Л. А. СКОРНЯКОВ

Элементы теории структур

Л. А. СКОРНЯКОВ

Элементы теории структур

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.1
С 44
УДК 512.9

Лев Анатольевич Скорняк

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СТРУКТУ

М., 1970 г., 148 стр. с илл

Редактор *Т. С. Фофанов*

Техн. редактор *Л. А. Пыжов*
Корректор *Т. С. Вайсбер*

Сдано в набор 8/XII 1969 г. Подписано к печати 19/V 1970 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 4,625. Условн. печ. л. 7,77.
Уч.-изд. л. 6,87. Тираж 12000 Т-07866. Цена книги 43 коп.
Заказ 3117

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы

Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я тип. изд-ва «Наука», Москва, Шубинский пер., 10.

$\frac{2-2-3}{33-70}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее руководство адресовано тем математикам, которые хотят ознакомиться с основами теории структур, хотя еще (или уже!) не избрали эту ветвь алгебры своей специальностью. Поэтому при отборе результатов предпочтение отдавалось тем из них, которые или способствуют выработке теоретико-структурного мышления, или находят применение в других областях математики. Для более полного знакомства с теорией структур следует обратиться к монографиям Биркгофа и Сикорского. Последние достижения теории структур освещены в соответствующих статьях сборника «Итоги науки». Необходимые библиографические указания имеются в конце книги. Там же перечислены известные автору учебники по теории структур. Некоторые из них сопровождаются обширными списками журнальной литературы. Настоящее же руководство ограничивается указанием авторов некоторых из включенных в него результатов.

От читателя не требуется никаких предварительных знаний. Достаточно владеть основами элементарной теории множеств. Хотя в тексте неоднократно говорится о группах, кольцах и универсальных алгебрах, эти высказывания носят характер «лирических отступлений». Символы теоретико-множественных объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ употребляются в обычном смысле. Дополнение множества B в множестве A обозначается через $A \setminus B$. В обычном смысле используются символы $\subseteq$ и $\in$.

Под прямым произведением $A \times B$ понимается множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Это понятие естественным образом обобщается на произвольное множество слагаемых. Возникающие при этом логические трудности обсуждаются в § 2. Запись

$$\{x \mid x \text{ обладает свойством } \mathscr{E}\}$$

обозначает множество всех элементов x, обладающих свойством $\mathscr{E}$. Символ $\underset{\mathrm{def}}{=}$ заменяет слова «равно по определению». Ссылка на теорему 5.3 означает, что имеется в виду теорема 3 из § 5. Наличие только одной цифры указывает, что нужная теорема находится в том же параграфе.

Рукопись книги была прочитана А. Х. Лившицем, сделавшим ряд ценных замечаний. Существенному улучшению изложения способствовали и замечания Т. С. Фофановой, прорешавшей, кроме того, все упражнения. Автор глубоко благодарен этим математикам.

§ 1. ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть P — произвольное непустое множество. *Отношением* на множестве P называется подмножество ρ прямого произведения $P \times P$. Если пара $(a, b) \in \rho$, то будем говорить, что элементы a и b *находятся в отношении* ρ, и писать $a\rho b$. Отношение, состоящее из всех пар (a, a), где $a \in P$, назовем *диагональю* и будем обозначать через Δ. *Единичным* называется отношение, совпадающее со всем множеством $P \times P$.

Если P' — подмножество множества P, на котором задано отношение ρ, то про отношение ρ' на P', задаваемое условием

$$a\rho' b \underset{\text{def}}{=} a\rho b,$$

будем говорить, что оно *индуцировано отношением* ρ.

Отношение ρ называется *рефлексивным*, если $a\rho a$ для всякого $a \in P$. Другими словами, отношение ρ рефлексивно, если $\Delta \subseteq \rho$. Если $a\rho b$ влечет $b\rho a$, то отношение ρ называется *симметричным*. Если же $a\rho b$ и $b\rho a$ влечет $a = b$, то ρ называется *антисимметричным* отношением. Отношение ρ называется *транзитивным*, если $a\rho b$ и $b\rho c$ влечет $a\rho c$. Нетрудно убедиться, что диагональ обладает всеми четырьмя перечисленными свойствами, а единичное отношеиие — всеми, кроме антисимметричности. Впрочем, если P состоит только из одного элемента, то единичное отношение совпадает с диагональным.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности* или просто *эквивалентностью*. Эквивалентности играют важнейшую роль почти во всех отделах математики, так как они связаны с разбиениями множества P, т. е. с представлениями его в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств. Для выяснения этой связи назовем *смежным классом отношения* ρ, *определяемым элементом* $a \in P$, множество всех таких x из P, что $x\rho a$. Понятно, что P совпадает с объединением всех смежных классов любого рефлексивного отношения. Систему подмножеств множества P назовем *разбиением*, если эти подмножества попарно не пересекаются, а их объединение совпадает с P.

Теорема 1. *Совокупность смежных классов эквивалентности* ρ *на множестве* P *является разбиением.*

Доказательство. Ввиду рефлексивности каждый элемент множества P содержится в определяемом им смежном классе. Рассмотрим теперь смежные классы A и B, определяемые элементами a и b соответственно. Если $x \in A$, $y \in B$ и $z \in A \cap B$, то имеем $x\rho a$, $z\rho a$, $z\rho b$ и $y\rho b$. Симметричность отношения ρ позволяет записать цепочки

$$x\rho a,\ a\rho z,\ z\rho b$$

и

$$y\rho b,\ b\rho z,\ z\rho a,$$

из которых, в силу транзитивности, вытекает, что $x\rho b$ и $y\rho a$, т. е. $A \subseteq B \subseteq A$. Таким образом, несовпадающие смежные классы не пересекаются.

Множество смежных классов эквивалентности ρ, определенной на множестве P, называется *фактор-множеством* множества P по эквивалентности ρ и обозначается через P/ρ. Отображение P на P/ρ, ставящее в соответствие каждому элементу из P определяемый им смежный класс, называется *естественным*.

Наоборот, каждое разбиение множества P определяет на P эквивалентность, ибо непосредственно из определений вытекает справедливость следующего утверждения:

Теорема 2. *Если* Σ — *разбиение множества* P, *то отношение*

$$a\rho b \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\begin{array}{l}a \text{ и } b \text{ принадлежат одному и}\\ \text{тому же подмножеству из } \Sigma\end{array}}$$

оказывается эквивалентностью, смежными классами которой являются подмножества системы Σ *и только они.*

Заметим, что если, имея эквивалентность ρ, построить с помощью теоремы 1 разбиение Σ, а затем рассмотреть отношение, описанное в теореме 2, то снова получится отношение ρ. Точно так же, если, исходя из некоторого разбиения Σ, последовательно осуществить построения, описанные в теоремах 2 и 1, то опять возникнет Σ. Таким образом, между эквивалентностями на данном множестве и его разбиениями существует взаимно однозначное соответствие.

Предметом дальнейшего изучения явится *порядок*, т. е. рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. Порядком, разумеется, является диагональ. Отношение включения на множестве $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ всех подмножеств множества $\mathfrak{M}$ также является порядком.

Теорема 3. *Если $\leqslant$ — рефлексивное и транзитивное отношение на множестве P, то отношение* ρ:

$$a\rho b \underset{\text{def}}{=} \boxed{a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a}$$

является эквивалентностью. Отношение $\leqslant$ на фактор-множестве $\bar{P} = P / \rho$, определяемое условием

$$\bar{a} \leqslant \bar{b} \underset{\text{def}}{=} a \leqslant b$$

(через $\bar{a}$ обозначается смежный класс отношения ρ, определяемый элементом a), *оказывается порядком.*

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность отношения ρ сразу следует из соответствующих свойств отношения $\leqslant$. Симметричность отношения ρ является непосредственным следствием определения. Если $\bar{a} = \bar{c}$, $\bar{b} = \bar{d}$ и $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, то

$$c \leqslant a \leqslant b \leqslant d,$$

т. е. $\bar{c} \leqslant \bar{d}$ и отношение $\leqslant$ на множестве $\bar{P}$ определено корректно. Его рефлексивность и транзитивность легко выводятся из соответствующих свойств отношения $\leqslant$ на множестве P. Если $\bar{a} \leqslant \bar{b}$ и $\bar{b} \leqslant \bar{a}$, то

$$a \leqslant b \leqslant a,$$

т. е. $\bar{a} = \bar{b}$. Так что отношение $\leqslant$ оказывается и антисимметричным.

Множество P называется *частично упорядоченным*, если на нем зафиксирован некоторый порядок, который будем обычно обозначать символом $\leqslant$, а запись $a \leqslant b$ будем читать «a меньше или равно b». Если $a \leqslant b$ и $a \neq b$, то будем писать $a < b$. Разумеется, на одном и том же множестве можно зафиксировать различные порядки. Возникающие при этом частично упорядоченные множества считаются различными. Множество, на котором зафиксирована диагональ, называется *тривиальным* частично упорядоченным множеством. Важными частично упорядоченными множествами являются множества $\mathfrak{P}$ ($\mathfrak{M}$), упорядоченные по включению. Всякое подмножество частично упорядоченного множества, очевидно, является частично упорядоченным множеством относительно индуцированного порядка.

Частично упорядоченные множества P и P' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение φ множества P на множество P' такое, что $a \leqslant b$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$. Заметим, что взаимная однозначность отображения φ может быть выведена из последнего условия. Отображение φ частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P' называется *изотонным*, если $a \leqslant b$ влечет $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$.

Элементы a и b частично упорядоченного множества P называются *сравнимыми*, если имеет место $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$. Два элемента тривиального частично упорядоченного множества, очевидно, сравнимы тогда и только тогда, когда они совпадают. Элемент v частично упорядоченного множества P называется *наибольшим*, если $v \geqslant x$ для всех $x \in P$. Если же $x \geqslant u$ для всех $x \in P$, то элемент u называется *наименьшим*. Наибольший элемент часто называют *единицей*, а наименьший — *нулем*. Конечно, частично упорядоченное множество может не содержать ни нуля, ни единицы. Таким, в частности, будет неодноэлементное тривиальное частично упорядоченное множество. Элемент M частично упорядоченного множества P называется *максимальным*, если из $a \geqslant M$ для некоторого $a \in P$ вытекает $a = M$. Если из $a \leqslant m$ для некоторого $a \in P$ следует, что $a = m$, то m называется *минимальным* элементом. Легко проверяется, что всякий наибольший элемент является максимальным, а всякий наименьший — минимальным. Обратное, вообще говоря, места не имеет.

Так, например, в тривиальном частично упорядоченном множестве всякий элемент является как максимальным, так и минимальным. Другой пример минимальных, но не наименьших элементов доставляют простые числа в множестве целых положительных чисел, отличных от 1, упорядоченном по делимости (т. е. $m \leqslant n \underset{\text{def}}{=} m$ делит n).

Заметим, что определение наименьшего элемента получается из определения наибольшего элемента простой заменой символа $\leqslant$ на $\geqslant$. Точно таким же образом связаны понятия минимального и максимального элементов. Вообще, имея какое-либо высказывание о частично упорядоченном множестве и заменяя $\leqslant$ на $\geqslant$, получаем новое высказывание. Высказывания, связанные таким образом, называются *двойственными*.

Пусть P — частично упорядоченное множество. Определим на множестве P отношение $\trianglelefteq$, полагая

$$a \trianglelefteq b \underset{\text{def}}{=} b \leqslant a.$$

Легко проверить, что отношение $\trianglelefteq$ оказывается порядком. Таким образом, множество P становится частично упорядоченным множеством P^*. Ясно, что $P^{**} = P$. Частично упорядоченные множества P и P^* называются *двойственными* друг другу.

Принцип двойственности. *Если справедлива какая-то теорема о частично упорядоченных множествах, сформулированная в общелогических терминах и терминах порядка, то справедлива и двойственная ей теорема.*

Действительно, пусть справедлива некоторая теорема T. Допустим, что условия двойственной теоремы T^* выполнены в некотором частично упорядоченном множестве P. Но тогда в двойственном частично упорядоченном множестве P^* выполняются условия теоремы $T^{**} = T$ и, следовательно, справедливо заключение этой теоремы. Но тогда в частично упорядоченном множестве $P^{**} = P$ справедливо заключение теоремы T^*, что и требовалось.

Еще раз подчеркнем, что при применении принципа двойственности необходимо заменить двойственными все высказывания и все понятия, имеющиеся в формулировке и относящиеся к порядку, оставляя без изменения общелогические термины. В сомнительных случаях надлежит или воспроизвести доказательство принципа двойственности, или провести рассуждения, заменяя каждый шаг доказательства теоремы на двойственный.

Если A — непустое подмножество частично упорядоченного множества P, то элемент $a \in P$ называется *точной верхней гранью множества* A, если $a \geqslant x$ для всех $x \in A$ и если из справедливости соотношения $v \geqslant x$ для всех $x \in A$ вытекает, что $v \geqslant a$. Двойственным образом определяется точная нижняя грань множества A: элемент $a \in P$ называется *точной нижней гранью множества* A, если $a \leqslant x$ для всех $x \in A$ и если из условия $u \leqslant x$ для всех $x \in A$ вытекает, что $u \leqslant a$. Точные верхнюю и нижнюю грани множества A в частично упорядоченном множестве P будем обозначать символами $\sup_P A$ и $\inf_P A$ соответственно. Впрочем, индекс P часто будет опускаться. Непосредственно из определений вытекает справедливость следующих утверждений:

(а) *Если* $a \leqslant b$, *то* $\sup \{a, b\} = b$ *и* $\inf \{a, b\} = a$.

(б) *Пусть* $A \subseteq B \subseteq P$. *Если существуют* $\sup A$ *и* $\sup B$ $[\inf A$ *и* $\inf B]$, *то* $\sup A \leqslant \sup B$ $[\inf A \geqslant \inf B]$.

(в) *Если* $A \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{M})$, *то* $\sup A$ *совпадает с объединением подмножеств, входящих в* A, *а* $\inf A$ *— с их пересечением.*

Эти факты будут использоваться без специальных ссылок.

Немного сложнее доказывается

Т е о р е м а 4. *Если* $\{A_\alpha\}$ *— некоторое множество подмножеств частично упорядоченного множества* P, $A = \bigcup A_\alpha$ *и если существуют* $\sup A$ *и* $\sup A_\alpha$ $[\inf A$ *и* $\inf A_\alpha]$ *для всех* α, *то*

$$\sup A = \sup \{\sup A_\alpha\} \quad [\inf A = \inf \{\inf A_\alpha\}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a = \sup A$ и $a_\alpha = \sup A_\alpha$. Так как $a \geqslant x_\alpha$ для всех $x_\alpha \in A_\alpha$, то $a \geqslant a_\alpha$ для каждого α. Если $v \geqslant a_\alpha$ для всех α, то $v \geqslant x_\alpha$ для всех $x_\alpha \in A_\alpha$ и, следовательно, $v \geqslant x$ для всех $x \in A$. Поэтому $v \geqslant a$ и, вспоминая определение, получаем

$$\sup A = a = \sup a_\alpha = \sup \{\sup A_\alpha\}.$$

Второе утверждение доказывается двойственным рассуждением.

Теорема 5. *Пусть φ — изотонное отображение частично упорядоченного множества P в частично упорядоченное множество P' и A — подмножество множества P. Если $a = \sup_P A$ и $a' = \sup_{P'} \varphi(A)$ существуют, то $\varphi(a) \geqslant a'$. Если существуют $b = \inf_P A$ и $b' = \inf_{P'} \varphi(A)$, то $\varphi(b) \leqslant b'$.*

Доказательство. Так как $a \geqslant x$ для всех $x \in A$, то $\varphi(a) \geqslant \varphi(x)$ для всех $x \in A$. Поэтому $\varphi(a) \geqslant x'$ для всех $x' \in \varphi(A)$, откуда $\varphi(a) \geqslant a'$. Второе утверждение доказывается двойственным рассуждением.

Снова рассмотрим непустое подмножество частично упорядоченного множества A. *Верхним конусом* множества A назовем множество всех таких элементов $x \in P$, что $x \geqslant a$ для всех $a \in A$. Двойственным образом определяется *нижний конус*. Верхний и нижний конусы множества A будем обозначать символами A^Δ и A^∇ соответственно.

Теорема 6. *Верхний и нижний конусы обладают следующими свойствами:*

(i) *Если* $A \subseteq B$, *то* $A^\Delta \supseteq B^\Delta$ *и* $A^\nabla \supseteq B^\nabla$;
(ii) $A \subseteq A^{\Delta\nabla} \cap A^{\nabla\Delta}$;
(iii) $A^\Delta = A^{\Delta\nabla\Delta}$;
(iv) $A^\nabla = A^{\nabla\Delta\nabla}$;
(v) $(A \cup B)^\Delta = A^\Delta \cap B^\Delta$;
(vi) $(A \cup B)^\nabla = A^\nabla \cap B^\nabla$.

Доказательство. Свойство (i) вытекает непосредственно из определения. Так как для любых $x \in A$ и $y \in A^\Delta$ справедливо $x \leqslant y$, то $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$. Аналогично проверяется, что $A \subseteq A^{\nabla\Delta}$. Из (i) и (ii), учитывая ассоциативность умножения отображений, получаем

$$A^\Delta \subseteq A^{\Delta(\nabla\Delta)} = A^{(\Delta\nabla)\Delta} \subseteq A^\Delta.$$

Свойство (iv) доказывается аналогично. Включение $(A \cup B)^\Delta \subseteq A^\Delta \cap B^\Delta$ вытекает из (i). Если же $x \in A^\Delta \cap B^\Delta$, то

$x \geqslant y$ для всех $y \in A \cup B$, что устанавливает справедливость свойства (v). Свойство (vi) проверяется аналогично.

Теорема 7. *Если* $\sup A$ *или* $\inf A^{\Delta}$ *существует, то*

$$\sup A = \inf A^{\Delta}.$$

Доказательство. Если $a = \sup A$, то $x \leqslant a$ для всех $x \in A$ и, кроме того, $a \leqslant y$ для всех $y \in A^{\Delta}$. Если же $u \leqslant y$ для всех $y \in A^{\Delta}$, то, поскольку $a \in A^{\Delta}$, имеем $u \leqslant a$, чем и доказывается равенство $a = \inf A^{\Delta}$. Если же существует $b = \inf A^{\Delta}$, то, поскольку для каждого $x \in A$ справедливо соотношение $x \leqslant y$ для всех $y \in A^{\Delta}$, имеем $x \leqslant b$ для всех $x \in A$. Если же $v \geqslant x$ для всех $x \in A$, то $v \in A^{\Delta}$ и, следовательно, $v \geqslant b$. Таким образом, $b = \sup A$.

В силу принципа двойственности справедлива

Теорема 8. *Если* $\inf A$ *или* $\sup A^{\nabla}$ *существует, то*

$$\inf A = \sup A^{\nabla}.$$

Если a и b — элементы частично упорядоченного множества P, причем $a \leqslant b$, то множество

$$[a, b] \underset{\text{def}}{=} \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

называется *интервалом*. Конечно, $a, b \in [a, b]$. Интервал, содержащий в точности два различных элемента, называется *простым*.

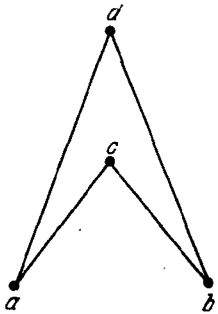
Пусть Q — подмножество частично упорядоченного множества P. Как уже отмечалось, Q является частично упорядоченным множеством. Если $A \subseteq Q$ и существует $a = \sup_P A \in Q$, то легко проверить, что $a = \sup_Q A$. Аналогично из существования $a = \inf_P A \in Q$ вытекает, что $a = \inf_Q A$. Напротив, из существования $\sup_Q A$, вообще говоря, не вытекает существования $\sup_P A$ (рис. 1)*).

---

*) При изображении частично упорядоченного множества рисунками, подобными рис. 1, точками обозначаются элементы этого множества, которые соединяются в том случае, если они являются концами простого интервала. При этом больший элемент располагается выше меньшего. Таким образом, рис. 1 показывает, что $a < c$, $a < d$, $b < c$ и $b < d$.

Более того, точные верхние грани $\sup_P A$ и $\sup_Q A$ могут существовать, но не совпадать друг с другом. С такой ситуацией придется встретиться в § 3.

Частично упорядоченное множество P называется *цепью*, если любые два элемента из P сравнимы. Легко



$P = \{a, b, c, d\}$,
$Q = \{a, b, c\}$,
$\sup_Q \{a, b\} = c$,
$\sup_P \{a, b\}$ не существует

Рис. 1.

убедиться, что всякий максимальный элемент цепи является наибольшим, а всякий минимальный — наименьшим. Без труда проверяется, что объединение возрастающей последовательности вложенных друг в друга цепей некоторого частично упорядоченного множества является цепью. Цепь $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, принадлежащая частично упорядоченному множеству с нулем 0 и единицей 1, называется *композиционным рядом*, если $a_0 = 0$, $a_n = 1$ и все интервалы $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ — простые. Разумеется, композиционный ряд существует не всегда. Число n называется *длиной композиционного ряда*.

Рассмотрим теперь систему $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$ частично упорядоченных множеств, предполагая, что множество L также является частично упорядоченным. Будем считать, что различные множества рассматриваемой системы не имеют общих точек. Это, впрочем, не мешает тому, что некоторые из них являются различными экземплярами одного и того же множества. Пусть P — теоретико-множественное объединение множеств системы $\{P_\alpha\}$. Если

a, $b \in P$, то положим

$$a \leqslant b \underset{\text{def}}{=} \left| \begin{array}{c} a, b \in P_\alpha \text{ и } a \leqslant_{P_\alpha} b \\ \text{или} \\ a \in P_\alpha, b \in P_\beta \text{ и } \alpha < \beta \end{array} \right|^{*)}$$

Ясно, что $\leqslant$ — рефлексивное отношение. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то очевидно, что a, $b \in P_\alpha$ для некоторого α и, следовательно, $a = b$. Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \in P_\alpha$, $b \in P_\beta$, $c \in P_\gamma$ и неравенство $a \leqslant c$ устанавливается несложным рассмотрением следующих четырех случаев: а) $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$; б) $\alpha = \beta$, $\beta < \gamma$; в) $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$; г) $\alpha < \beta$, $\beta = \gamma$. Так что P оказывается частично упорядоченным множеством, которое называется *упорядоченной суммой* множеств P_α. Важнейшими частными случаями этой конструкции являются *кардинальная* и *ординальная суммы*. Первая из них получается, если L — тривиальное частично упорядоченное множество, а вторая — если L — цепь.

Вернемся к рассмотренной выше системе $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$. Пусть $\bar{P}$ — прямое произведение множеств этой системы, т. е. множество функций a, ставящих в соответствие каждому множеству P_α элемент $a_\alpha \in P_\alpha$. Функцию a можно воспринимать как строку (a_α), где α пробегает множество L. Вопрос о существовании множества $\bar{P}$ в случае бесконечного множества L будет обсужден в следующем параграфе. На множестве $\bar{P}$ (если оно существует) определим отношение $\leqslant$, положив

$$(a_\alpha) \leqslant (b_\alpha) \underset{\text{def}}{=} \left| a_\alpha \leqslant b_\alpha \text{ для всех } \alpha. \right|$$

Легко проверяется, что $\leqslant$ — порядок. Полученное частично упорядоченное множество называется *прямым произведением* множеств P_α. Порядок, имевшийся на множестве L, при определении прямого произведения никакой роли не играет. Однако он окажется важным при дру-

---

*) Индекс P_α в символе $\leqslant_{P_\alpha}$ показывает частично упорядоченное множество, в котором рассматривается это отношение.

гом определении порядка на множестве $\bar{P}$, о котором будет идти речь в следующем параграфе.

Упорядоченная сумма P естественным образом содержит свои слагаемые в качестве подмножеств. Это позволяет говорить, что P разлагается в упорядоченную сумму своих подмножеств. Частично упорядоченное множество, не представимое в виде ординальной [кардинальной] суммы своих подмножеств, называется *ординально [кардинально] неразложимым*.

Напротив, сомножители P_α прямого произведения $\bar{P}$ не допускают столь естественного истолкования как его подмножества. Правда, если рассмотреть множество всех строк из $\bar{P}$, у которых на всех местах, кроме некоторого α_0, стоят фиксированные элементы, то возникнет частично упорядоченное множество, изоморфное P_{α_0}. Так что P_{α_0} вкладывается в $\bar{P}$. Однако таких вложений много и все они равноправны между собой.

Теорема 9. *Всякое частично упорядоченное множество является кардинальной суммой своих кардинально неразложимых подмножеств.*

Доказательство. Определим на данном частично упорядоченном множестве P отношение ρ, положив

$$a\rho b \underset{\mathrm{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c}\text{существует такая конечная цепочка}\\ a=a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m=b\\ \text{элементов из } P\text{, что } a_i \text{ и } a_{i+1}\\ \text{сравнимы при } i=1,2,\ldots,m-1\end{array}}$$

Нетрудно сообразить, что ρ — эквивалентность. Ввиду теоремы 1, $P=\bigcup P_\alpha$, где P_α — смежные классы отношения ρ, причем при $\alpha\neq\beta$ пересечение $P_\alpha\cap P_\beta$ пусто, а элементы $x\in P_\alpha$ и $y\in P_\beta$ несравнимы. Следовательно, P — кардинальная сумма подмножеств P_α. Если для какого-либо α частично упорядоченное множество P_α является кардинальной суммой своих непустых подмножеств A и B, то выберем $a\in A$ и $b\in B$. По определению P_α найдется цепочка

$$a=a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{m-1},\ a_m=b$$

со сравнимыми соседними элементами. Однако для некоторого номера i имеем $a_i \in A$ и $a_{i+1} \in B$, что, в силу определения кардинальной суммы, несовместимо со сравнимостью элементов a_i и a_{i+1}.

Аналогичная теорема для ординальной суммы также верна. Она будет доказана в § 3.

Упражнения

1. Если диагональ и единичное отношение на множестве P совпадают, то P — одноэлементное множество.

2. Если отношение является симметричным и антисимметричным, то это — диагональ.

3. Рассматриваются следующие отношения:

№ п/п	Множество	Отношение $A\rho B$
1	Все подмножества некоторого множества	A лежит в B
2	Все конечные подмножества некоторого множества	A и B содержат одинаковое число элементов
3	Все подмножества некоторого множества	$A \cap B$ не пусто
4	Все положительные целые числа	Наибольший общий делитель A и B есть 1
5	Все положительные целые числа	$A = B$ или $A = 2B$

Проверить правильность заполнения таблицы («+» означает, что соответствующее свойство выполнено, «—» — не выполнено):

№ п/п	Рефлексивность	Симметричность	Антисимметричность	Транзитивность
1	+	—	+	+
2	+	+	—	+
3	+	+	—	—
4	—	+	—	—
5	+	—	+	—

4. Пусть транзитивное отношение ρ на множестве P обладает следующими свойствами: а) $x\rho x$ не выполняется ни для какого $x \in P$; б) если $x\rho y$, то $y\not\rho x$ (т. е. $y\rho x$ не справедливо). Положим

$$x \leqslant y \underset{\text{def}}{=} \boxed{x = y \text{ или } x\rho y.}$$

Доказать, что $\leqslant$ — порядок.

5. Если $\leqslant$ — порядок и

$$x\rho y \underset{\text{def}}{=} \boxed{x \leqslant y \text{ и } x \neq y,}$$

то отношение ρ транзитивно и обладает свойствами а) и б) из предыдущего упражнения.

6. Если φ — изоморфизм, а a — наибольший (соответственно, наименьший, максимальный, минимальный) элемент, то $\varphi(a)$ также является наибольшим (соответственно, наименьшим, максимальным, минимальным) элементом. Построить примеры, показывающие, что это неверно для произвольного изотонного отображения.

7. Существуют в точности два неизоморфных двухэлементных частично упорядоченных множества.

8. В конечном частично упорядоченном множестве всегда существуют как максимальные, так и минимальные элементы.

9. Элемент, являющийся минимальным и максимальным одновременно, не сравним ни с каким отличным от него элементом.

10. Если a и b — максимальные элементы, то $\sup\{a, b\}$ существует тогда и только тогда, когда $a = b$.

11. Если подмножество A частично упорядоченного множества P содержит два различных максимальных элемента множества P, то $\sup A$ не существует.

12. Построить пример, показывающий, что $\sup A$ может не существовать, если даже A содержит в точности один максимальный элемент.

13. Сформулировать и доказать утверждения, двойственные указанным в упражнениях 9—11.

14. Доказать, что $\inf\limits_i(\sup\limits_j\{x_{ij}\}) \geqslant \sup\limits_j(\inf\limits_i\{x_{ij}\})$, предполагая, что обе части этого неравенства существуют.

15. Определить на некотором множестве P отношение ρ, не являющееся эквивалентностью, смежные классы которого образуют разбиение.

16. Каждое частично упорядоченное множество является упорядоченной суммой одноэлементных множеств.

17. Частично упорядоченное множество является кардинальной [ординальной] суммой одноэлементных множеств тогда и только тогда, когда оно тривиально [является цепью].

18. Если каждое слагаемое кардинальной [ординальной] суммы разложить в кардинальную [ординальную] сумму, то получается новое разложение исходного частично упорядоченного множества в кардинальную [ординальную] сумму (оно называется *продолжением данного разложения*).

19. Любые два разложения частично упорядоченного множества в кардинальную [ординальную] сумму имеют общее продолжение.

20. Ординальная сумма является цепью тогда и только тогда, когда цепью является каждое слагаемое.

21. Конечное частично упорядоченное множество с нулем и единицей всегда имеет композиционный ряд.

22. Построить пример бесконечного частично упорядоченного множества, имеющего композиционный ряд.

§ 2. ТРАНСФИНИТЫ

В теоретико-множественной математике широко используется трансфинитная индукция. Возможность ее применения базируется на следующем факте:

Теорема 1. *Следующие свойства частично упорядоченного множества P эквивалентны*:

(1) (условие минимальности). *Всякое непустое подмножество множества P является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальные элементы.*

(2) (условие индуктивности). *Если все минимальные элементы множества P обладают некоторым свойством $\mathscr{E}$ и из того, что все элементы x из P, удовлетворяющие условию $x < a$, обладают свойством $\mathscr{E}$, вытекает, что элемент a также обладает свойством $\mathscr{E}$, то свойством $\mathscr{E}$ обладают все элементы множества P.*

(3) (условие обрыва убывающих цепей). *Для всякой цепочки*

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_k \geqslant \ldots$$

элементов из P найдется такой номер n, что

$$a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots .$$

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Допустим, что выполнены посылки условия индуктивности, и рассмотрим множество M всех элементов из P, не обладающих свойством $\mathscr{E}$. Если заключение условия (2) места не имеет, то M не пусто. Ввиду (1) в M имеется минимальный элемент a. По условию этот элемент не может быть минимальным элементом частично упорядоченного множества P. Если $x < a$, то $x \notin M$, и, следовательно, обладает свойством $\mathscr{E}$. Но тогда a обладает свойством $\mathscr{E}$ по условию. Противоречие.

(2) $\Rightarrow$ (3). Условимся считать, что элемент $a \in P$ обладает свойством $\mathscr{E}$, если всякая убывающая цепочка, начинающаяся с элемента a, обрывается, т. е. удовлетворяет условию (3). Всякий минимальный элемент $m \in P$ обладает свойством $\mathscr{E}$, так как для соответствующей цепочки необходимо имеем

$$m = a_1 = a_2 = \dots$$

Если $a \in P$ таков, что все $x < a$ обладают свойством $\mathscr{E}$, то рассмотрим цепочку

$$a = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots$$

Если знаки равенства стоят не всюду, то найдем такой номер i, что $a_1 = \dots = a_{i-1}$ и $a_{i-1} > a_i$. Но тогда элемент a_i обладает свойством $\mathscr{E}$, т. е. цепочка

$$a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant \dots,$$

а значит, и цепочка

$$a_1 \geqslant \dots \geqslant a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant \dots$$

обрывается. Таким образом, элемент a обладает свойством $\mathscr{E}$. Ввиду (2) все элементы из P обладают свойством $\mathscr{E}$, а это и означает, что P удовлетворяет условию (3).

(3) $\Rightarrow$ (1). Допустим, что подмножество M множества P является частично упорядоченным множеством без минимальных элементов. Выберем в качестве a_1 произвольный элемент из M и допустим, что построена цепочка

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n$$

элементов из M. Так как a_n не минимален в M, то в M существует элемент $a_{n+1} < a_n$. Таким образом, возникает бесконечная цепочка

$$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots,$$

не удовлетворяющая условию (3).

Цепь, удовлетворяющая условию минимальности (а значит, и остальным условиям теоремы 1), называется *вполне упорядоченным множеством*. Элементы вполне упорядоченного множества носят название *трансфинитов* или трансфинитных чисел. Вполне упорядоченным множеством является всякая конечная цепь. Естественным образом упорядоченное множество натуральных чисел также вполне упорядочено. Множество всех целых чисел не является вполне упорядоченным относительно естественного порядка, так как оно не имеет наименьшего элемента. Однако оно становится вполне упорядоченным, если установить порядок следующим образом:

$$1 < 2 < 3 < \ldots < 0 < -1 < -2 < -3 < \ldots$$

Другим примером не вполне упорядоченной цепи служит отрезок $[0, 1]$, ибо, например, интервал $(^1/_2, 1)$ не содержит минимального элемента.

Из определения вполне упорядоченного множества вытекает, что оно всегда содержит наименьший элемент 0. Последующие элементы естественно обозначать через 1, 2,... и т. д. Если α — некоторый трансфинит, то нижний конус α^∇, из которого удален элемент α, называется *начальным отрезком* и обозначается через $[0, \alpha)$. Символ $[0, 0)$ понимается как пустое множество. Если $\alpha \neq 0$ и начальный отрезок $[0, \alpha)$ не содержит наибольшего элемента, то трансфинит α называется *предельным*. Примером предельного трансфинита может служить число 0 в рассмотренном выше вполне упорядоченном множестве целых чисел. Для всякого трансфинита α среди трансфинитов верхнего конуса α^Δ, отличных от α, существует наименьший, который будем обозначать через $\alpha + 1$.

Т е о р е м а 2. *Если α — предельный трансфинит, то*

$$[0, \alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} [0, \beta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\gamma \in [0, \alpha)$, то, поскольку между γ и $\gamma + 1$ элементов нет, $\gamma + 1 \leqslant \alpha$. Однако равенство, в силу предельности α, невозможно. Таким образом, $\gamma \in [0, \gamma + 1) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} [0, \beta)$, т. е. $[0, \alpha) \subseteq \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} [0, \beta)$. Обратное включение очевидно.

Цепь C частично упорядоченного множества P называется *максимальной цепью*, если для всякого элемента x из P, не принадлежащего C, подмножество $C \cup x$ уже не является цепью.

Теорема 3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) (аксиома выбора). *Для всякого непустого множества* $\mathfrak{M}$ *существует такое отображение* φ *множества* $\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$ *в множество* $\mathfrak{M}$, *что* $\varphi(A) \in A$ *для всех* $A \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M})$.

(2) (теорема Цермело). *На всяком непустом множестве можно задать порядок, превращающий его во вполне упорядоченное множество.*

(3) (теорема Хаусдорфа). *Всякая цепь любого частично упорядоченного множества может быть вложена в максимальную цепь.*

(4) (лемма Куратовского — Цорна). *Если верхний конус любой цепи частично упорядоченного множества* P *не пуст, то* P *содержит максимальные элементы.*

(5) *Если любая цепь частично упорядоченного множества* P *имеет точную верхнюю грань, то* P *содержит максимальные элементы.*

Доказательство. $(1) \Rightarrow (5)$. Пусть частично упорядоченное множество P таково, что $\sup C$ существует для всякой цепи C из P, а φ — отображение множества $\mathfrak{P}(P)$ в множество P, существующее в силу аксиомы выбора. Допустим, что P не содержит максимальных элементов. Тогда $\{x^{\Delta} \setminus x\}$ — непустое множество для всякого $x \in P$ и можно положить $f(x) \underset{\text{def}}{=} \varphi(x^{\Delta} \setminus x)$. Отметим некоторый элемент $a_0 \in P$. Подмножество H множества P назовем *цорновским*, если: а) $a_0 \in H$; б) если $x \in H$, то $f(x) \in H$; в) если цепь C лежит в H, то $\sup C \in H$. Нетрудно понять, что пересечение H_0 всех цорновских множеств является цорновским множеством. Легко проверяется также, что верхний конус a_0^{Δ} является цорновским множеством. Поэтому $H_0 \subseteq a_0^{\Delta}$.

Элемент $a \in H_0$ назовем *отмеченным*, если из неравенства $z < a$ для некоторого $z \in H_0$ вытекает, что $f(z) \leqslant a$.

Лемма 1. *Если* a — *отмеченный элемент, то множество*

$$B(a) = \{z \mid z \in H_0,\ z \leqslant a \text{ или } f(a) \leqslant z\}$$

является цорновским.

Действительно, $a_0 \in B(a)$, ибо $a \in H_0 \subseteq a_0^{\Delta}$. Если, далее, $x \in B(a)$, то имеет место $x < a$, $x = a$ или $f(a) \leqslant x$. В первом случае имеем $f(x) \leqslant a$, что влечет $f(x) \in B(a)$.

Если $x = a$, то имеем $f(a) \leqslant f(x)$, что опять влечет $f(x) \in B(a)$. Наконец, в третьем случае имеем $f(a) \leqslant x < f(x)$, откуда снова вытекает, что $f(x) \in B(a)$. Если, наконец, C — цепь и $C \subseteq B(a)$, то при $C \subseteq a^{\nabla}$ имеем $\sup C \in a^{\nabla} \cap H_0 \subseteq B(a)$. Если же $c \nleqslant a$ для некоторого $c \in C$, то $f(a) \leqslant c$, ибо $c \in B(a)$. Но тогда $f(a) \leqslant \sup C$ и, следовательно, $\sup C \in B(a)$.

Лемма 2. *Множество A всех отмеченных элементов является цорновским.*

В самом деле, a_0 — отмеченный элемент, ибо $z < a_0$ не имеет места ни для какого $z \in H_0$. Пусть $a \in A$ и $z < f(a)$ для некоторого $z \in H_0$. В силу леммы 1, имеем $z \in H_0 \subseteq B(a)$. Следовательно, $f(a) \leqslant z$ или $z \leqslant a$. Однако первое неравенство невозможно. Если же выполнено второе, то при $z = a$ имеем $f(z) = f(a)$, а при $z < a$, вспоминая, что $a \in A$, получаем

$$f(z) \leqslant a < f(a).$$

Так что $f(a)$ — отмеченный элемент. Пусть, наконец, цепь C лежит в A, $w = \sup C$ и $z < w$ для некоторого $z \in H_0$. Если $z < c$ для некоторого $c \in C$, то, поскольку c — отмеченный элемент, имеем $f(z) \leqslant c \leqslant w$. Если $z \nless c$, то обратим внимание на соотношение $z \in H_0 \subseteq B(c)$, вытекающее из леммы 1. Из него следует, что $z = c$ или $c < f(c) \leqslant z$. Таким образом, если $z \nless c$ для всех $c \in C$, то $z \geqslant c$ для всех $c \in C$. Но тогда $z \geqslant w$, что невозможно. Так что w — отмеченный элемент.

Лемма 3. *H_0 — цепь.*

Действительно, все элементы из H_0, в силу леммы 2, являются отмеченными. Если a, $b \in H_0$, то, согласно лемме 1, $b \in B(a)$. Следовательно, имеет место $b \leqslant a$ или $a < f(a) \leqslant b$.

Теперь заметим, что, в силу леммы 3 и условия, существует $w = \sup H_0$. Но тогда из определения цорновского множества вытекает, что $w \in H_0$, $f(w) \in H_0$ и, следовательно,

$$w < f(w) \leqslant w.$$

Противоречие.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть C — некоторая цепь в частично упорядоченном множестве P. Если $C = P$, то все доказано.

В противном случае рассмотрим множество $L = P \setminus C$ и зададим на нем порядок $\trianglelefteq$, превращающий его во вполне упорядоченное множество. Будем говорить, что трансфинит $\alpha \in L$ обладает свойством $\mathscr{E}$, если для всех $\beta \trianglelefteq \alpha$ существуют цепи $C_\beta \subseteq L$, обладающие следующими свойствами: а) $C \subseteq C_\beta$; б) если $\gamma \lhd \beta \lhd \alpha$, то $C_\gamma \subseteq C_\beta$; в) если $\beta \notin C_\beta$, то β не сравним с каким-либо $\xi \in C_\gamma$ для $\gamma \lhd \beta$. Для наименьшего трансфинита $0 \in L$ положим

$$C_0 = \begin{cases} C, \text{ если } 0 \text{ несравним с каким-либо } c \in C; \\ C \cup 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Так что 0 обладает свойством $\mathscr{E}$. Допустим, что все трансфиниты, меньшие α, обладают свойством $\mathscr{E}$. Ввиду б) множество $\bar{C} = \bigcup\limits_{\beta \lhd \alpha} C_\beta$ является цепью. Положим

$$C_\alpha = \begin{cases} \bar{C}, \text{ если } \alpha \text{ несравним с каким-либо } \bar{c} \in \bar{C}; \\ \bar{C} \cup \alpha \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Этим, как легко видеть, показано, что трансфинит α обладает свойством $\mathscr{E}$. Так как, в силу теоремы 1, множество L удовлетворяет условию индуктивности, то свойством $\mathscr{E}$ обладают все трансфиниты из L. Другими словами, цепи C_α существуют для всех $\alpha \in L$. Положим

$$Q = \bigcup_{\alpha \in L} C_\alpha.$$

Ясно, что Q — цепь. Если она не максимальная, то для некоторого $\xi \notin Q$ множество $Q \cup \xi$ также является цепью. Однако $\xi \notin C$ и, следовательно, является некоторым трансфинитом из L, причем $\xi \notin C_\xi$. Из условия в) вытекает, что ξ несравним с некоторым элементом из Q. Это, однако, противоречит тому, что $Q \cup \xi$ — цепь.

(3) $\Rightarrow$ (4). Пусть частично упорядоченное множество P удовлетворяет посылкам леммы Куратовского — Цорна. Одноэлементное множество a, где $a \in P$, является цепью. Ввиду (3) эта цепь может быть вложена в максимальную цепь C. По условию существует элемент $c \in C^\Delta$. Если c не является максимальным элементом частично упорядоченного множества P, то $c < x$ для некоторого $x \in P$.

Конечно, $x \in C^{\Delta} \setminus C$ и, следовательно, $C \cup x$ — цепь, что противоречит максимальности цепи C.

(4) $\Rightarrow$ (5). Очевидно.

(5) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество. Рассмотрим все подмножества множества $\mathfrak{M}$, на которых можно определить порядок, превращающий их во вполне упорядоченные множества, и обозначим через $\mathfrak{P}$ совокупность всех таких множеств вместе с соответствующими порядками. Разумеется, одно и то же подмножество может попасть в $\mathfrak{P}$ несколько раз, но с различными порядками. Множество $\mathfrak{P}$ не пусто, ибо содержит все одноэлементные подмножества. Определим на $\mathfrak{P}$ порядок $\trianglelefteq$, положив

$$A \trianglelefteq B \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c} A \subseteq B; \\ x \leqslant_A y \text{ влечет } x \leqslant_B y \text{ для любых } x, y \in A; \\ a <_B b, \text{ если } a \in A \text{ и } b \in B \setminus A. \end{array}}$$

Нетрудно убедиться, что отношение $\trianglelefteq$ оказывается порядком. Если $\mathfrak{C}$ — некоторая цепь из $\mathfrak{P}$ и C — объединение всех подмножеств, принадлежащих $\mathfrak{C}$, то определим на C отношение $\leqslant$, положив

$$x \leqslant y \underset{\text{def}}{=} \boxed{x \leqslant_A y \text{ для некоторого } A \in \mathfrak{C}.}$$

Ясно, что $\leqslant$ — рефлексивное отношение. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x \leqslant_A y$ и $y \leqslant_B x$ для некоторых $A, B \in \mathfrak{C}$. Поскольку $\mathfrak{C}$ — цепь, имеем, например, $A \trianglelefteq B$. Следовательно, справедливо $x \leqslant_B y$ и $y \leqslant_B x$, откуда $x = y$. Таким образом, $\leqslant$ — антисимметричное отношение. Если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то, как и выше, можно считать, что $x \leqslant_B y$ и $y \leqslant_B z$ для некоторого $B \in \mathfrak{C}$. Следовательно, $x \leqslant_B z$, а значит, $x \leqslant z$. Этим доказано, что $\leqslant$ — порядок. Если $x, y \in C$, то $x \in A$ и $y \in B$ для некоторых $A, B \in \mathfrak{C}$. Однако, имеем, например, $A \trianglelefteq B$. Следовательно, x и y сравнимы в смысле порядка $\leqslant_B$, а значит, и в смысле порядка $\leqslant$. Таким образом, C — цепь. Если, наконец, имеется цепочка

$$x_1 > x_2 > \ldots,$$

то

$$x_1 \geqslant_{A_1} x_2 \geqslant_{A_2} x_3 \geqslant_{A_3} \ldots$$

для некоторых $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{C}$. Допустим, что для всех $k < m$ доказано, что $x_k \geqslant_{A_1} x_{k+1}$. Тогда имеем $x_m \in A_1$ и $x_m \geqslant_{A_m} x_{m+1}$. Если $A_m \trianglelefteq A_1$, то, очевидно, $x_m \geqslant_{A_1} x_{m+1}$. Допустим, что $A_1 \trianglelefteq A_m$. Если $x_{m+1} \notin A_1$, то $x_{m+1} >_{A_m} x_m$, что невозможно. Если же $x_{m+1} \in A_1$ и $x_{m+1} >_{A_1} x_m$, то опять получаем $x_{m+1} >_{A_m} x_m$. Так что $x_m \geqslant_{A_1} x_{m+1}$. Таким образом, получаем цепочку

$$x_1 \geqslant_{A_1} x_2 \geqslant_{A_1} x_3 \geqslant_{A_1} \ldots$$

Так как A_1 — вполне упорядоченное множество, то, согласно теореме 1, имеем

$$x_n = x_{n+1} = \ldots$$

для некоторого n. Этим доказано, что C — вполне упорядоченное множество, т. е. что $C \in \mathfrak{P}$. Если $A \in \mathfrak{C}$, то $A \subseteq C$ и $x \leqslant_A y$ влечет $x \leqslant y$. Если $x \in A$, а $y \in C \setminus A$, то $y \in B \setminus A$ для некоторого $B \in \mathfrak{C}$. Конечно, $A \trianglelefteq B$ и, следовательно, $x \leqslant_B y$, откуда $x < y$. Таким образом, $A \trianglelefteq C$ для всех $A \in \mathfrak{C}$, т. е. $C \in \mathfrak{C}^{\Delta}$. Если $D \in \mathfrak{C}^{\Delta}$, то $A \subseteq D$ для всех $A \in \mathfrak{C}$, и, следовательно, $C \subseteq D$. Если $x, y \in C$ и $x \leqslant_C y$, то $x \leqslant_A y$, для некоторого $A \in \mathfrak{C}$ и, следовательно, $x \leqslant_D y$. Если $c \in C$ и $d \in D \setminus C$, то $c \in A$ для некоторого $A \in \mathfrak{C}$ и, следовательно, $c <_D d$. Таким образом, $C \trianglelefteq D$ и, следовательно, $C = \sup \mathfrak{C}$. Тем самым установлено, что частично упорядоченное множество $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условиям свойства (5). Отсюда следует, что $\mathfrak{P}$ содержит максимальный элемент Q. Если $Q = \mathfrak{M}$, то все доказано. В противном случае возьмем элемент $q \notin Q$ и поставим его после всех элементов множества Q. Легко понять, что возникшее вполне упорядоченное множество $\overline{Q}$ является элементом частично упорядоченного множества $\mathfrak{P}$. При этом $Q \triangleleft \overline{Q}$, что противоречит максимальности Q.

(2) $\Rightarrow$ (1). Если $\mathfrak{M}$ — некоторое непустое множество, то, согласно (2), его можно считать вполне упорядоченным. Если A — непустое подмножество множества $\mathfrak{M}$, то, обозначив через $\varphi(A)$ наименьший элемент множества A, убедимся в справедливости свойства (1).

Подчеркнем, что в теореме 3 доказана эквивалентность перечисленных там свойств, а не справедливость какого-либо из них. Аксиома выбора действительно является аксиомой и не может быть выведена из остальных аксиом теории множеств. *Во всем дальнейшем изложении аксиома выбора будет предполагаться справедливой.* Остановимся на некоторых фактах, доказательство которых требует применения этой аксиомы.

Подцепь C' цепи C называется *конфинальной*, если для всякого $x \in C$ найдется такой элемент $y \in C'$, что $x \leqslant y$.

Т е о р е м а 4. *Всякая цепь содержит конфинальное вполне упорядоченное подмножество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всех вполне упорядоченных подмножеств данной цепи C. Оно не пусто, так как содержит все одноэлементные подмножества. Если $A, B \in \mathfrak{P}$, то положим

$$A \trianglelefteq B \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c} A \subseteq B \text{ и } b \in A^{\Delta} \text{ для всякого} \\ b \in B \setminus A. \end{array}}$$

Легко проверяется, что отношение $\trianglelefteq$ является порядком. Если

$$\mathfrak{C} : A_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq A_\alpha \trianglelefteq \ldots$$

- цепь из $\mathfrak{P}$, то рассмотрим объединение $A = \bigcup A_\alpha$. Для всякой цепи

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots$$

элементов из A имеем $a_i \in A_\alpha$, для такого индекса α, что $a_1 \in A_\alpha$. В силу теоремы 1 эта цепь обрывается, и вторичное применение теоремы 1 дает, что $A \in \mathfrak{P}$. Ясно, что $A_\alpha \subseteq A$ для всех α. Если $x \in A \setminus A_\alpha$, то $x \in A_\beta \setminus A_\alpha$, где $A_\alpha \trianglelefteq A_\beta$, т. е. $x \in A_\alpha^{\Delta}$. Так что $A_\alpha \trianglelefteq A$. Таким образом, $A \in \mathfrak{C}^{\Delta}$. Поэтому из леммы Куратовского — Цорна вытекает существование максимального элемента $C' \in \mathfrak{P}$. Убедимся, что C' является искомым конфинальным подмножеством. Действительно, если $x \in C$ и $x \in C'^{\Delta}$, то поставив элемент x вслед за всеми элементами множества C', получим вполне упорядоченное множество $\bar{C}$. При этом $C' \triangleleft \bar{C}$, что противоречит максимальности элемента C'.

Следовательно, $x \notin C'^{\Delta}$, а значит, $x \leqslant y$ для некоторого $y \in C'$.

Напомним, что *прямым произведением множеств* $\{P_\xi \mid \xi \in L\}$ называется множество всех функций a, ставящих в соответствие каждому множеству P_ξ элемент $a_\xi \in P_\xi$. Существование таких функций вытекает из применения аксиомы выбора к объединению $\bigcup\limits_{\xi \in L} P_\xi$. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Прямое произведение любой системы непустых множеств не пусто.*

Рассмотрим теперь прямое произведение $\bar{P}$ семейства $\{P_\xi \mid \xi \in L\}$ частично упорядоченных множеств. Множество L также будем считать частично упорядоченным. Элементы множества $\bar{P}$ будем изображать в виде строк (a_α). Зададим на $\bar{P}$ отношение $\lhd$, положив

$$(a_\xi) \lhd (b_\xi) \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l}\text{если } a_\alpha \nleqslant b_\alpha \text{ для некоторого } \alpha, \\ \text{то } a_\beta < b_\beta \text{ для некоторого } \beta < \alpha.\end{array}}$$

Теорема 6. *Если частично упорядоченное множество L удовлетворяет условию минимальности, то отношение $\trianglelefteq$ на $\bar{P}$, задаваемое условием*

$$a \trianglelefteq b \underset{\text{def}}{=} \boxed{a = b \text{ или } a \lhd b},$$

является порядком.

Доказательство. Рефлексивность отношения $\trianglelefteq$ очевидна. Непосредственно из соответствующих определений вытекает

Лемма. *Если $(a_\xi) \trianglelefteq (b_\xi)$ и μ — минимальный элемент множества L, то $a_\mu \trianglelefteq b_\mu$.*

Если, далее, $(a_\alpha) \trianglelefteq (b_\alpha)$ и $(b_\alpha) \trianglelefteq (a_\alpha)$, то ввиду леммы имеем $a_\mu = b_\mu$ для всякого минимального элемента μ множества L. Допустим, что равенство $a_\beta = b_\beta$ справедливо для всех $\beta < \alpha$. Если $a_\alpha \neq b_\alpha$, то справедливо $a_\alpha \nleqslant b_\alpha$ или $b_\alpha \nleqslant a_\alpha$. Учитывая неравенства $(a_\xi) \trianglelefteq (b_\xi)$ и $(b_\xi) \trianglelefteq (a_\xi)$, приходим к неравенствам $a_\beta < b_\beta$ или $b_\beta < a_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Противоречие. Следовательно, $a_\alpha = b_\alpha$, откуда ввиду теоремы 1 следует, что $a_\xi = b_\xi$ для всех $\xi \in L$, т. е. $(a_\xi) = (b_\xi)$. Таким образом, от ношение $\trianglelefteq$ оказывается антисимметричным. Допустим, наконец, что $(a_\xi) \trianglelefteq (b_\xi)$ и $(b_\xi) \trianglelefteq (c_\xi)$. Если имеем $(a_\xi) = (b_\xi)$ или $(b_\xi) = (c_\xi)$, то сразу ясно, что $(a_\xi) \trianglelefteq (c_\xi)$. Если же $(a_\xi) \triangleleft (b_\xi)$ и $(b_\xi) \triangleleft (c_\xi)$, но $(a_\xi) \not\trianglelefteq (c_\xi)$, то найдется такой индекс $\alpha \in L$, что $a_\alpha \nleqslant c_\alpha$ и $a_\beta \nless c_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Положим $\alpha_1 = \alpha$ и допустим, что выбраны индексы

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n$$

так, что для каждого $\alpha_i (i = 1, \ldots, n)$ имеет место $a_{\alpha_i} \nleqslant b_{\alpha_i}$ или $b_{\alpha_i} \nleqslant c_{\alpha_i}$. Если, например, $a_{\alpha_n} \nleqslant b_{\alpha_n}$, то для некоторого $\beta < \alpha_n$ должно быть $a_\beta < b_\beta$. В силу выбора α имеем $b_\beta \nleqslant c_\beta$, что позволяет положить $\alpha_{n+1} = \beta$. Таким образом, возникает бесконечная последовательность

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$$

элементов из L, что противоречит теореме 1. Тем самым доказано, что $(a_\xi) \trianglelefteq (c_\xi)$, т. е. установлена транзитивность отношения $\trianglelefteq$.

Прямое произведение $\overline{P}$, снабженное порядком, описанным в теореме 6, называется *упорядоченным произведением* частично упорядоченных множеств P_ξ. Если L — тривиальное частично упорядоченное множество, то возникает прямое произведение, описанное в § 1. Упорядоченное произведение в случае, когда L — вполне упорядоченное множество, называется *лексикографическим*.

Теорема 7 (теорема о сравнении). *Для двух вполне упорядоченных множеств P и P' существует одна и только одна из следующих возможностей:*

(1) *P изоморфно P';*

(2) *P изоморфно начальному отрезку множества P';*

(3) *P' изоморфно начальному отрезку множества P.*

Доказательство. Рассмотрим вполне упорядоченное множество $\overline{P}$, полученное добавлением к P некоторого нового элемента Ω, стоящего после всех элементов из P. Аналогичным добавлением элемента Ω' к множеству P' получим вполне упорядоченное множество $\overline{P}'$. Ясно, что $P = [0, \Omega)$ и $P' = [0, \Omega')$.

Лемма 1. *Если θ — изоморфизм вполне упорядоченного множества Q в себя, то $\theta(x) \geqslant x$ для всех $x \in Q$.*

Действительно, положим $S = \{s \mid s \in Q, \ \theta(s) < s\}$. Если лемма неверна, то множество S не пусто. Если a — наименьший элемент множества S, то $\theta(a) < a$ и, следовательно, $\theta(a) \notin S$. Отсюда

$$\theta(\theta(a)) \leqslant \theta(a) \leqslant \theta(\theta(a)),$$

т. е. $\theta(a) = \theta(\theta(a))$, что ввиду $a \neq \theta(a)$ противоречит взаимной однозначности отображения θ.

Лемма 2. *Вполне упорядоченное множество не может быть изоморфно своему начальному отрезку.*

В самом деле, если θ — изоморфизм вполне упорядоченного множества Q на его начальный отрезок $[0, a)$, то $\theta(a) < a$, вопреки лемме 1.

Лемма 3. *Пусть Q — вполне упорядоченное множество, $a \in Q$ и φ — изоморфизм множества Q на начальный отрезок $[0, b')$ вполне упорядоченного множества Q'. Если ψ — изоморфизм начального отрезка $[0, a)$ на начальный отрезок $[0, a')$ множества Q', то $a' < b'$ и $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in [0, a)$.*

В самом деле, если $a' \geqslant b'$, то последовательное применение отображений ψ^{-1} и φ осуществляет изоморфизм вполне упорядоченного множества $[0, a')$ на свой начальный отрезок, что невозможно, в силу леммы 2. Если же $\psi(x) \neq \varphi(x)$ для некоторого $x < a$, то обозначим через b наименьший элемент с этим свойством. Тогда $\psi(b) = \varphi(c)$, где $b < c$. Последовательное применение отображений φ и ψ^{-1} приводит к изоморфизму отрезка $[0, c)$ на отрезок $[0, b)$, что противоречит лемме 2.

Приступая к доказательству теоремы, рассмотрим множество S всех таких трансфинитов σ множества $\overline{P}$, что отрезок $[0, \sigma)$ не допускает изоморфизма ни на какой начальный отрезок множества $\overline{P}'$. Если $\Omega \notin S$, то имеет место случай (1) или (2). Если это не так, то множество S содержит наименьший элемент α. Ясно, что $\alpha \neq 0$. Если $\alpha - 1$ существует, то существует изоморфизм φ отрезка $[0, \alpha - 1)$ на отрезок $[0, \beta')$ множества $\overline{P}'$. Если $\beta' = \Omega'$, то имеет место случай (3). Если это не так, то существует трансфинит $\beta' + 1$. Поэтому, положив

$$\overline{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \varphi(\xi), & \text{если } \xi < \alpha - 1, \\ \beta', & \text{если } \xi = \alpha - 1, \end{cases}$$

получим изоморфизм $\bar{\varphi}$ отрезка $[0, \alpha)$ на отрезок $[0, \beta' + 1)$, что противоречит выбору α. Обратимся теперь к случаю, когда α — предельный трансфинит. Тогда, согласно теореме 2,

$$[0, \alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} [0, \beta). \qquad (*)$$

По выбору α, для каждого β существует изоморфизм φ_β отрезка $[0, \beta)$ на отрезок $[0, \beta')$ множества $\bar{P}'$. Если какое-либо β' равно Ω', то имеет место случай (3). Если это не так, то существует элемент $\alpha' \in \bar{P}'$, наименьший среди превосходящих все β'. Если $\xi < \alpha$, то, согласно $(*)$, $\xi < \beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Положим

$$\varphi(\xi) = \varphi_\beta(\xi).$$

Если $\xi < \gamma$, то имеем, например, $\gamma < \beta$. Из леммы 3 вытекает, что $\gamma' < \beta'$ и что $\varphi_\gamma(\xi) = \varphi_\beta(\xi)$. Следовательно, φ является однозначным отображением отрезка $[0, \alpha)$ в отрезок $[0, \alpha')$. Без труда проверяется, что φ — взаимно однозначное и изотонное отображение. Если $\xi' \in [0, \alpha')$, то $\xi' \leqslant \beta'$ для некоторого $\beta < \alpha$ и, следовательно, для некоторого $\xi < \beta$ имеем

$$\xi' = \varphi_\beta(\xi) = \varphi(\xi).$$

Таким образом, φ оказывается изоморфизмом отрезка $[0, \alpha)$ на отрезок $[0, \alpha')$, что противоречит выбору α. Этим доказано, что по крайней мере один из случаев (1)—(3) имеет место. Из леммы 2 легко вывести, что случай (1) несовместим ни со случаем (2), ни со случаем (3). Если же одновременно имеют место случаи (2) и (3), то последовательное выполнение указанных там изоморфизмов позволяет получить изоморфизм множества P на его начальный отрезок, что опять противоречит лемме 2.

Теорема 8 (Кантор — Бернштейн). *Если существуют взаимно однозначные отображения множества A в множество B и множества B в множество A, то существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B.*

Доказательство. Последовательное осуществление отображений, указанных в формулировке, дает взаимно однозначное отображение θ множества A в себя.

Пусть φ — упомянутое в формулировке отображение B в A. Положим $A_0 = A$ и $A_1 = \varphi(B)$. Конечно, можно считать, что $A_1 \underset{\neq}{\subset} A_0$. Далее, положим $A_i = \theta(A_{i-2})$ $(i = 2, 3 \ldots)$ и $D = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Ясно, что

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$$

$$A = D \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i} \setminus A_{2i+1})\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i})\right],$$

$$A_1 = D \cup \left[\bigcup_{i=0}^{\infty} (A_{2i+2} \setminus A_{2i+3})\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{2i-1} \setminus A_{2i})\right],$$

причем объединяемые множества в последних двух равенствах попарно не пересекаются. Так как $A_{2i} \setminus A_{2i+1}$ отображается на $A_{2i+2} \setminus A_{2i+3}$ при помощи θ, легко построить взаимно однозначное отображение ψ множества A на множество A_1. Поэтому последовательное осуществление отображений ψ и φ^{-1} дает искомое отображение A на B.

Множества A и B называются *эквивалентными*, если существует взаимно однозначное отображение множества A на множество B.

Теорема 9 (теорема о сравнении множеств). *Для любых двух множеств A и B существует одна и только одна из следующих возможностей:*

(1) *A эквивалентно B;*

(2) *A эквивалентно подмножеству множества B, но B не эквивалентно никакому подмножеству множества A;*

(3) *B эквивалентно подмножеству множества A, но A не эквивалентно никакому подмножеству множества B.*

Доказательство. Из теоремы 7, ввиду возможности превратить A и B во вполне упорядоченные множества, вытекает или справедливость одного из свойств (1) — (3), или же выполнение условий теоремы 8. В последнем случае также выполнено условие (1). Попарная несовместимость высказанных утверждений очевидна.

Теорема 9 служит основанием для построения учения о *мощности множеств*. В случае (1) говорят, что мощности множеств A и B равны, в случае (2) — что мощность множества A меньше мощности множества B, а в случае

(3) — что мощность множества B меньше мощности множества A. Подчеркнем, что этим не определяется само понятие мощности, а только обеспечивается возможность сравнивать множества по их мощности. Нетрудно показать, что из того, что мощность множества A меньше мощности множества B, а мощность множества B меньше мощности множества C, вытекает, что мощность множества A меньше мощности множества C. Легко проверить также, что для конечных множеств сравнение по мощности равносильно сравнению по числу элементов.

В заключение построим одно вспомогательное частично упорядоченное множество, которое понадобится в § 5. С этой целью рассмотрим множество Q, являющееся объединением всех прямых произведений конечного числа экземпляров множества $\boldsymbol{Z}^+$ положительных целых чисел. Элементами множества Q можно считать всевозможные строки

$$\mathfrak{m} = (m_1, \ldots, m_n),$$

где $n \geqslant 1$ и $m_i \in \boldsymbol{Z}^+$ для всех i. *Редукцией* назовем переход от строки $\mathfrak{m}$ к строке

$$(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_{i+1}, \ldots, m_n)$$

или к строке

$$(m_1, \ldots, m_{i-1}, h_1, \ldots, h_r, m_{i+1}, \ldots, m_n),$$

где все $h_j < m_i$. Редукцию первого типа назовем *выбрасыванием*, а редукцию второго типа — *замещением*. Определим на Q отношение $\leqslant$, полагая $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, если $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ или если от строки $\mathfrak{n}$ к строке $\mathfrak{m}$ можно перейти конечным числом редукций. Ясно, что $\leqslant$ — рефлексивное и транзитивное отношение. Для доказательства его антисимметричности рассмотрим лексикографическое произведение S частично упорядоченных множеств $Z_1, Z_2, \ldots$, каждое из которых является естественным образом упорядоченным множеством неотрицательных целых чисел. Ввиду теоремы 6 S — частично упорядоченное множество. Строку $(z_1, z_2, \ldots)$ из S назовем *специальной*, если $z_i \geqslant z_{i+1}$ для каждого $i = 1, 2, \ldots$ Каждой строке $\mathfrak{m} \in Q$ поставим в соответствие специальную строку $\theta(\mathfrak{m})$, выписав в порядке невозрастания все числа, встречающиеся в $\mathfrak{m}$, и заполнив оставшиеся места нулями. Если от строки $\mathfrak{n}$ к строке $\mathfrak{m}$ можно перейти с помощью одной редукции, то как при выбрасывании, так и при замещении получаем $\theta(\mathfrak{m}) < \theta(\mathfrak{n})$. Поэтому из соотношения $\mathfrak{m} \underset{\neq}{<} \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ вытекает невозможное соотношение $\theta(\mathfrak{m}) < \theta(\mathfrak{n}) \leqslant \theta(\mathfrak{m})$. Следовательно, $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ влечет $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, т. е. Q оказывается частично упорядоченным множеством. Это частично упорядоченное множество удовлетворяет условию минимальности. Действительно, если это не так, то, согласно теореме 1 существует бесконечная цепочка

$$\mathfrak{m}_0 > \mathfrak{m}_1 > \mathfrak{m}_2 > \ldots$$

строк из Q. Можно считать, что переходы от $\mathfrak{m}_i$ к $\mathfrak{m}_{i+1}$ осуществляются с помощью одной редукции. Поэтому возникает бесконечная цепочка

$$\theta(\mathfrak{m}_0) > \theta(\mathfrak{m}_1) > \theta(\mathfrak{m}_2) > \ldots$$

Существование же такой цепочки, очевидно, несовместимо со справедливостью следующего утверждения:

Множество специальных строк удовлетворяет условию минимальности.

Для доказательства рассмотрим непустое множество A специальных строк. Среди этих строк выберем строку $\mathfrak{a}_1$, имеющую наименьшую первую координату, причем эта первая координата встречается наименьшее число раз. Пусть $\mathfrak{a}_1 = (k_1, \ldots, k_1, l_1, \ldots)$, где $k_1 > l_1$. Допустим, что в A выбрана последовательность строк

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= (k_1, \ldots, k_1, \ldots), \\ \mathfrak{a}_2 &= (k_1, \ldots, k_1, k_2, \ldots, k_2, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_i &= (k_1, \ldots, k_1, k_2, \ldots, k_2, \ldots, k_i, \ldots, k_i, \ldots) \end{aligned}$$

таким образом, что $k_1 > k_2 > \ldots > k_i$ и среди строк из A, имеющих вид

$$(\underbrace{k_1, \ldots, k_1}_{m_1}, \underbrace{k_2, \ldots, k_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{k_{i-1}, \ldots, k_{i-1}}_{m_{i-1}}, \ldots),$$

строка $\mathfrak{a}_j$, $1 \leqslant j \leqslant i$, имеет наименьшую $[(m_1 + \ldots + m_{j-1}) + 1]$-ю координату и эта координата встречает наименьшее число раз. В силу такого выбора элементов, если $\mathfrak{b} \in A$ и $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}_i$, то

$$\mathfrak{b} = (k_1, \ldots, k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_i, l, \ldots),$$

где $l < k_i$. Но тогда можно найти строку $\mathfrak{a}_{i+1}$ с соблюдением указанных выше требований. Ясно, что описанное построение можно осуществить лишь конечное число раз. Последний из полученных элементов и будет минимальным элементом множества A.

Резюмируя проведенные рассуждения, получаем:

Теорема 10. *Отношение $\leqslant$ превращает множество Q конечных строк $(m_1, \ldots, m_n)$, где m_i — положительные целые числа, в частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности.*

Упражнения

1. Сформулировать и доказать теорему, двойственную теореме 1.

2. Конечное множество удовлетворяет условиям минимальности и максимальности.

3. Доказать, что частично упорядоченное множество с нулем и единицей, удовлетворяющее условиям минимальности и максимальности, имеет композиционный ряд. Построить пример, показывающий, что обратное утверждение несправедливо.

4. Если C' — конфинальная подцепь цепи C и существует $\sup C'$ или $\sup C$, то $\sup C = \sup C'$.

5. Упорядоченная сумма вполне упорядоченных множеств $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$ вполне упорядочена тогда и только тогда, когда L — вполне упорядоченное множество.

6. Упорядоченная сумма частично упорядоченных множеств $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$ удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда условию минимальности удовлетворяют L и все P_α.

7. Если трансфиниту α предшествует бесконечное множество элементов, то существует такой предельный трансфинит $\alpha_0 \leqslant \alpha$, что интервал $[\alpha_0, \alpha]$ содержит лишь конечное число элементов.

8. Если цепь C и цепь, двойственная ей, вполне упорядочены, то C конечна.

9. Если цепь не вполне упорядочена, то она содержит подцепь, двойственную натуральному ряду.

10. Если частично упорядоченное множество не содержит ни бесконечных цепей, ни бесконечных тривиальных частично упорядоченных подмножеств, то оно конечно.

11. Доказать эквивалентность следующих свойств частично упорядоченного множества P: а) P удовлетворяет условию минимальности и не содержит бесконечных тривиальных частично упорядоченных подмножеств; б) никакое бесконечное подмножество множества P не удовлетворяет условию максимальности.

12. Сформулировать утверждение, двойственное лемме Куратовского — Цорна. Доказать, что оно эквивалентно аксиоме выбора.

13. Доказать, что лемма Куратовского — Цорна равносильна соответствующему утверждению, сформулированному для вполне упорядоченных цепей.

14. Пусть L — непустое множество подмножеств некоторого множества $\mathfrak{M}$, причем подмножество A множества $\mathfrak{M}$ принадлежит L тогда и только тогда, когда L содержит все конечные подмножества множества A. Доказать, что в частично упорядоченном множестве L существуют максимальные элементы.

15. Упорядоченное произведение частично упорядоченных множеств P_α удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда условию минимальности удовлетворяют все P_α.

16. Лексикографическое произведение цепей является цепью.

17. Лексикографическое произведение вполне упорядоченных множеств вполне упорядоченно.

18. Всякое частично упорядоченное множество можно представить в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, одно из которых вполне упорядочено, а другое не содержит наименьшего элемента.

19. Пусть T — множество всех тривиально упорядоченных подмножеств частично упорядоченного множества P. Если $X, Y \in T$, то положим $X \trianglelefteq Y$, если для всякого $x \in X$ найдется $y \in Y$ такой, что $x \leqslant y$. Доказать, что $\trianglelefteq$ — отношение порядка и что возникающее частично упорядоченное множество T содержит наибольший элемент, если P удовлетворяет условиям леммы Куратовского — Цорна.

20. Для двух множеств A и B существует одна и только одна из следующих возможностей: а) A эквивалентно B; б) A отображается на B, но B не отображается на A; в) B отображается на A, но A не отображается на B.

21. Доказать, что возможность б) из упражнения 20 осуществляется тогда и только тогда, когда мощность B меньше мощности A.

§ 3. ПОЛНЫЕ СТРУКТУРЫ

Частично упорядоченное множество называется *полной структурой*, если всякое его непустое подмножество имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грань. Полными структурами являются отрезок $[0,1]$ с обычным порядком, множество всех подмножеств некоторого множества, упорядоченное по включению, всякая конечная цепь. Ясно, что любая полная структура должна иметь нуль и единицу. Поэтому, например, множество всех целых чисел с обычной упорядоченностью полной структурой не является.

Теорема 1. *Если частично упорядоченное множество P имеет единицу и всякое его непустое подмножество имеет точную нижнюю грань, то P — полная структура.*

Доказательство. Пусть A — непустое подмножество множества P. Множество A^{Δ} содержит единицу. Поэтому, в силу условия, существует $\inf A^{\Delta}$. Применяя теорему 1.7, убеждаемся в существовании $\sup A$, что и требовалось.

Из теоремы 1 вытекает, что полными структурами являются множество всех подгрупп данной группы, множество всех замкнутых подмножеств топологического пространства, всякое вполне упорядоченное множество с наибольшим элементом и др.

Теорема 2 (теорема о неподвижной точке). *Если φ - изотонное отображение полной структуры P в себя, то $\varphi(a) = a$ для некоторого $a \in P$.*

Доказательство. Пусть S — множество всех таких элементов s из P, что $s \leqslant \varphi(s)$. Ясно, что нуль, существующий в силу полноты структуры P, принадлежит S, т. е. S не пусто. Следовательно, существует $a = \sup S$. При этом для всякого $s \in S$ имеем $\varphi(a) \geqslant \varphi(s) \geqslant s$, откуда $\varphi(a) \geqslant a$. Поэтому $\varphi(\varphi(a)) \geqslant \varphi(a)$, что влечет $\varphi(a) \in$

$\in S$, и значит, $a \geqslant \varphi(a)$. Таким образом, $a \geqslant \varphi(a) \geqslant a$, т. е. $\varphi(a) = a$.

Теорема 2 не допускает обращения: трехэлементное частично упорядоченное множество, изображенное на рис. 2, не является полной структурой, хотя все его изотонные отображения в себя, очевидно, имеют неподвижную точку. Тем не менее имеет место

Теорема 3 (Когаловский). *Если каждое изотонное отображение частично упорядоченного множества P в себя имеет неподвижную точку, то всякая максимальная цепь из P является полной структурой.*

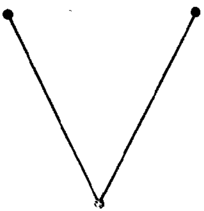


Рис. 2.

Доказательство. Пусть частично упорядоченное множество P удовлетворяет условию теоремы. Тогда справедлива

Лемма 1. *Если C — цепь из P, то C^Δ и C^∇ не пусты.*

Действительно, согласно теореме 2.4, цепь C содержит конфинальное вполне упорядоченное подмножество W. Пусть $x \in P$. Если $W \subseteq x^\nabla$, то для всякого $c \in C$ и подходящего $w \in W$ имеем

$$c \leqslant w \leqslant x,$$

т. е. $x \in C^\Delta$. В противном случае для каждого $x \in P$ множество $W \setminus x^\nabla$ оказывается непустым. Обозначим через $\varphi(x)$ наименьший элемент этого множества. Если $x, y \in P$ и $x \leqslant y$, то $x^\nabla \subseteq y^\nabla$. Поэтому

$$W \setminus x^\nabla \supseteq W \setminus y^\nabla$$

и, следовательно, $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$. Значит, φ — изотонное отображение. Так как $x \in x^\nabla$, а $\varphi(x) \notin x^\nabla$ для всех $x \in P$, то φ, вопреки условию, не имеет неподвижной точки. Справедливость второго утверждения устанавливается рассмотрением частично упорядоченного множества, дуально изоморфного множеству P.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим максимальную цепь C. В силу леммы 1 она содержит наибольший и наименьший элементы, ибо из максимальности легко вывести, что C^Δ, $C^\nabla \subseteq C$. Если C не является полной структурой, то, согласно теореме 1, она содержит такое непустое подмножество V, что $\inf_C V$ не существует. Пусть $U = C \cap V^\nabla$. Ясно, что наименьший элемент цепи C принадлежит U, т. е. цепь U не пуста. Через V^* обозначим цепь, двойственную цепи V. Элемент $v \in V$, рассматриваемый как элемент цепи V^*, будем обозначать через v^*. Аналогичный смысл придадим символу x^{**} для элемента $x^* \in V^*$. Согласно теореме 2.4, цепи U и V^* содержат конфинальные вполне упорядоченные подмножества S и T^* соответственно.

Лемма 2. *Если* $x \in P$ *и* $S \subseteq x^\nabla$, *то* $T^* \not\subseteq (x^\Delta)^*$.

В самом деле, если $S \subseteq x^\nabla$ и $T^* \subseteq (x^\Delta)^*$, то $T^{**} \subseteq x^\Delta$. Если $v \in V$, то для некоторого $t^* \in T^*$ имеем $t^* \geqslant v^*$ и, следовательно, $v \geqslant t^{**} \geqslant x$. Если $z \in C$ и $z \leqslant v$ для всех $v \in V$, то $z \in U$. Для некоторого $s \in S$ имеем $z \leqslant s \leqslant x$. Таким образом, $x = \inf_C V$, что противоречит выбору множества V.

Вернемся к доказательству теоремы. Если $x \in P$, то положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \inf_S (S \setminus x^\nabla), & \text{если } S \not\subseteq x^\nabla, \\ [\inf_{T^*} (T^* \setminus (x^\Delta)^*)]^*, & \text{если } S \subseteq x^\nabla. \end{cases}$$

Ввиду леммы 2, φ является отображением множества P в себя. Если $x, y \in P$ и $x \leqslant y$, то имеет место или $S \not\subseteq x^\nabla$, y^∇, или $S \not\subseteq x^\nabla$ и $S \subseteq y^\nabla$, или $S \subseteq x^\nabla$. В первом случае, замечая, что $x^\nabla \subseteq y^\nabla$, получаем

$$\varphi(x) = \inf_S (S \setminus x^\nabla) \leqslant \inf_S (S \setminus y^\nabla) = \varphi(y).$$

Во втором случае имеем

$$\varphi(x) = \inf_S (S \setminus x^\nabla) \in S \subseteq U \subseteq V^\nabla$$

и

$$\varphi(y) = (\inf_{T^*} (T^* \setminus (y^\Delta)^*))^* \in T^{**} \subseteq V,$$

откуда

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(y).$$

В третьем случае, учитывая, что $x^\Delta \supseteq y^\Delta$, выводим

$$p^* = \inf_{T^*} (T^* \setminus (x^\Delta)^*) \geqslant \inf_{T^*} (T^* \setminus (y^\Delta)^*) = q^*,$$

откуда

$$\varphi(x) = p^{**} \leqslant q^{**} = \varphi(y).$$

Таким образом, φ оказывается изотонным отображением. По условию, для некоторого $a \in P$ справедливо равенство $a = \varphi(a)$. Если $S \not\subseteq a^{\nabla}$, то

$$a = \varphi(a) = \inf_S(S \setminus a^{\nabla}) \in S \setminus a^{\nabla}.$$

Если $S \subseteq a^{\nabla}$, то

$$a = \varphi(a) = (\inf_{T^*}(T^* \setminus (a^{\Delta})^*))^* \in T^{**} \setminus a^{\Delta}.$$

В первом случае получаем, что $a \notin a^{\nabla}$, а во втором $a \notin a^{\Delta}$. Однако ни то, ни другое невозможно.

Изотонное отображение φ частично упорядоченного множества P в себя называется *оператором замыкания*, если $\varphi(x) \geqslant x$ и $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$. Примеры операторов замыкания весьма многочисленны. Так, в полной структуре подпространств топологического пространства оператором замыкания будет отображение, ставящее в соответствие каждому подпространству его замыкание. Если каждому элементу полной структуры $\mathfrak{P}(\boldsymbol{L})$, где $\boldsymbol{L}$ — линейное пространство над полем, будем ставить в соответствие его линейную оболочку, то также получим оператор замыкания. В частично упорядоченном множестве P с единицей 1 оператором замыкания оказывается отображение $\varphi(x) = 1$ для всех $x \in P$.

Если φ — оператор замыкания, то $\varphi(x)$ называется *φ-замыканием* элемента x. Элемент, совпадающий со своим φ-замыканием, называется *φ-замкнутым*. В рассмотренных выше примерах φ-замкнутыми элементами оказываются, соответственно, замкнутые подпространства, линейные подпространства и единица.

Теорема 4. *Если φ — оператор замыкания на частично упорядоченном множестве P, подмножество $A \subseteq P$ состоит из φ-замкнутых элементов и $a = \inf A$ существует, то a — φ-замкнутый элемент.*

Доказательство. Так как $a \leqslant x$ для всех $x \in A$, то $\varphi(a) \leqslant \varphi(x) = x$ для всех $x \in A$ и, следовательно, $\varphi(a) \leqslant a$. Обратное неравенство вытекает из определения оператора замыкания.

Теорема 5. *Если φ — оператор замыкания на полной структуре P, то частично упорядоченное множество L всех φ-замкнутых элементов, рассматриваемое как подмножество частично упорядоченного множества P, также является полной структурой. При этом для всякого непустого подмножества A множества L имеет место*

$$\inf_L A = \inf_P A$$

и

$$\sup_L A = \varphi(\sup_P A).$$

Доказательство. Пусть 1 — единица полной структуры P. Поскольку $\varphi(1) \geqslant 1 \geqslant \varphi(1)$, то 1 принадлежит L и, очевидно, является единицей этого частично упорядоченного множества. Если, далее, A — непустое подмножество множества L, то элемент $a = \inf_P A$, согласно теореме 4, φ-замкнут. Конечно, $a \leqslant x$ для всех $x \in A$. Если $v \in L$ и $v \leqslant x$ для всех $x \in A$, то $v \leqslant a$. Так что $a = \inf_L A$. Теперь теорема 1 позволяет заключить, что L — полная структура. Пусть, далее, $b = \sup_P A$ и $\bar{b} = \sup_L A$. Ясно, что $\bar{b} \in L$ и что $\bar{b} \geqslant b$, поскольку $\bar{b} \geqslant x$ для всех $x \in A$. Отсюда $\bar{b} = \varphi(\bar{b}) \geqslant \varphi(b)$. Неравенство $\bar{b} \leqslant \varphi(b)$ справедливо потому, что $\varphi(b) \geqslant \varphi(x) = x$ для всех $x \in A$. Так что $\bar{b} = \varphi(b)$, что и требовалось.

Теорема 6. *Пусть $P = \mathfrak{P}(M)$, где M — некоторое частично упорядоченное множество. Тогда отображение*

$$\varphi(A) \underset{\text{def}}{=} A^{\Delta\nabla}$$

является оператором замыкания на полной структуре P.

Доказательство. Изотонность отображения φ сразу следует из свойства (i) теоремы 1.6. Соотношение $A \subseteq A^{\Delta\nabla}$ также содержится в этой теореме. Равенство $A^{\Delta\nabla\Delta\nabla} = A^{\Delta\nabla}$ вытекает из свойства (iii) теоремы 1.6.

Оказывается, что любое частично упорядоченное множество можно вложить в полную структуру.

Теорема. 7. *Пусть M — произвольное частично упорядоченное множество, $P = \mathfrak{P}(M)$ и $L = \{A \mid A \in \mathfrak{P}(M), A^{\Delta\nabla} = A\}$. Тогда L оказывается полной структурой и существует отображение θ множества M в множество L такое, что*

(i) θ *является изоморфизмом частично упорядоченного множества* M *на подмножество частично упорядоченного множества* L;

(ii) *если* $A \subseteq M$ *и* $\inf_M A$ *существует, то*

$$\theta(\inf_M A) = \inf_L \theta(A);$$

(iii) *если* $A \subseteq M$ *и* $\sup_M A$ *существует, то*

$$\theta(\sup_M A) = \sup_L \theta(A);$$

(iv) *если* $Z \in L$ *и* $Z \neq \phi$, M, *то найдутся такие подмножества* A *и* B *множества* M, *что* $Z = \sup_L \theta(A) = \inf_L \theta(B)$*).

Доказательство. Теорема 6 позволяет рассмотреть на полной структуре P оператор замыкания $\Delta\nabla$, причем, согласно теореме 5, множество L как множество всех $\Delta\nabla$-замкнутых элементов полной структуры P является полной структурой. Если $x \in M$, то положим $\theta(x) = x^{\Delta\nabla}$ (здесь x рассматривается как одноэлементное подмножество) и убедимся в справедливости свойств (i)—(iv). Соответствующие рассуждения оформим в виде последовательности лемм. При этом необходимо помнить, что порядок в структуре L совпадает с отношением включения $\subseteq$.

Лемма 1. *Если* $v \in M$, *то* $t \in v^{\Delta\nabla}$ *тогда и только тогда, когда* $t \leqslant v$.

Действительно, если $t \leqslant v$, то для всякого $x \in v^{\Delta}$ имеем $t \leqslant v \leqslant x$, что и означает, что $t \in v^{\Delta\nabla}$. Если, наоборот, $t \in v^{\Delta\nabla}$, то $t \leqslant x$ для всех $x \in v^{\Delta}$. В частности, $t \leqslant v$, ибо $v \in v^{\Delta}$.

Лемма 2. *Если* $x, y \in M$, *то* $x \leqslant y$ *тогда и только тогда, когда* $\theta(x) \leqslant \theta(y)$.

В самом деле, если $x \leqslant y$, то, в силу леммы 1, $x \in y^{\Delta\nabla}$ или $x \subseteq y^{\Delta\nabla}$ в P. Но тогда $x^{\Delta\nabla} \subseteq y^{\Delta\nabla}$, т. е. $\theta(x) \subseteq \theta(y)$. Если же $\theta(x) \subseteq \theta(y)$, то, учитывая лемму 1, получим $x \in x^{\Delta\nabla} \subseteq y^{\Delta\nabla}$. Вторичное применение леммы 1 дает $x \leqslant y$.

Лемма 3. θ — *изоморфизм.*

*) Оговорки $Z \neq \phi$, M можно было бы избежать, если договориться, что $\sup_L \theta(\phi) = \phi$ и $\inf_L \theta(\phi) = M$.

Действительно, если $\theta(x) = \theta(y)$, то, согласно лемме 2, имеем $x \geqslant y \geqslant x$, т. е. $x = y$. Таким образом, отображение θ взаимно однозначно. Сохранение порядка установлено в лемме 2.

Лемма 4. *Если* $a = \inf_M A$, *то* $\theta(a) = \inf_L \theta(A)$.

Для доказательства, ввиду теоремы 5, достаточно установить, что $a^{\Delta\nabla} = \bigcap\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla}$. Но, в силу леммы 1, из $t \in a^{\Delta\nabla}$ вытекает, что $t \leqslant a$. Отсюда $t \leqslant x$ для всех $x \in A$. Согласно лемме 1, $t \in x^{\Delta\nabla}$ для всех $x \in A$, т. е. $t \in \bigcap\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla}$ или $a^{\Delta\nabla} \subseteq \bigcap\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla}$. Те же самые аргументы, приведенные в обратном порядке, доказывают обратное включение.

Лемма. 5. *Если* $a = \sup_M A$, *то* $v \geqslant a$ *тогда и только тогда, когда* $v \in (\bigcup\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla})^{\Delta}$.

Действительно, если $v \geqslant a$, то $v \geqslant x$ для всех $x \in A$, откуда, учитывая теорему 1.6, получаем $v \in x^{\Delta} = (x^{\Delta\nabla})^{\Delta}$. Так как это имеет место для всех $x \in A$, то $v \in (\bigcup\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla})^{\Delta}$. Те же аргументы, приведенные в обратном порядке, показывают, что $v \in (\bigcup\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla})^{\Delta}$ влечет $v \geqslant x$.

Лемма 6. *Если* $a = \sup_M A$, *то* $\theta(a) = \sup_L \theta(A)$.

В самом деле, из леммы 5 вытекает, что $a^{\Delta} = (\bigcup\limits_{x\in A} x^{\Delta\nabla})^{\Delta}$, откуда, учитывая теорему 5, получаем

$$\theta(a) = a^{\Delta\nabla} = (\bigcup_{x\in A} x^{\Delta\nabla})^{\Delta\nabla} = \sup_L \theta(A).$$

Лемма 7. *Если* $\phi \neq A \subseteq M$, *то*

$$A^{\Delta\nabla} = \sup_L \theta(A^{\Delta\nabla}) = \inf_L \theta(A^{\Delta}).$$

Для доказательства сначала заметим, что из теоремы 1.6 вытекают соотношения

$$\bigcup_{x\in A^{\Delta\nabla}} x^{\Delta\nabla} \subseteq A^{\Delta\nabla\Delta\nabla} = A^{\Delta\nabla} \subseteq \bigcup_{x\in A^{\Delta\nabla}} x^{\Delta\nabla}.$$

Следовательно, $A^{\Delta\nabla} = \bigcup\limits_{x\in A^{\Delta\nabla}} x^{\Delta\nabla}$ и, согласно теоремам

5 и 1.6, имеем

$$\sup_L \theta(A^{\Delta\nabla}) = (\bigcup_{x \in A^{\Delta\nabla}} x^{\Delta\nabla})^{\Delta\nabla} = A^{\Delta\nabla\Delta\nabla} = A^{\Delta\nabla}.$$

Если, далее, $t \in \bigcap_{x \in A^\Delta} x^{\Delta\nabla}$, то, согласно лемме 1, $t \leqslant$ для всех $x \in A^\Delta$, т. е. $t \in A^{\Delta\nabla}$. Если же $t \in A^{\Delta\nabla}$, то $t \leqslant$ для всех $x \in A^\Delta$ и $t \in \bigcap_{x \in A^\Delta} x^{\Delta\nabla}$, в силу леммы 1. Таким образом, учитывая теорему 5, получаем

$$\inf_L \theta(A^\Delta) = \bigcap_{x \in A^\Delta} x^{\Delta\nabla} = A^{\Delta\nabla}.$$

Этим завершается доказательство теоремы 7.

Пополнение частично упорядоченного множества, описанное в теореме 7, является обобщением известного построения действительных чисел как сечений на множестве рациональных чисел и носит название *пополнения сечениями* (ср. упр. 11). Пополнение сечениями является, в некотором смысле, самым маленьким среди пополнений данного частично упорядоченного множества:

Теорема 8. *Пусть M, L и θ имеют тот же смысл, что и в теореме 7. Если φ — изоморфизм частично упорядоченного множества M в некоторую полную структуру S, то существует такой изоморфизм ψ частично упорядоченного множества L в полную структуру S, что $\psi\theta(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in M$.*

Доказательство. Напомним, что элементами полной структуры L являются $\Delta\nabla$-замкнутые элементы полной структуры $P = \mathfrak{P}(M)$, т. е. подмножества множества M. Поэтому для $X \in L$ можно положить

$$\psi(X) \underset{\text{def}}{=} \sup_S \varphi(X).$$

Так как $X \leqslant Y$ в L означает, что $X \subseteq Y$, то ясно, что $X \leqslant Y$ влечет $\psi(X) \leqslant \psi(Y)$. Если же $\psi(X) = \psi(Y)$ для некоторых X, $Y \in L$, то для всякого $z \in Y^\Delta$ имеем $\varphi(z) \geqslant \sup_S \varphi(Y) = \psi(Y)$. Поэтому для всякого $x \in X$ получаем

$$\varphi(x) \leqslant \psi(X) = \psi(Y) \leqslant \varphi(z).$$

Отсюда $x \leqslant z$ для всякого $z \in Y^\Delta$, т. е. $x \in Y^{\Delta\nabla} = Y$. Таким образом, $X \subseteq Y$. Аналогично доказывается обратное включение, чем устанавливается, что ψ — изоморфизм частично упорядоченного множества L в полную структуру S. Непосредственно из определения вытекает, что для всякого $x \in M$ имеет место

$$\psi\theta(x) = \sup_S \varphi(x^{\Delta\nabla}).$$

Если, далее, $y \in x^{\Delta\nabla}$, то, согласно лемме 1, установленной при доказательстве теоремы 7, имеем $y \leqslant x$. Отсюда $\varphi(y) \leqslant \varphi(x)$ для всякого $y \in x^{\Delta\nabla}$, т. е.

$$\psi\theta(x) = \sup_S \varphi(x^{\Delta\nabla}) \leqslant \varphi(x).$$

Из вышеупомянутой леммы 1 вытекает также, что $x \in x^{\Delta\nabla}$, откуда

$$\varphi(x) \leqslant \sup_S \varphi(x^{\Delta\nabla}) = \psi\theta(x).$$

Таким образом, $\varphi(x) = \psi\theta(x)$, чем и завершается доказательство.

Следует еще раз подчеркнуть, что ψ — изоморфизм частично упорядоченного множества L, а не полной структуры L, т. е., например, из $a = \sup_L A$, вообще говоря, не вытекает, что $\psi(a) = \sup_S \psi(A)$.

Теорема 9. *Пусть M, L и θ имеют тот же смысл, что и в теореме 7, и S — полная структура, содержащая M в качестве частично упорядоченного подмножества* (т. е. порядок в M индуцируется порядком в S). *Для того чтобы существовал изоморфизм ψ полной структуры L на полную структуру S такой, что $\psi\theta(x) = x$ для всех $x \in M$, необходимо и достаточно, чтобы S обладала следующими свойствами:*

(i) *если $0 \neq s \in S$, то найдется такое подмножество A множества M, что $s = \sup_S A$;*

(ii) *если $1 \neq s \in S$, то найдется такое подмножество B множества M, что $s = \inf_S B$.*

Доказательство. Необходимость высказанных свойств вытекает из теоремы 7. Если же полная структура S обладает этими свойствами, то обозначим через φ естественное вложение M в S и рассмотрим изоморфизм ψ частично упорядоченного множества L в полную структуру S, указанный в теореме 8. Если $s \in S$ и $s \neq 0,1$, то из свойств (i) — (ii) вытекает, что для некоторых

$A, B \subseteq M$ имеет место

$$s = \sup_S A = \inf_S B.$$

Ясно, что $B \subseteq A^\Delta$. Поэтому из теорем 8, 1.5 и 1.7 вытекает

$$s = \sup_S \psi(\theta(A)) \leqslant \psi(\sup_L \theta(A)) = \psi(\theta(\sup_M A)) =$$
$$= \psi(\theta(\inf_M A^\Delta)) \leqslant \psi(\theta(\inf_M(B)) = \psi(\inf_L \theta(B)) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_S \psi(\theta(B)) =$$

Таким образом, $s = \psi(\sup_L \theta(A))$, т. е. все элементы s по ной структуры S, отличные от 0 и 1, принадлежат $\psi(L$ Так как, согласно теореме 1.5, для всякого такого имеем

$$\psi(0) = \psi(\inf_L L) \leqslant \inf_S(\psi(L)) \leqslant s \leqslant$$
$$\leqslant \sup_S(\psi(L)) \leqslant \psi(\sup_L L) = \psi(1$$

то $\psi(0) = 0$ и $\psi(1) = 1$. Следовательно, ψ отображает L на

Оговорок $s \neq 0$ и $s \neq 1$ в свойствах (i) и (ii) теоремы можно избежать, договорившись, что $\sup \phi = 0$ и $\inf \phi =$

Рассмотрим теперь некоторое непустое множество и обозначим через Ξ множество всех эквивалентносте определенных на множестве $\mathfrak{M}$. Если $\rho, \sigma \in \Xi$, то пол жим

$$\rho \leqslant \sigma \underset{\text{def}}{=} \boxed{\text{если } x\rho y, \text{ то } x\sigma y.}$$

Легко проверяется, что отношение $\leqslant$ рефлексивно, а тисимметрично и транзитивно. Таким образом, Ξ превр щается в частично упорядоченное множество.

Т е о р е м а 10. *Ξ является полной структуро*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если R — непустое по множество множества Ξ, то определим отношение θ, п ложив

$$x\theta y \underset{\text{def}}{=} \boxed{x\rho y \text{ для всех } \rho \in R.}$$

Без труда проверяется, что θ — эквивалентность. Ясн что $\theta \leqslant \rho$ для всех $\rho \in R$. Если $\sigma \leqslant \rho$ для всех $\rho \in R$ $x\sigma y$, то $x\rho y$ для всех $\rho \in R$, и, следовательно, $x\theta$

Таким образом, $\sigma \leqslant \theta$. Этим доказано, что $\theta = \inf R$. Легко видеть, что эквивалентность I, определяемая условием: xIy для любых $x, y \in \mathfrak{M}$, является наибольшим элементом частично упорядоченного множества Ξ. Остается только применить теорему 1.

В качестве первого применения теоремы 10 докажем:

Теорема 11. *Всякое частично упорядоченное множество является ординальной суммой своих ординально неразложимых подмножеств.*

Доказательство. Если частично упорядоченное множество P разложено в ординальную сумму своих подмножеств $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$, то система подмножеств $\{P_\alpha\}$ является разбиением. Согласно теореме 1.2, этому разбиению отвечает эквивалентность ρ. Эквивалентность ρ обладает следующими свойствами:

(i) если $x\rho y$, $u\rho v$, $x\not\rho u$ и $x \leqslant u$, то $y \leqslant v$;

(ii) если $x\not\rho y$, то x и y сравнимы.

Пусть R — совокупность всех эквивалентностей на множестве P, обладающих свойствами (i) — (ii). В силу теоремы 10, существует эквивалентность $\theta = \inf R$. Если $x\theta y$, $u\theta v$, $x \not\theta u$ и $x \leqslant u$, то для некоторого $\rho \in R$ имеем $x\rho y$, $u\rho v$ и $x \not\rho u$, откуда $y \leqslant v$. Если $x \not\theta y$, то $x\not\rho y$ для некоторого $\rho \in R$ и, следовательно, x и y сравнимы. Таким образом, эквивалентность θ также обладает свойствами (i) и (ii). Пусть $\{Q_\alpha, \alpha \in T\}$ — разбиение множества P, отвечающее эквивалентности θ, согласно теореме 1.1. Если $\alpha, \beta \in T$, то положим

$$\alpha \trianglelefteq \beta \underset{\text{def}}{=}$$

$$\underset{\text{def}}{=} \boxed{\alpha = \beta \text{ или } x \leqslant y \text{ для некоторых } x \in Q_\alpha,\ y \in Q_\beta}.$$

Ясно, что $\trianglelefteq$ — рефлексивное отношение. Если $\alpha \trianglelefteq \beta$ и $\beta \trianglelefteq \alpha$, но $\alpha \neq \beta$, то для некоторых x, $y \in Q_\alpha$ и u, $v \in Q_\beta$ имеем $x \leqslant u$ и $v \leqslant y$. В силу свойства (i), отсюда вытекает $u \leqslant x$. Следовательно, $x = u$, что противоречит $\alpha \neq \beta$. Если $\alpha \trianglelefteq \beta$ и $\beta \trianglelefteq \gamma$, то, предполагая, что $\alpha \neq \beta$ и $\beta \neq \gamma$, имеем $x \leqslant y$ и $u \leqslant v$ для некоторых $x \in Q_\alpha$, y, $u \in Q_\beta$, $v \in Q_\gamma$. Согласно свойству (i), имеем $y \leqslant v$, откуда $x \leqslant v$, и, следовательно, $\alpha \trianglelefteq \gamma$. Значит, $\trianglelefteq$ — порядок. Из свойства (ii) вытекает, что T — цепь. Если

$x, y \in P$, то $x \in Q_\alpha$, $y \in Q_\beta$. Пусть $x \leqslant y$. Если $\alpha = \beta$ то $x \leqslant_{Q_\alpha} y$. Если $\alpha \neq \beta$, то $\alpha \lhd \beta$. Наоборот, $x \leqslant_{Q_\alpha}$ или $x \in Q_\alpha$, $y \in Q_\beta$ и $\alpha \lhd \beta$ влечет $x \leqslant y$. Этим доказано что P — ординальная сумма подмножеств Q_α. Если некоторое Q_α разлагается в ординальную сумму множеств A и B, а σ — соответствующая эквивалентность на множестве P, то $\sigma \leqslant \theta$. Но для $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a\,\theta\, b$ и $a \bar{\sigma} b$. Следовательно, $\sigma < \theta$, что противоречит выбору θ. Это доказывает, что частично упорядоченные множества Q_α ординально неразложимы.

Упражнения

1. Если φ — изоморфизм частично упорядоченного множества P на полную структуру L, то P — полная структура,

$$\varphi(\sup_P A) = \sup_L \varphi(A) \text{ и } \varphi(\inf_P A) = \inf_L \varphi(A)$$

для всякого непустого подмножества $A \subseteq P$.

2. Упорядоченная сумма полных структур $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$, где L — полная структура, является полной структурой.

3. Прямое произведение полных структур является полной структурой.

4. Упорядоченное произведение полных структур $\{P_\alpha \mid \alpha \in L\}$, где L — полная структура, удовлетворяющая условию минимальности, является полной структурой.

5. Если φ — изотонное отображение полной структуры в себя, то множество неподвижных точек содержит наименьший элемент.

6. Если φ — оператор замыкания на частично упорядоченном множестве P, то все максимальные элементы из P являются φ-замкнутыми.

7. Отображение φ частично упорядоченного множества P в себя является оператором замыкания тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in P$ справедливо $\varphi(x) \geqslant x$, а $x \leqslant \varphi(y)$ влечет $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$.

8. Если φ — оператор замыкания на полной структуре L и Φ — множество всех φ-замкнутых элементов, то $\varphi(x) = \inf_L (\Phi \cap x^\Delta)$ для всякого $x \in L$.

9. Если подмножество U полной структуры L содержит единицу структуры L и $\inf_L A$ для всякого $A \subseteq U$, то отображение $\varphi(x) = \inf_L (U \cap x^\Delta)$ является оператором замыкания на L, причем U совпадает с множеством всех φ-замкнутых элементов.

10. Пусть Φ — множество всех операторов замыкания на частично упорядоченном множестве P. Если $\varphi, \psi \in \Phi$, то положим $\varphi \trianglelefteq \psi$, если $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ для всех $x \in P$. Убедиться, что отношение $\trianglelefteq$ является порядком, превращающим Φ в полную структуру.

11. Пополнение сечениями цепи рациональных чисел, лежащих между 0 и 1, изоморфно отрезку [0, 1] с естественным порядком.

12. Пополнение сечениями цепи является цепью.

13. Пополнение сечениями тривиального частично упорядоченного множества P изоморфно полной структуре, полученной присоединением к множеству P нуля и единицы.

14. Пополнение сечениями прямого произведения двух частично упорядоченных множеств изоморфно прямому произведению пополнений сечениями сомножителей.

15. Пусть Ξ — полная структура всех эквивалентностей на некотором множестве $\mathfrak{M}$. Если $\Xi' \subseteq \Xi$ и $x, y \in \mathfrak{M}$, то положим

$$x\theta y \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{l} \text{существуют натуральиое число } m, \\ \text{элементы } z_1,\ldots,z_{m-1} \in \mathfrak{M} \text{ и} \\ \text{эквивалентности } \theta_1,\ldots,\theta_m \in \Xi' \\ \text{такие, что } x\theta_1 z_1,\, z_1\theta_2 z_2,\ldots, \\ z_{m-2}\theta_{m-1}z_{m-1},\, z_{m-1}\theta_m y \end{array}}$$

Доказать, что

$$\theta = \sup_{\Xi} \Xi'.$$

§ 4. СТРУКТУРЫ

Частично упорядоченное множество называетс *структурой*, если всякое его двухэлементное подмнож ство имеет как точную верхнюю, так и точную нижню грань. Из теоремы 1.4 нетрудно вывести, что в структу обе эти грани существуют для любого конечного подмн жества. Полная структура, очевидно, является структ рой. Структурой оказывается также всякая цепь. Обы ным образом упорядоченное множество целых чисел д ставляет пример структуры, не являющейся полно Непустое подмножество P структуры L называется *по* *структурой*, если $a,\ b \in P$ влечет $c = \sup_L\{a,\ b\} \in P$ $d = \inf_L\{a,\ b\} \in P$. Как уже отмечалось, при этом име место $c = \sup_P\{a,\ b\}$ и $d = \inf_P\{a,\ b\}$. Из теоремы 3. вытекает, что всякая структура является подструктуро полной структуры. Легко проверяется, что подструкт рой является любой интервал и, в частности, каждое одн элементное подмножество. Подструктура P называетс *выпуклой*, если $a,\ b \in P$, где $a \leqslant b$, влечет $[a,\ b] \subseteq P$ Пересечение всех подструктур структуры L, содержащи данное множество $\mathfrak{M}$, очевидно, является подструктурой про которую будем говорить, что она *порождается мн* *жеством* $\mathfrak{M}$. Ясно, что это — наименьшая подструктур содержащая множество $\mathfrak{M}$.

Непосредственно из определения видно, что частичн упорядоченное множество, двойственное структуре, сам является структурой. Отсюда вытекает возможность при менять к структурам принцип двойственности.

На структуре можно рассматривать две операции:

$$a + b \underset{\text{def}}{=} \sup\ \{a,\ b\}$$

и

$$ab \underset{\text{def}}{=} \inf\,\{a,\ b\}.$$

Первая из них называется *сложением*, или *объединением*, а вторая *произведением*, или *пересечением*. Из определения и теоремы 1.4 вытекает, что структурные операции обладают следующими свойствами:

$$\begin{array}{lll} (0) & a + a = a & aa = a \\ (1) & a + b = b + a & ab = ba \\ (2) & (a + b) + c = a + (b + c) & (ab)c = a(bc) \\ (3) & a(a + b) = a & a + ab = a. \end{array}$$

Непосредственно из определения вытекает также

Теорема 1. *Следующие свойства элементов a и b структуры L эквивалентны*:

а) $a \leqslant b$;

б) $a + b = b$;

в) $ab = a$.

Поэтому для нуля и единицы (если они есть) справедливы равенства $a0 = 0$, $a + 0 = a$, $a1 = a$ и $a + 1 = 1$ для всякого $a \in L$.

Заметим еще, что свойства (0) являются следствием свойств (3), ибо, используя их, получаем

$$a + a = a + a\,(a + a) = a$$

и

$$aa = a\,(a + aa) = a.$$

К определению структуры можно подойти, минуя понятие частично упорядоченного множества:

Теорема 2. *Пусть L — множество с двумя операциями $+$ и $\cdot$, обладающими свойствами* (1) — (3). *Тогда отношение*

$$a \leqslant b \underset{\text{def}}{=} \boxed{a + b = b}$$

является порядком на L, а возникающее частично упорядоченное множество оказывается структурой, причем

$$a + b = \sup\,\{a,\ b\}$$

и

$$ab = \inf\,\{a,\ b\}.$$

Доказательство. Рефлексивность отношения $\leqslant$ вытекает из свойства (0), которое, как отмечалось, является следствием свойств (3). Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, т. е. $a + b = b$ и $b + a = a$, то, в силу (1), $a = b$, т. е. отношение $\leqslant$ оказывается антисимметричным. Если $a + b = b$ и $b + c = c$, то, применяя (2), получаем

$$a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c,$$

что доказывает транзитивность отношения $\leqslant$. Далее, учитывая (2), (0) и (1), получаем

$$a + (a + b) = (a + a) + b = a + b$$

и

$$b + (a + b) = b + (b + a) = b + a = a + b.$$

Следовательно, $a \leqslant a + b$ и $b \leqslant a + b$. Если $a \leqslant x$ и $b \leqslant x$, то, используя (0) — (2), будем иметь

$$(a + b) + x = a + (b + x) = a + x = x,$$

т. е. $a + b \leqslant x$. Вспоминая определение точной верхней грани, убеждаемся, что

$$a + b = \sup \{a, b\}.$$

Наконец, из (1) и (3) вытекает, что $ab \leqslant a$ и $ab \leqslant b$. Если $y \leqslant a$ и $y \leqslant b$, то с помощью (2) и (3) получаем

$$y (ab) = [y (y + a)] b = yb = y (y + b) = y.$$

Отсюда, в силу (1) и (3), вытекает, что

$$y + ab = y (ab) + ab = ab,$$

т. е. $y \leqslant ab$. Таким образом,

$$ab = \inf \{a, b\}.$$

Заметим, что двойственные рассуждения позволяют прийти к тем же самым выводам, если отношение $\leqslant$ определить условием

$$a \leqslant b \underset{\text{def}}{=} \boxed{ab = a}.$$

Из теоремы 1 вытекает, что структуры образуют многообразие универсальных алгебр с двумя бинарными операциями.

Легко, видеть, что свойства (0) — (3), стоящие в левой колонке, двойственны соответствующим свойствам правой колонки. Отсюда, ведя индукцию по числу применений этих свойств, можно установить, что в произвольной структуре из справедливости какого-либо свойства, записываемого в терминах структурных операций, вытекает справедливость двойственного свойства.

Теорема 3. *Если $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$, то $a + b \leqslant c + d$ и $ab \leqslant cd$.*

Доказательство. В силу теоремы 1, из условия следует, что $a + c = c$, $b + d = d$, $ac = a$ и $bd = b$. Поэтому

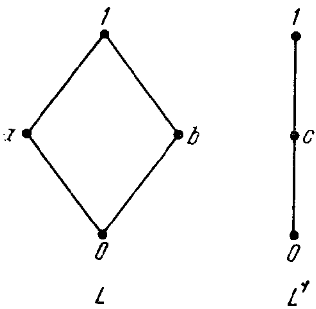
$$(a + b) + (c + d) = (a + c) + (b + d) = c + d$$

и

$$(ab)(cd) = (ac)(bd) = ab,$$

откуда и вытекают требуемые неравенства.

Отображение φ структуры L в структуру L' называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ и $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in L$. С помощью теоремы 1 легко вывести, что всякий гомоморфизм является изотонным отображением. Обратное неверно, как это видно из примера, изображенного на рис. 3. Взаимно однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.



$\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) = \varphi(b) = c$, $\varphi(1) = 1$.

φ — изотонное отображение, но

$$\varphi(a + b) = \varphi(1) = 1 \neq c + c = \varphi(a) + \varphi(b).$$

Рис. 3.

Однако справедлива

Теорема 4. *Если φ — изоморфизм частично упорядоченного множества L на частично упорядоченное* *множество* L' *и* L *структура, то* L' *также структура и* φ *является изоморфизмом структур.*

Доказательство. Если a', $b' \in L'$, то $a' = \varphi(a)$ и $b' = \varphi(b)$, где a, $b \in L$. Но тогда $\varphi(a+b) \geqslant a', b'$. Если $v' \geqslant a'$, b', то $v \geqslant a$, b, где $v' = \varphi(v)$. Отсюда $v \geqslant a+b$ и, следовательно, $v' \geqslant \varphi(a+b)$. Таким образом, $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Равенство $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ доказывается двойственным рассуждением.

Эквивалентность $\equiv$, определенная на структуре L, называется *конгруэнцией*, если $a \equiv c$ и $b \equiv d$ влечет $a+b \equiv c+d$ и $ab \equiv cd$. Пусть $\equiv$ — конгруэнция на структуре L. Если $a \equiv b$, то $a+b \equiv a+a = a$ и $ab \equiv aa = a$, т. е. смежный класс конгруэнции оказывается подструктурой. Если, кроме того, имеем $a \leqslant x \leqslant b$, то $x = bx \equiv ax = a$. Следовательно, смежный класс конгруэнции является выпуклой подструктурой. Далее рассмотрим фактор-множество $\bar{L} = L/\equiv$. Обозначая через $\bar{a}$ смежный класс конгруэнции $\equiv$, определяемый элементом a, и полагая

$$\bar{a} + \bar{b} \underset{\text{def}}{=} \overline{a+b}$$

и

$$\bar{a}\bar{b} \underset{\text{def}}{=} \overline{ab},$$

нетрудно убедиться, что операции определены корректно и обладают свойствами (1) — (3). Таким образом, фактор-множество $\bar{L}$ превращается в структуру, называемую *фактор-структурой* структуры L по конгруэнции $\equiv$. Ясно, что естественное отображение является гомоморфизмом, который также называется *естественным*.

Пусть теперь φ — гомоморфизм структуры L в структуру L'. Зададим на L отношение ρ, полагая

$$a\rho b \underset{\text{def}}{=} \boxed{\varphi(a) = \varphi(b).}$$

Без труда проверяется, что ρ — эквивалентность. Если $a\rho c$ и $b\rho d$, то

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(c) + \varphi(d) = \varphi(c+d)$$

и

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b) = \varphi(c)\,\varphi(d) = \varphi(cd).$$

Следовательно, $(a+b)\,\rho\,(c+d)$ и $(ab)\,\rho\,(cd)$, т. е. ρ оказывается конгруэнцией. Эта конгруэнция называется *ядром гомоморфизма* φ.

Теорема 5 (теорема о гомоморфизме). *Пусть φ — гомоморфизм структуры L на структуру L' и ρ — ядро этого гомоморфизма. Тогда существует такой изоморфизм ψ структуры L' на фактор-структуру L/ρ, что $\psi\varphi(a) = \bar{a}$ для всех $a \in L$, причем через $\bar{a}$ обозначается образ элемента a при естественном гомоморфизме, определяемом конгруэнцией ρ.*

Доказательство. Если $a' \in L'$, то положим $\psi(a') = \bar{a}$, где $\varphi(a) = a'$. Если $\varphi(b) = a'$ для некоторого $b \in L$, то $a\rho b$ по определению ядра гомоморфизма и, следовательно, $\bar{a} = \bar{b}$. Так что отображение ψ определено корректно. Если $a', b' \in L'$, то $a' + b' = \varphi(a+b)$, где $a' = \varphi(a)$ и $b' = \varphi(b)$. Отсюда

$$\psi(a' + b') = \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} = \psi(a') + \psi(b').$$

Аналогично проверяется, что

$$\psi(a'b') = \psi(a')\psi(b').$$

Если $\psi(a') = \psi(b')$ и $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, то $\bar{a} = \bar{b}$, т. е. $a\rho b$. Отсюда

$$a' = \varphi(a) = \varphi(b) = b'.$$

Так что ψ — изоморфизм. Равенство же $\psi\varphi(a) = \bar{a}$ справедливо по определению ψ.

В случае групп и колец каждая конгруэнция однозначно определяется любым из своих смежных классов. К сожалению, структуры, вообще говоря, не обладают таким свойством. Например, конгруэнция на трехэлементной цепи, один из классов которой содержит только нуль, а второй — все остальные элементы, очевидно, отлична от диагонали. Однако нуль в обоих случаях является смежным классом.

Структура L называется *структурой с относительными дополнениями*, если для всякого элемента c из любого интервала $[a, b]$ найдется такой элемент d, что $c + d = b$ и $cd = a$. Этот элемент d называется *дополнением элемента* *с в интервале* $[a, b]$. Дополнение определяется не однозначно. Например, в структуре, изображенной на рис. 4, дополнениями элемента b в интервале $[s, 1]$ являются элементы c и d. Однако элементы a и s служат друг для друга единственными дополнениями в интервале $[0, b]$. Структура с нулем и единицей называется *структурой с дополнениями*, если каждый ее элемент имеет дополнение в интервале $[0, 1]$. Дополнения в интервале $[0, 1]$ называются просто *дополнениями*.

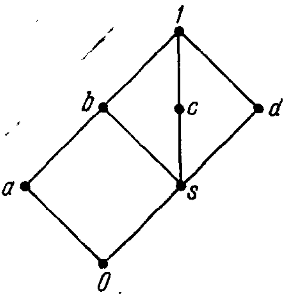


Рис. 4.

Теорема 6 (Хашимото). *Каждая конгруэнция на структуре L с относительными дополнениями определяется любым из своих смежных классов.*

Доказательство. Пусть $\equiv$ и $\approxeq$ — две конгруэнции на структуре L, а $\mathfrak{K}$ — такой смежный класс конгруэнции $\equiv$, что $a \approxeq b$ для любых $a, b \in \mathfrak{K}$.

Лемма 1. *Если $x, y \geqslant a$ для некоторого $a \in \mathfrak{K}$ и $x \equiv y$, то $x \approxeq y$.*

Для доказательства обозначим через z дополнение элемента xy в интервале $[a, x+y]$. Тогда

$$z = z(x+y) \equiv zx \equiv zxy = a,$$

откуда $z \in \mathfrak{K}$. Поэтому

$$x + y = z + xy \approxeq a + xy = xy$$

и, следовательно,

$$x = x(x+y) \approxeq x(xy) = xy = (xy)\,y \approxeq (x+y)\,y = y.$$

Лемма 2. *Если $x, y \leqslant a$ для некоторого $a \in \mathfrak{K}$ и $x \equiv y$, то $x \approxeq y$.*

Действительно, обозначив через z дополнение элемента $x + y$ в интервале $[xy, a]$, получим

$$z = z + xy \equiv z + x \equiv z + (x+y) = a.$$

Отсюда $z \in \mathfrak{K}$. Поэтому

$$xy = z(x+y) \approxeq a(x+y) = x+y$$

и, следовательно,

$$x + xy \approx x + (x + y) = (x + y) + y \approx xy + y = y.$$

Лемма 3. *Если $a \in \mathfrak{K}$ и $\mathfrak{C}$ — смежный класс конгруэнции $\equiv$, определяемый элементом $b \leqslant a$, то $p \approx q$ для всех $p, q \in \mathfrak{C}$.*

В самом деле, если $p \in \mathfrak{C}$, то $ap \equiv ab = b$ и $a + p \equiv a + b = a$. В силу лемм 1 и 2, имеем $ap \approx b$ и $a + p \approx a$, откуда

$$p = (a + p)\, p \approx ap \approx b.$$

Так что остается только учесть транзитивность отношения $\approx$.

Лемма 4. *Если $x \equiv y$, то $x \approx y$.*

Для доказательства выберем элемент $a \in \mathfrak{K}$ и рассмотрим смежный класс $\mathfrak{C}$ конгруэнции $\equiv$, определяемый элементом axy. Ввиду леммы 3 смежные классы конгруэнций и $\approx$, определяемые элементом axy, совпадают. Так как $x, y \geqslant axy$, то $x \approx y$, в силу леммы 1.

Справедливость теоремы непосредственно вытекает из леммы 4.

Остановимся еще на одном свойстве конгруэнций структуры с относительными дополнениями. Конгруэнции $\equiv$ и $\approx$ на структуре L называются *перестановочными*, если из соотношений $a \equiv x$ и $x \approx b$, где $a, b, x \in L$, вытекает существование такого элемента $y \in L$, что $a \approx y$ и $y \equiv b$. Нетрудно проверить, что как диагональ, так и единичная конгруэнция перестановочны с любой конгруэнцией.

Теорема 7 (Дилуорс). *Любые две конгруэнции на структуре L с относительными дополнениями перестановочны.*

Доказательство. Пусть $\equiv$ и $\approx$ — конгруэнции на структуре L, $a, b, x \in L$, $a \equiv x$ и $x \approx b$. Предварительно докажем:

Лемма. *Если $a \leqslant x \leqslant b$, то для некоторого $y \in [a, b]$ справедливо $a \approx y$ и $y \equiv b$.*

Действительно, пусть y — дополнение элемента x в интервале $[a, b]$. Тогда

$$y = by \approx xy = a$$

и

$$y = a + y \equiv x + y = b.$$

Теперь, отказавшись от ограничений, наложенных лемме, будем иметь

$$a = a + a \equiv a + x = a + x + x \approxeq a + b + x \equiv$$
$$\equiv x + b + x = b + x \approxeq b + b = b.$$

Применяя лемму, с учетом равноправия $\equiv$ и $\approxeq$, получим

$$a \approxeq u \equiv a + b + x$$

и

$$a + b + x \approxeq v \equiv b,$$

где $a \leqslant u \leqslant a + b + x$ и $b \leqslant v \leqslant a + b + x$. Отсюда

$$u = u\,(a + b + x) \approxeq u\,v \equiv (a + b + x)\,v = v$$

и, следовательно, $a \approxeq uv$ и $uv \equiv b$.

Непустое подмножество I структуры L называется *идеалом*, если $x, y \in I$ влечет $x + y \in I$ и $t \in I$ для всех $t \leqslant x$. Двойственным образом вводится понятие *фильтра*. Если $x \in L$, то множества x^{∇} и x^{Δ} являются, соответственно, идеалом и фильтром, которые называются *главными*. Если конгруэнция θ на структуре L такова, что фактор-структура L/θ имеет нуль, то без труда проверяется, что полный прообраз этого нуля является идеалом, который называется *ядерным идеалом* конгруэнции θ. Двойственным образом определяется *ядерный фильтр*. Конечно, нуль структуры и ее единица (если они есть) принадлежат всякому идеалу и фильтру, соответственно. Ядерный идеал [фильтр] ядра гомоморфизма φ называется ядерным идеалом [фильтром] этого гомоморфизма. В отличие от групп и колец, не всякий идеал структуры является ядерным. Например, множество $I = \{0, a, b, s\}$ элементов структуры, изображенной на рис. 4, является идеалом. Если бы он был ядерным идеалом конгруэнции $\equiv$, то имели бы место соотношения $c \equiv b + c \equiv 1$, и $d \equiv b + d \equiv 1$. Отсюда $0 \equiv cd \equiv 1$, что влекло бы $1 \in I$.

Т е о р е м а 8. *Если S — фильтр, а I — идеал структуры L, то пересечение $S \cap I$ является выпуклой подструктурой структуры L. Всякая выпуклая подструктура* *ни представляется в виде такого пересечения. Если фильтр и идеал являются ядерными, то их пересечение является смежным классом некоторой конгруэнции.*

Доказательство. Ясно, что пересечение $S \cap I$ — подструктура. Если $a \leqslant x \leqslant b$ и $a, b \in S \cap I$, то $x \in S$, поскольку $a \in S$, и $x \in I$, ибо $b \in I$. Наоборот, если V — выпуклая подструктура, то рассмотрим множество $S = \bigcup\limits_{v \in V} v^{\Delta}$. Ясно, что $s \in S$ влечет $x \in S$ для всех $x \geqslant s$. Если $s', s'' \in S$, то $s' \geqslant v'$ и $s'' \geqslant v''$, где $v', v'' \in V$. Но тогда $s's'' \geqslant v'v'' \in V$, т. е. $s's'' \in S$. Следовательно, S — фильтр. Двойственным рассуждением проверяется, что множество $I = \bigcup\limits_{v \in V} v^{\nabla}$ является идеалом. Ясно, что $V \subseteq S \cap I$. Если же $x \in S \cap I$, то для подходящих $v', v'' \in V$ имеем $v' \leqslant x \leqslant v''$. В силу выпуклости подструктуры V, отсюда следует, что $x \in V$. Так что $S \cap I \subseteq V$. Пусть, наконец, I и S являются ядерными идеалом и фильтром конгруэнций ρ и σ, соответственно. Рассмотрим прямое произведение H фактор-структур L/ρ и L/σ. Пусть χ — гомоморфизм структуры L в это прямое произведение, определяемый равенством $\chi(x) = (\varphi(x), \psi(x))$, где φ и ψ — естественные гомоморфизмы. Легко проверяется, что $v \in V = I \cap S$ тогда и только тогда, когда $\chi(v) = (0, 1)$. Поэтому V оказывается смежным классом ядра гомоморфизма χ.

Идеал S структуры L называется *стандартным*, если для любых $a, b \in L$ и $s \in S$ неравенство $a \leqslant b + s$ влечет $a = x + t$, где $x \leqslant b$, $t \in S$. Легко видеть, что нулевой идеал стандартен. Стандартным идеалом является и сама структура. В структуре, изображенной на рис. 4, идеал s^{∇} является стандартным, а идеал a^{∇} — нестандартен.

Теорема 9 (Гретцер — Шмидт). *Всякий стандартный идеал S структуры L является ядерным идеалом конгруэнции θ, определяемой условием*:

$$x\theta y \underset{\text{def}}{=} \boxed{x + y = xy + s \text{ для некоторого } s \in S.}\,.$$

Доказательство. Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если $s \in S$, то для любых $x, y \in L$ найдется элемент $t \in S$ такой, что $x(y + s) = xy + t$.*

В самом деле, поскольку $x(y+s) \leqslant y+s$, то $x(y+s) = b+t$, где $b \leqslant y$, $t \in s$. Но

$$b \leqslant x(y+s) \leqslant x$$

и, следовательно, $b \leqslant xy$. Отсюда

$$x(y+s) = x(y+s) + xy = b + t + xy = xy + t.$$

Лемма 2. *Если $x+y = a+s$, где $x, y \in L$, $a \leqslant xy$, $s \in S$, то $x\theta y$.*

Действительно, имеем

$$x+y = xy + x + y = xy + a + s = xy + s,$$

что и требовалось.

Лемма 3. *Если $x\theta y$, $y\theta z$ и $y \leqslant x+z$, то $x\theta z$.*

Действительно, по определению имеем

$$x + y = xy + s'$$

и

$$y + z = yz + s'',$$

где $s', s'' \in S$. Ввиду леммы 1 найдутся такие $t', t'' \in S$, что

$$xy = xy(y+z) = xy(yz+s'') = xyz + t'$$

и

$$yz = yz(x+y) = yz(xy+s') = xyz + t''.$$

Поэтому

$$x + z = x + y + z = xy + yz + s' + s'' = \\ = xyz + (t' + t'' + s' + s'')$$

откуда

$$x + z = xz + xyz + (t' + t'' + s' + s'') = \\ = xz + (t' + t'' + s' + s'')$$

и, следовательно, $x\theta z$.

Лемма 4. *Если $x\theta u$ и $y\theta v$, то $(x+y)\theta(u+v)$ и $xy\theta uv$.*

В самом деле, из определения отношения θ получаем

$$x + u = xu + s'$$

и

$$y + v = yv + s''$$

при подходящих $s', s'' \in S$. Отсюда выводим

$$(x + y) + (u + v) = (xu + yv) + s' + s''.$$

Поскольку

$$xu + yv \leqslant (x + y)(u + v) + (x + y)(u + v) = \\ = (x + y)(u + v),$$

из леммы 2 вытекает, что $(x + y)\,\theta\,(u + v)$. Далее, применяя лемму 1, получаем

$$xy + uv = (xy + uv)(x + u)(y + v) = \\ = (xy + uv)(xu + s')(yv + s'') = \\ = (xy + uv)[(xu + s')\,yv + \bar{\bar{s}}] = \\ = (xy + uv)(xuyv + \bar{s} + \bar{\bar{s}}) = xuyv + s,$$

где $\bar{s}, \bar{\bar{s}}, s \in S$. Следовательно, $xy\theta uv$.

Л е м м а 5. θ — *конгруэнция.*

Поскольку рефлексивность и симметричность отношения θ очевидны, для доказательства ввиду леммы 4 достаточно установить транзитивность этого отношения. Если $x\theta y$ и $y\theta z$, то из леммы 4 вытекает

$$x\theta y\theta(x + y + z),$$

откуда, в силу леммы 3, следует, что $x\theta(x + y + z)$. Еще раз применив лемму 4, получаем

$$x = x(x + z)\theta(x + y + z)(x + z) = x + z.$$

Ввиду равноправия x и z имеем

$$x\theta(x + z)\theta z,$$

после чего соотношение $x\theta z$ вытекает из леммы 3.

Для доказательства теоремы остается установить, что S совпадает с ядерным идеалом конгруэнции θ. Однако, если $s \in S$, то для всякого $x \in L$ имеем

$$xs + s = xs \cdot s + s,$$

т. е. $xs\theta s$. Таким образом, S является нулем фактор-структуры L/θ, что и требовалось.

Обратная теорема, к сожалению, неверна: нестандартный идеал a^{∇} структуры, изображенной на рис. 4

является ядерным идеалом ее гомоморфизма на двухэ ментную цепь. Некоторым утешением может служить

Теорема 10 (Гретцер — Шмидт). *Ядерный ид любой конгруэнции структуры с относительными доп нениями является стандартным идеалом.*

Доказательство. Пусть L — структура с носительными дополнениями и S — ядерный идеал гомоморфизма φ. Если $a,\ b \in L$, $s \in S$ и $a \leqslant b + s$, обозначим через z дополнение элемента ab в интерва $[abs,\ a]$. Тогда $a = ab + z$ и

$$\varphi(z) = \varphi(z(b+s)) = \varphi(z)\,\varphi(b+s) = \varphi(z)\,\varphi(b) = \\ = \varphi(za)\,\varphi(b) = \varphi(z(ab)) = \varphi(abs) =$$

т. е. $z \in S$.

Фильтр S структуры L называется *стандартны* если для любых $a,\ b \in L$ и $s \in S$ неравенство $a \geqslant$ влечет $a = xt$, где $x \geqslant b$ и $t \in S$. По принципу двойстве ности из теоремы 9 вытекает

Теорема 11. *Всякий стандартный фильтр структуры L является ядерным фильтром конгруэнции определяемой условием*:

$$x\theta y \underset{\text{def}}{=} \boxed{xy = (x+y)s \text{ для некоторого } s \in S.}$$

В связи с тем, что не всякая структура полна, предста ляют интерес критерии полноты, два из которых приводя ся ниже.

Теорема 12. *Если всякая подструктура структ ры L с нулем имеет точную верхнюю грань, то L полн*

Доказательство. Непосредственно из усл вия вытекает, что L содержит единицу. Если A — неп стое подмножество структуры L, то ввиду существовані нуля нижний конус A^{∇} не пуст. Нетрудно проверить, ч A^{∇} — подструктура. В силу теоремы 1.8, имеем

$$\inf A = \sup A^{\nabla},$$

после чего остается только применить теорему 3.1.

Теорема 13 (Дэйвис). *Если всякое изотонное от бражение структуры L в себя имеет неподвижную точк то она полна.*

Доказательство. Предварительно установим:

Лемма 1. *Если C — цепь из L, то существуют* $\sup_L C$ *и* $\inf_L C$.

Для доказательства, воспользовавшись теоремой 2.3, погрузим C в некоторую максимальную цепь D. В силу теоремы 3.3, существует элемент $c = \sup_D C$. Если $v \in L$ и $v \geqslant x$ для всех $x \in C$, то $cv \geqslant x$ для всех $x \in C$. Если $z \in D$ и $z \geqslant c$, то $z \geqslant cv$. Если $z \in D$ и $z < c$, то $z \leqslant x$ для некоторого $x \in C$. Отсюда $cv \geqslant x \geqslant z$. Таким образом, элемент cv сравним со всеми элементами цепи D и ввиду ее максимальности принадлежит ей. Поэтому $v \geqslant cv \geqslant c$, т. е. $c = \sup_L C$.

Второе утверждение доказывается двойственным рассуждением.

Лемма 2. *L содержит нуль и единицу.*

Для доказательства, воспользовавшись теоремой 2.3, выделим в L некоторую максимальную цепь C. В силу леммы 1, существует $w = \sup C$. Если $x \in L$ и $x \nleqslant w$, то $x + w > w$. Отсюда следует, что $x + w \notin C$ и что, присоединив к C элемент $x + w$, снова получим цепь. Это, однако, противоречит максимальности цепи C. Следовательно, $w = 1$. Существование нуля доказывается двойственным рассуждением.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим непустое подмножество A структуры L. В силу леммы 2, нижний конус $A^\triangledown$ не пуст. Воспользовавшись теоремой 2.3, выделим в $A^\triangledown$ максимальную цепь C. В силу леммы 1, существует $a = \sup C$. Так как $A \subseteq C^\vartriangle$, то $A \subseteq a^\vartriangle$, в силу определения точной верхней грани. Поэтому $a \in A^\triangledown$. Если $x \in A^\triangledown$, то $a + x \in A^\triangledown$ и $a + x \geqslant a$. Если $a + x > a$, то получаем возможность увеличить цепь C, вопреки ее максимальности. Если же $a + x = a$, то $x \leqslant a$. Таким образом, $a = \inf A$, и остается только применить теорему 3.1.

В связи с полными структурами оказываются уместными и такие определения. Подструктура H структуры L называется *полной*, если для всякого подмножества $A \subseteq H$ из существования $a = \sup_L A$ [$a = \inf_L A$] вытекает, что $a \in H$. Как уже отмечалось, в этой ситуации имеем $a = \sup_H A$ [$a = \inf_H A$]. Примером полной подструктуры может служить интервал. Пересечение любого множества полных подструктур, очевидно, является полной подструктурой. Поэтому среди полных подструктур, содержащих данное множество $\mathfrak{M}$, существует наименьшая, про которую говорят, что она *вполне порождается множеством* $\mathfrak{M}$. Например, единичный отрезок $[0, 1]$ действительных чисел вполне порождается открытым интервалом $(0, 1)$. Идеал [фильтр] называется *полным*, если он является полной подструктурой.

Гомоморфизм φ структуры L в структуру L' называется *полным*, если для всякого подмножества $A \subseteq L$, для которого существует $\sup_L A$ [$\inf_L A$], справедливо $\varphi(\sup_L A) = \sup_{L'} \varphi(A)$ [$\varphi(\inf_L A) = \inf_{L'} \varphi(A)$]. Из теоремы 1.5 легко вывести, что изоморфизм является полным гомоморфизмом. Примером неполного гомоморфизма может служить отображение действительного отрезка $[0, 1]$ в двухэлементную цепь, задаваемое условиями: $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(x) = 0$, если $0 \leqslant x < 1$. Нетрудно проверить, что ядерный идеал [фильтр] полного гомоморфизма полон.

Теорема 14. *Если φ — полный гомоморфизм полной структуры L на структуру L' и $a' \in L'$, то множество $I = \{x \mid x \in L,\ \varphi(x) = a'\}$ является интервалом.*

Доказательство. Пусть $a = \inf I$ и $b = \sup I$. Если $x \in [a, b]$, то $a' = \varphi(a) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(b) = a'$, т. е. $[a, b] \subseteq I$. Обратное включение очевидно.

Заметим, что полнота гомоморфизма для этого результата существенна: полный прообраз нуля в приведенном выше гомоморфизме отрезка $[0, 1]$ на двухэлементную цепь интервалом не является.

Упражнения

1. Доказать равносильность следующих свойств элементов a и b произвольной структуры:

$$\text{а) } a \leqslant b; \quad \text{б) } a \leqslant ab; \quad \text{в) } a + b \leqslant b.$$

2. Всякий минимальный [максимальный] элемент структуры является нулем [единицей].

3. Если $a + b + c = abc$, то $a = b = c$.

4. Во всякой структуре справедливо равенство

$$(ab + ac)(ab + bc) = ab.$$

5. Доказать равносильность следующих свойств структуры L: а) L — цепь; б) все подмножества из L являются подструктурами;

в) всякий гомоморфизм частично упорядоченного множества $\overline{L}$ является структурным гомоморфизмом; г) $a = bc$ влечет $a = b$ или $a = c$.

6. Подмножество I структуры L является идеалом тогда и только тогда, когда включения $a, b \in I$ и $a + b \in I$ справедливы одновременно.

7. Идеалы и только они служат полными прообразами нуля при некотором $\bigcup$-гомоморфизме (отображение φ структуры L в структуру L' называется *$\bigcup$-гомоморфизмом*, если $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$).

8. Всякий простой идеал служит ядром некоторого структурного гомоморфизма (идеал P называется *простым*, если $ab \in P$ влечет $a \in P$ или $b \in P$).

9. Подструктура P структуры L является простым идеалом тогда и только тогда, когда $L \setminus P$ — простой фильтр (фильтр F называется *простым*, если $a + b \in F$ влечет $a \in F$ или $b \in F$).

10. Доказать, что идеалы произвольной структуры L образуют структуру и что полнота этой структуры равносильна наличию нуля в структуре L.

11. Если структура удовлетворяет условию максимальности, то все ее идеалы являются главными. Сформулировать и доказать двойственное утверждение.

12. Всякую структуру можно, добавив не более трех элементов, вложить в структуру с 0 и 1, каждый элемент которой обладает дополнением.

13. Структура с 1, удовлетворяющая условию минимальности,— полна.

14. Для полноты структуры необходимо и достаточно, чтобы все идеалы I, удовлетворяющие условию $I^{\Delta\nabla} = I$, были главными.

15. Упорядоченное произведение структур является структурой.

16. Упорядоченная сумма структур P_α, $\alpha \in L$, является структурой тогда и только тогда, когда L — структура и $\alpha + \beta \neq \alpha, \beta$ влечет существование нуля в структуре $P_{\alpha+\beta}$ и единицы в структуре $P_{\alpha\beta}$.

§ 5. СВОБОДНЫЕ СТРУКТУРЫ

В отличие от произвольных универсальных алгеб[р] понятие свободной структуры оказывается весьма емк[им] в связи с возможностью внести порядок в базисное множ[е]ство и рассматривать различные аспекты сохранени[я] свойств получившегося частично упорядоченного множ[е]ства при вложении его в свободную структуру.

Пусть P — некоторое частично упорядоченное множ[е]ство. Подмножество A множества P называется *суммиру[е]мым* [*перемножаемым*], если существует $\sup A$ [$\inf A$]. Выделим в P некоторые системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ суммируемы[х] и перемножаемых множеств, соответственно. Структура F называется ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$)*-свободным расширением множества* P, если:

(1) существует изоморфизм θ частично упорядоченног[о] множества P в структуру F;

(2) F порождается множеством $\theta(P)$;

(3) если $M \in \mathfrak{A}$, то $\sup_F(\theta(M))$ существует и $\sup_F(\theta(M)) = \theta(\sup_P M)$;

(4) если $N \in \mathfrak{B}$, то $\inf_F(\theta(N))$ существует и $\inf_F(\theta(N)) = \theta(\inf_P N)$;

(5) если φ — изотонное отображение частично упорядоченного множества P в некоторую структуру L, причем для любых $M \in \mathfrak{A}$ и $N \in \mathfrak{B}$ существуют $\sup_L(\varphi(M))$ и $\inf_L(\varphi(N))$, совпадающие с $\varphi(\sup_P M)$ и $\varphi(\inf_P N)$, соответственно, то существует такой гомоморфизм ψ структуры F в структуру L, что $\psi(\theta(x)) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

Важнейшими частными случаями являются *свободное* и *вполне свободное расширения*. Первое из них возникает, когда $\mathfrak{A}$ состоит из всех суммируемых, а $\mathfrak{B}$ — из всех перемножаемых пар множества P, второе — когда как $\mathfrak{A}$, так и $\mathfrak{B}$ совпадают со множеством всех сравнимых пар.

свободное и вполне свободное расширения тривиального частично упорядоченного множества совпадают. Соответствующая структура называется *свободной*. Свободное расширение кардинальной суммы структур называется их *свободным произведением*. Все эти определения вполне согласуются с употребляемыми в теории универсальных алгебр.

Для решения вопроса о существовании $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-свободного расширения частично упорядоченного множества P введем понятие *слова*. Именно, словами веса 0 назовем элементы множества P. Слова веса n определим как выражения $A+B$ и AB, где A и B — слова меньшего веса. Слова A и B, а также все их подслова называются *подсловами* слов $A+B$ и AB. Конечно, вес слова при этом не определяется однозначно. Однако среди весов, отвечающих данному слову A, существует наименьший, который будет обозначаться символом $w(A)$. Его в дальнейшем и будем называть *весом слова* A. Слова A и B веса 0 считаются равными (в обозначениях: $A \equiv B$), если они равны как элементы множества P. Равенства $A+B \equiv C+D$ и $AB \equiv CD$, по определению, имеют место тогда и только тогда, когда $A \equiv C$ и $B \equiv D$. Слова веса 0 и слова вида AB называются $\bigcup$-*неразложимыми*, а слова веса 0 и слова вида $A+B$ — $\bigcap$-*неразложимыми*. Представление слова A в форме

$$A \equiv A_1 + A_2 + \ldots + A_m, \tag{51}$$

где A_i — $\bigcup$-неразложимые слова и имеется в виду некоторое распределение скобок, называется $\bigcup$-*каноническим представлением*. Представление слова A в форме

$$A \equiv A_1 A_2 \ldots A_m, \tag{52}$$

где A_i — $\bigcap$-неразложимые слова и имеется в виду некоторое распределение скобок, называется $\bigcap$-*каноническим представлением*. Легко понять, что для каждого слова оба эти представления существуют и определяются однозначно. Однако хотя бы для одного из них $m = 1$. Если $m > 1$, то веса слов A_i меньше веса слова A. *Значением* $v(A)$ слова A веса 0 назовем элемент A. *Значение* $v(A)$ слова A с $\bigcup$-каноническим (соответственно, с $\bigcap$-каноническим) представлением (51) (соответственно, (52)) определяется в случае, когда для всех i определены значения $v(A_i)$ и множество $\{v(A_i) \mid i = 1, \ldots, m\}$ принадлежит системе $\mathfrak{A}$ (соответственно, системе $\mathfrak{B}$). При этих условиях полагаем

$$v(A) = \sup_P \{v(A_i)\}$$

(соответственно, $v(A) = \inf_P \{v(A_i)\}$).

Так что значением слова служит однозначно определяемый элемент из P. Однако не всякое слово имеет значение.

На множестве слов определим отношения $\underset{n}{\leqslant}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$A \underset{1}{\leqslant} B \underset{\text{def}}{=} \boxed{A \equiv B \text{ или } v(A) \leqslant_P v(B)}$$

и, если $n > 1$,

$A \underset{n}{\leqslant} B \underset{\text{def}}{=}$

(i) $A \underset{n-1}{\leqslant} C$ и $C \underset{n-1}{\leqslant} B$ для некоторого слова C;

или

(ii) $A \equiv A_1 + \ldots + A_m$ — $\bigcup$-каноническое представление и $A_i \underset{n-1}{\leqslant} B$ для всех $i = 1, \ldots, m$;

или

(iii) $A \equiv A_1 \ldots A_m$ — $\bigcap$-каноническое представление и $A_i \underset{n-1}{\leqslant} B$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$;

или

(iv) $B \equiv B_1 \ldots B_m$ — $\bigcap$-каноническое представление и $A \underset{n-1}{\leqslant} B_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$;

или

(v) $B \equiv B_1 + \ldots + B_m$ — $\bigcup$-каноническое представление и $A \underset{n-1}{\leqslant} B_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, m$.

Предложение 1. *$A \underset{n}{\leqslant} A$ для всех n.*

Действительно, при $n = 1$ лемма справедлива по определению. Если же $A \underset{n-1}{\leqslant} A$ и $A \underset{n-1}{\leqslant} A$, то, применяя правило (i), имеем $A \underset{n}{\leqslant} A$.

Предложение 2. *Если* $A \underset{n}{\leqslant} B$ *и* $m \geqslant n$, *то* $A \underset{m}{\leqslant} B$.

Действительно, из условия и леммы 1 вытекает, что $A \underset{n}{\leqslant} B$ и $B \underset{n}{\leqslant} B$. Применяя правило (i), получаем $A \underset{n+1}{\leqslant} B$. Далее по индукции.

Теперь положим

$$A \leqslant B \underset{\text{def}}{=} \boxed{A \underset{n}{\leqslant} B \text{ для некоторого } n.}$$

Предложение 3. *Отношение* $\leqslant$ *рефлексивно и транзитивно.*

Действительно, рефлексивность отношения $\leqslant$ сразу следует из предложения 1. Если $A \leqslant B$ и $B \leqslant C$, то, в силу предложения 2, можно считать, что $A \underset{n}{\leqslant} B$ и $B \underset{n}{\leqslant} C$ для некоторого n. Применяя правило (i), получаем $A \underset{n+1}{\leqslant} B$, т. е. $A \leqslant B$.

Предложение 4. $AB \leqslant A \leqslant A + B$ *и* $AB \leqslant B \leqslant A + B$.

В самом деле, если $C \equiv A + B$, а

$$A \equiv A_1 + \ldots + A_m$$

и

$$B \equiv B_1 + \ldots + B_n$$

— $\cup$-канонические представления, то, согласно предложению 1 и правилу (v), $C \geqslant A_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Ввиду правила (ii) отсюда следует, что $C \geqslant A$. Аналогично проверяется, что $C \geqslant B$. Неравенства $AB \leqslant A$, B доказываются двойственным рассуждением.

Предложение 5. *Если* $C \leqslant A$, B, *то* $C \leqslant AB$.

Для доказательства рассмотрим $\cap$-канонические представления

$$A \equiv A_1 \ldots A_m$$

и

$$B \equiv B_1 \ldots B_n.$$

Тогда

$$AB \equiv (A_1 \ldots A_m)(B_1 \ldots B_n)$$

— также $\cap$-каноническое представление. Из предложений 3 и 4 вытекает, что $C \leqslant A_i$, B_j ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$), после чего, в силу правила (iv), имеем $C \leqslant AB$.

Двойственным рассуждением доказывается

Предложение 6. *Если* $A, B \leqslant C$, *то* $A + B \leqslant C$.

Предложение 3 и теорема 1.3 позволяют рассматривать фактор-множество F множества слов по эквивалентности ρ, определяемой условием

$$A\rho B \underset{\text{def}}{=} \left| \overline{A \leqslant B \text{ и } B \leqslant A} \right| .$$

Согласно теореме 1.3, отношение $\leqslant$ индуцирует порядок на множестве F. В дальнейшем само слово A и его образ при естественном отображении на F будем обозначать одним и тем же символом. Запись $A = B$ означает равенство элементов в множестве F. Для обозначения равенства слов A и B, как и раньше, будем использовать запись: $A \equiv B$.

Из предложений 4—6 непосредственно вытекает

Предложение 7. *Частично упорядоченное множество* F *является структурой, причем* $A + B = \sup\{A, B\}$ *и* $AB = \inf\{A, B\}$.

Далее рассмотрим частично упорядоченное множество Q целочисленных строк, указанное в теореме 2.10, и докажем следующее утверждение:

Предложение 8. *Если*

$$q = (m_1, \ldots, m_n) \in Q,$$
$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} A_1 \underset{m_2}{\leqslant} \ldots \underset{m_{n-1}}{\leqslant} A_{n-1} \underset{m_n}{\leqslant} A_n$$

и не существует значений $v(A_1), \ldots, v(A_{n-1})$, *то строка*

$$r = (r_1, \ldots, r_s) < q$$

такая, что

$$A_0 \underset{r_1}{\leqslant} D_1 \underset{r_2}{\leqslant} \ldots \underset{r_{s-1}}{\leqslant} D_{s-1} \underset{r_s}{\leqslant} A_n,$$

существует в следующих случаях: 1) $A_k \equiv A_{k+1}$ *для некоторого* k; 2) *для некоторого* k *неравенство* $\underset{m_k}{\leqslant}$ *установлено* *с помощью правила* (i); 3) *для некоторого* $k \neq n$ *неравенство* $\underset{m_k}{\leqslant}$ *установлено с помощью правил* (iv) *или* (v), *причем эти правила не применяются для установления неравенств* $\underset{m_j}{\leqslant}$ *при* $j > k$; 4) *для некоторого* $k \neq 1$ *неравенство* $\underset{m_k}{\leqslant}$ *установлено с помощью правил* (ii) *или* (iii), *причем эти правила не применяются для установления неравенств* $\underset{m_j}{\leqslant}$ *при* $j < k$.

Действительно, в случае 1) имеем

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} \ldots \underset{m_{k-1}}{\leqslant} A_{k-1} \underset{m_{k+1}}{\leqslant} A_{k+1} \underset{m_{k+2}}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n,$$

что позволяет положить

$$r = (m_1, \ldots, m_{k-1}, m_{k+1}, \ldots, m_n).$$

В случае 2) должно быть

$$A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} C \underset{m_k-1}{\leqslant} A_k$$

для некоторого слова C. Следовательно,

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} \ldots \underset{m_{k-1}}{\leqslant} A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} C \underset{m_k-1}{\leqslant} A_k \underset{m_{k+1}}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n$$

и можно положить

$$r = (m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k - 1, m_k - 1, m_{k+1}, \ldots, m_n).$$

В случае 3) при применении правила (iv) имеем $\cap$-каноническое представление

$$A_k \equiv B_1 \ldots B_p.$$

Конечно, можно считать, что $p \neq 1$ и случаи 1) и 2) места не имеют. Поэтому неравенство $\underset{m_{k+1}}{\leqslant}$ может устанавливаться с помощью правил (ii), (iii), (iv) или (v). Однако применение правил (iv) или (v) противоречит выбору номера k. При применении правила (ii) имеем $A_k \underset{m_{k+1}-1}{\leqslant} A_{k+1}$, что позволяет положить

$$r = (m_1, \ldots, m_k, m_{k+1} - 1, m_{k+2}, \ldots, m_n).$$

Таким образом, остается допустить, что неравенство $\underset{m_{k+1}}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (iii). Но тогда для некоторого i имеем $B_i \underset{m_{k+1}-1}{\leqslant} A_{k+1}$, а для всех i — $A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} B_i$. Следовательно, для подходящего номера i справедливо

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} \ldots \underset{m_{k-1}}{\leqslant} A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} B_i \underset{m_{k+1}-1}{\leqslant} A_{k+1} \underset{m_{k+2}}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n$$

и можно положить

$$r = (m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k - 1, m_{k+1} - 1, m_{k+2}, \ldots, m_n).$$

Если же неравенство $\underset{m_k}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (v), то имеем $\bigcup$-каноническое представление

$$A_k \equiv B_1 + \ldots + B_p.$$

Как и выше, убеждаемся, что можно ограничиться рассмотрением случая, когда для установления неравенства $\underset{m_{k+1}}{\leqslant}$ применяется правило (ii). Следовательно, $A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} B_i$ для некоторого i и $B_i \underset{m_{k+1}-1}{\leqslant} A_{k+1}$ для всех i. Поэтому для подходящего i справедливо

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} \ldots \underset{m_{k-1}}{\leqslant} A_{k-1} \underset{m_k-1}{\leqslant} B_i \underset{m_{k+1}-1}{\leqslant} A_{k+1} \underset{m_{k+2}}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n$$

и строка

$$r = (m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k - 1, m_{k+1} - 1, m_{k+2}, \ldots, m_n).$$

Случай 4) рассматривается двойственным образом.

Предложение 9. *Если*

$$(m_1, \ldots, m_n) \in Q,$$

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} A_1 \underset{m_2}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n$$

и существуют значения $v(A_0)$ и $v(A_n)$, то

$$v(A_0) \leqslant_P v(A_n).$$

Для доказательства рассмотрим множество T всех таких строк, для которых предложение 9 не справедливо. Если T — пусто, то все доказано. В противном случае, согласно теореме 2.10, множество T содержит минимальный элемент $q = (m_1, \ldots, m_n)$. Так что

$$v(A_0) \not\leqslant_P v(A_n). \tag{53}$$

Если $q = (1)$, то, по определению отношения $\underset{1}{\leqslant}$, имеем $A_0 \equiv A_1$ или $v(A_0) \leqslant_P v(A_1)$, что несовместимо с (53). Если существует значение $v(A_i)$ при $i \neq 0, n$, то, в силу минимальности q и очевидных неравенств $(m_1, \ldots, m_i) < q$ и $(m_{i+1}, \ldots, m_n) < q$, имеем

$$v(A_0) \leqslant_P v(A_i) \leqslant_P v(A_n),$$

что опять противоречит соотношению (53). Таким образом, оказываются выполненными условия предложения 8 и минимальность q влечет неравенства $m_1, m_n > 1$ и наличие одного из следующих случаев:

2ii) неравенство $\underset{m_1}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (ii);

2iii) неравенство $\underset{m_1}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (iii);

3iv) неравенство $\underset{m_n}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (iv).

3v) неравенство $\underset{m_n}{\leqslant}$ установлено с помощью правила (v).

С л у ч а й 2ii). Имеем $\bigcup$-каноническое представление

$$A_0 \equiv B_1 + \ldots + B_m,$$

причем $B_i \underset{m_1-1}{\leqslant} A_1$ для всех i. Поскольку

$$v(A_0) = v(B_1) + \ldots + v(B_m),$$

то для всех i существует $v(B_i)$. Так как

$$(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_n) < q,$$

то $v(B_i) \leqslant_P v(A_n)$ для всех i и, следовательно, $v(A_0) \leqslant$ $\leqslant_P v(A_n)$, вопреки (53).

Случай 2iii). Имеем $\cap$-каноническое представление

$$A_0 \equiv B_1 \dots B_m,$$

причем, например, $B_1 \underset{m_1-1}{\leqslant} A_1$. Так как

$$v(A_0) = v(B_1) \dots v(B_m),$$

то $A_0 \underset{1}{\leqslant} B_1$. Поскольку

$$(1, m_1 - 1, m_1, \dots, m_n) < q,$$

то $v(A_0) \leqslant_P v(A_n)$, вопреки (53).

Случай 3iv). Имеем $\cap$-каноническое представление

$$A_n \equiv B_1 \dots B_m,$$

причем $A_{n-1} \underset{m_n-1}{\leqslant} B_i$ для всех i. Кроме того, для всех i существует $v(B_i)$. Поскольку

$$(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n - 1) < q,$$

то $v(A_0) \leqslant_P v(B_i)$ для всех i, откуда $v(A_0) \leqslant_P v(A_n)$, вопреки (53).

Случай 3v). Имеем $\cup$-каноническое представление

$$A_n \equiv B_1 + \dots + B_m$$

и, например, $A_{n-1} \underset{m_n-1}{\leqslant} B_1$. Кроме того,

$$v(A_n) = v(B_1) + \dots + v(B_m),$$

откуда $B_1 \underset{1}{\leqslant} A_n$. Поскольку

$$(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n - 1, 1) < q,$$

имеем $v(A_0) \leqslant_P v(A_n)$, что противоречит (53).

Предложение 10. *Если*

$$q = (m_1, \dots, m_n) \in Q,$$

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} A_1 \underset{m_2}{\leqslant} \dots \underset{m_n}{\leqslant} A_n,$$

A_n *имеет* $\bigcup$*-каноническое представление*

$$A_n \equiv D_1 + \ldots + D_t$$

и существует значение $v(A_0)$, *то или существует значение* $v(A_n)$ *или* $A_0 \leqslant_F D_j$ *для некоторого* $j = 1, \ldots, t$.

Для доказательства, как и в случае предложения 9, можно предположить, что q — минимальный среди элементов частично упорядоченного множества Q, для которых предложение 10 не справедливо. Если $q = (1)$, то существует значение $v(A_n)$. Если существует значение $v(A_i)$ для некоторого $i \neq 0, n$, то, поскольку $(m_{i+1}, \ldots, m_n) < q$, для некоторого j имеем $A_0 \leqslant_F A_i \leqslant_F D_j$. Если неравенство $\underset{m_n}{\leqslant}$ установлено по правилу (iv), то $A_{n-1} \underset{m_n-1}{\leqslant} A_n$, что приводит к противоречию с выбором q. Ввиду предложения 8 остается допустить, что или неравенство $\underset{m_n}{\leqslant}$ установлено по правилу (v), или же неравенство $\underset{m_1}{\leqslant}$ установлено с помощью правил (ii) или (iii). При первом предположении имеем $A_{n-1} \underset{m_n-1}{\leqslant} D_j$ для некоторого j и, следовательно, $A_0 \leqslant_F D_j$. Второе предположение влечет наличие представлений

$$A_0 \equiv C_1 + \ldots + C_s$$

или

$$A_0 \equiv C_1 \ldots C_s,$$

причем $C_i \underset{m_1-1}{\leqslant} A_1$ для всех i или для некоторого i, соответственно. Ввиду существования значения $v(C_i)$, для этих i и подходящего j имеем неравенства $C_i \leqslant_F D_j$, из которых вытекает, что $A_0 \leqslant_F D_j$.

Двойственным рассуждением доказывается

Предложение 11. *Если* $A_0 \leqslant_F A_n$, A_0 *имеет* $\bigcap$*-каноническое представление* $A_0 \equiv C_1 \ldots C_s$ *и существует значение* $v(A_n)$, *то или существует значение* $v(A_0)$ *или* $C_i \leqslant_F A_n$ *для некоторого* $i = 1, \ldots, s$.

Далее имеем

Предложение 12. *Если*

$$q = (m_1, \ldots, m_n) \in Q,$$
$$A_0 \equiv C_1 \ldots C_s$$

и

$$A_n \equiv D_1 + \ldots + D_t$$

— $\cap$- и $\cup$-канонические представления, не существуют значения $v(A_0)$ и $v(A_n)$ и

$$A_0 \underset{m_1}{\leqslant} A_1 \underset{m_2}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} A_n,$$

то $C_i \leqslant D_j$ для некоторых i и j.

Для доказательства, как и раньше, предположим, что q — минимальный среди элементов частично упорядоченного множества Q, для которых предложение 12 несправедливо. Допущение, что неравенство $\underset{m_1}{\leqslant}$ установлено по правилу (ii) или $\underset{m_n}{\leqslant}$ — по правилу (iv), приводит к противоречию с выбором q. Если $v(A_k)$ существует для некоторого k, то, в силу предложений 10 и 11, для некоторых i и j имеем

$$C_i \leqslant A_k \leqslant D_j.$$

В противном случае из предложения 8 вытекает, что или неравенство $\underset{m_1}{\leqslant}$ устанавливается по правилу (iii), или же неравенство $\underset{m_n}{\leqslant}$ устанавливается по правилу (v). В первом случае для некоторого i справедливо $C_i \underset{m_1-1}{\leqslant} A_1$. Если $v(C_i)$ существует, то $C_i \leqslant D_j$ для некоторого j, в силу предложения 10. Если же $v(C_i)$ не существует, то получаем то же неравенство, заметив, что C_i является своим собственным $\cap$-неприводимым представлением и что

$$(m_1 - 1, m_2, \ldots, m_n) < q.$$

Второй случай рассматривается двойственным образом.

П р е д л о ж е н и е 13. *Если $A = \sup_F \{A_1, \ldots, A_m\}$ и существуют значения $v(A), v(A_1), \ldots, v(A_m)$, то*

$$v(A) = \sup_P \{v(A_1), \ldots, v(A_m)\}.$$

Действительно, поскольку $A \geqslant_F A_i$ для всех i, то, согласно предложению 9, $v(A) \geqslant_P v(A_i)$ для всех i. Если $x \in P$ и $x \geqslant_P v(A_i)$ для всех i, то, рассматривая x как слово нулевого веса, будем иметь $x \underset{1}{\geqslant} A_i$ для всех i.

Следовательно, $x \geqslant_F A$ и после вторичного применения предложения 9 получаем $x \geqslant_P v(A)$. Таким образом, $v(A) = \sup_P \{v(A_1), \ldots, v(A_m)\}$.

Двойственным рассуждением доказывается

Предложение 14. *Если* $A = \inf_F \{A_1, \ldots, A_m\}$ *и существуют значения* $v(A), v(A_1), \ldots, v(A_m)$, *то*

$$v(A) = \inf_P \{v(A_1), \ldots, v(A_m)\}.$$

Теорема 1 (Дилуорс — Ден). *Если* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *состоят только из конечных подмножеств, то структура* F *является* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$*-свободным расширением частично упорядоченного множества* P.

Доказательство. Будем последовательно проверять, что структура F обладает свойствами (1) — (5), входящими в определение $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-свободного расширения.

(1) Если $a \in P$, то обозначим через $\theta(a)$ слово a веса 0. Если $a, b \in P$ и $a \leqslant_P b$, то $v(\theta(a)) = a$ и $v(\theta(b)) = b$, откуда $\theta(a) \underset{1}{\leqslant} \theta(b)$. Если же $\theta(a) \leqslant \theta(b)$, то

$$\theta(a) \underset{m_1}{\leqslant} A_1 \underset{m_2}{\leqslant} \ldots \underset{m_n}{\leqslant} \theta(b),$$

откуда, в силу предложения 9, вытекает

$$a = v(\theta(a)) \leqslant_P v(\theta(b)) = b.$$

В частности, если $\theta(a) = \theta(b)$, то $a \leqslant_P b \leqslant_P a$, откуда $a = b$. Так что θ — изоморфизм частично упорядоченного множества P в F.

(2) Легко выводится из предложения 7.

(3) Если $M \in \mathfrak{A}$, то M состоит из конечного числа элементов. Пусть это будут элементы $a_1, \ldots, a_m$. Составим слово

$$A \equiv \theta(a_1) + \ldots + \theta(a_m)$$

(имеется в виду некоторое распределение скобок). Так как $v(A) = v(\theta(v(A)))$, то $A \underset{1}{\leqslant} \theta(v(A)) \underset{1}{\leqslant} A$, т. е. $A = \theta(v(A))$. Отсюда с помощью предложений 7 и 13 выводим

$$\sup_F \theta(M) = A = \theta(v(A)) = \theta(\sup_P M).$$

(4) Проверяется двойственным рассуждением.

(5) Пусть φ и L имеют тот же смысл, что и в формулировке этого свойства. Для слова A веса 0 положим $\psi(A) = \varphi(v(A))$. Для слова A веса $w > 0$ рассмотрим его $\bigcup$- и $\bigcap$-канонические представления

$$A \equiv A_1 + \ldots + A_h$$

и

$$A \equiv A_1' \ldots A_{h'}'.$$

В одном и только в одном из этих представлений в правой части равенства стоят слова веса меньшего, чем w. Если это имеет место для первого представления, то положим

$$\psi(A) = \sup_L \{\psi(A_i) \mid i = 1, \ldots, h\},$$

а если для второго, то

$$\psi(A) = \inf_L \{\psi(A_i') \mid i = 1, \ldots, h'\}.$$

Убедимся, что если $v(A)$ существует, то

$$\psi(A) = \varphi(v(A)). \tag{54}$$

Действительно, для слов веса 0 это справедливо по определению. Для слова большего веса, используя индуктивное предположение и учитывая, что в рассматриваемом случае совокупность значений членов $\bigcup$-канонического [соответственно, $\bigcap$-канонического] представления лежит в $\mathfrak{A}$ [соответственно, в $\mathfrak{B}$], имеем

$$\psi(A) = \sup_L \{\psi(A_i)\} = \sup_L \{\varphi(v(A_i))\} = \\ = \varphi(\sup_P \{v(A_i)\}) = \varphi(v(A))$$

или

$$\psi(A) = \inf_L \{\psi(A_i')\} = \inf_L \{\varphi(v(A_i')\} = \\ = \varphi(\inf_P \{v(A_i')\}) = \varphi(v(A)).$$

Далее установим, что $A \underset{n}{\leqslant} B$ влечет $\psi(A) \leqslant_L \psi(B)$. В самом деле, если $n = 1$, то при $A \equiv B$, очевидно, имеем $\psi(A) \leqslant_L \psi(B)$. Если же $v(A) \leqslant_P v(B)$, то с помощью (54) получаем

$$\psi(A) = \varphi(v(A)) \leqslant \varphi(v(B)) = \psi(B).$$

Если $A \underset{n}{\leqslant} B$, то в случае применения правила (i), используя индуктивное предположение, получаем

$$\psi(A) \leqslant_L \psi(C) \leqslant_L \psi(B).$$

При применении правил (ii) или (iv) для всех $i = 1, \ldots, m$ имеем $\psi(A_i) \leqslant_L \psi(B)$ или $\psi(A) \leqslant_L \psi(B_i)$, соответственно. Поэтому справедливо

$$\psi(A) = \sup_L \{\psi(A_i)\} \leqslant_L \psi(B)$$

или

$$\psi(A) \leqslant_L \inf_L \{\psi(B_i)\} = \psi(B).$$

Если же применяются правила (iii) или (v), то для некоторых номеров i_0 и j_0, соответственно, имеем $\psi(A_{i_0}) \leqslant_L \psi(B)$ или $\psi(A) \leqslant_L \psi(B_{j_0})$. Отсюда

$$\psi(A) = \inf_L \{\psi(A_i)\} \leqslant_L \psi(A_{i_0}) \leqslant_L \psi(B)$$

или

$$\psi(A) \leqslant_L \psi(B_{j_0}) \leqslant_L \sup \{\psi(B_j)\} = \psi(B).$$

Таким образом, $A \leqslant_F B$ влечет $\psi(A) \leqslant_L \psi(B)$. В частности, если $A = B$, то $\psi(A) = \psi(B)$. Следовательно, ψ является изотонным отображением структуры F в структуру L, причем $\psi(\theta(x)) = \varphi(v(\theta(x))) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$. Если $C \equiv A + B$, то запишем $\bigcup$-канонические представления

$$A \equiv A_1 + \ldots + A_m$$

и

$$B \equiv B_1 + \ldots + B_n.$$

Учитывая теорему 1.4, получим

$$\psi(A + B) = \sup_L \{\psi(A_1), \ldots, \psi(A_m), \psi(B_1), \ldots, \psi(B_n)\} = \\ = \sup_L \{\sup_L \{\psi(A_i)\}, \sup_L \{\psi(B_j)\}\} = \\ = \sup_L \{\psi(A), \psi(B)\} = \psi(A) + \psi(B).$$

Двойственное рассуждение приводит к

$$\psi(AB) = \psi(A)\,\psi(B).$$

Следовательно, ψ — структурный гомоморфизм.

Свободное расширение тривиального частично упорядоченного множества, состоящего из n элементов $x_1, \ldots, x_n$, будем обозначать символом $FL(n)$. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются *свободными образующими*. Легко проверяется, что $FL(2)$ является четырехэлементной структурой, изображенной на рис. 5. Элементы a и b являются ее свободными образующими.

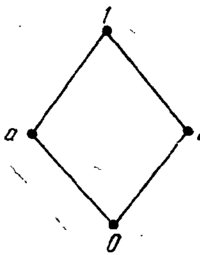


Рис. 5.

Теорема 2 (Уитмен). *Элементы $u_1, \ldots, u_m$ структуры $F = FL(n)$ являются свободными образующими порождаемой ими подструктуры тогда и только тогда, когда для всякого $i = 1, \ldots, m$ имеем*

$$u_i \nleqslant u_1 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots \\ \ldots + u_m \tag{55}$$

и

$$u_i \ngeqslant u_1 \ldots u_{i-1} u_{i+1} \ldots u_m. \tag{56}$$

Доказательство. Подструктуру структуры F, порожденную элементами $u_1, \ldots, u_m$, обозначим через U. Если $U = FL(m)$ со свободными образующими $u_1, \ldots, u_m$, но, например,

$$u_m \leqslant u_1 + \ldots + u_{m-1}$$

или

$$u_m \geqslant u_1 \ldots u_{m-1},$$

то отобразим множество $u_1, \ldots, u_m$ в $FL(2)$ (рис. 5), положив $\varphi(u_m) = a$ и $\varphi(u_1) = \ldots = \varphi(u_{m-1}) = b$. Ввиду свойства (5) свободного расширения, можно считать, что φ — гомоморфизм структуры U в структуру $FL(2)$. Это, однако, приводит к неверным соотношениям

$$a = \varphi(u_m) \leqslant_{FL(2)} \varphi(u_1 + \ldots + u_{m-1}) = b$$

или

$$a = \varphi(u_m) \geqslant_{FL(2)} \varphi(u_1 \ldots u_{m-1}) = b.$$

Допустим теперь, что элементы $u_1, \ldots, u_m$ удовлетворяют условиям (55) и (56). Рассмотрим структуру $G = FL(m)$. Согласно построению свободного расширения, описанному в ходе доказательства теоремы 1, структуры F и G являются фактор-множествами множеств слов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ в алфавитах $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$, соответственно. Зафиксируем в множестве $\mathfrak{F}$ слова $U_1, \ldots, U_m$, образами которых при естественном отображении служат элементы $u_1, \ldots, u_m$. Построим отображение Φ множества $\mathfrak{G}$ в множество $\mathfrak{F}$, полагая

$$\Phi(y_i) \equiv U_i \ (i = 1, \ldots, m),$$
$$\Phi(A + B) \equiv \Phi(A) + \Phi(B)$$

и

$$\Phi(AB) \equiv \Phi(A)\,\Phi(B).$$

Символы $=$, $\equiv$, $\underset{p}{\leqslant}$, $\leqslant$ будем использовать в том же смысле, что и при доказательстве теоремы 1. Вес слова A будем обозначать через $w(A)$. Образ слова A из $\mathfrak{F}$ или $\mathfrak{G}$ в структурах F и G, соответственно, обозначим через $\bar{A}$. Будут использоваться также предложения, предшествующие теореме 1.

(а) *Если* $A \in \mathfrak{G}$ *и* $\bar{A} \not\geqslant \bar{y}_i$, *то*

$$\bar{A} \leqslant \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_{i-1} + \bar{y}_{i+1} + \ldots + \bar{y}_m.$$

В самом деле, утверждение (а) очевидно, если $w(A) = 0$, ибо в этом случае $A \equiv y_j$, где $i \neq j$. Если же $w(A) > 0$, то $A \equiv B + C$ или $A \equiv BC$, где $w(B)$, $w(C) < w(A)$. Поскольку G — структура, в первом случае имеем $\bar{B}$, $\bar{C} \not\geqslant \bar{y}_i$, откуда, в силу индуктивного предположения, получаем

$$\bar{B}, \bar{C} \leqslant \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_{i-1} + \bar{y}_{i+1} + \ldots + \bar{y}_m.$$

Искомое неравенство является очевидным следствием этих соотношений. Во втором случае из условия вытекает, что, например, $\bar{B} \not\geqslant \bar{y}_i$ и индуктивное предположение позволяет получить неравенство

$$\bar{A} \leqslant \bar{B} \leqslant \bar{y}_1 + \ldots + \bar{y}_{i-1} + \bar{y}_{i+1} + \ldots + \bar{y}_m.$$

Двойственными рассуждениями устанавливается:

(б) *Если* $A \in \mathfrak{G}$ *и* $\bar{A} \not\leqslant \bar{y}_i$, *то*

$$\bar{A} \geqslant \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{i-1}\bar{y}_{i+1} \ldots \bar{y}_m.$$

(в) *Если* $A \underset{p}{\leqslant} B$, *то* $\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$.

Действительно, если $p = 1$, то ввиду тривиальности частично упорядоченного множества $\{y_1, \ldots, y_m\}$ имеем $A \equiv B$ и, следовательно, $\overline{\Phi(A)} = \overline{\Phi(B)}$. Если $p > 1$, то в случае применения правила (i) имеем $A \underset{p-1}{\leqslant} C \underset{p-1}{\leqslant} B$ для некоторого $C \in \mathfrak{S}$, откуда $\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(C)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$ в силу индуктивного предположения. Если применяется правило (ii), то, записав $\bigcup$-каноническое представление $A \equiv A_1 + \ldots + A_m$, будем иметь $A_i \underset{p-1}{\leqslant} B$ для всех i. Но $\Phi(A) \equiv \Phi(A_1) + \ldots + \Phi(A_m)$ и $\overline{\Phi(A_i)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$ для всех i, откуда $\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$. При применении правила (iii), записав $\bigcap$-каноническое представление $A \equiv A_1 \ldots A_m$, будем иметь $A_i \underset{p-1}{\leqslant} B$ для некоторого i, и индуктивное предположение приводит к неравенству

$$\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(A_i)} \leqslant \overline{\Phi(B)}.$$

Случаи применения правил (iv) или (v) рассматриваются аналогично.

(г) *Если* $B \in \mathfrak{S}$ *и* $u_i \leqslant \overline{\Phi(B)}$, *то* $\bar{y}_i \leqslant \bar{B}$.

Действительно, если $\bar{y}_i \nleqslant \bar{B}$, то, учитывая (а) и (в), получаем

$$u_i = \overline{U}_i \leqslant \overline{\Phi(B)} \leqslant \overline{\Phi(y_1 + \ldots + y_{i-1} + y_{i+1} + \ldots + y_m)} = \\ = u_1 + \ldots + u_{i-1} + u_{i+1} + \ldots + u_m,$$

что противоречит (55).

Двойственным рассуждением устанавливается:

(д) *Если* $A \in \mathfrak{S}$ *и* $\overline{\Phi(A)} \leqslant u_i$, *то* $\bar{A} \leqslant \bar{y}_i$.

(е) *Если* $\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$, *то* $\bar{A} \leqslant \bar{B}$.

Для доказательства привлечем частично упорядоченное множество Z, являющееся лексикографическим произведением двух цепей неотрицательных целых чисел. Легко проверяется, что Z удовлетворяет условию минимальности. Рассмотрим множество T всех таких строк (ξ, η) из Z, что для некоторых слов A и B, где $w(A) = \xi$, $w(B) = \eta$, утверждение (е) не справедливо. Если T — пусто, то все доказано. В противном случае можно считать, что $(w(A), w(B))$ — минимальный элемент из T. Из (г) и (д) вытекает, что $w(A)$, $w(B) \neq 0$. Поэтому для элементов A и B существуют $\bigcup$- или $\bigcap$-канонические представления

$$A \equiv A_1 + \ldots + A_s \quad \text{или} \quad A \equiv A_1 \ldots A_s$$

и

$$B \equiv B_1 + \ldots + B_t \quad \text{или} \quad B \equiv B_1 \ldots B_t,$$

где $w(A_i) < w(A)$ и $w(B_i) < w(B)$. Если для A имеет место $\bigcup$-каноническое представление, то ввиду (в)

$$\overline{\Phi(A_i)} \leqslant \overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$$

для всех i. А так как

$$(w(A_i),\ w(B)) < (w(A),\ w(B)),$$

то для всех i имеет место $\bar{A}_i \leqslant \bar{B}$ и, следовательно, $\bar{A} \leqslant \bar{B}$. Аналогично разбирается случай, когда для B имеется $\bigcap$-каноническое представление. Так что в дальнейшем можно считать, что

$$\Phi(A) \equiv \Phi(A_1) \ldots \Phi(A_s)$$

и

$$\Phi(B) \equiv \Phi(B_1) + \ldots + \Phi(B_t).$$

Эти представления можно продолжить до $\bigcap$- и $\bigcup$-канонических представлений, элементы которых будем обозначать через C_i и D_j, соответственно. Если существует значение $v(\Phi(A))$, то $\Phi(A) \equiv x_l$ для некоторого номера l. Это возможно лишь при $A \equiv y_h$ для некоторого h, так как по определению отображения Φ образы всех остальных слов имеют ненулевой вес. Но для этого случая неравенство $\bar{A} \leqslant \bar{B}$ справедливо согласно (г). Если значение $v(\Phi(A))$ не существует, то, применяя предложение 11 или 12, для подходящих номеров i, j и k получаем

$$\Phi(A_k) \leqslant C_i \leqslant \Phi(B)$$

или

$$\Phi(A_k) \leqslant C_i \leqslant D_j \leqslant \Phi(B).$$

Поскольку $(w(A_k), w(B)) < (w(A), w(B))$, отсюда вытекает, что

$$\bar{A} \leqslant \bar{A}_k \leqslant \bar{B}.$$

Теперь можно вернуться к доказательству теоремы 2. Пусть $A, B \in \mathfrak{G}$. Если $\bar{A} = \bar{B}$, то, согласно (в), имеем

$$\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)} \leqslant \overline{\Phi(A)},$$

т. е. $\overline{\Phi(A)} = \overline{\Phi(B)}$. Если $\bar{A} \leqslant \bar{B}$, то, по той же причине, $\overline{\Phi(A)} \leqslant \overline{\Phi(B)}$. Таким образом, Φ индуцирует изотонное отображение $\bar{\Phi}$ структуры G на подструктуру U структуры F, порожденную элементами $u_1, \ldots, u_m$. Если $\bar{\Phi}(A) \leqslant \bar{\Phi}(B)$, то $\bar{A} \leqslant \bar{B}$, согласно (е). В частности, если $\bar{\Phi}(A) \leqslant \bar{\Phi}(B) \leqslant \bar{\Phi}(A)$, то $\bar{A} = \bar{B}$. Следовательно, $\bar{\Phi}$ — изоморфизм, что и требовалось.

Теорема 3 (Уитмен). *$FL(3)$ содержит $FL(n)$ для всех n.*

Доказательство. Пусть $\{x_1, x_2, x_3\}$ — свободные образующие структуры $FL(3)$. Положим

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv x_1(x_2 + x_3) + x_2(x_1 + x_3), \\ u_2 &\equiv x_1(x_2 + x_3) + x_3(x_1 + x_2), \\ u_3 &\equiv (x_1 + x_2x_3)(x_2 + x_1x_3) \end{aligned}$$

и

$$u_4 \equiv (x_1 + x_2x_3)(x_3 + x_1x_2).$$

Рассмотрим структуры S и T, изображенные на рис. 6. Построим гомоморфизмы φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ структуры $FL(3)$ в структуры S и T, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) $\varphi_1(x_1) = y_1$, $\varphi_1(x_2) = y_2$, $\varphi_1(x_3) = y_3$; 2) $\varphi_2(x_1) = y_1$, $\varphi_2(x_2) = y_3$, $\varphi_2(x_3) = y_2$; 3) $\varphi_3(x_1) = z_1$, $\varphi_3(x_2) = z_3$, $\varphi_3(x_3) = z_2$; 4) $\varphi_4(x_1) = z_1$, $\varphi_4(x_2) = z_2$, $\varphi_4(x_3) = z_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1(u_1) &= y_1d + y_2b = 0 + a = a, \\ \varphi_1(u_2) &= y_1d + y_31 = 0 + y_3 = y_3, \\ \varphi_1(u_3) &= (y_1 + 0)(y_2 + 0) = 0, \\ \varphi_1(u_4) &= (y_1 + 0)(y_3 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Если бы $u_1 \leqslant u_2 + u_3 + u_4$, то

$$a = \varphi_1(u_1) \leqslant \varphi_1(u_2) + \varphi_1(u_3) + \varphi_1(u_4) \leqslant \leqslant y_3 + 0 + 0 = y_3,$$

что неверно. Аналогичным образом с помощью гомоморфизмов φ_2, φ_3 и φ_4 приводятся к противоречию предположения, что

$$u_2 \leqslant u_1 + u_3 + u_4,\quad u_3 \leqslant u_1 + u_2 + u_4 \text{ и } u_4 \leqslant u_1 + u_2 + u_3.$$

С помощью двойственных рассуждений устанавливается

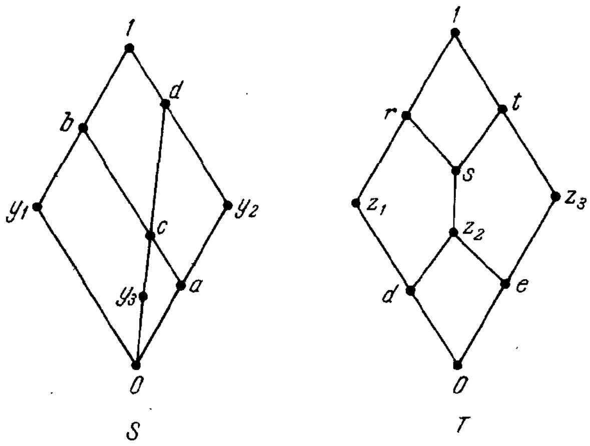


Рис. 6.

невозможность неравенств $u_1 \geqslant u_2u_3u_4$, $u_2 \geqslant u_1u_3u_4$, $u_3 \geqslant u_1u_2u_4$ и $u_4 \geqslant u_1u_2u_3$. Таким образом, элементы u_1, u_2, u_3, u_4 удовлетворяют условиям теоремы 2 и, следовательно, порождают структуру $FL(4)$. Таким образом, доказана

Лемма 1. *$FL(3)$ содержит $FL(4)$.*

Лемма 2. *Если $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — свободные образующие структуры $F = FL(m)$ и a — элемент подструктуры G структуры F, порожденной элементами $\{y_1, \ldots, y_{m-1}\}$, то $a \leqslant y_1 + \ldots + y_{m-1}$.*

Действительно, доказываемое неравенство справедливо, если вес элемента a равен нулю. В противном случае имеем $a = b + c$ или $a = bc$, где b и c имеют меньший вес. Учитывая индуктивное предположение, получаем

$$a = b + c \leqslant (y_1 + \dots + y_{m-1}) + (y_1 + \dots + y_{m-1}) = \\ = y_1 + \dots + y_{m-1}$$

или

$$a = bc \leqslant (y_1 + \dots + y_{m-1})(y_1 + \dots + y_{m-1}) = \\ = y_1 + \dots + y_{m-1}.$$

Лемма 3. *Если, в обозначениях леммы 2, имеем элементы $u_1, \dots, u_s \in G$, являющиеся свободными образующими структуры $FL(s)$, то элементы $\{u_1, \dots, u_s, y_m\}$ порождают структуру $FL(s+1)$.*

Для доказательства достаточно установить, что элементы $\{u_1, \dots, u_s, y_m\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Если $y_m \leqslant u_1 + \dots + u_s$, то, в силу леммы 2, имеем

$$y_m \leqslant u_1 + \dots + u_s \leqslant y_1 + \dots + y_{m-1},$$

что противоречит теореме 2. Если же

$$u_i \leqslant u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_s + y_m,$$

то рассмотрим гомоморфизм ψ структуры F в себя такой, что $\psi(y_j) = y_j$ $(j = 1, \dots, m-1)$ и $\psi(y_m) = u_1 \dots u_s$. Тогда

$$u_i = \psi(u_i) \leqslant u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_s + \\ + u_1 \dots u_s \leqslant u_1 + \dots + u_{i-1} + u_{i+1} + \dots + u_m,$$

что опять противоречит теореме 2. Этим доказана справедливость свойства (55) теоремы 2. Справедливость свойства (56) доказывается двойственными рассуждениями.

Лемма 4. *Если $m \geqslant 3$, то $FL(m)$ содержит $FL(m+1)$.*

Действительно, при $m = 3$ это доказано в лемме 1. При $m > 3$, используя обозначения леммы 2 и индуктивное предположение, выделим в структуре G элементы $u_1, \dots, u_m$, порождающие $FL(m)$. В силу леммы 3, элементы $u_1, \dots, u_m, y_m$ порождают структуру $FL(m+1)$.

Переходя к доказательству теоремы, заметим, что для $n = 4$ все доказано в лемме 1. Если же $FL(3)$ содержит $FL(m)$, то она содержит $FL(m+1)$, в силу леммы 4.

В качестве тривиального следствия теоремы 3 отметим:

Теорема 4. *Если* $n \geqslant 3$, *то структура* $FL(n)$ *бесконечна.*

Таким образом, $FL(1)$ и $FL(2)$ являются единственными конечными свободными структурами. Оказывается, что среди свободных структур не содержится и никаких других полных структур.

Теорема 5. *Пусть* F — *свободное расширение частично упорядоченного множества* P, *содержащего такие элементы* u_1, u_2, u_3, *что для любой перестановки* (i, j, k) *символов* $\{1, 2, 3\}$ *справедливо*:

(I) *если* $x \equiv u_i$, $y \equiv u_j$ *и* $z \equiv u_k$, *то* $x \not\leqslant_F y + z$ *и* $x \not\geqslant_F yz$;

(II) *если* $x \equiv u_i$, $y \equiv u_j$, $z \equiv u_k$, $a \in P$ *и существует значение* $v(x + y(z + x(y + za)))$, *то*

$$a \neq x + y(z + x(y + za));$$

(III) *если* $x \equiv u_i$, $y \equiv u_j$, $z \equiv u_k$, $a \in P$ *и существует значение* $v(x(y + z(x + y(z + a))))$, *то*

$$a \neq x(y + z(x + y(z + a))).$$

Тогда F *не является полной структурой. Сверх того, свойства* (II) *и* (III) *оказываются справедливыми для любого* $a \in F$.

Доказательство. Согласно теореме 1, структура F является фактор-множеством множества слов, построенного в начале параграфа. Элементы частично упорядоченного множества P можно отождествить с соответствующими словами нулевого веса. Как и раньше, будем использовать символы $=$, $\equiv$, значение слова $v(A)$ и его вес $w(A)$. Слово A называется *приведенным*, если для его $\bigcup$- и $\bigcap$-канонических разложений

$$A \equiv A_1' + \ldots + A_m'$$

и

$$A \equiv A_1'' \ldots A_n''$$

для всякого i и всякого A_0, где A_0 — или пустой символ, или $w(A_0) < w(A_i)$, справедливо

$$A \neq A_1' + \ldots + A_{i-1}' + A_0 + A_{i+1}' + \ldots + A_m'$$

и

$$A \neq A_1'' \ldots A_{i-1}'' A_0 A_{i+1}'' \ldots A_n''.$$

Слово называется *вполне приведенным*, если оно само и все его подслова являются приведенными. Вполне приведенное слово A называется *минимальным*, если $A = B$ влечет $w(A) \leqslant w(B)$. Слово называется *вполне минимальным*, если оно само и все его подслова минимальны.

Лемма 1. *Для всякого слова B найдется такое вполне минимальное слово A, что $A = B$.*

В самом деле, слова веса нуль, очевидно, вполне минимальны. Пусть B — произвольное слово ненулевого веса. Среди слов, равных B в структуре F, отметим слово C наименьшего веса. Если $w(C) = 0$, то можно положить $A = C$. В противном случае имеем, например, $C \equiv C'C''$, где $w(C')$, $w(C'') < w(C)$. В силу индуктивного предположения, найдутся такие вполне минимальные слова A' и A'', что $A' = C'$ и $A'' = C''$. Легко видеть, что слово $A \equiv A'A''$ удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 2. *Если A — минимальное слово, $w(A) \neq 0$ и $A = B$, то значение $v(B)$ не существует.*

Действительно, если $v(B)$ существует, то

$$A \leqslant B \underset{1}{\leqslant} v(B) \underset{1}{\leqslant} B \leqslant A.$$

Следовательно, $A = v(B)$. Но $w(v(B)) = 0 < w(A)$, что противоречит минимальности слова A.

Лемма 3. *Если A — минимальное слово, $w(A) \neq 0$ и $A = a + B$, где $a \in P$ и $a \nleqslant B$, то $A \equiv A_1 + A_2$, где $A_1 = a$ и $A_2 = B$ или $A_1 = B$ и $A_2 = a$.*

Для доказательства запишем $\bigcup$-каноническое представление

$$A \equiv A_1 + \ldots + A_m.$$

Лемма 2 позволяет применить предложение 10 к неравенству

$$a \leqslant A_1 + \ldots + A_m,$$

что при подходящей нумерации дает $a \leqslant A_1$. По той же причине из предложений 10 или 12, примененных к неравенству

$$A_1 \leqslant a + B,$$

вытекает или $A_1 \leqslant a$, или $A_1 \leqslant B$, или $E \leqslant a + B$ для некоторого слова E такого, что $E \geqslant A_1$ и $w(E) < w(A_1)$. Однако второе предположение приводит к неравенству

$$a \leqslant A_1 \leqslant B,$$

противоречащему условию. Из третьего — вытекает

$$A \leqslant E + A_2 + \ldots + A_m \leqslant a + B + A_2 + \ldots \\ \ldots + A_m \leqslant A,$$

что противоречит приведенности слова A. Таким образом, $a \leqslant A_1 \leqslant a$, т. е. $A_1 = a$. Ввиду минимальности слова A отсюда следует, что $A \not\equiv A_1$. Поэтому, применяя предложение 10 или 12 к неравенству

$$A_2 \leqslant a + B,$$

будем иметь или $A_2 \leqslant B$, или $A_2 \leqslant a$, или $E \leqslant a + B$, где $E \geqslant A_2$ и $w(E) < w(A_2)$. Поскольку $A_1 = a$, второе предположение приводит к равенству

$$A = A_1 + A_3 + \ldots + A_m, \tag{57}$$

противоречащему приведенности слова A. Ей же противоречит соотношение

$$A \leqslant A_1 + E + A_3 + \ldots + A_m \leqslant \\ \leqslant A_1 + a + B + A_3 + \ldots + A_m \leqslant A,$$

вытекающее из третьего предположения. Так что $A_2 \leqslant B$. Наконец, применив предложение 10 или 12 к неравенству

$$B \leqslant A_1 + \ldots + A_m,$$

для некоторого номера i будем иметь $B \leqslant A_i$. Если $i \neq 2$, то $A_2 \leqslant B \leqslant A_i$, откуда

$$A = A_1 + A_3 + \ldots + A_m,$$

вопреки приведенности слова A. Следовательно, $A_2 \leqslant B \leqslant A_2$, т. е. $A_2 = B$. Но тогда

$$A = A_1 + A_2$$

и ввиду приведенности слова A имеем $A \equiv A_1 + A_2$, где $A_1 = a$, $A_2 = B$. Поскольку в ходе доказательства изменялась нумерация, возможно, что $A_1 = B$ и $A_2 = a$.

Двойственными рассуждениями доказывается

Лемма 4. *Если A — минимальное слово, $w(A) \neq 0$ и $A = aB$, где $a \in P$ и $a \not\geqslant B$, то $A \equiv A_1A_2$, где $A_1 = a$ и $A_2 = B$ или $A_1 = B$ и $A_2 = a$.*

Лемма 5. *Если $a \in P$, то*

$$a \neq x + y(z + x(y + za))$$

и

$$a \neq x(y + z(x + y(z + a))).$$

Для доказательства допустим, что

$$a = x + y(z + x(y + za)),$$

и положим

$$U \equiv z + x(y + za).$$

Если существует значение $v(yU)$, то, согласно предложению 13, имеем

$$a = \sup_P \{x, v(yU)\}.$$

Поскольку $\mathfrak{A}$ содержит все суммируемые пары элементов из P, отсюда вытекает существование значения

$$v(x + yU),$$

что приводит к противоречию с условием (II). Если же значение $v(yU)$ не существует, то, применяя к неравенству $yU \leqslant a$ предложение 11, получаем

$$y \leqslant a = x + yU \leqslant x + U \leqslant x + z$$

или

$$z \leqslant U \leqslant a \leqslant x + y.$$

Однако каждое из этих неравенств противоречит условию (I).

Доказательство второго неравенства, указанного в лемме 5, проводится двойственным рассуждением.

Лемма 6. *Если $A \in F$, то*

$$A \neq x + y(z + x(y + zA))$$

и

$$A \neq x(y + z(x + y(z + A))).$$

Для доказательства допустим, что

$$A = x + y(z + x(y + zA)).$$

В силу леммы 5, $w(A) \neq 0$. Лемма 1 позволяет считать, что A — вполне минимальное слово. Положим

$$C \equiv z + x(y + zA)$$

и

$$D \equiv y + zA.$$

Рассмотрим равенство

$$A = x + yC.$$

Если $x \leqslant yC$, то $x \leqslant yC \leqslant y + z$, вопреки условию (I). Поэтому, применяя лемму 3, получаем

$$A \equiv A' + A_1$$

или

$$A \equiv A_1 + A',$$

где $A' = x$ и $A_1 = yC$. Если $w(A_1) = 0$, т. е. $A_1 \in P$, то равенство

$$A_1 = y(z + x(y + zA)) = y(z + x(y + z(x + A_1)))$$

противоречит лемме 5. Если же $w(A_1) \neq 0$, то, заметив, что неравенство $y \geqslant C$ приводит к соотношению

$$x + y \geqslant y \geqslant C \geqslant z,$$

противоречащему условию (I), получаем возможность применить к равенству $A_1 = yC$ лемму 4. Следовательно, $A_1 \equiv A''A_2$ или $A_1 \equiv A_2A''$, где $A'' = y$ и $A_2 = C = z + xD$. Как и выше, предположение, что $w(A_2) = 0$, приводит к равенству

$$A_2 = z + x(y + zA) = z + x(y + z(x + yC)) =$$
$$= z + x(y + z(x + yA_2))),$$

противоречащему лемме 5. Если же $w(A_2) \neq 0$, то, заметив, что неравенство $z \leqslant xD$ влечет противоречащее условию (I) соотношение

$$z \leqslant xD \leqslant x + y,$$

применим лемму 3 к равенству

$$A_2 = z + xD.$$

Отсюда

$$A_2 \equiv A''' + A_3$$

или

$$A_2 \equiv A_3 + A''',$$

где $A''' = z$ и $A_3 = xD$. Если $w(A_3) = 0$, то

$$A_3 = x(y + zA) = x(y + z(x + yC)) =$$
$$= x(y + z(x + y(z + xD))) = x(y + z(x + y(z + A_3))),$$

что противоречит лемме 5. Если $x \geqslant D$, то

$$x + z \geqslant D \geqslant y,$$

что противоречит условию (I). Следовательно, применив к равенству $A_3 = xD$ лемму 4, получим $A_3 \equiv A^{\mathrm{IV}}A_4$ или $A_3 \equiv A_4A^{\mathrm{IV}}$, где $A^{\mathrm{IV}} = x$ и $A_4 = D = y + zA$. Если $w(A_4) = 0$, то равенство

$$A_4 = y + zA = y + z(x + y(z + xA_4))$$

противоречит лемме 5. Если $y \leqslant zA$, то

$$y \leqslant zA \leqslant x + z,$$

что противоречит условию (I). Следовательно, к равенству $A_4 = y + zA$ можно применить лемму 3, что дает $A_4 \equiv A^{\mathrm{V}} + A_5$ или $A_4 \equiv A_5 + A^{\mathrm{V}}$, где $A^{\mathrm{V}} = y$ и $A_5 = zA$. Если $w(A_5) = 0$, то имеем

$$A_5 = zA = z(x + y(z + x(y + A_5))),$$

вопреки лемме 5. Если $z \geqslant A$, то

$$y + z \geqslant A \geqslant x,$$

вопреки условию (I). Как и выше, это дает возможность применить лемму 4 к равенству $A_5 = zA$. Следовательно,

$A_5 \equiv A^{\mathrm{VI}}A_6$ или $A_5 \equiv A_6A^{\mathrm{VI}}$, где $A_6 = A$. Но

$$w(A_6) < w(A_5) < w(A_4) < w(A_3) < \\ < w(A_2) < w(A_1) < w(A),$$

что противоречит минимальности слова A.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Для доказательства теоремы заметим, что, согласно лемме 6, изотонное отображение φ структуры F в себя, определяемое равенством

$$\varphi(A) = x + y(z + x(y + zA)),$$

лишено неподвижных точек. Поэтому, ввиду теоремы 3.2 структура F не может быть полной. Справедливость свойств (II) и (III) для элементов структуры F установлена в лемме 6.

Из теорем 2 и 5 сразу следует

Теорема 6. *Если $n \geqslant 3$, то структура $FL(n)$ не является полной.*

Естественно желание определить в классе полных структур структуру, аналогичную свободной. Для тривиального частично упорядоченного множества P соответствующее определение должно звучать так: полная структура F называется *свободной полной структурой* с системой свободных образующих P, если:

(1) $P \subseteq F$;

(2) F вполне порождается множеством P;

(3) для всякого отображения φ множества P в произвольную полную структуру L найдется такой полный гомоморфизм ψ структуры F в структуру L, что $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

Заметим, что существование свободной полной структуры не вытекает из теории универсальных алгебр, так как в полной структуре приходится рассматривать бесконечноместные операции.

Для решения вопроса о существовании свободных полных структур понадобится

Теорема 7. *Пусть L — некоторая структура и U — такая подструктура структуры L, что $\sup_L U$ не существует. Тогда существует структура F, содержащая L в качестве подструктуры, содержащая $u = \sup_F U$ и вполне порождаемая множеством L.*

Для доказательства присоединим к L некоторый новый элемент u и на полученном множестве P определим отношение $\trianglelefteq$:

$$a \trianglelefteq b \underset{\text{def}}{=} \begin{array}{|l|} \hline \text{(i) } a, b \in L \text{ и } a \leqslant_L b; \\ \text{или} \\ \text{(ii) } a = u,\ b \in L \text{ и } x \leqslant_L b \text{ для всех } x \in U; \\ \text{или} \\ \text{(iii) } a \in L,\ b = u \text{ и } a \leqslant_L x_0 \text{ для некоторого} \\ x_0 \in U; \\ \text{или} \\ \text{(iv) } a = b = u. \\ \hline \end{array}$$

Рефлексивность отношения $\trianglelefteq$ очевидна. Если $a \trianglelefteq b$ и $b \trianglelefteq a$, то мыслимы следующие комбинации применяемых правил: а) (i) и (i), б) (ii) и (iii); в) (iii) и (ii); г) (iv) и (iv). В случаях а) и г) ясно, что $a = b$. В случае б) имеем $a = u$ и $b \in L$, причем $b \leqslant x_0$ для некоторого $x_0 \in U$ и $x \leqslant b$ для всех $x \in U$. Так как $\sup U$ не существует, имеем $x_0 < x_1$ для некоторого $x_1 \in U$. Отсюда $x_1 \leqslant b \leqslant x_0 < x_1$, что невозможно. В случае в) должно быть $a \in L$ и $b = u$, причем $x \leqslant a$ для всех $x \in U$ и $a \leqslant x_0$ для некоторого $x_0 \in U$. Как и выше, приходим к противоречию, получая $x_1 \leqslant a \leqslant x_0 < x_1$. Так что $\trianglelefteq$ — антисимметричное отношение. Если $a \trianglelefteq b$ и $b \trianglelefteq c$, то возможны следующие комбинации применяемых правил: а) (i) и (i); б) (i) и (iii); в) (iii) и (ii); г) (iii) и (iv); д)(ii) и (i); е) (ii) и (iii); ж) (iv) и (ii); з) (iv) и (iv). В случаях а), г), е), ж) и з) справедливость соотношения $a \trianglelefteq c$ очевидна. В случае б) имеем $c = u$ и $a \leqslant b \leqslant x_0$ для некоторого $x_0 \in U$, откуда $a \trianglelefteq c$ по правилу (iii). В случае д) — $a = u$ и $x \leqslant b \leqslant c$ для всех $x \in U$, откуда $a \trianglelefteq c$ по правилу (ii). В случае в) — $b = u$, $a \leqslant x_0$ для некоторого $x_0 \in U$ и $x \leqslant c$ для всех $x \in U$. В частности, $a \leqslant x_0 \leqslant c$ и, следовательно, $a \trianglelefteq c$ по правилу (i). Таким образом, P оказывается частично упорядоченным множеством. Пусть F — его свободное расширение. Из свойств (1) — (4) ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$)-свободного расширения вытекает, что F содержит L как подструктуру и порождается множеством P. Доказательство будет окончено, если установить, что $u = \sup_F U$. Ясно, что $u \geqslant_F x$ для всех $x \in U$. Если $a \in F$ и $a \geqslant_F x$ для всех $x \in U$, то в случае, когда вес элемента a равен нулю, по правилу (ii) имеем $a \trianglerighteq u$ и, следовательно, $a \geqslant_F u$. В противном случае имеем приведенное $\bigcap$-каноническое [$\bigcup$-каноническое] представление

$$a \equiv b_1 b_2 \dots b_s \qquad [a \equiv b_1 + \dots + b_s],$$

где все b_i ($i = 1, \dots, s$) имеют меньший вес. При первом допущении для всякого $x \in U$ справедливо $x \leqslant_F a \leqslant_F b_i$ ($i = 1, \dots, s$). Учитывая индуктивное предположение, получаем $u \leqslant_F b_i$ и, следовательно, $u \leqslant_F a$. При втором допущении предположим, что для каждого b_i найдется такой элемент $x_i \in U$, что $x_i \nleqslant_F b_i$. Но $x = x_1 + \dots \dots + x_s \in U$. Следовательно, $x \leqslant_F a$ и, согласно предложению 10, $x \leqslant_F b_j$ для некоторого j. Отсюда

$$x_j \leqslant_F x \leqslant_F b_j,$$

что противоречит выбору элемента x_j. Таким образом, для некоторого i неравенство $x \leqslant_F b_i$ справедливо для всех $x \in U$. Учитывая индуктивное предположение, получаем

$$u \leqslant_F b_i \leqslant_F a.$$

Этим доказано, что $u = \sup_F U$.

Теорема 8. *Для любого множества $\mathfrak{M}$ существует такая полная структура L, вполне порождаемая тремя элементами, что мощность L не меньше мощности $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 2.3, превратим $\mathfrak{M}$ во вполне упорядоченное множество. Пусть $F_0 = FL(3)$ и u_1, u_2, u_3 — свободные образующие структуры F_0. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ ($\alpha, \beta \in \mathfrak{M}$) построены структуры F_β, причем:

а) F_β вполне порождается элементами u_1, u_2, u_3;

б) если $\beta < \gamma < \alpha$, то $F_\beta \underset{\neq}{\subset} F_\gamma$;

в) F_β обладает свойствами (I) — (III) теоремы 5;

г) F_β не полная структура.

В силу теорем 2, 5 и 6, F_0 обладает свойствами а), в) и г). Свойство же б) для нее лишено смысла. Если α — предельное, то положим $F_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F_\beta$. Ввиду свойства (II) теоремы 5 отображение φ, определяемое равенством

$$\varphi(a) = u_1 + u_2(u_3 + u_1(u_2 + u_3 a)),$$

является изотонным отображением структуры F_α в себ[я], лишенным неподвижных точек. Поэтому из теоремы 3 вытекает, что F_α обладает свойством г). Справедливос[ть] свойств а) — в) очевидна. Если $\alpha - 1$ существует, т[о] в силу теоремы 4.12, или не существует $\inf_{F_{\alpha-1}} F_{\alpha-1}$, ил[и] $F_{\alpha-1}$ содержит такую подструктуру U, что $\sup_{F_{\alpha-1}} U$ н[е] существует. Применив к $F_{\alpha-1}$ теорему 7 или теорему, двойственную ей, получим структуру F_α. Она, очевидно, обладает свойствами а) и б). Из теоремы 5 следует справедливость свойств в) и г). Положим $F = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{M}} F_\alpha$. Ввиду свойства б) мощность F не меньше мощности $\mathfrak{M}$. Ввиду а) F вполне порождается тремя элементами. В силу теоремы 3.7, оба эти свойства, очевидно, сохраняются для пополнения $\bar{F}$ структуры F сечениями, что и требовалось.

Теорема 9 (Кроули — Ден). *Не существует свободной полной структуры с тремя образующими.*

Доказательство. Пусть F — свободная полная структура с тремя образующими. Из теоремы 8 и известных результатов теории множеств (см., например, П. С. Александров, «Введение в общую теорию множеств и функций», Гостехиздат, 1948, стр. 42, теорема 15) вытекает существование полной структуры L, вполне порождаемой тремя элементами и имеющей мощность, бо́льшую мощности структуры F. Но тогда F не может быть отображена на L, что противоречит свойству (3) из определения свободной полной структуры.

Упражнения

1. Свободное и вполне свободное расширения частично упорядоченного множества P совпадают тогда и только тогда, когда P тривиальное.

2. Всякая структура является гомоморфным образом свободной структуры.

3. $FL(n)$ является структурой с нулем и единицей.

4. Свободное расширение бесконечного тривиального частично упорядоченного множества не имеет ни нуля, ни единицы.

5. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-свободное расширение частично упорядоченного множества с нулем [единицей] обладает нулем [единицей].

6. $FL(3)$ содержит $FL(\aleph_0)$.

7. Свободное расширение F частично упорядоченного множества P определяется однозначно с точностью до изоморфизма над P, т. е. для всякого другого такого свободного расширения F' найдется изоморфизм F на F', оставляющий на месте все элементы из P.

§ 6. ДЕДЕКИНДОВЫ СТРУКТУРЫ

Структура L называется *дедекиндовой* (или *модулярной*), если для любых a, b, $c \in L$, где $a \leqslant c$, справедлив модулярный закон

$$(a + b)c = a + bc.$$

Заметим, что тождество, двойственное модулярному закону, имеет вид $ab + c = a(b + c)$, причем $a \geqslant c$, т. е. снова оказывается модулярным законом. Следовательно, частично упорядоченное множество, двойственное дедекиндовой структуре, снова является дедекиндовой структурой. Поэтому принцип двойственности применим к дедекиндовым структурам.

Важнейшим примером дедекиндовой структуры является структура подпространств линейного пространства. Действительно, если A, B, C — подпространства и $A \subseteq C$, то, очевидно, $(A + B) \cap C \supseteq A + B \cap C$. Наоборот, если вектор c лежит в $(A + B) \cap C$, то $c = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Отсюда $b = c - a \in B \cap C$, т. е. $c \in A + B \cap C$ и, следовательно, $(A + B) \cap C \subseteq A + B \cap C$. Аналогично проверяется, что дедекиндовыми являются структуры нормальных делителей произвольной группы, идеалов кольца, подмодулей модуля. Напротив, структура всех подгрупп и структура всех эквивалентностей не обязаны быть дедекиндовыми. Не является дедекиндовой и структура линейных многообразий аффинного пространства.

Теорема 1. *Следующие свойства структуры L эквивалентны:*

(1) *L дедекиндова;*

(2) *$a(ab + c) = ab + ac$ для любых a, b, $c \in L$;*

(3) *если $a \geqslant b$ и для некоторого $c \in L$ справедливо $a + c = b + c$ и $ac = bc$, то $a = b$.*

Доказательство. Допустим, что справедли свойство (1). Тогда для любых a, b, $c \in L$ имеем $ab \leqslant$ и, следовательно,

$$a(ab + c) = (ab + c)a = ab + ac.$$

Если же, кроме того, выполнены условия свойства (3), т

$$a = a(a + c) = a(b + c) = b + ac = b + bc = b.$$

Таким образом, справедливы импликации (1) $\Rightarrow$ (2) (1) $\Rightarrow$ (3). Если выполнено (2) и $a \leqslant c$, то имеем

$$(a + b)c = (ac + b)c = ac + bc = a + bc,$$

т. е. (2) $\Rightarrow$ (1). Допустим, наконец, что справедливо свойство (3). Если a, b, $c \in L$ и $a \leqslant c$, то

$$a + b \leqslant (a + b)c + b \leqslant a + b$$

и

$$bc \leqslant (a + bc)b \leqslant (c + bc)b = bc.$$

Отсюда

$$(a + b)c + b = a + b,$$
$$(a + bc) + b = a + b,$$
$$(a + b)cb = bc$$

и

$$(a + bc)b = bc.$$

Так как

$$(a + b)c \geqslant a + bc,$$

то, применяя (3), получаем

$$(a + b)c = a + bc.$$

Так что импликация (3) $\Rightarrow$ (1) также справедлива.

Из доказанной теоремы вытекает, что дедекиндовы структуры образуют многообразие универсальных алгебр.

Теорема 2 (закон сокращения). *Если a, b, c — элементы дедекиндовой структуры и $(a + b)c = 0$, то $a(b + c) = ab$.*

Доказательство. Учитывая модулярный закон, получаем

$$a(b+c) = a(a+b)(b+c) = a(b+(a+b)c) = ab.$$

Теорема 3. *Дедекиндова структура с дополнениями является структурой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, $x+y=1$ и $xy=0$. Тогда, учитывая модулярный закон, получаем

$$x + (a + yb) = x + yb = (x+y)b = b$$

и

$$x(a+yb) = a + xyb = a,$$

что и требовалось.

В дедекиндовых структурах с нулем может быть развито учение о независимости, обобщающее известные понятия линейной алгебры. Именно, элементы $a_1, \ldots, a_n$ дедекиндовой структуры L с нулем 0 назовем *независимыми*, если

$$(a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n)a_i = 0$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Непосредственно из определения вытекает

Теорема 4. *Если* $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ *и* $b_1, \ldots, b_n$ *независимы, то* $a_1, \ldots, a_n$ *также независимы.*

Если $a_1, \ldots, a_n$ — независимые элементы, то сумму их будем называть *прямой* и обозначать через

$$a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_n.$$

Теорема 5. *Если* $a_1, \ldots, a_n$ *таковы, что*

$$(a_1 + \ldots + a_{i-1})\, a_i = 0$$

для всех $i = 1, \ldots, n$, *то они независимы.*

Доказательство. Для каждого фиксированного $j = 1, \ldots, n$ будем доказывать равенства

$$(a_1 + \ldots + a_{j-1} + a_{j+1} + \ldots + a_l)a_j = 0,$$

где $l = j+1, \ldots, n$. Допустим, что оно верно для $l-1$. Тогда, заметив, что

$$[(a_1 + \ldots + a_{j-1} + a_{j+1} + \ldots + a_{l-1}) + a_j]a_l = 0,$$

и применяя закон сокращения и индуктивное предположение, получаем

$$(a_1+\ldots+a_{j-1}+a_{j+1}+\ldots+a_l)a_j=$$
$$=[(a_1+\ldots+a_{j-1}+a_{j+1}+\ldots+a_{l-1})+a_l]a_j=$$
$$=(a_1+\ldots+a_{j-1}+a_{j+1}+\ldots+a_{l-1})a_j=0.$$

Остается заметить, что условие теоремы дает базу для индукции.

Теорема 6. *Если $a_1, \ldots, a_n$ независимы, а I и J — некоторые подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, то*

$$\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} a_j\Big)=\begin{cases} 0, & \text{если } I\cap J \text{ пусто,}\\ \sum\limits_{k\in I\cap J} a_k & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Доказательство. Если $J\subseteq I$ или J состоит из одного элемента, то утверждение очевидно. Если, далее, $I\cap J$ пусто и $j_0\in J$, то, в силу индуктивного предположения, имеем

$$\Big(\sum_{i\in I} a_i+a_{j_0}\Big)\Big(\sum_{j\in J\setminus j_0} a_j\Big)=0,$$

откуда, в силу закона сокращения, вытекает

$$\sum_{i\in I} a_i\cdot\sum_{j\in J} a_j=\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(a_{j_0}+\sum_{j\in J\setminus j_0} a_j\Big)=\sum_{i\in I} a_i a_{j_0}=0.$$

Если же существует $j_0\in I\cap J$, то, учитывая модулярный закон и индуктивное предположение, получаем

$$\sum_{i\in I} a_i\cdot\sum_{j\in J} a_j=\Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(a_{j_0}+\sum_{j\in J\setminus j_0} a_j\Big)=a_{j_0}+\sum_{k\in I\cap J\setminus j_0} a_k=$$
$$=\sum_{k\in I\cap J} a_k.$$

Теорема 7. *Если $a_1, \ldots, a_n$ — независимы и*

$$a_i=a_{i1}+\ldots+a_{ik_i}\quad (i=1, \ldots, n),$$

то элементы

$$a_{11}, \ldots, a_{1k_1}, a_{21}, \ldots, a_{2k_2}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk_n}$$

независимы.

Доказательство. Так как

$$(a_1 + \dots + a_{i-1})(a_{i1} + \dots + a_{ij}) \leqslant \leqslant (a_1 + \dots + a_{i-1})a_i = 0,$$

то, учитывая закон сокращения, получаем

$$(a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i1} + \dots + a_{ij-1})a_{ij} = = (a_{i1} + \dots + a_{ij-1})a_{ij} = 0.$$

После этого остается только применить теорему 5.

Теорема 8. *Если $a_1, \dots, a_n$ — независимые элементы дедекиндовой структуры L с нулем 0, то подструктура H структуры L, порожденная интервалами $[0, a_i]$ $(i = 1, \dots, n)$, изоморфна прямому произведению*

$$[0, a_1] \times [0, a_2] \times \dots \times [0, a_n].$$

Доказательство. Допустим сначала, что $n = 2$, и рассмотрим множество M элементов вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \leqslant a_1$ и $x_2 \leqslant a_2$. Ясно, что это множество замкнуто относительно сложения. Если $x_1 + x_2$ и $y_1 + y_2 \in M$, то

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \leqslant a_1 a_2 = 0.$$

Применяя закон сокращения, получаем

$$x_1(y_1 + x_2 + y_2) = x_1 y_1.$$

Аналогично проверяется, что

$$x_2(y_1 + x_1 + y_2) = x_2 y_2.$$

Из этих равенств с помощью модулярного закона выводим

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2)(y_1 + x_2 + y_2)(y_1 + y_2) = = (x_2 + x_1(y_1 + x_2 + y_2))(y_1 + y_2) = = (x_2 + x_1 y_1)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_2(y_1 + y_2)(y_1 + x_1 + + y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 (y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Таким образом, множество M замкнуто и относительно произведения, а значит, совпадает с подструктурой H. Более того, последнее равенство вместе с очевидным равенством

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$$

показывает, что

$$\varphi(x, y) = x + y$$

является структурным гомоморфизмом прямого произведения $[0, a_1] \times [0, a_2]$ на H. Если $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$, то, поскольку $y_2a_1 \leqslant a_2a_1 = 0$ и $x_2a_1 \leqslant a_2a_1 = 0$, модулярный закон позволяет получить

$$x_1 = x_1(x_1 + x_2)a_1 = x_1(y_1 + y_2)a_1 =$$
$$= x_1(y_1 + y_2a_1) = x_1y_1 = y_1(x_1 + x_2a_1) =$$
$$= y_1(x_1 + x_2)a_1 = y_1(y_1 + y_2)a_1 = y_1.$$

Аналогично устанавливается, что $x_2 = y_2$. Следовательно, φ — изоморфизм. Если $n > 2$, то, используя индуктивное предположение, будем иметь

$$H \cong [0, a_1 + \ldots + a_{n-1}] \times [0, a_n] \cong$$
$$\cong [0, a_1] \times \ldots \times [0, a_{n-1}] \times [0, a_n].$$

Теорема 9. *Если a и b — элементы дедекиндовой структуры L, то интервалы $[ab, a]$ и $[b, a + b]$ изоморфны. При этом изоморфизм осуществляется отображениями*

$$\varphi(x) = x + b \qquad (ab \leqslant x \leqslant a)$$

и

$$\psi(y) = ay \qquad (b \leqslant y \leqslant a + b).$$

Доказательство. Ясно, что φ и ψ — изотонные отображения, причем

$$\psi\varphi(x) = a(x + b) = x + ab = x$$

и

$$\varphi\psi(y) = ay + b = (a + b)y = y.$$

Если $a + c = b + c$, то элементы a и b называются *перспективными*, а элемент c — *осью перспективы*. Последовательное применение отображений, указанных в теореме 9:

$$[0, a] = [ac, a] \to [c, a + c] = [c, b + c] \to [bc, b] = [0, b],$$

позволяет установить изоморфизм между интервалами $[0, a]$ и $[0, b]$, который называется *перспективным отображением* с осью c и обозначается через $P_{(a\to b;\, c)}$. Нетрудно понять, что $P_{(a\to b;\, c)}$ отображает элемент $x \in [0, a]$ на элемент $y = (x + c)b \in [0, b]$.

Если L — структура, состоящая из пустого множества, точек и прямых проективной плоскости и самой плоскости, то перспективное отображение $P_{(a\to b;\, c)}$ ставит в соответствие точке x на прямой a точку y на прямой b (рис. 7). Этим и объясняется название.

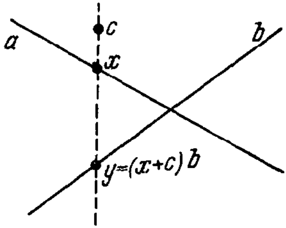


Рис. 7.

Теорема 10. *Если дедекиндова структура L имеет композиционный ряд длины n, то она не имеет цепей, содержащих $n + 2$ элемента.*

Доказательство. Пусть $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$ — композиционный ряд структуры L. Допустим, что L содержит цепь

$$b_0 < b_1 < \ldots < b_{n+1},$$

все элементы которой различны. Не ограничивая общности, можно считать, что $b_0 = 0$. Если $n = 1$, то L является двухэлементной цепью и теорема, очевидно, справедлива. Если $n > 1$, то рассмотрим цепь

$$a_1 \leqslant a_1 + b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_1 + b_{n+1}.$$

Так как эта цепь принадлежит структуре $[a_1, 1]$, обладающей композиционным рядом

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1,$$

то, в силу индуктивного предположения, для некоторого номера i имеем

$$a_1 + b_{i-1} = a_1 + b_i.$$

Разумеется, можно считать, что i — наименьший из таких номеров. Если $i = 1$, т. е. $a_1 = a_1 + b_1$, то $0 < b_1 \leqslant a_1$. откуда $a_1 = b_1$ в силу простоты интервала $[0, a_1]$. Следовательно, $[a_1, 1]$ содержит цепь $b_1 < \ldots < b_{n+1}$, что противоречит индуктивному предположению. Пусть теперь $i > 1$. Если

$$a_1 b_{i-1} = a_1 b_i,$$

то свойство (3) теоремы 1 приводит к неверному равенст[ву] $b_i = b_{i-1}$. В противном случае, поскольку $a_1 b_{i-1}$ и a_1 принадлежат простому интервалу $[0, a_1]$, имеем $a_1 b_{i-1} =$ и $a_1 b_i = a_1$. Отсюда $a_1 \leqslant b_i$ и, следовательно, $b_i = a_1 + b_i = a_1 + b_{i-1}$. Согласно теореме 8, существует изо[]морфизм φ интервала $[0, b_{i-1}] = [a_1 b_{i-1}, b_{i-1}]$ н[а] $[a_1, a_1 + b_{i-1}] = [a_1, b_i]$. Но тогда структура $[a_1, 1]$ содерж[ит] цепь

$$a_1 = \varphi(b_0) < \varphi(b_1) < \ldots < \varphi(b_{i-1}) = b_i < b_{i+1} < \ldots$$
$$\ldots < b_{n+1},$$

что противоречит индуктивному предположению.

Из теоремы 10 непосредственно вытекает

Теорема 11. *Все композиционные ряды дедекиндовой структуры имеют одинаковую длину.*

Теорема 11 находит очевидные применения в теории колец, модулей и групп.

Функцией размерности на структуре L называется целочисленная функция d, обладающая следующими свойствами:

(1) если $[x, y]$ — простой интервал, то $d(y) = d(x) + 1$;

(2) $d(x + y) + d(xy) = d(x) + d(y)$ для любых $x, y \in L$.

Если d — функция размерности, то $D \underset{\text{def}}{=} d + m$, где m — целое, также является функцией размерности. Поэтому для любого заданного элемента $a \in L$ функцию размерности, если она существует, всегда можно выбрать так, что $d(a) = 0$. Простая индукция показывает, что

$$d(a_1 + \ldots + a_n) = d(a_1) + \ldots + d(a_n).$$

Теорема 12. *Если интервал $[a, b]$ дедекиндовой структуры имеет композиционный ряд, d — функция размерности и $d(a) = d(b)$, то $a = b$.*

Доказательство. Если $a < a_1 < \ldots < a_{l-1} < b$ — композиционный ряд, то ввиду свойства (1) имеем $d(b) = d(a) + l$, откуда $l = 0$ и, следовательно, $a = b$.

Цепь C в структуре L называется *ограниченной*, если не пусты ее верхний и нижний конусы.

Теорема 13. *Для структуры L, все ограниченные цепи которой конечны, оказываются эквивалентными следующие свойства:*

(1) *L дедекиндова;*

(2) *если a, $b \in L$, то интервал $[ab, a]$ прост тогда и только тогда, когда прост интервал $[b, a+b]$;*

(3) *на L существует функция размерности d.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) сразу следует из теоремы 9. Для доказательства импликации (3) $\Rightarrow$ (1) допустим, что a, $b \in L$, $a \geqslant b$ и для некоторого $c \in L$ имеет место $a + c = b + c$ и $ac = bc$. Из конечности ограниченных цепей структуры L вытекает, что интервал $[b, a]$ обладает композиционным рядом. Пусть l — его длина. Из определения функции размерности вытекает, что

$$d(b) + l + d(c) = d(a) + d(c) = d(a+c) + d(ac) = \\ = d(b+c) + d(bc) = d(b) + d(c).$$

Следовательно, $l = 0$, т. е. $a = b$. Остается принять во внимание теорему 1. Переходя к доказательству импликации (2) $\Rightarrow$ (3), допустим, что структура L обладает свойством (2).

Лемма 1. *Если a, $b \in L$ и $a \leqslant b$, то все композиционные ряды интервала $[a, b]$ имеют одну и ту же длину.*

В самом деле, пусть l — наименьшая из длин указанных композиционных рядов. Если $l = 0$ или $l = 1$, то интервал оказывается одно- или двухэлементной цепью. В обоих случаях справедливость леммы очевидна. Пусть теперь $l > 1$ и имеются композиционные ряды

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_l = b$$

и

$$a = d_0 < d_1 < \ldots < d_m = b.$$

Если $c_1 d_1 = c_1$, то $c_1 \leqslant d_1$. Выбрав композиционный ряд

$$c_1 = f_0 < f_1 < \ldots < f_k = d_1$$

интервала $[c_1, d_1]$, получим композиционный ряд

$$c_1 = f_0 < f_1 < \dots < f_k = d_1 < \dots < d_m = b$$

интервала $[c_1, b]$. Отсюда $l \leqslant m$ и, в силу индуктивного предположения, $k + m - 1 = l - 1$, откуда $k = 0$ и $m = l$. Если же $c_1 d_1 \neq c_1$, то ввиду простоты интервала $[a, c_1]$ имеем $c_1 d_1 = a$. Выберем какой-нибудь композиционный ряд

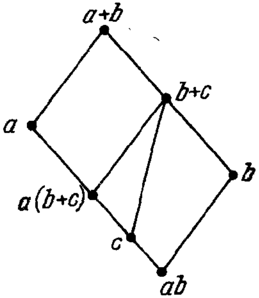


Рис. 8.

$$c_1 + d_1 = g_0 < g_1 < \dots < g_n = b$$

интервала $[c_1 + d_1, b]$. Ввиду (2) цепи

$$c_1 < c_1 + d_1 = g_0 < g_1 < \dots$$
$$\dots < g_n = b$$

и

$$d_1 < c_1 + d_1 = g_0 < g_1 < \dots < g_n = b$$

оказываются композиционными рядами интервалов $[c_1, b]$ и $[d_1, b]$, соответственно. Учитывая индуктивное предположение, получаем

$$l - 1 = n + 1 = m - 1,$$

и, следовательно, $m = l$.

Лемма 1 позволяет обозначить символом $l(a, b)$ длину композиционных рядов интервала $[a, b]$.

Лемма 2. $l(ab, a) = l(b, a + b)$.

Для доказательства положим $m = l(ab, a)$. Если $m = 0$, то $ab = a$, а значит, $a + b = b$, т. е. $l(b, a + b) = 0$. Если $m = 1$, то справедливость леммы сразу следует из (2). Если $m > 1$, то выберем такой элемент $c \in [ab, a]$, что $l(ab, c) = 1$ (рис. 8). Тогда $bc = c$ или $bc = ab$. Однако в первом случае имеем $b \geqslant c$, а значит, $ab < c \leqslant ab$, что невозможно. Таким образом, $bc = ab$. Далее, имеем

$$b + c \leqslant b + a(b + c) \leqslant b + c,$$

т. е.

$$a(b + c) + b = b + c.$$

Ясно, что

$$a\,(b+c)\cdot b = ab.$$

Если $a\,(b+c) = a$, то

$$b + c = b + c + a = a + b$$

и, поскольку $l\,(bc,\ c) = l\,(ab,\ c) = 1 < m$,

$$l\,(b,\ a+b) = l\,(b,\ b+c) = l\,(ab,\ c) = 1.$$

Из свойства (2) вытекает, что $l\,(ab,\ a) = 1$, вопреки допущению. Таким образом,

$$l\,(a\,(b+c)b,\ a\,(b+c)) < m$$

и, в силу индуктивного предположения, получаем

$$\begin{aligned} l\,(ab,\ a\,(b+c)) = l\,(a\,(b+c)\cdot b,\ a\,(b+c)) = \\ = l\,(b,\ a\,(b+c)+b) = l\,(b,\ b+c) = l\,(bc,\ c) = \\ = l\,(ab,\ c). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a\,(b+c) = c$$

и, дважды применив индуктивное предположение, будем иметь

$$\begin{aligned} l\,(b,\ a+b) = l\,(b,\ b+c) + l\,(b+c,\ a+b) = \\ = l\,(ab,\ c) + l\,(a\,(b+c),\ a) = \\ = l\,(ab,\ c) + l\,(c,\ a) = l\,(ab,\ a). \end{aligned}$$

Наконец, зафиксируем некоторую точку $w \in L$ и положим

$$d\,(x) \underset{\mathrm{def}}{=} l\,(xw,\ x) - l\,(xw,\ w).$$

Если $[x,\ y]$ — простой интервал, то $xw \leqslant yw \leqslant y$. Поэтому

$$\begin{aligned} d\,(y) = l\,(yw,\ y) - l\,(yw,\ w) = \\ = l\,(xw,\ yw) + l\,(yw,\ y) - [l\,(xw,\ yw) + l\,(yw,\ w)] = \\ = l\,(xw,\ y) - l\,(xw,\ w) = \\ = l\,(xw,\ x) + l\,(x,\ y) - l\,(xw,\ w) = d\,(x) + 1. \end{aligned}$$

Если $x, y \in L$, то из доказанного выше вытекает

$$d(x+y) = d(y) + l(y, x+y)$$

и

$$d(xy) = d(x) - l(xy, x).$$

Но $l(xy, x) = l(y, x+y)$, согласно лемме 2. Следовательно,

$$d(x+y) + d(xy) = d(x) + d(y).$$

Пусть L — дедекиндова структура с нулем 0 и единицей 1. Ненулевой элемент $a \in L$ называется *неразложимым*, если он не может быть представлен в форме $a = b + c$, где $b, c \neq 0$.

Теорема 14. *Если дедекиндова структура L обладает композиционным рядом, то всякий ненулевой элемент $a \in L$ представим в форме*

$$a = a_1 + \ldots + a_m,$$

где $a_1, \ldots, a_m$ — неразложимые элементы.

Доказательство. Из теоремы 10 нетрудно вывести, что подструктура $[0, a]$ также обладает композиционным рядом. Учитывая теорему 11, обозначим через l длину этого ряда. Справедливость теоремы очевидна, если $l \leqslant 1$. Если же $l > 1$, то положим $a = b_0$ и допустим, что построен ряд

$$b_0 > \ldots > b_k,$$

причем $a = b_k + c_k$ для некоторого $c_k \in L$. Если элемент b_k не является неразложимым, то $b_k = b_{k+1} + d$, где $b_{k+1} < b_k$ и, согласно теореме 7, имеем

$$a = b_{k+1} + (d + c_k).$$

В силу теоремы 10, описанное построение не может продолжаться бесконечно. Следовательно, a можно представить в форме $a = a_1 + b$, где a_1 — неразложимый элемент. Разумеется, интервал $[0, b]$ имеет композиционный ряд длины меньшей, чем l. Поэтому

$$b = a_2 + \ldots + a_m$$

и, в силу теоремы 7,

$$a = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m.$$

Теорема 14 не допускает обращения. В качестве примера годится любая бесконечная цепь.

Теорема 15 (Оре). *Пусть L — дедекиндова структура, обладающая композиционным рядом длины l, и*

$$1 = a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m = b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n,$$

где $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ — неразложимые элементы. Тогда $m = n$ и для всякого a_i найдется такой элемент b_j, что

$$1 = a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_{i-1} \dot{+} b_j \dot{+} a_{i+1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_m.$$

Доказательство. Будем вести индукцию по l. Если $l = 0$, то L — одноэлементная структура и теорема тривиально справедлива. Справедлива она и при $l = 1$, ибо в этом случае $m = n = 1$. Если $l > 1$, то положим

$$\bar{a}_i = a_1 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_m$$

и будем рассматривать следующие три случая:

1) $a_1 + \bar{b}_1 = \bar{a}_1 + b_1 = 1$ при подходящей нумерации элементов b_j;

2) $a_1 + \bar{b}_1 < 1$ при подходящей нумерации элементов b_j;

3) для всех j справедливо $a_1 + \bar{b}_j = 1$ и $\bar{a}_1 + b_j < 1$.

Кроме того, воспользовавшись теоремами 10 и 13, зафиксируем на L функцию размерности d такую, что $d(0) = 0$.

В случае 1) имеем

$$d(a_1) = d(1) - d(\bar{b}_1) + d(a_1\bar{b}_1) = d(b_1) + d(a_1\bar{b}_1) \geqslant d(b_1)$$

и

$$d(b_1) = d(1) - d(\bar{a}_1) + d(\bar{a}_1 b_1) = d(a_1) + d(\bar{a}_1 b_1) \geqslant d(a_1).$$

Отсюда $d(a_1) = d(b_1)$ и, значит, $d(a_1\bar{b}_1) = d(\bar{a}_1 b_1) = 0$, откуда $a_1\bar{b}_1 = \bar{a}_1 b_1 = 0$, в силу теоремы 12. Таким образом, $1 = b_1 \dot{+} \bar{a}_1$, т. е. a_1 можно заместить некоторым b_j.

В случае 2) положим $q_h = (a_1 + \bar{b}_h) b_h$ $(h = 1, \ldots, n)$ и $c = q_1 + \ldots + q_n$.

Так как $q_h \leqslant b_h$, то

$$c = q_1 \dotplus \ldots \dotplus q_n.$$

Если $(a_1 + \bar{b}_1)b_1 = b_1$, то $a_1 + \bar{b}_1 \geqslant b_1$, откуда

$$a_1 + \bar{b}_1 \geqslant b_1 + \bar{b}_1 = 1.$$

Противоречие. Следовательно, $q_1 = (a_1 + \bar{b}_1)b_1 < b_1$. Поэтому

$$d(c) = d(q_1) + \ldots + d(q_n) < d(b_1) + \ldots + d(b_h) = d(1),$$

откуда $c < 1$. Положив $r_h = a_1 + \bar{b}_h$, будем иметь $q_1 = r_1 b_1$. Если

$$q_1 + \ldots + q_{i-1} = r_1 \ldots r_{i-1}(b_1 + \ldots + b_{i-1}),$$

то, учитывая неравенства

$$b_1 + \ldots + b_{i-1} \leqslant \bar{b}_i \leqslant r_i$$

и

$$b_i \leqslant \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_{i-1} \leqslant r_1 \ldots r_{i-1},$$

а также модулярный закон, получаем

$$q_1 + \ldots + q_i = r_1 \ldots r_{i-1}(b_1 + \ldots + b_{i-1}) + r_i b_i = \\ = r_i[r_1 \ldots r_{i-1}(b_1 + \ldots + b_{i-1}) + b_i] = \\ = r_1 \ldots r_i(b_1 + \ldots + b_i).$$

При $i = n$ доказанное соотношение превращается в

$$c = q_1 + \ldots + q_n = r_1 \ldots r_n \cdot 1 = r_1 \ldots r_n \geqslant a_1,$$

откуда

$$a_1 + \bar{a}_1 c = (a_1 + \bar{a}_1)c = c$$

и, кроме того,

$$a_1 \cdot \bar{a}_1 c = 0.$$

Таким образом,

$$c = a_1 \dotplus \bar{a}_1 c = q_1 \dotplus \ldots \dotplus q_n.$$

Ввиду теоремы 14 можно считать, что как $\bar{a}_1 c$, так и все q_h представлены в виде прямой суммы неразложимых элементов. С другой стороны, длина композиционного ряда структуры $[0, c]$ меньше, чем l. Поэтому индуктивное предположение позволяет записать

$$c = e \dotplus \bar{a}_1 c,$$

где $e \dotplus f = q_h$ для некоторого номера h. Отсюда

$$e + \bar{a}_1 = e + \bar{a}_1 c + \bar{a}_1 = c + \bar{a}_1 = a_1 + \bar{a}_1 c + \bar{a}_1 = 1$$

и, следовательно,

$$0 \neq e \leqslant q_h \leqslant b_h.$$

Но

$$e + b_h \bar{a}_1 = b_h (e + \bar{a}_1) = b_h$$

и

$$e \cdot b_h \bar{a}_1 = e c b_h \bar{a}_1 = [e (\bar{a}_1 \ c)] b_h = 0,$$

т. е.

$$b_h = e \dotplus b_h \bar{a}_1.$$

Ввиду неразложимости элемента b_h отсюда следует, что $e = b_h$. Таким образом,

$$1 = b_h + \bar{a}_1,$$

т. е. и в этом случае a_1 можно заместить некоторым b_h. При этом оказывается, что $h \neq 1$. В самом деле, ввиду $q_1 < b_1$, b_1 не может быть прямым слагаемым в q_1, а при $h \neq 1$ имеем $b_1 q_h \leqslant b_1 b_h = 0$.

В случае 3) имеем, в частности,

$$b_1 + \bar{a}_1 < 1.$$

В силу результата, полученного при рассмотрении случая 2), отсюда следует, что

$$1 = a_h \dotplus \bar{b}_1,$$

причем $h \neq 1$. Но

$$1 = a_h \dotplus \bar{a}_h.$$

Поэтому существует перспективное отображение

$$\chi = P_{(\bar{b}_1 \to \bar{a}_h;\ a_h)}.$$

Следовательно,

$$\bar{a}_h = a_1 \dotplus \ldots \dotplus a_{h-1} \dotplus a_{h+1} \dotplus \ldots \dotplus a_m = \\ = \chi(b_2) \dotplus \ldots \dotplus \chi(b_n),$$

причем слагаемые, стоящие в правой части равенства, неразложимы. Применив к структуре $[0, \bar{a}_h]$ доказываемую теорему, получим

$$\bar{a}_h = \chi(b_k) \dotplus a_2 \dotplus \ldots \dotplus a_{h-1} \dotplus a_{h+1} \dotplus \ldots \dotplus a_m$$

для некоторого номера k. Отсюда

$$\chi(b_k) + a_h = (b_k + a_h)\bar{a}_h + a_h = (b_k + a_h)(\bar{a}_h + a_h) = \\ = b_k + a_h$$

и, следовательно,

$$b_k + \bar{a}_1 = b_k + a_h + a_2 + \ldots + a_{h-1} + a_{h+1} + \ldots \\ \ldots + a_m = a_h + \chi(b_k) + a_2 + \ldots + a_{h-1} + a_{h+1} + \ldots \\ \ldots + a_m = a_h + \bar{a}_h = 1.$$

Полученное противоречие с условием показывает, что случай 3) невозможен.

Допустим, наконец, что $m < n$. Тогда, применяя доказанное выше, будем последовательно замещать элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ некоторыми b_j. В результате, изменяя, если нужно, нумерацию элементов b_j, придем к равенству

$$b_1 + \ldots + b_p = b_1 + \ldots + b_n,$$

где $p \leqslant m < n$. Отсюда

$$b_n = (b_1 + \ldots + b_p)b_n = 0,$$

вопреки неразложимости элемента b_n.

Теорема Оре в применении к структуре подпространств конечномерного линейного пространства дает известную теорему о замене для двух эквивалентных систем линейно независимых векторов. Из нее же вытекает, что все базы содержат одно и то же число векторов. Полезные следствия извлекаются из теоремы Оре при применении ее к структурам левых и двусторонних идеалов артинова кольца с единицей.

Элемент a структуры L называется $\cap$-*неразложимым*, если $a = bc$ влечет $a = b$ или $a = c$. Представление элемента a в форме $a = a_1 \dots a_n$ называется *несократимым* $\cap$*-представлением*, если элементы $a_1, \dots, a_m$ $\cap$-неразложимы и

$$a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n \not\leqslant a_i$$

для всех $i = 1, \dots, n$.

Теорема 16 (Курош — Оре). *Если*

$$w = a_1 \dots a_m = b_1 \dots b_n$$

— два несократимых $\cap$*-представления элемента w дедекиндовой структуры L, то $m = n$ и для всякого a_i найдется такой элемент b_j, что*

$$w = a_1 \dots a_{i-1} b_j a_{i+1} \dots a_m.$$

Доказательство. Положим

$$\bar{a}_i = a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_m$$

и

$$c_j = \bar{a}_1 b_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Тогда

$$w \leqslant c_1 \dots c_n \leqslant b_1 \dots b_n \leqslant w,$$

т. е.

$$w = c_1 \dots c_n.$$

Из теоремы 9 вытекает, что $[a_1\bar{a}_1, \bar{a}_1]$ и $[a_1, a_1 + \bar{a}_1]$ — изоморфные интервалы. Элемент a_1 является $\cap$-неразложимым элементом структуры $[a_1, a_1 + \bar{a}_1]$. Но тогда элемент $w = a_1\bar{a}_1 = c_1 \dots c_n$ является $\cap$-неразложимым элементом структуры $[a\bar{a}_1, \bar{a}_1]$. Так как $c_j \leqslant \bar{a}_1$ для всех j, отсюда следует, что $w = c_j$ для некоторого номера j, т. е.

$$w = b_j a_2 \dots a_m.$$

Допустив, что $m < n$, и используя только что полученный результат, будем последовательно заменять элементы $a_1, \dots, a_m$ некоторыми b_j. В результате, изменяя, если нужно, нумерацию элементов b_j, придем к равенству

$$b_1 \dots b_p = b_1 \dots b_n,$$

где $p \leqslant m < n$, что противоречит $\cap$-несократимости представления

$$w = b_1 \dots b_n.$$

Теорема Куроша — Оре также находит полезные применен[ия] в теории идеалов кольца.

Элемент p структуры L с нулем называется *атомо[м]*, если p — минимальный элемент в множестве ненулев[ых] элементов. Структура L с нулем называется *атомно[й]*, если для каждого $0 \neq a \in L$ найдется атом $p \leqslant a$.

Теорема 17. *Пусть L — дедекиндова структу[ра] и $a = b + p_1 + \ldots + p_n$, где p_i — атомы. Тогда при по[д]ходящей нумерации имеем*

$$a = b \dot{+} p_1 \dot{+} \ldots \dot{+} p_m$$

(возможно, что $m = 0$).

Доказательство. Не ограничивая общност[и], можно считать, что

$$p_i \not\leqslant b + p_1 + \ldots + p_{i-1} + p_{i+1} + \ldots + p_n$$

для всех i. Если сумма $b + p_1 + \ldots + p_n$ не пряма[я], то ввиду теоремы 5 имеем

$$0 < (b + p_1 + \ldots + p_{k-1})p_k \leqslant p_k$$

для некоторого k. Так как p_k — атом, отсюда вытекает, что $(b + p_1 + \ldots + p_{k-1})p_k = p_k$ и, следовательно,

$$p_k \leqslant (b + p_1 + \ldots + p_{k-1}) + (p_{k+1} + \ldots + p_n),$$

вопреки допущению.

Теорема 18. *Если*

$$a = p_1 + \ldots + p_n,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — атомы дедекиндовой структуры, то структура $[0, a]$ обладает композиционным рядом.

Доказательство. Ввиду теоремы 17

$$a = p_1 \dot{+} \ldots \dot{+} p_m,$$

что дает возможность доказывать теорему индукцией по m. При $m = 1$ ее справедливость очевидна, ибо $[0, p_1]$ — простой интервал. Допустим теперь, что структура $[0, p_1 + \ldots + p_{m-1}]$ обладает композиционным рядом. Из теоремы 9 вытекает изоморфизм интервалов $[p_1 + \ldots + p_{m-1}, a]$ и $[p_m(p_1 + \ldots + p_{m-1}), p_m] = [0, p_m]$.

Поскольку последний интервал прост, этим заканчивается доказательство.

Теорема 19. *Для дедекиндовой структуры L, обладающей композиционным рядом, эквивалентны следующие свойства:*

(1) *L — структура с дополнениями;*

(2) *каждый элемент из L представляется как прямая сумма атомов;*

(3) *1 представляется как сумма атомов.*

Доказательство. Если L — структура с дополнениями, a — неразложимый элемент из L и $0 \leqslant b < a$, то, согласно теореме 3, имеем $a = b \dotplus c$, откуда $a = c$ и, следовательно, $b = ab = bc = 0$. Таким образом, элемент a оказывается атомом, и свойство (2) вытекает из теоремы 14. Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна. Пусть, наконец,

$$1 = p_1 + \dots + p_n,$$

где p_i — атомы, и $a \in L$. Тогда

$$1 = a + p_1 + \dots + p_n$$

и, в силу теоремы 17,

$$1 = a \dotplus (p_1 + \dots + p_m),$$

чем и доказывается справедливость свойства (1).

Установим теперь для полных структур теорему, аналогичную теореме 19. Предварительно определим *направленное множество* как частично упорядоченное множество Ω, в котором для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ найдется элемент $\gamma \in \Omega$ такой, что $\gamma \geqslant \alpha, \beta$. Полная структура L называется *непрерывной*, если

$$a \sup \Omega = \sup (a\Omega)$$

для любого $a \in L$ и любого направленного множества $\Omega \subseteq L$. Нетрудно проверить, что полная структура, обладающая композиционным рядом, непрерывна *).

*) Строго говоря, вместо «направленное» и «непрерывная» следовало бы говорить «направленное вверх» и «непрерывная сверху». Это не делается только потому, что двойственные понятия не будут рассматриваться в основном тексте.

Теорема 20. *Пусть L — полная дедекиндова стр тура. Тогда:*

а) *если L атомна и обладает дополнениями, то кажд ненулевой элемент из L представляется как точная вер няя грань некоторого множества атомов;*

б) *если L непрерывна и ее единица равна точной верхн грани множества всех атомов, то L атомна и облада дополнениями.*

Доказательство. а) Пусть $0 \neq a \in$ $A = \{p \mid p$ — атом, $p \leqslant a\}$ и $b = \sup A$. Ясно, ч $a \geqslant b$. Если $a \neq b$, то в силу теоремы 3, $a = b + c$, г $c \neq 0$. По условию найдется атом q такой, что $q \leqslant c \leqslant$ Но тогда $q \in A$, откуда $q \leqslant bc = 0$. Полученное против речие показывает, что $a = \sup A$.

б) Пусть A — множество всех атомов, а Ω — множеств всех конечных сумм атомов. Если $0 \neq a \in L$, то, поскольк Ω — направленное множество, имеем

$$a = a1 = a \sup A = a \sup \Omega = \sup (a\Omega).$$

Следовательно, $as \neq 0$ для некоторого $s \in \Omega$. Пусть

$$s = p_1 + \cdots + p_m,$$

где p_i — атомы. Из теорем 18 и 19 вытекает существовани такого атома q, что $q \leqslant as \leqslant a$. Этим доказана атомност структуры L. Пусть снова $a \in L$. Рассмотрим множеств $B = \{x \mid ax = 0\}$. Если C — цепь из B, то ввиду непре рывности структуры L имеем

$$a \cdot \sup C = \sup aC = \sup 0 = 0,$$

т. е. $\sup C \in B$. Поэтому лемма Куратовского — Цорн позволяет найти в B максимальный элемент b. Конечно $ab = 0$. Если $a + b \neq 1$, то $p \nleqslant a' + b$, для некоторог атома p. Но тогда $p(a + b) < p$ и, следовательно $p(a + b) = 0$. Ввиду теоремы 5 отсюда вытекает, чт $a(b + p) = 0$. Поскольку полученное соотношение про тиворечит максимальности элемента b, этим заканчиваетс доказательство.

Дедекиндова структура F называется *свободной деде киндовой структурой* с системой свободных образующи P, если:

(1) $P \subseteq F$;

(2) F порождается множеством P;

(3) для всякого отображения φ множества P в произвольную дедекиндову структуру L найдется такой гомоморфизм ψ структуры F в структуру L, что $\psi(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in P$.

Свободную дедекиндову структуру, система свободных образующих которой состоит из n элементов, будем обозначать через $FML(n)$.

Теорема 21. *Всякое непустое множество P может служить системой свободных образующих для некоторой свободной дедекиндовой структуры* *).

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всех дедекиндовых структур, порождаемых подмножеством мощности, не превосходящей мощность множества P. При этом каждую из этих структур возьмем столько раз, сколько существует отображений множества P на соответствующую систему образующих. Далее, рассмотрим прямое произведение взятых структур. Легко проверить, что это будет дедекиндова структура. Обозначим ее через G. Далее, каждому элементу x из P поставим в соответствие строку $\Phi(x) \in G$, составленную из его образов при указанных выше отображениях, и обозначим через F подструктуру структуры G, порожденную множеством $\Phi(P)$. Поскольку мощность прямого произведения P экземпляров двухэлементной цепи не меньше мощности множества P, среди структур множества $\mathfrak{M}$ имеется такая, что отображение P на ее систему образующих взаимно однозначно. Отсюда вытекает, что отображение Φ также взаимно однозначно. Поэтому множество P можно отождествить с $\Phi(P)$. После этого становится ясным, что дедекиндова структура F обладает свойствами (1) и (2) из определения свободной дедекиндовой структуры. Если φ — отображение множества P в дедекиндову структуру L, то подструктура структуры L, порожденная множеством $\varphi(P)$, вместе с отображением φ имеется в множестве $\mathfrak{M}$. Пусть π — проекция структуры G на соответствующее прямое слагаемое. Для любого $x \in P$ имеем $\varphi(x) = \pi(\Phi(x))$,

*) Заметим, что теорема 21 является частным случаем аналогичной теоремы теории универсальных алгебр.

т. е., положив $\psi = \pi\Phi$, убедимся в справедливости свойства (3).

Теорема 22. *Структура FML (3) конечна.*

Доказательство. Пусть x, y и z — свободные образующие структуры $F = FML$ (3) и структуры $G = FL$ (3). Из свойства (5) определения свободного расширения нетрудно вывести, что существует гомоморфизм φ структуры G на структуру F. Учитывая способ построения структуры G, описанный в § 5, рассмотрим следующие 28 слов: x, y, z, $x+y$, $x+z$, $y+z$, $x+y+z$, xy, xz, yz, xyz, $(x+y)(x+z)$, $(x+y)(y+z)$, $(x+z)(y+z)$, $xy+xz$, $xy+yz$, $xz+yz$, $x+yz$, $y+xz$, $z+xy$, $x(y+z)$, $y(x+z)$, $z(x+y)$, $(x+y)(x+z)(y+z)$, $xy+xz+yz$, $(x+yz)(y+z)$, $(y+xz)(x+z)$, $(z+xy)(x+y)$, которые отождествим с их образами при гомоморфизме φ. Продолжительный, хотя и не встречающий принципиальных трудностей подсчет показывает, что сложение и умножение в структуре F не выводят за пределы этого 28-элементного множества, что и доказывает теорему. Конечно, при этом подсчете необходимо помнить, что в структуре F справедлив модулярный закон.

Заметим, что проведенное выше рассуждение доказывает, что структура FML (3), содержит не более 28 элементов. На самом деле можно доказать, что она содержит в точности 28 элементов.

Теорема 23. *Структура FML (4) бесконечна.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что всякая дедекиндова структура с четырьмя образующими является гомоморфным образом структуры FML (4). Поэтому теорема будет доказана, если указать хотя бы одну бесконечную дедекиндову структуру с четырьмя образующими. С этой целью из структуры всех подпространств счетномерного линейного пространства над некоторым полем с базой e_1, e_2, ... выделим подструктуру L, порождаемую следующими четырьмя подпространствами:

S_1 — линейная оболочка векторов e_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$;

S_2 — линейная оболочка векторов $e_{2k} + e_{2k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$;

S_3 — линейная оболочка векторов e_{2k-1}, $k = 1, 2, \ldots$;

S_4 — линейная оболочка векторов $e_{2k-1} + e_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Пусть T_r — линейная оболочка векторов $e_{2r}, e_{2r+2}, \ldots$ Несложный подсчет показывает, что

$$T_{r+1} = [(T_r + S_2) \cap S_3 + S_4] \cap S_1.$$

Поскольку $T_1 = S_1 \in L$, отсюда легко вывести, что $T_r \in L$ при $r = 1, 2, \ldots$. Так как все подпространства T_r различны, то этим доказывается бесконечность структуры L.

Упражнения

1. Доказать, что дедекиндовость структуры L равносильна каждому из следующих свойств: а) $a + b(a + c) = (a + b)(a + c)$; б) $(a + bc)(b + c) = a(b + c) + bc$; в) если $a \leqslant c$ и $d \leqslant b$, то $a + b(c + d) = (a + b)c + d$; г) если $a \leqslant c \leqslant a + b$, то $a + bc = c$; д) если $a \leqslant b \leqslant c + d$, $ac = bc$ и $(a + c)d = (b + c)d$, то $a = b$; е) L не содержит подструктур, изображенных на рис. 9.

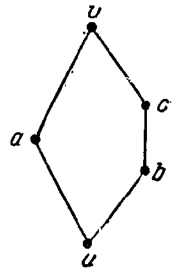


Рис. 9.

2. Если x и y — дополнения элемента z в интервале $[a, b]$ дедекиндовой структуры и $x \leqslant y$, то $x = y$.

3. Во всякой дедекиндовой структуре справедливо равенство $(ab + ac)(ab + bc) = ab$, а из соотношения $(a + b)c = bc$ вытекает, что $a(b + c) = ab$.

4. В дедекиндовой структуре с нулем равенство $(a_1 + \ldots + a_n)b = 0$ влечет $(a_1 + b) \ldots (a_n + b) = a_1 a_2 \ldots a_n + b$.

5. Если $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — элементы дедекиндовой структуры и $a_i \leqslant b_j$ при $i \neq j$, то

$$(a_1 + \ldots + a_n)b_1 \ldots b_n = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

6. Ординальная сумма дедекиндовых структур — дедекиндова.

7. Дедекиндовость структуры равносильна дедекиндовости структуры ее идеалов.

8. Элементы a и b дедекиндовой структуры с 0 и 1 обладают дополнениями, если дополнения имеются у элементов ab и $a + b$.

9. Если C — цепь в дедекиндовой структуре L с дополнениями, имеющей композиционный ряд, то L содержит цепь C^*, двойственную цепи C и состоящую из дополнений к ее элементам.

10. Дедекиндова структура с дополнениями, удовлетворяющая условию максимальности, удовлетворяет и условию минимальности.

11. Отношение

$$a \equiv b \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c}\text{интервал } [ab,\, a+b] \\ \text{содержит конечную максимальную} \\ \text{цепь}\end{array}}$$

на дедекиндовой структуре является конгруэнцией.

12. Если d и d' — функции размерности на дедекиндовой структуре, то $d - d' = \mathrm{const}$.

13. Сформулировать и доказать теорему, дуальную теореме Куроша — Оре.

14. Рассмотрев структуру, изображенную на рис. 10, убедиться, что из условий теоремы Куроша — Оре нельзя исключить дедекиндовость.

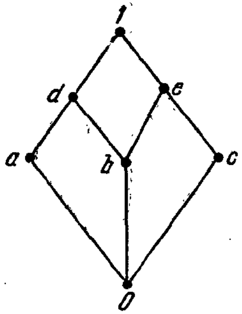


Рис. 10.

15. Пусть L — дедекиндова структура, $a \in L$, и $a = p_1 \dotplus \ldots \dotplus p_m = q_1 \dotplus \ldots \dotplus q_n$, где p_i, q_j — атомы. Доказать, что $m = n$ и $a = p_1 \dotplus \ldots \dotplus p_{m-1} \dotplus q_j$ для некоторого номера j.

16. Любой интервал атомной дедекиндовой структуры с дополнениями является атомной структурой.

17. Доказать единственность свободной дедекиндовой структуры с данной системой свободных образующих.

18. Подструктура свободной дедекиндовой структуры, порожденная частью свободных образующих, свободна.

19. Для любого множества $\{L_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ дедекиндовых структур существует дедекиндова структура L, порождаемая объединением $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} L_\alpha$, причем для любого набора $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ гомоморфизмов структур L_α в какую-либо дедекиндову структуру M найдется гомоморфизм L в M, на каждой из L_α совпадающий с φ_α.

§ 7. ДИСТРИБУТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ

Структура L называется *дистрибутивной*, если для любых a, b, $c \in L$ имеет место

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Важнейшим примером дистрибутивной структуры является структура всех подмножеств произвольного множества. Однако дедекиндова структура всех подпространств линейного пространства уже не является дистрибутивной. Дистрибутивной структурой является также всякая цепь.

Теорема 1. *Следующие свойства структуры L эквивалентны:*

(1) *L дистрибутивна;*

(2) *$ab + c = (a+c)(b+c)$ для любых a, b, $c \in L$;*

(3), *$ab + bc + ca = (a+b)(b+c)(c+a)$ для любых a, b, $c \in L$;*

(4) *если для некоторого $c \in L$ справедливо $a + c = b + c$ и $ac = bc$, то $a = b$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Имеем

$$(a+c)(b+c) = (a+c)b + c = ab + bc + c = ab + c.$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Действительно,

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= (a + bc + ca)(b + bc + ca) = \\ &= (a + bc)(b + ca) = (b+a)(c+a)(b+c)(b+a) = \\ &= (a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Если $a \leqslant c$, то

$$\begin{aligned} ac + bc = ab + bc + ca &= (a+b)(b+c)(c+a) = \\ &= c(a+b)(b+c) = c(a+b). \end{aligned}$$

Далее, положим $u = ab + bc + ac$ и $v = (a+b)(b+c) \times (a+c)$. По условию, $u = v$ и, следовательно, $cu = cv$.

Но, учитывая доказанное выше, получаем

$$cu = c\,(ab + bc + ac) = c\,(bc + ac) + abc = ac + bc$$

и

$$cv = c\,(a + b)\,(b + c)\,(a + c) = c\,(a + b),$$

что и требовалось.

(1) $\Rightarrow$ (4). Если $a + c = b + c$ и $ac = bc$, то, применяя (1), получим

$$a = a\,(a + c) = a\,(b + c) = ab + ac = ab + bc = \\ = (a + c)b = (b + c)b = b$$

(4) $\Rightarrow$ (3). Положим $u = ab + bc + ac$, $v = (a + b)\times\times(b + c)\,(a + c)$, $p = ac + b\,(a + c)$, $q = bc + a\,(b + c)$ и $r = ab + c\,(a + b)$. Согласно теореме 6.1, из свойства (4) вытекает справедливость модулярного закона. Поэтому

$$p + r = [ac + b\,(a + c)] + [ab + c\,(a + b)] = \\ = b\,(a + c) + c\,(a + b) = (a + b)[b\,(a + c) + c] = \\ = (a + b)\,(a + c)\,(b + c) = v,$$

$$q + r = [bc + a\,(b + c)] + [ab + c\,(a + b)] = \\ = a\,(b + c) + c\,(a + b) = (a + b)\,[a\,(b + c) + c] = \\ = (a + b)\,(b + c)\,(a + c) = v,$$

$$pr = [ac + b\,(a + c)]\,[ab + c\,(a + b)] = \\ = ab + [ac + b\,(a + c)]\,c\,(a + b) = \\ = ab + [ac + b\,(a + c)\,c]\,(a + b) = u$$

и

$$qr = [bc + a\,(b + c)]\,[ab + c\,(a + b)] = \\ = ab + [bc + a\,(b + c)]\,c\,(a + b) = \\ = ab + [bc + a\,(b + c)\,c]\,(a + b) = u.$$

В силу (4) имеем $p = q$. Но тогда

$$p = p + q = [ac + b\,(a + c)] + [bc + a\,(b + c)] = \\ = b\,(a + c) + a\,(b + c) = (a + c)\,[b + a\,(b + c)] = v$$

и

$$p = pq = [ac + b(a + c)]\,[bc + a(b + c)] = \\ = bc + [ac + b(a + c)]\,a(b + c) = \\ = bc + [ac + b(a + c)a]\,(b + c) = u.$$

Таким образом, имеем $u = p = v$, что и требовалось.

Из свойства (3) теоремы 1 видно, что частично упорядоченное множество, двойственное дистрибутивной структуре, само является дистрибутивной структурой. Поэтому к дистрибутивным структурам применим принцип двойственности.

Теорема 2. *Всякий идеал S и всякий фильтр F дистрибутивной структуры L стандартен.*

Доказательство. Если $a, b \in L$, $s \in S$ и $a \leqslant b + s$, то $a = a(b + s) = ab + as$. Ясно, что $ab \leqslant b$ и $as \in S$. Второе утверждение справедливо по принципу двойственности.

В случае дистрибутивных структур удается полностью решить вопрос о связи между идеалами и гомоморфизмами.

Теорема 3 (Хашимото). *Следующие свойства структуры L эквивалентны:*

(1) *L дистрибутивна;*

(2) *всякий идеал структуры L является ядерным идеалом некоторой конгруэнции;*

(3) *всякий фильтр структуры L является ядерным фильтром некоторой конгруэнции;*

(4) *всякая выпуклая подструктура структуры L является смежным классом некоторой конгруэнции.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3) вытекают из теорем 2, 4.9 и 4.11. Если справедливы свойства (2) и (3), то свойство (4) справедливо согласно теореме 4.8. Этим доказана импликация (1) $\Rightarrow$ (4). Импликация (4) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Остается установить справедливость импликаций (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1). При этом достаточно доказать первую из них, ибо вторая двойственна ей. Для доказательства допустим, что структура L обладает свойством (2), но не является дедекиндовой. Тогда найдутся такие элементы $a, b, c \in L$, что $a \leqslant c$ и $(a + b)c > a + bc$. По условию, главный идеал $(a + bc)^{\nabla}$ является ядерным идеалом некоторой конгруэнции $\equiv$.

Но, поскольку $a \in (a+bc)^\nabla$, имеем

$$(a+b)c \equiv bc \equiv a+bc.$$

Таким образом,

$$(a+b)c \in (a+bc)^\nabla,$$

что противоречит допущению. Так что L — дедекиндова структура. Если она не дистрибутивна, то для некоторых $a, b, c \in L$ имеет место

$$(a+b)\,c > ac+bc.$$

Если $\equiv$ — конгруэнция с ядерным идеалом $(a+bc)^\nabla$, то $(a+b)c = (a+bc+b)c \equiv bc$, откуда $(a+b)c \leqslant a+bc$. Поэтому, принимая во внимание модулярный закон, получим

$$(a+b)c \leqslant (a+bc)c = ac+bc,$$

вопреки допущению.

Теорема 4 (Колибиар — Хашимото — Гретцер — Шмидт). *Следующие свойства дистрибутивной структуры L эквивалентны:*

(1) *L является структурой с относительными дополнениями;*

(2) *всякий идеал структуры L является ядерным идеалом в точности одной конгруэнции;*

(3) *всякий фильтр структуры L является ядерным фильтром в точности одной конгруэнции;*

(4) *всякая выпуклая подструктура структуры L является смежным классом в точности одной конгруэнции;*

(5) *любые две конгруэнции структуры L перестановочны.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) вытекает из теорем 3 и 4.6. Ввиду теоремы 4.7 справедлива импликация (1) $\Rightarrow$ (5). Импликации (4) $\Rightarrow$ (2) и (4) $\Rightarrow$ (3) очевидны. Допустим, далее, что выполнено свойство (5), и рассмотрим элемент c из интервала $[a, b]$. Согласно теореме 2, идеал c^∇ и фильтр c^Δ являются, соответственно, ядерными идеалом и фильтром конгруэнций $\equiv$ и $\approxeq$, описанных в теоремах 4.9 и 4.11. Так как $a \equiv c$ и $c \approxeq b$, то, согласно свойству (5), для некоторого элемента d

имеем $a \approx d$ и $d \equiv b$. Эти соотношения означают справедливость равенств $ad = (a + d)v$ и $d + b = db + u$, где $u \leqslant c \leqslant v$. Отсюда

$$a = ac \leqslant av \leqslant ad \leqslant d \leqslant d + b \leqslant b + u \leqslant b + c = b$$

и, следовательно,

$$c + d = c + d + db + u = c + d + b = b$$

и

$$cd = cd\,(a + d)v = cda = a.$$

Таким образом, элемент d оказывается дополнением элемента c в интервале $[a, b]$, т. е. доказана импликация (5) $\Rightarrow$ (1). Остается установить справедливость импликаций (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1). Ограничимся доказательством первой из них, так как вторая доказывается двойственным рассуждением. С этой целью возьмем в интервале $[a, b]$ элемент c, отличный от a и b. Пусть S — множество всех таких s из L, что $cs \leqslant a$. Ввиду дистрибутивности структуры легко проверить, что S — идеал. В силу теоремы 2, этот идеал является ядерным идеалом конгруэнции θ, описанной в теореме 4.9. Из теорем 2 и 4.11 вытекает существование на фактор-структуре $\bar{L} = L/\theta$ конгрузнции $\bar{\theta}$ с ядерным фильтром $\bar{c}^{\Delta}$. Обозначим через ρ ядро сквозного гомоморфизма структуры L на фактор-структуру $\bar{L}/\bar{\theta}$, а через T — ядерный идеал конгруэнции ρ. Конечно, $S \subseteq T$. Если $t \in T$, то, учитывая описание конгруэнции $\bar{\theta}$, будем иметь

$$\bar{0} = \bar{t}\,\bar{0} = (\bar{t} + \bar{0})\,\bar{u} = \bar{t}\,\bar{u},$$

где $\bar{c}\bar{u} = \bar{c}$, а $\bar{0}$ — нуль структуры $\bar{L}$. Отсюда $\bar{0} = \bar{t}\bar{c}$ и, следовательно, $tc\theta s$, где $s \in S$. Последнее означает, что

$$tc \leqslant tc + s = tcs + s' \leqslant ta + s' \leqslant a + s',$$

где $s' \in S$. Умножая на c, получаем

$$tc \leqslant ac + s'c \leqslant a,$$

что означает $t \in S$. В силу свойства (2), из равенства $S = T$ вытекает равенство $\theta = \rho$. Поэтому равенство $\bar{b}\bar{\theta}\bar{c}$ влечет

$b\rho c$, а значит, и $b\theta c$. Таким образом,

$$b = b + c = bc + s = c + s,$$

где $s \in S$. Но тогда имеем

$$c + (a + s) = c + s = b$$

и

$$a \leqslant c\,(a + s) = ca + cs \leqslant a,$$

т. е.

$$c\,(a + s) = a.$$

Так что $a + s$ оказывается дополнением элемента c в интервале $[a, b]$, чем и заканчивается доказательство.

Теорема 5 (Стоун). *Если a и b — различные элементы дистрибутивной структуры L, то существует такая конгруэнция θ, что $a \not\theta\, b$ и фактор-структура L/θ является двухэлементной цепью.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \nleqslant a$. Поэтому множество $\mathfrak{P}$ таких идеалов I структуры L, что $a \in I$ и $b \notin I$, содержит идеал a^{∇}. Множество $\mathfrak{P}$ естественным образом частично упорядочено. Если

$$\mathfrak{C} : I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\alpha \subseteq \ldots$$

— цепь из $\mathfrak{P}$, то легко проверить, что объединение $\bigcup I_\alpha \in \mathfrak{C}^{\Delta}$. В силу леммы Куратовского — Цорна, множество $\mathfrak{P}$ содержит максимальный элемент H. Согласно теореме 3, идеал H является ядерным идеалом некоторой конгруэнции $\equiv$. Конечно, $a \not\equiv b$. Если $x \notin H$, то легко вывести, что множество J всех сумм вида $y + s$, где $y \leqslant x$, $s \in H$, является идеалом. Поскольку $H \subsetneqq J$, то $b \in J$. Отсюда $b = y + s$, где $y \leqslant x$, $s \in H$ и, следовательно,

$$b \equiv y \leqslant x.$$

Таким образом, ненулевые элементы фактор-структуры $L/\equiv$ образуют фильтр. Этот фильтр является, очевидно, ядерным фильтром гомоморфизма структуры $L/\equiv$ на двухэлементную цепь C. Ядро сквозного гомоморфизма L на C является искомой конгруэнцией.

Теорема 6 (Биркгоф). *Всякая дистрибутивная структура L изоморфна структуре подмножеств некоторого множества* (не обязательно всех!).

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ всевозможных пар (a, b), где a и b — различные элементы из L. Для каждой пары (a, b) найдем, воспользовавшись теоремой 5, конгрузнцию $\theta_{a,b}$ такую, что $a \not\theta_{a,b} b$, а фактор-структура $L/\theta_{a,b}$ является двухэлементной цепью. Естественный гомоморфизм L на $L/\theta_{a,b}$ обозначим через $\varphi_{a,b}$. Если $x \in L$, то положим

$$\Phi(x) = \{(a, b) \mid (a, b) \in \mathfrak{M},\ \varphi_{a,b}(x) = 1\}.$$

Таким образом, каждому элементу структуры L ставится в соответствие подмножество множества $\mathfrak{M}$. Пусть $x, y \in L$. Если $x \neq y$, то $\varphi_{x,y}(x) \neq \varphi_{x,y}(y)$ и, следовательно, $\Phi(x) \neq \Phi(y)$. Далее, $\varphi_{a,b}(x + y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi_{a,b}(x) = 1$ или $\varphi_{a,b}(y) = 1$. Поэтому $(a, b) \in \Phi(x + y)$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \in \Phi(x)$ или $(a, b) \in \Phi(y)$. Следовательно, $\Phi(x + y) = = \Phi(x) \cup \Phi(y)$. Аналогично $\varphi_{a,b}(xy) = 1$ в том и только том случае, когда $\varphi_{a,b}(x) = \varphi_{a,b}(y) = 1$, откуда $\Phi(xy) = \Phi(x) \cap \Phi(y)$. Таким образом, Φ оказывается искомым структурным изоморфизмом.

Простая индукция позволяет доказать, что во всякой дистрибутивной структуре справедливы тождества:

$$a \sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} ab_i,$$

$$a + \prod_{i=1}^{m} b_i = \prod_{i=1}^{m} (a + b_i),$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j$$

и

$$\prod_{i=1}^{m} a_i + \prod_{j=1}^{n} b_j = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (a_i + b_j).$$

Чуть-чуть сложнее доказываются соотношения

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}=\sum_{\varphi\in\Phi}\prod_{i=1}^{m} b_{i\varphi(i)} \text{ и } \sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i} b_{ij}=\prod_{\varphi\in\Phi}\sum_{i=1}^{m} b_{i\varphi(i)},$$

где Φ пробегает все функции φ, ставящие в соответствие каждому числу i из множества $\{1, \ldots, m\}$ число $\varphi(i) \in \{1, \ldots, n_i\}$. Установим, например, первое из них. При $m = 2$ оно совпадает с одним из равенств, написанных выше. Далее имеем

$$\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}=\left(\prod_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{n_i} b_{ij}\right)\sum_{j=1}^{n_m} b_{mj}=\left(\sum_{\varphi\in\Phi'}\prod_{i=1}^{m-1} b_{i\varphi(i)}\right)\sum_{j=1}^{n_m} b_{mj}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{\varphi\in\Phi'}\left(\prod_{i=1}^{m-1} b_{i\varphi(i)}\right)b_{mj}=\sum_{\varphi\in\Phi}\prod_{i=1}^{m} b_{i\varphi(i)},$$

где множество Φ' возникает при ограничении всех функций из Φ на множество $\{1, \ldots, m-1\}$. В случае полных структур могут быть написаны *бесконечные дистрибутивные законы* — бесконечные аналоги рассмотренных раннее тождеств:

$$a\cdot\sup B = \sup(aB), \tag{71}$$

$$a+\inf B = \inf(a+B), \tag{71'}$$

$$\sup A\cdot\sup B = \sup(AB), \tag{72}$$

$$\inf A+\inf B = \inf(A+B), \tag{72'}$$

$$\inf_{\alpha\in A}\sup_{\beta\in B_\alpha}\{a_{\alpha\beta}\} = \sup_{\varphi\in\Phi}\inf_{\alpha\in A}\{a_{\alpha\varphi(\alpha)}\}, \tag{73}$$

$$\sup_{\alpha\in A}\inf_{\beta\in B_\alpha}\{a_{\alpha\beta}\} = \inf_{\varphi\in\Phi}\sup_{\alpha\in A}\{a_{\alpha\varphi(\alpha)}\}, \tag{73'}$$

где

$$AB=\{ab \mid a\in A,\, b\in B\},\ A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

и Φ — множество всех однозначных функций φ, ставящих в соответствие элементу $\alpha\in A$ элемент $\varphi(\alpha)\in B_\alpha$. Убедимся, что тождества (71) и (71′) (а значит, и все остальные) выполняются не во всякой полной дистрибутивной структуре и что, в отличие от конечного случая, одно из них не влечет другое. Для доказательства рассмотрим множество неотрицательных целых чисел, упорядоченное по делимости (т. е. $a \leqslant b \underset{\text{def}}{=} a$ делит b), считая при этом, что 0 делит 0. Без труда проверяется, что $\sup A = \underset{a \in A}{\text{НОК}} \{a\}$ и $\inf A = \underset{a \in A}{\text{НОД}} \{a\}$. Совершенно элементарна и проверка равенства (71′), показывающего, в частности, что возникающая структура дистрибутивна. Однако

$$\text{НОД}\,\{2, \underset{1 \leqslant k < \infty}{\text{НОК}}\,(2k-1)\} = \text{НОД}\,\{2, 0\} = 2$$

и

$$\underset{1 \leqslant k < \infty}{\text{НОК}}\,\{\text{НОД}\,\{2, (2k-1)\}\} = \underset{1 \leqslant k < \infty}{\text{НОК}}\,\{1\} = 1,$$

т. е. равенство (71) места не имеет.

Т е о р е м а 7. *Следующие свойства полной структуры L эквивалентны:*

(1) *в L справедливо тождество* (71);

(2) *в L справедливо тождество* (72);

(3) *L непрерывна и дистрибутивна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликации (1) ⇒ (3) и (2) ⇒ (1) очевидны. Если имеет место (71), то

$$\sup A \cdot \sup B = \sup_{a \in A} (a \sup B) = \sup_{a \in A} \sup (aB) = \sup AB,$$

т. е. справедливо (72). Если справедливо (3), то рассмотрим систему $\{B_\alpha\}$ всех конечных подмножеств множества B, и если $B_\alpha = \{b_{\alpha 1}, \ldots, b_{\alpha n_\alpha}\}$, то положим $b_\alpha = b_{\alpha 1} + \ldots + b_{\alpha n_\alpha}$. Ясно, что $\Omega = \{b_\alpha\}$ — направленное множество. Поэтому из (3) и теоремы 1.4 вытекает

$$a \cdot \sup B = a \sup \Omega = \sup (a\Omega) = \sup_\alpha \{ab_\alpha\} =$$
$$= \sup_\alpha \{ab_{\alpha 1} + \ldots + ab_{\alpha n_\alpha}\} = \sup aB,$$

что и требовалось.

Т е о р е м а 8. *Во всякой полной структуре L равенство* (73) *влечет* (71), *а* (73′) — (71′).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соображений двойственности достаточно доказать одну из импликаций. Допустим, что справедливо равенство (73). Если $A = \{1, 2\}$, $B_1 = \{1\}$, $B_2 = B$, $a_{11} = a$ и $a_{2b} = b$ для всех $b \in B$, то для каждой функции φ из указанного в (73) множества Φ имеем $\varphi(1)=1$ и $\varphi(2)=b(\varphi)$ для некоторого $b(\varphi)\in B$. Поэтому

$$a\sup B=\inf_{i=1,2}\sup_{\beta\in B_i}\{a_{i\beta}\}=\sup_{\varphi\in\Phi}\inf_{i=1,2}\{a_{i\varphi(i)}\}=$$
$$=\sup_{\varphi\in\Phi}a_{11}a_{2\varphi(2)}=\sup_{\varphi\in\Phi}ab(\varphi)=\sup(aB),$$

что и требовалось.

Пример, показывающий, что (71), вообще говоря, не влечет (73), будет приведен в следующем параграфе.

Теорема 9. *Множество подмножеств некоторого множества, замкнутое относительно бесконечных объединений и пересечений, образует полную структуру, в которой справедливы тождества* (73) *и* (73′).

Доказательство. Если $x\in\bigcap_{\alpha\in A}\bigcup_{\beta\in B_\alpha}X_{\alpha\beta}$, то $x\in\in\bigcup_{\beta\in B_\alpha}X_{\alpha\beta}$ для каждого α и, следовательно, $x\in X_{\alpha\varphi(\alpha)}$ для некоторого $\varphi(\alpha)\in B_\alpha$. Тогда $x\in\bigcap_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}\subseteq\bigcup_{\varphi\in\Phi}\bigcap_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}$. Наоборот, если $x\in\bigcup_{\varphi\in\Phi}\bigcap_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}$, то $x\in\bigcap_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}$ для некоторого $\varphi\in\Phi$. Таким образом, для каждого $\alpha\in A$ существует такой индекс $\beta\in B_\alpha$, что $x\in X_{\alpha\beta}$ и, следовательно $x\in\bigcup_{\beta\in B_\alpha}X_{\alpha\beta}$ для всех $\alpha\in A$. Последнее означает, что $x\in\bigcap_{\alpha\in A}\bigcup_{\beta\in B_\alpha}X_{\alpha\beta}$, чем и завершается доказательство соотношения (73). Пусть теперь $x\in\bigcup_{\alpha\in A}\bigcap_{\beta\in B_\alpha}X_{\alpha\beta}$. Тогда для некоторого $\alpha\in A$ и всех $\beta\in B_\alpha$ имеем $x\in X_{\alpha\beta}$. Поэтому $x\in X_{\alpha\varphi(\alpha)}\subseteq\bigcup_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}$ для всех $\varphi\in\Phi$ и, значит, $x\in\in\bigcap_{\varphi\in\Phi}\bigcup_{\alpha\in A}X_{\alpha\varphi(\alpha)}$. «Обратный ход» завершает установление справедливости соотношения (73′).

Упражнения

1. Доказать, что дистрибутивность структуры L равносильна каждому из следующих свойств: а) неравенство $a\leqslant b$ имеет место тогда и только тогда, когда $ac\leqslant bc$ и $a+c\leqslant b+c$ для некоторого $c\in L$; б) $(a+b)(c+ab)=ab+bc+ac$; в) $a+bc\geqslant(a+b)c$;

г) L — дедекиндова и не содержит подструктуры, изображенной на рис. 11.

2. В дистрибутивной структуре соотношения $ab \leqslant x \leqslant a+b$ и $x = ax + bx + ab$ выполняются одновременно.

3. Дедекиндова структура дистрибутивна тогда и только тогда, когда гомоморфные образы любой из ее подструктур, не обладающие нетривиальными конгруэнциями, являются одно- или двухэлементными цепями.

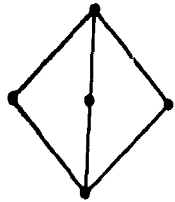


Рис. 11.

4. Ординальная сумма дистрибутивных структур дистрибутивна.

5. Если A — множество атомов непрерывной дистрибутивной структуры и $\bar{a} = \sup (A \setminus a)$, то $a\bar{a} = 0$ для всех $a \in A$.

6. Дистрибутивная структура конечной длины конечна.

7. В дистрибутивной структуре, удовлетворяющей условию максимальности, каждый элемент обладает одним и только одним несократимым $\bigcap$-представлением.

8. Если L — дистрибутивная структура, обладающая композиционным рядом и $1 = a_1 + \ldots + a_m = b_1 + \ldots + b_n$, где a_i и b_j — неразложимые элементы, то $m = n$ и при подходящей нумерации $a_i = b_i$ для всех i.

9. Подструктура дистрибутивной структуры, порожденная конечным числом элементов, конечна.

10. Полная дистрибутивная структура, удовлетворяющая равенству (71), *вполне* [illegible], т. е. для любых элементов $\{x_\alpha, y_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$, где $x_\alpha \leqslant y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, имеет место $\sup \{x_\alpha\} \cdot \inf \{y_\alpha\} = \sup$ [illegible] ([illegible]).

11. Пусть L — дистрибутивная структура, $a, b \in L$, $a \leqslant b$ и $I = \{x \mid b(a + x) = a\}$. Доказать, что I — идеал. Если интервал $[a, b]$ прост, то $cd \in I$ влечет $c \in I$ или $d \in I$.

12. Максимальный [illegible] дистрибутивной структуры прост. Сформулировать и доказать [illegible] утверждение.

13. Идеал a^∇ дистрибутивной структуры прост тогда и только тогда, когда a — $\bigcap$-[illegible] элемент.

14. Дистрибутивность структуры равносильна дистрибутивности структуры ее идеалов.

15. Дать определение [illegible] дистрибутивной структуры. Доказать ее существование и единственность.

16. Подструктура [illegible] дистрибутивной структуры, порожденная частью [illegible] образующих, свободна.

17. Для любого [illegible] $\{L_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ дистрибутивных структур существует дистрибутивная структура L, порождаемая объединением $\bigcup L_\alpha$, [illegible] для любого набора $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ гомоморфизмов структур L_α в [illegible] дистрибутивную структуру M найдется гомоморфизм L в M, на каждой из L_α совпадающий с φ_α.

§ 8. БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Дистрибутивная структура с дополнениями называется *булевой алгеброй*. Из теоремы 6.3 вытекает, что булева алгебра — структура с относительными дополнениями, а из теоремы 7.1 — что каждый ее элемент a обладает в точности одним дополнением a'. Таким образом, можно считать, что наряду с двумя бинарными операциями в булевой алгебре определена еще одна унарная операция.

Теорема 1. *Во всякой булевой алгебре справедливы следующие соотношения:*

$$(a + b)' = a'b', \tag{81}$$

$$(ab)' = a' + b', \tag{82}$$

$$a'' = a, \tag{83}$$

$$0' = 1, \tag{84}$$

$$1' = 0. \tag{85}$$

Доказательство. Справедливость равенств (83) — (85) очевидна. Равенство (81) вытекает из соотношений

$$(a + b) + a'b' = (a + a')(a + b') + b = a + b' + b = 1$$

и

$$(a + b)a'b' = aa'b' + a'bb' = 0,$$

получаемых с помощью теоремы 7.1, а равенство (82) справедливо по соображениям двойственности.

Теорема 2. *Если в структуре L с нулем и единицей каждый элемент a обладает единственным дополнением a', причем $(a + b)' = a'b'$ и $(ab)' = a' + b'$, то L — булева алгебра.*

Доказательство. Сначала докажем:

Лемма. *Если* $x, y \in L$ *и* $x \leqslant y$, *то* $x = (x + y')y$ *и* $y = x + x'y$.

Действительно, учитывая условия теоремы, получаем

$$(x + x'y)' + y \geqslant (x + x'y)' + (x + x'y) = 1$$

и

$$(x + x'y)'y = x' (x + y')y = (x'y) (x'y)' = 0.$$

Следовательно, $(x + x'y)' = y'$ и, значит, $y = x + x'y$. Далее, из равенства $x = xy$ вытекает, что $x' = x' + y'$, т. е. что $y' \leqslant x'$. В силу доказанного выше, имеем $x' = y' + yx'$, откуда

$$x = (y' + yx')' = (x + y')y.$$

Переходя к доказательству теоремы, допустим, что

$$a + c = v = b + c$$

и

$$ac = u = bc.$$

Учитывая лемму, получим равенства

$$\begin{aligned} a + (v' + cu') &= a + (u + cu') + v' = \\ &= (a + c) + v' = 1 = (b + c) + v' = \\ &= b + (u + cu') + v' = b + (v' + cu') \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a (v' + cu') &= av (v' + cu') = (ac)u' = \\ &= 0 = (bc)u' = bv (v' + cu') = b (v' + cu'). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a = (v' + cu')' = b,$$

и из свойства (4) теоремы 7.1 вытекает дистрибутивность структуры L, что и требовалось.

Теорема 3. *Пусть* B — *булева алгебра. Для любых* $a, b \in B$ *положим*

$$a \mathbin{\boldsymbol{+}} b \underset{\text{def}}{=} ab' + a'b$$

и

$$a \circ b \underset{\text{def}}{=} ab.$$

Тогда B становится ассоциативным коммутативным кольцом с единицей, причем $a \boldsymbol{+} a = 0$ и $a \circ a = a$ для всех $a \in B$.

Доказательство. Последнее утверждение, ассоциативность умножения, наличие единицы и коммутативность обеих операций очевидны. Далее, учитывая теорему 1, имеем

$$(a \boldsymbol{+} b) \boldsymbol{+} c = (ab' + a'b)c' + (ab' + a'b)'c =$$
$$= ab'c' + a'bc' + (a' + b)(a + b')c =$$
$$= ab'c' + a'bc' + a'b'c + abc =$$
$$= a(b' + c)(b + c') + a'(bc' + b'c) =$$
$$= a(bc' + b'c)' + a'(bc' + b'c) = a \boldsymbol{+} (b \boldsymbol{+} c),$$
$$a \boldsymbol{+} 0 = a0' + a'0 = a1 = a$$

и

$$a \boldsymbol{+} a = aa' + a'a = 0,$$

т. е. B оказывается абелевой группой по сложению. Наконец,

$$(a \boldsymbol{+} b) \circ c = ab'c + a'bc = ac(b' + c') + (a' + c')bc =$$
$$= (ac)(bc)' + (ac)'(bc) = a \circ c \boldsymbol{+} b \circ c.$$

Теорема 4. *Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей относительно операций $\boldsymbol{+}$ и $\circ$, причем $a \circ a = a$ для всех $a \in R$. Положим*

$$a + b \underset{\text{def}}{=} a \boldsymbol{+} b \boldsymbol{+} a \circ b$$

и

$$ab \underset{\text{def}}{=} a \circ b.$$

Тогда R становится булевой алгеброй B. Кольцо, получаемое из алгебры B с помощью теоремы 3, совпадает с R. Применение описанной конструкции к кольцу, указанному в теореме 3, приводит к исходной булевой алгебре B.

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность операций $+$ и $\circ$ очевидна. Кроме того, имеем

$$(a \boldsymbol{+} a) \boldsymbol{+} (a \boldsymbol{+} a) = (a \boldsymbol{+} a) \circ (a \boldsymbol{+} a) = a \boldsymbol{+} a,$$

откуда

$$a \boldsymbol{+} a = 0.$$

Учитывая это равенство, получим

$$(a + b)a = (a \boldsymbol{+} b \boldsymbol{+} a \circ b) \circ a = a \circ a \boldsymbol{+} a \circ b \boldsymbol{+} a \circ b = a$$

и

$$a + ab = a \boldsymbol{+} a \circ b \boldsymbol{+} a \circ (a \circ b) = a.$$

В силу теоремы 4.2, B оказывается структурой. Ясно, что $a \cdot 1 = a$ и $a0 = 0$ для всех $a \in B$, т. е. структура B обладает нулем и единицей. Из равенств

$$a\,(1 \boldsymbol{+} a) = a \circ 1 \boldsymbol{+} a \circ a = 0$$

и

$$a + (1 \boldsymbol{+} a) = a \boldsymbol{+} (1 \boldsymbol{+} a) \boldsymbol{+} a \circ (1 \boldsymbol{+} a) = 1$$

вытекает, что B — структура с дополнениями. Ее дистрибутивность проверяется следующим образом:

$$(a + b)c = (a \boldsymbol{+} b \boldsymbol{+} ab) \circ c = \\ = ac \boldsymbol{+} bc \boldsymbol{+} ac \circ bc = ac + bc.$$

Заключительные утверждения теоремы вытекают из равенств

$$ab' + a'b = a \circ (1 \boldsymbol{+} b) \boldsymbol{+} (1 \boldsymbol{+} a) \circ b \boldsymbol{+} \\ \boldsymbol{+} a \circ (1 \boldsymbol{+} b) \circ b \circ (1 \boldsymbol{+} a) = a \boldsymbol{+} ab \boldsymbol{+} b \boldsymbol{+} ab = a \boldsymbol{+} b$$

и

$$(ab' + a'b)\,(ab)' + (ab' + a'b)'\,ab = \\ = (ab' + a'b)\,(a' + b') + (a' + b)\,(a + b')\,ab = \\ = ab' + a'b + ab = a\,(b' + b) + (a' + a)b = a + b.$$

Теорема 5' (Гливенко — Стоун). *Пополнение булевой алгебры сечениями является полной булевой алгеброй.*

Доказательство. Пусть M — данная булева алгебра и L — ее пополнение сечениями, описанное в теореме 3.7. Напомним, что элементами структуры L служат $\Delta\nabla$-замкнутые элементы структуры P всех подмножеств булевой алгебры M. Однако теперь условимся, что $\phi \notin L$. Если $A \in P$, то положим

$$A' = \{a' \mid a \in A\}.$$

Лемма 1. $A'^{\nabla\Delta} = (A^{\Delta\nabla})'$.

Действительно, $x \in A'^{\nabla\Delta}$ имеет место одновременно с $x \geqslant y$ для всех $y \in A'^{\nabla}$. Но последнее равносильно неравенству $x' \leqslant y'$ для всех $y' \in A^{\Delta}$. Таким образом, $x \in A'^{\Delta\nabla}$ равносильно $x' \in A^{\Delta\nabla}$ или, что то же самое, $x \in (A^{\Delta\nabla})'$.

Лемма 2. *Если $x \leqslant y$ и $y \in A^{\Delta\nabla}$, то $x \in A^{\Delta\nabla}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $x \leqslant y \leqslant z$ для всех $z \in A^{\Delta}$.

Лемма 3. *Если $A \in L$, то $A^{\Delta} \cap A' = 1$.*

В самом деле, если $x \in A^{\Delta} \cap A'$, то $x' \in A$, откуда $x' = xx' = 0$ и, следовательно, $x = 1$. С другой стороны, согласно лемме 2, $0 \in A$ и, следовательно, $1 = 0' \in A^{\Delta} \cap A'$.

Лемма 4. *Если $A \in L$, то $A \cap A'^{\nabla} = 0$.*

Действительно, $0 \in A \cap A'^{\nabla}$, в силу леммы 2. Если же $x \in A \cap A'^{\nabla}$, то $x = xx' = 0$.

Лемма 5. *Если $A \in L$, то A'^{∇} служит единственным дополнением элемента A в структуре L.*

Действительно, в силу свойства (iv) теоремы 1.6, $A'^{\nabla} \in L$. Далее, используя теорему 3.5, свойство (v) теоремы 1.6, а также леммы 1, 3 и 4, получаем

$$\sup_L \{A, A'^{\nabla}\} = (A \cup A'^{\nabla})^{\Delta\nabla} = (A^{\Delta} \cap A'^{\nabla\Delta})^{\nabla} =$$
$$= (A^{\Delta} \cap (A^{\Delta\nabla})')^{\nabla} = (A^{\Delta} \cap A')^{\nabla} = 1^{\nabla} = M$$

и

$$\inf_L \{A, A'^{\nabla}\} = A \cap A'^{\nabla} = 0.$$

Пусть теперь $A, B \in L$, $\sup_L \{A, B\} = M$ и $\inf_L \{A, B\} = 0$. В силу теоремы 3.5, имеем

$$(A \cup B)^{\Delta\nabla} = M$$

и

$$A \cap B = 0.$$

Ввиду свойств (iii) и (v) теоремы 1.6 имеем

$$1 = M^{\Delta} = (A \cup B)^{\Delta\nabla\Delta} = A^{\Delta} \cap B^{\Delta}.$$

Если $b \in B$, то из леммы 2 вытекает, что для всех $a \in A$ имеем

$$ab \in A \cap B = 0.$$

Поэтому

$$b = (a + a')b = a'b,$$

т. е. $b \leqslant a'$ для всех $a \in A$. Так что $B \subseteq A'^{\nabla}$. Если же $x \in A'^{\nabla}$, то $x \leqslant a'$ для всех $a \in A$. Отсюда $x' \in A^{\Delta}$. Если $y \in B^{\Delta}$, то

$$x' + y \in A^{\Delta} \cap B^{\Delta},$$

откуда

$$x' + y = 1.$$

Но тогда $x = x(x' + y) = xy$, т. е. $x \leqslant y$ для всех $y \in B^{\Delta}$. Следовательно, $x \in B^{\Delta\nabla} = B$, т. е. $A'^{\nabla} \subseteq B$. Таким образом, $A'^{\nabla} = B$ и единственность дополнений доказана.

Справедливость теоремы 5 вытекает из леммы 5 и теоремы 2, если принять во внимание соотношения

$$\begin{aligned}\sup_L \{A'^{\nabla}, B'^{\nabla}\} = (A'^{\nabla} \cup B'^{\nabla})^{\Delta\nabla} = \\ = (A'^{\nabla\Delta} \cap B'^{\nabla\Delta})^{\nabla} = (A' \cap B')^{\nabla} = \\ = (A \cap B)'^{\nabla} = (\inf_L \{A, B\})'^{\nabla}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\inf_L \{A'^{\nabla}, B'^{\nabla}\} = A'^{\nabla} \cap B'^{\nabla} = (A' \cup B')^{\nabla} = \\ = (A' \cup B')^{\nabla\Delta\nabla} = (A \cup B)'^{\nabla\Delta\nabla} = \\ = ((A \cup B)^{\Delta\nabla})'^{\nabla} = (\sup_L \{A, B\})'^{\nabla},\end{aligned}$$

получаемые с помощью теорем 3.5 и 1.6 и леммы 1.

Убедимся, что наличие дополнений существенно для справедливости теоремы 5. Пусть $C = \{u, v\}$ — двухэлементная цепь, $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — два экземпляра натурального ряда, A^* и B^* — двойственные им цепи, $\tilde{A}$ — ординальная сумма A и A^*, $\tilde{B}$ — ординальная сумма B и B^* (рис. 12). В структуре $\tilde{A} \times \tilde{B} \times C$

рассмотрим подмножество

$$M = (\tilde{A},\ B^*,\ v) \cup (A,\ \tilde{B},\ u).$$

Ясно, что M — дистрибутивная структура. Как и раньше, обозначим через L пополнение структуры M сечениями,

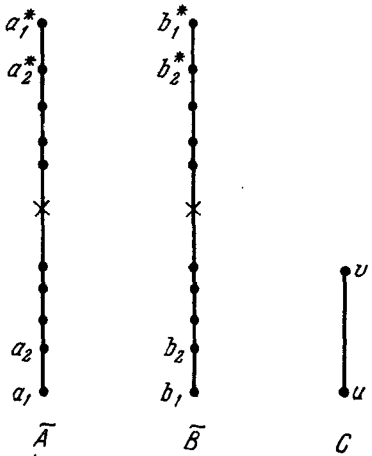


Рис. 12.

т. е. структуру $\Delta\nabla$-замкнутых подмножеств множества M. Далее, рассмотрим множества

$$D = (A,\ B,\ u),$$

$$S = (a_1,\ b_1^*,\ v)^{\Delta\nabla} = (\tilde{A},\ b_1^*,\ v)^{\nabla} =$$
$$= (a_1,\ \tilde{B},\ C) \cap M = (a_1,\ B^*,\ v) \cup (a_1,\ \tilde{B},\ u),$$

$$T = (a_1,\ b_1^*,\ u)^{\Delta\nabla} = [(\tilde{A},\ b_1^*,\ C) \cap M]^{\nabla} =$$
$$= [(\tilde{A},\ b_1^*,\ v) \cup (A,\ b_1^*,\ u)]^{\nabla} = (a_1,\ \tilde{B},\ u),$$

и

$$U = (a_1,\ B,\ u)$$

Ясно, что $S,\ T \in L$. Так как

$$D^{\Delta\nabla} = ((A^*,\ B^*,\ C) \cap M)^{\nabla} =$$
$$= (A^*,\ B^*,\ v)^{\nabla} = (A,\ B,\ C) \cap M = (A,\ B,\ u) = D,$$

то $D \in L$. Далее, имеем

$$D \cap S = D \cap (a_1, \tilde{B}, C) = U = D \cap T,$$

а с помощью теоремы 1.6 получаем

$$(D \cup S)^{\Delta\nabla} = \\ = (D^{\Delta} \cap S^{\Delta})^{\nabla} = [(A^*, B^*, C) \cap (\tilde{A}, b_1^*, v) \cap M]^{\nabla} = (A^*, b_1^*, v)^{\nabla}$$

и

$$(D \cup T)^{\Delta\nabla} = (D^{\Delta} \cap T^{\Delta})^{\nabla} = [(A^*, B^*, C) \cap (\tilde{A}, b_1^*, C) \cap M]^{\nabla} = \\ = [(A^*, b_1^*, C) \cap M]^{\nabla} = (A^*, b_1^*, v)^{\nabla}.$$

Так как $S \underset{\neq}{\supset} T$, то полученные равенства вместе с теоремами 3.5 и 6.1 показывают, что структура L не является даже дедекиндовой *).

В заключение изучим, как в полных булевых алгебрах обстоит дело с бесконечными дистрибутивными законами (71) — (73), рассматривавшимися в предыдущем параграфе.

Т е о р е м а 6. *Во всякой полной булевой алгебре справедливы равенства*

$$a \cdot \sup B = \sup (aB) \quad \text{и} \quad a + \inf B = \inf (a + B).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $a \cdot \sup B \geqslant ab$ для всех $b \in B$. Если $v \geqslant ab$ для всех $b \in B$, то

$$a' + v \geqslant a' + ab = (a' + a)(a' + b) = a' + b \geqslant b$$

для всех $b \in B$. Отсюда $a' + v \geqslant \sup B$ и, следовательно,

$$a \cdot \sup B \leqslant a(a' + v) = av \leqslant v.$$

Таким образом,

$$a \cdot \sup B = \sup (aB).$$

Справедливость второго равенства вытекает из двойственных соображений.

Из теорем 5, 6 и 3.7 вытекает

С л е д с т в и е. *В любой булевой алгебре равенства, указанные в теореме 6, справедливы всякий раз, когда входящие в них точные грани существуют.*

---

*) Рассмотренный пример предложил Фунаяма.

Теорема 7. *Следующие свойства полной булевой алгебры B эквивалентны*:

(1) *B изоморфна структуре всех подмножеств некоторого множества M*;

(2) *в B справедливо тождество* (73);

(3) *в B справедливо тождество* (73′);

(4) *B атомна.*

Доказательство. Справедливость импликаций (1) $\Rightarrow$ (2) и (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из теоремы 7.9.

(2) $\Rightarrow$ (4). Обозначим через Φ множество всех отображений алгебры B в двухэлементное множество $\{0, 1\}$. Для любых $b \in B$ и $\varphi \in \Phi$ положим $b^0 = b$, $b^1 = b'$,

$$\theta_\varphi = \inf_{b\in B}\{b^{\varphi(b)}\} \quad \text{и} \quad \Phi' = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi,\ \theta_\varphi \neq 0\}.$$

Если $0 < x \leqslant \theta_\varphi$, то $x \leqslant x^{\varphi(x)}$. Если $\varphi(x) = 1$, то $x \leqslant xx' = 0$, вопреки условию. Следовательно, $\varphi(x) = 0$. Отсюда $x \leqslant \theta_\varphi \leqslant x^0 = x$, т. е. $x = \theta_\varphi$. Таким образом, θ_φ — атом для всякого $\varphi \in \Phi'$. Используя (73), получаем

$$1 = \inf_B (b + b') = \inf_B \sup_{\{0,1\}} \{b^i\} =$$
$$= \sup_{\varphi\in\Phi} \inf_B \{b^{\varphi(b)}\} = \sup_{\varphi\in\Phi} \theta_\varphi = \sup_{\varphi\in\Phi'} \theta_\varphi.$$

Если, далее, $0 \neq b \in B$, то ввиду теоремы 6 имеем

$$b = b \sup_{\varphi\in\Phi'} \theta_\varphi = \sup_{\varphi\in\Phi'} b\theta_\varphi.$$

Для некоторого $\varphi \in \Phi'$ имеем $0 < b\theta_\varphi \leqslant \theta_\varphi$. Поскольку θ_φ — атом, отсюда вытекает, что $b\theta_\varphi = \theta_\varphi$. Следовательно, $\theta_\varphi \leqslant b$, что и требовалось.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть M — множество всех атомов алгебры B и P — структура всех подмножеств множества M. Если $b \in B$, то положим

$$\varphi(b) = \begin{cases} \{p \mid p \in M,\ p \leqslant b\}, & \text{если } b \neq 0,\\ \phi, & \text{если } b = 0.\end{cases}$$

Тогда φ отображает B в P. Определим отображение P в B, положив

$$\psi(X) = \begin{cases} \sup X, & \text{если } X \text{ не пусто},\\ 0, & \text{если } X = \phi.\end{cases}$$

В силу теоремы 6.20, $\psi\varphi\ (b) = b$ для всех $b \in B$. Следовательно, ψ отображает P на B. Допустим, что $\psi\ (X) = \psi\ (Y)$ и $y \in Y$. В силу теоремы 6, имеем

$$y = y\psi\ (Y) = y\psi\ (X) = y \sup X = \sup\ (yX),$$

откуда

$$0 < xy \leqslant x,\ y$$

для некоторого $x \in X$. Поскольку x и y — атомы, отсюда вытекает, что

$$y = xy = x \in X.$$

Таким образом, $Y \subseteq X$ и, аналогично, $X \subseteq Y$. Следовательно, ψ — взаимно однозначное отображение. Ясно, что ψ изотонно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Достаточно заметить, что эта импликация двойственна уже доказанной импликации (2) $\Rightarrow$ (1).

Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие. *Конечная булева алгебра изоморфна структуре всех подмножеств некоторого конечного множества.*

В заключение убедимся, что равенство (73) справедливо не во всякой полной булевой алгебре. С этой целью рассмотрим множество P всех открытых подмножеств отрезка действительных чисел $[0, 1]$, рассматриваемого как топологическое пространство с обычной топологией. Так как пустое множество и объединение любого множества открытых множеств открыто, то из теоремы, двойственной теореме 3.1, вытекает, что P — полная структура. Если $a \in P$, то положим $Ca = [0, 1] \setminus a$, а через $\bar{a}$ обозначим замыкание множества a. Кроме того, положим $a' = C\bar{a}$ и $\varphi\ (a) = a''$. Ясно, что $a' \in P$.

Лемма 1. $(a \cup b)'' = a'' \cap b''$.

Действительно, из известных свойств замыкания (см., например, П. С. Александров, «Введение в общую теорию множеств и функций», Гостехиздат, 1948, стр. 237, теорема 6) вытекает

$$(a \cup b)' = C\,\overline{(a \cup b)} = C\ (\bar{a} \cup \bar{b}) = C\bar{a} \cap C\bar{b} = a' \cap b',$$

Л е м м а 2. *Если* $a \subseteq b$, *то* $a' \supseteq b'$.

В самом деле, если $a \subseteq b$, то $a \cup b = b$. Применяя лемму 1, получим

$$b' = (a \cup b)' = a' \cap b',$$

откуда $a' \supseteq b'$.

Л е м м а 3. $a' \subseteq a'''$.

Действительно, из очевидного включения $C\bar{a} \subseteq \overline{C\bar{a}}$ вытекает, что $C\overline{C\bar{a}} \subseteq CC\bar{a} = \bar{a}$. Отсюда

$$a'' = C\overline{a'} = C\overline{C\bar{a}} \subseteq \bar{a}$$

и, следовательно, $\overline{a''} \subseteq \bar{a}$. Поэтому

$$a' = C\bar{a} \subseteq C\overline{a''} = a'''.$$

Л е м м а 4. $a \subseteq a''$.

Действительно, поскольку a открыто, имеем

$$Ca = \overline{Ca} \quad C\bar{\bar{a}},$$

откуда

$$a = CCa \subseteq C\overline{C\bar{a}} = C\overline{a'} = a''.$$

Л е м м а 5. φ — *оператор замыкания на структуре* P.

В самом деле, соотношение $a \subseteq \varphi(a)$ вытекает из леммы 4, а импликация $a \subseteq b \Rightarrow \varphi(a) \subseteq \varphi(b)$ — из леммы 2. Наконец, из лемм 4, 3 и 2 вытекает, что

$$\varphi(a) = a'' \subseteq (a'')'' = \varphi(\varphi(a)) = (a''')' \subseteq a'' = \varphi(a).$$

В силу леммы 5, из теоремы 3.5 следует, что φ-замкнутые элементы структуры P образуют полную структуру B. Из лемм 3 и 4 вытекает, что $a' = a''' \in B$. Ввиду леммы 1 и теоремы 3.5 для всех $a \in B$ из соотношений

$$\overline{a \cup a'} = \overline{a \cup C\bar{a}} = \bar{a} \cup \overline{C\bar{a}} = [0, 1]$$

вытекают равенства

$$a + a' = (a \cup a')'' = (C\overline{a \cup a'})' = (\phi)' = C\phi = [0, 1]$$

и

$$a \cdot a' = a \cap a' \subseteq a'' \cap a' = (a' \cup a)' = C\overline{a' \cup a} = \phi.$$

Если $a + c = [0, 1]$ и $ac = \phi$ для некоторого $c \in B$, то второе из этих соотношений дает $a \cap c = \phi$, откуда $a \subseteq Cc$, и поскольку c открыто, $\bar{a} \subseteq Cc$. Следовательно, $c = CCc \subseteq C\bar{a} = a'$. Из первого соотношения с помощью леммы 1 получаем

$$(a' \cap c')'' = (a \cup c)'' = [0, 1].$$

Поскольку $a' \cap c' \in B$, имеем

$$a' \cap c' = (a' \cap c')'' = [0, 1]' = \phi.$$

Отсюда

$$C\bar{a} = a' \subseteq Cc' = CC\bar{c}.$$

Но тогда

$$\bar{a} \supseteq C\bar{c} = \overline{c'},$$

откуда

$$\bar{a} \supseteq \overline{c'}$$

и, следовательно,

$$a' = C\bar{a} \subseteq C\overline{c'} = c'' = c.$$

Таким образом, каждый элемент a структуры B обладает единственным дополнением a'. Так как из теоремы 3.5 и леммы 1 вытекают равенства

$$(a + b)' = (a \cup b)''' = (a' \cap b')'' = a' \cap b' = a'b'$$

и

$$(ab)' = (a'' \cap b'')' = (a' \cup b')'' = a' + b',$$

то, согласно теореме 2, B оказывается булевой алгеброй. Остается заметить, что каждый ненулевой элемент из B содержит открытый интервал. Но всякий такой интервал является φ-замкнутым множеством. Следовательно, B не содержит атомов и, согласно теореме 7, в ней не выполняется соотношение (73).

Упражнения

1. Для любых элементов a и b из булевой алгебры равносильны следующие утверждения: а) $a \leqslant b$; б) $ab' = 0$; в) $a' + b = 1$.

2. Совокупность элементов дистрибутивной структуры, обладающих дополнениями, образует подструктуру, являющуюся булевой алгеброй.

3. Совокупность элементов дедекиндовой структуры, обладающих единственными дополнениями, образует подструктуру, являющуюся булевой алгеброй.

4. Каждая дистрибутивная структура является подструктурой некоторой булевой алгебры.

5. Любой гомоморфизм φ булевой алгебры B на булеву алгебру B' является *булевым* (т. е. $\varphi(b') = (\varphi(b))'$ для всех $b \in B$).

6. Обобщить теоремы 3 и 4 на дистрибутивные структуры с нулем, обладающие относительными дополнениями.

7. Всякая конгруэнция на булевой алгебре является конгруэнцией соответствующего кольца и наоборот (см. теорему 3).

8. Установить взаимно однозначное соответствие между идеалами булевой алгебры и идеалами соответствующего кольца.

9. Все идеалы булевой алгебры являются главными тогда и только тогда, когда она конечна.

10. Любой идеал булевой алгебры совпадает с пересечением всех простых идеалов, его содержащих.

11. Дистрибутивная структура является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда каждый ее простой идеал максимален.

12. Идеал I булевой алгебры максимален тогда и только тогда, когда $a \in I$ и $a' \notin I$ — равносильные утверждения.

13. Булева алгебра, обладающая композиционным рядом, конечна.

14. Если L — структура с дополнениями и $ab = 0$ влечет $b \leqslant c$ для всех дополнений c элемента a, то L — булева алгебра.

15. Если каждый элемент полной атомной структуры L обладает в точности одним дополнением, то L — булева алгебра.

16. Дать определеиие свободной булевой алгебры. Доказать ее существование и единственность.

17. Наименьшая булева подалгебра свободной булевой алгебры, содержащая часть свободных образующих, является свободной булевой алгеброй.

18. Для любого множества $\{B_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ булевых алгебр существует булева алгебра B, порождаемая (как булева алгебра) объединением $\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega} B_\alpha$, причем для любого набора булевых гомоморфизмов $\{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ алгебр B_α в какую-либо булеву алгебру M найдется булев гомоморфизм B в M, на каждой из B_α совпадающий с φ_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952 (перевод с англ.).
2. Владимиров Д. А., Булевы алгебры, «Наука», 1969.
3. Глухов М. М., Стеллецкий И. В., Фофанова Т. С., Структуры, «Итоги науки. Алгебра. Геометрия. Топология. 1968», М., 1970, 101—155.
4. Сикорский Р., Булевы алгебры, «Мир», 1969 (перевод с англ.).
5. Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, Физматгиз, 1961.
6. Скорняков Л. А., Теория структур. «Итоги науки. Алгебра. 1964», М., 1966, 237—278.
7. Carvallo M., Monographie des treillis et algèbre de Boole. Gauthier — Villars, Paris, 1966.
8. Donnellan Th., Lattice theory. Pergamonn Press. Oxford—London, 1968.
9. Dubreil-Jacotin M., Lesieur L., Croisot R. Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques. Gauthier — Villars, Paris, 1953.
10. Gericke H., Theorie der Verbanden. Hochschultaschenbücher Verlag, Mannheim, 1967.
11. Goodstein R., Boolean algebra, Pergamon Press — Macmillan Co, Oxford — London — Paris — Frankfurt — N. Y., 1963.
12. Halmos P., Lectures on Boolean algebras, Princenton — van Nostrand, N. Y. — London, 1963.
13. Hermes H., Einführung in die Verbandstheorie, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1967.
14. Maeda F., Kontinuierliche Geometrien, Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1958 (перевод с японского).
15. Morgado J., Introdução a teoria des reculados, Inst. fis. e mat. Univ. Recife, 1962.
16. Nachbin L., Topology and order, Princenton — van Nostrand, N. Y. — London, 1965.
17. von Neumann J., Continuous geometry, Princenton, New Jersey, 1960.
18. Rutherford D., Introduction to lattice theory, Oliver & Boyd, Edinburgh — London, 1965.
19. Szász G., Einführung in die Verbandstheorie, Akadémiai kiadó, Budapest, 1962.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
22	4 св.	*всех* $A \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M})$	*всех непустых* $A \in \mathfrak{P}(\mathfrak{M})$
144	4 сн.	$\bigcap\limits_{\alpha\in\Omega} B_\alpha$	$\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega} B_\alpha$
147	8 сн.	$\mathfrak{P}(\quad)$	$\mathfrak{P}(\mathfrak{M})$