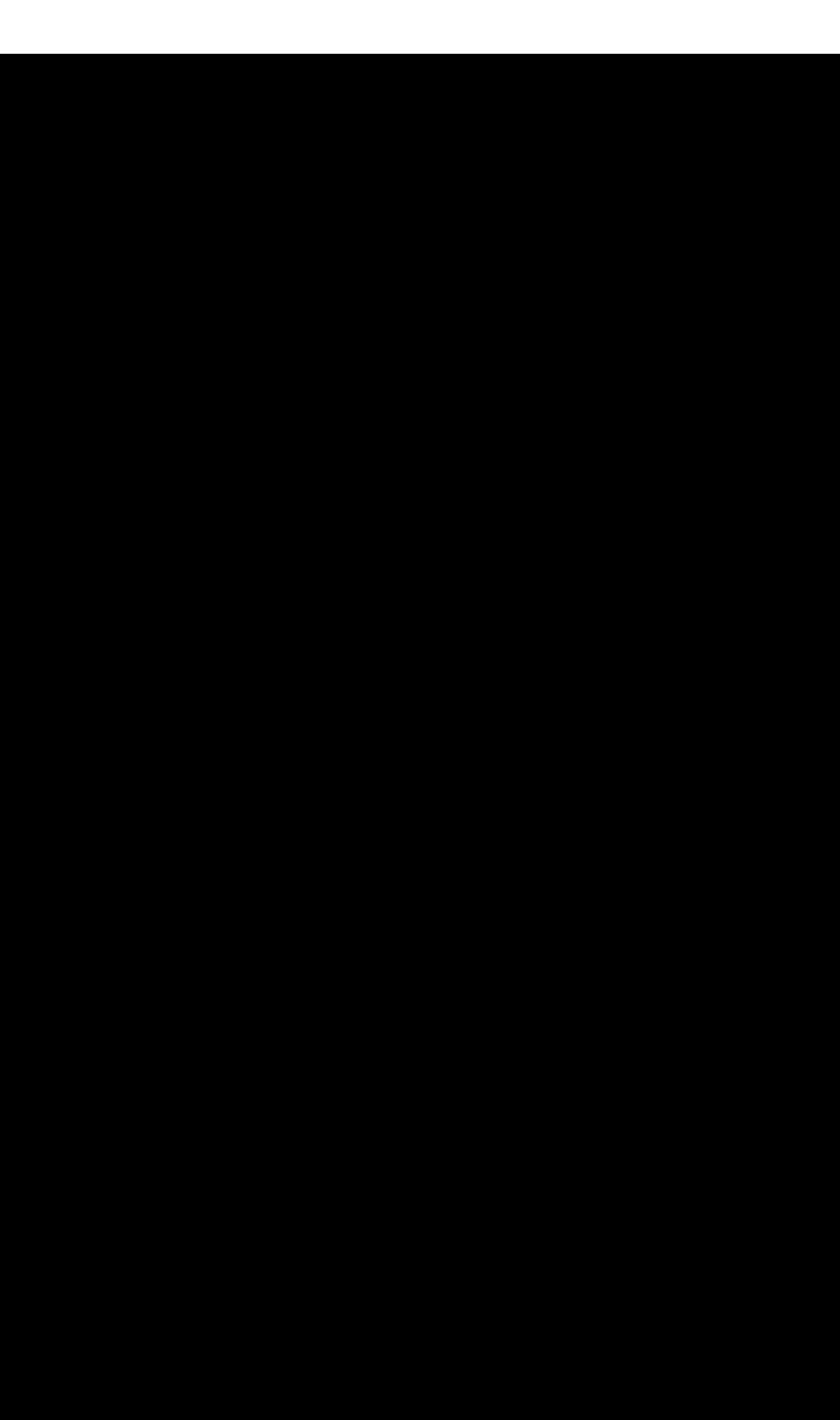


КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ *и* ГИДРОДИНАМИКА

ТРУДЫ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
ИМ. П.Н. ЛЕБЕДЕВА АКАДЕМИИ НАУК СССР ТОМ 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»





ТРУДЫ ФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. П. Н. ЛЕБЕДЕВА
Т о м XXIX

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И ГИДРОДИНАМИКА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ
СТАТИСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
И ГИДРОДИНАМИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Ответственный редактор
академик *Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Еще десять лет тому назад опубликование сборника работ, в котором были бы объединены исследования по квантовой теории поля с исследованиями по гидродинамике и статистической физике, было невозможно. В настоящее же время методы квантовой теории поля естественно проникают в гидродинамику релятивистских систем и в статистические проблемы. Появляются и работы, в которых методы квантовой теории поля применяются к исследованию турбулентности в нерелятивистской сплошной среде.

В настоящем томе публикуются работы сотрудников Теоретического отдела ФИАН, выполненные в разное время и связанные с широким кругом проблем гидродинамики, квантовой статистики и квантовой теории полей.

Основу первой части составляет работа Е. С. Фрадкина «Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике», в которой развит общий метод трактовки квантовых систем, как релятивистских, так и нерелятивистских, и, в частности, термодинамических проблем сплошной среды с учетом ее квантовых свойств. Частному случаю одной из таких проблем посвящена работа В. Б. Вологодского.

Другой пример слияния гидродинамики с релятивистской квантовой теорией поля дает нам гидродинамическая теория множественной генерации мезонов и нуклонов при столкновении сверхбыстрых нуклонов в космических лучах. Развитая первоначально Л. Д. Ландау как феноменологическая релятивистская неквантовая теория, она в последние годы благодаря работам ряда японских теоретиков, с одной стороны, и советского теоретика Г. А. Милехина, с другой, все более и более сближается с квантовой теорией поля, представляющей собой, так сказать, микроскопическую теорию этого процесса. Оказывается, что сгусток сильно взаимодействующих частиц в объеме, много меньшем, чем объем покоящегося нуклона, нужно трактовать, как релятивистскую мезоно-нуклонную плазму. Проблемы гидродинамической теории множественного рождения частиц освещены в статьях А. А. Емельянова и Е. Л. Фейнберга.

Во второй части собраны работы по нерелятивистской гидродинамике (И. Е. Тамма, С. З. Беленького и Е. С. Фрадкина), не связанные непо-

средственно с квантовой теорией поля. Эти исследования ряда конкретных проблем нашли уже в прошлые годы прямое применение. Представляется, что они и в настоящее время не утратили актуальности.

Как уже упоминалось, вопросы релятивистской гидродинамики и ее связей с квантовой теорией поля были в значительной мере прояснены работами безвременно умершего молодого теоретика, сотрудника Теоретического отдела ФИАН Г. А. Милехина. Его памяти и посвящается этот сборник.

Часть I

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ
И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Часть II

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

С. З. БЕЛЕНЬКИЙ, **Е. С. ФРАДКИН**

ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамическое исследование устойчивости (по отношению к бесконечно малым колебаниям) границы раздела двух сред разной плотности или более общей задачи, когда слой вещества с плотностью ρ_1 погружен в более плотное вещество ρ_2 , показывает, что под влиянием градиента давления становится неустойчивой та поверхность раздела двух сред, на которой ускорение направлено от более плотного вещества к менее плотному. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости в поле тяжести поверхности раздела двух жидкостей, из которых сверху налита более тяжелая жидкость. В результате неустойчивости поверхность раздела разрушится и начнется турбулентное перемешивание обоих веществ. Вместо поверхности раздела мы будем иметь область, заполненную смесью обоих веществ, причем плотность этой смеси будет меняться внутри области от значения ρ_1 на одной границе до значения ρ_2 на другой. С течением времени эта область, которую мы назовем «областью турбулентного перемешивания», будет расти в обе стороны от поверхности раздела и, наконец, в случае слоя дойдет до второй поверхности раздела. Если эта поверхность устойчива, то оно и станет одной из границ области перемешивания, и в дальнейшем область перемешивания будет распространяться в основном только в противоположную сторону. Плотность смеси в ней с течением времени будет все больше приближаться к плотности окружающей среды. Такова качественная картина перемешивания посредством турбулентной диффузии, теоретическому рассмотрению которой посвящена настоящая работа.

В § 1 устанавливаются уравнения для турбулентной диффузии в наиболее общем случае (ограниченном лишь условием, что температура в области перемешивания слабо зависит от координат — «квазинизотермичность»).

Уравнения турбулентной диффузии составляются по аналогии с обычными гидродинамическими уравнениями диффузии. Необходимо, однако, дополнительное предположение, чтобы получить выражение для коэффициента турбулентной диффузии. В качестве такого предположения можно принять условие, чтобы диссипация энергии, вызванная диффу-

зией, была равна турбулентной диссипации энергии, выражение для которой, в соответствии с теорией, принимается равным $\rho v^3/l_t$, где ρ — плотность; v — турбулентная скорость; l_t — длина пути турбулентного перемешивания. Подчеркнем, что такое предположение можно применить не только к явлению турбулентной диффузии, но и к явлениям турбулентной вязкости, теплопроводности и т. д. В частности, на основе его может быть получено известное соотношение Прандтля, связывающее турбулентную скорость с градиентом «макроскопической» скорости.

В § 2 выводится упрощенная система уравнений диффузий, основанная на разделении чисто гидродинамической и диффузионной частей задачи. Именно: предполагается, что гидродинамическая часть задачи, при решении которой полностью пренебрегалось диффузией, разрешена.

Далее, из общих уравнений выводятся приближенные уравнения турбулентной диффузии, которые следует решать на «фоне заданной гидродинамики», т. е. при заданных распределениях скоростей и ускорений.

В формулы для турбулентной диффузии входит величина l_t , имеющая смысл «длины пути турбулентного перемешивания». Эта величина не может быть вычислена теоретически. По аналогии с уже исследованными задачами турбулентного движения — задачей о струе, смешивающейся с окружающей жидкостью, задачей о размыве края струи, о турбулентном следе за телом и т. д. — мы принимаем, что величина l_t пропорциональна ширине области перемешивания. Коэффициент пропорциональности должен быть определен на опыте. Обсуждению этого вопроса посвящен § 3.

В § 4 дается решение задачи турбулентного перемешивания двух разделенных сред разной плотности, а также в случае, когда плоский слой начальной толщины d_0 и плотности ρ_2^0 помещен в среду с большой плотностью ρ_1^0 . При решении предполагается, что гидродинамические ускорения зависят только от времени (по произвольному закону), а гидродинамическая скорость линейно зависит от координаты. При этих условиях задача решается полностью.

В начальной стадии процесса, которую можно рассматривать как перемешивание двух сред, отделенных поверхностью раздела, а также в конечной стадии, когда плотность смеси мало отличается от плотности окружающей среды, имеют место автомодельные режимы и получаются решения в аналитической форме.

В § 5 обсуждается влияние различных эффектов, не учтенных при решении задачи о диффузии.

§ 1. Основные положения теории турбулентной диффузии

Одним из плодотворных способов получения уравнений, описывающих развитое турбулентное движение, является метод аналогии с гидродинамической теорией жидкостей (газов) при наличии диффузионных, вязких, тепловых потоков. Суть этого метода заключается в следующем. Предполагается, что движение элементов турбулентного движения подобно беспорядочному движению молекул. Поэтому турбулентное движение

описывается обычными гидродинамическими уравнениями, с тем только отличием, что вместо молекулярных диффузионного, теплового и вязкого потоков в уравнения гидродинамики необходимо ввести соответствующие турбулентные потоки (в общем случае турбулентные потоки диффузии, тепла и вязкости).

В изотермическом случае ¹ эти потоки по аналогии с обычной теорией (см [1, § 13, 93]) могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{j} = -\rho D_t \frac{\nabla \mu}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p, T}}, \quad (1.1)$$

$$\Pi_{ik} = \rho \nu_t \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right\} + \rho \xi \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}, \quad (1.2)$$

где D_t — турбулентный коэффициент диффузии; ν_t — первый турбулентный коэффициент вязкости; ξ — второй коэффициент турбулентной вязкости (в дальнейшем мы всюду пренебрегаем «второй» вязкостью); \mathbf{j} — поток турбулентной диффузии; Π_{ik} — турбулентный тензор вязкости; μ — химический потенциал; ρ — плотность; c — концентрация одной из компонент смеси (более легкой).

Нас будет интересовать случай турбулентной диффузии; более общий случай мы рассмотрим в Дополнении 2. Прежде всего займемся случаем, когда вязкостью можно пренебречь.

Система уравнений, описывающих турбулентную диффузию — это обычные гидродинамические уравнения с наличием в уравнении для концентрации диффузионного турбулентного потока \mathbf{j} (см. [1.1]).

Аналогично кинетической теории коэффициент турбулентной диффузии D_t может быть из размерных соображений представлен в виде

$$D_t = l_t v, \quad (1.3)$$

где l_t — характерная турбулентная длина (некоторый аналог длины пробега в кинетической теории); v — некоторая характерная турбулентная скорость ².

Чтобы система уравнений могла быть решена, необходимо каким-то образом найти выражение для D_t . В случае молекулярной диффузии D находится посредством решения кинетического уравнения; в случае турбулентной диффузии необходимо найти принципиально иной подход для определения D_t . Можно поступить следующими двумя способами.

Первый способ основан на размерных соображениях и учитывает результаты исследования соответствующей задачи на устойчивость. Под соответствующей задачей на устойчивость мы понимаем исследования на устойчивость такого гидродинамического движения, которое вследствие неустойчивости переходит в интересующее нас турбулентное движение. Так, в результате исследования устойчивости одномерного гидродинамического движения было установлено, что если векторы ∇p (p —

¹ Здесь и в дальнейшем под изотермическим случаем понимается независимость температуры T от координат, т. е. $\nabla T = 0$, но T может меняться со временем

² Соотношение (1.3) можно рассматривать как определение v .

давление) и ∇p направлены в противоположные стороны, то движение неустойчиво, а частота нарастания возмущений равна [2]

$$\omega = i \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \frac{\partial p}{\partial z}}. \quad (1.4)$$

Вследствие неустойчивости в рассматриваемой области возникает турбулентное движение. Итак, сущность предполагаемого метода заключается в следующем. Предполагаем, что (характерная) пульсационная турбулентная скорость v определяется величинами ρ , p , $\frac{\partial \rho}{\partial z}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ и l_i . Составляем из этих величин величину размерности скорости. При этом, учитывая результаты исследования задачи об устойчивости [2], а именно, что упомянутые величины входят в комбинации

$$\frac{1}{\rho p} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (1.4a)$$

легко убедиться, что единственная величина размерности скорости, удовлетворяющая этим условиям:

$$l_i \sqrt{\frac{1}{\rho p} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)}. \quad (1.5)$$

Учтем еще, что из исследования задачи на устойчивость получается, что неустойчивость, а следовательно, и турбулентное движение возникают лишь в том случае, когда подкоренное выражение в (1.5) положительное, в противном случае ламинарное движение устойчиво и, следовательно, v должно равняться нулю. Итак, в результате получаем следующее выражение для v :

$$v = l_i \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{p} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \frac{\partial p}{\partial z}}. \quad (1.6)$$

Обобщая эти рассуждения на трехмерный случай, получим

$$v = l_i \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\rho} \left[\frac{\nabla p}{p} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \right] \nabla p}, \quad (1.6a)$$

где $\varepsilon = 1$, когда подкоренное выражение положительно, и $\varepsilon = 0$ в противном случае.

Отметим, что изложенный метод основан на предположении, что неустойчивость гидродинамического движения и возникающая вследствие этого турбулентность определяются одними и теми же факторами.

Второй метод более изящен. Он основан на использовании энергетических соображений. Сущность этого метода заключается в следующем. Используя гидродинамические уравнения (с добавленными турбулентными потоками) и термодинамические соотношения, находим обычным способом с помощью уравнения сохранения энергии выражение для диссипации энергии, обусловленной турбулентными потоками, в нашем случае турбулентной диффузией. С другой стороны, количество энергии, диссипируемое при турбулентном движении в единицу времени, может быть определено из соображений размерности. Эта величина равна

$$\int \frac{\rho v^3}{l_i} d^3 r = dx dy dz. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) справедливо для случая изотропной турбулентности, и использование его для нашей задачи является известным допущением (см. также Дополнение 1).

Приравнивая диссипативный поток энергии, полученной с помощью гидродинамических уравнений при наличии турбулентной диффузии, потоку энергии, даваемому формулой (1.7), можно найти выражение для пульсационной скорости v .

Чтобы показать это, обратимся к гидродинамическим уравнениям, включающим диффузию:

1) уравнение непрерывности для вещества

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.8)$$

2) уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla U; \quad (1.8a)$$

3) уравнение для концентрации

$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) c \right) = -\operatorname{div} \mathbf{j}; \quad (1.8b)$$

4) уравнение состояния

$$p = p(\rho, T, c), \quad (1.8в)$$

где $c = \frac{\rho_2}{\rho}$ — концентрация; ρ_2 — плотность легкой компоненты в смеси; p — давление; U — действующее внешнее потенциальное поле; ρ — плотность смеси.

Обычным образом, используя известные термодинамические соотношения с помощью системы уравнений (1.8), получим¹

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \rho U \right) = & -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \omega + U \right) \right] + \\ & + \rho T \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \rho \right\} + \mu \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (1.9) \end{aligned}$$

где S — энтропия; μ — химический потенциал смеси; ω — тепловая функция; ε — внутренняя энергия.

Из (1.9) в силу закона сохранения энергии следует

$$T \frac{\partial}{\partial t} \int \rho S d^3r = \int (\mathbf{j} \nabla \mu) d^3r. \quad (1.10)$$

Первая часть (1.10) дает полную диссипацию энергии, однако из этого выражения следует выделить только часть диссипации энергии, обусловленную чисто турбулентным движением. Это единственно интересующая нас часть получится, если вычесть из выражения (1.10) выражение для диссипации энергии, обусловленное просто смешением двух веществ при постоянном давлении.

¹ Здесь мы считаем, что U не зависит от времени и не включаем источники тепла. Нетрудно показать, что окончательные результаты для D_t и \mathbf{j} справедливы и в общем случае.

Таким образом, диссипация \mathcal{E}_t , обусловленная турбулентностью, равна

$$\mathcal{E}_t = - \int \mathbf{j} \left(\nabla \mu - \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p \nabla c \right) d^3 \mathbf{r} = - \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c (\mathbf{j} \nabla p) d^3 \mathbf{r}. \quad (1.11)$$

Согласно (1.1) имеем

$$\mathbf{j} = - \rho D_t \frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p \nabla c + \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \nabla p}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p}. \quad (1.12)$$

Можно показать (см. Дополнение 1), что второй член в соотношении (1.12) мал по сравнению с первым и, следовательно,

$$\mathbf{j} = - \rho D_t \nabla c. \quad (1.12a)$$

Приравнивая выражения для турбулентной диссипации (1.7) к (1.11) и учитывая (1.12a), получим

$$\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \rho D_t (\nabla p \nabla c) d^3 \mathbf{r} = \int \frac{\rho v^3}{l_t} d^3 \mathbf{r}. \quad (1.13)$$

Так как $D_t = l_t v$ [см. (1.3)], то из (1.13) следует

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \rho l_t v (\nabla p \nabla c) = \frac{\rho v^3}{l_t}. \quad (1.14)$$

Выражение для v , исходя из (1.14), может быть записано в виде

$$v = l_t \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c (\nabla p \nabla c)}, \quad (1.15)$$

где $\varepsilon = 1$, когда подкоренное выражение положительно, и $\varepsilon = 0$, когда оно отрицательно.

Учитывая известное соотношение термодинамики

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c = - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p, \text{ получим}$$

$$D_t = l_t^2 \varepsilon \sqrt{- \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p (\nabla p \nabla c)}; \quad (1.16)$$

$$\mathbf{j} = - \rho l_t^2 \varepsilon \sqrt{- \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p (\nabla p \nabla c)} \nabla c. \quad (1.16a)$$

Обратимся теперь к некоторым частным случаям, особо интересующим нас.

а) Случай, когда уравнение состояния имеет вид

$$p = T \sum_{i=1}^2 \rho_i \alpha_i = \alpha_1 \rho T \left[1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} c \right], \quad (1.17)$$

где α_i — постоянные, в частности, для газа $\alpha_1 = \frac{m_1 z_2}{m_2 z_1} \alpha_2$; T — температура; $m_1 z_1$ и $m_2 z_2$ — масса и заряд ионов тяжелого и легкого газов соответственно.

Из (1.17) следует

$$\nabla c = \frac{\left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} c \right)}{p} \nabla p - \frac{\left(1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} c \right)}{\rho} \nabla \rho. \quad (1.17a)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_p = - \frac{\rho}{1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} c}. \quad (1.176)$$

Из (1.17а), (1.176) и (1.15) следует

$$v = l_t \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\nabla p}{p} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\} \nabla p}. \quad (1.18)$$

Таким образом, вторым методом мы получили такое же выражение для v и, следовательно, для коэффициента D_t турбулентной диффузии (и потока), как и первым способом [см. (1.6а)].

Из (1.16), (1.16а) и (1.17), (1.17а) получаем, что во втором случае

$$D_t = l_t^2 \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{\nabla p}{p} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \nabla p}, \quad (1.18а)$$

$$\mathbf{j} = -\rho l_t^2 \varepsilon \sqrt{\left(\frac{\nabla p}{p} - \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \frac{\nabla p}{\rho}} \nabla c. \quad (1.18б)$$

б) В случае несжимаемого газа

$$\rho = \lambda \rho_2^{(0)} + (1 - \lambda) \rho_1^{(0)}, \quad (1.19)$$

где $\rho_2^{(0)}$ и $\rho_1^{(0)}$ — плотности легкой и тяжелой компонент до перемешивания; λ — объемная доля, занимаемая легким веществом (с плотностью $\rho_2^{(0)}$) в единице объема смеси. Для концентрации c в этом случае получим

$$c = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{\rho_2^{(0)} (\rho - \rho_1^{(0)})}{\rho (\rho_2^{(0)} - \rho_1^{(0)})}. \quad (1.19а)$$

Из (1.19а) найдем

$$\frac{\partial \rho}{\partial c} = \frac{\rho^2 (\rho_2^{(0)} - \rho_1^{(0)})}{\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}, \quad (1.19б)$$

$$\nabla c = \frac{\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)}}{\rho^2 (\rho_2^{(0)} - \rho_1^{(0)})} \nabla \rho \quad (1.19в)$$

Окончательно в этом случае имеем

$$v = l_t \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} (\nabla p \nabla \rho)}, \quad (1.20)$$

$$D_t = l_t^2 \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} (\nabla p \nabla \rho)}, \quad (1.20а)$$

$$\mathbf{j} = -\rho l_t^2 \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} (\nabla p \nabla \rho)} \nabla c \quad (1.20б)$$

Отметим, что формула (1.20) [а следовательно, (1.20) и (1.20б)] непосредственно получается из формулы (1.6а) или (1.18), если перейти к предельному случаю несжимаемых газов (жидкостей).

В заключение этого параграфа проиллюстрируем на примере идеальных газов смысл вычитаемого члена в (1.11), причем мы ограничимся здесь рассмотрением смеси двух газов.

Как показано в Дополнении 2, в этом случае

$$S = S_0(p, c) + S_1(c_1), \quad (1.21)$$

где

$$S_0(p, c) = -\left(\frac{z_2 c}{m_2} + \frac{z_1(1-c)}{m_1}\right) k \ln p; \quad (1.21a)$$

$$S_1(c_1) = -\frac{z_2 c}{m_2} \ln \frac{c + (1-c) \frac{m_2}{m_1}}{c} - \frac{z_1(1-c)}{m_1} \ln \left\{ \frac{\frac{m_1}{m_2} c + 1 - c}{1 - c} \right\}; \quad (1.21б)$$

k — постоянная Больцмана; m_1, m_2 — масса атомов тяжелой и легкой компонент смеси соответственно; S_0 — сумма энтропии идеальных газов; S_1 — добавочный член, возникающий в результате смешения при постоянном давлении. Этот добавочный член в энтропии вызывает диссипацию энергии, равную

$$T \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_1 S_1 d^3 r = T \int \rho_1 \frac{\partial S_1}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial t} + (v \nabla) c \right) d^3 r = -T \int \frac{\partial S_1}{\partial c} \operatorname{div} \mathbf{j} d^3 r. \quad (1.21в)$$

С другой стороны, согласно (Д.2—15) в этом случае

$$\mu = \mu_0(p) + \mu_1(c); \quad (1.22)$$

$$\mu_0(p) = \left(\frac{z_2}{m_2} - \frac{z_1}{m_1} \right) kT \ln p, \quad (1.22a)$$

$$\mu_1(c) = kT \left\{ \frac{z_2}{m_2} \ln \frac{c}{c + (1-c) \frac{m_2}{m_1}} - \frac{z_1}{m_1} \ln \frac{1-c}{(1-c) + \frac{m_1}{m_2} c} \right\}. \quad (1.22б)$$

Вычитаемый член в (1.11) есть

$$\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p (\mathbf{j} \nabla c) d^3 r = \int (\mathbf{j} \nabla \mu_1) d^3 r = - \int \mu_1 \operatorname{div} \mathbf{j} d^3 r. \quad (1.22в)$$

Легко убедиться, что

$$T \frac{\partial S_1}{\partial c} = \mu_1, \quad (1.23)$$

а поэтому, действительно, вычитаемый член в (1.11) соответствует диссипации энергии, обусловленной смешением двух газов при постоянном давлении [с учетом (1.23) легко убедиться, что (1.21в) равно (1.22в)].

§ 2. Приближенная система уравнений гидродинамики в области турбулентной диффузии

Полная система уравнений гидродинамики при наличии турбулентной диффузии записывается следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{dv}{\partial t} + (v \nabla) v = -\frac{\nabla p}{\rho}; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c v) = -\operatorname{div} \mathbf{j}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{j} = -\rho l_i^2 \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial c} \right)_p (\nabla c \nabla p)} \nabla c, \quad (2.4)$$

где мы принимаем дополнительно, что

$$l_t = \alpha L; \quad (2.5)$$

L — ширина области перемешивания, т. е. области, где происходит турбулентная диффузия (в дальнейшем мы точнее определим L). О значении коэффициента α будет сказано в следующем параграфе. Мы можем считать пока α постоянным. Значение этой величины не может быть получено теоретически, а должно быть определено экспериментально. К этим уравнениям следует добавить уравнение состояния

$$p = f(T, \rho, \rho_c). \quad (2.6)$$

Это уравнение запишется в виде

$$p = \alpha_1 T (1 + c) \rho + f_1(T),$$

где f_1 зависит только от температуры; α_1 — постоянная; в дальнейшем предполагается, что температура зависит только от времени, а не от координат. Строгое решение задачи сводится к решению уравнений (2.4) и (2.6), причем неизвестными величинами являются ρ , c , p , v , а T предполагается заданной функцией времени. В более общем случае к этой системе следует добавить еще уравнение сохранения энергии, позволяющее определить температуру.

Однако фактически турбулентное перемешивание захватывает относительно небольшой слой и, по-видимому, не оказывает заметного обратного влияния на гидродинамическую картину течения. Поэтому имеет смысл следующая постановка вопроса. Решение общей задачи разбивается на две части. Первая часть заключается в решении чисто гидродинамической задачи. При решении этой задачи полностью пренебрегаем диффузией и таким образом ограничиваемся решением обычной системы уравнений гидродинамики.

Вторая часть исследования состоит в рассмотрении диффузионного процесса, который мы считаем происходящим на фоне заданной гидродинамики и который сводится в основном к выравниванию плотностей и концентраций. В этом параграфе мы попытаемся установить диффузионные уравнения в области турбулентного перемешивания. При этом допустим, что гидродинамическая часть задачи уже решена. В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением одномерной задачи.

Обратимся к уравнению состояния вещества, которое удобно записать в виде

$$P = \frac{p - f_1(T)}{\alpha_1 T} = \rho(1 + c). \quad (2.7)$$

До перемешивания тяжелое и легкое вещества разделены и давление определяется в этом случае уравнением

$$P_0 = \frac{p_0 - f(T)}{\alpha_1 T} = \rho_1^{(0)} \quad (2.8)$$

для тяжелого вещества, а для легкого вещества

$$P_0 = n\rho_2^{(0)}, \quad (2.8a)$$

где $n = \frac{m_1 z_2}{m_2 z_1}$.

На границе раздела в силу равенства давлений $\rho_1^{(0)} = n\rho_2^{(0)}$. Плотности $\rho_1^{(0)}$ и $\rho_2^{(0)}$ удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_0 v_0)}{\partial z} = 0, \quad (2.9)$$

где v_0 — скорость, полученная при решении гидродинамической задачи, т. е. до перемешивания.

Отметим, что в силу соотношений (2.8) и (2.8a) величина P_0 тоже удовлетворяет уравнению типа (2.9):

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial (P_0 v_0)}{\partial z} = 0.$$

При рассмотрении гидродинамической части задачи, когда мы пренебрегаем диффузией, величины ρ и c оказываются разрывными в силу наличия резкой границы между двумя веществами, поэтому влияние диффузии главным образом должно сказываться на изменении уравнений непрерывности и концентрации. Что касается величины P , соответствующей давлению, то она является непрерывной уже в гидродинамической части задачи, и влияние потока, возникающего вследствие турбулентного перемешивания, на изменение P должно быть незначительным. Мы пренебрегаем этим влиянием и будем считать, что для P справедливо то же уравнение, что и для P_0 , т. е.

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (P v_0)}{\partial z} = 0. \quad (2.10)$$

Используя (2.1), (2.3) и (2.7), получим, с другой стороны, следующее уравнение для P :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial (Pv)}{\partial z} + \frac{\partial j}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Сравнивая (2.10) с (2.11), получим

$$Pv_0 = Pv + j, \quad (2.12)$$

т. е.

$$v = v_0 - \frac{j}{P}. \quad (2.13)$$

Для одномерной задачи $j = -D_t \rho \frac{\partial c}{\partial z}$ и, следовательно,

$$v = v_0 + \frac{D_t}{1+c} \frac{\partial c}{\partial z}. \quad (2.14)$$

Учитывая (1.18), (1.17), (2.1), (2.2), получаем в случае, когда $\alpha_2 = n\alpha_1$, следующую приближенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_0) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[D_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\rho}{P} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right], \\ \frac{\partial (\rho c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho c v_0) &= -\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{c D_t}{1+c} \frac{\partial c}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$D_t = l_t^2 \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) \frac{\partial p}{\partial z}}. \quad (2.16)$$

Если можно пренебречь изменением p по сравнению с изменениями ρ , то эта система уравнений значительно упрощается. В этом случае из (2.7) имеем

$$\frac{\partial c}{\partial z} = \left(\frac{\partial c}{\partial \rho} \right)_P \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \frac{1 + (n-1) c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}; \quad (2.17)$$

$$v = v_0 + \frac{D_t}{1 + (n-1) c} \frac{\partial c}{\partial z} = v_0 - D_t \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}; \quad (2.18)$$

$$\rho c = P - \rho \approx P_0 - \rho. \quad (2.19)$$

Надобность в решении уравнения (2.16) отпадает, а уравнение (2.15) сводится при этом к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_t \frac{\partial \rho}{\partial z} \right). \quad (2.20)$$

$$D_t = l_t^2 \varepsilon \sqrt{- \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}}. \quad (2.20a)$$

Если v_0 равно нулю или постоянно, уравнение (2.20) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial z} \right). \quad (2.21)$$

В дальнейших расчетах мы полагаем, что величина g (ускорение) остается неизменной в процессе перемешивания. Заметим, что соотношение (2.10) не противоречит этому предположению, так как оно связывает производные $\frac{\partial P}{\partial t}$ и $\frac{\partial P}{\partial z}$, но оставляет свободу для выборов производной $\frac{\partial P}{\partial z}$, определяющей ускорение.

В заключение заметим, что случай, когда исследуемые вещества несжимаемые, может быть рассмотрен более простым способом. В самом деле, в этом случае, согласно (1.19), существует однозначная связь между концентрацией c и плотностью ρ . Поэтому уравнения (2.1) и (2.3) можно преобразовать к виду (здесь рассмотрение проведено в общем случае трехмерной задачи):

$$\frac{\partial \rho}{\partial c} \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) c \right\} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.22)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) c \right\} = - \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и (2.23) следует, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c} \operatorname{div} \mathbf{j}. \quad (2.24)$$

Так как $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c}$ [согласно (1.18б)] не зависит от координат, получим из (2.24)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c} \mathbf{j}, \quad (2.25)$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{j} = - \rho l_t^2 \varepsilon \sqrt{- \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \nabla p \nabla c}.$$

Нетрудно убедиться из предельного перехода к $j = 0$, что v_0 есть гидродинамическая скорость до перемешивания. Согласно (2.25), уравнения непрерывности и концентрации для несжимаемых веществ принимают вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_0) = \operatorname{div} \left\{ l_i^2 \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \rho} \nabla \rho \right\}; \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial (\rho c)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c \mathbf{v}_0) = \operatorname{div} \left\{ l_i^2 \varepsilon \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \rho} \nabla (\rho c) \right\}. \quad (2.27)$$

Заметим, что, учитывая соотношение (1.18), достаточно найти лишь одну из переменных ρ или c .

§ 3. О длине пути турбулентного перемешивания

В уравнение турбулентной диффузии входит величина, которая до сих пор еще не была нами определена. Это — длина пути турбулентного перемешивания l_t . В настоящее время не существует теории, которая позволила бы вычислить эту величину. Поэтому для определения ее мы будем исходить из аналогии с уже решенными, теоретически проверенными на опыте турбулентными задачами. В ряде исследованных случаев (в случае струи, смешивающейся с окружающей неподвижной жидкостью, в случае размыва края параллельной струи, в случае турбулентного следа и т. д.) длина пути турбулентного перемешивания оказывается пропорциональной ширине области, в которой происходит турбулентное движение. Следует заметить, что «ширина области» является условной величиной. Мы будем понимать под «шириной области» отрезок, равный разности ординат точек, в которых турбулентная скорость обращается в нуль. Примем в качестве основного положения, что в рассматриваемых нами случаях турбулентной диффузии длина перемешивания пропорциональна ширине области, т. е. имеет место соотношение

$$l_t = \alpha L. \quad (3.1)$$

Это предположение можно было бы считать достаточно обоснованным,

Т а б л и ц а 1

Рассматриваемая задача	Кем проведен эксперимент	Значение коэффициента	Источник
Разрыв края параллельной струи	Измерение в геттингенской лаборатории	0,109	см. [4,5]
	Опыты ЦАГИ	0,1	см. [6]
	Опыты Рудена	0,116	см. [7]
Плоская струя	Измерения Фермана	0,06	см. [8,5]
	Измерения Туркуса	0,0625	см. [9,6]
	Измерения Проскуры	0,072	см. [10,6]
Турбулентный след за телом	Измерения Шлихтинга	0,146	см. [11,5]

если бы величина α была одинакова для всех уже исследованных задач. К сожалению, это не имеет места. Мы приводим в табл. 1 данные о значении α , получаемые на основании различных опытов, связанных с плоскими задачами. При вычислении коэффициента α было принято во внимание следующее обстоятельство. В опытах, о которых идет речь, исследовался перенос количества движения, нас интересует перенос вещества. Как показывают эксперименты Фееджа и Фоккера, предпринятые по предположению Тейлора (см. [3]) коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии примерно в 2 раза больше, чем коэффициент турбулентной вязкости; так как эти коэффициенты пропорциональны квадрату длины перемешивания, то это означает, что длина перемешивания в случае турбулентной диффузии приблизительно в 1,4 раза больше, чем в случае турбулентной вязкости. Поэтому получающиеся на основании опытных данных значения коэффициента α умножались на 1,4.

Из табл. 1 видно, что α различно для различных задач. Поэтому непосредственное использование уже имеющихся данных о коэффициенте α для интересующих нас задач турбулентной диффузии не представляет возможным или может быть сделано в качестве весьма грубого приближения. В дальнейшем изложении мы будем использовать соотношение (3.1), оставляя значение α неопределенным.

§ 4. Решение уравнения турбулентной диффузии в одномерной задаче

Здесь мы рассмотрим решение одномерного уравнения турбулентной диффузии в простейших случаях:

- 1) перемешивание двух сред, разделенных поверхностью раздела;
- 2) перемешивание в случае, когда слой легкого вещества находится в более тяжелой среде.

Поскольку первая задача является частным случаем второй задачи (точнее, совпадает с начальной стадией второй задачи; см. ниже), то ограничимся рассмотрением только второй задачи.

Итак, рассмотрим одномерное уравнение турбулентной диффузии

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_0) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho l_t^2 \varepsilon \sqrt{\frac{\nabla p}{\rho} \left\{ \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla p'}{\rho} \right\}} \left(\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{\nabla p'}{\rho} \right) \right\}, \quad (4.1)$$

здесь $\nabla = \partial / \partial z$.

Перейдем к другим переменным, положив

$$\rho = P_0 \Phi(\tau, y); \quad y = \frac{z}{d(t)}; \quad d\tau = \frac{l_t^2 g^{1/2}}{d^{3/2}} dt; \quad g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4.2)$$

$$P_0 = \rho_1^{(0)}(z, t) + n \rho_2^{(0)}(z, t), \quad (4.2a)$$

где $\rho_1^{(0)}$, $\rho_2^{(0)}$ — плотность тяжелого и легкого вещества до перемешивания, вообще говоря, зависящая от координат z и t ; n — отношение плотностей $\rho_1^{(0)}$ и $\rho_2^{(0)}$ на границе легкого слоя; d — некоторая функция от t .

При решении задачи считается, что g остается таким же, каким было при пренебрежении турбулентной диффузией (см. § 2). То же самое

относится и к v_0 . Напомним, что мы решаем в данном случае проблему турбулентной диффузии на фоне заданной гидродинамики. В дальнейшем мы будем также считать, что g не зависит от z , т. е. является величиной, усредненной по области турбулентной диффузии. При этом для P_0 справедливо, следовательно, уравнение

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(P_0 v_0) = 0, \quad (4.3)$$

где v_0 — гидродинамическая скорость до перемешивания. В дальнейшем предполагается, что P_0 зависит от координат слабо, т. е.

$$\frac{\partial P_0}{\partial z} < \frac{\partial P_0}{\partial t} \frac{1}{v_0}; \quad \frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial z} < \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4.4)$$

В этом случае

$$v_0 \approx \frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial t} z. \quad (4.5)$$

Это означает, что плотности легкого и тяжелого вещества при пренебрежении диффузией зависят только от t и притом одинаковым образом.

Уравнение (4.1), учитывая (4.3), (4.5), принимает вид

$$-\frac{1}{\partial P_0} \frac{\partial P_0}{\partial t} z \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{z}{d^2} \frac{\partial}{\partial t} d(t) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{l_1^2 g^{1/2}}{d^{3/2}} = \frac{g^{1/2} l_1}{d^{3/2}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{3/2} \frac{1}{\varphi^{1/2}} \right]. \quad (4.6)$$

Наложим на d условие

$$\frac{1}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial t} = -\frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial t} d(t). \quad (4.7)$$

Решив (4.7), получим

$$P_0 d = \text{const}. \quad (4.8)$$

Соотношение (4.8) позволяет выяснить смысл $d(t)$. Приняв значение const равным произведению массы легкого вещества на n , видим, что $d(t)$ есть не что иное, как ширина слоя, получающаяся в результате решения гидродинамической задачи при пренебрежении перемешиванием.

Соотношение (4.7) дает изменение d со временем. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\varphi^{1/2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^{3/2} \right] \quad (4.9)$$

с начальными условиями ¹

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad -1 \leq y \leq 0, \\ \varphi &= 1 \quad \text{при} \quad y \leq -1 \quad \text{и} \quad y > 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Разобьем исследование процесса перемешивания на следующие стадии:

1. Начальную стадию процесса турбулентного перемешивания можно рассматривать как перемешивание двух сред, разделенных поверхностью раздела. Оно описывается автомодельным решением

$$\varphi = \varphi \left(\frac{y}{a\tau^s} \right). \quad (4.11)$$

¹ Слой легкого вещества расположен между координатами $z = -d$ и $z = 0$

При этом область перемешивания заключена между невозмущенными областями, характеризуемыми слева плотностью $\varphi = \frac{1}{n}$ и справа — плотностью $\varphi = 1$. Когда левый фронт подойдет к границе легкого слоя $y = -1$, т. е. охватит весь легкий слой, начальная стадия, которая описывается решением (4.11), заканчивается.

Подставляя (4.11) в (4.9), получаем

$$-\frac{s\eta}{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{(a\tau^s)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\varphi^{1/2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^{3/2} \right), \quad (4.12)$$

где

$$\eta = \frac{y}{a\tau^s}.$$

Из условия существования автомодельного решения следует:

$$s = \frac{2}{5}, \quad a = 5^{3/5}.$$

При этом уравнение для φ приводится к виду

$$-2\eta\varphi' = \left[\varphi'^{3/2} \frac{1}{\varphi^{1/2}} \right]' \quad (4.13)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta_1) &= 1 \\ \varphi'(\eta_1) &= \varphi'(-\eta_2) = 0 \\ \varphi(-\eta_2) &= \frac{1}{n} \end{aligned} \right\}, \quad (4.13a)$$

где

$$\eta = \frac{y}{(5\tau)^{2/5}}, \quad (4.13b)$$

штрих означает дифференцирование по η ; $\eta = \eta_1$ — правый фронт области перемещения; $\eta = -\eta_2$ — левый фронт области перемещения.

Применяя подстановку

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = x^2, \quad (4.14)$$

получим из (4.13) уравнение

$$-2\eta = 3 \frac{dx}{d\eta} + x^3. \quad (4.15)$$

При интегрировании уравнения (4.15) следует принять во внимание граничные условия (4.13a), которые приводят к следующим соотношениям для функции $x(\eta)$:

$$x(\eta_1) = x(-\eta_2) = 0, \quad (4.16)$$

$$\int_{-\eta_2}^{\eta_1} x^2 d\eta = \ln \frac{\varphi(\eta_1)}{\varphi(-\eta_2)} = \ln n = \ln \frac{\rho_1^{(0)}(0)}{\rho_2^{(0)}(0)},$$

где $\rho_n^{(0)}(0)$ — значение $\rho_n(0)$ на границе слоя (т. е. при $z = 0$).

Уравнение (4.15) легко решается численно (рис. 1 и 2), но в достаточно удовлетворительном приближении можно его решить и аналитически. Так, пренебрегая членом x^3 и учитывая (4.16), получим

$$x(\eta) = \frac{1}{3} (\eta_0^2 - \eta^2). \quad (4.17)$$

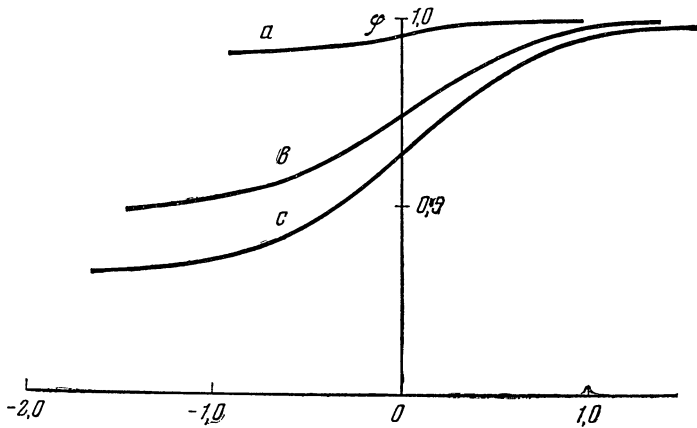


Рис 1. Решение уравнения для φ при $\tau \leq \frac{0,0608}{\left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/2}}$

$$a - \rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 1,09; \quad b - \rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 2,01, \quad c - \rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 3,04$$

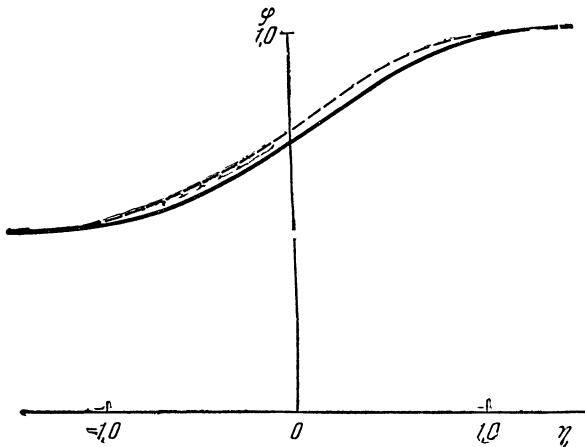


Рис 2. Решение уравнения для φ при $\rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 2$
Сплошная кривая—численное решение; штриховая—по формуле (4.25)

В этом приближении $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$,

$$\int_{-\eta_0}^{\eta_0} x^2(\eta) d\eta = \frac{16}{15,9} \eta_0^5 = \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}},$$

откуда

$$\eta_0 = \left(\frac{15,9}{16} \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right)^{1/5} = 1,532 \left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right)^{1/5}, \quad (4.18)$$

$$\varphi = \exp \left\{ -\frac{1}{9} \int_{\eta}^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2) d\eta \right\} = \exp \left\{ -\frac{\eta_0^5}{9} \left[\frac{8}{15} - \frac{\eta}{\eta_0} + \frac{2}{3} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^5 \right] \right\}. \quad (4.19)$$

Ширина области перемешивания L (в переменных η область перемешивания ограничена справа значением $\eta = \eta_1$, а слева — значением $\eta = -\eta_2$; в нашем приближении, как указывалось, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_0$) при этом равна:

$$L = 2\eta_0 (5\tau)^{2/5} d = 3,064 (5\tau)^{2/5} \left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right)^{1/5} d. \quad (4.20)$$

Воспользуемся соотношением (4.2) и выразим τ как функцию времени t :

$$d\tau = \frac{l_1^2 g^{1/2}}{d^{5/2}} dt = \frac{\alpha^2 L^2 g^{1/2}}{d^{5/2}} dt = \frac{4\eta_0 g^{1/2} (5\tau)^{2/5}}{d^{1/2}} dt. \quad (4.21)$$

Интегрируя (4.21), получим

$$(5\tau)^{1/5} = c_0 \sqrt{L}, \quad (4.22)$$

где

$$c_0 = 4\alpha^2 \eta_0^2, \quad \sqrt{L} = \int_0^t \frac{g^{1/2} dt}{d^{1/2}}. \quad (4.23)$$

Окончательно из (4.19) и (4.20) получим

$$L = 32\alpha^4 L d \eta_0^5 = 270 \alpha^4 \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} L d, \quad (4.24)$$

$$\rho = P_0 \exp \left\{ -\frac{1}{9} \eta_0^5 \left[\frac{8}{15} + \frac{1}{3} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^3 - \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^5 \right] \right\}. \quad (4.25)$$

Для оценки законности пренебрежения членом x^3 в уравнении (4.15) сделаем следующее. Оценим среднее значение величины x^3 , причем усреднение проведем по области перемешивания:

$$\overline{x^3} = \frac{1}{2\eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} x^3 d\eta = \frac{1}{2\eta_0} \frac{1}{27} \int (\eta_0^2 - \eta^2)^3 d\eta = \frac{13}{30 \cdot 27} \eta_0^6.$$

Сравним эту величину со средним значением оставляемого нами члена 2η :

$$2\overline{\eta} = \frac{1}{\eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \eta d\eta = \eta_0.$$

Чтобы сделанное пренебрежение было справедливо, очевидно, должно иметь место неравенство

$$\frac{\overline{x^3}}{2\eta} = \frac{1}{8} \frac{\ln \rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \ll 1. \quad (4.26)$$

Отсюда следует, что для не очень больших отношений плотностей (вплоть до $\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \approx 4$) относительная погрешность приближенного решения мала. Более точную оценку погрешности приближенного решения можно получить из табл. 2 (α принята равной 0,133).

Таблица 2

$\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}$	$\frac{L_{\text{числ}}}{\alpha^4 L d}$	$\frac{L_{1,4,24}}{\alpha^4 L d}$	$\frac{L_{\text{числ}} - L_1}{L_{\text{числ}} \%}$
1,09	23,44	23,27	0,7
2	189,4	187,1	1,2
3,4	305	300,2	1,7

Приведем здесь значения некоторых величин, полученных в результате численного решения уравнения (4.15) в частном случае $n = \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2$,

а именно:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 = 1,357, \quad \eta_2 = 1,497; \quad \tau = \frac{1}{5} (8,15 \alpha^2 \sqrt{L})^5; \\ L = 5,433 \tau^{3/5} d = 189 L d \alpha^4; \quad \int (1 - \varphi)^2 dy = 0,295. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Эти значения будут использованы в § 5. Проведенное выше рассмотрение и полученные решения (4.11), (4.20), (4.24), (4.25), (4.27) для φ , L и ρ полностью решают задачу о перемешивании двух сред, разделенных поверхностью раздела. Действительно, этот случай соответствует пределу $d \rightarrow \infty$. Из (4.23) при этом получим $\sqrt{Ld} = \int_0^t g^{1/2} dt$ и формула (4.24)

в этом случае приобретает вид

$$L = 270 \alpha^4 \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \left(\int_0^t g^{1/2} dt \right)^2. \quad (4.24a)$$

Что же касается задачи о перемешивании слоя легкого вещества, находящегося в более тяжелой среде, то проведенное рассмотрение справедливо лишь для начальной стадии перемешивания, пока $L \leq d$ (и $\tau \leq \tau_1$).

2. Начиная с момента $\tau = \tau_1 = \frac{1}{5 \left(\frac{15,9}{16} \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right)^{1/2}}$, когда согласно

(4.20) левый фронт области перемешивания дошел до другой границы слоя (до $y = -1$), режим (4.11) перестает быть справедливым.

В дальнейшем левый фронт области перемешивания остается неподвижным у второй границы слоя¹ (значение $y = -1$), а область перемешивания расширяется лишь в противоположную сторону. При этом для определения функции $\varphi(\tau, y)$ приходится численно решать уравнение (4.9) со следующими краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = -1; \\ \frac{d\varphi}{dy} = 0 \\ \varphi = 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{при } y = x(\tau), \quad (4.28)$$

¹ Строго говоря, это справедливо лишь, если пренебречь инерцией турбулентного движения, см § 5.

т. е. на второй границе (первой) области перемешивания. В качестве начальных данных берутся значения вычисляемых величин при $\tau = \tau_1$. Результаты для частного случая $n = \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2$ приведены на рис. 3 и 4.

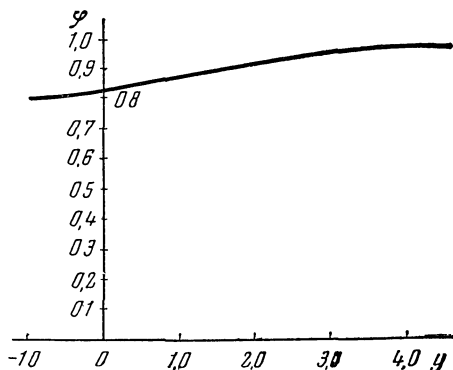
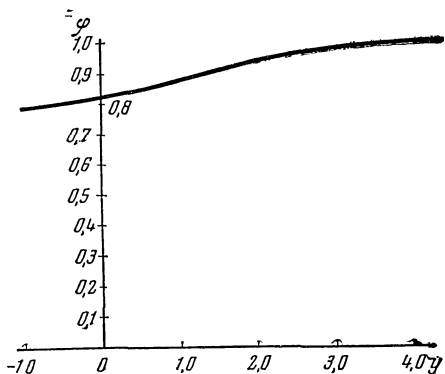


Рис. 3. Пример решения уравнения для φ при $\rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 2$ и $\tau = 4,80$

Рис. 4. Пример решения уравнения для φ при $\rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)} = 2$ и $\tau = 6,40$

y	φ	y	φ	y	φ
-1,000	0,787	0,906	0,870	2,812	0,971
-0,523	0,792	1,382	0,899	3,288	0,985
-0,047	0,816	1,859	0,927	3,765	0,995
0,429	0,841	2,335	0,951	4,241	0,999

y	φ	y	φ	y	φ
-1,000	0,806	1,382	0,896	3,288	0,977
-0,523	0,813	1,859	0,917	3,765	0,989
-0,042	0,828	2,335	0,934	4,241	0,996
0,429	0,849	2,812	0,963	4,718	0,999
0,906	0,871				

3. После того как процесс выравнивания зашел достаточно далеко и изменение плотности вследствие турбулентного перемешивания становится малым по сравнению с самой плотностью, устанавливается новый автомодельный режим. В этом случае целесообразно искать решение для φ в виде

$$\varphi = a - \frac{1}{(\tau + c_1)} \psi \left(\frac{y + 1}{b(\tau + c_1)^k} \right), \quad (4.29)$$

где a — некоторая постоянная, характеризующая в единицах P_0 среднюю плотность, устанавливающуюся в результате полного перемешивания (в дальнейшем ограничимся случаем, когда $a = 1$); c_1 — пока произвольная постоянная.

Подставив (4.29) в (4.9), нетрудно убедиться, что должно иметь место соотношение

$$k = \frac{1}{3}; \quad b = 3^{2/5}.$$

Действительно, после подстановки $\varphi = 1 - \frac{1}{(\tau + c_1)^k} \psi$ получаем¹

$$k \frac{\eta}{\tau + c_1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{k}{\tau + c_1} \psi = \frac{1}{b^{3/2} (\tau + c_1)^{3k}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(-\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^{3/2} \right],$$

где $\eta = \frac{y + 1}{b(\tau + c_1)^k}$. При этом для ψ получается уравнение

$$[\psi \eta]' = [(-\psi')^{3/2}]', \quad (4.30)$$

¹ При этом используется условие $\frac{1}{(\tau + c_1)^k} \psi \ll 1$.

где

$$\eta = \frac{y + 1}{3^{2/3} (\tau + c_1)^{1/3}}.$$

Штрих означает дифференцирование по η .

Решение уравнения (4.30) имеет вид

$$\psi = \frac{1}{125} (\eta_1^{5/3} - \eta^{5/3})^3, \quad (4.31)$$

где η_1 — постоянная и определяется из условия сохранения массы легкого вещества, а именно:

$$\frac{1}{(\tau + c_1)^{1/3}} \int_{-1}^{I_1} \psi dy = 3^{2/3} \int_0^{\eta_1} \psi(\eta) d\eta = 1 - \frac{1}{n} = 1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}}; \quad (4.32)$$

здесь $y_1(\eta_1)$ — значение $y(\eta)$ на первой границе области перемешивания.

Подставляя (4.31) в (4.32), получим

$$\eta_1 = \left[\frac{125}{0,4 \cdot 3^{2/3}} \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} \right) \right]^{3/5} = 2,42 \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} \right)^{3/5}. \quad (4.33)$$

Для ширины области перемешивания (ограниченной значениями η_1 и 0) получим

$$L = 3^{2/3} (\tau + c_1)^{1/3} \eta d. \quad (4.34)$$

С помощью формул (4.34), (4.42) и (4.33) выразим τ как функцию t . В результате вычисления получим ¹

$$(\tau + c_1)^{1/3} = 3^{-1/3} \alpha_1^2 \eta_1^2 \{ \sqrt{\mathcal{L}} + b_0 \}, \quad (4.35)$$

$$b_0 = \text{const.}$$

Для ширины области перемешивания и плотности получим следующие формулы:

$$L = 17,67 \alpha_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}} \right)^{3/5} (\sqrt{\mathcal{L}} + b_0); \quad (4.36)$$

$$\rho = P_0 \left\{ 1 - \frac{1}{125 (\tau + c_1)^{1/3}} [\eta_1^{5/3} - \eta^{5/3}]^3 \right\}. \quad (4.37)$$

Как уже указывалось, решение (4.31) справедливо, строго говоря, лишь в конце процесса, так как при получении уравнения (4.30) предполагалось, что $\frac{1}{(\tau + c)^{1/3}} \psi \ll 1$. При этом в решение входит свободный параметр b_0 , который определится из начальных условий. Можно надеяться соответствующим сшиванием двух типов автомодельных решений (справедливые для начальной и конечной стадий процесса перемешивания) получить достаточно точное решение для всего процесса.

Как оказывается, наилучшее приближение для интересующей величины (например для ширины области перемешивания L) получается

¹ Мы считаем α в начале и в конце процесса различным. В конце процесса эта величина обозначается как α_1 . Подробнее об этом см. в конце настоящего параграфа.

в том случае, если параметр b_0 определяется из условия сшивания именно этой величины.

Так, например, требуя равенства ширины области перемешивания в момент $\tau = \tau_1$, когда кончается начальная стадия, т. е. когда левый фронт возмущения дошел до второй границы легкого слоя и остановился, по формулам (4.24) и (4.36) получаем

$$L_{\tau_1} = 2d = 270 \alpha^4 \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \mathcal{L}d = 17,67 \alpha_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}}\right)^{1/2} (\sqrt{\mathcal{L}} + b_0) d. \quad (4.38)$$

Отсюда следует:

$$\mathcal{L}_{\tau_1} = \frac{1}{135 \alpha^4 \left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}\right)}; \quad (4.38a)$$

$$\sqrt{\mathcal{L}_{\tau_1}} = \frac{1}{11,62 \alpha^2 \left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}\right)^{1/2}}; \quad (4.38b)$$

$$b_0 = \frac{1}{8,84 \alpha_1^2 (1 - \rho_2^{(0)}/\rho_1^{(0)})^{1/2}} - \frac{1}{11,62 \alpha^2 [\ln (\rho_1^{(0)}/\rho_2^{(0)})]^{1/2}}. \quad (4.38b)$$

Таким образом, для промежуточной стадии, начиная с $\tau = \tau_1$ (или со значения $L \geq L_{\tau_1}$), приближенно справедлива следующая формула для ширины области перемешивания:

$$L = 17,67 \alpha_1^2 \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}}\right)^{1/2} \sqrt{\mathcal{L}} d + 2d - \frac{1,52 \left(1 - \frac{\rho_2^{(0)}}{\rho_1^{(0)}}\right)^{1/2} \alpha_1^2}{\left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}\right)^{1/2} \alpha^2} d. \quad (4.39)$$

В частности, когда $\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2$, имеем

$$L = 12,49 \alpha_1^2 \sqrt{\mathcal{L}} d + 2d - \frac{1,292 \alpha_1^2}{\alpha^2} d. \quad (4.40)$$

Отметим, что если вместо формулы (4.24) взять более точную формулу (4.27б) для случая $\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2$, то получили бы

$$L = 12,49 \alpha_1^2 \sqrt{\mathcal{L}} d + 2d - \frac{1,284 \alpha_1^2}{\alpha^2} d. \quad (4.41)$$

Как видим, отличие формул (4.40) и (4.41) совершенно ничтожно.

В заключение нам остается определить постоянную c_1 . Она определяется из условия непрерывности при сшивании величины τ :

$$c_1 = 3^{-1/5} \alpha_1^2 \eta_1^2 (\sqrt{\mathcal{L}_{\tau_1}} + b_0) - \frac{1}{5 \left(\frac{15,9}{16} \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}\right)^{1/2}}. \quad (4.42)$$

Формула (4.34) для ширины области перемешивания приобретает вид

$$L = 3^{3/5} (\tau + 0,163)^{1/5} \cdot 2,16 d. \quad (4.43)$$

Не приводя подробные вычисления (аналогичные приведенным выше) укажем, что

$$(n-1)\rho_2 = P_0 - \rho; \quad \rho_2 = \frac{P_0(1-\varphi)}{\left(\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} - 1\right)}, \quad (4.44)$$

где φ определяется по формулам (4.37) и (4.11).

Укажем, что выражения для ширины области перемешивания в двух предельных случаях — начальной и конечной стадии процесса перемешивания — могут быть получены при постоянных g и d из следующих простых соображений.

Обратимся к уравнению перемешивания в его наиболее простой форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(l_t^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{3/2} \frac{g^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right). \quad (4.45)$$

По порядку величины

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \frac{\rho}{t}; \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} \approx \frac{\rho}{L}.$$

Вместо производной $\frac{\partial}{\partial z}$ также можно приближенно написать $\frac{1}{L}$. Тогда

$$\frac{1}{t} \approx \frac{l_t^2}{L^{3/2}} g^{1/2}, \quad (4.46)$$

но $\frac{l_t^2}{L^2} = \alpha^2$. Таким образом, $\frac{1}{t} \approx \alpha^2 \frac{1}{L^{1/2}} g^{1/2}$, откуда

$$L \approx \alpha^4 g t^2. \quad (4.47)$$

Формула (4.47) дает с точностью до численного коэффициента правильное выражение для ширины области перемешивания в первой стадии процесса, т. е. при наличии двух сред, отделенных поверхностью раздела.

Аналогичным образом можно получить выражение для конечной стадии процесса. В конечной стадии процесса изменения плотности $\Delta \rho$ малы по сравнению со средней плотностью ρ . Поэтому уравнение (4.45) можно по порядку величины записать так:

$$\frac{\Delta \rho}{t} = \frac{l_t^2}{L^{3/2}} \frac{(\Delta \rho)^{3/2}}{\rho^{1/2}} g^{1/2} \quad (4.48)$$

или

$$\frac{1}{t} \approx \frac{l_t^2}{L^{3/2}} \frac{(\Delta \rho)^{3/2}}{\rho^{1/2}} g^{1/2}. \quad (4.49)$$

В силу того, что общее количество легкого вещества остается неизменным, имеет место соотношение

$$\Delta \rho L = \text{const} = P_0 d. \quad (4.50)$$

Используя (4.49) и (4.50), получим

$$\frac{1}{t} = \left(\frac{\alpha^2}{L^{1/2}} \right) \left(\frac{d^{1/2}}{L^{1/2}} \right) g^{1/2},$$

отсюда

$$L = \alpha^2 g^{1/2} d^{1/2} t. \quad (4.51)$$

В нашем рассмотрении осталась неопределенной величина α . Значение этой величины должен дать эксперимент. У нас, как уже указывалось, нет оснований считать, что коэффициент α остается неизменным за время процесса турбулентного перемешивания. Коэффициент α , как известно, различен для разных турбулентных задач (см. § 3). Начальная стадия процесса перемешивания в известной степени аналогична задаче о размыве края струи. Конечная стадия больше подобна задаче о размывании турбулентного следа за телом. (В обеих задачах сохраняется интеграл вычисляемой величины: в нашей задаче — интеграл $\int \rho_2 dz$, где ρ_2 — плотность легкого вещества, в задаче о турбулентном следе — интеграл $\int u dz$, где u — скорость). Коэффициенты α для задачи о размыве края струи и для задачи о турбулентном следе отличаются в 1,46—1,26 раза (для турбулентного следа значение α больше). Такое же по порядку величины различие можно ожидать для коэффициентов α в начале и в конце процесса турбулентного перемешивания.

§ 5. Обсуждение влияния некоторых эффектов

При решении задачи турбулентной диффузии нами был сделан ряд пренебрежений, а именно: мы не учитывали влияние вязкости среды, изменение кинетической энергии при турбулентном движении и т. д. Мы не станем здесь излагать более полную теорию турбулентного перемешивания с учетом указанных эффектов, а ограничимся лишь в настоящем параграфе приближенной оценкой влияния сделанных пренебрежений.

1. Влияние вязкости среды

Наше рассмотрение основано на предположении, что влияние вязкости среды несущественно. Обычно влияние вязкости характеризуют числом Рейнольдса и пренебрежение вязкостью означает, что число Рейнольдса достаточно велико. В исследуемой задаче роль числа Рейнольдса играет безмерная величина R^* , которую целесообразно ввести следующим образом. Составим отношение «турбулентной» вязкости, равной по порядку величины $l_t \nu$, к кинетической вязкости ν . Это отношение и будет, очевидно, «числом Рейнольдса» для нашей задачи:

$$R^* = \frac{l_t \nu}{\nu}. \quad (5.1)$$

Оценим величину R^* для начальной и конечной стадий перемешивания. Согласно (1.20) для ν имеем формулу

$$\nu = l_t \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\rho} g \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Для начальной стадии (два вещества, отделенные границей раздела):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{2\eta_0}{L} \quad (5.3)$$

[см. формулы (4.19) и (4.24); L — ширина области перемешивания]. Подставляя (5.3) в формулу (5.1), получим

$$R^* = (2\eta_0)^{1/2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^{1/2} \frac{\alpha^2 L^{3/2} g^{1/2}}{\nu}.$$

Среднее значение $\left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^{1/2}$ равно

$$\frac{1}{2\eta_0} \int_{-\eta_0}^{\eta_1} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^{1/2} dy = \frac{2}{9} \eta_0^2,$$

при этом

$$R^* = 0,9 \frac{\alpha^2 L^{3/2} g^{1/2}}{\nu} \left(\ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

При постоянных g и d $L \approx \alpha^4 g t^2$ и, следовательно,

$$R^* \approx \frac{\alpha^3 g^2 t^3}{\nu}. \quad (5.4')$$

Зависимость R^* от g и t в этом случае очевидна из соображений размерности. Начальная стадия заканчивается при L_1 , равном $2d$.

Отсюда значение R_k^* в конце начальной стадии равно

$$R_k^* = \frac{0,9 \alpha^2 2^{3/2} g^{1/2} d^{3/2}}{\nu} \left(\ln \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Перейдем теперь к оценке R^* для конечной стадии процесса перемешивания, когда изменения плотности малы. Формулы (5.1) и (5.2) остаются прежними. Вместо (5.2) будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\rho} = \frac{R_1^* b d}{L^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}. \quad (5.6)$$

(см. формулы (4.23) и (4.33), (4.34); L — ширина области перемешивания в конечной стадии).

Подставим выражение (5.7) в формулы (5.2) и (5.1), тогда

$$R^* = b^{1/2} \eta_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^{1/2} \frac{\alpha^2 L d^{1/2} g^{1/2}}{\nu}. \quad (5.7)$$

Среднее значение $\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^{1/2}$ равно

$$\frac{1}{\eta_1} \int_0^{\eta_0} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^{1/2} d\eta = \frac{1}{\eta_1} \int_0^{\eta_1} (\varphi \eta)^{1/2} d\eta = \frac{\eta_1^2}{12}. \quad (5.8)$$

Согласно § 4, в частном случае $\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2$, $\eta_1 = 2,16$, $b = 3^{2/3}$. При постоянных g и d $L = \alpha^2 g^{1/2} d^{1/2} t$ и, следовательно:

$$R^* = \frac{1,04 \alpha^2 L d^{1/2} g^{1/2}}{\nu}. \quad (5.9)$$

Легко видеть, что R^* , вычисленное по формулам (5.9) и (5.4) при $L = 2d$, совпадает с точностью до несущественного численного множителя.

2. О кинетической энергии турбулентного движения

Во всех предшествующих рассуждениях мы фактически исходили из того, что «квазигравитационная» энергия, связанная с градиентом давления, диссипируется вследствие турбулентности. Мы не учитывали, однако, в уравнении баланса энергии изменение кинетической энергии турбулентного движения. В силу этого обстоятельства турбулентная скорость у нас оказалась пропорциональна $g^{1/2}$. При стремлении g к нулю скорость v стремится к нулю. Между тем при выключении g турбулентное движение не может сразу исчезнуть, а должно по «инерции» продолжаться еще некоторое время. Чтобы учесть изменение кинетической энергии при турбулентном движении, уравнение баланса энергии следует написать в виде ¹

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v^2) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_e \rho D (\nabla p \nabla c) - a \frac{\rho v^3}{l_t}. \quad (5.10)$$

Для приближенной оценки роли члена, стоящего в левой части уравнения (5.10а), будем решать это уравнение методом последовательных приближений, считая за нулевое приближение значение v_0 , полученное при пренебрежении левой частью (5.10). Представляя v в виде суммы $v = v_0 + v_1$ (v_1 — первая поправка, даваемая первым приближением), получим для v_1 уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_0^2) = - \frac{2\rho}{l_t} v_0^2 v_1. \quad (5.11)$$

Так как $v_0^2 = l_t^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\rho} g$, то левую часть уравнения (5.11) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_0^2) = \frac{1}{2} \left[2l_t \frac{\partial l_t}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial z} g + l_t^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial z \partial t} g + \frac{\partial g}{\partial t} l_t^2 \frac{\partial \rho}{\partial z} \right]. \quad (5.12)$$

Усредним это выражение по области перемешивания, считая, что l_t и g не зависят от z ; при этом учитываем, что согласно уравнению диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_0)$$

и что на границе области как D , так и $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ обращаются в нуль (v_0 — гидродинамическая скорость; см. § 4). В результате получим (заменяя приближенно $\frac{\partial \rho}{\partial z} \approx \frac{\rho_1^{(0)} - \rho_2^{(0)}}{L}$):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_0^2) \approx \frac{1}{2} \left[2l_t \frac{dl_t}{dt} \frac{\rho_1^{(0)} - \rho_2^{(0)}}{L} g - l_t^2 \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\rho_1^{(0)} - \rho_2^{(0)}}{L} g + \frac{dg}{dt} l_t^2 \frac{\rho_1^{(0)} - \rho_2^{(0)}}{L} \right].$$

Учитывая (4.5) и (4.7) имеем

$$- \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial t} \frac{1}{P_0} = - \frac{d}{dt} \ln d,$$

¹ В одномерной задаче имеем из (5.10)

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial t} = g(t) D \frac{\partial \rho}{\partial z} - a \frac{\rho v^3}{l_t}. \quad (5.10a)$$

где d — толщина слоя; $\rho_1^{(0)}$ и $\rho_2^{(0)}$ — значения плотности на границе слоя до перемешивания; L — ширина области перемешивания.

Из уравнения (5.30) находим v :

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{4} \frac{l_t}{v_0} \left[\frac{2}{l_t} \frac{dl_t}{dt} - \frac{d}{dt} \ln d + \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} \right]. \quad (5.13)$$

Из формулы (5.13) следует, что $\frac{v_1}{v_0} \ll 1$, если величины l_t , d , g изменяются достаточно плавно. Для начальной стадии процесса перемешивания получим следующие условия, при которых отношение $\frac{v_1}{v_0}$ будет мало:

$$\frac{1}{2L} \frac{dL}{dt} \frac{L^{1/2}}{g^{1/2}} < 1; \quad \frac{L^{1/2}}{g^{1/2}} \frac{d}{dt} \ln d < 3. \quad (5.14)$$

В начальной стадии при постоянном ускорении, согласно (4.24),

$$L = 270 \alpha^4 g t^2$$

и первое из условий (5.33) принимает вид

$$\alpha^2 \sqrt{270 \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}} < 1. \quad (5.15)$$

При $\alpha = 0,13$ и $\frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}} = 2 \sim 4$ первая часть этого неравенства порядка 0,2, при этом условие (5.15) не зависит от значений g и t .

Для конечной стадии процесса перемешивания вместо условий (5.14) будем иметь следующие:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \right] \frac{L}{d^{1/2} y^{1/2}} < 1; \quad \frac{d}{dt} (\ln d) \frac{L}{g^{1/2} d^{1/2}} < 4; \quad \left(\frac{1}{9} \frac{dg}{dt} \right) \frac{L}{d^{1/2} g^{1/2}} < 4. \quad (5.16)$$

При постоянном ускорении

$$L = c \alpha^2 g^{1/2} d^{1/2} t,$$

где c — численный коэффициент. Подставляя это значение для L в первое из условий (5.16), находим, что оно, как и при начальной стадии, не зависит от g и t , а зависит лишь от значения α и таким образом совпадает с условием (5.15). В том случае, когда условия (5.15) — (5.16) не выполняются, существенно учесть в системе уравнений для турбулентного перемешивания изменение со временем кинетической энергии турбулентного движения. Мы не будем здесь развивать последовательную теорию турбулентного перемешивания с учетом изменения кинетической энергии турбулентного движения. Ограничимся приведением некоторых окончательных результатов этой теории для ширины области перемешивания.

Можно показать, что в случае одномерного движения двух несжимаемых жидкостей, разделенных поверхностью раздела в поле ускорения $g(t)$, ширина области перемешивания L определяется из уравнения

$$\frac{dL}{dt} = \gamma L^{-\frac{m}{2}} \left[\int_{L_0}^L g(L_1) L_1^m dL_1 \right]^{1/2}, \quad (5.17)$$

где L_0 — значение L при $t = 0$; γ и m — некоторые положительные постоянные. Не представляет труда решить приведенное уравнение для L в следующих простых случаях:

1. При постоянном ускорении $g(t) = g_0$, мы получаем

$$L = \frac{\gamma^2}{4(m+1)} g_0 t^2. \quad (5.18)$$

Сравнивая (5.18) с (4.24а), получим, что

$$\frac{\gamma^2}{4(m+1)} = a_1 = 270 \alpha^4 \ln \frac{\rho_1^{(0)}}{\rho_2^{(0)}}.$$

2. При наличии начальной области перемешивания L_0 и резком включении ускорения, т. е. $g = v_0 \delta(t)$. Пусть при этом $L = L_0$ при $t = 0$, тогда для $L(t)$ получим

$$L(t) = L_0 \left[1 + \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} - 1 \right) a_1 \frac{v_0 t}{L_0} \right]^n, \quad (5.19)$$

где $n = \frac{1}{\frac{m}{2} + 1}$; a_1 — постоянная.

3. При включении ускорения в момент $t = t_k$ перемешивание продолжается по «инерции» и согласно (5.17) $L(t)$ при $t > t_k$ определяется формулой

$$L = L_k \left[1 + \frac{2}{n} \frac{t - t_k}{t_n} \right]^n, \quad (5.20)$$

где L_k — значение ширины области перемешивания в момент выключения взаимодействия (при $t = t_k$), постоянная $n = \frac{1}{\frac{m}{2} + 1}$. Можно из теоретических соображений найти верхнюю и нижнюю границы для возможных значений n (и, следовательно, m). Так, допуская, что после выключения ускорения сохраняется кинетическая энергия турбулентной области, мы получим верхнюю границу для n , а именно $n = \frac{2}{7}$ (при этом получаем минимальное значение для m , равное 5). Допуская, что после выключения ускорения сохраняется момент импульса турбулентной области, получим минимальное значение для n , а именно $n = 1/4$ (соответственно максимальное значение для m равно 6). Итак, приближенно имеем следующие значения: $n \sim 1/4$, $m \sim 6$.

3. Условие пренебрежения градиентом давления

При исследовании приближенных уравнений турбулентной диффузии в § 4 мы исходили из того, что пространственными изменениями давления можно пренебречь по сравнению с изменениями плотностей, происходящими вследствие турбулентной диффузии. Следует заметить, что это условие существенно лишь, если задача решается приближенно. Запишем это условие в следующем виде [см. (4.4)]:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} > \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (5.21)$$

Так как $-\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = g$, а $\frac{p}{\rho} = k^2$ — квадрат скорости изотермического звука, то учитывая, что $\varphi \approx 1$, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} > \frac{|g|}{k}. \quad (5.21a)$$

В начальной стадии процесса перемешивания $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2L}$, и условие (5.21) сводится к следующему:

$$\frac{k}{2Lg} > 1.$$

В конечной стадии процесса $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx \frac{1,2501}{L^2}$, и, таким образом, условие принимает вид

$$\frac{1,25 dk}{L^2 g} > 1.$$

В заключение выражаем глубокую благодарность Л. Д. Ландау за ценные советы и замечания, А. Н. Колмогорову за полезное обсуждение рассмотренных вопросов.

ДОПОЛНЕНИЕ 1

О ТУРБУЛЕНТНОМ ВЯЗКОМ ПОТОКЕ

В § 1 получены уравнения турбулентного движения в случае, когда существен только турбулентный диффузионный поток. Здесь мы рассмотрим более общий случай, а именно: учтем наличие у турбулентного потока вязкости.

Система уравнений, описывающая турбулентное движение в этом случае (мы интересуемся квази-изотермической задачей, когда T зависит лишь от времени), следующая:

1) уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (\text{ДА.1})$$

2) уравнение диффузии

$$\rho \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla c \right) = - \operatorname{div} \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} = - D_t \rho \frac{\nabla \mu}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T}}; \quad (\text{ДА.2})$$

3) уравнение движения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) v_i = - \frac{\nabla_i \rho}{\rho} + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial x_k} - \nabla_i u, \quad (\text{ДА.3})$$

$$\pi_{ik} = \rho v_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial x_l}{\partial x_l} \right);$$

4) уравнение состояния

$$p = f(\rho, c, T);$$

здесь $c = \frac{\rho_2}{\rho_1}$; ρ_2 — плотность легкой компоненты, \mathbf{j} — турбулентный поток диффузии; π_{ik} — турбулентный поток вязкости; μ — химический потенциал; u — потенциал внешних сил.

Подобно тому, как в § 1, получим, сохраняя прежние обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \varepsilon + \rho u \right) = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{v^2}{2} + \omega + u \right) - v_i \pi_{ik} \right] + \rho T \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \rho \right\} - \mu \operatorname{div} \mathbf{j} - \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (\text{ДА.4})$$

Из (ДА.4) непосредственно следует закон изменения энтропии:

$$\rho T \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S \right\} = \mu \operatorname{div} \mathbf{j} + \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (\text{ДА.5})$$

Для изменения полной энтропии (т. е. для диссоциации энергии) имеем

$$T \frac{\partial}{\partial t} \int \rho S d^3 r = - \int (\mathbf{j} \nabla \mu d^3 r) + \int \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3 r. \quad (\text{ДА.6})$$

Первая часть дает полную диссипацию энергии. Выделим из нее часть, обусловленную только турбулентным движением. Для этого необходимо вычесть изменение энтропии, обусловленное смешением двух веществ при постоянном давлении. Диссипация энергии, обусловленная турбулентным движением ($\mathcal{E}_{\text{турб}}$), равна ¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{турб}} &= - \int \mathbf{j} \left[\nabla \mu - \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p \nabla c \right] d^3 r + \int \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3 r = \\ &= - \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c (\mathbf{j} \nabla p) d^3 r + \int \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} d^3 r. \end{aligned} \quad (\text{ДА.7})$$

С другой стороны, обобщая случай изотропной турбулентности, допускаем, что турбулентная диссипация энергии равна (допущение Ландау):

$$\mathcal{E}_{\text{турб}} = \int \frac{\rho v^3}{l_t} d^3 r, \quad (\text{ДА.8})$$

где v — характерная турбулентная скорость; l_t — характерная турбулентная длина. Приравнивая оба выражения для $\mathcal{E}_{\text{турб}}$, получим уравнение для определения v :

$$- \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \mathbf{j} \nabla p + \pi_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\rho v^3}{l_t}. \quad (\text{ДА.9})$$

По аналогии с кинетической теорией полагаем

$$\pi_{ik} = \rho v_t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \lambda \rho l_t v \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right\}; \quad (\text{ДА.10})$$

$$\mathbf{j} = - \rho D_t \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p \approx - \rho D_t \nabla c = - \rho l_t v \nabla c, \quad (\text{ДА.11})$$

где λ — некоторая постоянная порядка единицы.

¹ Нетрудно показать, что диссипация энергии, обусловленная смешением двух веществ при постоянном давлении, и есть $-\int \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_p (\nabla c \mathbf{j}) d\mathbf{r}$ (см § 1).

Уравнение (ДА.9), кроме тривиального решения $v = 0$, соответствующего ламинарному режиму, имеет следующее решение:

$$v = l_i \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_c (\nabla p \nabla c) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \frac{\partial v_i}{\partial x_k}}. \quad (\text{ДА.12})$$

а) В случае газа уравнение состояния имеет вид

$$p = \alpha T \rho (1 + c) \frac{z}{A}.$$

В результате несложных преобразований получим

$$v = l_i \sqrt{\frac{1}{\rho p} (\nabla p)^2 - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \nabla p + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)}; \quad (\text{Д.13})$$

$$\mathbf{j} = -l_i^2 \rho \sqrt{\frac{1}{\rho p} (\nabla p)^2 - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \nabla p + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)} \nabla c; \quad (\text{ДА.14})$$

$$\begin{aligned} \pi_{ik} &= \lambda l_i^2 \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{1}{\rho p} (\nabla p)^2 - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \rho + \lambda \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{ДА.15})$$

б) В случае несжимаемых жидкостей (газов), как в § 1, получим

$$\mathbf{j} = \left\{ -\rho l^2 + \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \rho + \lambda \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2} \right\} \nabla c; \quad (\text{ДА.16})$$

$$\pi_{ik} = \rho l_i^2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \nabla p \nabla \rho + \lambda \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2}. \quad (\text{ДА.17})$$

В частном случае, когда главную роль играет турбулентный поток вязкости (это имеет место в том случае, когда турбулентное движение возникает из-за наличия разрыва скоростей, например, в тангенциальном разрыве), получим как следствие известное соотношение для потока вязкости, предложенное Прандтлем¹:

$$\pi_{xz} = \rho l_i^2 \left| \frac{dv_x}{dz} \right| \left| \frac{dv_z}{dz} \right|. \quad (\text{ДА.18})$$

Отметим, что мы получили не только соотношение Прандтля (предложенное им для случая, когда $\rho = \text{const}$), но и обобщенное соотношение Прандтля для случая переменной плотности.

Во втором предельном случае, когда определяющим является диффузионный поток (когда имеется лишь разрыв плотности, вернее, когда $\frac{1}{\rho^2} |\nabla p \nabla \rho| \gg \left(\frac{\partial v_c}{\partial x_k}\right)^2$), получим результаты, приведенные в § 1.

¹ В выражении (ДА.15) пишем $\left| \frac{\partial v_x}{\partial z} \right| \left| \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|$, где ось z направлена перпендикулярно вектору разрыва скорости v , а ось x взята по направлению v . Это допустимо, так как остальные компоненты градиента скорости малы по сравнению с $\frac{dv_x}{dz}$.

ДОПОЛНЕНИЕ 2

ВЫВОД ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ХИМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Найдем выражение для химического потенциала в случае смеси двух идеальных газов с зарядовым числом элементов z_1 и z_2 .

Из термодинамики известно, что для смеси двух веществ термодинамическое тождество имеет вид

$$d\mathcal{G} = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2, \quad (\text{ДБ.1})$$

где n_1, n_2 — число частиц (включая и электроны) обоих веществ в 1 г смеси; μ_1 — химический потенциал тяжелого газа; μ_2 — химический потенциал легкого газа; очевидно,

$$\frac{n_1}{z_1} m_1 + \frac{n_2}{z_2} m_2 = 1, \quad (\text{ДБ.2})$$

где m_1 — масса атома тяжелого газа; m_2 — масса атома легкого газа.

Введем концентрацию c :

$$c = \frac{\rho_2}{\rho} = \frac{n_2}{z_2} m_2. \quad (\text{ДБ.3})$$

Из (ДБ.2) и (ДБ.3) имеем

$$dc = m_2 \frac{dn_2}{z_2}; \quad (\text{ДБ.4})$$

$$dn_1 = -\frac{z_1}{m_1} dc. \quad (\text{ДБ.5})$$

С учетом (ДБ.4) и (ДБ.5) из (ДБ.1) получим

$$d\mathcal{G} = Td\rho + \frac{p}{\rho^2} d\rho + \mu dc, \quad (\text{ДБ.6})$$

где

$$\mu = \left(\frac{z_2}{m_2} \mu_2 - \frac{z_1}{m_1} \mu_1 \right). \quad (\text{ДБ.7})$$

В свою очередь μ_1 и μ_2 равны (см. [11, § 91]):

$$\mu_1 = kT \ln p + \chi_1(\tau) + kT \ln \frac{N_1}{N}; \quad (\text{ДБ.8})$$

$$\mu_2 = kT \ln p + \chi(T) + kT \ln \frac{N_2}{N}, \quad (\text{ДБ.9})$$

где k — постоянная Больцмана; $N_1 = \frac{n_1}{z_1}$ — число атомов тяжелого газа в единице массы смеси, $N_2 = \frac{n_2}{z_2}$ — число атомов легкого газа в единице массы смеси ($N_2 = \frac{n_2}{z_2}$); χ — функция температуры.

Вводя концентрацию, получим

$$\mu_1 = kT \ln p + \chi_1(T) + kT \ln \frac{1-c}{\frac{c}{m_2} + \frac{1-c}{m_1}}; \quad (\text{ДБ.10})$$

$$\mu_2 = kT \ln p + \chi_2(T) + kT \ln \frac{c}{\frac{c}{m_2} + \frac{1-c}{m_1}}; \quad (\text{ДБ.11})$$

$$\mu = \left(\frac{z_2}{m_2} - \frac{z_1}{m_1} \right) kT \ln p + \frac{z_2}{m_2} \chi_2 - \frac{z_1}{m_1} \chi_1 + \\ + kT \left\{ \frac{z_2}{m_2} \ln \frac{c}{c + (1-c) \frac{m_2}{m_1}} - \frac{z_1}{m_1} \ln \frac{1-c}{c \frac{m_1}{m_2} + 1-c} \right\}. \quad (\text{ДБ.12})$$

в) Используя соотношение (ДБ.12), найдём

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mu}{dc} \right)_p &= \frac{kT (z_1 - z_2) c + z_2}{m_1 c^2 (1-c) \left[\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) + \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{c} \right]}, \\ \left(\frac{d\mu}{dp} \right)_c &= \frac{kT}{p} \left(\frac{z_2}{m_2} - \frac{z_1}{m_1} \right); \\ \frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \nabla p}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_c} &= \alpha (1-c) \frac{\nabla p}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{ДБ.13})$$

(ДБ.14)

$$\alpha = \frac{z_2 \frac{m_1}{m_2} - z_1}{(z_1 - z_2) c + z_2} \left[\left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) c + \frac{m_2}{m_1} \right].$$

При $c \approx 1$, $\alpha \approx 1$; при $c \approx 0$, $\alpha \approx 1/2$. Таким образом, α меняется от $1/2$ до 1, когда c меняется от 0 до 1. Приведенные выше величины использованы в § 1 и 4.

Не приводя подробные выкладки, укажем, что энтропия S смеси равна:

$$S = - \left[\left(\frac{z_2 c}{m_2} + \frac{z_1}{m_1} (1-c) \right) k \ln p + \frac{z_2 c}{m_2} \ln \frac{c + (1-c) \frac{m_2}{m_1}}{c} + \right. \\ \left. + \frac{z_1 (1-c)}{m_1} \ln \frac{\frac{m_1}{m_2} c + (1-c)}{1-c} \right]. \quad (\text{ДБ.15})$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
2. Е. С. Фрадкин. Наст. сб., стр. 250.
3. G. I. Taylor. Proc. Roy. Soc., A 135, 702, 1932
4. Tollmien. Erg der Acrodversuchsan. Cottingen, 2, 73, 1923.
5. С. Гольдштейн. Современное состояние гидродинамики вязкой жидкости, ИЛ, 1948
6. Г. Н. Абрамович. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Госэнергоиздат, 1948.
7. P. Ruden. Die Naturwissenschaften, 21, № 21, 375, 1933.
8. Fertman. Ing. Arch, 5, 1934
9. В. Турникуса. Отопление и вентиляция, № 5, 1933.
10. N. Schlichting. Ing. Arch 1, № 5, 533, 1930
11. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика Гостехиздат, 1951.

И. Е. ТАММ

О ШИРИНЕ УДАРНЫХ ВОЛН БОЛЬШОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ¹

§ 1. Введение и резюме

Плоская ударная волна в идеальном газе в первом приближении представляет собой движущуюся с определенной скоростью поверхность разрыва величин, характеризующих состояние газа (скорость u , давление p , плотность ρ , температура T и т. д.); по обе стороны разрыва газ находится в состоянии термодинамического равновесия. В действительности эта поверхность разрыва представляет собой, конечно, переходный слой определенной толщины. Для случая слабых разрывов (т. е. для случая, когда относительные изменения характеризующих газ величин на протяжении всего переходного слоя малы по сравнению с единицей) структура этого слоя известна; так, давление газа изменяется по следующему закону:

$$p = \frac{p_2 + p_1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2} \operatorname{th} x/d, \quad (1.1)$$

где p_1 и p_2 — давление по обе стороны разрыва; координата x отсчитывается от середины разрыва в перпендикулярном к нему направлении, а величина, которую мы будем называть шириной разрыва d , равна

$$d = \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} \delta,$$

где

$$\delta = \frac{2v^3}{pc^3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \right)_s} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi + \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \kappa \right); \quad (1.2)$$

здесь v — удельный объем газа; c — скорость звука в нем; η и ξ — коэффициенты вязкости; κ — коэффициент теплопроводности газа; c_p и c_v — теплоемкости газа; величина δ порядка длины свободного пробега в газе.

В частности, если считать атомы газа упругими шариками радиуса r , то для коэффициентов η и κ получаются выражения

$$\kappa = \frac{0,169}{\eta^2} k \sqrt{\frac{T}{m}}; \quad \eta = \frac{0,0448}{r^2} \sqrt{mkT},$$

¹ Работа выполнена в 1947 г.

где m — масса атома, а k — постоянная Больцмана; второй коэффициент вязкости ξ для одноатомного газа равен нулю. Внося в (1.2) эти значения и известные значения других величин, получаем

$$\delta = 1,28l, \quad (1.3)$$

где $l = \frac{1}{4}\pi r^2 N$ — длина свободного пути в газе (N — число молекул в единице объема).

Если применить приведенные формулы к сильным разрывам, когда $\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \sim 1$, т. е. $p_2 \gg p_1$, то «ширина» d таких разрывов окажется порядка длины свободного пробега в газе¹. Однако формулы эти выведены для слабых разрывов ($\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \ll 1$) и поэтому случай сильных разрывов нуждается в специальном рассмотрении. При этом надо иметь в виду, что самые уравнения гидродинамики, которые лежат в основе вывода формул (1.1) и (1.2), справедливы лишь при условии $L \gg l$, где l — длина свободного пробега молекул, а L — расстояние, на котором заметно изменяются макроскопические характеристики жидкости или газа.

Очевидно, что при сильных разрывах, когда d становится сравнимым с l , нельзя пользоваться уравнениями гидродинамики², а необходимо непосредственно исследовать решение основного кинетического уравнения

$$\mathbf{v} \operatorname{grad} f + \frac{K}{m} \operatorname{grad}_v f = \chi(f, f), \quad (1.4)$$

где \mathbf{v} — скорость молекул; f — функция распределения молекул газа в пространстве фаз; K — внешняя сила, действующая на молекулу; $\chi(f, f)$ — член, учитывающий соударения между молекулами (газ считаем состоящим из одноатомных тождественных молекул, не обладающих внутренними степенями свободы). Уравнение (1.4) записано для стационарного состояния газа $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$; как известно, в случае плоской ударной волны состояние газа действительно стационарно, если система отсчета движется вместе с волной.

Точные решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.4) известны лишь для тривиальных случаев (например для равновесного состояния газа в статическом внешнем поле сил). Мы воспользуемся

¹ То обстоятельство, что плотность газа, а стало быть, и длина свободного пробега в нем меняются на протяжении разрыва, не вносят существенной неопределенности в эту оценку, так как максимально возможное изменение плотности в ударной волне не очень велико и равно $\frac{p_1}{p_2} = \frac{c_p - c_v}{c_p + c_v}$.

² Основываясь на развитом Гильбертом методе решения основного уравнения кинетической теории газов по степеням отношения l/L , Томас [Journ. Chem. Phys., 12, 449 (1944)] учел и при определении структуры ударной волны следующее (по сравнению с тем, которое приводит к гидродинамическим уравнениям Навье-Стокса) приближение и получил поправку к выражению (1.2) для d , приводящую к конечной ширине скачка при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$. Однако и его результаты применимы лишь к достаточно слабым разрывам.

для решения этого уравнения следующим приближенным методом, аналогичным методу Ритца для линейных уравнений.

Интеграл

$$S = \iint dv dr \left[v \operatorname{grad} f + \frac{1}{m} \mathbf{K} \operatorname{grad}_v f - \chi(f, f) \right]^2 \quad (1.5)$$

неотрицателен и обращается в нуль только в том случае, если функция $f(r, v)$ удовлетворяет кинетическому уравнению (1.4). Таким образом, это уравнение эквивалентно требованию, чтобы S имело минимально возможное значение. Аппроксимируя функцию распределения f какой-либо подходящей функцией от r и v (в которой остаются неопределенными значения некоторых постоянных параметров и функциональная зависимость от части независимых переменных) и внося эту функцию в (1.5), получаем приближенное решение кинетического уравнения из требования

$$\delta S = 0. \quad (1.6)$$

В случае плоской ударной волны f является функцией только от x , v_x и v , так что S принимает вид

$$S = \int dx dv \left[v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \chi(f, f) \right]^2. \quad (1.7)$$

В качестве первого приближения я взял

$$f = \frac{1-g(x)}{2} f_1(v) + \frac{1+g(x)}{2} f_2(v), \quad (1.8)$$

где f_1 и f_2 — равновесные Максвелловы функции распределения на больших расстояниях от разрыва (соответственно справа и слева от него), а g — искомая функция от x , подчиненная условиям:

$$g(x) \rightarrow -1 \text{ при } x \rightarrow \infty, \quad g(x) \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.8) означает, что область скачка рассматривается как область своего рода диффузии газа с равновесным распределением f_1 в газ с равновесным распределением f_2 , и обратно.

Внося (1.8) в (1.7) и выполнив интегрирование по v , получаем из (1.6) легко разрешимое дифференциальное уравнение для $g(x)$. В результате, например, для давления газа p получается формула (1.1), оказывающаяся, таким образом, в рассматриваемом приближении справедливой не только для слабых, но и для сильных разрывов. Значение постоянной δ для слабых разрывов¹ получается равным

$$\delta = 1,37l, \quad (1.10)$$

т. е. отличается всего на 7% от значения (1.3), получающегося из гидродинамической теории. Что же касается предельного случая сильных разрывов, то при $\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \rightarrow 1$ ширина разрыва d стремится к предельному значению

$$d = 0,503l_1 = 2,012l_2, \quad (1.11)$$

где l_1 и l_2 — соответственно длины свободного пробега в газе до и после скачка (при $\frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} \rightarrow 1$ в одноатомном газе $l_1/l_2 \rightarrow 4$).

Хотя сравнение с гидродинамической теорией показывает, что аппроксимация (1.8) хороша для слабых скачков, желательно проверить степень ее пригодности для сильных скачков, для чего следует провести вычисления в следующем более точном приближении или, что предпочтительнее, решить приближенное линейное интегро-дифференциальное уравнение для поправки к найденному решению f .

Все результаты этой статьи применимы лишь в том случае, когда температура газа до и после скачка не слишком велика; в противном случае нужно учитывать эффект Кнезера, излучение нагретого газа и т. п. Заметим, что условие малости абсолютных температур совместимо с условием сильного разрыва $\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} \gg 1$.

Заметим в заключение, что развитый в настоящей статье вариационный метод приближенного решения кинетического уравнения может быть применен для решения весьма разнообразных задач. В частности, он может быть обобщен и на случай, когда состояние газа не стационарно ($\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$).

В § 2 формулируются основные уравнения и условия проблемы и вводятся безразмерные переменные. В § 3 явно вводится приближенное выражение (1.8) для функции распределения и проводятся вычисления для предельных случаев слабого и сильного скачков.

§ 2. Основные соотношения проблемы в безразмерных переменных

Мы будем рассматривать плоскую разрывную волну в идеальном газе, состоящем из одноатомных тождественных молекул, не обладающих внутренними степенями свободы. Ось X направим перпендикулярно фронту волны. Пусть волна распространяется справа налево из области 2 в область 1. В этом случае $T_2 > T_1$, $p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$. Введем систему координат, движущуюся вместе с волной. В этой системе отсчета газ будет перетекать из области 1 в область 2 и будет в обеих областях двигаться направо (по оси X) со скоростями u_1 и u_2 соответственно, причем $u_2 < u_1$. Условия сохранения потоком вещества, импульса и энергии на протяжении всего газа записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \int v_x f dv &= j = \text{const}, \\ \int v_x^2 f dv &= P = \text{const}, \\ \int v_x v^2 f dv &= S = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где j — поток числа атомов через единицу поверхности; P — поделенный на m поток импульса и S — поделенный на $\frac{m}{2}$ поток энергии.

Кинетическое уравнение имеет вид

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \int |w| \{f, f\} dv_1 d\Omega, \quad (2.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \{f, f\} &= f(\mathbf{v}') f(\mathbf{v}'_1) - f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}_1), \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + w\mathbf{a}; \quad \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - w\mathbf{a}; \quad w = (\mathbf{a}, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}), \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

\mathbf{a} — единичный вектор; $\int d\Omega$ означает интегрирование по углам, определяющим его направление; w — абсолютная величина w ; σ — поперечное сечение соударения атомов.

Введем вместо функции распределения f пропорциональную ей функцию F размерности $\frac{1}{v^3}$:

$$f = j \frac{P}{S} F \quad (2.4)$$

Далее, введем следующие единицы измерения

$$\left. \begin{aligned} \text{единица скорости } u_0 &= \sqrt{S/j}, \\ \text{единица длины } x_0 &= S/\sigma j P, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

и следующее обозначение для безразмерной величины jS/P^2

$$\mu^2 = jS/P^2. \quad (2.6)$$

В этих обозначениях уравнения (2.1) и (2.2) запишутся в виде

$$\int v_x F d\mathbf{v} = \mu; \quad \int v_x^2 F d\mathbf{v} = 1, \quad \int v_x v^2 F d\mathbf{v} = \mu; \quad (2.7)$$

$$v_x \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F, F\} d\mathbf{v}_1 d\Omega = 0. \quad (2.8)$$

В эти уравнения входит только один безразмерный параметр μ . Вдали от скачка при $x = \pm\infty$ газ находится в термодинамическом равновесии, и, стало быть, функция распределения имеет в областях 1 и 2 вид

$$F_i = \rho_i \left(\frac{\alpha_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\alpha_i [(v_x - u_i)^2 + v_y^2 + v_z^2]}, \quad i = 1, 2, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.9)$$

где

$$\alpha_i = \frac{m u_0^2}{2kT_i}. \quad (2.10)$$

Внося (2.9) в (2.7), получаем

$$\rho_i u_i = \mu, \quad \rho_i \left(u_i^2 + \frac{1}{2\alpha_i} \right) = 1, \quad \rho_i u_i \left(u_i^2 + \frac{5}{2\alpha_i} \right) = \mu,$$

откуда находим

$$u_i = \frac{1 \pm r}{2\sqrt{1-r^2}}, \quad \alpha_i = 10 \frac{1 \mp r}{3 \mp 5r}, \quad \rho_i = \frac{5}{2} (1 \mp r), \quad (2.11)$$

здесь введено обозначение

$$r = \sqrt{1 - \frac{16\mu^2}{25}}, \quad (2.12)$$

верхний знак относится к $i = 1$, а нижний — к $i = 2$.

Так как температура T_i , а стало быть, и величина α_i не могут быть отрицательными, то

$$0 \leq r \leq \frac{3}{5}, \quad 1 \leq \mu \leq 5/4. \quad (2.13)$$

Из (2.11) следует, что относительные скачки скорости, плотности, температуры и давления $p_i \sim \rho_i T_i$ равны:

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} = r, \quad \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{5}{3} r, \quad \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = t = \frac{2r}{3 - 5r^2}. \quad (2.14)$$

При $r \rightarrow 0$ (т. е. $\mu \rightarrow \frac{5}{4}$) скачки всех величин стремятся к нулю, тогда как при $r \rightarrow \frac{3}{5}$ (т. е. $\mu \rightarrow 1$) они стремятся к следующим предельным значениям

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 + u_2} \rightarrow \frac{3}{5}, \quad \frac{p_2 - p_1}{p_2 + p_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = t \rightarrow 1, \quad (2.15)$$

т. е. $\rho_2/\rho_1 = u_1/u_2 \rightarrow 4$, $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty$.

Соотношения (2.11) эквивалентны уравнению адиабаты Гюгоньо для идеального одноатомного газа.

Заметим, что на основании (2.4), (2.9) и (2.11) число молекул газа в областях 1 и 2 в обычной размерной единице объема равно

$$N_i = j \frac{P}{S} \rho_i = \frac{5}{2} j \frac{P}{S} (1 \pm r),$$

так что введенная нами в (2.5) единица длины равна

$$x_0 = \frac{5(1 \mp r)}{2rN_i} = \frac{5}{2} (1 \mp r) l_i, \quad (2.16)$$

где $l_i = 1/\sigma N_i$ означает длину свободного пробега молекул газа в областях 1 и 2.

Задача исследования плоской ударной волны сводится к нахождению решения $F(x, v)$ интегро-дифференциального уравнения (2.8), удовлетворяющего условиям (2.7) и принимающего при $x = \pm \infty$ значения (2.9).

§ 3. Приближенное решение основного уравнения вариационным методом

Естественно искать приближенное решение основных уравнений, сформулированных в § 2, в виде

$$F = e^{-\alpha[(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2]} [a + b(v_x - u)^2 + c(v_y^2 + v_z^2) + d(v_x - u)^4 + e(v_y^2 + v_z^2)^2], \quad (3.1)$$

где α , u , a , b , c , d , e — подлежащие определению функции от x . Внося (3.1) в (2.7), получаем три алгебраические уравнения, связывающие значения этих функций. Однако оказывается, что в случае сильных разрывов эти уравнения не имеют решений, при которых функция F оставалась бы положительной при всех значениях скорости молекулы¹.

Так как интерес представляют как раз сильные разрывы, то я отказался от рассмотрения решений формы (3.1) и выбрал для F приближение типа (1.8).

$$F = \frac{1 - g(x)}{2} F_1(v) + \frac{1 + g(x)}{2} F_2(v), \quad (3.2)$$

¹ Включение во входящий в (3.1) полином не положительно определенных членов типа $A(v_x - u)$ приводит к затруднениям даже в случае слабых разрывов.

где F_1 и F_2 — распределения Максвелла молекул по скоростям в областях 1 и 2, определяемые уравнениями (2.9) и (2.14), а искомая функция $g(x)$ подчинена условиям (1.9). Условия (2.7) при этом выборе функций F выполняются автоматически.

Легко видеть, что определяемый уравнением (2.3) функционал $\{F, F\}$ обладает следующим свойством

$$\{F + H, F + H\} = \{F, F\} + \{F, H\} + \{H, H\},$$

где

$$\{F, H\} = F(\mathbf{v}')H(\mathbf{v}_1') - F(\mathbf{v})H(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_1')H(\mathbf{v}') - F(\mathbf{v}_1)H(\mathbf{v}) \quad (3.3)$$

Так как $\{F_1, F_1\} = \{F_2, F_2\} = 0$, то для функции F , определяемой уравнением (3.2), получаем

$$\{F, F\} = \frac{1-g^2(x)}{4} \{F_1, F_2\}.$$

Таким образом, внося (3.2) в левую часть кинетического уравнения (2.8), получаем

$$v_x \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F, F\} d\mathbf{v}_1 d\Omega = \frac{v_x}{2} g'(x) (F_2 - F_1) - \frac{1-g^2(x)}{4 \cdot 2\pi} \int |w| \{F_1, F_2\} d\mathbf{v}_1 d\Omega,$$

где $g'(x) = \frac{dg}{dx}$. Внося это выражение в (1.7), получаем

$$S = \int dx [A g'^2(x) + 2B g'(x)(1-g^2(x)) + C(1-g^2(x))^2], \quad (3.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \int v_x^2 (F_2 - F_1)^2 d\mathbf{v}, \quad C = \frac{1}{16} \int \chi^2(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \\ \chi(\mathbf{v}) &= \frac{1}{2\pi} \int |w| \{F_1, F_2\} d\mathbf{v}_1 d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

выражение для B нам не понадобится. A , B и C суть числовые функции параметра задачи μ (или r). Приравнявая нулю вариацию интеграла (3.4):

$$\delta S = \int dx [2\delta g' \{A g' + B(1-g^2)\} - 4\delta g \{B g g' + (1-g^2)g\}] = 0,$$

производя интегрирование по частям и приняв во внимание условия (1.9) при $x = \pm \infty$, получаем дифференциальное уравнение для $g(x)$, удовлетворяющее условиям (1.9). Его решение (при соответствующем выборе начала отсчета координаты x) имеет вид

$$g = \text{th } x/d, \quad (3.6)$$

где

$$d = \sqrt{A/C}. \quad (3.7)$$

Таким образом, функция (3.2) распределения молекул газа по скоростям имеет вид

$$F = \frac{F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v})}{2} + \frac{F_2(\mathbf{v}) - F_1(\mathbf{v})}{2} \text{th } x/d, \quad (3.8)$$

откуда следует, что, например, давление газа в случае как слабых, так и сильных разрывов выражается в рассматриваемом приближении

формулой (1.1). Задача же определения ширины скачка d на основании (3.7) сводится к вычислению интегралов A и C .

Произведем предварительно некоторую замену переменных. Введем обозначения [см. (2.11)]:

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 = 20 \frac{3 - 5r^2}{9 - 25r^2}, \quad t = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{2r}{3 - 5r^2}, \quad (3.9)$$

так что

$$\alpha_1 = \frac{S(1+t)}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{S(1-t)}{2}. \quad (3.10)$$

Заметим, что на основании (2.2) или (2.14) параметр t равен относительному скачку температуры.

Далее, вместо скорости молекулы \mathbf{v} введем вектор \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = \frac{\sqrt{S}}{2} (\mathbf{v} - i\mu), \quad (3.11)$$

где \mathbf{i} — единичный вектор по оси X . В этих обозначениях выражение (2.9) принимает вид

$$F_i = \frac{5}{2} (1 - vr) \left[\frac{5(1+vt)}{2\pi} \right]^{1/2} e^{-2(1+vt)p^2 - 4\lambda p_x - \frac{2\lambda^2}{1+vt}}, \quad (3.12)$$

где

$$\mathbf{v} = +1 \text{ при } i = 1, \quad \mathbf{v} = -1 \text{ при } i = 2, \quad (3.13)$$

$$\lambda = \frac{\alpha_i(\mu + u_i)}{\sqrt{S}} = \frac{2\mu}{\sqrt{S}} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5(1-r^2)(9-25r^2)}{(3-5r^2)}}. \quad (3.14)$$

Далее, выражения (3.5) для A и $\chi(\mathbf{v})$ принимают вид

$$A = \frac{25\sqrt{S}}{4\pi^3} \int Q^2 \left(p_x + \frac{S\lambda}{4} \right)^2 e^{-4p^2 - 8\lambda p_x} d\mathbf{p}, \quad (3.15)$$

где

$$Q = (1-r)(1+t)^{3/2} e^{-2tp^2 - \frac{2\lambda}{1+t}} - (1+r)(1-t)^{3/2} e^{2tp^2 - \frac{2\lambda}{1-t}}, \quad (3.16)$$

$$\chi = \frac{25}{4\pi^4} S (1-r^2)(1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda^2}{1-t^2}} \int d\mathbf{p} d\Omega | \mathbf{a}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 | R e^{-2(p^2 + p_1^2 - 4\lambda(p_x + p_{1x}))}, \quad (3.17)$$

$$R = \sum_{v=-1}^{v=+1} e^{-2vt(p_1^2 - p^2)} [e^{4vt\{(ap_1)^2 - (ap)^2\}} - 1]. \quad (3.18)$$

При выводе выражения для χ учтено, что на основании (2.3)

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + w\mathbf{a}, \quad \mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1 - w\mathbf{a}, \quad w = (\mathbf{a}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}), \quad (3.19)$$

и, стало быть, $p'^2 + p_1'^2 = p^2 + p_1^2$, $p'_x + p_{1x}' = p_x + p_{1x}$.

Интеграл A вычисляется элементарно, но мы не будем приводить здесь громоздкой общей формулы, а рассмотрим только два предельных случая.

В случае слабых скачков $t \rightarrow 0$, $r \rightarrow \frac{3}{2}t$, $\lambda^2 \rightarrow \frac{15}{16}$, $S \rightarrow \frac{20}{3}$ и с точностью до членов порядка t^4

$$A = \frac{625}{512\pi} \sqrt{\frac{15}{\pi}} t^2 + O(t^4). \quad (3.20)$$

В случае сильных скачков $t \rightarrow 1$, $r \rightarrow \frac{3}{5}$, $\lambda^2 \rightarrow \frac{3(1-t)}{4}$, $S \rightarrow \frac{16}{3(1-t)}$

$$A = 2 \left[\frac{2}{3\pi(1-t)} \right]^{1/2} + O \left(\frac{1}{\sqrt{1-t}} \right). \quad (3.21)$$

При вычислении интеграла χ вместо вектора \mathbf{p}_1 введем вектор $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}$. Тогда

$$\chi = \frac{25}{4\pi^4} S (1-r^2) (1-t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda^2}{1-t^2}} \int d\mathbf{q} d\Omega |\mathbf{a}\mathbf{q}| R e^{-4p^2-4p\mathbf{q}-2q^2-4\lambda^2(2p_x+q_x)}, \quad (3.22)$$

где

$$R = \sum_{\nu} e^{-2\nu t(q^2+2p\mathbf{q})} [e^{4\nu t\{(a\mathbf{q})^2+2(a\mathbf{q})(a\mathbf{p})\}} - 1] \quad (3.23)$$

Рассмотрим сначала предельный случай слабых скачков ($t \rightarrow 0$). Разложим скобку в выражении (3.23) для R по степеням параметра t , проинтегрируем R по $d\Omega$, разложим после этого и множитель $e^{-2\nu t(q^2+2p\mathbf{q})}$ по степеням t , просуммируем по ν и сохраним в результате только члены, пропорциональные наименьшей исчезающей степени t , а именно t^2 . В результате получим

$$\chi = \frac{100}{3\pi^3} S t^2 e^{-4\lambda} \int q d\mathbf{q} [2q^2 p^2 - 6(\mathbf{q}\mathbf{p})^2 - 4q^2(\mathbf{q}\mathbf{p}) - q^4] e^{-4p^2-4p\mathbf{q}-2q^2-4\lambda^2(2p_x+q_x)}.$$

Элементарное, но громоздкое интегрирование приводит затем к результату

$$\chi = \frac{25S t^2}{48\pi^2 k} e^{-k^2} \left[\Phi_0 + 4\sqrt{2}\lambda \frac{k_x}{k} \Phi_1 + 8\lambda^2 \left(\frac{3k_x^2}{k^2} - 1 \right) \Phi_2 \right], \quad (3.24)$$

где вместо \mathbf{p} введем вектор $\mathbf{k} = \sqrt{2}(\mathbf{p} + i\lambda)$; функции Φ_k имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (-39 + 6k^2 + 36k^4 - 8k^6) I(k) - (9k - 20k^3 + 4k^5) e^{-k^2}, \\ \Phi_1 &= \left(\frac{9}{k} - 30k - 12k^3 + 8k^5 \right) I(k) - (9 + 8k^2 - 4k^4) e^{-k^2}, \\ \Phi_2 &= \left(-\frac{3}{2k^2} + 3 - 6k^2 - 4k^4 \right) I(k) + \left(\frac{9}{2k} - 2k - 2k^3 \right) e^{-k^2}, \\ I(k) &= \int_0^k e^{-x^2} dx. \end{aligned}$$

Вносим (3.24) в выражение (3.5) для C , принимая во внимание, что $d\mathbf{v} = \frac{8}{S^{3/2}} d\mathbf{p} = \left(\frac{2}{S} \right)^{3/2} d\mathbf{k}$. Выполнив интегрирование по углам, определяющим направление вектора \mathbf{k} и приняв во внимание, что $\lambda^2 \rightarrow \frac{15}{16}$ при $t \rightarrow 0$, получаем

$$C = \frac{1}{9\pi^3} \sqrt{\frac{S}{2}} \left(\frac{5t}{4} \right)^4 \int_0^{\infty} dk [\Phi_0^2 + 10\Phi_1^2 + 45\Phi_2^2] e^{-2k^2}. \quad (3.25)$$

Путем интегрирования по частям все входящие в (3.25) интегралы приводятся к элементарным интегралам и к интегралу ¹

$$\int_0^{\infty} e^{-2k^2} I^2(k) dk = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

¹ Эта формула доказывается путем следующего преобразования

$$I^2(k) = \int_0^k e^{-x^2} dx \int_0^k e^{-y^2} dy = 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{k/\cos\varphi} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} [e^{-k^2/\cos^2\varphi}] d\varphi.$$

В результате элементарных, хотя и очень громоздких, вычислений получаем, приняв во внимание, что $S \rightarrow \frac{20}{3}$ при $t \rightarrow 0$

$$C = \frac{\xi}{9 \cdot 64 \cdot \pi^3} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \left(\frac{5t}{4}\right)^4, \quad (3.26)$$

где

$$\xi = \frac{2\,379\,247}{27} - \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot 7337 \left[\frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \sim 8,019 \cdot 10^4. \quad (3.27)$$

Из (3.7), (3.21) и (3.26) следует, что в случае слабых скачков ширина разрыва d равна

$$d = \frac{12 \cdot 2^{3/4}}{t} \sqrt{\frac{3\pi}{\xi}} \sim \frac{0,2189}{t}.$$

С другой стороны, из (2.14) следует, что в слабых разрывах $t \rightarrow \frac{2(p_2 - p_1)}{5(p_2 + p_1)}$, так что

$$d = \frac{p_2 + p_1}{p_2 - p_1} \delta, \quad (3.28)$$

где $\delta = 0,5472$ (при $t \rightarrow 0$).

Величина δ выражена здесь в определяемой уравнением (2.6) единице длины. В обычных же единицах длины

$$\delta = 1,368 l, \quad (3.29)$$

где l — длина свободного пробега молекулы в газе, которую при слабых разрывах можно считать одинаковой по обеим сторонам разрыва. Таким образом, мы доказали формулу (1.10).

Перейдем теперь к вычислению χ и C для случая сильных скачков ($t \rightarrow 1$). В подинтегральное выражение формулы (3.23) для χ входят четыре слагаемые. Квадратичные по q показатели этих слагаемых равны соответственно

$$2(1 \pm t)(q_2^2 + q_3^2) - 2(1 \mp t)q_1^2 \text{ и } -2(1 \pm t)q^2,$$

где q_1, q_2, q_3 означают взаимно-перпендикулярные компоненты вектора \mathbf{q} , причем компонента q_1 параллельна единичному вектору \mathbf{a} . Так как в подинтегральное выражение входит, помимо показательных сомножителей, также и абсолютная величина компоненты q_1 , то при $t \rightarrow 1$ три из четырех интегралов, из которых складывается χ , стремятся к бесконечности соответственно, как $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{1-t}$ и $\frac{1}{(1-t)^2}$, тогда как четвертый интеграл остается конечным. Поэтому при $t \rightarrow 1$ в выражении (3.23) для χ можно оставить один только старший член, а именно можно положить¹:

$$\chi = -\frac{25}{4\pi^4} S (1 - r^2) (1 - t^2)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda}{1-t^2}} \int d\mathbf{q} d\Omega |\mathbf{q}\mathbf{a}| e^{-4p^2 - 2(1-t)(q^2 + 2\mathbf{q}\mathbf{p}) - 4\lambda(2p_x + q_x)}. \quad (3.30)$$

¹ Приведенное в тексте утверждение может показаться неубедительным, потому что учтенный нами член выражения для χ пропорционален $\frac{e^{-4p^2}}{(1-t)^2}$, тогда как некоторые из неучтенных пропорциональны $\frac{1}{1-t} e^{-2(1+t)(p_x^2 + p_z^2) - 2(1 \pm t)p_x^2}$ и поэтому

Выполнив интегрирование по $d\Omega$ и приняв во внимание, что при $t \rightarrow 1$ $r \rightarrow \frac{3}{5}$, получаем

$$\chi = -\frac{8S}{\pi^3} (1-t)^{3/2} e^{-\frac{4\lambda}{1-t^2}} \int q dq e^{-4p^2 - 2(1-t)(q^2 + 2qp) - 4\lambda(2px + qx)}$$

Вносим это выражение для χ в выражение (3.5) для C и выполняем сначала интегрирование по dv , т. е. по $\frac{8}{S^{3/2}} dp$. Отбрасывая в показателе член, пропорциональный $(1-t)^2 (qq')$, получаем

$$C = \frac{1}{\pi^4} \sqrt{\frac{2S}{\pi}} (1-t)^3 K^2, \quad (3.31)$$

где

$$K = \int q dq e^{-2(1-t)q^2 - 4\lambda t q x - \frac{4t\lambda^2}{1-t^2}}. \quad (3.32)$$

Приняв во внимание, что $\lambda^2 \rightarrow \frac{3(1-t)}{4}$ при $t \rightarrow 1$, получаем $K = \frac{\pi n}{2\sqrt{\sigma}(1-t)^2}$, где

$$\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-3/2} + 4 \int_0^{\sqrt{3/2}} e^{-x^2} dx \approx 3,523 \quad (3.33)$$

Приняв далее во внимание, что $S \rightarrow \frac{16}{1-t}$ при $t \rightarrow 1$, получаем окончательно

$$C = \frac{2n^2}{\pi} \left[\frac{2}{3\pi(1-t)} \right]^{3/2}. \quad (3.34)$$

Из (3.7), (3.21) и (3.34) получаем

$$d = \sqrt{\frac{A}{C}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\eta} \approx 0,5031 \quad (\text{при } t \rightarrow 1). \quad (3.35)$$

При $t \rightarrow 1$ и $r \rightarrow \frac{3}{2}$ определяемая формулой (2.16) единица длины x_0 равна $l_1 = 4l_2$, где l_1 и l_2 — длины свободного пробега молекул до и после разрыва. Таким образом,

$$d = 0,5031l_1 = 2,012l_2 \quad (\text{при } t \rightarrow 1), \quad (3.36)$$

что совпадает с формулой (1.11).

Можно сказать, что в предельном случае сильных разрывов более горячий и плотный газ проникает в более холодную и разреженную среду примерно на две длины свободного пробега молекул в этой среде.

Интерполяцией можно из предельных формул (3.28) и (3.35) получить приближенное значение величины d для средних разрывов. Так как $l_1 \neq l_2$, при этой интерполяции нужно, очевидно, пользоваться единицей длины x_0

при $p \rightarrow \infty$ могут превышать учтенный. Если, однако, подставить χ в выражение для C , то можно показать, что вклад в значение C неучтенных нами членов в $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ раз меньше вклада учтенного члена. Физически этот главный учтенный нами член равен числу молекул более горячей и плотной второй компоненты смеси газов (3.2), уходящих за единицу времени из данного интервала скоростей dv благодаря соударениям с молекулами более холодной и менее плотной компоненты l смеси газов, с помощью которой мы приближенно описываем структуру разрыва

Е. С. ФРАДЕИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОДНОМЕРНОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ¹

§ 1. Задача об устойчивости движения

Рассмотрим задачу об устойчивости произвольного одномерного движения двух жидкостей (газов) в «квазиизотермическом» случае (при этом температура, вообще говоря, зависит от времени) с учетом вязкости и диффузии.

В качестве исходных уравнений принимаем:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \Delta U + \eta \Delta \mathbf{v}, \quad (1a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1б)$$

$$\rho \frac{dc}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{j}; \quad (1в)$$

$$p = f(\rho, c, T), \quad (1г)$$

где ρ — плотность, c — концентрация легкого вещества; U — внешнее потенциальное поле; p — давление; T — температура, \mathbf{v} — скорость; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)$, $\mathbf{j} = -\rho D\nabla c$ — диффузионный поток; D — коэффициент диффузии; η — кинетическая вязкость.

Пусть $\rho_0(z, t)$, $c_0(z, t)$, $v_0(z, t)$, $p_0(z, t)$ — известное одномерное решение системы (1) при определенных заданных начальных и граничных условиях, причем мы предполагаем, что невозмущенное решение слабо зависит от координат. Найдем, при каких условиях это решение неустойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. Для простоты рассматривается случай, когда возмущение имеет место в пространственно-ограниченной области, между значениями $z = L$ и $z = 0$. Обычным образом получим из (1) систему уравнений для малых возмущений начального режима. Ограничиваясь двухмерной задачей, эта система уравнений имеет вид (мы перешли к системе координат, движущейся со скоростью невозмущенного движения v_0 , и учли возможность пренебрежения $\frac{\partial v_0}{\partial z}$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 v_z) = 0; \quad (2a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\rho}{\rho_0} \nabla p_0 = -\nabla p + \eta_0 \Delta \mathbf{v}, \quad (2б)$$

¹ Работа выполнена в 1952 г

$$\rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + \rho_0 v_z \frac{\partial c_0}{\partial z} = D (\nabla \rho \nabla c_0) + \rho_0 D \Delta c, \quad (2в)$$

$$p = f(\rho, c, T), \quad (2г)$$

$$\text{где } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial c} \nabla c + \frac{\partial p}{\partial \rho} \nabla \rho, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \mathbf{i}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{k}_0 \frac{\partial}{\partial z};$$

ось z выбрана в направлении невозмущенного движения¹.

Так как коэффициенты при неизвестных в (2) не зависят от x (невозмущенное движение зависит от z), то зависимость ρ , \mathbf{v} , c , p от x можно взять в виде $e^{ik_x x}$, где k_x — действительное число. Учитывая, что невозмущенное движение меняется слабо с изменением z и t , можно решение для всех интересующих нас величин искать в виде линейной комбинации (в общем случае интеграла) решений типа

$$a_n(z, t) e^{i\omega t - i(k_n r)}, \quad (3)$$

где z , вообще говоря, может быть комплексным числом и подбирается так, чтобы удовлетворить необходимым граничным условиям. Величина a_n в (3) зависит от z и t , причем

$$\frac{1}{a_n} \frac{\partial a_n}{\partial t} \ll i\omega, \quad \frac{1}{a_n} \frac{\partial a_n}{\partial z} \ll -ik_z. \quad (4)$$

Для компонент Фурье $\rho(\omega, k)$, $\mathbf{v}(\omega, k)$, $p(\omega, k)$, $c(\omega, k)$ получим из (2) следующую систему уравнений:

$$i\omega \rho + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} v_z - i(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rho_0 = 0, \quad (4а)$$

$$i\omega \rho_0 \mathbf{v} - \frac{\nabla p_0}{\rho_0} \rho = -k^2 \eta_0 \mathbf{v} + i\mathbf{k} \left\{ \frac{\partial p}{\partial c} c + \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho \right\}; \quad (4б)$$

$$i\omega \rho_0 c + \rho_0 v_z \frac{\partial c_0}{\partial z} = -k^2 D \rho_0 c - i(\mathbf{k}\nabla c_0) \rho D, \quad (4с)$$

откуда следует:

$$\rho = - \frac{\frac{\partial \rho_0}{\partial z} v_z - i(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rho_0}{i\omega}, \quad (5а)$$

$$c = \frac{\frac{D}{\omega} \left(k_z \frac{\partial c_0}{\partial z} \right) [(v \nabla \rho_0) - i(\mathbf{k}\mathbf{v}) \rho_0] - \rho_0 (\nabla c_0 \mathbf{v})}{\rho_0 (i\omega + k^2 D)}. \quad (5б)$$

Подставив (5а) и (5б) в (4б), получим

$$\begin{aligned} v_z \left\{ i\omega + vk^2 + \frac{\frac{\partial p_0}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - ik_z \rho_0 \right)}{\rho_0^2 i\omega} + ik_z \left[\frac{\frac{\partial p}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} - ik_z \rho_0 \right)}{\rho_0 i\omega} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \left[\frac{D}{\omega} k_z \frac{\partial c_0}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - i \frac{D}{\omega} k_z^2 \frac{\partial c_0}{\partial z} \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \right]}{\rho_0^2 (i\omega + k^2 D)} \right] \right\} - \\ - v_x \left\{ \frac{k_x \frac{\partial p_0}{\partial z} + ik_z k_x \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho}}{\rho_0 \omega} + \frac{D}{\rho_0} \frac{k_x k_z^2 \frac{\partial c_0}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial c}}{(i\omega + k^2 D)} \right\} = 0, \quad (6а) \end{aligned}$$

¹ При выводе системы уравнений (2) мы учитываем, что начальный режим v_0 , c_0 , ρ_0 , p_0 удовлетворял системе уравнений (1)

$$v_z \left\{ \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{k_x}{\rho_0} - ik_x k_z \frac{\partial p}{\partial \rho}}{\omega} - \frac{ik_x \frac{\partial p}{\partial c} \left(\frac{D}{\omega} k_z \frac{\partial c_0}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - i \frac{D}{\omega} k_z^2 \frac{\partial c_0}{\partial z} \rho_0 - \rho_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \right)}{\rho_0^2 (i\omega + k^2 D)} \right\} +$$

$$+ v_x \left\{ i\omega + \nu k^2 + \frac{k_z^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}{i\omega} - \frac{k_z k_x^2 \frac{\partial c_0}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial c}}{\rho_0 (i\omega + k^2 D)} \frac{D}{\omega} \right\} = 0, \quad (6)$$

где $\nu = \frac{\eta_0}{\rho_0}$.

Необходимым условием того, чтобы система (6) имела нетривиальные решения для v_x и v_z , есть равенство нулю детерминанта

Раскрывая детерминант, получим

$$D = a^2 + \frac{a}{i\omega} \left(k^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} - i \frac{\partial p}{\partial c} \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial z} k_z \right) -$$

$$- \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho (i\omega + k^2 D)} \left\{ a \frac{D}{\omega} k^2 k_z + ik_z^2 \frac{D}{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\rho} a - ik_z a + \frac{k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho}}{i\omega} \right\} = 0, \quad (7)$$

где

$$a = i\omega + \nu k^2.$$

§ 2. Неустойчивость без учета вязкости и диффузии

В этом случае, полагая $\nu = D = 0$, получим из (7)

$$D = -\omega^2 + k^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\omega^2} = 0. \quad (8)$$

Разрешая (8) относительно k_z , получим

$$k_{z,1,2} = \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - \frac{k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\omega^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - k_x^2}. \quad (9)$$

Из граничных условий на обоих концах ($z = L$ и $z = 0$) получаем

$$v_{z=L} = Ae^{i\omega t} \{e^{-ik_z L} + ce^{ik_z L}\} = 0; \quad (10a)$$

$$v_{z=0} = Ae^{i\omega t} \{1 + c\} = 0. \quad (10b)$$

Из (10a) следует

$$c = e^{-2ik_z L} = \exp \left\{ 2iL \sqrt{\frac{\omega^2}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - \frac{k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\omega^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - k_x^2} \right\}. \quad (11)$$

Согласно (10b), должно иметь место $c = -1$, т. е.

$$\frac{\omega^2}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} - \frac{\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - k_x^2 - \frac{k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\omega^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \rho} = \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{4L^2}, \quad (12)$$

где n — любое целое число.

Уравнение (12) определяет спектр допустимых частот при данном k (дисперсионное уравнение). Разрешая (12) относительно ω^2 , получим

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \rho} \left(k_x^2 + \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{4L^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} \pm \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \left(k_x^2 + \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{4L^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right]^2 + k_x^2 \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial c}}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что достаточным условием наличия комплексного корня для ω , а стало быть неустойчивости движения, является неравенство

$$\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} > 0. \quad (14)$$

Условию (14) можно придать другую форму, если учесть следующие соотношения, имеющие место в «квазиизотермическом» случае:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial c} dc + \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho, \quad (15a)$$

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p \frac{1}{\rho^2}, \quad (15b)$$

где μ — химический потенциал. Из (15a) следует

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p = - \frac{\frac{\partial p}{\partial c}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = - \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \rho^2 \quad (16)$$

Условие (14), учитывая (16), можно записать в виде¹

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} > 0. \quad (14a)$$

Нетрудно показать, что для больших k_x

$$\omega = -i \sqrt{-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}} = -i \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \nabla c \nabla p}. \quad (17)$$

Выражение для турбулентной скорости v можно получить, исходя из размерных соображений и с [учетом проведенного исследования неустойчивости движения [соотношения (14), (17)]:

$$u = l_t \sqrt{\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_c \nabla c \nabla p} \quad (17a)$$

(l_t — характерная турбулентная длина). Это выражение совпадает с соотношением (1.15) работы Беленького и Фрадкина (см. настоящий сборник, стр. 207), полученном для v на основе энергетических соображений. Тем самым в общем случае (для любого уравнения состояния) доказана эквивалентность двух методов (размерные соображения с учетом исследования] устойчивости и энергетический метод) получения уравнений турбулентного движения.

¹ Мы учитываем, что $\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$.

§ 3. Учет вязкости и диффузии

Рассмотрим сначала случай, когда диффузией можно пренебречь, а учтем дополнительно по сравнению с § 2 наличие вязкости. При этом (7) принимает вид

$$D = a^2 \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} a + \frac{a}{\rho^2 i \omega} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} k_x^2}{\rho^2 \omega^2} = 0, \quad (18)$$

где

$$a = i\omega + \nu k^2. \quad (18a)$$

Разрешая (18) относительно a , получим

$$a = \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) 2^{-1} \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{-1} \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\omega} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} k_x^2 / \rho^2 \omega^2 \right)}}{2 \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)}. \quad (19)$$

Из (18a) и (19) получаем для k_z следующие решения¹:

$$k_z = \left[-\frac{i\omega}{\nu} - k_x^2 + \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) 2\nu \right]^{-1} \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{-1} + \left. \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{i}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 - 4 \left(1 + \frac{1}{i\omega\nu} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} k_x^2 / \rho^2 \omega^2}}{2 \left(\nu + \frac{1}{i\omega} \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Как в предыдущем случае, из граничных условий получаем дисперсионное уравнение для ω . Не приводя здесь довольно громоздкие выкладки, приведем окончательные выражения для возмущений с малой длиной волны:

$$\text{а) в случае, когда } \nu k^2 \ll \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z} 1}{\frac{\partial p}{\partial \rho}}},$$

$$\omega \approx -i \left\{ \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} - \nu k_x^2} \right\}; \quad (21)$$

$$\text{б) в случае, когда } \nu k^2 \gg \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}},$$

$$\omega \approx -i \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho^2 \nu k_x^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}. \quad (22)$$

¹ Нетрудно убедиться, что (20) есть физически правильное решение для k_z и в пределе $\nu \rightarrow 0$ переходит в (9).

В общем случае для ω приближенно можно получить следующее выражение.

$$\omega \approx \frac{+i \left\{ v k_x^4 \frac{\partial p}{\partial \rho} - \sqrt{v^2 k_x^8 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^2 + 4 \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{k_x^2}{\rho^2} \left(k_x^4 v^2 + \frac{\partial p}{\partial \rho} k_x^2 \right)} \right\}}{2 \left(k_x^4 v^2 + \frac{\partial p}{\partial \rho} k_x^2 \right)} \quad (23)$$

Нетрудно убедиться, что в предельных случаях а и б выражение (23) переходит соответственно в (17) и (22). Резюмируя, можно сказать, что для очень больших k ω определяется формулой (17). С увеличением k растет влияние вязкости, причем последняя не в состоянии сделать движение устойчивым, а только уменьшает степень неустойчивости.

Выясним теперь роль одной лишь диффузии. Для этого рассмотрим крайний случай, когда можно, с одной стороны, пренебречь вязкостью, но, с другой стороны,

$$Dk^2 \gg \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{1}{\rho^2}}{\partial p / \partial \rho}}.$$

В этом случае (7) принимает вид

$$\omega^2 - k^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + 2ik_z \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho} + \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}}{\rho^2 i \omega D} = 0. \quad (23a)$$

Разрешая (23a) относительно k_z , получим

$$k_z = \frac{i \frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{1}{\rho}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - \left(\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{1}{\rho}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \right)^2 - k_x^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} + \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho^2 i \omega D} \frac{\partial p}{\partial \rho}}}. \quad (24)$$

Аналогично тому, как это было показано выше, из граничных условий на концах $z = L$ и $z = 0$ получаем дисперсионное уравнение для ω

$$\frac{\omega^2}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} - \left(\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{1}{\rho}}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} \right)^2 - k_x^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \rho}} + \frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z}}{i \omega D \frac{\partial p}{\partial \rho}} = \frac{\pi^2 (1 + 2n)^2}{4L^2} \quad (25)$$

Чтобы движение было устойчиво, достаточно убедиться, что уравнение (25) не имеет комплексных корней. Так как уравнение (25) третьего порядка относительно ω , то все корни будут действительными, если дискриминант меньше нуля. Нетрудно убедиться, что для больших k_x

$$B = -\frac{1}{27} \left\{ \frac{\partial p}{\partial \rho} k_x^2 - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)^2}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}} \right\}^3 - \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2}{\rho^4 D^2} \quad (26)$$

действительно меньше нуля, а потому все корни ω действительны и движение устойчиво. Таким образом, когда роль диффузии является

определяющей $\left(Dk^2 \gg \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}} \right)$, движение устойчиво и происходит интенсивное диффузионное перемешивание среды. Вполне очевидно, что от дополнительного учета вязкости этот результат не изменится.

В заключение, опуская выкладки, приведем приближенное выражение для частоты ω с учетом малых добавок от диффузии и вязкости

в случае, когда $\nu k^2 \approx Dk^2 \ll \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}}$:

$$\omega = -i \left\{ \sqrt{\frac{\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial c}{\partial z}}{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}}} - (\nu + D) k_x^2 \right\}. \quad (27)$$

Е. С. ФРАДКИН

ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД
С РАЗНЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ¹

§ 1. Отражение ударной волны при наклонном падении
на стенку

Для рассмотрения такой задачи целесообразно перейти к системе координат, в которой точка пересечения фронта ударной волны со стенкой покоится. В этой системе координат мы имеем стационарную (более

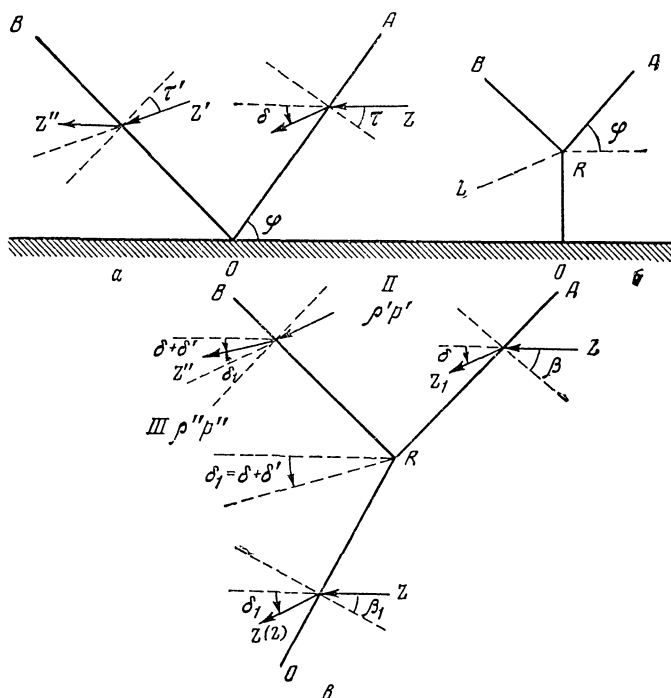


Рис. 1 Схема обозначений

точно см. ниже) картину, изображенную на рис. 1, а. Для дальнейших расчетов введем обозначения $\rho, p, \rho', p', c' = c$ — плотность, давление и изотермическая скорость звука впереди (среда I) и сзади (среда II) удар-

¹ Работа выполнена в 1952 г.

ной волны; ρ'' и p'' — плотность и давление сзади отраженной ударной волны (среда III); D — абсолютное значение нормальной составляющей (к фронту волны) скорости потока впереди падающей волны в системе координат, где фронт волны покоится; v — нормальная составляющая скорости потока сзади фронта ударной волны в той же системе координат; остальные обозначения см. на рис. 1.

Как известно, для ударной изотермической волны имеют место следующие соотношения:

$$D = c\eta^{1/2}, \quad (1.1)$$

$$v = \frac{D}{\eta}, \quad \frac{p'}{p} = \frac{\rho'}{\rho} = \eta. \quad (1.2)$$

В системе координат, где точка пересечения фронта волны со стенкой неподвижна, на фронт ударной волны OA набегаёт поток газа со скоростью \mathbf{z} , причём

$$z = \sqrt{z^2} = \frac{D}{\cos \tau}. \quad (1.3)$$

При этом составляющая скорости по направлению фронта не претерпевает скачок, а перпендикулярная составляющая, проходя через фронт волны, уменьшается согласно (1.2) в η раз.

Таким образом, должны выполняться следующие соотношения:

а) вследствие непрерывности тангенциальных составляющих на фронтах OA и OB

$$\operatorname{tg}(\tau + \delta) = \eta \operatorname{tg} \tau; \quad (1.4)$$

$$\operatorname{tg}(\tau' + \delta') = \eta' \operatorname{tg} \tau', \quad (1.5)$$

б) проекция \mathbf{z} по направлению нормали к фронту ($z_1 = z \cos \tau = D$) после прохождения фронта волны становится согласно (1.2) равной

$$z'_1 = \frac{z_1}{\eta} = \frac{D}{\eta} = \frac{c}{\eta^{1/2}}. \quad (1.6)$$

Поэтому скорость потока сзади падающей ударной волны

$$z' = \frac{z'_1}{\cos(\tau + \delta)} = \frac{c}{\eta^{1/2} \cos(\tau + \delta)}. \quad (1.7)$$

С другой стороны, проекция потока \mathbf{z}' на нормаль к фронту отраженной волны OB согласно (1.1) должна равняться $D' = c\eta'^{1/2}$, т. е.

$$z' \cos \tau' = c\eta'^{1/2}. \quad (1.8)$$

Так как поток сзади отраженной волны должен быть параллелен стенке, то

$$\delta + \delta' = 0. \quad (1.9)$$

Соотношения (1.5) — (1.9) полностью определяют установившуюся картину отражения, приведенную на рис. 1, а, при этом давление p'' и плотность ρ'' сзади фронта отраженной волны больше, чем в невозмущенной среде в $\eta_1 = \eta\eta'$ раз, т. е.

$$p'' = \eta_1 p; \quad \rho'' = \eta_1 \rho. \quad (1.10)$$

Проведя ряд преобразований, можно свести всю задачу к решению следующих двух уравнений при заданных характеристиках падающей ударной волны (т. е. η и $\tau = 90^\circ - \varphi$, φ — угол падения ударной волны):

$$\frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \tau}{1 + \eta \operatorname{tg}^2 \tau} + \frac{(\eta' - 1) \operatorname{tg} \tau'}{1 + \eta' \operatorname{tg}^2 \tau'} = 0; \quad (1.11)$$

$$\operatorname{tg} \tau' = \pm \left(\frac{1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{\eta \eta'} - 1 \right)^{1/2}. \quad (1.12)$$

Выберем знак минус в уравнении (1.12), так как только при этом знаке обеспечен предельный переход к случаю нормального падения и к случаю, когда $\eta = 1$, т. е. когда ударная волна вырождается в звуковую волну.

Решение уравнения (1.11) и (1.12) сильно упрощается в случае малых углов падения (т. е. $\tau \sim \frac{\pi}{2}$). Для η' получается в этом случае следующее решение:

$$\eta' = \eta. \quad (1.13)$$

Согласно (1.10), давление и плотность сзади отраженной волны увеличиваются в η_1 раза по сравнению с p и ρ невозмущенной среды I :

$$\eta_1 = \eta^2. \quad (1.14)$$

В общем случае произвольного угла падения для $\eta_1 = \eta \eta'$ получаем выражение

$$\eta_1 = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \tau \eta^2 + 2\eta + A\eta)}{3} - 2\sqrt{p} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{3}\right), \quad (1.15)$$

где

$$A = \left[\frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \tau}{1 + \eta \operatorname{tg}^2 \tau} \right]^2; \quad \cos \varphi = \frac{q}{p^{3/2}};$$

$$p = \frac{-3\eta(2 + 2\operatorname{tg}^2 \tau \eta^2 + \eta + A\eta - A\eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - A) + (1 + \operatorname{tg}^2 \tau \eta^2 + 2\eta + A\eta)^2}{9};$$

$$q = \frac{(1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau + 2\eta + A\eta)^3}{27} + \frac{\eta^2(1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau)}{2} - \frac{\eta}{6} (1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau + 2\eta + A\eta)(2 + 2\eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau + \eta + A\eta - A\eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - A).$$

Приведем более простое приближенное решение для η_1 , практически мало отличающееся от точного решения:

$$\eta_1 = \eta^2 - \frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \tau}{1 + \eta \operatorname{tg}^2 \tau} [(\eta + 1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - \eta^2) - (\eta - 1)(1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - \eta^2)]^{1/2} \cdot \frac{(\eta - 1)(1 + \eta \operatorname{tg}^2 \tau)}{2(1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau - \eta^2)} - \eta \quad (1.16)$$

Как легко показать, скачок скорости v у стенки равен

$$v = z - z'' = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left[(\eta_1 \eta)^{1/2} (\operatorname{tg}^2 \tau + 1)^{1/2} - \frac{1}{\eta^{1/2}} (\eta_1 + \eta^2 - \eta_1^2 + \eta_1 \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau)^{1/2} \right]. \quad (1.16a)$$

Картина отражения при изменении угла падения волны на стенку приведена на рис. 2. Как видно из рис. 2 (или из формулы (1.16)), при нор-

мальном падении, когда $\varphi = 0$, давление (плотность) сзади фронта от отраженной волны увеличивается в η^2 раз по сравнению с невозмущенным значением. С увеличением угла φ рост давления сзади отраженной волны уменьшается; при некотором φ_{\min} (соответственно $\tau_{\min} = 90^\circ - \varphi_{\min}$)

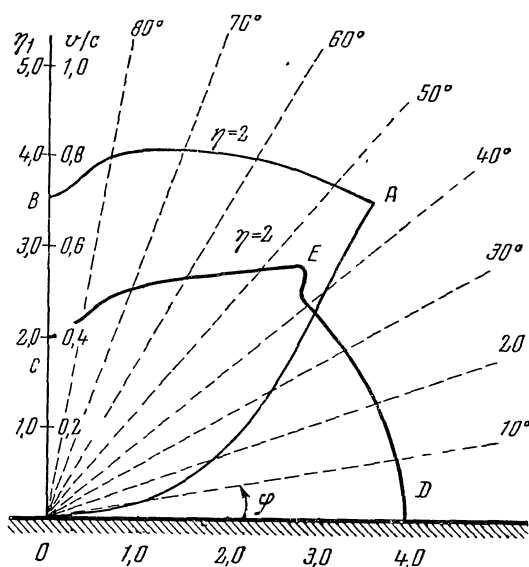


Рис 2 Схема изменения отражения от стенки при изменении угла падения

BAO — кривые v/c , CED — кривые η , DE, OA — кривые для регулярного отражения (см рис 1, а) AB, EC — кривые для отражения с «вилкой» (см. рис 1, б)

т. е для больших φ ($\varphi \geq \varphi_{\text{кр}}$) невозможно показанное на рис. 1, а.

§ 2. Картина отражения в виде трех ударных волн

До сих пор мы рассматривали картину отражения, состоящую из падающей ударной волны и отраженной волны. Начиная с некоторого угла φ , возможна, однако, более сложная картина, когда падающая ударная волна, не доходя до стенки, распадается на две ударные волны, между которыми имеется тангенциальный разрыв скоростей (рис 1, б). При этом точка разветвления R , вообще говоря, движется с какой-то скоростью.

Для того чтобы рассчитывать установившуюся картину отражения в виде «вилки», удобно перейти к системе координат, в которой точка пересечения трех волн неподвижна (рис. 1, в) Пусть z — скорость потока падающей на фронт исходной волны RA , при которой увеличение давления равно η . По тем же соображениям, что и в § 1:

$$z = \frac{c\eta^{1/2}}{\cos \beta} \quad (2.4)$$

(обозначения см на рис. 1, в). При этом должны иметь место следующие соотношения:

рост давления сзади отраженной волны достигает минимума. В дальнейшем, увеличивая угол падения волны φ , η_1 достигает опять значения η^2 . Примечательным является тот факт, что последнее имеет место при угле падения ударной волны, равном 45° ($\varphi = 45^\circ$) и не зависит от η . От величины η зависит лишь угол наклона отраженной волны. А именно: этот угол φ_1 определяется из условия

$$\varphi_1 = \text{arc ctg} \frac{1}{\eta}$$

$$\left(\text{или} \quad \text{tg} \tau' = -\frac{1}{\eta} \right). \quad (1.17)$$

С увеличением угла φ от 45° вблизи $\varphi_{\text{кр}} = \text{arc ctg} \frac{(\eta^2 - 1)^{1/2}}{\eta}$

угол τ' становится мнимым, регулярное отражение, показанное на рис. 1, а,

а) вследствие непрерывности тангенциальных составляющих на фронтах ударных волн RA , RB , OR

$$\operatorname{tg}(\beta + \delta) = \eta \operatorname{tg} \beta; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{tg}(\beta' + \delta') = \eta' \operatorname{tg} \beta'; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_1 + \delta_1) = \eta_1 \operatorname{tg} \beta_1; \quad (2.4)$$

б) скорость z' потока газов сзади волны RA равна [см. (1.7)].

$$z' = \frac{c}{\eta^{1/2} \cos(\beta + \delta)}. \quad (2.5)$$

С другой стороны, проекция скорости потока z' на нормаль к фронту ударной волны, согласно (1.1), должна равняться $D' = c\eta'^{1/2}$. Отсюда имеет место равенство

$$\cos \beta' = (\eta\eta')^{1/2} \cos(\beta + \delta), \quad (2.6)$$

в) проекция скорости z на нормаль к волне RO должна равняться $D_1 = c\eta_1^{1/2}$. Отсюда следует

$$\eta_1^{1/2} \cos \beta = \eta^{1/2} \cos \beta_1; \quad (2.7)$$

г) давление по обеим сторонам тангенциального разрыва должно быть одинаковым (т. е. $p'' = p^{(2)}$), отсюда следует

$$\frac{p''}{p'} \frac{p'}{p} = \eta' \eta = \frac{p^{(2)}}{p} = \eta_1; \quad (2.8)$$

д) векторы z'' и z^2 должны быть параллельны, т. е.

$$\delta + \delta' = \delta_1. \quad (2.9)$$

Система (2.2) — (2.9) полностью определяет картину отражения, приведенную на рис. 1 в. Проведя необходимые преобразования, можно всю задачу свести к решению одного уравнения

$$\frac{(\eta_1 - 1) \operatorname{tg} \beta_1}{1 + \eta_1 \operatorname{tg}^2 \beta_1} = \frac{\frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \beta}{1 + \eta \operatorname{tg}^2 \beta} + \frac{(\eta_1 - \eta) \operatorname{tg} \beta'}{\eta + \eta_1 \operatorname{tg}^2 \beta'}}{1 - \frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \beta (\eta_1 - \eta) \operatorname{tg} \beta'}{(1 + \eta \operatorname{tg}^2 \beta)(\eta + \eta_1 \operatorname{tg}^2 \beta')}}}, \quad (2.10)$$

где

$$\operatorname{tg} \beta' = \pm \left(\frac{1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{\eta_1} - 1 \right)^{1/2}, \quad (2.11)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \left(\frac{\eta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_1)}{\eta} - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Нетрудно показать, используя предельные случаи, что в формуле (2.11) необходимо брать знак минус для $\beta \geq \beta_{\text{кр}}$ и знак плюс для $\beta \leq \beta_{\text{кр}}$, где $\beta_{\text{кр}}$ определяется из уравнения (2.23).

Для тангенциального скачка скоростей на линии RL получим выражение

$$v_1 = z'' - z^{(2)} = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left\{ [1 - \eta_1^2 + \eta \eta_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta)]^{1/2} - \left[\frac{\eta_1 - \eta_1^2 + \eta_1 \eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta + \eta^2}{\eta} \right] \right\}. \quad (2.12a)$$

Тангенциальный скачок имеет место у стенки, причем величина его определяется формулой

$$v_2 = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} (\eta_1 - 1). \quad (2.126)$$

Перейдем к системе координат, в которой неподвижна точка O пересечения ударной волны со стенкой (см. рис. 1, б). Из условия, что поток сзади фронта RO должен быть параллелен стенке, следует, что вблизи стенки направление OR перпендикулярно к ней. Принимая, что каждая область I, II, III однородна, получим, что фронт OR прямой и перпендикулярен к стенке.

Нетрудно найти связь углов β и β_1 с углом φ (или τ) падающей ударной волны AR (в неподвижной системе координат):

$$\tau = \beta - \beta_1; \quad (2.13)$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta + \beta_1. \quad (2.14)$$

Если β , η найдены, то можно определить скорость ω , с которой передвигается тройная точка R . Так, проекции скорости по направлению нормали к стенке ω_\perp и по направлению стенки ω_\parallel равны (в системе координат, где точка O неподвижна; см. рис. 1):

$$\begin{aligned} \omega_\perp &= \frac{D}{\sin \tau} \left[\sqrt{\sin^4 \tau - \sin^2 \tau + \frac{\cos^2 \tau \sin^2 \tau}{\cos^2 \beta}} - \sin^2 \tau \right] = \\ &= D \left[\sqrt{\sin^2 \tau - 1 + \frac{\cos^2 \tau}{\cos^2 \beta}} - \sin \tau \right]; \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\omega_\parallel = \omega_\perp \operatorname{tg} \tau, \quad (2.16)$$

где

$$D = c\eta^{1/2}.$$

В том случае, когда $\beta = \tau$, как и следовало ожидать, имеем $\omega_\parallel = \omega_\perp = 0$. Когда $\tau = 0$ ($\varphi = 90^\circ$), падающая волна RA параллельна стенке.

Рассмотрим случай, когда $\beta = \tau$, что соответствует $\omega_\perp = \omega_\parallel = 0$, т. е. «вилка» неподвижна в пространстве. Легко видеть, что в этой точке все физические параметры в случае регулярного отражения (см. рис. 1, а) равны соответствующим величинам в картине отражения, приведенной на рис. 1, б, с тем лишь различием, что вместо одного скачка скоростей на границе стенки, показанного на рис. 1, а, на рис. 1, б имеется два скачка скоростей (на границе стенки и на линии RL). Однако сумма этих двух скачков скоростей равна прежнему скачку скоростей¹. Таким образом, в этой точке имеется непрерывный переход от конфигурации с двумя ударными волнами к конфигурации с тремя ударными волнами (от рис. 1, а к рис. 1, б). Из соотношения (2.13) следует, что для этой точки

$$\beta_1 = 0. \quad (2.17)$$

¹ Заметим, что только учет вязкости, теплопроводности и граничных условий даст возможность определить высоту OP «вилки».

Используя (2.17), (2.10) — (2.12), можно найти кривую тройного «стационарного» отражения. Последнее имеет место, когда

$$\eta_1 = \eta (1 + \operatorname{tg}^2 \tau_c). \quad (2.18)$$

Угол τ_c определяется при этом из уравнения

$$[\eta \operatorname{tg}^4 \tau_c - (\eta - 1)^2 \operatorname{tg}^2 \tau_c - 1] \{ \eta^3 \operatorname{tg}^4 \tau_c + [\eta^2 + (\eta - 1)^2 \eta] \operatorname{tg}^2 \tau_c + \eta - 1 \} = 0. \quad (2.19)$$

Единственное решение уравнения (2.19), имеющее физический смысл, есть

$$\operatorname{tg}^2 \tau_c = \frac{(\eta - 1)^2}{2\eta} + \sqrt{\frac{(\eta - 1)^4}{4\eta^2} + \frac{1}{\eta}}, \quad \varphi_c = 90^\circ - \tau_c. \quad (2.20)$$

В частности, когда $\eta = 2$, $\operatorname{tg}^2 \tau_c = 1$, т. е. «стационарная» картина отражения в виде трех ударных волн в этом случае имеет место при падении ударной волны под углом $\varphi = 45^\circ$.

В случае, когда $\eta \rightarrow \infty$

$$\operatorname{tg} \tau_c \approx_{\eta \rightarrow \infty} \eta^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_c \approx \frac{1}{\eta^{1/2}}. \quad (2.21)$$

Вообще говоря, существует область углов φ (τ), для которых возможна как конфигурация в виде двух волн (см. рис. 1, а), так и конфигурация в виде трех волн (см. рис. 1, б). Вопрос о реализации той или иной конфигурации может быть решен более детальным исследованием с учетом граничных условий и, по-видимому, также вязкости. Однако при непрерывности увеличения угла падения φ , оставляя все прочие условия проекции, естественно ожидать непрерывное изменение физических характеристик полученной картины отражения. В этом случае, по-видимому, с увеличением угла φ до угла φ_c [см. (2.20)] имеет место регулярная картина отражения, приведенная на рис. 1, а; начиная с φ_c до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, картина отражения имеет вид конфигурации из трех ударных волн (см. рис. 1, б). Конфигурация из трех волн полностью определяется формулами (2.10) — (2.12а).

Точка $\beta_{кр}$ характерна тем, что при этом угле $\beta' = 0$, т. е. согласно (2.11) в этой точке,

$$\eta_1 = 1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta_{кр}, \quad (2.22)$$

а $\beta_{кр}$ определяется из уравнения

$$\eta^2 \operatorname{tg} \beta_{кр} \left[\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{кр}) \eta}{1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta_{кр}} - 1 \right]^{1/2} (1 + \eta \operatorname{tg}^2 \beta_{кр}) = (\eta - 1) [1 - \eta_1 + \eta(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{кр})]. \quad (2.23)$$

Кривые зависимости η_1 и v от угла падения φ ударной волны на стенку (для случая $\eta = 2$) приведены на рис. 2.

Величина тангенциального скачка скоростей, отложенная на рис. 2, для углов до 45° (регулярное отражение) определялась по формуле (1.16а), а для углов от 45 до 90° — как сумма двух тангенциальных скачков [у стенки и на линии RL (см. рис. 1, б)] $v = v_1 + v_2$, причем v_1 и v_2 определялись по формулам (2.12а) и (2.12б).

§ 3. Наклонное падение ударной волны на поверхности раздела двух сред

Для дальнейших расчетов введем следующие обозначения (рис. 3): ρ, p, c — плотность, давление, изотермическая скорость звука впереди падающей волны (легкая среда); ρ', p' — плотность, давление сзади падающей волны; ρ'', p'' — плотность, давление сзади отраженной волны; $\rho_1, p_1 = p, c_1$ — плотность, давление, изотермическая скорость звука в невозмущенной более плотной среде; ρ_1', p_1' — плотность, давление сзади преломленной] волны в тяжелой среде;

$$\frac{p'}{p} = \frac{p'}{\rho} = \eta; \quad \frac{p_1}{p} = \eta_1; \quad \frac{p''}{p'} = \eta'; \quad \frac{c_1}{c} = k.$$

Остальные обозначения см. на рис. 3.

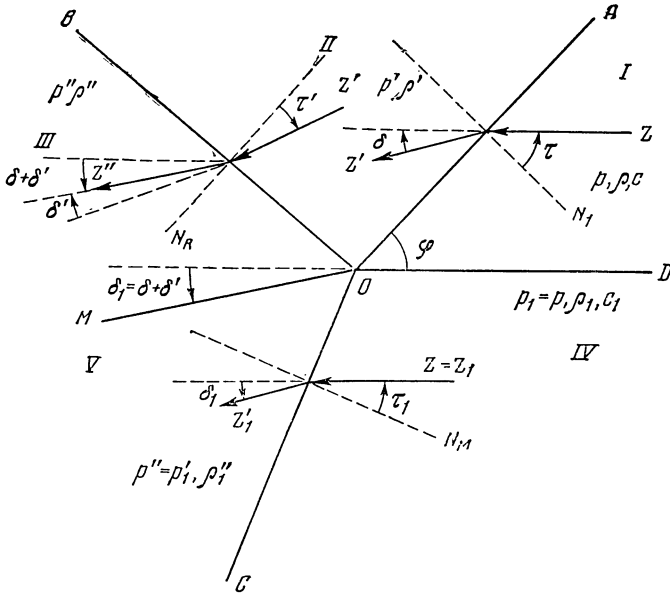


Рис. 3. Схема обозначений

ОА — фронт падающей волны, ОВ — фронт отраженной волны, ОС — фронт преломленной волны, ОDМ — граница раздела двух сред

Удобно расчет установившейся картины отражения проводить в системе координат, где точка пересечения ударной волны со стенкой неподвижна. Легко видеть, что в этой системе координат на фронт волны ОА падает поток газа со скоростью z , причем

$$z = \frac{c\eta^{1/2}}{\cos \tau}. \quad (3.1)$$

При этом должны выполняться следующие соотношения:

1. Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих на фронтах ОА, ОВ, ОС

$$\operatorname{tg}(\tau + \delta) = \eta \operatorname{tg} \tau, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{tg}(\tau' + \delta') = \eta' \operatorname{tg} \tau', \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg}(\tau_1 + \delta_1) = \eta_1 \operatorname{tg} \tau_1. \quad (3.4)$$

2. Скорость z' сзади волны OA равна

$$z' = \frac{c}{\eta^{1/2} \cos(\tau + \delta)}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, проекция этой скорости на нормаль к фронту отраженной волны OB , согласно (1.1), есть $D' = c\eta'^{1/2}$, т. е. должно иметь место равенство

$$\cos \tau' = (\eta\eta')^{1/2} \cos(\tau + \delta). \quad (3.6)$$

3. Преломленная волна OC должна быть направлена под таким углом, чтобы проекция скорости $z_1 = z$ на нормаль к ударной волне OC равнялась $D_1 = c_1\eta_1^{1/2}$. Отсюда следует, что

$$\cos \tau_1 \eta^{1/2} = k \eta_1^{1/2} \cos \tau, \quad (3.7)$$

где $k = \frac{c_1}{c}$.

4. Давление по обеим сторонам границы раздела двух сред должно быть одинаковым (т. е. $p'' = p'_1$), отсюда следует, что

$$\eta' \eta = \eta_1. \quad (3.8)$$

5. Скорости z'' и z'_1 по обеим сторонам поверхности раздела должны быть параллельны, т. е.

$$\delta + \delta' = \delta_1. \quad (3.9)$$

Задачу о регулярном отражении можно свести к решению одного уравнения для η_1 , а именно:

$$\frac{(\eta_1 - 1) \operatorname{tg} \tau_1}{1 + \eta_1 \operatorname{tg}^2 \tau_1} = \frac{(\eta - 1) \operatorname{tg} \tau}{1 + \eta \operatorname{tg}^2 \tau} + \frac{(\eta_1 - \eta) \operatorname{tg} \tau'}{\eta + \eta_1 \operatorname{tg}^2 \tau'}; \quad (3.10)$$

здесь углы τ_1 и τ' определяются из соотношения¹

$$\operatorname{tg} \tau_1 = \left(\frac{\eta(1 + \operatorname{tg}^2 \tau)}{\eta_1 k^2} - 1 \right)^{1/2}; \quad (3.11)$$

$$\operatorname{tg} \tau' = - \left(\frac{1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{\eta_1} - 1 \right)^{1/2}. \quad (3.12)$$

На границе раздела двух сред возникает, вообще говоря, тангенциальный скачок скоростей v

$$v = z'_1 - z'' = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left\{ k \left[1 - \eta_1^2 + \frac{\eta \eta_1}{k^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \tau) \right]^{1/2} - \frac{1}{\eta^{1/2}} (\eta_1 + \eta^2 - \eta_1^2 + \eta_1 \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau)^{1/2} \right\}. \quad (3.13)$$

В том случае, когда ударная волна падает под прямым углом ($\varphi \rightarrow 0$) к поверхности раздела двух сред, задача отражения полностью решается аналитически:

$$\eta_1^{1/2} = \frac{(\eta - 1) + \sqrt{(\eta - 1)^2 + 4(1 + k\eta^{1/2})(\eta + k\eta^{1/2})}}{2(1 + k\eta^{1/2})}; \quad (3.14)$$

¹ Выбор знака при (3.11) и (3.12) определяется из условия предельного перехода к случаям, когда $\eta \rightarrow 1$ и $\operatorname{tg} \tau \rightarrow \infty$ ($\varphi \rightarrow 0$).

$$v \approx \frac{c}{2 \operatorname{tg} \tau} \frac{(\eta_1 - 1) [\eta_1 + \eta^2 - \eta k^2 (\eta_1 + 1)]}{\eta^{3/2} \eta_1} \approx \frac{c \varphi (\eta_1 - 1)}{2 \eta^{3/2} \eta_1} [\eta_1 + \eta^2 - \eta k^2 (\eta_1 + 1)]. \quad (3.15)$$

В частности, для очень сильных ударных волн $\eta \gg 1$, $k \neq 0$

$$\eta_1^{1/2} = \frac{\eta^{1/2}}{k}; \quad (3.16)$$

$$v \approx \frac{c \varphi}{2 \eta^{1/2}} \left(\frac{1}{k^2} - k^2 \right). \quad (3.17)$$

Кривая зависимости величины тангенциального скачка скоростей v от η для малых углов падения φ приведена на рис. 4. В общем случае произвольного угла падения φ и η уравнение (3.10) не решается аналитически. Однако можно получить достаточно точное решение, содержащее все качественные особенности и погрешность которого не превышает 3%.

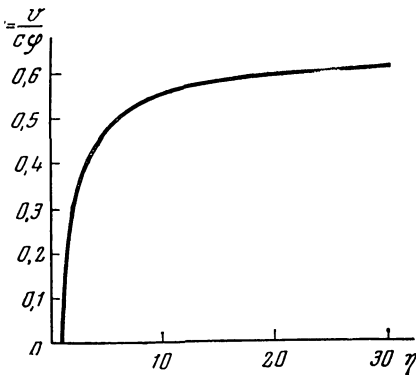


Рис. 4 Кривая зависимости тангенциального скачка скоростей от η в случае падения волны из менее плотной среды в более плотную при малых углах падения φ

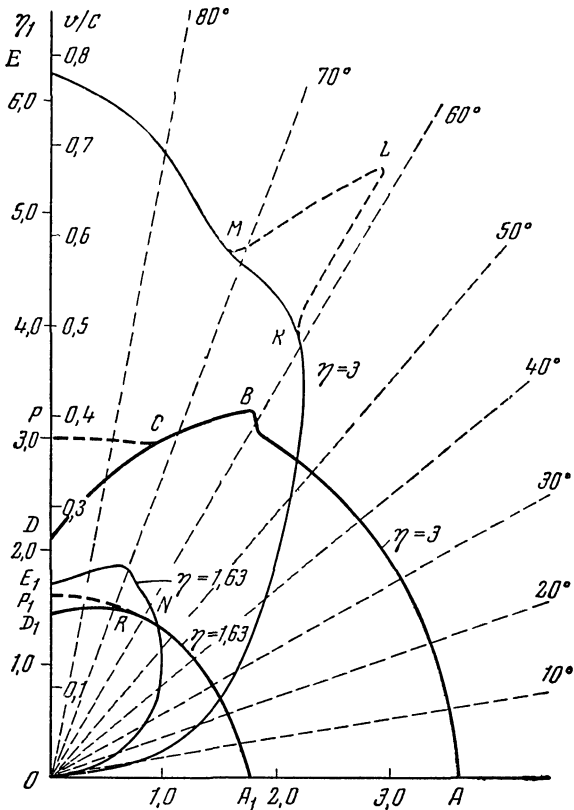


Рис. 5 Кривая η_1 регулярного отражения в зависимости от угла падения φ

$OKLME$, ONE_1 — кривые скачка скоростей на разделе двух сред, AB , A_1R — кривые для регулярного отражения (см. рис. 3), EM , DC , D_1R — кривые для отражения с областью разрежения в тяжелой среде, $ABCP$, A_1RP_1 — кривые установившегося давления на границе раздела двух сред (в единицах давления невозмущенной среды)

Ввиду громоздкости полученного выражения, мы его здесь не приводим. Отметим, что это решение получается, если искать η_1 в виде¹

$$\eta_1 = \eta_0 (1 - x), \quad (3.18)$$

¹ Заметим, что аналогичным способом была получена формула (1.16).

где

$$\eta_0^{1/2} = \frac{(\eta - 1) + \sqrt{(\eta - 1)^2 + 4(1 + k\eta^{1/2})(\eta + k\eta^{1/2})}}{2(1 + k\eta^{1/2})},$$

т. е. η_0 есть значение величины η_1 , которое имеет место в случае падения под углом $\varphi = 0$. При этом x — малая величина.

На рис. 5 приведена кривая η_1 регулярного отражения в зависимости от угла падения φ ударной волны. С увеличением угла φ значение η_1 вначале становится меньше η_0 , а затем начинает расти¹ и при некотором угле φ_0 снова становится равным η_0 . При дальнейшем увеличении угла φ , когда φ больше $\varphi_{кр} = \text{arctg} \frac{(\eta_0 - 1)^{1/2}}{\eta}$, регулярная картина отражения, приведенная на рис. 3, не может осуществиться.

В заключение этого параграфа остановимся на случае, когда отраженная ударная волна отсутствует. Естественно, что в этом случае

$$\eta_1 = \eta. \tag{3.19}$$

Нетрудно из (3.10) — (3.12)¹ убедиться, что последнее имеет место тогда, когда

$$\text{ctg}^2 \varphi = \text{tg}^2 \tau = \frac{k^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{\eta^2}}; \tag{3.20}$$

при этом

$$\text{tg} \tau_1 = \frac{1}{\eta \text{tg} \tau}. \tag{3.21}$$

§ 4. Другие картины отражения в случае, когда ударная волна проходит в более тяжелую среду

При некоторых углах падения φ осуществляется картина отражения, приведенная на рис. 6, а, т. е. падающая ударная волна OA , не доходя границы раздела, распадается на две ударные волны RO и RB , причем точка R , вообще говоря, перемещается с определенной скоростью от границы раздела двух сред. Как было выяснено в конце § 3, то обстоятельство, что ударная волна OR проходит в более тяжелую среду, не вызывая волны отражения, влечет за собой следующее следствие (обозначения см. на рис. 6, а):

$$\eta_{11} = \eta_1; \tag{4.1}$$

$$\text{ctg}^2 \varphi_0 = \text{tg}^2 \tau_0 = \frac{k^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{\eta_1^2}}. \tag{4.2}$$

При этом на границе раздела двух сред (на линии OM) возникает тангенциальный разрыв скоростей, равный

$$v_1 = z_0^{(2)} - z_1' = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left[k(1 - \eta_1^2) + \frac{\eta_1^2}{k^2} (1 + \text{tg}^2 \tau_1)^{1/2} - (1 + \eta_1^2 \text{tg}^2 \tau_1)^{1/2} \right]. \tag{4.3}$$

¹ Заметим, что последнее имеет место для $\eta > \eta_{кр}$ [см (4.16а)], для $\eta < \eta_{кр}$ η_1 уменьшается до значения $\eta_1 = \eta$.

Пока что величина η_1 рассматривается как неизвестный параметр. Она определится после того, как будет установлена вся картина отражения. Расчет остальной части картины отражения, приведенный на рис. 6, а, аналогичен расчету, проведенному в § 2. Здесь также удобно перейти к системе координат, где точка R пересечения трех ударных волн

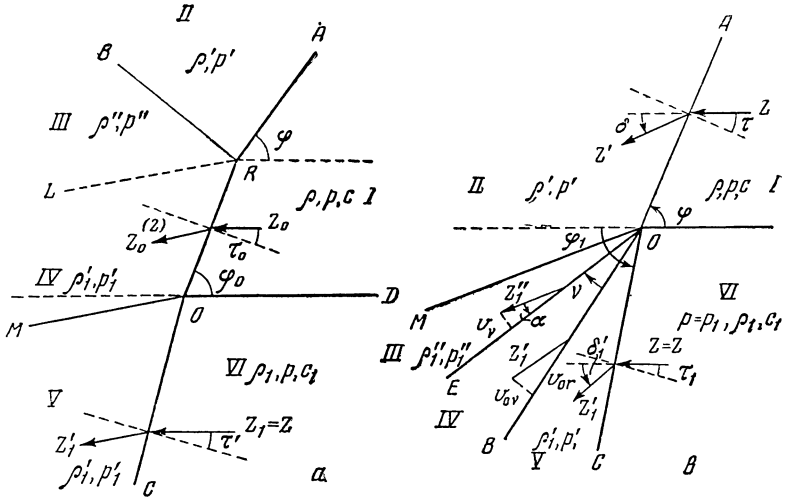


Рис 6 Схема расчета картины отражения

MOD — граница раздела двух сред, $c_1 > c$, $c_1/c = k$ $a - OR, RA, RB, OC$ — фронты ударных волн

$$\eta_1 = p_1'/p, \quad \eta_{11} = p''/p, \quad z_0 = \frac{c\eta_{11}}{\cos \tau_0},$$

$b - OA'$ — фронт падающей волны, OC — фронт преломленной волны, BOE — область разрежения, DOM — граница раздела двух сред, $p'/p = \eta$,

$$p_1' p = \eta_1, \quad v_\Phi = v_{0\Phi} = c_1, \quad \text{tg } \alpha = v_1/v_\Phi$$

неподвижна. В этой системе координат, как и в § 2, должны иметь место следующие соотношения:

$$\frac{(\eta_1 - 1) \text{tg } \beta_1}{1 + \eta_1 \text{tg}^2 \beta_1} = \frac{(\eta - 1) \text{tg } \beta}{1 + \eta \text{tg}^2 \beta} + \frac{(\eta_1 - \eta) \text{tg } \beta'}{\eta + \eta_1 \text{tg}^2 \beta'}; \quad (4.4)$$

$$\text{tg } \beta' = \pm \left(\frac{1 + \eta^2 \text{tg}^2 \beta}{\eta} - 1 \right)^{1/2}; \quad (4.5)$$

$$\text{tg } \beta = \left(\frac{\eta_1 (1 + \text{tg}^2 \beta_1)}{\eta} - 1 \right)^{1/2}. \quad (4.6)$$

Знак минус в (4.5) имеет место для $\beta \geq \beta_{\text{кр}}$, а для $\beta \leq \beta_{\text{кр}}$ берется знак плюс; $\beta_{\text{кр}}$ определяется из уравнения (2.23).

На линии RL возникает тангенциальный скачок скоростей

$$v_2 = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left\{ [1 - \eta_1^2 + \eta\eta_1(1 + \text{tg}^2 \beta)]^{1/2} - \left[\frac{\eta_1 + \eta^2 - \eta_1^2 + \eta_1\eta^2 \text{tg}^2 \beta}{\eta} \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.7)$$

Нетрудно указать связь между углами β , β_1 и τ (или φ) падающей ударной волны в неподвижной системе координат:

$$\tau = \tau_1 + \beta - \beta_1 \quad (4.8)$$

или

$$\varphi = 90^\circ - \tau_1 + \beta_1 - \beta, \quad (4.9)$$

где τ_1 определяется по формуле (4.2).

Найдя β , η_1 , можно определить и скорость ω , с которой передвигается тройная точка R . Так, проекции скорости по направлению нормали к неподвижной границе раздела ω_\perp и по направлению самой границы раздела ω_\parallel равны (в системе координат, где точка O неподвижна, см. рис. 6, а):

$$\begin{aligned} \omega_\perp &= \frac{D}{\sin \tau} \left\{ \sqrt{\sin^4 \tau - \sin^2 \tau + \frac{\cos^2 \tau \sin^2 \tau}{\cos^2 \beta}} - \sin^2 \tau \right\} = \\ &= D \left\{ \sqrt{\sin^2 \tau - 1 + \frac{\cos^2 \tau}{\cos^2 \beta}} - \sin \tau \right\}; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\omega_\parallel = \omega_\perp \operatorname{tg} \tau, \quad (4.10)$$

где

$$D = c\eta^{1/2}. \quad (4.11)$$

Особый интерес представляет случай, когда

$$\beta_1 = \tau_1. \quad (4.12)$$

В этом случае $\beta = \tau$ и $\omega = 0$, т. е. «вилка» неподвижна. При этом угле τ все физические параметры равны соответствующим параметрам в картине регулярного отражения (см. рис. 3) с тем только отличием, что скачок скоростей на границе раздела OM теперь распался на два скачка (на границе раздела OM и на линии RL рис. 6, а), в сумме эквивалентные скачку на линии OM (см. рис. 3).

Учитывая (4.12), (4.2), (4.4) — (4.6), можно найти кривую «стационарной» картины отражения с «вилкой». В самом деле, в этом случае

$$\eta_1 = \eta \frac{(k^2 + 1)(1 + \operatorname{tg}^2 \tau_c)}{2k^2} - \sqrt{\frac{(k^2 - 1)^2}{4k^4} (1 + \operatorname{tg}^2 \tau_c)^2 \eta^2 + 1}. \quad (4.13)$$

Подставив (4.13) в (4.4) — (4.6), найдем¹ при заданном η величину τ_c (или φ_c). Заметим, что угол падения φ_c (соответствующий τ_c), при котором осуществляется «стационарная» тройная конфигурация, приближенно равен:

$$\varphi_c = 90^\circ - \tau_c = \operatorname{arccctg} \left\{ \frac{\eta_0 \left(\frac{k^2 + 1}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 1)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta_0^2}} \right)}{\eta} - 1 \right\}^{1/2}, \quad (4.14)$$

где η_0 определяется формулой (3.18). В частности, когда $\eta \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 0$,

$$\varphi_c \approx \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{k} \right). \quad (4.15)$$

¹ Заметим, что при угле $\tau = \tau_c$ $\eta_1 \approx \eta_0$.

Легко убедиться, что при $\tau = \tau_c$ величина v , вычисленная по формуле (3.13), равна сумме величин v_1 и v_2 , вычисленных по формулам (4.3) и (4.7) соответственно.

Таким образом, при угле $\varphi = \varphi_c$ картина регулярного отражения переходит непрерывным образом в картину отражения, содержащую «тройную» точку, и они физически неразличимы. С увеличением угла φ до угла $\varphi_{\text{раз}}$ осуществляется картина отражения, рассмотренная в этом параграфе. Угол $\varphi_{\text{раз}}$ характерен тем, что при этом угле $\beta = \beta_1$ и $\eta_1 = \eta$, а сам угол равен ¹

$$\text{ctg}^2 \varphi_{\text{раз}} = \text{tg}^2 \tau_{\text{раз}} = \frac{k^2 - 1}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 1)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta^2}}. \quad (4.16)$$

В заключение отметим, что указанная картина отражения имеет место лишь для $\eta > \eta_{\text{кр}}$ для $\eta \leq \eta_{\text{кр}}$ регулярное отражение с увеличением угла падения переходит сразу в картину отражения, рассмотренную ниже.

Величина $\eta = \eta_{\text{кр}}$ зависит лишь от отношения изотермических скоростей двух сред и, как можно показать, равна

$$\eta_{\text{кр}} = 2 \left(\frac{2}{3(1-k^2)} \right)^{1/2} \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3(1-k^2)}{2} \right)^{1/2} \right]. \quad (4.16a)$$

В частности, когда $k^2 = \frac{1}{2}$, $\eta_{\text{кр}} = 1,676$. Когда $k = 0$ (стенка), $\eta_{\text{кр}} = 1$, т. е. картина отражения с «вилкой» всегда возможна.

В случае, когда $\varphi \geq \varphi_{\text{раз}}$ вплоть до $\varphi = 90^\circ$, изученные до сих пор картины отражения не могут осуществляться. В этом случае возникает картина отражения, которая в системе координат, где точка пересечения волны с границей раздела двух сред неподвижна, имеют вид, приведенный на рис. 6, *b*. Падающая волна OA , пройдя в тяжелую среду, распадается в ней на ударную волну и два слабых разрыва OB и OE , между которыми заключена область разрежения.

Найдем значение всех интересующих нас физических величин в случае, когда волна падает под углом φ , большим, чем $\varphi_{\text{раз}}$. В выбранной системе координат должны иметь место следующие соотношения (обозначения см. на рис. 6, *a*):

1. Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих на фронтах OC и OA

$$\text{tg}(\tau + \delta) = \eta \text{tg} \tau, \quad (4.17)$$

$$\text{tg}(\tau_1 + \delta'_1) = \eta_1 \text{tg} \tau_1. \quad (4.18)$$

2. Скорость потока сзади волны OC равна

$$z'_1 = \frac{c_1}{\eta_1^{1/2} \cos(\tau_1 + \delta'_1)}. \quad (4.19)$$

¹ Заметим, что в этой точке

$$\text{tg} \beta = \text{tg} \beta_1 = \frac{(\eta - 1)^{1/2}}{\eta}.$$

С другой стороны, проекция этой скорости на нормаль к фронту слабого разрыва OB должна равняться скорости звука в этой среде (т. е. c_1), а поэтому

$$\cos \tau'_1 = \eta_1^{1/2} \cos(\tau_1 + \delta_1). \quad (4.20)$$

3. Радиальная скорость v_{0z} на фронте слабого разрыва OB равна

$$v_{0r} = c_1 \operatorname{tg} \tau'_1. \quad (4.21)$$

После прохождения области разрежения EOB нормальная проекция скорости z''_1 на фронт второго слабого разрыва OE остается равной изотермической скорости звука в этой среде, радиальная же проекция v_r становится равной

$$v_r = \sqrt{z''_1{}^2 - c_1^2 - 2c_1^2 \ln \frac{\rho_1''}{\rho_1}} = c_1 \sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \operatorname{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 2 \ln \frac{\eta}{\eta_1} - 1}. \quad (4.22)$$

4. Из условия, что проекция скорости z на нормаль к ударной волне OC равна $D_1 = c_1 \eta_1^{1/2}$, а по нормали к ударной волне OA она равна $-D = c \eta^{1/2}$, следует, что

$$\eta^{1/2} \cos \tau_1 = k \eta_1^{1/2} \cos \tau. \quad (4.23)$$

5. Давление по обеим сторонам границы раздела двух сред должно быть одинаковым. Это равенство удобно записать в виде

$$\eta' \eta_1 = \eta. \quad (4.24)$$

6. Скорости по обеим сторонам границы раздела должны быть параллельны, т. е.

$$\delta_1 - \nu - \alpha + \frac{\pi}{2} - \tau' = \delta \quad (4.25)$$

углы берутся по абсолютному значению).

7. Согласно (4.21) и формуле (Д. 7) из Дополнения имеем

$$\nu = \frac{1}{c_1} |v_r - v_{0r}| = \left| \sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \operatorname{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 2 \ln \frac{\eta_1}{\eta_1} - 1} - \sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{\eta_1} - 1} \right|. \quad (4.26)$$

8. Угол α определяется из условия

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_\nu}{v_r} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \operatorname{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 2 \ln \frac{\eta}{\eta_1} - 1}}. \quad (4.27)$$

При этом тангенциальный скачок скоростей на границе раздела двух сред равен

$$\nu = z' - z''_1 = c \left\{ \left(\frac{k^2}{\eta_1} \left[1 + \frac{\eta \eta_1}{k^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \tau) - \eta_1^2 \right] - 2k^2 \ln \frac{\eta}{\eta_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{1 + \eta^2 \operatorname{tg}^2 \tau}{\eta} \right)^{1/2} \right\}. \quad (4.28)$$

Система уравнений (4.17) — (4.28) полностью определяет картину отражения¹ (см. рис. 6, *b*) в том случае, когда угол падения ударной волны изменяется от значения $\varphi = \varphi_{\text{раз}}$ [см. (4.16)] до значения $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

¹ Компактно вся система уравнений приведена в § 5, за исключением уравнения (5.7), которое в данном случае заменяется уравнением (4.25). Последнее следует из

Кривые зависимости скачка тангенциальной скорости v и значения η_1 от угла падения ударной волны приведены на рис. 5. Вплоть до угла падения $\varphi = \varphi_{\text{раз}}$ [см. (4.16)] значение η_1 определяет величину установившегося давления на границе раздела двух сред, а именно: $p_{\text{уст}} = \eta_1 p_{\text{нач}}$. Однако для углов падения $\varphi \geq \varphi_{\text{раз}}$ установившееся давление на границе раздела двух сред определяется лишь значением η и равно

$$p_{\text{уст}} = \eta p_{\text{нач}}.$$

По этой причине кривая установившегося давления (в единицах невозмущенного давления p) $ABCP$, A_1RP_1 не совпадает для углов $\varphi > \varphi_{\text{раз}}$ с кривой η_1 (см. рис. 5).

Кривая v для углов $\varphi \leq \varphi_c$ (т. е. для регулярного отражения) OK рассчитывалась по формуле (3.13). Для углов $\varphi_{\text{раз}} \geq \varphi \geq \varphi_c$ имеются два скачка скоростей: один на границе раздела двух сред [штриховая кривая KLM на рис. 5, формула (4.3)] и другой в легкой среде [формула (4.7)]. На сплошной линии KM отложена сумма обоих скачков. Для углов $\varphi > \varphi_{\text{раз}}$ вплоть до $\varphi = 90^\circ$ v рассчитывалось по формуле (4.28).

§ 5. Прохождение ударной волны из тяжелой среды в легкую

Пусть из тяжелой среды на границу раздела с легкой средой падает под углом φ_1 ударная волна, характеризуемая параметром η_1 . В этом случае в системе координат, где точка пересечения фронта волны с границей раздела неподвижна, возникает картина отражения, приведенная на рис. 7.

Повторив рассуждения, аналогичные приведенным в конце § 3, можно получить следующую систему уравнений:

$$\text{tg } \delta_1 = \frac{(\eta_1 - 1) \text{tg } \tau_1}{1 + \eta_1 \text{tg}^2 \tau_1}; \quad (5.1)$$

$$\text{tg } \delta = \frac{(\eta - 1) \text{tg } \tau}{1 + \eta \text{tg}^2 \tau}; \quad (5.2)$$

$$\text{tg}^2 \tau'_1 = \left(\frac{1 + \eta_1^2 \text{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 1 \right); \quad (5.3)$$

$$\text{tg } \tau = \left(\frac{\eta_1 k^2 (1 + \text{tg}^2 \tau_1)}{\eta} - 1 \right)^{1/2}; \quad (5.4)$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \text{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 1 - 2 \ln \frac{\eta}{\eta_1}}}; \quad (5.5)$$

$$v = \sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \text{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 1 - 2 \ln \frac{\eta}{\eta_1}} - \sqrt{\frac{1 + \eta_1^2 \text{tg}^2 \tau_1}{\eta_1} - 1}; \quad (5.6)$$

$$\delta_1 + v + \alpha + \tau' - \frac{\pi}{2} = \delta. \quad (5.7)$$

рис. 6, b и связано с тем, что в данном случае, в отличие от § 5, давление у границы раздела OM больше, чем давление сзади ударной волны в тяжелой среде ($\eta > \eta_1$). Другими словами, на рис. 6, b давление уменьшается от слабого разрыва OE в направлении OB , на рис. 7, наоборот, давление уменьшается от слабого разрыва OB к OC .

Можно показать, что необходимо брать знак плюс перед ν , когда

$$\operatorname{tg} \tau_1 \geq \frac{1}{\eta_1 \left(\frac{k^2 - 1}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 1)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta^2}} \right)^{1/2}}. \quad (5.8)$$

Для удобства в формуле (5.7) углы берутся по абсолютному значению

$$\operatorname{tg} \delta = \nu + \delta_1 + \dots \quad (5.9)$$

Тангенциальный скачок скоростей при этом определяется по формуле (4.28). В том случае, когда ударная волна падает под малым углом φ_1 (т. е. $\tau = \frac{\pi}{2}$), система уравнений (5.1) — (5.5) легко решается.

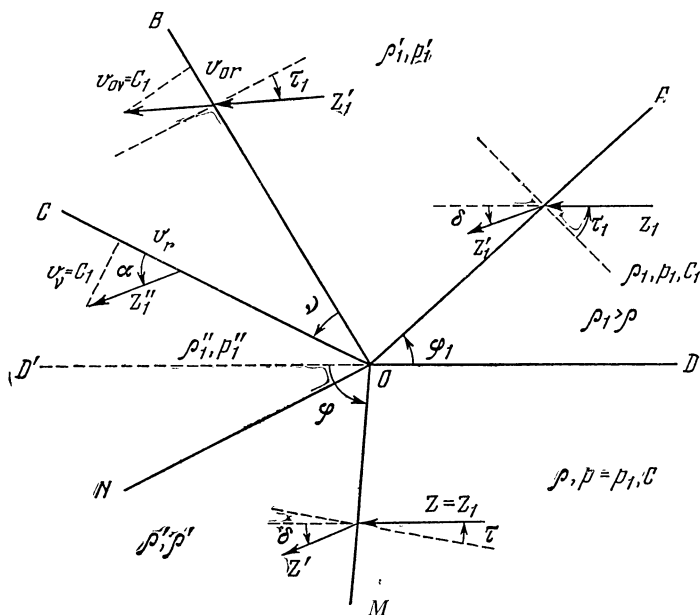


Рис. 7. Схема отражения при падении волны из более плотной среды в менее плотную

OA — фронт падающей волны, BOC — область волны разрежения, DON — граница раздела двух сред, OM — фронт преломленной волны, φ_1 — угол падения; $c_1/c = k$; $\rho'/\rho = \eta$, $\rho_1'/\rho_1 = \eta_1$; $\rho_1''/\rho_1' = \eta'$

Опуская¹ подробные выкладки, укажем, что вся задача в этом случае сводится к решению одного уравнения для определения η :

$$\frac{\eta - 1}{\eta_1^{1/2}} - \ln \frac{\eta}{\eta_1} = \frac{\eta - 1}{k\eta^{1/2}}. \quad (5.10)$$

Практически для всех интересующих нас η_1 в хорошем приближении

$$\eta = \eta_1 \left(1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{\eta_1 - 1}{\eta_1^{1/2}}}{1 + \frac{\eta_1^{1/2}}{2k} + \frac{1}{2k\eta_1^{1/2}}} \right). \quad (5.11)$$

При этом тангенциальный скачок скоростей v пропорционален углу падения ударной волны OA и равен

$$v = \frac{c\varphi_1}{2\eta_1^{3/2}\eta} \left\{ \eta^2\eta_1 - k^2\eta_1^2\eta - \eta_1 + k^2\eta - 2k^2\eta_1\eta \ln \frac{\eta}{\eta_1} \right\}, \quad (5.12)$$

$$\varphi_1 \approx 90^\circ - \tau_1.$$

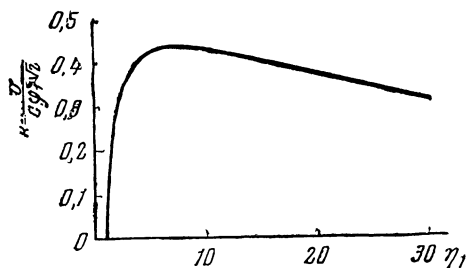


Рис 8 Кривая зависимости v от η_1 при падении волны из более плотной среды в менее плотную (малые углы падения φ_1)

На рис. 8 приведен график зависимости тангенциальной скорости v от значения η_1 падающей волны (для малых углов падения φ_1). Для произвольных углов падения φ_1 система уравнений (5.1) — (5.7), вообще говоря, аналитически не решается; для нескольких интересных нас случаев ($\eta_1 = 1,63$; $\eta_1 = 3$) она была решена численно (рис. 9).

Качественно картину отражения можно описать кривой зависимости η при данном η_1 от угла падающей волны φ_1 или от угла выходящей волны φ (для удобства именно последняя зависимость и приведена на рис. 9).

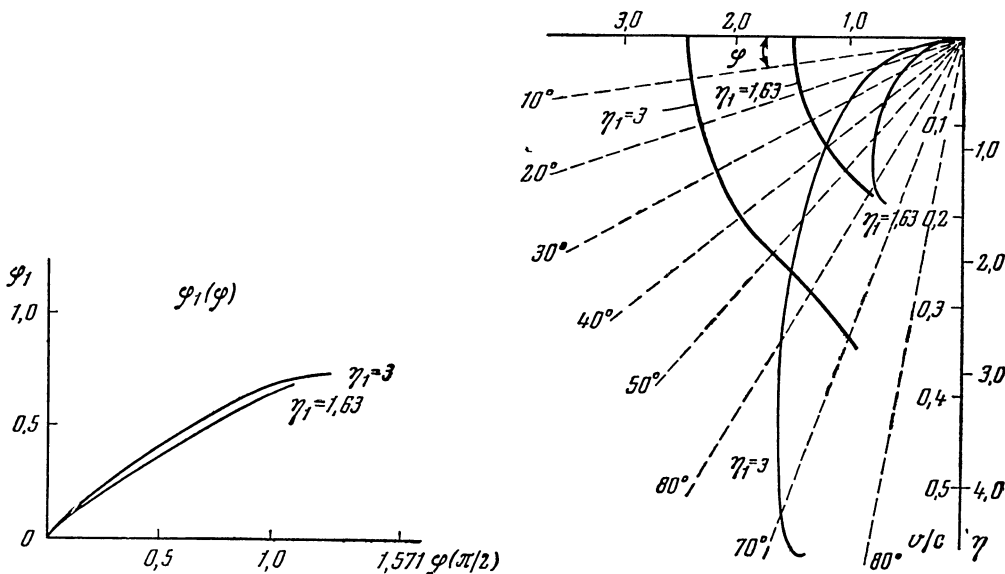


Рис 9. Результаты численного решения

Тонкие кривые — кривые v , жирные кривые — кривые η , φ_1 — угол падения волны в тяжелой среде; φ — угол выхода преломленной волны в легкой среде, установившееся давление на границе раздела в η раз больше давления невозмущенной среды, c и c_1 — изотермические скорости звука в легкой и тяжелой средах, $c_1/c = k = 1/\sqrt{2}$

Для малых углов φ величина η принимает значение (5.11); с увеличением угла φ величина η растет, становясь наибольшей при $\varphi_1 = \varphi_1^0$, где

$$\operatorname{tg} \varphi_1^0 = \eta_1 \left(\frac{k^2 - 1}{2} + \sqrt{\frac{(1 - k^2)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta_1^2}} \right)^{1/2}. \quad (5.13)$$

При этом угле φ_1^0 величина η равняется η_1 . В частности, когда падает сильная ударная волна (т. е. $\eta_1 \gg 1$):

$$\operatorname{tg} \varphi_1^0 = \frac{k}{(1-k^2)^{1/2}}, \quad (5.14)$$

или

$$\sin \varphi_1^0 = k.$$

Соотношение (5.14) дает для φ_1^0 известное значение угла падения, начиная с которого для звуковой волны осуществляется полное внутреннее отражение. При падении ударной волны под углом $\varphi_1 > \varphi_1^0$, как можно показать, не может осуществляться ни одна из до сих пор рассмотренных картин отражения. Для этих углов возникает сложная картина отражения, которая здесь не будет рассматриваться.

В заключение отметим, что при $\varphi_1 = \varphi_1^0$ не только давление на границе раздела принимает максимальное значение (для регулярной области), но и тангенциальный скачок скоростей на границе раздела имеет при этом максимум, равный

$$v = \frac{c}{\eta_1^{1/2}} \left\{ k \left[1 + \frac{\eta_1^2}{k^2} \left(\frac{k^2-1}{2} + \sqrt{\frac{(k^2-1)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta_1^2}} \right) - \eta_1^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \eta_1^2 \left(\frac{k^2-1}{2} + \sqrt{\frac{(k^2-1)^2}{4} + \frac{k^2}{\eta_1^2}} \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.15)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем вкратце результаты проведенных расчетов.

Падение ударной волны на стенку

В этом случае для углов падения φ , меньших некоторого критического угла, имеет место регулярное отражение (см. рис. 1, а). При нормальном падении на стенку устанавливается в итоге давление в $\eta_1 = \eta^2$ раз (η — отношение давления сзади к давлению впереди падающей волны) больше давления невозмущенной среды. С увеличением угла φ от 0 давление вначале понижается (по сравнению с нормальным падением), в дальнейшем с увеличением угла φ (при $\varphi = 45^\circ$ независимо от η) установившееся давление в точности равно давлению при нормальном падении [см. (1.16)]. Начиная с некоторого угла $\varphi_{кр}$, регулярное отражение не может осуществляться, а имеет место картина отражения, состоящая из конфигурации трех волн («вилка», см. рис. 1, б). Вообще говоря, имеется область углов φ , для которых может существовать как картина регулярного отражения (см. рис. 1, а), так и картина отражения с «вилкой» (см. рис. 1, б). Для углов падения φ , больших $\varphi_{кр}$, вплоть до угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеет место лишь картина отражения с «вилкой». Естественно принять, что угол φ , при котором происходит переход от одной картины отражения к другой при неизменных граничных и начальных условиях, такой,

для которого все физические параметры обеих картин отражения совпадают. В этой точке в отличие от общего случая «вилка» стоит неподвижно в пространстве. Зависимость этого угла φ_c , при котором осуществляется «стационарная» картина отражения с «вилкой» от η , дается формулой (2.20). Таким образом, от угла $\varphi = 0$ вплоть до угла $\varphi_{ст}$ имеет место регулярное отражение (см. рис. 2, кривые DE и OA); начиная с угла $\varphi = \varphi_{ст}$ вплоть до угла $\varphi = \frac{\pi}{2}$, картина отражения состоит из конфигурации трех волн, причем «вилка» движется по отношению к стенке со скоростью, определенной формулами (2.15) и (2.16).

Падение ударной волны из менее плотной среды в более плотную

Необходимо различать два случая: 1) когда η падающей волны меньше $\eta_{кр}$ [см. (4.16a)] и 2) когда $\eta > \eta_{кр}$.

В первом случае (см. рис. 5, $\eta = 1,63$) с увеличением угла падения φ от 0 до $\varphi_{раз}$ имеет место регулярное отражение (см. рис. 3). Установившееся давление (или η_1) все время уменьшается по сравнению с давлением при нормальном падении (когда $\varphi = 0$) (см. рис. 5, $\eta = 1,63$). При $\varphi = \varphi_{раз}$ [см. (4.16)] установившееся давление достигает минимального значения, равного давлению сзади падающей волны. Для углов φ , больших $\varphi_{раз}$, падающая волна, пройдя через границу раздела, вызывает в более тяжелой среде ударную волну и область разрежения, заключенную между двумя слабыми разрывами (см. рис. 6, b).

Установившееся давление на границе раздела двух сред, начиная с угла $\varphi = \varphi_{раз}$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, остается равным давлению сзади падающей ударной волны (см. рис. 5, пунктирная кривая RP_1). При этом (в отличие от второго случая) угол преломления ударной волны стремится к значению, равному $\arcsin k$ (как в звуковой волне).

Во втором случае, когда $\eta > \eta_{кр}$, картина отражения во многом напоминает падение на стенку¹, а именно: при нормальном падении установившееся давление на границе раздела определяется формулой (3.14). С увеличением угла падения давление сперва падает, а потом достигает опять значения, которое имеет место при нормальном падении. Начиная с некоторого угла $\varphi = \varphi_{кр}$, картина регулярного отражения (см. рис. 3) не может осуществляться и для этих углов вплоть до угла $\varphi = \varphi_{раз}$ (см. [4.16]) имеет место картина отражения с «вилкой» в легкой среде (см. рис. 6, a). По соображениям, уже указанным выше, точкой перехода от картины регулярного отражения к картине с «вилкой», движущейся в легкой среде, является угол $\varphi = \varphi_c$. При этом угле «вилка» неподвижна и все физические параметры обеих картин отражения (см. рис. 3 и 6, a) совпадают. В отличие от случая отражения от стенки, где «вилка» по крайней мере вблизи стенки для всех углов $\varphi > \varphi_{ст}$ перпендикулярна

¹ Заметим, что в случае падения на стенку, когда $k = 0$, согласно (4.16a) $\eta_{кр} = 1$, т. е. всегда имеет место второй случай.

к стенке, в этом случае угол наклона «вилки» к границе раздела двух сред с увеличением угла φ в интервале $\varphi_{\text{раз}} \geq \varphi \geq \varphi_c$ уменьшается и определяется формулой (4.2). При угле $\varphi = \varphi_{\text{раз}}$ установившееся давление на границе раздела двух сред достигает минимальное значение $\eta_1 = \eta$, равное давлению сзади падающей ударной волны, причем картина отражения состоит из падающей волны и преломленной. При дальнейшем увеличении угла φ от $\varphi_{\text{раз}}$ до $\frac{\pi}{2}$ падающая ударная волна вызывает в более тяжелой среде ударную волну и область разрежения, заключенную между двумя слабыми разрывами (см. рис. 6, *b*). Установившееся давление на границе раздела остается постоянным и равным давлению сзади падающей волны (см. рис. 5, пунктирная кривая *CP*).

Падение ударной волны из более плотной среды в менее плотную

В этом случае картина отражения имеет вид, приведенный на рис. 7. При увеличении угла падения φ_1 установившееся давление на границе раздела (в единицах давления невозмущенной среды) увеличивается от значения (5.11) при нормальном падении до максимального значения, равного давлению сзади падающей ударной волны в тяжелой среде. Последнее осуществляется, когда угол падения $\varphi_1 = \varphi_1^0$ (см. рис. 9).

При угле φ_1^0 [см. (5.13)] имеет место полное преломление и одновременно с давлением имеет максимум и скачок тангенциальной скорости на границе раздела двух сред [см. (5.15) и рис. 9].

Для углов φ_1 , больших, чем φ_1^0 , ни одна из рассмотренных конфигураций отражений не может осуществляться. Возникает сложная картина отражения (аналог полного внутреннего отражения), которая здесь не рассматривалась.

В заключение выражаю свою глубокую признательность С. З. Беленькому за полезное обсуждение полученных результатов.

ДОПОЛНЕНИЕ

Цель данного дополнения — обобщение решения Прандтля — Мейера (см., например, Ландау и Лифшиц. «Механика сплошных сред», § 69) на изотермический случай. Задача, таким образом, сводится к исследованию стационарного движения, все величины которого зависят от угла (см. рис. 6, *a*). При этом в изотермическом случае движение определяется из уравнения Эйлера и непрерывности. В цилиндрических координатах эти уравнения имеют вид:

$$\frac{v_v}{r} \frac{dv_r}{dv} - \frac{v_v^2}{r} = 0; \quad (\text{Д.1})$$

$$v_v \frac{dv_v}{dv} + v_r v_v = - \frac{c^2 dp}{\rho dv}; \quad (\text{Д.2})$$

$$\rho \left(v_r + \frac{dv_v}{dv} \right) + v_v \frac{d\rho}{dv} = 0. \quad (\text{Д.3})$$

Из уравнения (Д.1) имеем

$$v_v = \frac{dv_r}{dv}. \quad (\text{Д.4})$$

Подставляя (Д.4) в (Д.2), получим после интегрирования

$$c^2 \ln \frac{p}{p_0} + \frac{v_v^2 + v_r^2}{2} = \frac{v_{0v}^2 + v_{0r}^2}{2}, \quad (\text{Д.5})$$

где $\rho_0 v_0$ — значение плотности и скорости (например, на фронте слабого разрыва), когда $v = 0$.

Комбинируя (Д.3) и (Д.2), получим

$$v_v = c, \quad (\text{Д.6})$$

где c — скорость звука в данной среде.

Из (Д.6) и (Д.4) следует

$$v_r = cv + v_{0r}. \quad (\text{Д.7})$$

Наконец, из (Д.5) — (Д.7) следует

$$\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_0} = e^{\frac{v_0^2 - v^2}{2c^2}} = e^{-\frac{1}{2} \left(v^2 + \frac{2v_{0r}}{c} v \right)}. \quad (\text{Д.8})$$

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие

Ч А С Т Ь I

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Е. С. Ф р а д к и н. Метод функций Грина в теории квантованных полей и в квантовой статистике 3
7

Введение 7

Г л а в а I. Основные положения 8

§ 1. Функциональное уравнение для S -матрицы (8). § 2. Система уравнений для функций Грина при наличии внешнего источника бозонного поля (11). § 3. Квантовая электродинамика. Некоторые общие соотношения (14). § 4. Система перенормированных уравнений (17). § 5. Система перенормированных уравнений и асимптотика для функций Грина в квантовой электродинамике (22). § 6. К вопросу об устранении «фиктивного» полюса функций Грина бозона (27). § 7. Некоторые дисперсионные соотношения (30). § 8. Решение функционального уравнения для S -матрицы в виде континуального интеграла (35). § 9. Операторное решение задачи взаимодействия двух квантованных полей (37). § 10. Зависимость функций Грина от продольной части электромагнитного поля (41). § 11. К вопросу об инфракрасной асимптотике в квантовой электродинамике (44).

Г л а в а II. Метод функций Грина в квантовой статистике 50

Введение (50). § 1. Функциональное уравнение и операторное решение для статистической суммы (50). § 2. Система уравнений для функций Грина (53). § 3. Перенормировка уравнений для функций Грина (56). § 4. Система частиц, взаимодействующих по закону Кулона (однородное распределение ионов) (58). § 5. Система частиц, взаимодействующих по закону Кулона (неподвижные ионы) (62). § 6. Система частиц с короткодействующим потенциалом (67). § 7. Некоторые общие соотношения в статистической квантовой электродинамике (72). § 8. Статистическая электродинамика частиц со спином нуль (76). § 9. Поляризационный оператор в квантовой статистике (79). § 10. Функциональный метод в квантовой статистике (83).

Г л а в а III. Некоторые вопросы квантовой кинетики 88

§ 1. Метод получения временной функции Грина в статистике (88). § 2. Связь между различными функциями Грина в статистике (92). § 3. Энергетический спектр системы многих частиц (однородная модель) (98)

Глава IV. Теория поля в эвклидовых переменных 104

§ 1. Квантовая теория поля в эвклидовых параметрах (104). § 2. Мезодинамика (107). § 3. Квантовая электродинамика (109). § 4. К теории многих частиц (111)

Заключение

Глава I (114). Глава II (116). Глава III (117). Глава IV (118).

Приложения

Приложение 1. К теории скалярного взаимодействия (118). Приложение 2. Инфракрасная асимптотика в скалярной электродинамике (121). Приложение 3. Метод вычисления сумм в квантовой статистике (123). Приложение 4. Вычисление интегралов при $T = 0$ (126). Приложение 5. Связь между различными калибровками потенциала A_μ (128). Приложение 6. Радиационные операторы и их связь с функциями Грина (133). Приложение 7. Асимптотика уравнения состояния при высоких температурах (135)

В. Б. Вологодский. Энергетический спектр системы взаимодействующих релятивистских частиц 139

А. Е. Шабад. Спектральные представления в координатном пространстве 151

Е. Л. Фейнберг. О современном положении в гидродинамической теории множественной генерации частиц 155

А. А. Емельянов. Гидродинамическая теория множественной генерации с учетом вязкости 169

Предисловие 169

Глава I. Гидродинамический разлет с учетом вязкости 172

§ 1. Введение (172). § 2. Решение уравнений при постоянной вязкости (174). § 3. Функция углового распределения (178). § 4. Решение уравнений для случая вязкости, зависящей от температуры (180). § 5. О влиянии вязкости на роль простой волны в гидродинамической теории множественного образования (182). § 6. О работах Хамагучи (186)

Глава II. О столкновении нуклонов высокой энергии с тяжелыми ядрами 187

§ 1. Введение (187). § 2. Решение для первой отраженной волны (188). § 3. Вторая волна разрежения (193). § 4. Выводы (197).

Глава III. Модель двух центров и гидродинамическая теория множественного образования частиц 199

ЧАСТЬ II

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

С. З. Беленький, Е. С. Фрадкин. Теория турбулентного перемешивания 207

Введение (207). § 1. Основные положения теории турбулентной диффузии (208). § 2. Приближенная система уравнений гидродинамики в области турбулентной диффузии (214). § 3. О длине пути турбулентного перемешивания (218). § 4. Решение уравнения турбулентной диффузии в одномерной задаче (219). § 5. Обсуждение влияния некоторых эффектов (229). Дополнение 1 (234). Дополнение 2 (237).

И. Е. Тамм. О ширине ударных волн большой интенсивности 239

§ 1. Введение и резюме (239). § 2. Основные соотношения проблемы в безразмерных переменных (242). § 3. Приближенное решение основного уравнения вариационным методом (244).

Е. С. Фрадкин. Исследование устойчивости произвольного одномерного гидродинамического течения	250
§ 1. Задача об устойчивости движения (250). § 2. Неустойчивость без учета вязкости и диффузии (252). § 3. Учет вязкости и диффузия (254)	
Е. С. Фрадкин. Преломление и отражение ударной волны от границы раздела двух сред с разными плотностями	257
§ 1. Отражение ударной волны при наклонном падении на стенку (257). § 2. Картина отражения в виде трех ударных волн (260). § 3. Наклонное падение ударной волны на поверхности раздела двух сред (264). § 4. Другие картины отражения в случае, когда ударная волна проходит в более тяжелую среду (267). § 5. Прохождение ударной волны из тяжелой среды в легкую (272). Заключение (275). Дополнение (277).	
Г. А. Милехин. Некролог	279

Квантовая теория поля и гидродинамика
Некоторые вопросы квантовой теории релятивистских
статистических систем и гидродинамика

Труды Физического института им. П. Н. Лебедева

Том XXIX

Утверждено к печати

Физическим институтом им. П. Н. Лебедева

Редактор Издательства *К. П. Гуров*

Технические редакторы *О. М. Гуськова, Ф. М. Хенох*

Сдано в набор 3/II 1964 г. Подписано к печати 29/V 1965 г.
Формат 70×108⁴/₁₆. Печ. л. 17,75. Усл. печ. л. 24,31. Уч.-пзд л. 17,5.
Тираж 3000 экз. Г-08028. Изд. № 3032/64. Тип. зак. № 1979.

Темплан 1964 г. № 472

Цена 1 руб. 23 коп.

Издательство «Наука»
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука»,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10