Мы приняли во внимание, что согласно (IV.24)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2(t_0)}} = \operatorname{ch}\theta(t_0).$$

---

[1] Начало координат системы отсчета X', T' может быть выбрано произвольно, в частности так, что $X_0 = X'_0 = 0$ при $T = T' = 0$, что нами и предположено.

Дифференцируя (IV.36) и (IV.37) и деля затем dX' на dT', получим уравнение

$$\frac{dX'}{dT'} = \frac{\frac{dX}{dT} - c\,\mathrm{th}\,\theta(t_0)}{1 - \frac{\mathrm{th}\,\theta(t_0)}{c}\frac{dX}{dT}} \tag{IV.38}$$

(т. е. формулу (I.41) сложения скоростей).

Для того чтобы вывести искомое выражение $g(t)$, выполняем второе дифференцирование

$$g(t) = \frac{d^2X'_B}{dt^2} = c\frac{d}{dt}\left[\frac{\beta(t) - \mathrm{th}\,\theta(t_0)}{1 - \mathrm{th}\,\theta(t_0)\,\beta(t)}\right] \tag{IV.39}$$

$$\left(\beta(t) = \frac{dX}{cdT} = \mathrm{th}\,\theta(t)\right).$$

Полагая после этого $t = t_0$, находим

$$g(t_0) = c\left\{\frac{[1 - \mathrm{th}\,\theta(t_0)\,\mathrm{th}\,\theta(t)]\frac{1}{\mathrm{ch}^2\,\theta(t)}\frac{d\theta(t)}{dt}}{[1 - \mathrm{th}\,\theta(t_0)\,\mathrm{th}\,\theta(t)]^2}\right\}_{t=t_0} = c\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=t_0}. \tag{IV.40}$$

Поскольку значение t_0 произвольно, (IV.40) можно переписать в виде

$$g(t) = c\frac{d\theta(t)}{dt} \tag{IV.41}$$

и, следовательно,

$$\theta(t) = \frac{1}{c}\int_0^t g(t)\,dt, \tag{IV.31}$$

если условиться, что функция $\theta(t)$ равна нулю при $t = 0$.

Из (IV.35) и (IV.41) следует, что в частном случае гиперболического движения (т. е. при $g = \mathrm{const}$)

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)_{x=\mathrm{const}} = c\,\mathrm{th}\,\frac{gt}{c}. \tag{IV.42}$$

Если инерциальной системой X, T в (IV.29) — (IV.30) является мгновенная инерциальная система отсчета B_0 для данного фиксированного момента времени t_0, то можем начать счет времени от момента t_0 (т. е. положить $t' = t - t_0$). Тогда согласно (IV.31) $\theta_1(t')_{t=t_0} = 0$ и (IV.35) дает $v(t = t_0) = c\mathrm{th}\theta_1(t')_{t=t_0} = 0$ при любом x, что прямо следует из определения координатного времени: $v(t_0) = 0$ при любом x. Собственное *ускорение* d^2X'/dT^2, однако, не равно нулю и при этом зависит от x. Оно тем меньше, чем больше x (см. Дополнение, (IV. 138)).

Пользуясь формулами (IV 29) и (IV.30), можем теперь обобщить основное соотношение (I.13), определяющее замедление хода движущихся часов относительно часов неподвижных. В гл. I это соотношение и разнообразные следствия, к которым оно приводит, были рассмотрены в применении к инерциальным системам.

Вопрос, на который может быть дан ответ на основе полученных выше уравнений (IV.29) и (IV.30), сводится к следующему: дана неинерциальная система координат x, t и известно «собственное ускорение» $g(t)$ начала этой системы, в котором находятся идеальные часы B. Другие, также идеальные часы C, находящиеся в момент времени t в точке x этой системы отсчета, движутся относительно нее со скоростью $u=dx/dt$. Спрашивается, каково соотношение между скоростью хода часов C и часов B? Иначе говоря, если τ есть собственное время часов C, а t—собственное время B, то речь идет о функции $f(x, u, g) = \frac{d\tau}{dt}$.

Известно, что если рассматривать движение C в некоторой инерциальной системе X, T, то имеет место соотношение

$$d\tau_C = \sqrt{1-\beta^2}\ \ dT = \sqrt{1-\left(\frac{1}{c}\frac{dX}{dT}\right)^2} dT \qquad \text{(IV.43)}$$

или, возводя его в квадрат,

$$d\tau^2 = dT^2 - \frac{dX^2}{c^2} \qquad \text{(IV.44)}$$

(индекс C опускаем). (Скорость dX/dT может быть непостоянной — зависящей от времени.)

Дифференцируя (IV. 29) и (IV.30), получаем

$$dX = c\,\mathrm{sh}\,\theta(t)\,dt + dx\,\mathrm{ch}\,\theta(t) + x\,\mathrm{sh}\,\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\,dt, \qquad \text{(IV.45)}$$

$$dT = \mathrm{ch}\,\theta(t)\,dt + \frac{dx}{c}\mathrm{sh}\,\theta(t) + \frac{x}{c}\,\mathrm{ch}\,\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\,dt. \qquad \text{(IV.46)}$$

После подстановки (IV.45) и (IV.46) в (IV.44), приведения подобных членов и некоторых несложных выкладок (принимая опять же во внимание, что $\mathrm{ch}^2\theta(t) - \mathrm{sh}^2\theta(t) = 1$) можно прийти к следующему результату:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} + \frac{x^2}{c^2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt^2 + 2\frac{x}{c}\frac{d\theta}{dt}dt^2 =$$

$$= \left(1 + \frac{x}{c}\frac{d\theta}{dt}\right)^2 dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \qquad \text{(IV.47)}$$

и, поскольку, согласно (IV.41) $\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{g(t)}{c}$,

$$d\tau^2 = \left[1 + \frac{xg(t)}{c^2}\right]^2 dt^2 - \frac{dx^2}{c^2},$$

или же

$$d\tau = \sqrt{\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]^2 - \frac{u^2}{c^2}}\, dt. \tag{IV.48}$$

При $g(t) = 0$ (IV.48) совпадает с (I.13), т. е. с выражением $d\tau$ для инерциальной системы.

Вернемся к рассмотренной нами задаче: в начальный момент времени B покоится относительно A, находящегося на расстоянии $X_0 + \Delta X_0$ от B и неподвижного в системе X, T. Затем B ускоряется на отрезке пути ΔX_0 в направлении к A и в момент прохождения точки $X = \Delta X_0$ («станции *a*») имеет скорость, равную β_0.

Мы убедились в том, что за время ускорения часов B на участке пути ΔX_0 (в системе A (X, T)) в течение времени t_1 (системы B) часы A уходят вперед относительно часов B, хотя в этом случае A «движутся», а B «неподвижны».

Предполагая, что в каждый данный момент времени B сверяет (сравнивает) ход своих часов с ходом часов A, мы можем теперь, учитывая соотношение (IV. 48), проследить детальнее, как изменяется результат этого сравнения в зависимости от t.

На этот раз предположим, что B, двигаясь все время ускоренно в течение «своего времени» t_1 в направлении к A и пройдя за время t_1 путь ΔX_0, встречается с A. (Мы полагаем, следовательно, что $X_0 = 0$ и A совпадает с *a*.)

В системе B (x, t) наблюдателю B представляется, что A, находясь от него на расстоянии, которое обозначим[1] теперь x_0, начав двигаться в начальный момент времени со скоростью, равной нулю, движется, ускоряясь в направлении к нему, и при $t = t_1$ встречается с ним.

Мы предполагаем, что $x_0 > 0$ и $g(t) > 0$.

Поскольку часы A неподвижны относительно X, T, уравнение (IV.45), в котором вследствие этого $dX = 0$, дает (принимая во внимание (IV.41))

$$\frac{dx_A}{dt} = -\frac{c \operatorname{sh} \theta(t)\left[\frac{x_A g(t)}{c^2}+1\right]}{\operatorname{ch}\theta(t)}. \tag{IV.49}$$

В результате подстановки (IV.49) в (IV.48) получаем[2]

$$d\tau_A = \sqrt{\left[1+\frac{x_A g(t)}{c^2}\right]^2 [1-\operatorname{th}^2\theta(t)]^2}\, dt = \left[1+\frac{x_A g(t)}{c^2}\right]\frac{dt}{\operatorname{ch}\theta(t)}. \tag{IV.50}$$

Как показывает (IV.50), при $t = 0$ $(\operatorname{ch}\theta(t) = 1)$ $d\tau_A > dt$ («часы A упреждают часы B»). Вместе с тем при $x_A = 0$ (т. е. в момент встречи A и B, когда A проходит через начало координат B)

$$d\tau_A = \frac{dt}{\operatorname{ch}\theta(t)} \tag{IV.52}$$

---

[1] Ранее оно обозначалось как $x_0 + \Delta x_0$. В последующем мы снова вернемся к этому обозначению.

[2] Формула (IV.50) дает выражение для приращения собственного времени ($d\tau_A$) часов, неподвижных в системе X, T. Как прямо следует из (IV.48), соответствующее выражение для часов, положение которых фиксировано в системе x, t, дает формула

$$d\tau_x = \left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right] dt \tag{IV.51}$$

при $x = \text{const}$.

и, следовательно,

$$d\tau_A < dt, \tag{IV.53}$$

так как $\operatorname{ch}\theta(t) > 1$ (часы A отстают от часов B).

Согласно (IV.24) выражение (IV.52) можно переписать в виде

$$d\tau_A = \sqrt{1-\beta^2}\,dt \quad (\text{при } x_A = 0). \tag{IV.54}$$

Выражение (IV.54) для $d\tau_A$ совпадает, следовательно, в указанный выше момент времени с формулой «замедления хода» движущихся часов, из которой мы исходили, излагая выводы предыдущих глав, и которая справедлива применительно к инерциальным системам. (Напомним еще раз, что в этом последнем случае величина dt в формуле (IV.54) по сути дела есть разность отсчетов по двум различным, хотя и синхронизированным, часам системы x, t, тогда как $d\tau_A$ есть приращение в показании одних и тех же часов A.)

Таким образом, налицо следующие соотношения:

1) в начальный момент при $t = 0$ $\dfrac{d\tau_A}{dt} > 1$;

2) при каком-то определенном t_0 $\dfrac{d\tau_A}{dt} = 1$;

3) при $t > t_0$ значение $d\tau_A/dt$ становится меньшим единицы.

Следовательно, вначале часы A опережают B, затем ход обоих часов сравнивается и в конце своего пути A отстают от B.

Как уже отмечалось, при заданных выше условиях интеграл $\int\limits_0^{t_1} d\tau_A$ всегда больше t_1: $\int\limits_0^{t_1} d\tau_A = T_A(t_1) > t_1$ — движущиеся, как указано выше, относительно x, t часы[1] A, покоившиеся в начальный момент относительно B и синхронизированные в этот момент с B, всегда (при любом начальном значении x_0) к моменту встречи A и B опережают «неподвижные» часы B, что и следует из уравнения (IV.30).

Основываясь на формуле (IV.51) (см. примеч. на стр. 113), уточним здесь то, что отмечалось в начале настоящей главы: координатные часы не могут быть реализованы в виде какой-либо физической системы, поскольку скорость хода таких часов зависит от выбора начала системы координат.

Ход часов, покоящихся в инерциальной системе, не зависит от того, на каком расстоянии от начала оси абсцисс находятся эти часы. Стоящая в левой части уравнения (IV.21) величина $d\tau_A$ не меняется, следовательно, при переносе начала системы пространственных координат. Однако же, как видно из уравнения (IV.51), dt (при заданном $d\tau_x$) зависит от x и, следовательно, изменяется в результате переноса начала пространственных координат — скорость хода координатных в сравнении со скоростью хода совмещенных с ними идеальных часов оказывается зависящей от выбора начала отсчета пространственных координат.

[1] Но неподвижные в инерциальной системе X, T.

К отмеченным выше выводам о скорости хода часов, неподвижных в инерциальной системе, с точки зрения системы x, t, мы еще вернемся в дальнейшем.

Выражение (IV.8) для $\Delta\tau_A(t) = \Delta T_A(t)$ получается в общем виде при произвольном ускорении $g(t)$ как непосредственное следствие уравнения (IV.7) или эквивалентного ему уравнения (IV.18).

Для наглядности получим все же это выражение как результат прямого вычисления интеграла $\int \sqrt{\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_A}{dt}\right)^2}\,dt$, проделав это вычисление, однако, применительно к частному случаю $g(t) = g = \text{const}$.

Рассматривая хронометрию с точки зрения B, определим приращение $\Delta\tau_A$ собственного времени A за время Δt прохождения B пути ΔX_0, основываясь на этот раз на выражении (IV.48) дифференциала собственного времени.

Предположив, что $g = \text{const}$ (от t не зависит), убедимся на этом примере гиперболического движения, что

$$\Delta\tau_A = \int_0^{\Delta t} \sqrt{\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}}\,dt, \tag{IV.55}$$

как и должно быть согласно выведенному уже выше. В этом случае ($g = \text{const}$) уравнения (IV.29) и (IV.30) дают, принимая во внимание (IV.31):

$$X_A = \frac{c^2}{g}\left[\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - 1\right], \tag{IV.56}$$

$$T = \frac{c}{g}\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)\operatorname{sh}\frac{gt}{c}. \tag{IV.57}$$

Согласно (IV.49)

$$\frac{dx_A}{dt} = -c\left(1+\frac{gx_A}{c^2}\right)\operatorname{th}\frac{gt}{c} \tag{IV.58}$$

и далее

$$\frac{dx_A}{1+\frac{gx_A}{c^2}} = -c\operatorname{th}\frac{gt}{c}\,dt. \tag{IV.59}$$

Если проинтегрировать выражения в правой и левой частях уравнения (IV.59), то, приняв во внимание, что согласно условиям задачи $x_A\,(t=0) = x_0 + \Delta x_0 = X_0 + \Delta X_0$ и $x_0 = X_0$, так же как $\Delta x_0 = \Delta X_0$, можно легко получить следующий результат:

$$x_A = \frac{c^2}{g}\left\{\left[1+\frac{g(x_0+\Delta x_0)}{c^2}\right]\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c}} - 1\right\}. \tag{IV.60}$$

При этом, однако, предполагаем, что $1+\frac{gx_A}{c^2} > 0$ так же, как и $1+\frac{gx_0}{c^2} > 0$;

Формулу (IV.60) переписываем в виде

$$1+\frac{x_A g}{c^2}=\left[1+\frac{(x_0+\Delta x_0)\,g}{c^2}\right]\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c}}. \qquad (IV.61)$$

Дифференцируя (IV.60), получаем

$$u=\frac{dx_A}{dt}=-c\left[1+\frac{g\,(x_0+\Delta x_0)}{c^2}\right]\frac{\operatorname{sh}\frac{gt}{c}}{\operatorname{ch}^2\frac{gt}{c}}. \qquad (IV.62)$$

Приводя в соответствие с (IV.7) принятые сейчас обозначения, положим $\Delta t = t_1$. Подставляя (IV.61) и (IV.62) в (IV.55), находим

$$\Delta\tau_A=\left[1+\frac{g\,(x_0+\Delta x_0)}{c^2}\right]\int\limits_0^{t_1}\frac{dt}{\operatorname{ch}^2\frac{gt}{c}}=\left(\frac{c}{g}+\frac{x_0+\Delta x_0}{c}\right)\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}. \qquad (IV.63)$$

Заметим, что (IV.63) можно получить непосредственно как следствие уравнений (IV.56) и (IV.57). В самом деле, T_A совпадает с собственным временем $\Delta\tau_A$ [1]. T_A определено уравнением (IV.57) в функции t и переменного значения координаты x или x_A.

Как можно видеть, (IV.61) прямо следует из (IV.56), если принять во внимание, что

$$X_A=\mathrm{const}=X_0+\Delta X_0=x_0+\Delta x_0.$$

Подставляя в (IV.57) $1+\frac{x_A g}{c^2}$ из (IV.61), получаем

$$T_A\,(t=t_1)=\Delta\tau_A=\left(\frac{c}{g}+\frac{x_0+\Delta x_0}{c}\right)\operatorname{th}\frac{gt_1}{c},$$

что совпадает с (IV.63) ($\Delta\tau_A$ — собственное время, показываемое часами, неподвижными в системе координат X, T в момент времени $t=t_1$, если в начальный момент $t=0$ эти часы находились в точке $X_0+\Delta X_0=x_0+\Delta x_0$ и показывали время $T=0$).

Переписав теперь выражение (IV.63)

$$\Delta\tau_A=\left(\frac{c}{g}+\frac{\Delta x_0}{c}\right)\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}+\frac{x_0}{c}\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}, \qquad (IV.64)$$

убедимся в том, что (IV.64) совпадает с (IV.8).

Действительно, согласно только что сказанному, первый член в (IV.64) есть показание в момент времени $t=t_1$ часов системы X, T, находившихся в начальный момент времени $t=0$ на расстоянии $\Delta x_0=\Delta X_0$ от начала координат X, T или от B. Но на расстоянии ΔX_0 от начала координат X, T находятся часы «станции» a, где заканчивается ускорение B. Следовательно,

$$\left(\frac{c}{g}+\frac{\Delta x_0}{c}\right)\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}=T_a.$$

---

[1] $\Delta\tau_A=T_A\,(t=t_1)$.

При $t \geqslant t_1$ из уравнения (IV.42) имеем

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)_x = \left(\frac{dX}{dT}\right)_B = c\,\text{th}\,\frac{gt_1}{c} = c\beta_0 \quad \text{(IV.65)}$$

(g от t не зависит). Принимая во внимание (IV.65), убеждаемся в том, что второй член в (IV.64), равный $x_0\beta_0/c$, совпадает со вторым членом правой части уравнения (IV.8). В самом деле, по условиям задачи $x_0 = X_0 = \beta_0 c T_0 = \frac{\beta_0 c T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$ в прежних обозначениях. Таким образом, $\frac{x_0\beta_0}{c} = \frac{\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$ и мы пришли к прежнему результату (IV.8).

§ 2. Эффективное поле тяготения, принцип эквивалентности и «парадокс часов»

Преобразуем (IV.48), введя представление о некотором эффективном силовом поле, действующем в системе x, t и определяемом скалярным потенциалом. Такое поле естественно ввести, исходя из следующих соображений.

Положим, что тело A не подвержено действию каких-либо сил (или что равнодействующая этих сил равна нулю), судя по тому, что данное тело A покоится или движется равномерно и прямолинейно в некоторой инерциальной системе, например X, T. Следовательно, ускорение $(d^2X/dT^2) = 0$. При этих условиях оказывается, однако, что в неинерциальной системе x, t, начало которой само движется с ускорением, $(d^2x/dt^2) \neq 0$. В такой системе тело движется ускоренно так, как если бы на него действовала некоторая сила. Однако, не предрешая еще, что речь идет о потенциале некоторого силового поля, введем чисто формально функцию $\chi(x,t)$ от координаты x, а также и времени t, определив ее из условия

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=t_0} = -\frac{\partial\chi(x,t)}{\partial x} \quad \text{(IV.66)}$$

при $(dx/dt)_{t=t_0} = 0$.

Не ограничивая общности вывода, счет времени (системы x, t) можем начать от момента времени $t = t_0$, иначе говоря, вместо координат x, t будем рассматривать координаты x, t', положив $t' = t - t_0$ и, следовательно, $t' = 0$ при $t = t_0$.

Итак, предполагаем, что тело A, находясь в точке x системы x, t', начинает двигаться в момент времени $t' = 0$. При $t' = 0$ начальная скорость его в этой системе равна нулю. Но если начальная скорость A в системе x, t' равна нулю, то она также равна нулю и в системе X', T' (являющейся мгновенной инерциальной системой в момент времени $t = t_0$ и $t' = 0$).

Поскольку по предположению мы имеем дело со «свободным движением» — движением тела A по инерции, оговорка, что речь идет о скорости dX'/dT' в *начальный* момент времени применительно к системе X', T', излишня. Если скорость dx/dt равна нулю только при $t' = 0$, то скорость dX'/dT'[1] равна нулю в любой момент времени T'. Иначе говоря, при сделанных предположениях тело A, движущееся ускоренно в системе x, t', покоится в инерциальной системе X', T', поскольку действию каких-либо сил оно не подвержено [2]. Из условия $(dx/dt')_{t'=0} = 0$ следует $(dX/dT') = 0$ при любом T'.

Но координаты x, t' связаны с X', T' уравнениями (IV.29) и (IV.30). В применении к системе X', T' (IV.45) и (IV.46) дают

$$\frac{dX'}{dT'} = 0 = \frac{c \operatorname{sh} \theta (t') + \frac{dx}{dt'} \operatorname{ch} \theta (t') + x \operatorname{sh} \theta (t') \frac{d\theta}{dt'}}{\operatorname{ch} \theta (t') + \frac{dx}{dt'} \frac{1}{c} \operatorname{sh} \theta (t') + \frac{x}{c} \operatorname{ch} \theta (t') \frac{d\theta}{dt'}}. \quad \text{(IV.67)}$$

Отсюда

$$c \operatorname{sh} \theta (t') + \frac{dx}{dt'} \operatorname{ch} \theta (t') + x \operatorname{sh} \theta (t') \frac{d\theta}{dt'} = 0. \quad \text{(IV.68)}$$

Дифференцируя вновь (IV.68) и полагая *после этого* $t' = 0$ и $\frac{dx}{dt'} = 0$, получаем

$$c \left(\frac{d\theta}{dt'}\right)_{t'=0} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t'=0} + x \left(\frac{d\theta (t')}{dt'}\right)^2_{t'=0} = 0$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{d^2x}{dt'^2}\right)_{t'=0} = -c \left[\left(\frac{d\theta (t')}{dt'}\right)_{t'=0} + \frac{x}{c} \left(\frac{d\theta (t')}{dt'}\right)^2_{t'=0}\right]. \quad \text{(IV.69)}$$

Как было показано, $\frac{d\theta (t')}{dt} = \frac{g (t')}{c}$ (см. (IV.41), где $g(t')$—соб-

---

[1] X', T' — мгновенная инерциальная система для определенного, фиксированного момента времени $t = t_0$.

[2] Следует обратить внимание на известную «двусмысленность» выражения «тело A не подвержено действию каких-либо сил». Оно двусмысленно или даже, как может показаться, неверно, поскольку дальше будем говорить о силе (силе тяготения), которая действует на тело A в системе x, t'.

Сказанное в тексте: «тело A не подвержено действию каких-либо сил» означает именно то, что A движется прямолинейно и равномерно (или, в частности, покоится) относительно любой инерциальной системы координат.

В своих известных лекциях (1921), изданных в виде монографии, озаглавленной «Смысл теории относительности», Эйнштейн говорит о следующем заколдованном круге: «масса движется без ускорения, если она достаточно удалена от других тел; мы знаем, что она достаточно удалена от других тел только благодаря тому факту, что она движется без ускорения» [16, стр. 58].

ственное ускорение). Учитывая (IV.41) и принимая во внимание, что $d^2x/dt'^2 = d^2x/dt^2$, переписываем (IV.69) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[g(t'=0) + \frac{xg^2(t'=0)}{c^2}\right]. \tag{IV.70}$$

Поскольку, однако, начальный момент времени $t' = 0$ (и $t = t_0$) может быть выбран произвольно, мы вправе переписать уравнение (IV.70) таким образом:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[g(t) + \frac{xg^2(t)}{c^2}\right] = -\frac{\partial\chi}{\partial x}. \tag{IV.71}$$

Интегрируя (IV.71) при заданном t по x и полагая $\chi = 0$ при $x = 0$, получаем

$$\chi = g(t)\,x + \frac{g^2(t)\,x^2}{2c^2} \tag{IV.72}$$

и далее

$$\frac{2\chi}{c^2} + 1 = \left(1 + \frac{xg(t)}{c^2}\right)^2. \tag{IV.73}$$

Следовательно, согласно (IV.48) и (IV.73) имеем

$$d\tau = \sqrt{\left(1 + \frac{xg(t)}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}}\,dt = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \left(\frac{u}{c}\right)^2}\,dt. \tag{IV.74}$$

В настоящей главе мы занимались лишь чисто формальными преобразованиями соотношений, вытекающих из уравнений Лоренца, и в своих допущениях не вышли за пределы гипотез, которыми пользовались в гл. I и II. В дальнейшем, однако, речь будет идти о фундаментальной физической гипотезе, постулированной Эйнштейном.

Если бы уравнение (IV.66) мы стали интерпретировать как уравнение движения тела A в некотором силовом поле, то в левой части (IV.66) множителем должна была бы войти масса («инертная масса») A. Но если силовое поле, вызывающее ускорение d^2x/dt^2, есть поле *тяготения*, потенциал которого задан функцией χ, то в правой части (IV.66) также вошла бы множителем масса [1] (на этот раз гравитационная масса) того же тела A.

---

[1] «Инертная масса», или, может быть, правильнее было бы сказать «масса инерции», определяет в соответствии со вторым законом Ньютона соотношение между величиной силы, действующей на тело данной массы, и его ускорением. Гравитационная масса, с другой стороны, пропорциональна силе, действующей на данное тело в поле тяготения. То, что обе массы («гравитационная» и «инертная») по величине совпадают, не может быть постулировано a priori. То, что они действительно совпадают, вытекает из результатов эксперимента, подтвержденных с большой точностью: ускорение тела в вакууме под действием тяготения к источнику поля (например, ускорение тела, свободно падающего в поле тяготения к земле) не зависит от массы этого тела.

Точнейшие измерения показали, однако, что гравитационная масса любого тела пропорциональна его инертной массе. При соответствующем выборе единиц численные значения обеих масс совпадают. Таким образом, если поле, описываемое потенциалом χ, интерпретировать как поле тяготения, то уравнение (IV.66) можно рассматривать как уравнение движения тела [1] (любой массы) в этом поле. (Поскольку одинаковые значения инертной и гравитационной масс входят множителем в левую и правую части уравнения движения, они сокращаются, если единицы измерения масс выбраны, как указано выше. Эти массы в уравнение движения (IV.66) не входят[2].)

Эйнштейном и была высказана гипотеза, согласно которой поле, определяемое потенциалом χ (будем для краткости говорить поле χ), эквивалентно полю тяготения или по своей природе тождественно с полем тяготения.

Для пояснения положенной в основу своей теории идеи Эйнштейн, а за ним и авторы популярных статей и книг обращались к примеру «падающего лифта». Пассажир в таком свободно падающем под влиянием силы тяжести лифте находился бы в состоянии невесомости.

Длительное состояние невесомости испытывали летчики-космонавты в космических кораблях, выведенных на заданную для них орбиту и движущихся по ней под действием только лишь силы притяжения к Земле, о чем сейчас широко известно. Это состояние невесомости обусловлено тем, что поле сил притяжения к Земле компенсировано полем χ, связанным с ускорением «системы отсчета» — космического корабля (или кабины лифта) в приведенных выше примерах. В этих случаях силы поля χ и поля притяжения к Земле направлены в противоположные стороны. По величине они равны и взаимно компенсированы — уравновешены.

При выводе космического корабля на орбиту налицо ускорение, вызванное действием ракетного двигателя. Сила поля χ складывается (векторно) с силой земного притяжения, причем эта «сила поля χ» намного больше силы земного тяготения — отсюда «перегрузки», испытываемые космонавтом в результате действия сил поля χ.

Выведенным выше соотношениям для случая одномерного ускоренного движения вдоль некоторой оси x можно сопоставить пример «обращенного» движения падающего лифта — лифта, летящего вверх со значительным ускорением. В этом случае пассажир, находящийся в кабине лифта, испытал бы «перегрузку», связанную с действием силы поля χ. (Существование какого-либо

---

[1] Однако лишь при $\frac{dx}{dt} \ll c$.

[2] Это верно при любой величине dx/dt, т. е. в ограничении $\frac{dx}{dt} \ll c$ здесь нет необходимости.

постоянного поля тяготения при рассмотрении системы x, t, которой можно сопоставить кабину ускоренно движущегося лифта, нами не предполагалось.)

Не затрагивая широких обобщающих идей теории Эйнштейна, можно сказать, что «перегрузка», о которой только что упоминалось, вызвана действием фиктивных сил — сил инерции. Согласно основной идеи теории Эйнштейна силы инерции, однако, следует отождествлять с силами тяготения (так называемый «принцип эквивалентности» Эйнштейна).

Мы не имеем возможности развивать далее построения общей теории относительности и теории тяготения, некоторые отправные посылки которой были здесь нами рассмотрены.

Решая задачу о поведении движущихся часов в том новом варианте, который теперь имеется в виду, мы убедились, что можно игнорировать ускорение самой системы координат, введя взамен некоторое эффективное силовое поле (согласно Эйнштейну, поле тяготения).

Можно провести аналогию с приемом, часто используемым при решении задач механики.

При решении определенного класса таких задач целесообразно, например, «выделить» компоненту вращательного движения. В этих случаях, описывая движение, удобно отнести его к вращающейся системе координат. Тогда можно идти двумя путями: 1) рассматривать всю картину с точки зрения координатных осей инерциальной системы или 2) отнести все описание к вращающейся системе координат.

Если игнорировать тот факт, что эта (вращающаяся) система отсчета неинерциальна и что, введя эту систему, мы исключили вращательную слагаемую скорости, то взамен учета «вращения» системы отсчета следует дополнительно ввести в рассмотрение «эффективное силовое поле».

Игнорируя вращение Земли при рассмотрении движения тел на ее поверхности, необходимо учесть центробежную силу, а также силы Кориолиса и соответствующие потенциалы — потенциалы некоторого поля тяготения, согласно Эйнштейну.

В этих упомянутых нами случаях поле тяготения есть лишь «эффективное» (мы предпочли бы даже сказать фиктивное) поле, поскольку в результате надлежащего преобразования координат оно исключается — исчезает во всем пространстве. В отличие от такого «эффективного» поля, в природе и в космосе имеются «истинные» поля тяготения, связанные с источником этих полей — так или иначе распределенной в пространстве материей, обладающей гравитационной (и инертной) [1] массой.

---

[1] Строго говоря, «эффективное поле» — это лишь абстракция, так как пространство, лишенное какой-либо материи, не мыслимо как «физическое пространство» и оно не могло бы быть субстратом каких-либо физических явлений. Речь идет лишь о том, что при определенных условиях «истинным гра-

В литературе по этим вопросам пользуются еще термином «перманентные», или истинные (неустраняемые во всем пространстве преобразованием координат), и неперманентные поля, которые могут быть исключены во всем пространстве переходом к инерциальной системе отсчета. Последовательное проведение идей Эйнштейна приводит к отождествлению природы тех и других полей.

Теория тяготения Эйнштейна строится на основе принципа эквивалентности, причем соотношения (IV.71), (IV.72) и (IV.74), которые получаются в результате простого преобразования координат, если они вводятся в применении к эффективным (неперманентным) полям, распространяются в этой теории и на «истинные» поля тяготения.

В таком обобщении соотношений (IV.71) и (IV.72) и утверждении о применимости их к истинным полям тяготения и заключена та новая физическая гипотеза, на основе которой Эйнштейном и была построена общая теория относительности.

Выше были подробно рассмотрены соотношения (IV.15), (IV.19) и (IV.20), показывающие, что для разъяснения так называемого «парадокса часов» или «парадокса близнецов» нет надобности в предположении о мгновенном обращении скорости B относительно A.

В соответствии с (IV.19) мы убедились в том, что если «часы» B ускоряются в течение какого-то конечного промежутка времени Δt_1 (или ΔT) относительно часов A, покоящихся в инерциальной системе, то при этом, с точки зрения B, часы A уходят вперед и дополнительный сдвиг стрелок A (относительно B), который необходимо учесть при подведении баланса отсчетов времени на протяжении всего симметричного замкнутого цикла их движений, оказывается согласно (IV.19) равным

$$\frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \tag{IV.75}$$

где T_0' — продолжительность стадии равномерного движения. Сдвиг (IV.75) совпадает с тем сдвигом во времени, которое показывают часы A, с точки зрения B, и наличие которого мы вынуждены были допустить, основываясь на упрощенных рассуждениях, приведенных в гл. II.

Если угодно, можно дать и определенное «объяснение» этому поведению часов A с точки зрения B. А именно, пользуясь теорией тяготения Эйнштейна и имея в виду намеченные выше ее основные концепции, можно сказать, что «перевод стрелок» часов A вперед вызывается в результате действия на часы A поля тяготения.

В самом деле, согласно (IV.74) ход часов A в поле тяготения убыстряется относительно часов B, если потенциал этого поля в

витационным полем» (в силу малости массы порождающей его материи) можно пренебречь.

точке, где находятся часы A, положителен относительно потенциала в точке, где находятся часы B, с которыми часы A «сверяются» на расстоянии.

В течение того времени (Δt — см. выше), когда на часы B действует сила F, ускоряющая их относительно A, с точки зрения B в системе координат x, t, действует «эффективное поле тяготения», направленное от A к B. Разность потенциалов [1] тяготения положительна. При этих условиях в соответствии с (IV.74) можем сказать, что «сила тяготения переводит стрелки» часов A вперед.

Этот «перевод стрелок часов A вперед» вследствие действия поля тяготения в соответствии с формулой (IV.74) всегда имеет место в начальный момент времени стадии ускоренного движения, поскольку в этот момент времени скорость тела A равна нулю $\left(u = \frac{dx}{dt} = 0\right)$, потенциал же χ в точке A, удаленной в направлении положительной оси x, имеет положительное значение (следовательно, налицо «ускорение хода часов» в соответствии с соотношением $d\tau_A = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\, dt\Big)$. Затем скорость «свободно падающего» в эффективном поле тяготения тела A возрастает, и ускоряющее ход часов действие поля χ в какой-то момент времени компенсируется замедляющим действием их движения. При дальнейшем приближении к началу координат это замедляющее действие на ход часов скорости dx/dt превалирует и часы A отстают от часов B. Все это было уже отмечено выше (см. (IV.52) — (IV.54)).

Следует, однако, оговорить, что намеренно неточная формулировка «сила тяготения переводит стрелки часов» (см. выше) может повести к неправильным представлениям. В действительности речь идет не о каком-то воздействии на часы A силы тяготения. Это видно из того, что в выражение (IV.74) собственного времени входит не градиент потенциала, определяющий силу тяготения (т. е. не производная от потенциала по пространственной координате), а разность потенциалов χ (или самый потенциал, если значение его в начале координат x, t, т. е. в точке B, положить равным нулю).

Более того, как это будет еще нами подчеркнуто в дальнейшем, применяя формулу (IV.74), мы предполагаем, что в известном смысле сила тяжести не влияет на ход идеальных часов, так же как не оказывает такого влияния явным образом и ускорение часов. Подробнее об этом см. § 6.

Для упрощения изложения, а также для наглядности в гл. I и II предполагалось, что обращение скорости B относительно A происходит мгновенно. Тогда налицо мгновенный «сдвиг» — скачок в показаниях часов A, так как они представляются наблюда-

---

[1] Мы, разумеется, вправе, как это и было сделано, рассматривать не разность потенциалов, а потенциал χ, положив $\chi = 0$ при $x = 0$.

телю B в результате определений, сделанных этим последним «на расстоянии».

В самом деле, если, рассматривая, как это было нами сделано выше, вторую половину ($A \leftarrow B$) замкнутого, симметричного во времени цикла $A \leftrightarrows B$ перемещений B относительно A, мы предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ B, удалившийся на расстояние $X_0 + \Delta X_0 = x_0 + \Delta x_0$ от A, начинает ускоренно двигаться в направлении к A($v_B = \frac{dX_B}{dt} = 0$ при $t = 0$), то в момент времени $t = t_1$, когда закончится действие постоянной силы, ускоряющей B относительно A, «собственное время» $\Delta\tau_A = \Delta T_A$ часов A, с точки зрения B, определяется соотношением (IV.63) и равно, следовательно,

$$\Delta\tau_A = \left(\frac{c}{g} + \frac{x_0 + \Delta x_0}{c}\right)\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}. \qquad \text{(IV.76)}$$

Если теперь положить в пределе $g = \infty$ (и тогда $\Delta x_0 = 0$ и $t_1 = 0$), то (IV.76) дает

$$\text{Пред.}\ [\Delta\tau_A(t = t_1)]_{\substack{g=\infty \\ t_1=0}} = \frac{x_0}{c}\operatorname{th}\frac{g\hbar}{c} = \frac{x_0\beta_0}{c}, \qquad \text{(IV.77)}$$

где $c\beta_0 = c\operatorname{th}\frac{gt_1}{c}$ согласно (IV.42) есть скорость, сообщенная B силой, ускоряющей его относительно A. (Значение произведения gt_1, как предполагается, остается конечным при $g = \infty$ и $t_1 = 0$.)

Если же рассматривается симметричный цикл движений ($A \leftrightarrows B$) в целом, то необходимо лишь удвоить выражение (IV.77) для того, чтобы получить величину $\Delta\tau_A$, вызванную сначала замедлением, а затем ускорением B относительно A, приводящим к обращению скорости B относительно A на участке пути Δx_0, длина которого в пределе $g = \infty$ равна нулю. Таким образом,

$$\Delta\tau_A(A \leftrightarrows B) = 2\frac{x_0\beta_0}{c}. \qquad \text{(IV.78)}$$

Как можно видеть, x_0 — расстояние AB в момент *остановки* B относительно A. Это расстояние x_0 намного больше расстояния x_0', показанного на рис. 7 (где x_0 и x_0' даны в разных масштабах). Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе: x_0' — расстояние от B до A (в системе B — системе II рис. 7) в тот момент времени t (t' — рис. 7), когда начинается замедление B относительно A (или когда заканчивается следующее за этим ускорение B относительно A). Расстояние x_0', следовательно, связано с x_0' соотношением

$$x_0 = \frac{x_0'}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}.$$

Согласно сказанному выше $x_0 = X_0$, т. е. x_0 равно расстоянию AB в системе A (системе I — рис. 7). В системе A расстояние AB не изменяется за время обращения скорости B относительно A. X_0 совпадает с x_0 рис. 7. Но $x_0' = \beta_0 c T_0'$, откуда согласно (IV.78)

$$\Delta\tau_A(A \leftrightarrows B) = \frac{2\beta_0^2 T_0'}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \qquad (IV.79)$$

(IV.79) совпадает с выражением, которое было получено в гл. I.

Если отождествлять в духе теории Эйнштейна введенное выше поле[1] χ с реальными полями тяготения, то можно сказать, что мгновенный сдвиг относительно B показаний удаленных от B *стандартных* (или, как мы чаще говорили, идеальных) часов вызван действием мгновенного гравитационного поля, если угодно, «гравитационной бури», создавшей поле, потенциал которого $\chi = \infty$ (при $x > 0$).

Впрочем, и такая формулировка, выраженная в словах «действием гравитационного поля», также в сущности искажает представления, на основе которых строится теория Эйнштейна. Согласно этой теории, как сила тяготения, так и особенности поведения часов в поле тяготения являются проявлениями свойств пространства — времени, определяемых распределенной в этом поле материей.

Не следует забывать также, что поле χ, которое было нами введено, в сущности фиктивно[2] и речь идет не об *объяснении* эффектов, рассмотренных уже подробно в предшествующем изложении, а лишь об их *описании*. Здесь мы лишь описываем полученные ранее соотношения на ином языке, введя для этого фиктивное (или эффективное) поле.

Если вернуться к исходной — инерциальной системе X, T (или перейти к любой другой инерциальной системе), то поле χ исчезает.

Физическая гипотеза, о которой говорилось выше и которая содержится в так называемом принципе эквивалентности Эйнштейна и ведет к построению теории тяготения, при выводе фор-

---

[1] Потенциал χ согласно (IV.72) есть функция g и x и при $g = \infty$ $\chi = \infty$, если $x > 0$.

[2] «Фиктивно» означает то, что это поле, в отличие от перманентных полей, исчезает во всем пространстве координат в результате соответствующего преобразования координат. Следует, тем не менее, оговорить, что термин «фиктивно» употреблен здесь в сущности условно. Обращение в нуль некоторой величины в какой-то соответственно выбранной системе координат не означает, вообще говоря, что эта величина фиктивна. Здесь говорится о «фиктивном» гравитационном поле, в отличие от «перманентного» поля тяготения, порождаемого определенными его источниками — материей, находящейся в этом поле.

мул (IV.77) и (IV.79) не применялась (если не придавать значения чисто терминологической стороне приведенных выше выводов).

В целях иллюстрации некоторые следствия, вытекающие из этой гипотезы, будут рассмотрены в § 5.

§ 3. О разрывах в значении координаты x при мгновенном изменении скорости начала координат

В данном параграфе выясним предварительно некоторые особенности, которые влечет за собой допущенный нами переход к пределу $g \to \infty$. Дело в том, что, кроме разрывов в течении времени, при таком переходе приходится рассматривать и разрывы в значении пространственных координат.

С точки зрения B, такие «разрывы» во времени возникают, если B подвергается действию на него внешней силы (в предельном случае бесконечно большой величины). Эта сила в любой момент времени уравновешена, однако, силой действующего на B эффективного гравитационного поля, поскольку мы считаем B (и он сам себя считает) неподвижным.

В условиях задач, которые были рассмотрены выше, предполагалось, что в результате действия приложенной в определенный момент времени бесконечно большой внешней силы скорость A относительно B (и B относительно A) обращается, т. е. мгновенно изменяется на равную по величине, но противоположную по направлению.

При таком рассмотрении симметричного, относительно момента обращения скорости, цикла движений остается скрытой другая своеобразная особенность, а именно: при мгновенном изменении скорости (как это вытекает из соотношений Лоренца), с точки зрения B, изменяется также скачкообразно и расстояние от A до B.

Примем во внимание данные в средней и нижней частях рис. 7.

Нижняя часть рисунка соответствует предположению, что покоится A. Тогда расстояние AB тела B от A в момент наибольшего удаления B от A равно x_0 (а время, в течение которого B удаляется от A, равно $(x_0/\beta_0 c) = T_0$).

С точки зрения B (средняя часть рис. 7), максимальное удаление B от A равно $x_0' = x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$ (с оговоркой, однако, которая будет ясна, если учесть то, что будет изложено ниже).

Теперь предположим, что в момент времени, когда B находится на расстоянии от A, равном

$$x_0' = x_0\sqrt{1-\beta_0^2} \tag{IV.80}$$

(если все рассматривать в системе II), B начинает подвергаться действию силы, тормозящей его относительно A, и что по истечении промежутка времени Δt он *останавливается* относительно A. После этого расстояние AB, измеренное с точки зрения B (в этом случае уже в системе I), оказывается равным x_0, следовательно, бо́льшим x_0'.

Если $\beta_0 \simeq 1$, то «скачок» из положения в пространстве B относительно A (до торможения) в положение B после торможения может быть очень велик.

Так, если задаться условиями примера гл. III, то $\sqrt{1-\beta_0^2} = 10^{-7}$ и расстояние AB за время Δt возрастает в 10 млн. раз — от $x_0' = x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$ до x_0[1].

---

[1] Во избежание возможных недоразумений обратим внимание на результат, который получается, если сравнить длины, показанные, с одной стороны, в верхней и, с другой стороны, в средней частях рис. 7.

Рассмотрим подробнее, по какому закону изменяется это расстояние AB, если предположить, что тормозящая B сила постоянна во времени.

Если до сих пор говорилось о «торможении» B, то это значит, что рассматривается изменение скорости B *с точки зрения системы* I, т. е. с точки зрения наблюдателя A, остающегося неподвижным в этой системе I. Однако *замедление* B в системе A (системе I) означает его *ускорение* (в направлении к A) в инерциальной системе II, начало которой все время движется с постоянной скоростью, удаляясь от A вправо (в соответствии с тем, что изображено на рис. 7).

В этом начале координат системы II B, неподвижный относительно системы II, находился вплоть до момента начала действия сил «торможения», после чего B стал двигаться, притом *ускоренно* (в системе II), в направлении к A.

В дальнейшем будем также говорить вместо «торможение» (в системе I) «ускорение» B (если речь идет о системе II). Ускорение это следует, как предположим, закону гиперболического движения.

Подчеркнем, что рассматривается лишь первая половина стадии обращения скорости B относительно A, которая заканчивается, когда B останавливается относительно системы I, т. е. относительно A.

Положим, что ускоряющая B (в системе II) сила F начинает действовать в момент времени $t = 0$[1] (которому соответствует $t' = T'_0$ рис. 7 гл. II). Координаты x', t' инерциальной системы II рис. 7 обозначим на этот раз буквами X', T' (X', T' — координаты мгновенной инерциальной системы для начального момента времени $t = 0$). Оси координат x и X направим от B к A.

Следует иметь в виду, что в верхней части рисунка показаны *неодновременные* относительно системы III положения b''_n и B.

Разность длин, измеряющих эти расстояния между *неодновременными* положениями (в системе III), с одной стороны, и одновременными в системе II, с другой стороны, равна

$$\left(\frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \sqrt{1-\beta_0^2}\right)x_0 = \frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}x_0. \tag{IV.81}$$

Отметим, что выражение (IV.81) по форме аналогично выражению для разности показанных на рис. 7 отсчетов *времени* по циферблатам соответствующих часов (b''_n и b'_n).

В самом деле, разность указанных отсчетов времени согласно рис. 7 равна

$$\left(\frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2} - 1\right)T'_0 = \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T'_0 = \frac{2\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}}T_0 \tag{IV.82}$$

(где T_0 — время, определяемое в системе I, так же как и x_0 — расстояние, определяемое в системе I); положения всех трех объектов — b''_n, b'_n и A, совпадающих по вертикали рис. 7, совпадают в пространстве, но расстояния их от B различны в трех системах — I, II и III и, в частности, расстояния от B циферблатов (b''_n, с одной стороны, и b'_n — с другой), по которым отсчитывается время при определении полученной в (IV.82) разности времени, различны в системах III и II. Также и моменты времени, к которым относятся длины, стоящие в левой части уравнения (IV.81), различны в системах III и II.

[1] Здесь имеется в виду неинерциальная система координат x, t, связанная с B и определенная, как указано в данной главе.

В момент времени $t = T' = 0$ начальное расстояние от A до B (измеренное в системе II рис. 7) равно

$$x_0' = X_0' = x_0\sqrt{1-\beta_0^2} \qquad (IV.83)$$

и B находится в начале системы координат x, t. В системе II A движется равномерно со скоростью β_0 в направлении положительных X', т. е. удаляясь от B (следовательно, влево, если иметь в виду расположение объектов, указанное на рис. 7).

Расстояние A от начала инерциальной системы (система II рис. 7) равно таким образом

$$X_A' = X_0' + \beta_0 cT' \text{ (при } t \geqslant 0). \qquad (IV.84)$$

Начало системы x, t движется с постоянным «собственным» ускорением также в направлении положительных X. Координаты A в системе x, t связаны с координатами той же точки в системе $X'T'$[1] уравнениями (IV. 56) и (IV. 57).

Следовательно, согласно (IV.84) и (IV.56).

$$X_0' + \beta_0 cT' = X_A' = x_A \operatorname{ch}\frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - 1\right) \qquad (IV.85)$$

и после подстановки (IV.57) в (IV.85)

$$X_0' + \frac{c^2}{g}\beta_0 \operatorname{sh}\frac{gt}{c} + \beta_0 x_A \operatorname{sh}\frac{gt}{c} = x_A \operatorname{ch}\frac{gt}{c} + \frac{c^2}{g}\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - 1\right).$$

Отсюда

$$x_A = \left(X_0' + \frac{c^2}{g}\right)\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - \beta_0 \operatorname{sh}\frac{gt}{c}} - \frac{c^2}{g} \qquad (IV.86)$$

и далее

$$\frac{dx_A}{dt} = -\left(X_0' + \frac{c^2}{g}\right)\frac{\operatorname{sh}\frac{gt}{c} - \beta_0 \operatorname{ch}\frac{gt}{c}}{\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - \beta_0 \operatorname{sh}\frac{gt}{c}\right)^2}\frac{g}{c}. \qquad (IV.87)$$

При $t = 0$ (или $t' = T_0'$), т. е. в момент начала ускорения (или торможения) B,

$$\left(\frac{dx_A}{dt}\right)_{t=0} = \beta_0 X_0' \frac{g}{c} + \beta_0 c, \qquad (IV.88)$$

что при $g = 0$ и $t = 0$ дает (как и должно быть) $\frac{dx_A}{dt} = \beta_0 c$. Однако при $g \neq 0$ и $t = 0$, т. е. в момент начала ускорения (начала действия силы F),

$$\frac{dx_A}{dt} \neq \beta_0 c \text{ и } \frac{dx_A}{dt} \gg \beta_0 c, \qquad (IV.89)$$

если $\beta_0 X_0' \frac{g}{c^2} \gg 1$.

---

[1] Напомним, что инерциальная система координат $X'T'$ в данном случае совпадает с системой II рис. 7.

Таким образом, в координатах системы отсчета x, t, начало которой жестко связано с B и которая при $t \leqslant 0$ инерциальна, имеет место скачкообразное и очень значительное при $\beta_0 X_0' \frac{g}{c^2} \gg 1$ изменение скорости A относительно B в момент начала действия ускоряющей силы.

В предельном случае $g = \infty$ согласно (IV. 88) $(dx_A/dt)_{t=0} \to \infty$, т. е. в момент начала ускорения скорость A относительно B возрастает внезапно (скачкообразно) — от $\beta_0 c$ до бесконечности.

Легко убедиться в том, что в пределах интервала времени $0 \leqslant t \leqslant \Delta t$ (т. е. за время ускорения B) $\frac{d^2 x_A}{dt^2} < 0$.

Следовательно, A замедляется относительно B, как и должно быть, поскольку в системе x, t тело A подвержено действию сил эффективного поля тяготения, направленного от A к B.

Ускорение заканчивается в момент времени $t = \Delta t$, когда B приобретает скорость (в системе II), равную β_0.

Следовательно, согласно (IV.22) и (IV.24)

$$\operatorname{ch} \frac{g \Delta t}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \tag{IV.90}$$

и

$$\operatorname{sh} \frac{g \Delta t}{c} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \tag{IV.91}$$

Подставив (IV.90) и (IV.91) в (IV.87), убеждаемся в том, что при $t = \Delta t$, когда ускоряющая сила перестает действовать, скорость A относительно B становится равной нулю

$$\left(\frac{dx_A}{dt}\right)_{t=\Delta t} = 0.$$

Таким образом, в соответствии с заданными условиями в начальный момент времени (т. е. в момент начала ускорения при $t = 0$) A движется, удаляясь от B, со скоростью

$$\left(\frac{dx_A}{dt}\right)_{t=0} = \beta_0 X_0' \frac{g}{c} + \beta_0 c. \tag{IV.92}$$

Поле тяготения, действующее в системе x, t в направлении от A к B, замедляет A, и при $t = \Delta t$ скорость A относительно B становится равной нулю.

Согласно (IV.86) и (IV.83) расстояние x_{AB} $(t = 0) = X_0' = x_0 \sqrt{1 - \beta_0^2}$, как и было условлено заранее. При $t = \Delta t$ (IV. 86) с учетом (IV. 90) и (IV. 91) дает

$$x_{AB}(t = \Delta t) = \frac{X_0' + \frac{c^2}{g}}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} - \frac{c^2}{g}. \tag{IV.93}$$

Если далее положить $g \to \infty$ (причем $\Delta t = 0$), то согласно (IV.93)

$$x_{AB}(t = \Delta t) = \frac{X_0'}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = x_0,$$

что также соответствует исходным предположениям.

При $\Delta t = 0$ и $g = \infty$ налицо, следовательно, скачкообразное изменение расстояния от $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$ до x_0. A внезапно удаляется от B на расстояние $x_0(1-\sqrt{1-\beta_0^2})$. Если за стадией «торможения» последует стадия ускорения (в направлении от B к A, то и другое относительно системы I), так что за время $\Delta t \leqslant t \leqslant 2\Delta t$ замедленное движение B, имевшее место на протяжении интервала времени $0 \leqslant t \leqslant \Delta t$, обращается, то при описании в системе x,t, если Δt мало, сначала имеет место внезапное удаление A от B до расстояния, равного x_0, а затем снова сближение их друг с другом до начального расстояния, равного $x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}$, которое и показано на рис. 7.

Если β_0 близко к единице, то такие изменения расстояния AB (сначала его увеличение, а затем снова уменьшение) за время $2\Delta t$ могут быть очень значительны. Для примера, если иметь в виду числовые данные, приведенные в задаче о «космонавтах» (см. гл. III), то $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} = 10^7$. При таком значении γ расстояние AB, о котором идет сейчас речь, изменяется в пределах интервала времени Δt, как уже и отмечено, в 10 млн. раз.

Если рассматривать только стадию замедления A относительно B в результате действия на B силы F за время Δt и предположить, что после того, как скорость A относительно B стала равной нулю, A остается неподвижным относительно B, то такое изменение расстояния в γ (т. е. в нашем примере в 10 млн. раз) вполне реально.

Наблюдатель B, произведя, например, радиолокационным методом измерения до начала действия силы F и после окончания этого действия, нашел бы, что расстояние AB изменилось в 10 млн. раз. Однако для осуществления такого рода измерений требуется некоторое конечное (а в условиях тех космических масштабов, которые нами имелись в виду, например в гл. III, и очень длительное) время. В связи с этим если рассматривать обращение скорости A относительно B, то при скоростях, близких к скорости света, и при приближении $2\Delta t$ к нулю такие «скачкообразные» изменения расстояния между A и B не имеют прямого физического смысла.

Если, например, предположить, что A посылает световые сигналы определенной частоты ν_0, воспринимаемые приемником B с частотой ν_0', то для того чтобы B смог уследить за изменением расстояния от него A, основываясь, например, на наблюдаемом им Доплер-эффекте (смещения $\frac{\nu_0' - \nu_0}{\nu_0}$ частоты принимаемых им сигналов), необходимо, конечно, потребовать, чтобы полное число $n = \nu_0' \Delta t$ колебаний, принятых за время изменения его скорости, было бы очень велико

$$n = \nu_0' \Delta t \gg 1. \qquad \text{(IV.94)}$$

Но в момент времени начала действия силы F частота воспринимаемых B световых сигналов источника A, удалявшегося относительно него с постоянной во времени скоростью, равна [1]

$$\nu_0' \text{(нач.)} = \frac{1-\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \nu_0 = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}}{1+\beta_0} \approx \frac{1}{2\gamma_0} \nu_0, \qquad \text{(IV.95)}$$

[1] Следует, впрочем, оговорить, что применение формулы (IV.95) оправдано лишь при выполнении следующего условия: скорость движения изменяется настолько медленно, что приращением скорости за время, которое велико в сравнении с периодом колебаний, можно еще пренебречь.

где $\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_0^2}} \gg 1$. Эта частота ν_0' очень мала в сравнении с ν_0. Так, например, если иметь в виду вышеупомянутые числовые данные, то в начальный момент времени $\nu_0' \approx \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}\,\nu_0$. В момент остановки B относительно A $\nu_0' \simeq \nu_0$.

Следовательно, поскольку должно быть выполнено условие (IV.94), необходимо потребовать, чтобы тем более было выполнено также и условие

$$\nu_0 \Delta t \gg 1. \tag{IV.96}$$

При приближении Δt к нулю собственная частота колебаний ν_0 сигнала должна, следовательно, стремиться к бесконечности. И, наоборот, если частота посылаемых A сигналов конечна, то число колебаний, воспринятых B за время торможения его относительно A, стремится к нулю при $g = \infty$, поскольку при $g \to \infty$ $\Delta t \to 0$. Таким образом, внезапным «броскам» «вперед и назад» одного из тел относительно другого при «мгновенном» «обращении» их относительной скорости не следует приписывать какой-либо физический смысл. Не следует упускать из виду также и то, что в пределе $\Delta T = 0$ потребовалась бы бесконечно большая сила, так как изменение количества движения при обращении скорости B имеет конечную величину и в пределе $\Delta T \to 0$) сила $F \to \infty$.

§ 4. Уравнение движения в эффективном статическом гравитационном поле под действием «внешней»[1] силы F

В этом и в следующем параграфах мы выйдем несколько за рамки основной темы данного обзора. Вернемся снова к примеру, подробно рассмотренному в гл. III.

Основываясь на результатах, полученных в данной главе, и воспользовавшись лишь весьма упрощенными соображениями, проиллюстрируем на указанном простом примере некоторые выводы общей теории относительности, касающиеся динамики механических систем в гравитационном поле.

В гл. III была использована инерциальная система координат x, t, начало которой неподвижно связано с телом B, движущимся (при $t \geqslant 0$) по инерции. Сейчас же мы фиксируем внимание на соотношениях, которые имеют место в течение времени, когда работают оба двигателя, сообщающие ускорение как A, так и B.

Положим, что начало координат системы x, t (теперь уже неинерциальной) неподвижно связано с A, летящим (по отношению к Земле) «позади» своего партнера B, причем будем иметь в виду промежуток собственного времени τ_A в пределах $0 < t \leqslant \tau_A = 6{,}5$ сек., в течение которого, как предположено, работают оба двигателя и ускоряются, следовательно, оба партнера (A и B). В таком случае налицо гиперболическое движение начала координат A и, следовательно, справедливы соотношения (IV.56) и (IV.57).

[1] Под «внешней» силой мы понимаем здесь силу, действующую на данное тело также и в инерциальной системе X, T, в которой гравитационное поле отсутствует.

Как мы уже убедились, расстояние AB, измеренное в мгновенной инерциальной системе, увеличивается. B (рассматриваемый в новой системе x, t) удаляется от A.

Уравнение движения B в координатах x, t вытекает из следующих трех уравнений:

$$X_B = \frac{c^2}{g}\left[\left(1+\frac{x_B g}{c^2}\right)\operatorname{ch}\frac{gt}{c}-1\right], \qquad (IV.97)$$

$$T_B = \frac{c}{g}\left(1+\frac{x_B g}{c^2}\right)\operatorname{sh}\frac{gt}{c}, \qquad (IV.98)$$

$$X_B = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\frac{gT_B}{c}\right)^2}-1\right]+x_0 \qquad (IV.99)$$

(см. (IV.56), (IV.57) и (III.4)), где $x_0 = \Delta X_0$ — *начальное* расстояние между космонавтами в системе x, t, равное постоянному расстоянию ΔX_0 между ними в системе X, T.

Исключая из трех уравнений (IV.97) — (IV.99) X_B и T_B, приходим к искомому уравнению для x_B. Опуская выкладки, напишем результат, а именно квадратное уравнение для x_B

$$x_B^2 + 2x_B\left(\frac{c^2}{g} - x_0\operatorname{ch}\frac{gt}{c}\right) + x_0^2 - 2\frac{c^2}{g}x_0\operatorname{ch}\frac{gt}{c} = 0.$$

Решение этого уравнения с учетом начальных условий ($x = x_0$ при $t = 0$) дает следующее выражение:

$$x_B = x_0\operatorname{ch}\frac{gt}{c} - \frac{c^2}{g} + \sqrt{\frac{c^4}{g^2} + x_0^2\operatorname{sh}^2\frac{gt}{c}}. \qquad (IV.100)$$

Уравнение (IV.100) определяет кинематическую картину движения.

Можно, однако, задаться вопросом о динамике механических систем в гравитационном поле. Выражение для потенциала χ гравитационного поля было выведено на основе принципа эквивалентности путем простого преобразования координат. В простейшем случае тем же путем можно получить ответ также и на поставленный только что вопрос.

Ранее мы нашли выражение (IV.72) для потенциала χ, выполнив преобразование координат (от X, T к x, t) применительно к уравнению $d^2X/dT^2 = 0$ свободного движения тела A.

Интересующие нас сейчас соотношения получим, преобразовав уравнение движения

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{m\,dX}{dT}\right) = F_0, \qquad (IV.101)$$

где F_0—некоторая «внешняя» сила (в нашем примере реактивная сила ракетного двигателя), действующая на данное тело (A или B).

Выкладки проведем в упрощенном варианте, предположив, что начальная скорость тела в мгновенной инерциальной системе координат равна нулю:

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)_{t=0}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0. \tag{IV.102}$$

В соответствии с этим (IV.101) можно переписать в виде

$$m_0^0\frac{d^2X}{dT^2}=F_0. \tag{IV.103}$$

Здесь m_0^0 — масса тела (имеется в виду масса покоя в инерциальной системе X, T).

Переписав (IV. 103) в виде

$$m_0^0\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dT}\right)\frac{dt}{dT}=F_0, \tag{IV.104}$$

подставляем в (IV.104) выражения (IV.45) и (IV.46) для dX и dT. Затем выполняем дифференцирование, и, поскольку имеется в виду тело, покоящееся в мгновенной инерциальной системе при $t=0$, в полученном в результате дифференцирования уравнении полагаем $dx/dt=0$ и $t=0$. (Как уже указывалось выше, выбирая мгновенную инерциальную систему для момента времени $t=0$, мы не ограничиваем общности вывода.) В силу (IV. 98)

$$\frac{dT}{dt}=\operatorname{ch}\frac{gt}{c}+\frac{dx}{dt}\frac{1}{c}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}+\frac{xg}{c^2}\operatorname{ch}\frac{gt}{c}$$

и

$$\left(\frac{dt}{dT}\right)_{t=0}=\frac{1}{1+\frac{xg}{c^2}}. \tag{IV.105}$$

Для скорости dX/dT согласно (IV. 45), (IV.46) и (IV.41) имеем

$$\frac{dX}{dT}=\frac{c\operatorname{sh}\frac{gt}{c}+\frac{dx}{dt}\operatorname{ch}\frac{gt}{c}+\frac{gx}{c^2}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c}+\frac{dx}{dt}\frac{1}{c}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}+\frac{xg}{c^2}\operatorname{ch}\frac{gt}{c}}. \tag{IV.106}$$

Подставив в (IV.104) выражение $\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dT}\right)$ (которое получим, выполнив дифференцирование (IV.106)) и выражение (IV.105), положив $dx/dt=0$ и $t=0$, получаем

$$m_0^0g+\frac{m_0^0}{1+\frac{xg}{c^2}}\frac{d^2x}{dt^2}=F_0\left(1+\frac{xg}{c^2}\right). \tag{IV.107}$$

Положим

$$m_0 = \frac{m_0^0}{1 + \frac{xg}{c^2}} \qquad \text{(IV.108)}$$

и

$$F = F_0\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right). \qquad \text{(IV.109)}$$

Тогда уравнение (IV.107) может быть записано в виде [1]

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = F - m_0 g\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right). \qquad \text{(IV.110)}$$

Замечая, что согласно (IV.72)

$$-m_0 g\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right) = f_{gr} = -m_0 \frac{\partial \chi}{\partial x}, \qquad \text{(IV.111)}$$

где f_{gr} — сила тяжести, действующая на тело B при $dx/dt = 0$, если масса покоя его есть m_0, и переписывая уравнение (IV.110) в виде

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = F + f_{gr}, \qquad \text{(IV.112)}$$

убеждаемся в том, что при указанных упрощающих предположениях в системе координат x, t выполняется закон сохранения количества движения, причем в уравнение движения входят эффективная масса покоя

$$m_0 = \frac{m_0^0}{1 + \frac{gx}{c^2}} = \frac{m_0^0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}} \qquad \text{(IV.113)}$$

и эффективная сила

$$F = F_0\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) = F_0\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}} \qquad \text{(IV.114)}$$

(см (IV. 109)), где m_0^0 — масса покоя данного тела в инерциальной системе (в нашем случае X, T), а m_0 — масса покоя в системе x, t; F_0 — «внешняя» сила, действующая на тело B в инерциальной системе X, T.

В правой части уравнения (IV.112) стоит равнодействующая «внешней» силы (например, реактивной силы ракетного двигателя) и силы гравитационной. Равенство (IV.113) означает, что вес какого-либо тела (в нашем случае B), находящегося в поле тяготения в точке, где значение гравитационного потенциала больше нуля ($\chi > 0$), меньше веса того же тела при $\chi = 0$.

---

[1] Мы приняли, однако, во внимание, что согласно (IV. 116) $dm_0/dt = 0$ при $dx/dt = 0$.

Выполнив несколько более сложные выкладки [1], можно было бы путем тех же рассуждений убедиться в том, что закон сохранения количества движения будет соблюдаться и при $dx/dt \neq 0$, если в

$$\frac{d\left(m\,\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = F + f_{gr} \tag{IV.115}$$

положить

$$m = \frac{m_0^0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \left(\frac{dx}{c\,dt}\right)^2}}. \tag{IV.116}$$

---

[1] Для того чтобы прийти к (IV.115), надо преобразовать уравнение

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{m_0^0\,\frac{dX}{dT}}{\sqrt{1-\left(\frac{dX}{cdT}\right)^2}}\right) = F_0,$$

выразив правую и левую его части в координатах x, t. (Это уравнение выведено в прилож. 6. Массе m_0^0 и силе F_0 здесь соответствуют m_0 и F в прилож. 6.) Здесь мы лишь наметим эти вычисления.

Выполнив дифференцирование, получаем уравнение

$$\frac{m_0^0}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{dX}{cdT}\right)^2}\right)^3}\,\frac{d}{dT}\left(\frac{dX}{dT}\right) = F_0.$$

Согласно (IV. 105) это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{m_0^0}{\left(\sqrt{1-\left(\frac{dX}{cdT}\right)^2}\right)^3}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dX}{dT}\right) = F_0\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right) = F.$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dX'}{dT'}\right) = g + \frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{1}{1+\frac{xg}{c^2}} - \frac{2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{g}{c^2}}{\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)^2}$$

см. (IV. 105) и (IV. 141)), при $g=\text{const}$, а также, что согласно (IV. 116)

$$f_{gr} = -mg\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right) = -\frac{m_0^0 g\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{dx}{cdt}\right)^2}} = -\frac{m_0^0 g\left(1+\frac{xg}{c^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2} - \left(\frac{dx}{cdt}\right)^2}},$$

можно, выполнив некоторые выкладки, убедиться в том, что уравнение (IV.115) имеет место.

Под X и T здесь мы понимали координаты мгновенной инерциальной системы.

Выражение F в (IV.115) такое же, как и в уравнении (IV. 112), и

$$f_{gr} = -mg\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right).$$

Выражения для m_0 и F, полученные для частного случая, рассмотренного в данной главе, эффективного поля тяготения χ, в действительности имеют общий характер и применимы в случае любого статического гравитационного поля, также и «перманентного».

Рассмотрим снова пример двух космонавтов (см. гл. III) с точки зрения новой системы координат (данного параграфа), начало которой совместим с A, предполагая, следовательно, A неподвижным, а B движущимся в эффективном гравитационном поле.

С точки зрения системы отсчета x, t, на тело A действует сила тяготения. Поскольку, с той же точки зрения, A неподвижен, эта сила тяжести как раз *уравновешена* реактивной силой, создаваемой ракетным двигателем A.

Если A неподвижен, то, как известно, B удаляется от него, ускоряясь в течение указанного выше интервала времени. На первый взгляд это кажется неожиданным, так как мы знаем, что оба (A и B) находятся в тождественных условиях.

Последнее, однако, верно только с точки зрения исходной системы — X, T.

В системе же x, t, очевидно, реактивная сила, действующая на B, больше силы поля тяготения, направленного к A, и результирующая сил — реактивной и тяготения — действует в сторону, противоположную направлению силы гравитационного поля, и ускоряет B в направлении удаления B от A. Все это следует из (IV.108), (IV.109) и (IV.111).

Согласно (IV.111) напряжение поля тяготения возрастает пропорционально $\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right)$, но также согласно (IV.109) (при заданном F_0) возрастает и реактивная сила F. Если бы налицо были только эти два фактора, то равновесие сил (тяготения и реактивной) сохранялось бы и на расстоянии x от начала координат — оно имело бы место независимо от x.

Следует, однако, учесть еще третий фактор.

Как было отмечено выше, согласно (IV.113) масса тела B, находящегося на расстоянии x от начала координат в направлении положительных x (в точке, где, следовательно, потенциал $\chi > 0$), меньше массы такого же тела, находящегося в начале координат, где $\chi = 0$, и тело B (при $x = x_0$) легче такого же тела A (при $x = 0$): вес уменьшается пропорционально $\dfrac{1}{1 + \frac{gx}{c^2}}$.

В результате этого, несмотря на бо́льшую напряженность поля тяготения в точке B, гравитационная сила, действующая на B, оказывается равной силе тяготения, действующей на A. Вместе с тем реактивная сила согласно (IV.109) больше силы, действующей в точке $x = 0$ ($\chi = 0$), возрастая пропорционально фактору $\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right)$. Результирующая сил — реактивной и тяготения, следовательно, положительна; B разгоняется этой результирующей силой в направлении удаления от A и скорость B нарастает вплоть до момента, когда двигатель B выключается [1]. После этого сила тяготения замедляет B и скорость его (относительно A), как мы видели, убывает.

Основываясь на выведенных выше уравнениях и учитывая, что при $x = 0$ сила тяготения уравновешена реактивной силой, можно вычислить начальное ускорение $(d^2x/dt^2)_{t=0}$ тела B (при $dx/dt = 0$ и $x = x_0 > 0$).

Реактивная сила F согласно (IV.109) равна

$$F = F_0\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right),$$

где x_0 — начальное расстояние между A и B. Условие равновесия

$$F(x = 0) = -f_{gr}\,(x = 0) \tag{IV.117}$$

дает

$$F_0 = m_0^0 g, \tag{IV.118}$$

так как при $x = 0$ $\chi = 0$ и $f_{gr} = -m_0^0 g$ согласно (IV.111). Следовательно,

$$F(x_0) = F_0\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) = gm_0^0\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) = gm_0^0\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}},$$

а

$$\begin{aligned} F(x_0) + f_{gr}(x_0) &= m_0^0 g\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) - m_0 g\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) = \\ &= m_0 g\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right)^2 - m_0 g\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) = m_0 g\frac{gx_0}{c^2}\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{IV.119}$$

Подставляя (IV.119) в (IV.112), вычисляем ускорение

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0,\ x=x_0} = g\frac{gx_0}{c^2}\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right). \tag{IV.120}$$

---

[1] Если бы мы совместили начало системы координат x, t с B, считая его неподвижным, то в такой системе отсчета сила тяжести, действующая на A, также была бы равна гравитационной силе, действующей на B. Однако реактивная сила — сила двигателя — была бы в этом случае пропорциональна $\left(1 - \frac{gx}{c^2}\right)$, где g — абсолютная величина собственного ускорения B и x — расстояние от A до B, и, следовательно, сила двигателя A была бы *меньше* действующей на него гравитационной силы. A стал бы «падать» в направлении гравитационного поля χ — в направлении отрицательных x, удаляясь также и в этом случае от B.

Можно убедиться в том, что (IV.120) совпадает с выражением величины ускорения $(d^2x/dt^2)_{t=0}$, которое можно получить непосредственно, продифференцировав дважды выражение (IV.100).

Зависимость (IV.109) «внешней» силы, действующей в поле тяготения, от потенциала (χ) этого поля (статического) применима независимо от того, какова природа этой «внешней» силы (как и показывает приведенный выше упрощенный вывод). В данном частном случае (реактивной силы) зависимость $F \sim \left(1 + \frac{gx}{c^2}\right)$ можно еще связать с зависимостью от χ выражения для собственного времени τ в координатах x, t, если при этом учесть также и зависимость (IV. 113)

$$m_0 = \frac{m_0^0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}}$$

(см. прилож. 7).

В дальнейшем придется сослаться на соотношения (IV.108) и (IV.109), полученные в настоящем параграфе. Отметим, что уравнение (IV.107) и вывод о зависимости массы и «внешней» силы от потенциала тяготения в рассмотренном нами случае эффективного (или фиктивного) гравитационного поля получены в результате простого преобразования координат.

Принцип эквивалентности позволяет применить эти выводы к «истинному» (перманентному) полю тяготения. Выбрав соответствующим образом в определенной точке перманентного поля ускоренную систему координат, можно (локально) заменить истинное гравитационное поле эффективным полем, действующим в системе координат, аналогичной той системе x, t, которая рассматривалась выше. Подробнее об этом будет сказано в следующем параграфе. Вместе с тем в принципе можно, так же как это было сделано ранее, сопоставить картину явлений в системе x, t с картиной, представляющейся наблюдателю в соответствующей инерциальной системе координат X', T'.

Поскольку законы динамики, действующие в системе X', T', известны, применением метода, в основе своей аналогичного тому, которым мы воспользовались для решения простой, рассмотренной в данном параграфе, задачи, можно уже в общем виде раскрыть законы динамики движения в гравитационном поле.

Если в принципе вопрос и решается в результате выполнения «простого» преобразования координат, как в только что рассмотренном элементарном примере, то решение этой задачи в общем виде требует применения сложного математического аппарата тензорного анализа; этим путем Эйнштейном и была построена его теория тяготения, развитая затем и развиваемая и в наше время его последователями.

§ 5. Гравитационное «смещение частоты» в перманентных полях тяготения

В этом параграфе, допуская упрощенное и, возможно, нестрогое изложение, наметим некоторые следствия выведенных выше соотношений. Речь будет идти о поведении «часов» в постоянных (истинных) гравитационных полях.

Если рассматривается пара тождественных часов (A и B), которые удалены друг от друга и находятся в поле тяготения в различных его точках и, следовательно, на разных «уровнях потенциала» этого поля, то наблюдатель, отсчитывающий время по одним из этих часов (положим, B) и следящий при этом на расстоянии за ходом других — неподвижных часов (A), придет к заключению, что часы A упреждают часы B, или отстают от них в зависимости от того, выше или ниже уровень потенциала гравитационного поля в точке A в сравнении с уровнем потенциала в точке B.

Например, если «часами» являются источники света — атомы, излучающие свет определенной «собственной» частоты (или длины волны), то наблюдатель, находящийся на Земле, измеряя длину волны света, испускаемого этими атомами на Солнце, найдет, что колебания их представляются ему замедленными. Он обнаружит так называемое гравитационное «красное смещение» спектральной линии (смещение в сторону красного края спектра).

Соотношение (IV.74) было выведено для «эффективного» (неперманентного) силового поля, которое можно и необходимо ввести, если рассматриваются явления в жесткой неинерциальной системе координат, начало которой движется так, что «собственное» его ускорение g есть какая-то заданная функция времени $g(t)$. В частном случае гиперболического движения $g(t) = \text{const}$.

Понятие координатного времени в применении к эффективному полю было нами определено, основываясь на представлении о «мгновенной инерциальной системе координат».

Эффективное поле можно исключить во всем пространстве путем преобразования координат и перехода к инерциальной системе отсчета.

Согласно принципу эквивалентности соотношение (IV.74) можно обобщить и применить его также к истинным полям тяготения. В этом случае, однако, эквивалентное эффективное поле, которым может быть заменено истинное поле, и соответствующую систему отсчета можно ввести лишь только локально, т. е. так, что эквивалентность эффективного и истинного полей будет иметь место лишь в непосредственном окружении данной выбранной нами точки истинного поля — в пределах области поля бесконечно малой протяженности вблизи этой точки.

Рассматривая для конкретности представления некоторую «силовую линию» поля тяготения, уходящую на бесконечно большое расстояние от источников этого поля, можно «смоделировать» поле тяготения в точках этой силовой линии (или какой-либо другой непрерывной линии, уходящей на бесконечность), прибегнув к представлению о множестве *ускоренных* систем отсчета с различным в разных точках поля значением ускорения g аналогично тому, как мы ввели представление о множестве «мгновенных *инерциальных* систем отсчета», описывая «жесткую» систему координат x, t, начало которой движется с постоянным во времени ускорением.

Воспользовавшись таким приемом, мы сможем в любой точке пространства, или, например, в точках на определенной силовой линии, заменить истинное поле некоторым эффективным полем. Для этого подчиним вводимые при таком рассмотрении эффективные ускоренные системы отсчета следующим требованиям.

Направление оси x системы x, t в каждой точке поля должно совпадать с направлением вектора поля. Величина же градиента потенциала истинного поля должна быть равна производной от потенциала χ эффективного поля по координате x. При этих условиях силы эффективного поля, с одной стороны, и истинного, с другой стороны, совпадают. Кроме того, потребуем (и это возможно), чтобы значения эффективного и истинного потенциалов в точке «эквивалентной» системы координат, совпадающей с данной точкой перманентного гравитационного поля, были одинаковы [1].

Что касается координатного времени, которое должно также совпадать с координатным временем t эквивалентной системы, то, если говорить о численном значении t, оно условиями (IV.121) и (IV.122) еще не задается или задается «с точностью до некоторой произвольной постоянной», вообще говоря, различной в разных точках поля. Однако должно выполняться дифференциальное соотношение

$$d\tau = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\,dt. \qquad \text{(IV.74)}$$

Существенно, конечно, как это и следует из (IV.74), что мы условливаемся приращение dt координатного времени в тех точках пространства, где мы положили $\chi = 0$, считать равным прира-

---

[1] Напомним, что

$$\chi = gx\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right) \qquad \text{(IV.121)}$$

и

$$\frac{d\chi}{dx} = g\left(1 + \frac{gx}{c^2}\right), \qquad \text{(IV.122)}$$

где g — ускорение начала координат рассматриваемой системы отсчета. Поскольку мы приравниваем χ и $d\chi/dx$ соответственно заданным значениям потенциала истинного поля и его градиента и, кроме того, полагаем, что направление оси совпадает с направлением градиента, эффективная система координат и положение на ее оси x данной точки определены уравнениями (IV.121) и (IV. 122) (эти уравнения определяют g и x).

щению собственного времени $d\tau$ в том же месте пространства. Иначе говоря, что при $\chi = 0$ ход «координатных» часов совпадает с ходом «стандартных» часов. Естественно предположить, что это имеет место на бесконечно большом расстоянии от источников поля. При этом координатное время должно быть независимой переменной, определенное значение которой задается на всем протяжении истинного поля.

Как увидим в дальнейшем, координатное время при выводе соотношений, о которых будет идти речь, в конечном итоге исключается. Можно было бы поэтому и не уточнять, какой именно физический смысл имеет величина dt в формуле (IV.74). К этому вопросу мы вернемся еще в дальнейшем.

Наметим вкратце те соображения, которые приводят к указанному выше результату.

Как было отмечено, скорость распространения света при описании в введенной выше системе координат x, t не равна c и является какой-то функцией пространственной координаты или трех пространственных координат, а также, вообще говоря, и времени.

Если ограничиться рассмотрением одномерного случая, то выполненные выше преобразования координат приводят согласно (IV.29), (IV.30) и (IV.73) к следующему уравнению:

$$c^2 dT^2 - dX^2 = c^2\left(1 + \frac{2\chi}{c^2}\right) dt^2 - dx^2. \tag{IV.123}$$

Если из какой-то точки X в момент T послан световой сигнал в направлении положительной оси X и если этот сигнал, распространяясь в инерциальной системе со скоростью c, достигает точки $X + dX$ в момент времени $T + dT$, то $dX/dT = c$. Следовательно, если $X = \varphi(T)$ есть уравнение «траектории» светового сигнала, то X удовлетворяет уравнению

$$c^2 dT^2 - dX^2 = 0. \tag{IV.124}$$

Вместе с тем, как это следует из (IV.123) и (IV. 124), в системе координат x, t «траектория» светового сигнала определяется уравнением

$$c^2 \left(1 + \frac{2\chi}{c^2}\right) dt^2 - dx^2 = 0, \tag{IV.125}$$

откуда скорость света в точке x в момент времени t, которую обозначим w, согласно (IV. 125) равна

$$w = \frac{dx}{dt} = c\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^4}} = c\left(1 + \frac{xg}{c^2}\right). \tag{IV.126}$$

Применим выражение (IV.126) к истинному, статическому (постоянному во времени) полю тяготения. В этом случае потенцил

χ является какой-то функцией пространственных координат. Эта функция не зависит, однако, от времени, поскольку мы имеем дело со статическим полем, что существенно для приводимых далее рассуждений. Задача о распространении света в гравитационном поле (например, системы Солнце — Земля) аналогична, следовательно, задаче о прохождении луча света через среду, показатель преломления которой изменяется вдоль луча, но является какой-то не зависящей от времени функцией координаты — расстояния, измеряемого вдоль луча [1].

В этих условиях *частота* колебаний распространяющейся волны, как легко понять, не зависит от пространственных координат (x, y, z). Эта частота остается постоянной вдоль луча, поскольку показатель преломления от времени не зависит.

Так обстоит дело, однако, лишь постольку, поскольку эта частота выражена в единицах «координатного времени».

Если источник находится на достаточно большом расстоянии от масс материи, порождающей поле, т. е. вне этого поля (и, следовательно, там, где потенциал $\chi = 0$), то частота излучаемой им волны света совпадает с «собственной частотой» колебаний источника. Эта частота, выраженная в единицах местного координатного времени, сохраняется и на всем пути светового луча. Однако если этот луч проникает в поле тяготения и распространяется в нем, то в любой точке на его пути совпадение частоты световой волны и собственной частоты колебаний идеального осциллятора (находящегося в этой точке и тождественного с тем, который излучает свет, находясь вне поля) не имеет места.

Если наблюдатель, располагающий стандартом частоты, тождественным с источником луча, зарегистрирует определенное приращение dn' числа колебаний проходящей волны, то он может положить это приращение dn' равным приращению dt координатного времени. *Одновременное* приращение числа колебаний его собственного стандарта частоты окажется согласно (IV.74) равным

$$dn_0 = \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}\, dn'. \qquad \text{(IV.127)}$$

Поскольку речь идет о силах тяготения, т. е. силах притяжения к тем источникам поля, в направлении которых луч света распространяется из бесконечности, значение потенциала отрицательно. Следовательно,

$$\frac{dn'}{dn_0} = \frac{\nu'}{\nu_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\chi}{c^2}}}. \qquad \text{(IV.128)}$$

[1] Поскольку согласно (IV.126) скорость распространения света изменяется вдоль луча, но не зависит от времени.

Наблюдатель обнаружил бы, что в определенном промежутке времени, измеряемом числом dn_0, укладывается большее число колебаний (dn') световой волны, испущенной с бесконечно большого расстояния системой, служащей источником света и тождественной с его эталонным осциллятором, т. е. что налицо смещение частоты света в сторону фиолетового края спектра — фиолетовое смещение.

Заметим, что такое же фиолетовое смещение может наблюдаться, если осуществить обсуждавшийся в литературе эксперимент с приемом световых (радио) сигналов с искусственного спутника Земли, движущегося по орбите, достаточно удаленной от Земли.

Наоборот, наблюдатель, находящийся на бесконечности вне поля тяготения (т. е. в области, где $\chi = 0$) и принимающий свет от источника, который находится в точке с потенциалом $\chi < 0$, обнаружил бы смещение частоты в сторону красного края спектра — красное гравитационное смещение.

Также красное смещение будет зарегистрировано и наблюдателем, измеряющим с помощью своего стандартного эталона на Земле частоту светового луча, возникающего от колебаний тождественного осциллятора, находящегося на Солнце, так как уровень потенциала χ на Земле выше, чем на Солнце (поскольку масса Солнца намного больше массы Земли).

Если потенциал, как это и принято, нормирован так, что значение его на бесконечном расстоянии от масс, создающих поле, принято равным нулю, то, обозначая соответственно χ_1 и χ_2 значения потенциала на поверхности Солнца и на поверхности Земли, мы должны, как легко видеть, заменить соотношение (IV.128) следующим:

$$\frac{\nu'}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2\chi_1}{c^2}}}{\sqrt{1 + \frac{2\chi_2}{c^2}}} < 1, \tag{IV.129}$$

где ν' — частота света, измеряемая путем сравнения с определенным эталоном — осциллятором на Земле (где потенциал χ_2), а ν_0 — частота этого осциллятора-эталона, тождественного с источником света на Солнце (где потенциал χ_1).

Налицо, следовательно, как уже и отмечено, красное гравитационное смещение, поскольку $|\chi_1| > |\chi_2|$ и $\chi_1 < 0$, так же как и $\chi_2 < 0$.

Следует оговорить, что при выводе полученных соотношений мы опять же исходили из предположения о том, что речь идет об идеальных часах, в данном случае об идеальных осцилляторах — источнике и приемнике световых волн.

Не надо забывать, что это предположение верно лишь в известном приближении. Хотя осцилляторы на поверхности Солнца, с одной стороны, и на поверхности Земли, с другой стороны, находятся под воздействием силы тяжести различной величины, их все же можно рассматривать как вполне идентичные системы, поскольку возмущающим влиянием на них силы тяжести можно пренебречь. Об этом подробнее будет сказано в следующем параграфе. Такое предположение могло бы оказаться неоправданным в случае очень сильного гравитационного поля.

Эффект, вытекающий из формулы (IV.129), очень мал: $\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} \sim 10^{-6}$ в случае излучения Солнца. Он значительно (в десятки раз) больше в случае тяжелого спутника Сириуса.

Предсказанное Эйнштейном гравитационное красное смещение находится в удовлетворительном согласии с наблюдениями. Это одно из тех трех классических подтверждений теории тяготения Эйнштейна, которые были известны вплоть до последнего времени.

Открытие так называемого эффекта Мессбауэра [1] привело в последние годы к новым возможностям экспериментальной проверки теории в пределах пространства даже одной лаборатории. «Часами» в этих, пока еще уникальных, экспериментах являются атомные ядра изотопа железа Fe^{57}, излучающие колебания очень высокой частоты — «мягкие» гамма-лучи. Излучение ядра атома Fe^{57} возникает в результате предшествующего этому излучению распада ядра материнского атома радиоактивного кобальта Co^{57}.

Если излучением такого «возбужденного», т. е. обладающего избытком энергии, ядра атома железа воздействовать на ядро другого — идентичного, но невозбужденного атома того же изотопа железа, то в силу резонанса вероятность поглощения (или рассеяния) излучения очень велика, поскольку спектральные линии собственных колебаний ядер обоих атомов (излучающего и поглощающего) совпадают.

Если, однако, собственная частота ν_0 спектральной линии поглощающего атома хотя бы незначительно, на величину $\Delta\nu_0$, сдвинута относительно частоты излучаемой линии, то вероятность поглощения резко падает.

Чувствительность этого метода наблюдения такова, что если, как это было в опытах Паунда и Реббка [17], поглотитель, содержащий атомы изотопа Fe^{57}, находился на расстоянии порядка всего лишь 20 *м* выше или ниже излучателя в поле тяготения Земли, то вызванное гравитационным эффектом ничтожное смещение частоты спектральной линии поглотителя относительно излучаемой частоты могло быть обнаружено и измерено по уменьшению ослабления луча в поглотителе.

В опытах Паунда и Реббка, выполненных в 1960 г. в старинной башне Гарвардского университета близ Бостона (США), от-

---

[1] См. сборник статей УФН [17].

носительное смещение $\Delta\nu_0/\nu_0$ собственной частоты поглотителя было порядка всего 10^{-15}.

Для исключения различных побочных влияний потребовались сложная схема эксперимента и тщательный анализ всех условий наблюдения. Авторы нашли, что наблюденный ими эффект с точностью до 10% совпал с предсказанным теорией согласно соотношению (IV.129).

В последние годы обсуждается (см. [18, 19]) другая, также совершенно новая возможность проверки теории путем сравнения частоты установленных на борту искусственного спутника Земли так называемых «атомных часов», или молекулярных генераторов радиоволн с частотой радиоколебаний в идентичных приборах, находящихся на Земле.

Такие молекулярные генераторы были впервые созданы в 1954—1955 гг. советскими физиками Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым и одновременно и независимо от них Таунсом в США. Это сверхстабильные стандарты частоты, или «часы», ошибка хода которых не превышает 1 сек. за сотни или даже тысячи лет.

Эксперимент, который позволил бы измерить вызванное гравитационным эффектом изменение частоты такого эталона в космическом полете так, как оно представляется наблюдателю, сравнивающему частоту принимаемых им сигналов с частотой идентичного прибора, находящегося на Земле, пока еще не осуществлен. Результат такого рода наблюдений представил бы особый интерес также в связи с тем, что «часы», установленные на борту спутника Земли, выведенного на заданную ему орбиту, находились бы в состоянии невесомости.

§ 6. Об «идеальных» часах и масштабах

В настоящем параграфе мы вернемся к обсуждению некоторых из тех общих положений, на которые нам приходилось многократно ссылаться, излагая содержание предыдущих глав. Прежде всего рассмотрим вопрос о степени реальности представления об идеальных, или стандартных, часах, а в связи с этим (еще раз) также и вопрос о том, необходимо ли для разрешения так называемого «парадокса часов» привлекать общую теорию относительности?

В предыдущих главах многократно подчеркивалось, что приведенные там выводы относятся к таким физическим объектам, которые могут служить *«идеальными»* часами. При этом имелось в виду, что время, определяемое по данным наблюдения процессов, протекающих в той или иной физической системе, служащей часами, есть «собственное время» этих «часов». Это означает, что течение во времени такого рода процессов так, как оно представляется наблюдателю, движущемуся вместе с «часами», или наблюдателю, неподвижному в какой-либо инерциальной системе координат, не зависит *явным образом* от ускорения движущихся часов и определяется выражением (IV.21).

В гл. I и II рассматривался замкнутый цикл движений B относительно A со скоростью, приближающейся к скорости света. Как неоднократно подчеркивалось, для того чтобы при этом прийти к точному выражению разности в показаниях часов A и B в момент их встречи, оперировать представлением об идеальных часах приходится одинаково как в том случае, если этот цикл рассматривается с точки зрения неизменной инерциальной системы (наблюдателя A), так и в том случае, если речь идет о хронометрии, с точки зрения B, подвергающегося ускорению на протяжении большего или меньшего участка своего пути.

Спрашивается, в какой мере «собственное время» является величиной, которой может быть приписан прямой физический смысл, и в какой мере идеальные часы могут быть реализованы в действительности?

Здесь в сущности поставлены два различных вопроса.

В ответ на эти вопросы надо сказать, что значение собственного времени имеет смысл как некоторое предельное понятие.

Поведение той или иной физической системы, которая может быть выбрана для измерения времени лишь с большей или меньшей точностью, отвечает требованиям, предъявляемым к идеальным часам, и это лишь в известных пределах величины ускорения. (Или в известных пределах силы тяготения, если речь идет о часах, находящихся в гравитационном поле.)

Если иметь в виду системы макроскопические, то существование определенного предела очевидно, поскольку ясно, что при воздействии хотя бы и не чрезмерно больших ускорений такая система может даже разрушиться. То же, конечно, относится и к объектам микромира. В этом случае, как это сейчас выяснится, допустимы, однако, уже значительно бóльшие ускорения.

Мы упоминали об атомных часах и о реализованной уже возможности использования с помощью радиоприборов, именуемых в последнее время «мазерами», периода колебаний атомов молекулярных систем как эталона для измерения промежутков времени. Мы упоминали также и об экспериментах, в которых с очень высокой степенью точности сравниваются частоты колебаний ядерных вибраторов.

В случае атомных или ядерных вибраторов речь идет о строго периодических процессах. Однако для измерения времени могут служить и такие системы, определенный параметр которых, характеризующий состояние данной системы, изменяется регулярным образом (но необязательно периодически) во времени.

Если такие «часы» проградуированы путем сравнения с эталоном времени, то они также могут служить для целей хронометрии.

Так, например, наблюдая распад определенного количества радиоактивного вещества и определяя его активность [1], в принципе можно измерять время, протекшее после начала распада.

В этой связи следует напомнить и о распаде радиоактивных элементарных частиц — мезонов, о котором упоминалось во введении.

Наблюдая мезоны космических лучей, мы можем судить о скорости их распада «на лету».

Как было отмечено (см. введение), из результатов наблюдений видно, что распад мезонов происходит в соответствии с «собственным временем» часов, которые можно себе представить движущимися вместе с этими частицами, проникающими через атмосферу Земли.

При свободном полете в воздухе торможение (или отрицательное ускорение) мезонов незначительно. Однако если такие мезоны встречают поглотитель из плотного тяжелого вещества, то они подвергаются в нем очень значительному отрицательному ускорению (торможению).

Так, например, можно подсчитать, каков порядок в среднем величины этого ускорения, если энергия мезонов, встретивших свинцовый поглотитель, такова, что, пройдя толщину в 10 *см* свинца, они останавливаются. Среднее отрицательное ускорение оказывается в этих условиях порядка $2\cdot 10^{20}$ *см/сек*^{2}, или порядка $2\cdot 10^{17}\, g_0$, где g_0 — ускорение силы тяжести у поверхности Земли. Данные эксперимента косвенно говорят о том, что такое ускорение не «индуцирует» — не вызывает какой-либо дополнительный эффект распада в сравнении с тем, который вытекает из величины интеграла

$$\int \sqrt{1-\beta^2(t)}\, dt = \int \sqrt{1-\beta^2(t)}\, \frac{dl}{\beta(t)\, c}, \tag{IV.130}$$

определяющего собственное время мезонов. (Величина (IV.130) сама по себе ничтожно мала для пути $l = 10$ *см*.)

Соображения по этому вопросу можно найти в заметке [5].

Если иметь в виду ядерные «часы» — атомные ядра, излучающие гамма-лучи, то недавно выполненный эксперимент [20] показал уже непосредственно, что ускорение порядка 10^8 *см/сек*^{2} не оказывает влияния на собственную частоту колебаний указанной системы.

При ускорении такого порядка величины авторы этой работы наблюдали поглощение ядрами изотопа Fe^{57} характеристической линии излучения возбужденного атомного ядра того же изотопа, испускаемого неподвижным источником. Таким источником являлись ядра атомов Fe^{57}, получавшиеся в виде продукта распада радиоактивного Co^{57}, тончайший слой которого был нанесен на

---

[1] Под активностью понимают число распадов радиоактивных атомов за единицу времени.

наружной поверхности неподвижного осевого цилиндра. По концентрической окружности с диаметром около 13 *см* был закреплен быстро вращающийся цилиндрический барабан из слоя легкого материала, на внутренней поверхности которого была нанесена тонкая пленка поглотителя — железа, обогащенного изотопом Fe^{57}.

Так же как и в цитированных выше опытах Паунда и Реббка, по изменению пропускания поглотителем спектральной линии (14 *кэв*) можно было судить о смещении «собственной» частоты колебаний атомных ядер этого поглотителя, движущихся с большой скоростью (до 500 *об/сек*) вместе со стенкой внешнего цилиндра.

Авторами работы было показано, что при изменении скорости вращения частота колебаний поглотителя изменяется пропорционально его «собственному» времени в соответствии с изменением линейной скорости движения по круговой траектории. Ускорение (радиальное — центростремительное) указанной выше величины не оказывает влияния на собственную частоту колебаний атомных ядер Fe^{57}.

С первого взгляда можно, пожалуй, усмотреть известное противоречие в том, что, с одной стороны, ускорение не оказывает влияния на течение собственного времени системы, а с другой стороны, изменение течения собственного времени приписывается изменению скорости поступательного движения системы в соответствии с формулой (IV.21)

$$d\tau = \sqrt{1 - \beta^2 (t)}\, dt.$$

Когда мы говорим, что в известных пределах величины ускорения системы ход ее собственного времени не зависит от ускорения, то оговариваем, что собственное время не зависит от ускорения явно.

Положим, что речь идет о переходе из начального состояния прямолинейного и равномерного движения с какой-то определенной скоростью в конечное состояние также равномерного и прямолинейного движения с другой, постоянной во времени, скоростью.

Специальная (или частная) теория относительности утверждает, что изменение течения собственного времени любой физической системы при таком переходе из одного состояния в другое находится в соответствии с соотношением (IV.21) и, следовательно, зависит лишь от начального и конечного абсолютных значений скорости и не зависит от того, быстро или медленно совершился такой переход от начальной скорости к конечной. При этом нет необходимости предполагать, что рассматриваемая нами система удовлетворяет требованиям, предъявляемым к «идеальным часам». Достаточно предположить лишь, что воздействие ускорения не вызывает каких-либо остаточных (необратимых) изменений в данной системе и что, во всяком случае, система не разрушается. Предположение, что при этом условии по истечении более или менее длительного времени соотношение $d\tau = \sqrt{1 - \beta_{\text{кон}}^2}\, dt$ (при $\beta_{\text{кон}} = \text{const}$) будет всегда справедливо, заключено уже в общих посылках специальной теории относительности.

Эйнштейн [16] оговаривает, что это утверждение (которое он рассматривает как самоочевидное) молчаливо предполагается, а именно предполагается, что свойства приборов, которые могут служить эталонами для измерения длин и промежутков времени, не зависят от их предшествующей истории (их предшествующих движений). Такое допущение, конечно, необходимо как предпосылка специальной (частной) теории относительности.

Рассматривая в § 1 «хронометрию» (как мы говорили), с точки зрения наблюдателя (B), подвергающегося ускорению, мы подразделяли промежуток времени, протекающий с начала движения B в направлении к «покоящемуся» A, на два интервала: переходный, как можно предположить, более короткий Δt и длительный T'_0; Δt — интервал времени, в пределах которого B движется ускоренно, и T'_0 — продолжительность времени равномерного движения.

Если не делать предположения об идеальности движущихся часов, то для того чтобы выполнялись соотношения (IV.8) и (IV.19), достаточно *удлинить* интервал «переходного» времени, полагая, что ускорение осуществляется лишь в пределах какой-то доли этого интервала и что по истечении времени, равного Δt, искажения — возмущения, которые могли быть вызваны ускорением, уже погашены — система вернулась в свое нормальное состояние. В этом случае соотношения (IV.8) и (IV.10) имели бы место и мы убедились бы (как это вытекает из рассуждений, приведенных выше) в том, что при подведении баланса времени, с точки зрения B, необходимо было бы ввести в расчет дополнительное, равное $\frac{2\beta_0^2 T'_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, упреждение (относительно B) времени, показываемого часами A.

В такой трактовке и при условии, что $\Delta t \ll T'_0$, этот результат можно считать не зависящим от предположения о том, что часы идеальны.

Мы только что говорили о допущениях (может быть, и тривиальных), которые необходимы, чтобы соотношение [1] $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}dt$ было справедливо как в начальном, так и в конечном состоянии, для которых значения $\beta = \text{const}$ различны ($\beta_{\text{кон}} \neq \beta_{\text{нач}}$).

В какой мере реальна, однако, величина собственного времени $d\tau = \sqrt{1-\beta^2(t)}dt$ при переменном, зависящем от времени, значе-

[1] Здесь t — время в какой-то инерциальной системе.

нии $\beta(t)$, т. е. в пределах того «переходного» интервала времени Δt, который мы только что «сбросили со счетов»?

Ясно, что прямой физический смысл эта величина имеет лишь в той мере, в какой можно пренебречь побочными искажающими влияниями, если угодно, «перегрузками», вызванными ускорением системы и, следовательно, в той мере, в какой данную систему можно рассматривать как идеальную хронометрическую систему.

Имея дело с реальной системой, можно при известных условиях предположить, что побочные, искажающие (связанные с ускорением) эффекты исключены внесением соответствующих поправок. Однако если эти побочные искажающие факторы, специфичные для данной системы и ее структуры, исключены, остается еще влияние таких, зависящих от ускорения, факторов, которые имеют общий характер, поскольку они учитываются общими уравнениями и законами динамики, управляющими любыми механическими или электромагнитными процессами в любой физической системе.

Если рассматривать модель простейших часов — маятник в виде массивного тела, удерживаемого в положении равновесия эластичной пружиной, то такие часы тем в большей степени будут удовлетворять требованиям «идеальности», чем жестче эта пружина. При ускорении таких часов в направлении оси, вдоль которой совершает колебания их маятник, положение равновесия его смещается. Можно сказать, что оно смещается вследствие действия силы «эффективного» поля тяготения.

Это смещение положения равновесия может повлиять на период маятника в той мере, в какой он не вполне отвечает условиям гармонического осциллятора, т. е. в той мере, в какой уравнение движения его нелинейно — сила натяжения пружины не точно пропорциональна отклонению маятника от положения равновесия.

Смещение положения равновесия есть в данном случае побочное, искажающее влияние ускорения. Оно будет сказываться тем меньше, чем больше сила упругой связи, привязывающей маятник к его положению равновесия.

Если смещением положения равновесия (а кроме того, и другими такого рода побочными влияниями) можно пренебречь или если их исключить, то изменение периода колебаний такой системы относительно «неподвижной» инерциальной системы будет определяться соотношениями общего характера, применимыми к любым динамическим системам и не связанными со специфическими структурными особенностями данной рассматриваемой модели.

Выраженный в единицах координатного времени период (T) колебаний «часов», о которых только что говорилось, определяется, например, следующими формулами:

$$T(\chi) = 2\pi \sqrt{\frac{m_0(\chi)}{k(\chi)}}\ [1]. \qquad \text{(IV.131)}$$

[1] Здесь предполагается, что скорость маятника, совершающего колебания, мала в сравнении со скоростью света.

Вне гравитационного поля

$$T^0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0^0}{k^0}} \qquad \text{(IV.132)}$$

(обозначения см. в § 4 этой главы), k — константа упругой связи: сила $F = k\xi$, где ξ — удаление маятника от положения равновесия.

Согласно (IV.113) и (IV.114) масса

$$m_0 = \frac{m_0^0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}}; \qquad \text{(IV.133)}$$

вместе с тем, сила упругой связи $F = F_0 \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}$. Как можно убедиться, также и константа

$$k = k^0 \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}. \qquad \text{(IV.134)}$$

Подставляя (IV.133) и (IV.134) в (IV.131) и учитывая (IV.132), получаем

$$T(\chi) = \frac{T^0}{\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}}, \qquad \text{(IV.135)}$$

что в применении к идеальному атомному вибратору и дает формулу гравитационного смещения спектральной линии, наблюдаемого вне поля тяготения, где координатное время совпадает с собственным временем. Период $T(\chi)$ в (IV. 135) выражен в единицах координатного времени.

Соотношения (IV.133) и (IV.134) имеют вполне общий характер и не зависят от специфических особенностей данной модели часов.

Вопрос о выполнении критерия идеальности «часов» в применении к определенным конкретным моделям был рассмотрен Меллером [21].

Резюмируем и уточним вышеизложенные соображения, а также и ответ на вопрос, вновь поставленный в начале этого параграфа: необходимо ли для разрешения «парадокса» часов привлекать общую теорию относительности?

Положим, что физическая система, которая наблюдается в состоянии ускоренного движения, удовлетворяет только лишь тому условию, что воздействие на нее ускорения не приводит к каким-либо необратимым, остаточным изменениям в ее состоянии. Предположим также, что тот или иной физический процесс, протекающий в этой системе тел, характеризуется определенным параметром, величина которого может служить мерой времени. (Таким параметром может быть угол поворота стрелки часов, если иметь в виду часы в обыденном смысле слова, или, например, величина, обратная числу распадов в собрании атомов или элементарных частиц радиоактивного вещества, зарегистрированному счетчиками наблюдателя, относительно которого это вещество движется с той или иной переменной скоростью или покоится.)

Для каждого данного момента времени, определенного такого рода часами, можно представить себе инерциальную систему отсчета B_0, подчиненную всем тем условиям, о которых шла речь в начале данного параграфа, однако так, что координатное время в этой системе отсчета нормировано (фиксировано) по времени «неидеальных часов», с которыми неподвижно связано начало ускоряемой системы B.

Если, после того как ускорение прекратилось, выждать достаточное время, чтобы влияние побочных (обратимых) воздействий ускорения, которым были подвержены часы, уже исчезло, то уравнение, написанное в форме (IV.6) или (IV.7), будет иметь место. Однако если часы «неидеальны», то выражение (IV.7)[1] для T_a в уравнении (IV.6) не будет справедливо.

Для того чтобы T_a выразить в функции времени, показываемого «неидеальными» часами, пришлось бы не только учесть закон изменения ускорения во времени (что необходимо и в том случае, если часы идеальны), но также учесть и индивидуальные особенности, специфичные для данной, отсчитывающей время, системы.

Для разных физических систем, служащих часами, расчет в этом случае дал бы различные результаты, и подразделение рассматриваемого промежутка времени на два интервала Δt и T_0' (или ΔT и T_0) имело бы смысл лишь при условии $\Delta t \ll T_0'$.

В обзорной литературе, в монографиях и учебниках обычно ссылаются на то, что для разрешения «парадокса часов» необходимо исходить из посылок общей теории относительности или, что, иначе говоря, при последовательном решении задачи необходимо ввести в рассмотрение эффективное гравитационное поле и учесть оказываемое им влияние на относительный ход часов.

Как видно из всего изложенного в предыдущей и в особенности в данной главах, такое утверждение неосновательно. По-видимому, оно прочно «вошло в обиход» в результате высказываний самого Эйнштейна.

В 1918 г. Эйнштейн опубликовал комментарий [4] к основным, высказанным им уже к тому времени, идеям специальной и общей теории относительности в виде диалога между «релятивистом» и «антирелятивистом». Предмет спора между ними —«пара-

---

[1] Формально уравнение (IV. 7) именно в такой его записи справедливо при любой длительности интервала $\Delta t = t_1$. Однако при $x_A\ (t_1) = 0$ (и, следовательно, $T_0' = T_0 = 0$) равенство (IV. 7) сводится к тавтологии $T_A = T_a$ (что прямо следует из определения T_a, так как в этом случае a совпадает с A).

докс часов». «Релятивист» опровергает возражения «антирелятивиста», заканчивая свою аргументацию ссылкой на то, что расхождения между ним и его оппонентом снимаются, а вместе с тем и упреждение показаний «движущихся» часов A относительно «неподвижных» B объясняется, если учесть эффект гравитационного (эффективного) поля, существующего в представлении B (и вызывающего соответствующий сдвиг (IV.79) в показании часов A), но никак не проявляющего себя при рассмотрении явлений в системе отсчета A.

Ранее мы привели также и этот вывод, основанный именно на предположении, что покоится B, но вместе с тем налицо эффективное поле χ, которое, с точки зрения B, влияет на ход часов A.

Ход рассуждений, так как он был изложен нами или как (в еще более упрощенном виде) в рамках приближенных выражений он приводится в учебниках и монографиях (см., например, [22]), сводится к следующему.

1. Путем простого преобразования координат вводится представление об эффективном поле тяготения, описываемом потенциалом χ.

2. Эта же операция преобразования координат приводит к зависимости (IV.74) собственного времени от времени координатного и тем самым к выводу о влиянии эффективного гравитационного поля на относительный ход часов.

Эффективное гравитационное поле вводится, однако же, при этом чисто формально: речь идет о замене одной формы описания хронометрической последовательности событий другой, только лишь терминологически отличной от нее формой описания той же последовательности событий.

3. Далее, основываясь уже на определенной физической гипотезе, а именно на принципе эквивалентности, соотношение (IV.74), полученное как результат простого преобразования координат применительно к эффективному полю тяготения, переносится на явления, протекающие в перманентных полях тяготения. Отсюда получается вывод о гравитационном смещении частоты спектральных линий, который и был подвергнут экспериментальной проверке, в особенности в последние годы.

Излагаемое в учебниках и монографиях (в частности, в [22]) «объяснение» «парадокса часов» сводится к схеме, обратной в смысле логического построения последовательности положений, приведенных в п. 1—3. Налицо, следовательно, порочный круг: сначала, оперируя соответствующими преобразованиями координат, основанными только на частной теории относительности, получают вывод о влиянии эффективного поля тяготения на ход идеальных часов. Этого уже достаточно для разрешения «парадокса часов». Основываясь далее на принципе эквивалентности, полученный результат — соотношение (IV.74) — применяют к истинному или перманентному полю. Затем, рассматривая соотношение (IV.74) как вытекающее из общей теории относительности *и заранее данное* для перманентных полей, пользуются им в применении к эффективному полю и возвращаются таким образом к исходному соотношению (IV.74) и вытекающему из него выражению (IV.75) для сдвига в показании движущихся часов, рассматривая этот сдвиг как *следствие* теории тяготения [1].

Если в духе теории Эйнштейна отождествлять природу истинных (перманентных) и эффективных полей тяготения, то и интерпретацию убыстрения, в представлении B хода часов A как эффекта гравитации, можно рассматривать как физическое, в какой-то мере наглядное, объяснение тех соотношений, которые необходимо учесть для разрешения «парадокса часов». Однако, как вытекает из изложенного выше, привлечение общей теории относительности *не необходимо* для устранения этого парадокса.

Вернемся еще раз к вопросу о различии в содержании понятий «система координат» или «система отсчета» в том случае, если речь идет о системах отсчета инерциальных, с одной стороны, и системах координат, в которых описываются соотношения общей теории относительности, с другой стороны.

Система отсчета в специальной теории относительности мыслится как совокупность реальных физических тел — масштабов и часов. Координаты (пространственные) и время в этом случае — величины, получаемые как результат прямых измерений — отсчетов делений масштабов или показаний часов. Эти координаты имеют прямой физический смысл.

С другой стороны, как уже подчеркивалось, координатное время неинерциальных систем отсчета не может быть отсчитано «по циферблату» каких-либо реальных часов и вводится как вспомогательная математическая величина. То же относится к определению пространственных координат.

Выше говорилось о координатной пространственной решетке, составленной из совокупности «идеальных» масштабов, которые безынерционно «следят» за изменением их скорости относительно той или иной инерциальной системы отсчета. Однако таким приемом изложения мы воспользовались лишь для наглядности описания «систем отсчета», которые нами рассматривались.

Если предположить, что «координатной решеткой» является реальная кристаллическая решетка, то при очень резких изменениях ее скорости в ней могут возникнуть напряжения, которые если и не вызовут ее разрушения, то создадут в ней соответствующие деформации.

По истечении лишь определенного времени, уже после того как эти деформации исчезнут и все элементы решетки станут дви-

---

[1] Несостоятельность, с точки зрения логической последовательности, такого рода выводов отмечена в работе [23], которая посвящена исследованию в общем виде вопроса о системах координат, обозначенных в нашем изложении символом B_0.

гаться с одинаковой, постоянной во времени, скоростью, восстановится и нормальное ее состояние.

Если решетка подверглась ускорению относительно исходной инерциальной системы, то наблюдатель, остававшийся неподвижным в исходной системе, лишь после этого найдет, что постоянная равномерно движущейся относительно него решетки изменилась в соответствии с лоренцевым сокращением, т. е. пропорционально $\sqrt{1-\beta^2}$. Так же лишь по истечении такого определенного, более или менее длительного промежутка времени и для наблюдателя, покоящегося относительно данной решетки и ускорявшегося вместе с ней, эта решетка сможет служить масштабом, совершенно идентичным с тем, каким она была до того, как стала ускоряться. То же, разумеется, будет иметь место и при торможении, и при остановке реальной кристаллической решетки.

То, что постоянная (расстояние между узлами) равномерно движущейся относительно наблюдателя решетки изменяется, с его точки зрения, пропорционально лоренцеву фактору $\sqrt{1-\beta^2}$, может быть выведено, исходя из рассмотрения условий равновесия системы электрически заряженных, движущихся поступательно, частиц, из которых эта решетка построена. При этом если рассмотреть механизм явлений во всех деталях, то указанный результат можно в принципе получить, основываясь только на законах электродинамики движущихся тел и не предполагая заранее известным, что этот результат должен удовлетворять требованиям, вытекающим из теории относительности. Если, наоборот, исходить из теории относительности, то самый результат получается непосредственно.

В системе электрически заряженных частиц, из которых построена решетка кристаллического тела, механизм явлений, о которых шла речь, разумеется, тоже очень сложен. Однако приведенные выше соображения можно пояснить на значительно более простом примере, рассмотрев с этой целью картину электромагнитного поля равномерно движущегося электрического заряда, сосредоточенного в настолько малом объеме, что этот заряд можно рассматривать как точечный при достаточном удалении от его центра. Для конкретности можно говорить об электромагнитном поле равномерно движущегося точечного электрона [1].

Потенциал статического поля покоящегося заряда имеет одинаковое значение во всех точках какой-либо сферической поверхности, в центре которой находится создающий поле заряд. Если рассмотреть задачу о поле движущегося точечного заряда (например, электрона), то, исходя только из законов электродинамики и не

[1] Поскольку сделана оговорка о том, что поле рассматривается на достаточно большом расстоянии от центра заряда, известные трудности, возникающие при построении теории «точечного» электрона, не затрагивают поставленного здесь вопроса.

ссылаясь на теорию относительности, можно, выполнив соответствующие расчеты, убедиться в том, что поверхности равного потенциала электрического поля (с точки зрения неподвижного наблюдателя) стали эллипсоидальными — сплющенными в направлении движения пропорционально фактору $\sqrt{1-\beta^2}$.

Если иметь в виду более наглядную картину — картину силовых линий электрического поля, то можно сказать, что силовые линии покоящегося заряда, равномерно распределенные по расходящимся от его центра направлениям, при движении заряда стягиваются к плоскости, перпендикулярной к направлению движения,— концентрируются в направлениях, близких к этой плоскости.

Если при решении задачи на основе законов электродинамики для получения этого результата необходимо выполнить ряд вычислений, то из теории относительности он следует непосредственно: картина, о которой шла речь, получается как прямое следствие того положения, что все масштабы в направлении движения подвержены релятивистскому сокращению пропорционально фактору $\sqrt{1-\beta^2}$, тогда как поперечные размеры в направлениях, перпендикулярных к направлению движения, остаются неизменными.

Если в качестве масштаба вместо кристаллической решетки будем представлять себе некоторую среднюю длину, измеряющую продольную (в направлении движения) протяженность электрического поля отдельного электрона, то такой масштаб сокращается в соответствии с фактором Лоренца, поскольку поле движущегося электрона сплющивается в направлении движения.

Спрашивается, как изменяется этот «масштаб» при внезапной — в пределе мгновенной — остановке электрона?

Отвечая на такой вопрос, можно констатировать, что в момент «мгновенной» (в пределе) остановки поле останется сплющенным и лишь по истечении некоторого, хотя и малого, но конечного промежутка времени оно «выправится», «расширится» и примет нормальную «форму» и размеры поля покоящегося электрона.

В данном случае, поскольку рассматривается достаточно элементарное явление, самый переход поля из «деформированного» (сплющенного) состояния в нормальное может быть описан, и если задано (хотя и очень малое, но все же конечное) время торможения, то процесс этого перехода может быть и рассчитан.

Электрическое поле уже остановившегося электрона отличается от его статического поля в силу того, что оно представляет собой наложение двух полей — статического и поля излучения — тормозного излучения. Таким тормозным излучением является, в частности, рентгеновское излучение, возникающее при бомбардировке антикатода рентгеновской трубки потоком электронов, испускаемых ее катодом.

Для того чтобы восстановилось статическое состояние поля электрического заряда, остановленного в результате внезапного торможения приложенной извне силой, потребуется некоторое конечное время (время излучения), по истечении которого полем излучения можно уже пренебречь, поскольку возникшая при торможении расходящаяся сферическая волна электромагнитного излучения ушла на далекое расстояние и амплитуда ее стала ничтожно малой.

Если мы говорим о мгновенной остановке, то предполагаем, что время, необходимое для того, чтобы действующая на электрон сила затормозила его до полной остановки, мало в сравнении с «временем излучения».

Если вернуться к интересующему нас вопросу о поведении масштабов длины, то в условиях только что рассмотренной простой модели выбранный нами масштаб оказывается отнюдь не безынерционным в отношении лоренцева сокращения. Наоборот, его скорее приходится характеризовать очень значительной, в пределе бесконечно большой «инерцией» в указанном только что смысле.

Как было выяснено выше, мы можем располагать макроскопическими системами (в виде, например, так называемых молекулярных квантовых генераторов), которые с хорошим приближением удовлетворяют требованиям, предъявляемым к идеальным часам. Однако едва ли существуют масштабы для измерения длины, которые с такой же степенью приближения можно было бы рассматривать как идеальные.

Поэтому если выше мы и конкретизировали представление о системах отсчета, рассматривавшихся в § 1 гл. IV, отождествив пространственные координаты с решеткой, составленной из масштабных элементов единичной длины, то при этом (повторяем!) имели в виду лишь наглядность изложения.

Дополнение. О некоторых особенностях системы координат x, t (гл. IV)

В гл. IV мы рассматривали различные соотношения, основываясь на преобразованиях координат от системы X, T (или X', T', имея в виду мгновенную инерциальную систему) к координатам системы x, t, начало которой движется с произвольным ускорением.

Следует обратить внимание на ряд особенностей описания движения в системе x, t.

1. Система координат x, t определена, если задана в функции времени величина «собственного» ускорения $g(t)$ ее начала (имеется в виду ускорение точки $x = 0$ относительно мгновенной инерциальной системы X', T').

Собственное ускорение $g(x, t)$ какой-либо другой точки на оси x этой системы, однако, не равно $g(t)$ и оказывается убывающей функцией x: $g(x, t) = \frac{g(t)}{1 + \frac{xg(t)}{c^2}}$.

Действительно, начав счет времени с какого-то произвольно выбранного момента времени, согласно (IV.35) имеем

$$\frac{dX'}{dT'} = \operatorname{th}\theta(t),$$

где X', T' — координаты мгновенной инерциальной системы отсчета для начального момента времени $t = 0$.

При заданном t, $\theta(t)$ не зависит от x, $\theta(t = 0) = 0$ и $\operatorname{th}\theta(t = 0) = 0$: скорость всех точек системы x, t относительно мгновенной инерциальной системы отсчета равна нулю; ускорение этих точек, однако, не равно нулю. По определению

$$g(x, t) = \left(\frac{d^2X'}{dT'^2}\right)_{\substack{T'=0\\x=\mathrm{const}}} = c\left[\frac{d\operatorname{th}\theta(t)}{dt}\frac{dt}{dT'}\right]_{\substack{T'=t=0\\x=\mathrm{const}}}.$$

Следовательно,

$$g(x, t) = \left[c\frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta(t)}\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{dt}{dT'}\right]_{\substack{T'=t=0\\x=\mathrm{const}}} \qquad \text{(IV.136)}$$

или, принимая во внимание (IV.41),

$$g(x, t) = \left[c\frac{1}{\operatorname{ch}^2\theta(t)}\frac{g(t)}{c}\frac{dt}{dT'}\right]_{t=0} = \left[g(t)\frac{dt}{dT'}\right]_{T'=0} \qquad \text{(IV.137)}$$

и согласно (IV.105)[1]

$$g(x, t) = \frac{g(t)}{1 + \frac{xg(t)}{c^2}}. \qquad \text{(IV.138)}$$

Вместо $g(0)$ мы написали $g(t)$, поскольку момент времени $t = 0$ может быть выбран произвольно; формулы (IV.137) и (IV.138) применимы и в случае движения с «собственным ускорением», являющимся какой-то произвольной функцией времени.

Если условия задачи заданы так, что начало системы координат x, t движется по закону гиперболического движения, т. е. если $g = \mathrm{const}$ (от времени не зависит), то, как показывает (IV.138), и движение любой точки системы x, t с заданным фиксированным значением x есть также гиперболическое движение: $g(x, t)$ в этом случае зависит от x, но от t не зависит. Как следует из (IV.138),

[1] Принимая во внимание (IV.30) (IV.41) легко убедиться в том, что соотношение (IV.105) имеет место также и при g, зависящем от t $(g = g(t))$.

скорость точек с заданным x относительно определенной инерциальной системы X, T также убывает с возрастанием x. В этом случае имеется в виду уже какая-либо фиксированная инерциальная система X, T, не являющаяся «мгновенной инерциальной системой» для данного момента времени t.

Таким образом, наблюдателю, неподвижному в некоторой постоянной инерциальной системе X, T, представляется, что точки с заданными значениями x в движущейся относительно него системе x, t «стягиваются» с течением времени к началу координат. Это значит, что, с точки зрения X, T, система отсчета x, t не представляется жесткой.

С другой стороны, если отметить ряд точек, движущихся по тождественным пространственно-временным «траекториям» относительно X, T так, что они являются узлами одномерной решетки, жесткой относительно X, T (т. е. такой ряд точек, расстояние между которыми остается неизменным в системе X, T), то в картине x, t эта «решетка» представляется расширяющейся. Соотношения, приводящие к такому выводу, были подробно рассмотрены в гл. III, где речь шла о «траекториях» двух «космонавтов», движение которых было определено, как и движение какой-то пары узлов той координатной решетки, о которой только что упоминалось.

2. В каждый данный выбранный момент времени t все «узлы» решетки системы x, t совпадают с «узлами» решетки мгновенной инерциальной системы X', T'. Также и показания t (координатных) часов, расположенных в совпадающих в данный момент узлах этих решеток, при сделанных выше предположениях совпадают. Скорость точек, неподвижных в системе x, t (т. е. при $x=\text{const}$) относительно «мгновенной системы», равна нулю. Однако скорость dx/dt точки, движущейся в системе x, t, не равна скорости dX'/dT' той же точки относительно мгновенной инерциальной системы X', T' для данного определенного момента t_0:

$$\left(\frac{dX'}{dT'}\right)_{t=t_0} \neq \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0},$$

где t_0 — какое-либо заданное значение t. Также не совпадают и значения ускорений d^2x/dt^2 и d^2X'/dT'^2.

Скорость dX/dT относительно какой-то инерциальной системы определяется из выражений (IV.41), (IV.45) и (IV.46)

$$\frac{dX}{dT} = \frac{c\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]\operatorname{sh}\theta(t)+\frac{dx}{dt}\operatorname{ch}\theta(t)}{\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]\operatorname{ch}\theta(t)+\frac{dx}{c\,dt}\operatorname{sh}\theta(t)}. \qquad \text{(IV.139)}$$

Положив $t=0$ и оставив в конечном результате аргумент функции $g(t)$ равным t или t_0[1], получим скорость относительно «мгновенной инерциальной системы»

$$\left(\frac{dX'}{dT'}\right)_{t=t_0}=\left[\frac{dx/dt}{1+\frac{xg(t)}{c^2}}\right]_{t=t_0}. \qquad (IV.140)$$

Дифференцируя (IV.139) и полагая затем снова $\theta(t)=0$, получаем, приняв во внимание (IV.74), выражение для величины ускорения

$$\frac{d^2X'}{dT'^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dX'}{dT'}\right)\frac{dt}{dT'}=$$

$$=\frac{\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]\left\{g(t)\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]+\frac{d^2x}{dt^2}\right\}-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{g(t)}{c^2}-\frac{x}{c^2}\frac{dx}{dt}\frac{dg}{dt}}{\left[1+\frac{xg(t)}{c^2}\right]^3}. \qquad (IV.141)$$

Если иметь в виду движение (в системе x, t) тела, неподвижного в мгновенной инерциальной системе X', T', выбранной для данного фиксированного момента времени t_0 (т. е. если $dX'/dT'=0$ и $d^2X'/dT'^2=0$), то согласно (IV.140) $(dx/dt)_{t=t_0}=0$. В этом случае [2], как следует из (IV.141),

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g(t)\left[\frac{xg(t)}{c^2}+1\right]=-\frac{\partial\chi}{\partial x}, \qquad (IV.142)$$

поскольку $d^2X'/dT'^2=0$.

Соотношение (IV.142) дает выражение ускорения (в начальный момент времени t) тела, свободно падающего в поле тяготения (χ).

---

[1] То, что мы не допустили какой-либо ошибки, положив сначала $t=0$, а затем (в конечном результате) заменив значение $g(0)$ значением $g(t_0)$ или $g(t)$, можно проверить путем простого вычисления, так же как это было сделано нами при выводе формулы (IV. 38).

Воспользуемся формулой (IV. 139) и применим формулу (I.41) сложения скоростей.

Скорость мгновенной инерциальной системы X', T' относительно системы X, T при $t=t_0$ равна $\operatorname{th}\theta(t_0)$. Тогда согласно (I.41) находим

$$\left(\frac{dX'}{dT'}\right)_{t=t_0}=\frac{\frac{1}{c}\left(\frac{dX_A}{dT}\right)_{t=t_0}-\operatorname{th}\theta(t_0)}{1-\frac{1}{c}\left(\frac{dX_A}{dT}\right)_{t=t_0}\operatorname{th}\theta(t_0)}.$$

Проделав простые выкладки и приняв во внимание выражение (IV.139) для dX_A/dT, а также, что $\operatorname{ch}^2\theta(t)-\operatorname{sh}^2\theta(t)=1$, получаем

$$\left(\frac{dX'_A}{dT'}\right)_{t=t_0}=\left[\frac{dx_A/d(t)}{1+\frac{x_Ag(t)}{c^2}}\right]_{t=t_0}.$$

[2] Здесь, как и раньше, в конечном результате (IV.142) мы] написали t вместо t_0.

3. Соотношение (IV.140) приводит к следующей своеобразной особенности, которую следует иметь в виду, пользуясь, как мы это делали, системой x, t при рассмотрении задачи о часах.

Условия задачи были заданы так, что действие силы, ускоряющей тело B (и связанное с ним начало координат системы x, t), прекращалось в момент времени $t = t_1$ на границе определенного интервала времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Как следует из определения координат x, t, в этом случае система x, t при $t \geqslant t_1$ совпадает с мгновенной инерциальной системой $X'T'$ для момента времени $t = t_1$.

Если ускорение при $t \leqslant t_1$ имеет конечную величину, а при $t \geqslant t_1$ равно нулю, т. е. если функция $g(t)$ претерпевает разрыв при $t = t_1$, то, хотя, как это также следует из определения координатной системы x, t, значения координаты x и показаний координатных часов t при этом и не претерпевают разрыва, значение скорости dx_A/dt тела A, движущегося в системе x, t, изменяется скачкообразно. Это прямо следует из соотношения (IV.140), так как скорость в мгновенной инерциальной системе для момента времени $t = t_1$, т. е. скорость в системе X', T', имеет одно и то же значение при $t \to t_1 (t < t_1)$ и $t \to t_1$ $(t > t_1)$. Скорость же $(dx_A/dt)_{t=t_1}$, как это видно из (IV.140), изменяется при $t = t_1$ скачкообразно в отношении

$$\left[1 + \frac{x_A g(t)}{c^2}\right] : 1 \qquad \text{(IV.143)}$$

Выражение (IV.143) находится в согласии с полученным в гл. IV соотношением между выражением количества движения в системе X', T', с одной стороны, и x, t, с другой стороны.

Мы видели, что согласно (IV.115) и (IV.116) количество движения $\dfrac{m_0^0 \dfrac{dX'}{dT'}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{dX'}{c\,dT'}\right)^2}}$ выражается в координатах x, t так:

$$I = \frac{m_0^0 \left(\dfrac{dX'}{dT'}\right)}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{dX'}{c\,dT'}\right)^2}} = \frac{m_0^0 \dfrac{dx_A/dt}{1 + \dfrac{x_A g}{c^2}}}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{dx_A/dt}{c\left(1 + \dfrac{x_A g}{c^2}\right)}\right]^2}}. \qquad \text{(IV.144)}$$

Скорость dX'/dT', а следовательно, и величина I не претерпевает разрыва на границе интервала времени $t = t_1$. Отсюда вытекает, что в соответствии с (IV.144) величина $\dfrac{dx_A/dt}{1 + \dfrac{x_A g}{c^2}}$ сохраняет свое значение при переходе через границу $t = t_1$, что и находится в согласии с (IV.143).

Таким образом, основываясь на выражении (IV.144), приходим к тому же выводу о разрыве в значении скорости на границе $t = t_1$. Здесь лишь констатируется тот факт, что в полученных выражениях (IV.115) — (IV.116) для I, с одной стороны, и в том выводе о разрыве в значении скорости на границе $t = t_1$, к которому мы пришли выше, с другой стороны, не содержится внутреннего противоречия [1].

Обратим внимание еще и на другие особенности неинерциальной системы координат x, t.

4. Если описывать движение в *инерциальных* системах, то в любой точке пространства, независимо от выбора начала отсчета пространственных координат, скорость какого-либо тела A относительно B равна по абсолютной величине скорости B относительно A.

Речь идет о сравнении, с одной стороны, скорости B относительно A в такой системе координат, в которой покоится A, и, с другой стороны, о скорости A, определенной в системе координат, в которой покоится B.

Если A покоится в инерциальной системе, а B — в системе x, t, то равенство этих относительных скоростей, вообще говоря, не имеет места.

Согласно уравнению (IV.35) (а также (IV.139) при $dx/dt = 0$) скорость B относительно A, равная $(dX_B/dT)_t = c \operatorname{th} \theta(t)$, от x не зависит. Вместе с тем скорость (в системе x, t) A относительно B получим, приравняв нулю числитель в выражении правой части уравнения (IV.139), что дает

$$\frac{dx_A}{dt} = -c \operatorname{th} \theta(t) \left[\frac{x_A g(t)}{c^2} + 1\right]. \qquad \text{(IV.145)}$$

(Мы предположили, что $dX_A/dT = 0$).) Следовательно,

$$\left(\frac{dX_B}{dT}\right)_{X_A=\mathrm{const}} \neq \left(\frac{dx_A}{dt}\right)_{x_B=\mathrm{const}}.$$

[1] В журнале «Успехи физических наук» (1959, 69, 111) в русском переводе была напечатана статья К. Лефферт, Т. Донайе, в которой авторы, отмечая указанную выше особенность, ставят вопрос о динамической картине движения тела A при внезапном (в пределе — мгновенном) изменении значения $g(t)$. В связи с этой статьей появилась заметка [24], в которой автор отмечает, что разрыв в значении скорости есть следствие закона сохранения количества движения.

В соображениях, изложенных нами выше (в связи с выражением (IV. 144)), не содержится какой-либо ссылки на закон сохранения количества движения (который, впрочем, был выведен в § 4 гл. IV в применении к системе координат x, t в случае простого примера).

Соображения, изложенные в п. 3 Дополнения, носят чисто кинематический характер. Также только лишь кинематические соображения достаточны для всех выводов, которые приводятся в связи с вопросом о «парадоксе часов». Вопрос о динамике при этом не возникает, и постановка его требует изменения и уточнения самих условий задачи.

Если каждый из партнеров B и A определит скорость другого относительно себя — один (A) в координатах X, T, другой же (B) — в координатах x, t, то они получат, вообще говоря, разные значения. Только в начале координат x, t, т. е. при $x_A = x_B = 0$, оба значения скорости равны по величине и противоположны по знаку, что всегда, независимо от положения тел в системе координат, имеет место при рассмотрении в инерциальных системах.

5. Проиллюстрируем соображения, изложенные в п. 3, следующим примером. Тело A находилось в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат x, t. Затем оно «падает» в поле χ в направлении отрицательных x, поскольку в интервале времени $0 \leqslant t \leqslant t_1$ начало координат x, t, связанное с телом B, движется с постоянным «собственным ускорением» g в направлении положительных x.

В момент времени $t = t_1$ ускорение g начала координат исчезает вследствие того, что действие силы, ускорявшей тело B, прекращается.

Если согласно только что заданным условиям положить в (IV.60) $X_0 + \Delta X_0 = x_0 + \Delta x_0 = 0$, то уравнение (IV.60) движения A в координатах x, t будет иметь вид

$$\frac{x_A g}{c^2} + 1 = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c}} \qquad \text{(IV.146)}$$

($x_A = 0$ при $t = 0$). При $t = t_1$ (IV.146) согласно (IV 24) дает

$$\left(\frac{x_A g}{c^2} + 1\right) = \sqrt{1 - \beta_0^2}, \qquad \text{(IV.147)}$$

где β_0 есть скорость A относительно B в момент времени $t = t_1$.

При $t = t_1$, когда прекращается действие силы, ускоряющей B, скорость A относительно B изменяется, следовательно, скачкообразно от значения (которое вытекает в данных условиях из (IV.145) и (IV.147))

$$-c \operatorname{th}\frac{gt_1}{c}\sqrt{1 - \beta_0^2} = -c\beta_0\sqrt{1 - \beta_0^2}$$

до значения

$$-c \operatorname{th}\frac{gt_1}{c} = -c\beta_0.$$

6. Отметим еще одну своеобразную особенность.

Как видно из формулы (IV.74), отношение $d\tau_x/dt$ обращается в нуль при

$$\left(\frac{u_0}{c}\right)^2 = \left(1 + \frac{xg}{c^2}\right)^2 \qquad \text{(IV.148)}$$

или при

$$\left(\frac{u_0}{c}\right)^2 = 1 + \frac{2\chi}{c^2}, \qquad \text{(IV.149)}$$

затем при бо́льших значениях u (при $u > u_0$) это отношение становится мнимым.

Рассмотрим эти «аномалии» на примере тела, свободно падающего в эффективном поле тяготения, направленном в сторону отрицательных x системы x, t, начало которой равномерно[1] ускоряется в направлении положительной оси x. В этом случае уравнение движения в координатах x, t имеет вид

$$x_A = \frac{c^2}{g}\left[\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right)\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{gt}{c}} - 1\right]. \qquad \text{(IV.150)}$$

Формула (IV.150)—это уравнение (IV.60), с тем лишь различием, что в обозначении начальной координаты $x_0 + \Delta x_0$ опущено Δx_0. Было отмечено, что для вывода формулы (IV.60) необходимо было предположить, что

$$1 + \frac{gx}{c^2} > 0.$$

Из (IV.150) видно, что при $t = \infty$ абсолютное значение x_A не возрастает до бесконечности и x_A стремится к конечному пределу, равному $-\frac{c^2}{g}$. Таким образом, налицо как бы своеобразный барьер $\left(\text{при } x_0 = -\frac{c^2}{g}\right)$, при приближении к которому скорость u стремится к нулю. Скорость тела A, возрастающая под действием поля χ, достигнув некоторого максимального значения, затем убывает, и тело A лишь асимптотически приближается к пределу $x_0 = -\frac{c^2}{g}$.

То же будет справедливо и при движении тела A в поле χ и под действием некоторой внешней силы F (т. е. если полная сила равна $F + f_{gr}$). Это видно из того, что согласно (IV.116) масса тела при скорости u_0, отвечающей условию

$$\left(\frac{u_0}{c}\right)^2 = \left(1 - \frac{|x_0|\,g}{c^2}\right)^2$$

становится бесконечной.

В случае поля χ

$$1 + \frac{2\chi}{c^2} = \left(1 + \frac{xg}{c^2}\right)^2$$

[1] Слова «равномерно ускоряется» означают, что «собственное ускорение» постоянно.

условие $1+\frac{2\chi}{c^2}>0$ на отрицательной оси x оказывается всегда выполненным и $\sqrt{1+\frac{2\chi}{c^2}}$ имеет вещественное значение.

Так обстоит дело в случае эффективного поля χ, связанного с равномерным ускорением системы координат x, t.

Но мы предположили, что формула $d\tau=\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}\,dt$ применима и к истинному гравитационному полю, потенциал которого Φ нормирован так, что он исчезает на бесконечности. Казалось бы, что при наличии массы очень большой величины в какой-либо точке этого поля значение $\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$ в некоторой области вблизи этой точки могло бы оказаться отрицательным и, следовательно, $\sqrt{1+\frac{2\Phi}{c^2}}$ мнимым. Мы убедились в том, что в случае равномерно ускоренной системы координат x, t и эффективного поля χ такая возможность исключена.

Из основ общей теории относительности Эйнштейна следует, что величина $1+\frac{2\Phi}{c^2}$ всегда больше нуля и в случае любого перманентного поля тяготения, порождаемого сколь угодно большими массами.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В заключение приведем ряд обобщающих положений.

1. Положим, что даны две тождественные системы (A и B). Известно также, что каждая из них движется равномерно и прямолинейно относительно другой (и относительно неподвижных звезд) [1] со скоростью, близкой к скорости света. Такое относительное движение может быть обнаружено и скорость его измерена в результате наблюдений каждого из двух наблюдателей — одного, принадлежащего системе A, другого — системе B.

Однако же, если A или B будут основываться на наблюдениях только внутри данной системы — каждый своей, то состояние равномерного и прямолинейного движения данной системы в целом не может быть ими обнаружено.

2. Если упомянутые два наблюдателя (A и B), находящиеся в состоянии прямолинейного и равномерного движения, сопоставят картину физических явлений — каждый по данным наблюдений внутри своей системы, то они убедятся в том, что обе картины тождественны (законы физических явлений тождественны). Они также смогут и идентифицировать вполне однозначно определенные процессы в системе A как тождественные с вполне определенными процессами в системе B.

3. Пользуясь методами хронометрии на расстоянии, наблюдатель A может тогда сравнить скорость течения во времени процессов в своей системе A с быстротой протекания во времени тех же процессов в системе B. То же может сделать наблюдатель B, следящий за событиями в системе A.

4. Если обе системы (A и B) тождественны, то результат такого сравнения точно предсказывается специальной теорией относительности. Каждому из наблюдателей (A и B) представляется, что время в другой системе «течет» медленнее.

5. В случае неравномерного движения необходимо считаться с искажающим влиянием ускорений. В той мере, в какой этим влиянием можно пренебречь, или, если введением соответствую-

[1] Это означает, что обе системы инерциальны.

щих поправок искажающее действие ускорения исключить, то и в случае неравномерного относительного движения имеет смысл сравнивать скорость течения процессов, происходящих на значительном расстоянии, со скоростью тождественных процессов в непосредственном окружении наблюдателя. При этом симметрия (или взаимность) двух наблюдателей A и B в том смысле, как она отмечена в п. 4, не имеет места.

В частности, если рассматривать ситуацию, возникающую при осуществлении цикла движений с «путешествующим» в космосе B и остающимся «неподвижным» на Земле его близнецом A, то имеет место следующее: когда в середине путешествия B направление скорости его (B) изменяется на противоположное и в некоторый момент времени он начинает сближаться с A, то в течение того времени, когда он, находясь на большом расстоянии от A, движется в направлении к A ускоренно, ему (B), считающему себя неподвижным, представляется, что течение процессов в системе A *убыстряется*.

В известном смысле наглядное «объяснение» этого может быть дано в следующих терминах: процессы в A убыстряются относительно B, движущегося с ускорением g, направленным от B к A, вследствие того, что, с точки зрения B (считающего себя неподвижным), A находится в эффективном поле тяготения, направленном от A к B. Потенциал тяготения A относительно B при этом положителен.

Вместе с тем, с точки зрения A (неподвижного на Земле), такое дополнительное поле тяготения вообще отсутствует и соответствующее ему убыстрение процессов, протекающих в B, не происходит. Наоборот, эти процессы в системе B, движущейся относительно A, ему (A) представляются замедленными.

6. Рассматриваем снова две системы (A и B), движущиеся одна относительно другой. Положим следующее: можно установить, что обе системы тождественны. Положим, что последовательность явлений — событий, происходящих в системе A, также тождественна с последовательностью определенного ряда тех же событий в системе B. Скажем, что эта последовательность событий (или, лучше сказать, последовательность состояний системы) заполняет определенный «отрезок ее истории».

Одна из систем находится в среднем на большом расстоянии от другой.

Поставим вопрос о промежутке времени, соответствующем данному «отрезку истории» каждой из этих двух систем.

Промежутки времени, соответствующие одному и тому же «отрезку истории» в указанных условиях, вообще говоря, различны. Самое понятие промежутка времени, соответствующего данному «отрезку истории», неоднозначно.

Так, с учетом упомянутых в п. 5 оговорок и после внесения необходимых поправок промежутки «*собственного времени, соответ-*

ствующие одинаковым отрезкам истории», в случаях A и B по определению одинаковы. Промежутки же так называемого *«координатного времени»* при тех же условиях различны.

7. Неоднозначность, о которой выше шла речь и которая содержится в формуле: «понятие абсолютного времени лишено смысла», проявляется в двух случаях: а) если рассматриваемые системы движутся (одна относительно другой) со скоростью, близкой к скорости света, и б) если эти системы хотя и неподвижны, но находятся в достаточно сильном перманентном поле тяготения, причем расстояние между ними велико.

В том и другом случае «отрезки истории» систем A и B, о которых выше шла речь, по истечении более или менее длительного времени можно сравнить непосредственно, если эти системы сблизить и совместить в пространстве.

Результат сравнения удобнее проследить в условиях, соответствующих случаю «б».

Предположим, что напряженность поля тяготения везде очень мала. Разность потенциалов тяготения в этом поле между двумя точками, удаленными на большое расстояние одна от другой, может быть, однако, велика.

Система B, состояние которой в начальный момент времени тождественно с состоянием другой, совмещенной с ней в пространстве, системой A, начинает в этот начальный момент времени очень медленно передвигаться в направлении убывающего потенциала и останавливается на большом расстояния от A. Затем после длительного времени она также медленно возвращается в исходное положение. Влиянием слабого поля тяготения (χ) на состояние систем B и A можно пренебречь, но абсолютное значение потенциала χ в месте длительной остановки B, на большом расстоянии от A, как можно предположить, велико в сравнении с абсолютным значением потенциала в точке A. Потенциал в точке A можно положить равным нулю.

После возвращения B из области низкого потенциала и сравнения состояний обеих систем оказывается, что «отрезок истории» B меньше «отрезка истории» A.

Если воспользоваться понятием координатного времени, то при указанных условиях оказывается, что в одинаковых промежутках координатного времени укладываются разные «отрезки истории»—меньший для системы B и больший для A. Промежуток координатного времени между конечным и начальным моментами для B и A один и тот же, промежутки же «собственного времени» различны — для системы B он меньше, чем для системы A.

Если под «системами» B и A подразумевать близнецов одного и того же возраста в начальный момент времени, то в конечный момент времени оказывается, что B моложе A.

Вполне аналогичные соотношения имеют место, если рассматривать длительное космическое путешествие B со скоростью, близкой к скорости света, и сравнивать его возраст с возрастом A, остававшимся неподвижным на Земле.

В отличие от предыдущего случая, следует, однако, предположить, что продолжительность времени, проведенного B в пути и движущегося с постоянной скоростью, близкой к скорости света, сколь угодно велика в сравнении с временем действия на него ускоряющих сил в конечном пункте его космического путешествия.

При указанных только что условиях искажающим влиянием ускорений, которым подвержен B, можно пренебречь.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

В § 2 гл. I нами был намечен вывод уравнений Лоренца для преобразования от «нештрихованной» системы координат к «штрихованной» или обратно. Одну из этих двух инерциальных систем можно рассматривать как неподвижную, а другую как движущуюся. Вследствие этого мы исходили из того, что показания t_a часов a и показание t' часов b (см. рис. 3) при заданных, как было указано, начальных условиях не зависят от того, совмещаются ли a и b в пространстве в момент времени t_a и t_b' в результате перемещения b в направлении к a (вправо на рис. 3 и 10, *I*) или же в результате перемещения a в направлении к b (влево) (рис. 10, *II*).

Следует иметь в виду, что стрелки всех часов системы x', t' (в первом случае) и той же системы (во втором случае), кроме A и B при $t_{x=0} = t'_{x'=0} = 0$, представляются расставленными по-разному.

Выведем теперь, основываясь на уравнениях Лоренца, выражения t_a^{I} и t_a^{II}, соответствующие двум упомянутым предположениям, т. е. считая, что в случае t_a^{I} неподвижна нештрихованная система x, t, в случае же t_a^{II} эта система движется, а неподвижна система отсчета x', t'.

Расстановка стрелок часов в этих двух случаях при $t_{x=0} = t'_{x'=0} = 0$ схематически показана на рис. 10 (*I* и *II* соответственно).

Убедимся в том, что время t_a (рис. 3) в обоих случаях одинаково, т. е. что $t_a^{\mathrm{I}} = t_a^{\mathrm{II}}$.

В первом случае, в начальный момент времени штрихованной системы, $t_a = 0$, как и показано на рис. 10. Поскольку расстановка стрелок часов рассматривается с точки зрения наблюдателя, неподвижного в нештрихованной системе, в соответствии с уравнением (I.27) в начальный момент $t = 0$ отсчет времени по часам b системы x', t' дает отрицательное значение $t_b'(t = 0) < 0$ (рис. 10, *I*).

Как следует из уравнения (I.23), $x_b = x_b' \sqrt{1 - \beta^2}$ при $t = t_0 = 0$, что также показано на рис. 10, *I*.

Время перемещения b из положения, показанного на рис. 10 пунктирным кружком, в положение, совпадающее с a (сплошной кружок), равно

$$t_a^{\mathrm{I}} = \Delta t_a^{\mathrm{I}} = \frac{x_a - x_b}{v} = \frac{x_a - x_b' \sqrt{1-\beta^2}}{v}, \qquad (\Pi.1)$$

где Δt_a^{I} — время нештрихованной системы, протекшее от начального момента ($t = 0$) до момента встречи a с b.

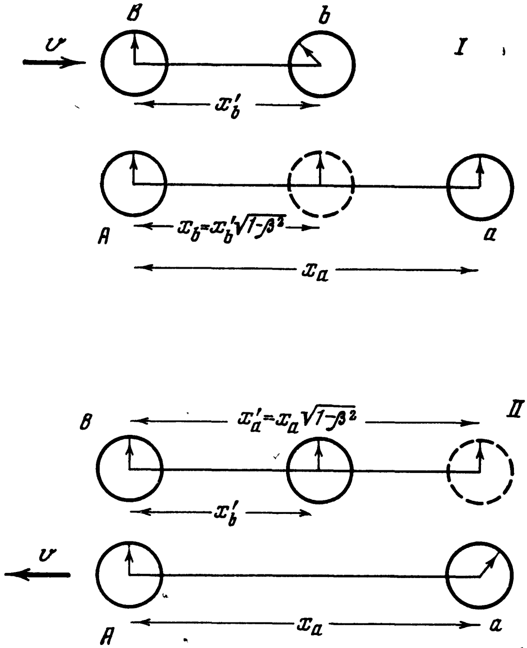


Рис. 10

В соответствии с ситуацией *II* (рис. 10) считаем теперь, что неподвижна система x', t', т. е. рассматриваем задачу с точки зрения наблюдателя, неподвижного в штрихованной системе.

Согласно уравнению (I.26) при $t' = 0$ имеем

$$x_a'(t' = 0) = x_a \sqrt{1-\beta^2}$$

и согласно уравнению (I.29)

$$t_a^{\mathrm{II}}(t' = 0) = \frac{x_a'(t' = 0)\, v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_a \sqrt{1-\beta^2}\, v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_a v}{c^2}, \qquad (\Pi.2)$$

$$\Delta t_a^{\mathrm{II}} = \frac{x_a' - x_b'}{v} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{(x_a \sqrt{1-\beta^2} - x_b')\sqrt{1-\beta^2}}{v} =$$

$$= \frac{x_a - x_a\beta^2 - x_b' \sqrt{1-\beta^2}}{v}. \qquad (\Pi.3)$$

Складывая (П.2) и (П.3), получаем

$$t_a^{\mathrm{II}} = t_a^{\mathrm{II}}(t' = 0) + \Delta t_a^{\mathrm{II}} = \frac{x_a - x_b'\sqrt{1-\beta^2}}{v}. \qquad (\text{П}.4)$$

Из сравнения (П.4) и (П.1) следует, что $t_a^{\mathrm{I}} = t_a^{\mathrm{II}}$.

Аналогичные рассуждения покажут также, что и

$$t_b'^{\mathrm{I}} = t_b'^{\mathrm{II}}.$$

Приложение 2

Определим, на каком делении циферблата часов B находится их стрелка в момент получения ими сигнала.

С точки зрения системы II (рис. 7), сигнал испущен часами b_n' в тот момент, когда стрелка часов B показывала T_0' делений (ведь часы b_n' были синхронны с часами B в системе II). Время $\Delta T'$ распространения сигнала определяется в системе II из уравнения

$$c\Delta T' + \beta c\Delta T' = x_0' \qquad (\text{П}.5)$$

(так как часы B движутся теперь на встречу сигналу и за время $\Delta T'$ переместятся в направлении его источника—часов b_n'—на расстояние $\beta c\Delta T'$), x_0' — расстояние между часами b_n' и B в системе II. Согласно (П.5)

$$\Delta T' = \frac{x_0'}{c(1+\beta)}. \qquad (\text{П}.6)$$

Однако $\Delta T'$ есть время, измеренное по часам, покоящимся в системе II. Соответствующее время, выраженное в делениях часов B, *движущихся со скоростью* β в системе II (и покоящихся, относительно системы III), равно

$$\Delta T'' = \Delta T'\sqrt{1-\beta^2} = \frac{x_0'\sqrt{1-\beta^2}}{c(1+\beta)}$$

(в силу отставания хода часов B относительно часов системы II). Положение стрелки часов B (покоящихся теперь в системе III) в момент *получения ими* сигнала совпадает, таким образом, с делением

$$n_{\text{св}} = T_0' + \frac{x_0'\sqrt{1-\beta^2}}{c(1+\beta)},$$

или, как легко убедиться,

$$n_{\text{св}} = T_0' + \frac{x_0'}{c}\,\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0},$$

так как

$$\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$$

(см. (II.16)). Следовательно,

$$n_{\text{св}} = T_0' + \beta_0 \frac{1-\beta_0}{1+\beta_0} T_0', \qquad (\Pi.7)$$

поскольку

$$\left(\frac{x_0'}{c}\right) = \beta_0 T_0'.$$

Наблюдатель, отсчитывающий время по часам B, покоящимся относительно него в системе *III*, и зарегистрировавший показание этих часов ($n_{\text{св}}$) в момент получения сигнала, может, *со своей точки зрения*, определить время *испускания* сигнала часами b_n'. Для этого из отсчитанного показания $n_{\text{св}}$ он должен *вычесть* время $\Delta T_{\text{св}}''$ распространения сигнала.

С его точки зрения (т. е. системы *III*), он получит следующее выражение для этого последнего интервала времени:

$$\Delta T_{\text{св}}'' = \frac{x_0''}{c}, \qquad (\Pi.8)$$

где x_0'' — измеренное в системе *III* расстояние между неподвижными в этой системе объектами b_n'' и B_{III}.

Положения объектов b_n'' и B_{III} в системе *III* совпадают с отметками объектов b_n' и B_{II}, «засеченными» в системе *III* в определенный момент времени T_0' системы *II* (следовательно, одновременно в системе *II* и *неодновременно*, с точки зрения системы III). Согласно (I.35) x_0'' и x_0' связаны соотношением

$$x_0'' = \frac{x_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (\Pi.9)$$

Приняв во внимание (II.16), легко убедиться в том, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta_0^2}{1-\beta_0^2}. \qquad (\Pi.10)$$

Следовательно, согласно (П.8) — (П.10)

$$\Delta T_{\text{св}}'' = \frac{x_0'}{c} \frac{1+\beta_0^2}{1-\beta_0^2} = \frac{\beta_0(1+\beta_0^2)}{1-\beta_0^2} T_0',$$

так как по условиям задачи

$$\frac{x_0'}{\beta_0 c} = T_0'.$$

Вычитая это время $\Delta T''_{\text{св}}$ из отсчета ($n_{\text{св}}$) своих часов в момент получения сигнала, наблюдатель B определит (со своей точки зрения) момент T''_0 испускания сигнала часами b'_n.

Поэтому, с точки зрения наблюдателя B, время испускания сигнала часами b'_n равно

$$T''_0 = T'_0 + \frac{\beta_0(1-\beta_0)}{1+\beta_0} T'_0 - \frac{\beta_0(1+\beta_0^2)}{1-\beta_0^2} T'_0 = T'_0 - \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2} T'_0$$

и не совпадает с T'_0.

Приложение 3

Читателю, не освоившемуся со своеобразием пространственно-временных соотношений, вытекающих из преобразований Лоренца, быть может, целесообразно более внимательно вникнуть в схему рис. 7.

Во избежание ошибочных представлений следует особо подчеркнуть, что только лишь в средней части рисунка обозначены одновременные (в системе II) положения изображенных там объектов. Положения же объектов, расположенных по горизонтали в верхней и нижней частях рисунка, неодновременны — они относятся к различным (в каждой данной системе) моментам времени.

Вместе с тем кружками, расположенными по вертикали рис. 7, отмечены совпадающие *в пространстве* положения соответствующих объектов (A, b'_n и b''_n, с одной стороны, и a_n, B_{II} и B_{III}, с другой стороны).

В соответствии с тем, что показано, например, в верхней части рисунка, наблюдателю, покоящемуся *в системе III* и регистрирующему описанные в тексте события, представляется следующее.

В какой-то момент времени $\left(\frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2} T'_0 \text{ по часам системы } III\right)$ объект b'_n, двигавшийся со скоростью $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ (П.16) относительно b''_n вправо, останавливается и затем остается неподвижным, совмещенным в пространстве с b''_n. Стрелка часов b'_n показывает при этом время T'_0. Объект же B, с точки зрения системы III, находится в этот момент времени вправо от b''_n на расстоянии от него, равном

$$l_x = \frac{x_0 \sqrt{1-\beta_0^2}\,(1-\beta_0^2)}{1+\beta_0^2} \qquad (\text{П.11})$$

(составляющем при $\beta \approx 1$ малую часть расстояния $b''_n\ B_{III}$, показанного в верхней части рисунка).

Часы B в этот момент времени $\left(\frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0'\right)$ системы III показывают время

$$t_x' = T_0'\left(1-\frac{2\beta_0^2}{1+\beta_0^2}\right) \tag{П.12}$$

и продолжают двигаться вправо.

Выражения (П.11) и (П.12) для l_x и t_x' вытекают из преобразований Лоренца для перехода от t'', x'' к t', x', как это видно из нижеследующего.

Можно убедиться в том, что если совместить начало координат системы III с b_n'', направить ось x'' в сторону B и принять во внимание заданную (и показанную на рис. 7) расстановку стрелок часов, то преобразование Лоренца, о котором идет речь, дает

$$t' = \frac{t'' - \frac{x''\beta}{c} + \frac{4\beta_0^4}{1-\beta_0^4}T_0'}{\sqrt{1-\beta^2}} = t''\frac{1+\beta_0^2}{1-\beta_0^2} - \frac{x''2\beta_0}{(1-\beta_0^2)c} + \frac{4\beta_0^4}{(1-\beta_0^2)^2}T_0'. \tag{П.13}$$

(В соответствии с рис. 7 $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ есть выраженная в долях скорости света скорость системы III относительно системы II, β_0 — скорость системы III или II относительно I.)

Для того чтобы убедиться в справедливости соотношения (П.13), достаточно проверить, что при $t'' = \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0$ и $x'' = 0$

(П.13) дает $t' = T_0'$, что и соответствует заданной расстановке стрелок часов. Величина l_x равна расстоянию между положениями объектов b_n' и B_{II}, отмеченными («засеченными») в системе III *одновременно* — в момент времени $t'' = \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0'$.

Поскольку не зависящее от времени расстояние $\Delta x' = b_nB_{II}$ в системе II равно (в соответствии с рисунком) $\Delta x' = x_0\sqrt{1-\beta_0^2}$, то согласно (I.36)

$$l_x = \Delta x'\sqrt{1-\beta^2} = \Delta x'\frac{1-\beta_0^2}{1+\beta_0^2} = \frac{x_0\sqrt{1-\beta_0^2}(1-\beta_0^2)^{1}}{1+\beta_0^2}, \tag{П.14}$$

так как $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ и, следовательно,

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{1-\beta_0^2}{1+\beta_0^2}. \tag{П.15}$$

---

[1] $x_0 = \beta_0 c T_0 = \beta_0 c\frac{T_0'}{\sqrt{1-\beta_0}}$.

Подставив в (П.13) $x'' = l_x$ и $t'' = \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0'$, найдем t_x'. Уравнение (П.13) дает

$$t_x' = \left(1 - \frac{2\beta_0^2}{1+\beta_0^2}\right)T_0', \tag{П.16}$$

что и совпадает с (П.12). Время t_x'—показание часов B, зарегистрированное («засеченное») наблюдателем, неподвижным в системе III в момент его времени $t'' = \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0'$.

Далее для упрощения изложения и для наглядности прибегнем к следующей терминологии, имея в виду приемы изложения и сравнения, часто использовавшиеся самим Эйнштейном и в популярной литературе, а также уже и нами в гл. I. Вместо системы II будем говорить «поезд II», систему же III будем обозначать как железнодорожное полотно и станции на нем. (Для наглядности можно представлять себе очень длинный «поезд» со многими станциями на протяжении его длины.)

Время t_x' отсчитано по часам, находящимся в «поезде», в момент времени, когда в представлении «станционных наблюдателей» b_n' «выбрасывается из поезда».

Из сказанного следует, что если рассматривать движение b_n' и B с точки зрения системы III, то «станционным наблюдателям» представляется, что, после того как b_n' «выброшен из поезда», B в течение времени, которое (при $\beta_0 \approx 1$) велико в сравнении с T_0' (см. (П.17)), продолжает еще двигаться вместе с «поездом II» вправо. Наблюдатель B будет «выброшен из поезда», после того как, двигаясь в нем, он пройдет путь, равный

$$L_x = \frac{x_0(1+\beta_0^2)}{\sqrt{1-\beta_0^2}} - \frac{x_0\sqrt{1-\beta_0^2}(1-\beta_0^2)}{1+\beta_0^2} = \frac{4x_0\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}(1+\beta_0^2)}$$

(см. рис. 7 и формулу (П.14)).

После того как b_n' «выброшен из поезда», B остается в нем еще в течение времени, которое по станционным часам системы III равно

$$\Delta T_B'' = T_0'\left(1 - \frac{1-3\beta_0^2}{1-\beta_0^2}\right) = \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2}T_0' \gg T_0' \tag{П.17}$$

По часам же, находящимся в «поезде II», соответствующее время равно

$$\Delta T_B' = \Delta T_B''\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\beta_0^2}{1-\beta_0^2}\,\frac{1-\beta_0^2}{1+\beta_0^2}T_0' = \frac{2\beta_0^2}{1+\beta_0^2}T_0', \tag{П.18}$$

$\Delta T_B' < T_0'$, так как $\beta_0^2 < 1$.

В момент времени, когда, «с точки зрения станционных наблюдателей», b_n' «выбросился из поезда», часы B «в поезде II» согласно (П.16) показывали время

$$t_x' = T_0' - \frac{2\beta_0^2}{1+\beta_0^2} T_0'.$$

В тот момент времени, когда «выбрасывается» B, эти часы покажут время $t_B' = t_x' + \Delta T_B' = T_0'$ (согласно (П.16) и (П.18)).

Итак, с «точки зрения станционных наблюдателей», B выбрасывается из «поезда» после b_n' с опозданием на время $\Delta T_B''$, которое (при $\beta_0 \approx 1$) велико в сравнении с T_0' (см. (П.17)). Вместе с тем, с точки зрения пассажиров в «поезде», оба события происходят одновременно при $t_0' = T_0'$.

Приложение 4

Вычислим время t_x' (см. стр. 68). Оно, очевидно, определяется уравнением

$$x_0' + \beta_0 c t_x' = \beta c t_x' \tag{П.19}$$

(x_0' — расстояние, отделяющее в системе II часы A от часов B в момент начала движения B в направлении к A; $\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2}$ — скорость часов B и β_0 — скорость часов A в системе II).

Из уравнения (П.19) получаем, следовательно, $t_x' = \frac{x_0'}{(\beta - \beta_0)c}$.

Но $x_0' = \beta_0 c T'_0$ (см. рис. 7), поэтому

$$t_x' = \frac{\beta_0}{\beta - \beta_0} T_0' = \frac{1+\beta_0^2}{1-\beta_0^2} T_0', \tag{П.20}$$

или согласно (П.10)

$$t_x' = \frac{T_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{П.21}$$

Отсюда тот же интервал времени, с точки зрения системы III, равен

$$t_x'' = t_x' \sqrt{1-\beta^2} = T_0', \tag{П.22}$$

как и можно было предвидеть, поскольку t_x'' — интервал «собственного» времени часов B, соответствующий длительности половины (второй) рассматриваемого нами цикла.

Показания часов B в конечный момент оказываются, следовательно, равными $T_0' + t_x'' = 2T_0'$ (см. (П.22)), поскольку *в начале* второй половины цикла эти часы показывали время T_0'.

Что касается часов A, то, учитывая (П.20), имеем

$$t_x = t'_x \sqrt{1-\beta_0^2} = \frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T'_0 \qquad (\text{П}.23)$$

Поскольку в начале второй половины цикла часы A показывают время $T_0 = \sqrt{1-\beta_0{}^2}T_0{}'$ (см. рис. 7), то в конце цикла они покажут время

$$T_A = \sqrt{1-\beta_0^2}T'_0 + \frac{1+\beta_0^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}} T'_0 = \frac{2T'_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}. \qquad (\text{П}.24)$$

Таким образом, обозначая по-прежнему $T_B = 2T_0{}'$, имеем

$$T_A = \frac{T_B}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

т. е. снова прежний результат.

Сейчас все описывается так.

За первую половину цикла часы A отстают от часов наблюдателя, неподвижного в системе II; часы B за это время идут синхронно с его часами. За вторую половину цикла как часы A, так и часы B *отстают от* часов, которые неподвижны в системе II вместе с наблюдателем. Но ход часов B «замедлен» теперь больше, чем ход часов A, и за это время — второй половины цикла — имеет место *перекомпенсация* упреждения часов A, образовавшегося в конце первой половины цикла, в такой мере, что результат в конце всего цикла остается согласно (П.24) прежним.

Приложение 5

В начальный момент времени $t = 0$ (в системе I) мгновенные импульсы сообщают часам B скорость V_B в направлении положительной оси x, а часам A — скорость $V_A > V_B$ в том же направлении, и в момент времени $t = T$ (системы I) часы A догоняют часы B.

Обозначим через T_A и T_B показания соответствующих часов в этот момент времени ($t = T$).

Нас интересует разность

$$\Delta t_{BA} = T_B - T_A. \qquad (\text{П}.25)$$

Введем в рассмотрение систему координат — «систему B», движущуюся относительно системы I со скоростью V_B. В этой системе часы B, после их ускорения, неподвижны, и мы можем предположить, что они находятся в ее начале. Часы A ускоряются, с точки зрения системы I, одновременно с B — в момент времени $t = 0$.

Промежуток времени, по истечении которого A догонят B, равен T (по измерениям в системе I) и

$$T' = \sqrt{1-\beta_0^2}\, T \tag{П.26}$$

(в движущейся системе B). Показания движущихся часов в тот момент, когда A догоняет B, выражаются так:

$$T_A = T\sqrt{1-\beta^2}, \tag{П.27}$$

$$T_B = T\sqrt{1-\beta_0^2}, \tag{П.28}$$

где

$$\beta = V_A / c \text{ и } \beta_0 = V_B / c,\ \beta > \beta_0.$$

В системе B часы A движутся относительно B со скоростью u; предположим, что эта скорость очень мала: $\beta' = \frac{u}{c} \ll 1$.

Если $\Delta x'$ — расстояние между A и B в системе B (в момент мгновенного ускорения B), то

$$T' = T\sqrt{1-\beta_0^2} = \frac{\Delta x'}{\beta' c}\text{[1]}. \tag{П.29}$$

Формула (I.41) сложения скоростей дает (если ограничиться величинами первого порядка малости относительно β')

$$\beta = \frac{\beta_0 + \beta'}{1+\beta_0\beta'} \simeq \beta_0 + \beta'(1-\beta_0^2) \tag{П.30}$$

и

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta_0^2}\,\sqrt{1-\beta'^2}}{1+\beta_0\beta'} \simeq \sqrt{1-\beta_0^2}\,(1-\beta_0\beta'). \tag{П.31}$$

Равенства (П.27) и (П.28) дают согласно (П.31)

$$T_A = \sqrt{1-\beta^2}\, T \simeq T\sqrt{1-\beta_0^2} - T\sqrt{1-\beta_0^2}\,\beta_0\beta', \tag{П.32}$$

$$T_B = T\sqrt{1-\beta_0^2}. \tag{П.33}$$

Откуда

$$\Delta t_{BA} = T_B - T_A = T\sqrt{1-\beta_0^2}\,\beta_0\beta', \tag{П.34}$$

и согласно (П.29)

$$\Delta t_{BA} = \frac{\Delta x'\beta_0}{c} = \frac{\Delta x\beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}\, c} \tag{П.35}$$

в пределе при сколь угодно малом β'.

---

[1] $\Delta x' = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{1-\beta_0^2}}$, где Δx — расстояние между A и B в системе I (до их ускорения — см. (I. 34)).

Согласно предположению A и B движутся под действием постоянной, ускоряющей их, силы F в направлении положительной оси X.

Определим постоянную g, положив $F = m_0 g$, где m_0 — масса покоя ускоряемого тела, а g — «собственное ускорение» (см. (IV.32)).

Выведем уравнение движения каждого из этих тел (A и B) в системе X, T.

«Собственным ускорением» мы назвали ускорение относительно (мгновенной) инерциальной системы координат (X', T'). В этой системе координат скорость тела (будем говорить о теле A) в данный момент времени (T_0) равна нулю.

Положим, что начало системы координат X', T' движется относительно исходной инерциальной системы X, T в направлении положительной оси X с постоянной скоростью $\beta_0 c$, равной мгновенному значению скорости тела A:

$$\beta_0 c = \left(\frac{dX_A}{dT}\right)_{T=T_0}.$$

Оси X и X' параллельны. Начало системы координат X', T' совпадает с A при $T' = 0$ (и $T = T_0$).

Скорость A относительно X', T' обозначим $\beta_A(T')c$. По определению при $T' = 0$ $\beta_A(T' = 0) = 0$. Следовательно, при $T \approx 0$ $\beta_A(T') \ll 1$, и движение A относительно X', T' определяется вторым законом Ньютона нерелятивистской механики:

$$m_0 \frac{d^2 X'_A}{dT'^2} = \frac{d}{dT'}\left(m_0 \frac{dX'_A}{dT'}\right) = m_0 c \frac{d\beta_A(T')}{dT'} = F. \qquad (\text{П.36})$$

Обозначим βc скорость A относительно системы X, T. Выразим β через β_0 и $\beta_A(T')$, основываясь на теореме сложения скоростей — см. (I.41).

Согласно (I.41)

$$\beta(T') = \frac{\beta_0 + \beta_A(T')}{1 + \beta_0 \beta_A(T')}. \qquad (\text{П.37})$$

Выполнив дифференцирование выражения (П.37), найдем

$$\frac{d\beta}{dT'} = \frac{1-\beta_0^2}{[1+\beta_0\beta_A(T')]^2}\,\frac{d\beta_A(T')}{dT'}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d\beta}{dT'}\right)_{T'=0} = (1-\beta_0^2)\left(\frac{d\beta_A(T')}{dT'}\right)_{T'=0}, \qquad (\text{П.38})$$

так как при $T' = 0$ $\beta_A(T' = 0)_{T=T_0} = 0$.

Дифференцируя (П.37), мы полагали $\beta_0 = \text{const}$, поскольку значение β_0 относится к фиксированному моменту времени $T = T_0$. Однако поскольку момент времени T_0 может быть выбран произвольно, в дальнейшем вместо β_0 будем писать β (где $\beta = \frac{dX_A}{cdT}$ для любого момента времени).

В соответствии с (I.13)[1] $dT' = \sqrt{1-\beta^2}dT$. Если принять это во внимание, то из уравнения (П.38) следует

$$\frac{d\beta_A(T')}{dT'} = \frac{d\beta}{dT}\frac{1}{(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{П.39}$$

Подставляя (П.39) в (П.36), получаем

$$\frac{m_0 c \frac{d\beta}{dT}}{(1-\beta^2)\sqrt{1-\beta^2}} = F. \tag{П.40}$$

Далее легко убедиться в том, что уравнение (П.40) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{m_0\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{d}{dT}(m\beta c) = F. \tag{П.41}$$

Уравнение (П.41) дает релятивистское выражение второго закона Ньютона (закон сохранения импульса) при любом значении скорости β, которое может быть близко к единице. Однако масса m движущегося тела A не равна его массе покоя (m_0), а, как это показывает уравнение (П.41), связана с m_0 соотношением

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0\gamma, \tag{П.42}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Масса m зависит от скорости движения тела и возрастает с увеличением скорости.

Если подставить в (П.41) выражение $m_0 g$ для силы F, ввести обозначение $\beta c = v$ и затем опустить множитель m_0 в правой и левой частях уравнения движения, то это уравнение можно записать так:

$$\frac{d}{dT}\left[\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right] = g. \tag{П.43}$$

---

[1] Согласно принятым здесь обозначениям движется тело A, тогда как формула (I.13) относится к движущемуся телу B. Время T здесь соответствует t формулы (I.13).

Интегрируя, получаем

$$v = \frac{dX}{dT} = \frac{gT}{\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}}, \qquad (\text{П.44})$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2}, \qquad (\text{П.45})$$

$$X_A = \int_0^T v\,dT = \frac{c^2}{g}\left[\sqrt{1+\left(\frac{gT}{c}\right)^2} - 1\right] = \frac{c^2}{g}(\gamma - 1) \qquad (\text{П.46})$$

и

$$X_B = \int_0^T v\,dT + \Delta X_0 = \frac{c^2}{g}(\gamma - 1) + \Delta X_0. \qquad (\text{П.47})$$

Приложение 7

Выражение для зависимости реактивной силы от потенциала тяготения χ можно получить, исходя из указанных уже в тексте соображений.

В координатах x, t реактивная сила F должна быть пропорциональна произведению массы dm/dt продуктов сгорания, выбрасываемых ракетным двигателем за единицу координатного времени, и скорости (v_e) потока этих продуктов в координатах x, t.

Будем иметь в виду начальный момент времени $t = 0$, положив, следовательно,

$$\frac{dx_A}{dt} = \frac{dx_B}{dt} = 0 \qquad (\text{П.48})$$

(x_A и x_B — координаты «космонавтов» A и B).

Реактивная сила

$$F \sim \frac{dm}{dt} v_e. \qquad (\text{П.49})$$

Соотношение (П.49) запишем в виде

$$F \sim \frac{dm}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} v_e. \qquad (\text{П.50})$$

При $t = 0$ скорость v_e в выражении (П.50) пропорциональна $1 + \frac{gx}{c^2}$. В самом деле, при $t = 0$ согласно (IV.106) имеет место следующее соотношение:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{dx/dt}{1 + \frac{xg}{c^2}} \qquad (\text{П.51})$$

($\operatorname{sh}\theta(t) = 0$ и $\operatorname{ch}\theta(t) = 1$ при $t = 0$).

Если $v_e^B(x, t)$ есть выраженная в координатах x, t скорость потока продуктов сгорания, выбрасываемых двигателем B, и $V_e^B(X, T)$— то же в координатах X, T (а $v_e^A(x, t)$ и $V_e^A(X, T)$ — соответствующие скорости в случае двигателя A), то по условиям задачи

$$V_e^B(X_B, T) = V_e^A(X_A, T). \tag{П.52}$$

Вместе с тем согласно (П.51)

$$V_e(X, T) = \frac{v_e(x, t)}{1 + \frac{gx}{c^2}} \tag{П.53}$$

и отсюда согласно (П.52)

$$\frac{v_e^B(x_B, t)}{1 + \frac{x_B g}{c^2}} = v_e^A(x_A = 0, t) = v_0,$$

где v_0 — скорость истечения продуктов сгорания при $x = 0$ (ракета A), и

$$v_e^B(x_B, t) = v_0\left(1 + \frac{x_B g}{c^2}\right). \tag{П.54}$$

В (П.50) $dm = -dM_0$ где M_0 — масса покоя ракеты плюс топливо. Переписываем (П.50) таким образом:

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\left(\frac{dM_0}{d\tau}\right)_x}{\left(\frac{dM_0}{d\tau}\right)_{x=0}} \frac{(d\tau)_x}{(d\tau)_{x=0}} \frac{v_e^B}{v_e^A} \tag{П.55}$$

(t от x не зависит).

Как было показано — см. (IV.113)

$$dM_0 = \frac{dM_0^0}{1 + \frac{gx}{c^2}}. \tag{П.56}$$

Следовательно,

$$\frac{\left(\frac{dM_0}{d\tau}\right)_x}{\left(\frac{dM_0}{d\tau}\right)_{x=0}} = \frac{\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_x}{\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_{x=0}} \frac{1}{1 + \frac{gx_B}{c^2}}. \tag{П.57}$$

Кроме того,

$$\frac{(d\tau)_x}{(d\tau)_{x=0}} = \frac{d\tau_B}{dt} = 1 + \frac{gx_B}{c^2} \tag{П.58}$$

при $\frac{dx_B}{dt} = 0$ согласно (IV.48) и (IV.51).

Подставляя (П.54), (П.57) и (П.58) в (П.55), получаем

$$\frac{F_B}{F_A} = \frac{\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_x^B}{\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_{x=0}^A}\left(1 + \frac{gx_B}{c^2}\right). \tag{П.59}$$

Но по условиям задачи[1]

$$\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_x^B = \left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_{x=0}^A \tag{П.60}$$

и (П.59) дает

$$F_B = F_A\left(1 + \frac{gx_B}{c^2}\right) \tag{П.61}$$

или, полагая $F_A = F_0$, $F_B = F$ и $(x_B)_{t=0} = x_0$,

$$F = F_0\left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) = F_0\sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2}}. \tag{П.62}$$

Формула (П.62) совпадает с выражением (IV.114) для зависимости F от потенциала χ, полученным в тексте в общем виде.

Приложение 8

Приводим вывод формулы (1), сохраняя обозначения, принятые во введении.

При $v_e = \mathrm{const}$ $g = \mathrm{const}$ и ракета движется по закону гиперболического движения.

Предположим, что ракета находится в начале координат системы x, t. Согласно исходным данным, в этой системе x, t она неподвижна. В соответствии с (IV.42) скорость ракеты относительно исходной системы координат X, T

$$v = c\,\mathrm{th}\,\frac{gt}{c}. \tag{П.63}$$

Реактивная сила уравновешена силой тяготения (эффективного поля χ, действующего в системе x, t). Отсюда

$$-v_e\frac{dM}{dt} = (M + m)\,g, \tag{П.64}$$

где $-\frac{dM}{dt}$ — масса (полная)[2] продуктов сгорания, выбрасываемых

---

[1] $\left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_x^B = \left(\frac{dM_0^0}{d\tau}\right)_{x=0}^A = \mathrm{const}$, поскольку ракеты A и B ускоряются по закону гиперболического движения ($g = \mathrm{const}$).

[2] С учетом массы кинетической энергии.

из сопла реактивного двигателя за единицу *собственного времени*[1] (t), и $-dM$ — изменение массы покоя топлива за время dt.

Согласно (П.63)

$$dv = \frac{g\,dt}{\mathrm{ch}^2 \frac{gt}{c}}$$

и

$$dt = \frac{dv\,\mathrm{ch}^2 \frac{gt}{c}}{g}. \qquad (\text{П}.65)$$

Подставляя (П.65) в (П.64), принимая во внимание (IV.24), получаем

$$-v_e \frac{dM}{M+m} = dv\,\mathrm{ch}^2 \frac{gt}{c} = \frac{dv}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Отсюда

$$-v_e \int\limits_{M_{\text{нач}}}^{0} \frac{dM}{M+m} = v_e \int\limits_{0}^{M_{\text{нач}}} \frac{dM}{M+m} = \int\limits_{0}^{v_m} \frac{dv}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}. \qquad (\text{П}.66)$$

Преобразуя (П.66), находим

$$v_e \ln \frac{M_{\text{нач}}+m}{m} = \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{v_m} \left(\frac{1}{1-\frac{v}{c}} + \frac{1}{1+\frac{v}{c}}\right) dv = \frac{c}{2} \ln \frac{1+\frac{v_m}{c}}{1-\frac{v_m}{c}} \qquad (\text{П}.67)$$

или

$$\frac{M_{\text{нач}}+m}{m} = \left(\frac{1+\frac{v_m}{c}}{1-\frac{v_m}{c}}\right)^{\frac{c}{2v_e}}. \qquad (\text{П}.68)$$

Формула (П.68) совпадает с (1).

Не представляет труда найти выражение и для продолжительности времени ускорения.

В координатах x, t это время согласно (П.63) равно

$$t = \frac{c}{g} \operatorname{arcth} \frac{v_m}{c} = \frac{c}{g} \operatorname{arc\,th} \beta_m.$$

Далее уравнение (IV.57) при $x = 0$ дает

$$T = \frac{c}{g} \mathrm{sh} \frac{gt}{c}$$

[1] В начале координат ($x = 0$) собственное время совпадает с координатным.

и отсюда

$$T = \frac{c}{g}\,\mathrm{sh}\left(\mathrm{arcth}\,\frac{v_m}{c}\right),$$

$$\frac{gT}{c} = \sqrt{\frac{\frac{v^2{}_m}{c^2}}{1-\frac{v^2{}_m}{c^2}}} = \frac{\beta_m}{\sqrt{1-\beta_m^2}},$$

$$T = \frac{v_m}{g}\,\frac{1}{\sqrt{1-\beta_m^2}} = \frac{v_m}{g}\,\gamma_m. \tag{П.69}$$

Если g порядка g_0 (ускорения силы тяжести у поверхности Земли), $v_m \approx 0{,}99\,c$ и $\gamma_m \approx 7$, то (П.69) дает

$$T = \frac{v_m}{g}\gamma_m \approx \frac{c}{g_0}\gamma_m \approx 21\cdot10^7 \text{ сек.},$$

т. е. T порядка семи лет.

По часам же космонавта время ускорения

$$t = \frac{c}{g}\,\mathrm{arcth}\,0{,}99 = 3\cdot10^7\,\mathrm{arcth}\,0{,}99 \text{ сек.} \approx 3{,}3\cdot10^7 \text{ сек.}$$

при $g = 1000$ *см/сек*^{2}.

Приложение 9

Выведем основное соотношение

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \tag{П.70}$$

где Δm — приращение массы тела, а ΔE — соответствующее увеличение его энергии.

Покажем это сначала в случае поступательно движущегося тела, кинетическая энергия которого равна $E_{\text{кин}}$.

По определению кинетическая энергия $E_{\text{кин}} = \Delta E$, где ΔE — разность между энергией тела в состоянии движения и в состоянии покоя этого тела. Следовательно, (П.70) дает

$$\Delta m = m - m_0 = \frac{E_{\text{кин}}}{c^2}, \tag{П.71}$$

где m — полная масса движущегося тела (см. (П.42)) и m_0 — его масса покоя. Докажем, что соотношение (П.71) действительно имеет место.

Тело, масса покоя которого есть m_0, начинает двигаться в момент времени $t = 0$ под действием силы $F(t)$, ускоряющей его на протяжении некоторого пути s.

Основываясь на выражении полной массы тела (П.42) и уравнении движения (П.41), определим кинетическую энергию ($E_{\text{кин}}$) этого тела.

Пусть скорость тела в конце пути s равна V. Тогда

$$E_{\text{кин}} = \int_0^V F ds \qquad (\text{П.72})$$

(кинетическая энергия равна работе силы F на пути s). Согласно (П.41)

$$\frac{vd\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right)}{ds} = F, \qquad (\text{П.73})$$

где v — значение скорости в какой-то момент времени и F значение ускоряющей силы F в тот же момент времени.

Введем обозначение $\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = mv = I$ и перепишем (П.73) в виде

$$vdI = Fds. \qquad (\text{П.74})$$

Интегрируя правую и левую части уравнения (П.74), приняв во внимание (П.41), а также что

$$\int vdI = Iv - \int Idv, \qquad (\text{П.75})$$

согласно (П.75) получаем

$$\frac{m_0 V^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} - \int_0^V \frac{m_0 v dv}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = E_{\text{кин}}(V). \qquad (\text{П.76})$$

Отсюда, выполняя интегрирование, имеем

$$\frac{m_0 V^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2} - m_0 c^2 = E_{\text{кин}}(V)$$

и далее

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = E_{\text{кин}}(V). \qquad (\text{П.77})$$

Поскольку $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$ (см. П.42)), формула (П.77) совпадает с (П.71).

Рассмотрим столкновение двух тел (A и B), движущихся навстречу одно другому, предположив, что налицо условие вполне неупругого соударения.

Условие это означает следующее.

Рассмотрим соударение свободно движущихся тел A и B в системе координат, начало которой совмещено с центром тяжести (или центром масс этих тел). По определению в этой инерциальной системе координат векторы импульса (количества движения) тел A и B, движущихся равномерно и прямолинейно, равны по величине и противоположны по направлению.

Если соударение вполне неупруго, то кинетическая энергия полностью диссипируется — превращается во внутреннюю энергию образовавшейся в результате соударения физической системы, неподвижной в указанной выше системе координат — системе центра масс.

Как пример такого соударения для конкретности можно представить себе тело A в виде ящика, наполненного песком, и тело B в виде пули, выпущенной из револьвера и зарывающейся в песке, которым наполнен такой ящик.

В данном случае внутренняя энергия — это тепловая энергия: ящик с песком нагревается. В системе центра масс кинетическая энергия образовавшейся системы (из ящика с песком и револьверной пули в нем) в конечном состоянии равна нулю.

Можно представить себе различные механизмы «слипания» тел при их соударении.

В дальнейшем, не вводя каких-либо предположений о механизме неупругого удара, в результате которого происходит «слипание» двух неупруго сталкивающихся тел, рассмотрим релятивистское уравнение баланса количества движения, что приведет нас в общем виде к соотношению между приращением внутренней энергии (любого вида) некоторой системы тел и приращением массы покоя этой системы тел.

Обозначим массы покоя двух неупруго сталкивающихся тел (A и B) соответственно m_1 и m_2.

Если противоположно направленные скорости их в системе центра масс равны соответственно β_1 и β_2, то, поскольку полное количество движения в системе центра масс по определению равно нулю, согласно (П.41) должно иметь место равенство

$$\frac{m_1\beta_1 c}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{m_2\beta_2 c}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\,. \qquad \text{(П.78)}$$

Положим, что масса покоя тела C, образовавшегося в результате «слипания» тел A и B после их столкновения, равна M_0.

Тело C неподвижно в системе центра масс. Если скорость системы центра масс относительно некоторой другой, произвольно выбранной инерциальной системы (X, T) есть β_C, то тело C после соударения (A и B) движется в этой последней системе координат со скоростью β_C. Количество движения тела C в указанной системе координат (X, T) равно, следовательно,

$$I_C = \frac{M_0 \beta_C c}{\sqrt{1-\beta_C^2}}. \tag{П.79}$$

Определим, чему равно количество движения (I_A и I_B) соответственно тел A и B в той же системе координат (X, T) до их столкновения.

Скорости β_A и β_B (в системе X, T) согласно теореме сложения скоростей (I.41) равны [1]

$$\beta_A = \frac{\beta_C + \beta_1}{1 + \beta_1 \beta_C} \tag{П.80}$$

и

$$\beta_B = \frac{\beta_C - \beta_2}{1 - \beta_2 \beta_C}. \tag{П.81}$$

Исходя из (П.80) и (П.81), вычислим I_A и I_B. Легко получить следующие выражения:

$$I_A = \frac{m_1 \dfrac{\beta_C + \beta_1}{1 + \beta_C \beta_1} c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\beta_C + \beta_1}{1 + \beta_C \beta_1}\right)^2}} = \frac{m_1 (\beta_C + \beta_1)\, c}{\sqrt{1-\beta_C^2}\, \sqrt{1-\beta_1^2}} \tag{П.82}$$

и

$$I_B = \frac{m_2 (\beta_C - \beta_2)\, c}{\sqrt{1-\beta_C^2}\, \sqrt{1-\beta_2^2}}. \tag{П.83}$$

Но в силу закона сохранения количества движения

$$I_C = I_A + I_B$$

и согласно (П.78), (П.79), (П.82) и (П.83)

$$\frac{M_0 \beta_C c}{\sqrt{1-\beta_C^2}} = \frac{\beta_C c}{\sqrt{1-\beta_C^2}} \left(\frac{m_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}\right).$$

Следовательно,

$$M_0 = \frac{m_1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{1-\beta_2^2}}. \tag{П.84}$$

---

[1] Мы уславливаемся считать, что направления скоростей β_1 и β_C одинаковы.

Соотношение (П.84) есть релятивистское уравнение сохранения масс, написанное в применении к системе центра масс.

Если обозначить E_A (кин.) и E_B (кин.) соответственно кинетическую энергию тел A и B *в системе центра* масс, то, принимая во внимание (П.77), (П.84) можно переписать в виде

$$M_0c^2 = (m_1 + m_2)c^2 + E_A \text{ (кин.)} + E_B \text{ (кин.)}. \qquad (\text{П}.85)$$

Уравнение (П.85) показывает, что масса покоя M_0 тела C больше суммы $(m_1 + m_2)$ масс покоя сталкивающихся тел A и B. Далее, поскольку в соответствии с предположением о полной неупругости удара в системе центра масс кинетическая энергия соударяющихся тел A и B превращается во внутреннюю энергию тела C, имеет место равенство

$$E_A \text{ (кин.)} + E_B \text{ (кин.)} = \Delta E,$$

где ΔE — приращение внутренней энергии взаимодействующих тел. Уравнение (П.85) приводит, следовательно, к соотношению

$$\Delta M_0 = \frac{\Delta E}{c^2}, \qquad (\text{П}.86)$$

где

$$\Delta M_0 = M_0 - (m_1 + m_2).$$

В зависимости от механизма неупругого удара «внутренней энергией» в приведенном выше выводе может быть энергия любого вида. Соотношение (П.86) должно быть, следовательно, справедливо вообще: приращению ΔE энергии (любого вида) какой-либо физической системы соответствует приращение ее массы, равное $\Delta E/c^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Arzeliès. Relativité généralisée, gravitation. Gauthiers — Villars, Paris, 1961.
2. Дж. Томсон. Предвидимое будущее. М., ИЛ, 1958.
3. H. Dingle. Nature, 1956, **177**, 782; **178**, 630; Mc Crea. Nature, 1956, **177**, 784; **178**, 681; H. Dingle. Proc. Phys. Soc. (A), 1956, **69**, 925; Nature, 1957, **179**, 865.
4. A. Einstein. Annalen d. Phys., 1905, **17**, 891; Naturw., 1918, **6**, 697.
5. F. Crawford. Nature, 1957, **179**, 35, 1071.
6. P. Langevin. Scientia, 1911, **10**, 31.
7. Межзвездная связь. Сборник. М., Изд-во «Мир», 1965.
8. М. Борн. УФН, 1959, **69**, 105.
9. H. Bondi. Discovery, 1957, **18**, 505.
10. Л. И. Мандельштам. Собрание трудов, т. V. М., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 229.
11. J. Synge. Relativity: special theory. North — Holland publish. company, Amst., 1956.
12. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., Физматгиз, 1961.
13. C. Møller. The theory of relativity, VIII. Oxford, Clarend. Press, 1957.
14. C. Møller. Dan. Mat. Fys. Medd., 1945, **20**, N 19.
15. M. Born, M. Biem. Proc. Acad. Sci. Amst., 1958, **61**, 110.
16. A. Einstein. The meaning of relativity. Princ. Univ. Press, 1946, p. 196.
17. УФН, 1960, **72**, вып. 4, 674.
18. Н. Басов, О. Крохин, А. Ораевский, Г. Страховский, Б. Чихачев. УФН, 1961, **75**, 3.
19. C. Møller. Nuovo cimento, 1957, **6**, suppl. 1, 381.
20. H. Hay, I. Schiffer, T. Granshaw, P. Egelstaff. Phys. Rev. Letters, 1960, **4**, 165.
21. C. Møller. Dan. Mat. Medd., 1955, **30**, N 10, 1.
22. R. Tolman. Relativity, thermodynamics and cosmology. Oxford, Clarend. Press, 1934.
23. J. Crampin, W. McCrea, D. McNally. Proc. Roy. Soc. (A), 1959, **252**, 156.
24. C. Møller. Amer. J. Phys., 1959, **27**, 491.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ СКОБЕЛЬЦЫН

Парадокс близнецов в теории относительности

Редактор *Б. Л. Лившиц*. Художник *А. Я. Михайлов*
Технические редакторы *И. Г. Дорохина и С. Г. Тихомирова*

Сдано в набор 8/VI 1966 г. Подписано к печати 26/IX 1966 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Печ. л. 12. Уч. изд. л. 11,4 Тираж 21000 экз. Тип. зак. 1021.
Изд. № 1174 Т—13818
Цена 95 к. для тиража 3000 в перепл.

Издательство «Наука», Москва. Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
44	ф-ла (I 41)	$\ldots\ldots \beta_1 \frac{dx_b}{c}$	$\ldots\ldots \beta_1 \frac{dx_b'}{c}$
44	16 сн.	$\mathbf{v}$	v
69	ʻʼ сн.	две	два
113	ф-ла (IV.50)	$\ldots\ldots[1 - \mathrm{th}^2\,\theta(t)]^2\ldots\ldots$	$\ldots\ldots[1 - \mathrm{th}^2\,\theta(t)]\ldots\ldots$
124	3 сн.	Расстояние $x_0'\ldots$	Расстояние $x_0\ldots$
133	ф-ла (IV.106)	$\ldots\ldots \frac{gx}{c^2}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c}$	$\ldots\ldots \frac{gx}{c}\,\mathrm{sh}\,\frac{gt}{c}$
152	17 св.	(IV.7)	(IV.17)

Д. В. Скобельцын