АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

А. В. СКОРОХОД

СЛУЧАЙНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1978

УДК 519.21

Случайные линейные операторы. Скороход А. В. — Киев, «Наук. думка», 1979. 200 с.

В книге последовательно изложена теория случайных операторов в гильбертовом пространстве. Введены понятия сильных и слабых случайных операторов, рассмотрены способы их задания, найдены условия сходимости случайных операторов, построена их спектральная теория, примененная затем к исследованию уравнений со случайными операторами (дифференциальными и типа Фредгольма). Изучены операторнозначные мартингалы, с помощью которых построены стохастические интегралы и стохастические уравнения для операторнозначных функций. Построена общая теория линейных уравнений, на основании которой получено описание непрерывных стохастических полугрупп.

Рассчитана на научных работников, занимающихся вопросами теории вероятностей, математического анализа, теоретической физики. Будет полезна специалистам-нематематикам, использующим в своих исследованиях теоретико-вероятностные методы, а также студентам старших курсов университетов соответствующих специальностей.

Список лит.: с. 199—200 (29 назв.).

Ответственный редактор Ю. А. МИТРОПОЛЬСКИЙ

Рецензенты В. С. КОРОЛЮК, Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ

Редакция физико-математической литературы

С $\frac{20204\text{-}581}{М221(04)\text{-}78}$ 154-79

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория случайных операторов является одним из новейших разделов теории случайных процессов и функций, ее построение — естественный шаг в создании «случайного анализа». К хорошо известным разделам этого анализа относятся теория дифференцирования случайных функций, стохастические дифференциальные уравнения, случайные последовательности и ряды, линейные топологические пространства с мерой. В настоящее время развивается теория линейных уравнений со случайными коэффициентами, имеющая очевидную связь с общей теорией линейных операторов. Интерес к случайным операторам вызван не только стремлением к завершению определенного направления исследований, но необходимость их рассмотрения диктуется, с одной стороны, внутренними потребностями теории случайных процессов, с другой — потребностями приложения этой теории к механике, теоретической физике, радиотехнике. Так, при анализе некоторых классов управляемых процессов используются условные марковские процессы, вероятности перехода которых сами являются случайными и, следовательно, порождают случайные операторы перехода. Широкий класс случайных операторов возникает при определении различного рода стохастических интегралов в теории стохастических дифференциальных уравнений. Наконец, в статистике случайных процессов случайные операторы также играют важную роль, к ним, например, относится эмпирический корреляционный оператор процесса.

В теории случайных процессов линейным случайным функциям, относящимся к классу случайных объектов, уделяется значительное внимание. Существует целый ряд работ, в которых изучаются случайные величины со значениями в бесконечномерном линейном пространстве [4, 5, 11, 17, 27, 28]. Первый вопрос, который возникает,— характеристика распределений в данном пространстве, т. е. нахождение условий, при которых конечномерные распределения («слабое распределение») порождают меру. Для гильбертова и ядерных пространств такие условия дает известная теорема Минлоса — Сазонова [15, 18]. Тот факт, что не любому слабому распределению соответствует случайная величина, натолкнул Ю. Л. Далецкого [12] на мысль рассматривать обобщенные случайные величины, принадлежащие некоторому расширению исходного пространства. Такого рода случайные величины в настоящее время широко используются. Анализ случайных операторов, фактически использующихся в теории вероятностей, показал, что их можно рассматривать только как обобщенные величины в пространстве линейных операторов. Речь идет об операторах, порождаемых стохастическими интегралами и широко использующихся в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Теория этих обобщенных операторов, способы их задания, условия, при которых они являются обычными величинами в пространстве операторов, а также операции умножения и предельного перехода в пространстве случайных операторов впервые полно изложены в гл. 1 (имеются также журнальные публикации автора [24, 25]).

Кроме общих вопросов, возникающих в связи с тем, что случайные операторы являются случайными элементами бесконечномерного пространства, теория случайных операторов изучает специфические задачи, связанные с операторной сущностью указанных случайных элементов. Первый класс задач — изучение решений операторных случайных уравнений, а также спектров случайных операторов. С этими задачами тесно связано исследование спектров случайных матриц при росте их порядка до бесконечности. Впервые эта задача поставлена в работах В. А. Марченко и Л. А. Пастура в связи с конкретными физическими моделями [14, 16]. Ряд общих теорем о предельном поведении спектра получен В. Л. Гирко [10]. Ему же принадлежит весьма интересный результат, описывающий совместное распределение собственных векторов и собственных значений симметричной случайной матрицы.

В гл. 2 изучены спектральные свойства некоторых классов случайных операторов, а также решения операторных уравнений. Результаты этой главы частично опубликованы в работе [25].

Второй класс задач возник вследствие того, что множество линейных операторов образует некоммутативное кольцо, в силу этого можно рассматривать произведения независимых операторов и непрерывный аналог такого произведения — мультипликативный процесс.

Произведениям независимых элементов групп и исследованию предельного поведения посвящена значительная литература (см. обзорные работы [11, 19]). Однако даже для матриц отсюда можно почерпнуть немного, так как группа обратимых матриц некомпактна. Группа же невырожденных операторов даже нелокально-компактна. Поэтому предельные теоремы (не в схеме серий) не получены и пока не ясны подходы к изучению асимптотики распределения произведения. Проще обстоит дело со сходимостью бесконечных произведений матриц и операторов [26]. Наиболее общие результаты приведены в гл. 3 (§ 8), в которой также рассмотрены мартингалы с операторными значениями дискретного и непрерывного аргументов. Дискретные мартингалы являются удобным «инструментом» для изучения произведений независимых случайных операторов, а непрерывные — необходимы для построения стохастических интегралов (гл. 4), чтобы с их помощью изучать мультипликативные процессы как решения линейных операторных стохастических уравнений. Мультипликативные процессы в матричном варианте введены автором в работе [21], а затем изучались Г. П. Буцаном в ряде работ, подытоженных в [3]. В то же время с изучением условных марковских процессов в теории случайных процессов появились мультипликативные случайные полугруппы вероятностных операторов. Описание этих полугрупп для скачкообразной компоненты проведено в работе автора [22], где для них получено линейное стохастическое уравнение. Общие операторные мультипликативные функционалы как решения линейных уравнений строились для различных классов марковских процессов Ю. Л. Далецким и его учениками [2].

В работах автора [24, 29] введено понятие стохастической полугруппы с независимыми значениями. Для непрерывных полугрупп получено линейное стохастическое дифференциальное уравнение. Широкий класс стохастических полугрупп (без предположения непрерывности) изучил Г. П. Буцан [3]. Наиболее общие результаты линейных стохастических операторных уравнений и непрерывных стохастических полугрупп изложены в гл. 5.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbf{X}$ — сепарабельное гильбертово пространство

$\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств в $\mathbf{X}$ (элементы пространства $\mathbf{X}$ обозначаются малыми латинскими буквами)

(x, y) — скалярное произведение $x, y \in \mathbf{X}$

$|x|$ — норма $x \in \mathbf{X}$

$\{e_k, k = 1, 2, \ldots\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{X}$, т. е. $(e_k, e_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j \end{cases}$

$\mathbf{R}$ — вещественная прямая (ее элементы обозначаются малыми греческими буквами)

$\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ — вероятностное пространство, события (элементы $\mathfrak{S}$) — большие греческие буквы

$\xi(\omega)$ — случайная величина

$\mathbf{M}\xi(\omega)$ — ее математическое ожидание

$\mathbf{D}\xi(\omega)$ — дисперсия

$\mathbf{L}(\mathbf{X})$ — множество (ограниченных) линейных операторов из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$

При $A \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ $\|A\| = \sup\limits_{|x| \leqslant 1} |Ax|$

Для $A \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ оператор A^*, для которого $\forall_{x,y} \in \mathbf{X}$, $(Ax, y) = (x, A^*y)$, называется оператором, сопряженным к A

Если $A = A^*$, то A симметричен

Если $A = A^*$ и $(Ax, x) \geqslant 0$ $\forall x \in \mathbf{X}$, то $A \in \mathbf{L}_+(\mathbf{X})$

Оператор A ядерный, если $A \in \mathbf{L}_+(\mathbf{X})$ и $\operatorname{sp} A = \sum (Ae_k, e_k) < \infty$ для некоторого базиса $\{e_k\}$

A — оператор Гильберта — Шмидта, если A^*A ядерный

$\mathbf{X}(\Omega)$ — множество измеримых относительно пары $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})$-функций $x(\omega)$ из Ω в $\mathbf{X}$ ($\mathbf{X}$-значные случайные величины)

$\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ — множество отображений $A(\omega)$ из Ω в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, для которых $(A(\omega)x, y)$ $\mathfrak{S}$-измеримо при всех $x, y \in \mathbf{X}$

$\alpha \wedge \beta$ — меньшее из чисел α и β

$\alpha \vee \beta$ — большее из чисел α и β

СЛУЧАЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Сильный случайный оператор

Наиболее простым примером случайного оператора является оператор стохастического интегрирования. Рассмотрим гильбертово пространство $L_2\,[0,\,1]$, винеровский процесс $w\,(t)$ на $[0,\,1]$ и для $\varphi \in L_2\,[0,\,1]$ положим

$$A\,(\omega)\,\varphi\,(t) = \int\limits_0^t \varphi\,(s)\,dw\,(s),$$

где $A\,(\omega)\,\varphi\,(t)$ — непрерывная случайная функция и, следовательно, с вероятностью 1 принадлежит $\mathbf{L}_2\,[0,\,1]$. Поэтому оператор $A\,(\omega)$ переводит функции из $\mathbf{L}_2\,[0,\,1]$ в случайные функции из $\mathbf{L}_2\,[0,\,1]$. Но $A\,(\omega)$ не принадлежит $\mathbf{L}\,(\Omega,\,\mathrm{X})$. Действительно, пусть

$$\varphi_n\,(s) = \sqrt{n}\left[w\left(\frac{k}{n}\right) - w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right],\quad \frac{k-1}{n} \leqslant s < \frac{k}{n},$$
$$k = 1,\,\ldots,\,n.$$

Тогда при $n \to \infty$ это выражение с вероятностью 1 стремится к 1

$$\int\limits_0^1 \varphi_n^2\,(s)\,ds = \sum_{k=1}^n \left[w\left(\frac{k}{n}\right) - w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]^2.$$

В то же время, используя определение интеграла на ступенчатых функциях, продолжая его естественным образом и на функции, зависящие от ω, получаем

$$\int\limits_0^1 |\,A\,(\omega)\,\varphi\,(s)\,|^2\,ds = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\sqrt{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left[w\left(\frac{j}{n}\right) - w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right]^2 + \right.$$

$$+\sqrt{n}\left(w\left(\frac{k}{n}\right)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\left(w(t)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)\Bigg)^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left\{\frac{1}{2}n\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left(w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.-2n\left(w\left(\frac{k}{n}\right)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\left(w(t)-\omega\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\right\}dt$$

(здесь использовано неравенство $(\alpha+\beta)^2 \geqslant \frac{1}{2}\alpha^2-2\beta^2$).

Поскольку $\mathbf{M}\left(\omega\left(\frac{k}{n}\right)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\left(w(t)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2=$ $=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, величина $n\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(w\left(\frac{k}{n}\right)-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2\left(w(t)-\right.$ $\left.-w\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)^2 dt$ ограничена по вероятности. Далее

$$\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} n\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left(w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2\right)^2 dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left(w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2\right)^2\sim\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2\sim\frac{n}{3}\to\infty.$$

Таким образом построена последовательность функций $\varphi_n(t)$, ограниченных по норме, для которых $A(\omega)\,\varphi(t)$ сходится по норме к ∞. Это было бы невозможно, если бы $A(\omega)$ принадлежал $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Приведенный пример показывает недостаточность множества случайных операторов $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Рассмотрим «обобщенные» операторы, один из которых приведен ниже. Если $A(\omega)\in\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, то $\forall x\in\mathbf{X}$ $A(\omega)x\in\mathbf{X}(\Omega)$. При этом $A(\omega)x$ удовлетворяет следующим условиям. S1) $\forall x_1, x_2\in\mathbf{X}$, α, $\beta\in\mathbf{R}$

$$\mathbf{P}\{A(\omega)(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha A(\omega)x_1+\beta A(\omega)x_2\}=1;$$

S2) $A(\omega)x$ непрерывно по x по вероятности:

$$\forall\varepsilon>0\quad \lim_{x_n\to x}\mathbf{P}\{|A(\omega)x_n-A(\omega)x|>\varepsilon\}=0.$$

Пусть $A(\omega)x$ отображение $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}(\Omega)$, для которого выполнены условия S1) и S2). Тогда $A(\omega)x$ определяет сильный случайный оператор. Множество сильных случайных операторов обозначим $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. При этом операторы $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ считаются тождественными, если

$$\forall x \in \mathbf{X} \quad \mathbf{P}\{A_1(\omega)x = A_2(\omega)x\} = 1. \tag{1.1}$$

При таком соглашении любой оператор $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ может быть тождествен некоторому сильному оператору, значит

$$\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X}) \supset \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X}).$$

Из рассмотренного выше примера видно, что здесь существует строгое включение, поскольку нетрудно убедиться, что построенный оператор является сильным.

2. Слабый случайный оператор

Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Тогда выражение $(A(\omega)x, y)$ определяет отображение $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ в $\mathbf{R}(\Omega)$, которое удовлетворяет следующим условиям.

W1) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{X}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}$

$$\mathbf{P}\left\{(A(\omega)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j (A(\omega)x_i, y_j)\right\} = 1;$$

W2) $(A(\omega)x, y)$ — непрерывно по вероятности на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$: $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{x_n \to x, y_n \to y} \mathbf{P}\{|(A(\omega)x_n, y_n) - (A(\omega)x, y)| > \varepsilon\} = 0.$$

Предположим, что задано такое отображение $(A(\omega)x, y)$ $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ в $\mathbf{R}(\Omega)$, для которого выполнены условия W1) и W2). Тогда можно сказать, что задан слабый случайный оператор $A(\omega)$. Множество всех слабых случайных операторов обозначим $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$. Операторы $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ тождественны, если

$$\forall x, y \in \mathbf{X} \ \mathbf{P}\{(A_1(\omega)x, y) = (A_2(\omega)x, y)\} = 1. \tag{1.2}$$

Легко видеть, что имеют место включения

$$\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X}) \supset \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X}) \supset \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X}).$$

Заметим, что отождествление в $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ и $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ согласовано: если $A_1(\omega)$, $A_2(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и выполнено (1.2), то в этом случае для любого счетного подмножества $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}$

получаем

$$\mathbf{P}\{(A_1(\omega)x - A_2(\omega)x,\ y) = 0,\ y \in \mathbf{X}_1\} = 1.$$

Поскольку $A_1(\omega)x - A_2(\omega)x \in \mathbf{X}$, из этого соотношения вытекает (1.1). Если же $A_1(\omega)$, $A_2(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, то из (1.2) следует, что

$$\mathbf{P}\{A_1(\omega) = A_2(\omega)\} = 1.$$

Итак, ограниченный случайный оператор определен для всех $\omega \in \Omega$; для сильного определен только результат действия оператора на произвольный (неслучайный) элемент $x \in \mathbf{X}$, а при задании слабого оператора можно лишь определить скалярное произведение $(A(\omega)x, y)$, каковы бы ни были $x, y \in \mathbf{X}$. Поскольку слабый оператор задавать проще, поэтому естественно, что любой оператор первоначально задаем как слабый, а затем выясняем, будет ли он принадлежать более узкому множеству $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ или $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Ниже приведены два условия, при которых оператор является сильным или ограниченным.

Теорема 1. *Пусть* $\{e_k\}$ *— базис в* $\mathbf{X}$, $A(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$. *Для того чтобы* $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall x \in \mathbf{X} \quad \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x,\ e_k)^2 < \infty\right\} = 1.$$

Доказательство. *Необходимость.* Если $A(\omega)x \in \mathbf{X}$, для всех $\omega \in \Omega$

$$A(\omega)x = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x,\ e_k)e_k;$$

$$|A(\omega)x|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x,\ e_k)^2 < \infty.$$

Достаточность. Положим

$$\hat{A}(\omega)x = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x,\ e_k)e_k.$$

Тогда $\hat{A}(\omega)x$ удовлетворяет условию S1) в силу того, что $(A(\omega)x, y)$ удовлетворяет условию W1). Кроме того, с вероятностью 1

$$(\hat{A}(\omega)x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x,\ e_k)(e_k,\ y) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(A(\omega)x,\ \sum_{k=1}^{n} (e_k,\ y)e_k\right) = (A(\omega)x,\ y)$$

вследствие условия W2) и того, что $y = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, y) e_k$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{(\hat{A}(\omega) x, y) = (A(\omega) x, y)\} = 1.$$

Проверим, что для $\hat{A}(\omega) x$ выполнено условие S2). Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_{|x| \leqslant 1} \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \alpha\} = 0. \tag{1.3}$$

Действительно, из (1.3) получаем

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x_n - \hat{A}(\omega) x| > \varepsilon\} \leqslant \sup_{|y| \leqslant 1} \mathbf{P}\left\{|\hat{A}(\omega) y| > \frac{\varepsilon}{|x_n - x|}\right\} \to 0$$

при $|x_n - x| \to 0$. Далее заметим, что (1.3) эквивалентно следующему утверждению: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют такая сфера $S_\delta(x_0)$ в $\mathbf{X}$ (с центром в x_0, радиусом δ) и $\alpha > 0$, при которых

$$\sup_{x \in S_\delta(x_0)} \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \alpha\} \leqslant \varepsilon. \tag{1.4}$$

Из (1.3) вытекает (1.4), так как

$$\sup_{x \in S_\delta(x_0)} \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \alpha\} \leqslant \sup_{x \in S_1(0)} \mathbf{P}\left\{|\hat{A}(\omega) x| > \frac{\alpha}{|x_0| + \delta}\right\}.$$

Если (1.4) выполнено, то при $x \in S_1(0)$ получаем

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \lambda\} = \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) \delta x| > \lambda\delta\} =$$

$$= \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) \delta x| - |\hat{A}(\omega) x_0| > \lambda\delta - |\hat{A}(\omega) x_0|\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)(x_0 + \delta x)| > \lambda\delta - |\hat{A}(\omega) x_0|\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\left|\hat{A}(\omega) x_0\right| > \frac{\lambda\delta}{2}\right\} + \sup_{y \in S_\delta(x_0)} \mathbf{P}\left\{\left|\hat{A}(\omega) y\right| > \frac{\lambda\delta}{2}\right\}.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \infty$, получаем

$$\overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \sup_{x \in S_1(0)} \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \lambda\} \leqslant \varepsilon,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$.

Предположим, что (1.4) не выполнено. Это значит, что существует такое $\varepsilon > 0$, при котором, какова бы ни была сфера $S_\delta(x_0)$ и $\alpha > 0$,

$$\sup_{x \in S_\delta(x_0)} \mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega) x| > \alpha\} < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Пусть $\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)x'|>\alpha\}<\varepsilon$. Тогда для всех достаточно больших n

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\hat{A}(\omega)x',\ e_k)^2>\alpha^2\right\}>\varepsilon.$$

Значит, вследствие стохастичесхой непрерывности $\sum_{k=1}^{n}(\hat{A}(\omega)\times\times x,\ e_k)^2$ можно указать такое δ_1, что и при $|x'-x|<\delta_1$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{n}(\hat{A}(\omega)x,\ e_k)^2>\alpha^2\right\}>\varepsilon.$$

Но тогда при $x\in S_{\delta_1}(x')$

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)x|^2>\alpha\}>\varepsilon.$$

Итак, если (1.5) выполнено, то существует такая $S_\delta(x_1)\subset\subset S_\delta(x_0)$, что при $x\in S_{\delta_1}(x_1)$ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)x|>\alpha\}>\varepsilon.$$

Используя это обстоятельство, можно построить последовательность вложенных сфер $S_{\delta_k}(x_k)$, таким образом, чтобы $\delta_k\downarrow 0$ и при $x\in S_{\delta_k}(x_k)$

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)x|>k\}>\varepsilon.$$

Тогда для $\bar{x}\in\bigcap_k S_{\delta_k}(x_k)$ получаем

$$\mathbf{P}\{|\hat{A}(\omega)\bar{x}|=+\infty\}>\varepsilon,$$

что невозможно.

Замечание. При доказательстве соотношения (1.3) использована идея Банаха доказательства ограниченности по норме слабо ограниченной последовательности. Нам неоднократно придется использовать подобного рода рассуждения, поэтому выделим их в виде отдельной леммы, доказательство которой по сути повторяет доказательство соотношения (1.3).

Лемма 1. Пусть на $\mathbf{X}$ задана последовательность случайных функций $\psi_n(x)$, удовлетворяющих условиям:

1) $\psi_n(x)\geqslant 0$ и $\forall\, x,\ y\in\mathbf{X}$ $\psi_n(x+y)\leqslant\psi_n(x)+\psi_n(y)$ с вероятностью 1;

2) $\forall n \lim\limits_{\alpha\to\infty} \sup\limits_{|x|\leqslant 1} \mathbf{P}\{\psi_n(x) > \alpha\} = 0$;

3) $\forall x \in \mathbf{X}$ $\psi_n(x) \uparrow \psi(x)$ с вероятностью 1.

Тогда

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|x|\leqslant 1} \mathbf{P}\{\psi(x) > \alpha\} = 0.$$

В доказательстве теоремы роль $\psi(x)$ выполняет $|A(\omega)x|$,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\hat{A}(\omega)x, e_k)^2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ *и для некоторого счетного плотного в* $S_1(0)$ *множества* $\mathbf{X}_1$, *для которого* $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in \mathbf{X}_1$, *если* $x_1, x_2 \in \mathbf{X}_1$, α_1, α_2 *рациональны и* $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2| \leqslant 1$ *выполнено*

$$\mathbf{P}\{\sup_{x\in X_1} |A(\omega)x| < \infty\} = 1.$$

Тогда $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$.

Доказательство. Пусть $\Lambda \in \mathfrak{S}$ — множество тех ω, для которых выполнены соотношения $\sup\limits_{x\in\tilde{\mathbf{X}}_1} |A(\omega)x| < \infty$, $A(\omega)(\alpha x + \beta y) = \alpha A(\omega)x + \beta A(\omega)y$ для всех рациональных α, β и $x, y \in \mathbf{X}_1$. Поскольку $\mathbf{X}_1$ счетно, $\mathbf{P}(\Lambda) = 1$. Обозначим через $\tilde{\mathbf{X}}$ линейную оболочку $\mathbf{X}_1$ над полем рациональных чисел. Если $\xi(\omega) = \sup\limits_{x\in\mathbf{X}_1} |A(\omega)x|$, то при $x, y \in \tilde{\mathbf{X}}$

$$|A(\omega)x - A(\omega)y| \leqslant \xi(\omega)|x - y|.$$

Для любого $x \in \mathbf{X}$ и $\omega \in \Lambda$ положим

$$\hat{A}(\omega)x = \lim_{n\to\infty} A(\omega)x_n,$$

где $x_n \in \tilde{\mathbf{X}}$, $x_n \to x$. Существование этого предела вытекает из того, что $|A(\omega)x_n - A(\omega)x_m| \leqslant \xi(\omega)|x_n - x_m|$. Очевидно также, что значение $\hat{A}(\omega)x$ не зависит от выбора последовательности $x_n \to x$. Нетрудно проверить, что при $\omega \in \Lambda$ $\hat{A}(\omega)(\alpha x + \beta y) = \alpha\hat{A}(\omega)x + \beta\hat{A}(\omega)y$ и $|\hat{A}(\omega)x| \leqslant \xi(\omega)|x|$. Таким образом, $\hat{A}(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Далее для $x \in \tilde{\mathbf{X}}$ $A(\omega)x = \hat{A}(\omega)x$ при $\omega \in \Lambda$, т. е.

$$\mathbf{P}\{A(\omega)x = \hat{A}(\omega)x\} = 1.$$

Используя непрерывность по вероятности $A(\omega)x$, $\hat{A}(\omega)x$ и по x, убеждаемся, что последнее соотношение справедливо для любых x. Значит, $A(\omega) = \hat{A}(\omega)$. ■

Замечание 1. Пусть $\mathbf{X}_1$ такое, как в теореме 2, и $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$. Если

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x\in\mathbf{X}_1, y\in\mathbf{X}_1} (A(\omega)x, y) < \infty\right\} = 1,$$

то $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 2. Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ и в некотором базисе $\{e_k\}$ выполнено условие

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i,k} (A(\omega)e_i, e_k)^2 < \infty\right\} = 1.$$

Тогда $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$.

Действительно, если

$$|A(\omega)x|^2 = \sum_k (A(\omega)x, e_k)^2 = \sum_k \left[\sum_i (A(\omega)e_i, e_k)(x, e_i)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \left\{\sum_i (A(\omega)e_i, e_k)^2 \sum_i (x, e_i)^2\right\} = \sum_{k,i} (A(\omega)e_i, e_k)^2 |x|^2,$$

то условия теоремы выполнены. Оператор $A(\omega)$ будет не только ограниченным, но и оператором Гильберта — Шмидта, для всех почти ω, так как

$$\operatorname{sp} A(\omega)A^*(\omega) = \sum_{i,k} (A(\omega)e_i, e_k)^2 < \infty$$

с вероятностью 1.

3. Произведение случайных операторов

Если $A(\omega)$ и $B(\omega)$ принадлежат $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, то и $A(\omega) \times B(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, при этом для любого базиса $\{e_k\}$ выполнено соотношение

$$(A(\omega)B(\omega)x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (B(\omega)x, e_k)(A(\omega)e_k, y). \tag{1.6}$$

Естественно, это соотношение можно использовать для определения произведения слабых операторов. Установим предварительно одно вспомогательное предположение.

Лемма 2. Если $A(\omega)$ и $B(\omega)$ принадлежат $\mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ и в некотором базисе $\{e_k\}$ сходится по вероятности ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B(\omega)x, e_k)(A(\omega)e_k, y) = \psi(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{X}$$

то функция $\psi(x, y)$ непрерывна по x, y и по вероятности.

Доказательство. Так как $\psi(x, y)$ — билинейная функция, то достаточно доказать соотношение

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} = 0. \tag{1.7}$$

Используя равенство

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0) + \delta\psi\left(x_0, \frac{y-y_0}{\delta}\right) +$$

$$+ \delta\psi\left(\frac{x-x_0}{\delta}, y_0\right) + \delta^2\psi\left(\frac{x-x_0}{\delta}, \frac{y-y_0}{\delta}\right),$$

убеждаемся, что для доказательства (1.7) достаточно установить, что

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|x|\leqslant 1} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} = 0;$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|y|\leqslant 1} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} = 0, \tag{1.8}$$

и можно указать такие сферы $S_\delta(x_0)$ и $S_\delta(y_0)$, для которых

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in S_\delta(x_0)} \sup_{y\in S_\delta(y_0)} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} = 0. \tag{1.9}$$

Оба соотношения (1.8) вытекают из леммы 1, а также

$$|\psi(x, y)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \psi_n(x, y) < \infty;$$

$$\psi_n(x, y) = \sup_{m\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^{m} (B(\omega)x, e_k)(A(\omega)e_k, y)\right|.$$

Если соотношение (1.9) не выполнено и существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$\inf_{\alpha>0} \inf_{\delta>0} \inf_{x_0, y_0} \sup_{x\in S_\delta(x_0)} \sup_{y\in S_\delta(y_0)} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} < \varepsilon, \tag{1.10}$$

то так же, как при доказательстве теоремы 1, можно построить последовательность $n_k \to \infty$ и вложенные сферы $S_{\delta_k}(x_k) \subset S_{\delta_{k-1}}(x_{k-1})$, $S_{\delta_k}(y_k) \subset S_{\delta_{k-1}}(y_{k-1})$ $(\delta_k \downarrow 0)$, что $\forall x \in S_{\delta_k}(x_k)$, $y \in S_{\delta_k}(y_k)$

$$\mathbf{P}\{\psi_{n_k}(x, y) > k\} > \varepsilon.$$

Тогда для $\bar{x} \in \bigcap S_{\delta_k}(x_k)$, $\bar{y} \in \bigcap S_{\delta_k}(y_k)$ получаем

$$\forall k \quad \mathbf{P}\{\psi_{n_k}(\bar{x}, \bar{y}) > k\} > \varepsilon,$$

что невозможно.

Определение. Пусть $A(\omega)$ и $B(\omega)$ принадлежат $\mathbf{L}_u(\Omega, \mathbf{X})$, и в некотором базисе $\{e_k\}$ сходятся по вероятности ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B(\omega)x, e_k)(A(\omega)e_k, y)$$

для всех $x, y \in X$. Тогда сумма этого ряда по формуле (1.6) определяет слабый оператор $A(\omega)B(\omega)$.

Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$. Оператор $A^*(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, для которого

$$\forall x, y \in \mathbf{X} \quad (A(\omega)x, y) = (A^*(\omega)y, x),$$

называется оператором, сопряженным с $A(\omega)$. Его существование вытекает из функции $(A(\omega)y, x)$, удовлетворяющей условиям W1) и W2).

Лемма 3. Пусть $A^*(\omega)$ и $B(\omega)$ принадлежат $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Тогда $A(\omega)B(\omega)$ определено.

Действительно, сходимость ряда (1.6) вытекает из оценки

$$(B(\omega)x, e_k)(A(\omega)e_k, y)| \leqslant \frac{1}{2}[(B(\omega)x, e_k)^2 + (A^*(\omega)y, e_k)^2]$$

и сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B(\omega)x, e_k)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (A^*(\omega)y, e_k)^2$$

(см. теорему 1).

Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$. Тогда существует такой C (неслучайный) оператор, для которого оператор $C(A(\omega)C \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Допустим, что C — симметричный оператор, для которого $Ce_k = \sigma_k e_k$, в этом случае
$(CA(\omega)Ce_l, e_k) = (A(\omega)Ce_l, Ce_k) = \sigma_l\sigma_k(A(\omega)e_l, e_k)$.
Выберем теперь σ_l таким образом, чтобы ряд

$$\sum_{l,k} (A(\omega)e_l, e_k)\sigma_l^2\sigma_k^2$$

сходился с вероятностью 1. Для этого достаточно, чтобы

$$\sum_{l,k} \mathbf{P}\left\{(A(\omega)e_l, e_k)^2 > \frac{1}{k^2 l^2 \sigma_l^2 \sigma_k^2}\right\} < \infty.$$

Тогда ограниченность $CA(\omega)C$ вытекает из замечания 2.

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Определение

Обозначим через $\langle u \circ v\rangle$, u, $v \in \mathbf{X}$ оператор из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, для которого

$$\langle u \circ v\rangle x = (u, x) v.$$

Очевидно, что для всякого оператора $A \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$A \langle u \circ v\rangle = \langle u \circ Av\rangle.$$

Последнюю формулу можно распространить и на случайные операторы. Действительно, если $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$, то

$$(A(\omega)\langle u \circ v\rangle x, y) = (\langle u \circ A(\omega) v\rangle x, y) = (u, x)(A(\omega) v, y)$$

определено для всех $x, y \in \mathbf{X}$. Для оператора $\langle u \circ v\rangle$ определен след

$$\operatorname{sp}\langle u \circ v\rangle = \Sigma (\langle u \circ v\rangle e_k, e_k) = \Sigma (u, e_k)(v, e_k) = (u, v).$$

Значит, определен и

$$\operatorname{sp} A(\omega)\langle u \circ v\rangle = (A(\omega) v, u).$$

Пусть $\mathbf{L}_0$ — множество операторов C вида

$$C = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k \circ v_k\rangle, \; u_k, \; v_k \in \mathbf{X}, \; k = 1, \ldots, n, \; n = 1, \ldots$$

Такие операторы будем называть вырожденными. Для любых $C \in \mathbf{L}_0$, $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ определена величина $\operatorname{sp} A(\omega) C$. Функция

$$\chi_A(C) = \mathbf{M} \exp\{i \operatorname{sp} A(\omega) C\} \tag{1.11}$$

называется характеристической функцией случайного оператора $A(\omega)$. Она удовлетворяет следующим условиям.

C1) $\chi_A(C)$ положительно определена по C, каковы бы ни были $C_1, \ldots, C_n \in \mathbf{L}_0$ и комплексные числа $\theta_1, \ldots, \theta_n$,

$$\sum_{k,j=1}^{n} \chi_A(C_k - C_j)\theta_k\bar{\theta}_j = \mathbf{M}\left|\sum_{k=1}^{n} \theta_k \exp\{i \operatorname{sp} A(\omega) C_k\}\right|^2 \geqslant 0;$$

C2) $\chi_A(\langle x \circ y\rangle)$ непрерывна по совокупности переменных на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Теорема 1. *Пусть* $\chi_A(C)$ — *комплекснозначная функция, определенная на* $\mathbf{L}_0$, *для которой выполнены условия* C1) *и* C2), *т. е. она положительно определена* $\chi_A(\langle x \circ y\rangle)$ *и непре-*

рывна по x, y в точке нуль. Тогда $\chi_A(C)$ — характеристическая функция некоторого слабого случайного оператора.

Доказательство. Покажем, что существуют такое вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ и случайный оператор $A(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, что

$$\chi(C) = \mathbf{M} \exp\{i \operatorname{sp} A(\omega) C\}. \qquad (1.12)$$

В качестве Ω возьмем пространство всех числовых функций $\psi(x, y)$, $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{X}$, γ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами в этом пространстве. Для построения меры воспользуемся теоремой А. Н. Колмогорова [8, с. 65]. Пусть $\mathbf{P}$ — мера, соответствующая случайной функции $\psi(x, y)$, для которой

$$\mathbf{M} \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(x_k, y_k)\right\} = \chi\left(\sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k y_k \circ x_k \rangle\right), \qquad (1.13)$$

каковы бы ни были $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{X}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. При фиксированных x_k, y_k выражение в правой части (1.13)— положительно определенная функция по $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, поэтому оно будет характеристической функцией некоторого распределения в $\mathbf{R}^n$. Поскольку

$$\chi\left(\sum_{k=1}^{n+1} \langle \lambda_k y_k \circ x_k \rangle\right)\Bigg|_{\lambda_{k+1}=0} = \chi\left(\sum_{k=1}^{n} \langle \lambda_k y_k \circ x_k \rangle\right),$$

то семейство конечномерных распределений с характеристическими функциями (1.13) согласовано. Отсюда (в силу упомянутой теоремы А. Н. Колмогорова) вытекает существование случайной функции $\psi(x, y)$, для которой выполнено (1.13). Эта функция удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} &\mathbf{M} \exp\{i\lambda [\psi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) - \alpha_1\beta_1\psi(x_1, y_1) - \\ &- \alpha_1\beta_2\psi(x_1, y_2) - \alpha_2\beta_1\psi(x_2, y_1) - \alpha_2\beta_2\psi(x_2, y_2)]\} = \\ &= \chi(\lambda \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \circ \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle - \lambda\alpha_1\beta_1 \langle x_1 \circ y_1 \rangle - \\ &- \lambda\alpha_1\beta_2 \langle x_1 \circ y_2 \rangle - \lambda\alpha_2\beta_1 \langle x_2 \circ y_1 \rangle - \lambda\alpha_2\beta_2 \langle x_2 \circ y_2 \rangle) = \\ &= \chi(0) = 1. \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Поэтому для всех α, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbf{R}$, x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbf{X}$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\psi(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \alpha_1\beta_1\psi(x_1, y_1) + \\ &+ \alpha_1\beta_2\psi(x_1, y_2) + \alpha_2\beta_1\psi(x_2, y_1) + \alpha_2\beta_2\psi(x_2, y_2)\} = 1. \end{aligned}$$

Кроме того, $\psi(x, y)$ непрерывно по вероятности в точке нуль. Но

$$\psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) = \psi(x - x_0, y) + \psi(x_0, y - y_0) =$$
$$= \psi\left(\frac{x - x_0}{|x - x_0|^{1/2}}, |x - x_0|^{1/2} y\right) +$$
$$+ \psi\left(|y - y_0|^{1/2} x_0, \frac{y - y_0}{|y - y_0|^{1/2}}\right)$$

с вероятностью 1. Если $|x - x_0| \to 0$ и $|y - y_0| \to 0$, то оба слагаемых в правой части последнего равенства сходятся к нулю по вероятности. Значит $\psi(x, y)$ непрерывна по вероятности. Совместно с (1.14) это означает, что $\psi(x, y) = (A(\omega) x, y)$, где $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$. Из выражения (1.13) вытекает (1.12).

2. Характеристические функции сильных и ограниченных операторов

При каких условиях $\chi_A(C)$ будет характеристической функцией сильного случайного оператора? Очевидно, что для этого $\chi_A(C)$ должна быть характеристической функцией слабого случайного оператора. Чтобы сформулировать дополнительное свойство, которым обладают характеристические функции сильных случайных операторов, нам потребуется понятие Σ-топологии. Обозначим через $\mathbf{L}_1^+(\mathbf{X})$ множество всех ядерных операторов из $\mathbf{X}$, т. е. симметричных неотрицательных операторов S, для которых

$$\operatorname{sp} S = \sum_{k=2}^{\infty} (Se_k, e_k) < \infty.$$

Σ-топология в $\mathbf{X}$ задается окрестностями нуля $\{\{x : (Sx, x) < 1\}; S \in \mathbf{L}_1^+(\mathbf{X})\}$. Она связана с условиями, при которых функция $\varphi(z)$ на $\mathbf{X}$ является характеристической функцией некоторой $\mathbf{X}$-значной величины $x(\omega)$, т. е. $\varphi(z) = \mathbf{M} \exp\{i(z, x(\omega))\}$. Известная теорема Минлоса — Сазонова [15, 18] утверждает, что для этого $\varphi(z)$ должна быть положительно определена и непрерывна в Σ-топологии и в точке нуль.

Теорема 2. *Для того чтобы $\chi_A(C)$ являлась характеристической функцией сильного случайного оператора, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) *$\chi_A(C)$ положительно определена, $\chi(0) = 1$ и $\chi_A(\langle x \circ y \rangle)$ непрерывна по совокупности переменных;*

2) $\chi_A(\langle x \circ y \rangle)$ *при всех* y *как функция* x *непрерывна в* Σ-*топологии и в точке нуль.*

Доказательство. Необходимость условия 1) очевидна. Далее

$$\chi_A(\langle x \circ y \rangle) = \mathbf{M} \exp \{i (A(\omega) y, x)\},$$

так как $A(\omega) y$ — $\mathbf{X}$-значная величина, то необходимость условия 2) вытекает из теоремы Минлоса — Сазонова.

Достаточность. Используя теорему 1, можно построить слабый случайный оператор $A(\omega)$ с характеристической функцией $A(\omega)$. Покажем, что для него

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega) x, e_k)^2 < \infty\right\}, \tag{1.15}$$

каково бы ни было $x \in \mathbf{X}$. Поскольку $\chi_A(\langle z \cdot x \rangle)$ — характеристическая функция величины $A(\omega) x$, являющаяся обобщенной случайной величиной в $\mathbf{X}$ [12] и удовлетворяющая условиям теоремы Минлоса — Сазонова, то $A(\omega) x$ — $\mathbf{X}$-значная случайная величина и, следовательно, $|A(\omega) x|$ с вероятностью 1 конечна. Отсюда вытекает (1.15). Но если для слабого случайного оператора $A(\omega)$ для всех $x \in \mathbf{X}$ выполнено (1.15), то вследствие теоремы 1 § 1 $A(\omega) \in \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$.

Укажем способ вычисления распределения $|A(\omega) x|$ для сильного оператора $A(\omega)$. Очевидно, для этого достаточно вычислить следующее преобразование Лапласа:

$$\psi_A(\lambda, x) = \mathbf{M} \exp \{-\lambda |A(\omega) x|^2\}, \qquad \lambda \geqslant 0.$$

Функция $\psi_A(\lambda, x)$ может быть определена для всех $A(\omega) \in \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ с помощью равенства

$$\psi_A(\lambda, x) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{M} \exp \left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} (A(\omega) x, e_k)^2\right\} \tag{1.16}$$

(предел существует, поскольку величина под знаком математического ожидания неотрицательна и убывает с n). Легко видеть, что (1.15) эквивалентно непрерывности $\psi_A(\lambda, x)$ по λ при $\lambda \geqslant 0$. Формулу (1.16) можно записать в таком виде:

$$\psi_A(\lambda, x) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{M} \exp \left\{i \sqrt{2\lambda} \sum_{k=1}^{n} (A(\omega) x, e_k) \eta_k\right\}, \tag{1.17}$$

где η_k — последовательность независимых между собой гауссовых величин, не зависящих от $A(\omega)$, для которых

$\mathbf{M}\eta_k = 0$, $\mathbf{D}\eta_k = 1$. Но

$$\mathbf{M} \exp\left\{i\sqrt{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}(A(\omega)x,\ e_k)\,\eta_k\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\,\mathbf{M}\left(\exp\left\{i\sqrt{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}(A(\omega)x,\ e_k)\,\eta_k\right\}/\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n\right) =$$

$$= \mathbf{M}\chi_A\left(\left\langle\sqrt{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}\eta_k e_k \circ x\right\rangle\right).$$

Обозначим через $w(\omega)$ обобщенный гауссов элемент в $\mathbf{X}$ [8, 409], для которого $\mathbf{M}\exp\{i(z, w(\omega))\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}|z|^2\right\}$ ($w(\omega)$ называется гауссовым «белым шумом»). Величины $(w(\omega), e_k)$ являются независимыми гауссовыми, $\mathbf{M}(w(\omega), e_k) = 0$, $\mathbf{D}(w(\omega), e_k)^2 = 1$. Следовательно, если P_n — оператор проектирования на подпространство, натянутое на $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то

$$\psi_A(\lambda,\ x) = \lim_{n\to\infty}\chi_A(\langle\sqrt{2\lambda}\,P_n w(\omega)\circ x\rangle).$$

Заметим, что в результате непрерывности $\chi_A(\langle y\circ x\rangle)$ в Σ-топологии по y можно указать такой симметричный невырожденный оператор V, $\mathrm{sp}V^2 < \infty$ и $\chi_A(\langle V^{-1}y\circ x\rangle)$ продолжается по непрерывности (при фиксированном x) на всем пространстве $\mathbf{X}$ [8, с. 413)]. Исходя из этого существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\chi_A(\langle\sqrt{2\lambda}\,P_n w(\omega)\circ x\rangle) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\chi_A(\langle V^{-1}(\sqrt{2\lambda}\,VP_n w(\omega))\circ x\rangle) =$$

$$= \chi_A(\langle V^{-1}(\sqrt{2\lambda}\,Vw(\omega))\circ x\rangle) = \chi_A(\langle\sqrt{2\lambda}\,w(\omega)\circ x\rangle),$$

где $Vw(\omega)$ — гауссов случайный элемент в $\mathbf{X}$. Так как

$$Me^{i(Vw(\omega),z)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}|Vz|^2\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(V^2z,\ z)\right\},$$

то выполнены условия теоремы Минлоса — Сазонова; кроме того,

$$\mathbf{M}\,|VP_n w(\omega) - Vw(\omega)|^2 = \mathrm{sp}\,[V(P_n - I)]^2 \to 0 \qquad \text{при } n\to\infty$$

[8, с. 406]. Очевидно, $\chi_A(\langle\sqrt{2\lambda}\,w(\omega)\circ x\rangle)$ будет непрерывной по λ. Значит, такой будет и

$$\psi_A(\lambda,\ x) = \mathbf{M}\chi_A(\langle\sqrt{2\lambda}\,w(\omega)\circ x\rangle). \tag{1.18}$$

Эта формула дает выражение $\psi_A(\lambda, x)$ через характеристическую функцию.

Условия, при которых характеристическая функция $\chi_A(C)$ будет характеристической функцией ограниченного случайного оператора, отсутствуют. Приведем одно достаточное условие ограниченности случайного оператора через его характеристическую функцию, являющееся в то же время необходимым и достаточным для того, чтобы случайный оператор был оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 3. *Для того чтобы случайный оператор $A(\omega)$ был ограниченным оператором Гильберта — Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция $\chi_A(C)$ удовлетворяла условиям:*

1) *каково бы ни было n, существуют такие неотрицательные операторы Гильберта — Шмидта $U_1, \ldots, U_n$, для которых функция*

$$\chi_A\left(\sum_{k=1}^{n} \langle U_k^{-1} x_k \circ e_k \rangle\right)$$

непрерывна по $x_1, \ldots, x_n$ на $\mathbf{X}^n$;

2) *пусть $\{x_k(\omega),\ k = 1, 2, \ldots\}$ независимые гауссовы белые шумы в $\mathbf{X}$, тогда функция*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\chi_A\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \langle x_k(\omega) \circ e_k \rangle\right)$$

непрерывна по λ.

Доказательство. Необходимость условия 1). Если $A(\omega)e_k \in \mathbf{X}$, $k = 1, \ldots, n$, то

$$\chi_A\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x_k \circ e_k \rangle\right) = \mathbf{M} \exp\left\{i \sum_{k=1}^{n} (A(\omega) e_k,\ x_k)\right\} -$$

совместная характеристическая функция величин $A(\omega)e_1, \ldots$ $\ldots, A(\omega) e_n$. Поэтому

$$\left|\chi_A\left(\sum_{k=1}^{n} \langle x_k \circ e_k \rangle\right) - \chi_A\left(\sum_{k=1}^{n} \langle \bar{x}_k \circ e_k \rangle\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M} \left| \exp\{i (A(\omega) e_k,\ x_k - \bar{x}_k)\} - 1 \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} \chi_A(\langle x_k - \bar{x}_k \circ e_k \rangle))}\,. \qquad (1.19)$$

Из замечания 2 [8, с. 413] следует, что для любого k существует такой положительный оператор Гильберта — Шмидта U_k, что $\chi_A(\langle U_k^{-1}x \cdot e_k\rangle)$ непрерывно. Отсюда и из неравенства (1.19) вытекает условие 1). Для доказательства необходимости условия 2) заметим, что, во-первых, вследствие 1) выражение

$$\chi_A\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \langle x_k(\omega) \circ e_k\rangle\right) = \chi_A\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \langle U_k^{-1}(U_k x_k(\omega)) \circ e_k\rangle\right)$$

имеет смысл, так как $U_k x_k(\omega) \in \mathbf{X}$. Во-вторых,

$$\mathbf{M}\chi_A\left(\lambda \sum_{k=1}^{n} \langle x_k(\omega) \circ e_k\rangle\right) = \mathbf{M}\exp\left\{i\lambda \sum_{k=1}^{n} (A(\omega)e_k,\ x_k(\omega))\right\}$$

(если считать, что $A(\omega)$ и $x_k(\omega)$ независимы). Взяв в выражении справа математическое ожидание при фиксированном $A(\omega)$, получим

$$\mathbf{M}\exp\left\{i\lambda \sum_{k=1}^{n} (A(\omega)e_k,\ x_k(\omega))\right\} = \mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n} |A(\omega)e_k|^2\right\}.$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}|A(\omega)e_k|^2\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|A(\omega)e_k|^2\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\,\mathrm{sp}\,A(\omega)A^*(\omega)\right\}$$ — непрерывная функция.

Достаточность. Из условия 1) вытекает, что для $\chi_A(\langle x \cdot e_k\rangle)$ выполнены условия теоремы Минлоса — Сазонова, поэтому $A(\omega)e_k \in \mathbf{X}$, для всех k. Далее

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\,\chi_A\left(\lambda\sum_{k=1}^{n}\langle x_k(\omega)\circ e_k\rangle\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{n}|A(\omega)e_k|^2\right\} =$$

$$= \mathbf{M}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|A(\omega)e_k|^2\right\} = \psi(\lambda)$$

(если считать $e^{-\infty} = 0$). В силу непрерывности этой функции в точке нуль получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |A(\omega) e_k|^2 = +\infty\right\} =$$

$$= \mathbf{P}\left\{1 - \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |A(\omega) e_k|^2 \geqslant 1\right\}\right\} \leqslant \frac{1-\psi(\lambda)}{1},$$

выражение справа стремится к нулю при $\lambda \to 0$ вследствие непрерывности $\psi(\lambda)$ и того, что $\psi(0) = 1$.
Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(A(\omega) e_k, e_i)^2 < \infty$$

с вероятностью 1. Остается воспользоваться замечанием 2 § 1.

3. Гауссовы случайные операторы

Случайный оператор $A(\omega)$ из $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ называется гауссовым, если $(A(\omega) x, y)$ — гауссова случайная функция на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Пусть

$$\alpha(x, y) = \mathbf{M}(A(\omega) x, y);$$

$$\beta(x, y; u, v) = \mathbf{M}(A(\omega) x, y)(A(\omega) u, v) - \alpha(x, y)\alpha(u, v) \tag{1.20}$$

(эти функции всегда определены). Они полностью определяют распределение случайного оператора. В частности, его характеристическая функция имеет следующий вид:

$$\chi_A\left(\sum_{k=1}^{n}\langle x_k \circ y_k\rangle\right) =$$

$$= \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}\alpha(y_k, x_k) - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\beta(y_k, x_k, y_l, x_l)\right\}. \tag{1.21}$$

Каким условиям должны удовлетворять функции α и β, чтобы они определялись формулами (1.20), где $A(\omega)$ — гауссов случайный оператор?

I. $\alpha(x, y)$ — ограниченная билинейная функция на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Билинейность $\alpha(x, y)$ очевидна. Ограниченность ее при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ вытекает из ограниченности по вероятности $(A(\omega) x, y)$ при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$.

II. $\beta(x, y, u, v)$ — ограниченная четырехлинейная форма. Ее ограниченность следует из ограниченности по вероятности $(A(\omega)x, y)$ при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Кроме того, для всех $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ форма

$$\sum_{k=1}^{n} \beta(x_k, y_k; x_l, y_l)\zeta_k\bar{\zeta}_l,$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — комплексные числа, неотрицательно определена. Легко проверить, что в случае, когда выполнены условия I и II, то для характеристической функции χ_A, определяемой равенством (1.21), выполнены условия теоремы 1, так что они и достаточны для того, чтобы функции $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y; u, v)$ определяли гауссов случайный оператор (то, что он будет гауссов, нетрудно установить из формулы (1.21)).

Функция $\alpha(x, y)$ имеет вид

$$\alpha(x, y) = (Ax, y),$$

где $A \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$. Естественно обозначить $A = \mathbf{M}A(\omega)$, используем его и для негауссовых случайных операторов.

Лемма. Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ и $\forall x, y \in \mathbf{X}$ существует $\mathbf{M}(A(\omega)x, y)$. Тогда существует такой оператор из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, обозначаемый $\mathbf{M}A(\omega)$ и называемый математическим ожиданием случайного оператора $A(\omega)$, что

$$\mathbf{M}(A(\omega)x, y) = ([\mathbf{M}A(\omega)]x, y). \tag{1.22}$$

Доказательство. Положим

$$\psi(x, y) = \mathbf{M}|(A(\omega)x, y)|.$$

Эта функция определена на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ и вследствие леммы Фату полунепрерывна снизу:

$$\varliminf_{x \to x_0, y \to y_0} \psi(x, y) = \varliminf_{x \to x_0, y \to y_0} \mathbf{M}|A(\omega)x, y| \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{M}|(A(\omega)x_0, y_0)| = \psi(x_0, y_0),$$

так как $|(A(\omega)x, y)| \to |(A(\omega)x_0, y_0)|$ по вероятности при $x \to x_0$, $y \to y_0$. Далее $\psi(x, y)$ полуаддитивна по каждому аргументу, например

$$\psi(x_1 + x_2, y) = \mathbf{M}|(A(\omega)x_1, y) + (A(\omega)x_2, y)| \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}|(A(\omega)x_1, y)| + \mathbf{M}|(A(\omega)x_2, y)| = \psi(x_1, y) + \psi(x_2, y).$$

Поэтому $\sup\limits_{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1} \psi(x, y) < \infty.$

Значит, $\mathbf{M}(A(\omega)x, y)$ — ограниченная билинейная форма и существует ограниченный оператор $\mathbf{M}A(\omega)$, удовлетворяющий (1.22).

Четырехлинейная форма $\beta(x, y; u, v)$ симметрична по парам аргументов

$$\beta(x, y; u, v) = \beta(u, v; x, y).$$

Введем биквадратическую функцию

$$\gamma(x, y) = \beta(x, y; x, y),$$

тогда

$$\chi_A(\langle x \circ y \rangle) = \exp\left\{i(Ay, x) - \frac{1}{2}\gamma(y, x)\right\}.$$

Для того чтобы $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была непрерывна по x в Σ-топологии, каковым бы ни был y. Исходя из теоремы 1 [8, с. 416] вытекает, что это будет лишь в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(y, e_k) < \infty,$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \gamma(y, e_k)$ — неотрицательный квадратический функционал по y. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma(y, e_k) = (By, y),$$

где B — неотрицательный симметричный оператор, который имеет следующий вид:

$$B = \mathbf{M}A^*(\omega)A(\omega)$$

(произведение определено, так как $[A^*(\omega)]^* = A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Действительно,

$$\mathbf{M}(A^*(\omega)A(\omega)x, y) = \mathbf{M}\sum_k (A(\omega)x, e_k)(A(\omega)y, e_k) =$$

$$= \sum_k \beta(x, e_k; y, e_k) =$$

$$= \sum_k \frac{1}{2}[\beta(x+y, e_k; x+y, e_k) - \beta(x, e_k; x, e_k) -$$

$$- \beta(y, e_k; y, e_k)] =$$

$$= \sum_k \frac{1}{2}[\gamma(x+y, e_k) - \gamma(x, e_k) - \gamma(y, e_k)] = (Bx, y).$$

Сформулируем условие, при котором гауссов случайный оператор является оператором Гильберта — Шмидта.

Теорема 4. *Пусть* $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ — *гауссов случайный оператор. Для того чтобы он был оператором Гильберта — Шмидта, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{sp} A^*A + \operatorname{sp} B = \operatorname{sp}[\mathbf{M}A(\omega)]^*[\mathbf{M}A(\omega)] + \operatorname{sp}\mathbf{M}A^*(\omega)A(\omega) < \infty.$$

Доказательство. Достаточность этого условия вытекает из равенства

$$\mathbf{M}\sum_{i,k}(A(\omega)e_i,\ e_k)^2 = \sum_{i,k}[\beta(e_i,\ e_k;\ e_i,\ e_k) + (\alpha(e_i,\ e_k))^2] =$$

$$= \sum_{i,k}[\gamma(e_i,\ e_k) + (Ae_i,\ e_k)^2] = \operatorname{sp} A^*A + \sum_i (Be_i,\ e_i) =$$

$$= \operatorname{sp} A^*A + \operatorname{sp} B.$$

Для доказательства необходимости заметим, что $\eta_{ik} = (A(\omega)e_i, e_k)$ имеют совместное гауссово распределение, поэтому вследствие леммы [8, с. 422] из ограниченности квадратических форм

$$\sum_{i,k\leqslant n}\eta_{ik}^2 \text{ по вероятности}$$

вытекает ограниченность $\mathbf{M}\sum\limits_{i,k\leqslant n}\eta_{ik}^2$.

Приведем примеры гауссовых случайных операторов:

1) $\alpha(x, y) = 0$, $\beta(x,\ y;\ u, v) = (x, u)\ (y,\ v)$. Такой оператор $A(\omega)$ является операторным белым шумом, для всех x $A(\omega)x$ — белый шум в $\mathbf{X}$; если $(x, u) = 0$, то $A(\omega)x$ и $A(\omega)u$ независимы. Этот оператор принадлежит $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X}) \setminus \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$;

2) $\alpha(x, y) = 0$, $\beta(x, y; u, v) = (x, u)(Cy, v)$, где C—симметричный неотрицательный ядерный оператор

$$A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega,\ \mathbf{X}),\ A^*(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega,\ \mathbf{X}) \setminus \mathbf{L}_s(\Omega,\ \mathbf{X});$$

3) $\alpha(x,\ y) = 0$,

$$\beta(x,\ y;\ u,\ v) = \sum_k (x,\ e_k)(y,\ e_k)(u,\ e_k)(v,\ e_k).$$

Тогда $\sum\beta(x,\ e_i;\ x,\ e_i) = |x|^2$, $\sum\limits_i\beta(e_i,\ y;\ e_i,\ y) = |y|^2$, значит, $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega,\ \mathbf{X})$, $A^*(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega,\ \mathbf{X})$. Покажем, что $A(\omega) \bar{\in} \mathbf{L}(\Omega,\ \mathbf{X})$. Поскольку при $i \neq j$

$$\mathbf{M}(A(\omega)e_i,\ x)(A(\omega)e_j,\ y) = \sum_k (e_i, e_k)(x, e_k)(e_j, e_k)(y, e_k) = 0,$$

каковы бы ни были x и y, то $A(\omega) e_k$ образуют последовательность независимых гауссовых величин в $\mathbf{X}$. $(A(\omega) e_k, e_k)$ — последовательность независимых гауссовых величин, для которых $\mathbf{M}(A(\omega) e_k, e_k) = 0$, $\mathbf{D}(A(\omega) e_k, e_k) = 1$. Отсюда

$$\mathbf{P}\{\sup_k (A(\omega) e_k, e_k) = +\infty\} = 1$$

и $A(\omega)$ не может быть ограниченным оператором.

4) Оператор из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ не является оператором Гильберта — Шмидта. Пусть $\alpha(x, y) = 0$,

$$\beta(x, y; u, v) = \sum_k \lambda_k (x, e_k)(y, e_k)(u, e_k)(v, e_k).$$

Тогда $\mathbf{M}(A(\omega) e_i, e_j)^2 = 0$, если $i \neq j$, $\mathbf{M}(A(\omega) e_i, e_j)^2 = \lambda_i$. Следовательно, $A(\omega)$ в базисе $\{e_k\}$ имеет диагональную форму и

$$\|A(\omega)\| = \sup_i |(A(\omega) e_i, e_i)|.$$

Если λ_k выбраны так, что

$$\mathbf{P}\{\sup_i |(A(\omega) e_i, e_i)| > \alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\tau}{\alpha} e^{-\frac{\tau^2}{2\lambda_i}} d\tau \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{2\lambda_i}} \to 0$$

при $\alpha \to \infty$, то $\mathbf{P}\{\|A(\omega)\| < \infty\} = 1$. Для того чтобы $\operatorname{sp} \mathbf{M} A^*(\omega) A(\omega) < \infty$, нужно, чтобы $\Sigma \lambda_i < \infty$.

§ 3. СХОДИМОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Слабая сходимость случайных операторов

Пусть $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, $n = 0, 1, \ldots$ Принято считать, что последовательность $A_n(\omega)$ слабо сходится к $A_0(\omega)$, если $\forall x, y \in \mathbf{X}$ величины $(A_n(\omega) x, y)$ сходятся к $(A_0(\omega) x, y)$ по вероятности.

Теорема 1. *Пусть* $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ *и* $\forall x, y \in \mathbf{X}$ *существует предел по вероятности*

$$\lim_{n\to\infty} (A_n(\omega) x, y).$$

Тогда $A_n(\omega)$ *слабо сходится к некоторому случайному оператору* $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$.

Доказательство. Обозначим

$$\psi(x, y) = \lim_{n\to\infty} (A_n(\omega) x, y).$$

Очевидно, что $\psi(x, y)$ удовлетворяет условию W1) § 1. Для того чтобы доказать существование такого $A_0(\omega)$, что

$$\psi(x, y) = (A_0(\omega) x, y),$$

достаточно показать, что $\psi(x, y)$ ограничена по вероятности при $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, т. е.

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{|x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1} \mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\} = 0. \tag{1.23}$$

Это соотношение доказывается аналогично соотношению (1.9) в лемме 2 § 1, если только положить

$$\psi_n(x, y) = (A_n(\omega) x, y).$$

Замечание. Пусть $\chi_{A_n}(C)$ — последовательность характеристических функций случайных операторов, для которых при всех C существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{A_n}(C) = \chi(C)$, причем для всех $x, y, \in \mathbf{X}$ функция $\chi(\lambda \langle x \circ y\rangle)$ непрерывна по λ. Тогда $\chi(C)$ — характеристическая функция некоторого случайного оператора. Действительно, положительная определенность $\chi(C)$ очевидна. Для доказательства непрерывности $\chi(\langle x \circ y\rangle)$ по совокупности переменных достаточно установить величины $\psi(x, y)$ (см. теорему § 2), для которых

$$\mathbf{M} \exp\{i\lambda\psi(x, y)\} = \chi(\lambda\langle y \circ x\rangle) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(\lambda\langle y \circ x\rangle) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \exp\{i\lambda(A_n(\omega) x, y)\}$$

выполнено (1.23). При выводе этого соотношения (аналогично соотношению (1.9) в лемме 2 § 1) используется лишь сходимость распределений $\psi_n(x, y) = (A_n(\omega) x, y)$ к распределению $\psi(x, y)$ (а не сходимость по вероятности).

2. Сильная сходимость случайных операторов

Последовательность случайных операторов $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ сильно сходится к случайному оператору $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, если

$$\forall x \in \mathbf{X},\ \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|A_n(\omega) x - A_0(\omega) x| > \varepsilon\} = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ *и* $A_n(\omega)$ *слабо сходятся к случайному оператору* $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$. *Обозначим*

$$\psi_{A_n}(\omega) = \mathbf{M} \exp\{-|A_n(\omega) x|^2\}.$$

Если функция $\psi(x) = \inf \psi_{A_n}(x)$ *непрерывна при* $x = 0$, *то* $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. *Кроме того, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_{A_n}(x) = \psi_{A_0}(x)$, *то* $A_n(\omega)$ *сильно сходится к* $A_0(\omega)$.

Доказательство. Для всех l и m

$$\mathbf{M} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{l} (A_m(\omega) x, e_k)^2\right\} \geqslant \inf_n \psi_{A_n}(x) = \psi(x).$$

Из этого следует, что

$$\mathbf{M} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{l} (A_0(\omega) x, e_k)^2\right\} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \mathbf{M} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{l} (A_m(\omega) x, e_k)^2\right\} \geqslant \psi(x);$$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{l} (A_0(\omega) x, e_k)^2 > \alpha\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1 - \mathbf{M} \exp\left\{-\sum\limits_{k=1}^{l} (A_0(\omega) x, e_k)^2\right\}}{1 - e^{-\alpha}} \leqslant \frac{1 - \psi(x)}{1 - e^{-\alpha}}.$$

Подставляя сюда λx вместо x и $\lambda^2 \alpha - \alpha$, получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{l} (A_0(\omega) x, e_k)^2 > \alpha\right\} \leqslant \frac{1 - \psi(\lambda x)}{1 - e^{-\lambda^2 \alpha}}.$$

Отсюда

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (A_0(\omega) x, e_k)^2 = +\infty\right\} \leqslant 1 - \psi(\lambda x),$$

каково бы ни было $\lambda > 0$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, ($\psi(0) = 1$) и используя теорему 2 § 1, находим, что $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Положим для $n = 0, 1, \ldots$

$$\zeta_n = 1 - \exp\{-|A_n(\omega) x|^2\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $(A_n(\omega) x, e_k) \to (A_0(\omega) x, e_k)$ $\forall k$ с вероятностью 1.

Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} \zeta_n \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(1 - \exp\left\{-\sum_{k=1}^{l} (A_n(\omega)\, x,\; e_k)^2\right\}\right) =$$
$$= 1 - \exp\left\{-\sum_{k=1}^{l} (A_0(\omega)\, x,\; e_k)^2\right\}$$

с вероятностью 1 и значит

$$\mathbf{P}\,\{\varliminf_{n\to\infty} \zeta_n \geqslant \zeta_0\} = 1. \tag{1.24}$$

Обозначаем $\bar{\zeta}_n = \zeta_n \vee \zeta_0$. Тогда $\mathbf{P}\,\{\bar{\zeta}_n - \zeta_0 < 0\} = 0$, а при $\varepsilon > 0$ вследствие (1.24)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\,\{\bar{\zeta}_n - \zeta_n > \varepsilon\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\,\{\zeta_0 - \zeta_n > \varepsilon\} = 0.$$

Поэтому $\bar{\zeta}_n - \zeta_n \to 0$ по вероятности

$$\mathbf{M}\,(\bar{\zeta}_n - \zeta_n) \to 0.$$

Кроме того, в силу условия теоремы $\mathbf{M}\zeta_n \to \mathbf{M}\zeta_0$ и значит

$$\mathbf{M}\,|\,\bar{\zeta}_n - \zeta_0\,| \to 0.$$

Поскольку $\bar{\zeta}_n \geqslant \zeta_n$, то отсюда вытекает, что $\bar{\zeta}_n \to \zeta_0$ и $\zeta_n \to \zeta_0$ по вероятности. Чтобы показать, что $A_n(\omega)x \to A_0(\omega)\,x$ по вероятности, достаточно доказать что, из любой последовательности натуральных чисел n_k можно выбрать такую подпоследовательность n_k', чтобы $A_{n_k'}(\omega)\,x \to A_0(\omega)\,x$ с вероятностью 1. Такой последовательностью является любая подпоследовательность n_k', для которой

$$\mathbf{P}\,\{(A_{n_k'}(\omega)\,x,\; e_l) \to (A_0(\omega)\,x,\; e_l)\} = 1 \quad \forall\, l;$$
$$\mathbf{P}\,\{\,|\,A_{n_k'}(\omega)\,x\,| \to |\,A_0(\omega)\,x\,|\} = 1,$$

так как из сходимости $(y_n,\, e_l)$ к $(y_0,\, e_l)$ и $|\,y_n\,| \to |\,y_0\,|$ вытекает сходимость y_n к y_0.

3. Сходимость распределений, соответствующих случайным операторам

Распределения случайных операторов $A_n(\omega) \in \in \mathbf{L}_\omega(\Omega,\, \mathbf{X})$ слабо сходятся к распределению случайного оператора $A_0(\omega)$, если для любых m, $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m \in$

$\in \mathbf{X}$ совместное распределение случайных величин $\{(A_n(\omega)x_k, y_k), k=1, \dots, m\}$ сходится к совместному распределению случайных величин $\{(A_0(\omega)x_k, y_k), k=1, \dots, m\}$.

Распределения случайных операторов $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ сильно сходятся к распределению случайного оператора $A_0(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, если для всех $m, x_1, \dots, x_m \in \mathbf{X}$ совместное распределение $\mathbf{X}$-значных величин $\{A_n(\omega)x_k, k=1, \dots, m\}$ сходится к совместному распределению величин $\{A_0(\omega)x_k, k=1, \dots, m\}$. Последнее эквивалентно выполнению равенства

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}f(A_n(\omega)x_1, \dots, A_n(\omega)x_m) = \\ = \mathbf{M}f(A_0(\omega)x_1, \dots, A_0(\omega)x_m)$$

для любой ограниченной непрерывной функции $f(x_1, \dots, x_m)$ на $\mathbf{X}^m$.

Нетрудно заметить, что слабая (сильная) сходимость случайных операторов влечет слабую (сильную) сходимость их распределений.

А. Для слабой сходимости распределений $A_n(\omega)$ к распределению $A_0(\omega)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(C) = \chi_{A_0}(C) \quad \forall C \in L_0, \tag{1.25}$$

где $\chi_{A_n}(\cdot)$ — характеристическая функция случайного оператора $A_n(\omega)$.

Б. Пусть, кроме (1.25), выполнены условия:

1) $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X}), n = 0, 1, \dots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}\exp\{-|A_n(\omega)x|^2\} = \mathbf{M}\exp\{-|A_0(\omega)x|^2\} \; \forall x \in \mathbf{X}.$

Тогда распределения $A_n(\omega)$ сильно сходятся к распределению $A_0(\omega)$.

Утверждение Б является следствием утверждения, приводимого ниже, и теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $A_n(\omega)$ — последовательность случайных операторов, $\chi_{A_n}(\cdot)$ — их характеристические функции, и существует предел*

$$\chi(C) = \lim_{n\to\infty} \chi_{A_n}(C) \quad \forall C \in \mathbf{L}_0$$

и функция $\chi(\lambda\langle x \circ y\rangle)$ непрерывна по λ. Тогда можно построить такую последовательность случайных операто-

ров $\{\hat{A}_n(\omega), n = 0, 1, \ldots\}$, *что* $\chi_{\hat{A}_n}(\cdot) = \chi_{A_n}(\cdot)$, $n = 1, 2, \ldots$ $\chi_{\hat{A}_0}(\cdot) = \chi(\cdot)$ *и* $\hat{A}_n(\omega)$ *слабо сходятся к* $\hat{A}_0(\omega)$.

Доказательство. Из замечания к теореме 1 вытекает, что $\chi(C)$ — характеристическая функция некоторого случайного оператора $A_0(\omega)$. Выберем некоторое плотное счетное множество $\{x_k, k = 1, 2, \ldots\}$. Поскольку для всех m совместное распределение величин $\{(A_n(\omega) x_i, x_j), i, j = 1, \ldots, m\}$ сходится к совместному распределению величин $\{(A_0(\omega) x_i, x_j), i, j = 1, \ldots, m\}$ ([20] § 6 гл. 1), то на некотором вероятностном пространстве можно построить случайные величины $\{\beta_n(x_i, x_j), i, j = 1, 2, \ldots\}$, удовлетворяющие условиям:

1) для всех $n = 0, 1, \ldots$ совместное распределение величин $\{\beta_n(x_i, x_j), i, j = 1, 2, \ldots\}$ совпадает с совместным распределением величин $\{(A_n(\omega) x_i, x_j); i, j = 1, 2, \ldots\}$;

2) $\forall i, j$ $\beta_n(x_i, x_j)$ сходится по вероятности к $\beta_0(x_i, x_j)$.

Так как для всех x и y существует предел по вероятности

$$(A_n(\omega) x, y) = \lim_{x_{i_m} \to x, x_{j_m} \to y} (A_n(\omega) x_{i_m}, x_{j_m}),$$

то из условия 1) вытекает, что существует предел по вероятности

$$\lim_{x_{i_m} \to x, x_{j_m} \to y} \beta_n(x_{i_m}, x_{j_m}),$$

который обозначим через $\beta_n(x, y)$. Легко убедиться, что совместное распределение случайных величин $\{\beta_n(\bar{x}_j, \bar{y}_j), j = 1, \ldots, m\}$ совпадает с совместным распределением величин $\{(A_n(\omega) \bar{x}_j, \bar{y}_j), j = 1, \ldots, m\}$. Следовательно, получаем

$$\beta_n(x, y) = (B_n(\omega) x, y),$$

где $B_n(\omega)$ — некоторые случайные операторы. Покажем, что $B_n(\omega)$ слабо сходятся к $B_0(\omega)$. Для этого покажем сначала, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \sup_{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1} \sup_n \mathbf{P}\{|(B_n(\omega) x, y)| > \alpha\} = 0. \tag{1.26}$$

Доказательство этого соотношения аналогично доказательству (1.9) в лемме 2 § 1 (теперь роль $\mathbf{P}\{|\psi(x, y)| > \alpha\}$ выполняет $\sup_n \mathbf{P}\{|(B_n(\omega) x, y)| > \alpha\}$). Поскольку для любого фиксированного n

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x\in S_\delta(x_1)} \sup_{y\in S_\delta(y_1)} \mathbf{P}\{|(B_n(\omega)x, y)|>\alpha\}=0,$$

то, если (1.26) не выполнено, существуют такое $\varepsilon>0$ и последовательности $n_k\to\infty$, $\delta_k\to 0$, $\alpha_k\to\infty$, а также вложенные сферы $S_{\delta_k}(x_k)\supset S_{\delta_{k+1}}(x_{k+1})$, $S_{\delta_k}(y_k)\supset S_{\delta_{k+1}}(y_{k+1})$, для которых

$$\inf_{x\in S_{\delta_k}(x_k)} \inf_{y\in S_{\delta_k}(y_k)} \mathbf{P}\{|(B_{n_k}(\omega)x, y)|>\alpha_k\}\geqslant\varepsilon.$$

Это противоречит сходимости распределения $(B_{n_k}(\omega)x_0, y_0)$ к $(B_0(\omega)x_0, y_0)$, где $x_0\in\bigcap_k S_{\delta_k}(x_k)$, $y_0\in\bigcap_k S_{\delta_k}(y_k)$, тем самым (1.26) установлено.

Пусть теперь $x_{i_m}\to x$, $x_{j_m}\to y$. Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\{|(B_n(\omega)x, y)-(B_0(\omega)x, y)|>\delta\}\leqslant$$

$$\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left[\mathbf{P}\left\{|(B_n(\omega)x, y)-(B_n(\omega)x_{i_m}, x_{j_m})|>\frac{\delta}{3}\right\}\right]+$$

$$+\mathbf{P}\left\{|(B_0(\omega)x, y)-(B_0(\omega)x_{i_m}, x_{j_m})|>\frac{\delta}{3}\right\}+$$

$$+\mathbf{P}\left\{|(B_n(\omega)x_{i_m}, x_{j_m})-(B_0(\omega)x_{i_m}, x_{j_m})|>\frac{\delta}{3}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_n\left[\mathbf{P}\left\{|(B_n(\omega)(x-x_{i_m}), y)|>\frac{\delta}{6}\right\}+\right.$$

$$\left.+\mathbf{P}\left\{|(B_n(\omega)x_{i_m}, y-x_{j_m})|>\frac{\delta}{6}\right\}\right]\leqslant$$

$$\leqslant 4\sup_n\sup_{|x'|\leqslant 1}\sup_{|y'|\leqslant 1}\mathbf{P}\left\{|B_n(\omega)x', y')|>\right.$$

$$\left.>\frac{\delta}{(|y|+|x_{i_m}|)(|x-x_{i_m}|+|y-y_{j_m}|)}\right\}.$$

Из (1.26) следует, что последнее выражение стремится к нулю при $x-x_{i_m}\to 0$, $y-y_{j_m}\to 0$.

Глава 2

ФУНКЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Симметричные случайные операторы и их самосопряженные расширения

Случайный оператор $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ называется симметричным, если $\mathbf{P}\{(A(\omega)x, y) = (x, A(\omega)y)\} = 1$. Симметричный оператор может принадлежать $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ или $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$.

Рассмотрим симметричный оператор из $\mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$, для которого существует базис $\{e_k\}$ в $\mathbf{X}$ такой, что для всех i с вероятностью 1

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A(\omega)e_i, e_k)^2 < \infty. \tag{2.1}$$

Для этого оператора определены $A(\omega)e_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Выберем числа $\sigma_k \downarrow 0$ таким образом, чтобы с вероятностью 1 сходился ряд

$$\sum_{k,i}(A(\omega)e_k, A(\omega)e_i)^2\sigma_k^2\sigma_i^2 = \rho^2(\omega).$$

Пусть B — симметричный линейный оператор, для которого $Be_k = \sigma_k e_k$. Тогда для x, являющихся линейными комбинациями $\{e_k\}$, получаем

$$|A(\omega)Bx|^2 = \sum_{k,i}(A(\omega)Be_k, A(\omega)Be_i)(x, e_k)(x, e_i) =$$

$$= \sum_{k,l}(A(\omega)e_k, A(\omega)e_i)\sigma_k\sigma_i(x, e_k)(x, e_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{k,i}(A(\omega)e_k, A(\omega)e_i)^2\sigma_k^2\sigma_i^2}\sqrt{\sum_{k,i}(x, e_k)^2(x, e_i)^2} =$$

$$= \rho(\omega)|x|^2.$$

Поэтому $A(\omega)B \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Обозначим через $\mathbf{D}$ область значений оператора B, она плотная в $\mathbf{X}$. Рассмотрим оператор

$$C(\omega) = BA(\omega)B,$$

который является симметричным оператором, область его значений лежит в $\mathbf{D}$. Положим

$$A'(\omega) = B^{-1}C(\omega)B^{-1}.$$

Этот оператор при любом ω является неограниченным симметричным линейным оператором со всюду плотной областью определения $\mathbf{D}$ (она не зависит от ω). При $x, y \in \mathbf{D}$ с вероятностью 1

$$(A'(\omega)x, y) = (A(\omega)x, y).$$

Поскольку симметричный оператор допускает замкнутое расширение (таким для оператора A будет A^*), то он допускает замыкание, очевидно, являющееся симметричным замкнутым оператором.

Построим самосопряженное расширение замкнутых симметричных операторов. Для этого нам понадобится комплексное расширение исходного гильбертова пространства. Обозначим через $\tilde{\mathbf{X}}$ совокупность элементов вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbf{X}$. В $\tilde{\mathbf{X}}$ естественным образом вводится сложение элементов и умножение их на комплексные числа, поэтому $\tilde{\mathbf{X}}$ — линейное пространство. Введем в $\tilde{\mathbf{X}}$ скалярное произведение
$(x + iy, u + iv) = (x, y) + (y, v) + i(y, u) - i(x, v)$,

тогда $\tilde{\mathbf{X}}$ превращается в комплексное гильбертово пространство. Рассмотрим $\mathbf{X}$ как подмножество $\tilde{\mathbf{X}}$. Любой базис $\{e_k\}$ в $\mathbf{X}$ является в то же время и базисом в $\tilde{\mathbf{X}}$. Если $z = x + iy \in \tilde{\mathbf{X}}$, то обозначим $\bar{z} = x - iy$.

Линейные операторы, заданные в $\mathbf{X}$, линейно продолжаются на $\tilde{\mathbf{X}}$. Если оператор A определен на $\mathbf{D}$, то в $\tilde{\mathbf{X}}$ он определяется на $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{D}} = \{x + iy,\ x \in D,\ y \in D\}$ равенством $A(x + iy) = Ax + iAy$. Если A симметричен в $\mathbf{X}$, то он будет симметричным и в $\tilde{\mathbf{X}}$.

Лемма. Пусть A — симметричный замкнутый оператор, определенный в области $\mathbf{D}_A$, плотной в $\tilde{\mathbf{X}}$ и содержащей с каждым $x = x_1 + ix_2$ $\operatorname{Re} x = x_1$. Если $\operatorname{Im}(Ax, y) = 0$ при $\operatorname{Im} x = 0$, $\operatorname{Im} y = 0$, то A имеет самосопряженное расширение.

Доказательство. Положим

$$\mathbf{L}_\pm = \{y\colon\ y = Ax \pm ix\},$$

где $\mathbf{L}_\pm$ — линейные многообразия. Так как

$$(Ax \pm ix,\ Ax \pm ix) = (Ax,\ Ax) + (x,\ x),$$

то из сходимости $z_n = Ax_n \pm ix_n$ к некоторому пределу вытекает сходимость x_n и Ax_n к некоторым пределам, поэтому $z = \lim z_n = Ax_0 \pm ix_0$ в силу замкнутости оператора, так что $\mathbf{L}_\pm$ — замкнутые линейные многообразия. Обозначим через $\mathbf{N}_\pm$ ортогональные дополнения к $\mathbf{L}_\pm$. Если $y \in \mathbf{N}_+$, то

$$(Ax + ix,\ y) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{D}_A.$$

Значит

$$(Ax,\ y) = -i\,(x,\ y), \quad y \in \mathbf{D}_{A^*};$$

$$(x,\ A^*y) = -i\,(x,\ y) = (x,\ iy).$$

Таким образом, A^* определен на $\mathbf{N}_+$ и $A^*y = iy$. Аналогично A^* определен на N_- и $A^*y = -iy$. Покажем, что если $y \in \mathbf{N}_+$, то $\bar{y} \in N_-$. Допустим, что $\operatorname{Im} x = 0$. Тогда, полагая $y = y_1 + iy_2$, получаем

$$\begin{aligned}(Ax - ix,\ \bar{y}) &= (Ax - ix,\ y_1 - iy_2) =\\ &= (Ax,\ y_1) + (x,\ y_2) - i\,(x,\ y_2) + i\,(Ax,\ y_2) =\\ &= \overline{(Ax,\ y_1) + (x,\ y_2) + i\,(x,\ y_1) - i\,(Ax,\ y_2)} =\\ &= \overline{(Ax + ix,\ y_1 + iy_2)} = \overline{(Ax + ix,\ y)} = 0\end{aligned}$$

(в силу предположения $y \in \mathbf{N}_+$). Так как любой $x \in \mathbf{D}_A$ имеет вид $x_1 + ix_2$, где $x_1,\ x_2 \in \mathbf{D}_A$, $\operatorname{Im} x_1 = \operatorname{Im} x_2 = 0$, то $(Ax - ix,\ \bar{y}) = 0$ $\forall\, x \in \mathbf{D}_A$. Точно так, если $y' \in N_-$, то $\bar{y}' \in \mathbf{N}_+$. Отображение

$$Ty = \bar{y}$$

является изометричным отображением $\mathbf{N}_+$ на $\mathbf{N}_-$, так как $(y,\ y) = (\bar{y},\ \bar{y})$. Обозначим через $\mathbf{N}$ множество элементов вида $y + i\bar{y}$, где $y \in \mathbf{N}_+$. Оператор A^* определен на $\mathbf{N}$ и $A^*(y + i\bar{y}) = iy + \bar{y}$. Рассмотрим оператор $\bar{A}$, определенный на $\mathbf{D}_A + \mathbf{N}$ равенством $\bar{A}\,(x + y) = Ax + A^*y$ при

$x \in \mathbf{D}_A$, $y \in \mathbf{N}$ (это определение непротиворечиво, потому что $A = A^*$ на $\mathbf{D}_A$). Покажем, что $\bar{A}$ симметричен. По предположению $(\bar{A}x, y) = (x, \bar{A}y)$ при x, $y \in \mathbf{D}_A$, по определению $(\bar{A}x, y) = (x, A^*y) = (x, \bar{A}y)$ при $x \in \mathbf{D}_A$, $y \in \mathbf{N}$. Проверим, имеет ли место симметричность при y_1, $y_2 \in \mathbf{N}$. Пусть $y_k = u_k + i\bar{u}_k$. Тогда

$$(\bar{A}y_1, y_2) = (\bar{A}(u_1 + i\bar{u}_1), u_2 + i\bar{u}_2) = (iu_1 + \bar{u}_1, u_2 + i\bar{u}_2) =$$
$$= i(u_1, u_2) - i(\bar{u}_1, \bar{u}_2) + (u_1, \bar{u}_2) + (\bar{u}_1, u_2) =$$
$$= (u_1, \bar{u}_2) + (\bar{u}_1, u_2)$$

вследствие изометрии отображения $T(u_1, u_2) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$. Точно так

$$(y_1, \bar{A}y_2) = (u_1 + i\bar{u}_1, iu_2 + \bar{u}_2) = (u_1, \bar{u}_2) + (\bar{u}_1, u_2).$$

Симметричность $\bar{A}$ доказана. Покажем, что $\bar{A}$ замкнут. Пусть $z_n = x_n + y_n + i\bar{y}_n$, где $x_n \in \mathbf{D}_A$, $y_n \in \mathbf{N}_+$. Тогда $\bar{A}z_n = Ax_n + iy_n + \bar{y}_n$. Если существуют пределы z_n и $\bar{A}z_n$, есть предел и у $(\bar{A}z_n + iz_n) = Ax_n + ix_n + 2iy_n$. Поскольку $Ax_n + ix_n \in \mathbf{L}_+$, $2iy_n \in \mathbf{N}_+$, существуют $\lim y_n$ и $\lim (Ax_n + ix_n)$. Следовательно, существуют $\lim x_n$ и $\lim Ax_n$. Если $\lim x_n = x$, то $x \in \mathbf{D}_A$ и $Ax_n \to Ax$, $\lim y_n = y \in \mathbf{L}_+$. Значит, $z = \lim z_n = x + y + i\bar{y} \in \mathbf{D}_A + \mathbf{N}$ и $\bar{A}z = \lim \bar{A}z_n$. Замкнутость оператора $\bar{A}$ установлена. Для того чтобы A был самосопряженным достаточно, чтобы $\bar{\mathbf{L}}_\pm = \{y\colon\ y = \bar{A}x \pm ix\} = \tilde{\mathbf{X}}$. Пусть, например $z \perp \mathbf{L}_+$. Тогда $z \in \mathbf{N}_+$, так как $\bar{\mathbf{L}}_+ \supset \mathbf{L}_+$. Если $x = z + i\bar{z}$, то $x \in N$ и $0 = (\bar{A}x + ix, z) = (iz + \bar{z} + iz - \bar{z}, z) = 2i(z, z)$, $z = 0$. Самосопряженность $\bar{A}$ доказана.

Рассмотрим множество операторов $A'(\omega) = B^{-1}C(\omega)B^{-1}$ и обозначим через $\bar{A}(\omega)$ их самосопряженные расширения, построенные, как было указано. Очевидно, что при x, $y \in \mathbf{D}$ с вероятностью 1

$$(\bar{A}(\omega)x, y) = (A(\omega)x, y).$$

Любой оператор из семейства $\{\bar{A}(\omega)\}$ имеет свою область определения $\mathbf{D}_\omega \in \mathbf{X}$, на которой он является самосопряженным, причем $\bigcap\limits_{\omega} \mathbf{D}_\omega \supset \mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{X}$. Оператор $\bar{A}(\omega)$, обладающий этим свойством, называется самосопряженным случайным оператором, если на $\mathbf{D}$ он стохастически эквивалентен некоторому слабому случайному оператору. Таким образом, для симметричного случайного оператора, удовлетворяющего условию (2.1), построено самосопряженное случайное расширение.

2. Спектральное представление самосопряженного случайного оператора

Пусть $\bar{A}(\omega)$ — самосопряженный случайный оператор. Используя спектральную теорию самосопряженных операторов ([1] гл. 6), убеждаемся, что при любом ω существует семейство проектирующих операторов $\{E_\lambda(\omega), \lambda \in \mathbf{R}\}$, удовлетворяющих условиям:

1) $E_\lambda(\omega) E_\mu(\omega) = E_\lambda(\omega)$ при $\lambda < \mu$;

2) $(E_\lambda(\omega) x, x)$ — неубывающая непрерывная слева функция при $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} (E_\lambda(\omega) x, x) = 0, \quad \lim_{\lambda \to \infty} (E_\lambda(\omega) x, x) = (x, x);$$

3) $E_\lambda(\omega)$ коммутирует с $\bar{A}(\omega)$;

4) при $-\infty \leqslant \lambda < \mu \leqslant +\infty$ и $x \in \mathbf{D}_\omega$

$$|\bar{A}(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega)) x|^2 = \int_\lambda^\mu \sigma^2 d(E_\sigma(\omega) x, x); \quad (2.2)$$

$$(\bar{A}(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega)) x, x) = \int_\lambda^\mu \sigma d(E_\sigma(\omega) x, x); \quad (2.3)$$

5) если $-\infty < \lambda < \mu < +\infty$, то формулы (2.2), (2.3) справедливы для всех $x \in \mathbf{X}$. Покажем, что $E_\lambda(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Вспомним, как строится семейство $\{E_\lambda(\omega), \lambda \in \mathbf{R}\}$. Пусть оператор $U(\omega)$ определен равенством

$$U(\omega) = (iI - \bar{A}(\omega))(iI + \bar{A}(\omega))^{-1}$$

для всех $x \in \tilde{\mathbf{X}}$. $U(\omega)$ является унитарным оператором

$$(U(\omega) x, y) = ((iI - \bar{A}(\omega))(iI + \bar{A}(\omega))^{-1} x, y) =$$
$$= ((iI + \bar{A}(\omega))^{-1} x, (iI + \bar{A}(\omega)) y).$$

При $y \in \mathbf{D}$ $(iI + \bar{A}(\omega)) y = iy + A(\omega) y$ с вероятностью 1, значит $(iI + \bar{A}(\omega)) y$ — $\mathfrak{S}$-измеримая величнна. Покажем, что величина $(iI + A(\omega))^{-1} x$ также $\mathfrak{S}$-измерима. Обозначим через $P(\omega)$ оператор проектирования на $\mathbf{N}_+(\omega) = \{y \in \ni \mathbf{X}\colon (A(\omega)x + ix, y) = 0, \ \forall x \in \mathbf{D}\}$. Поскольку

$$\mathbf{N}_+(\omega) = \bigcap_k \{y \in \tilde{\mathbf{X}}\colon (A(\omega)e_k + ie_k, y) = 0\},$$

то $\mathbf{N}_+(\omega)$ — множество нулей выраження

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A(\omega)e_k + ie_k, y)|^2 \sigma_k^2,$$

где σ_k выбраны так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (|A(\omega)e_k|^2 + 1) < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(A(\omega)e_k + ie_k, y)|^2 \sigma_k^2 = (V(\omega)y, y),$$

где $V(\omega)$ — неотрицательный симметричный оператор из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Так как

$$\operatorname{sp} V(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(A(\omega)e_k + ie_k, e_j)|^2 \sigma_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (|A(\omega)e_k|^2 + 1)\sigma_k^2 < \infty,$$

то $V(\omega)$ при всех ω вполне непрерывен. Нетрудно убедиться, что для всех x

$$P(\omega)x = \lim_{t \to \infty} e^{-tV(\omega)}x.$$

Значит, $P(\omega)$ — $\mathfrak{S}$-измеримый оператор. Пусть $z(\omega) = (iI + \bar{A}(\omega))^{-1}x$. Тогда $z(\omega) = z_1(\omega) + z_2(\omega) + iz_2(\omega)$, где $z_1(\omega) \in \mathbf{D}_\omega$, $z_2(\omega) \in \mathbf{N}_+(\omega)$ ($\mathbf{D}_\omega$ — область определения замыкания $A'(\omega)$), а

$$x = (iI + \bar{A}(\omega))(z_1(\omega) + z_2(\omega) + i\bar{z}_2(\omega)) =$$

$$= \bar{A}(\omega)z_1(\omega) + iz_1(\omega) + 2iz_2(\omega).$$

При этом $\bar{A}(\omega)z_1(\omega) + iz_1(\omega) \in \mathbf{L}_+(\omega)$. Поэтому $z_2(\omega) = \frac{1}{2i}P(\omega)x$. Для $z_1(\omega)$ получаем уравнение

$$\bar{A}(\omega)z_1(\omega) + iz_1(\omega) = x - P(\omega)x.$$

Пусть $\{x_k, k \geqslant 1\}$ — плотное множество в $\mathbf{D}$, $y_k(\omega) = A(\omega)x_k + ix_k$, $y_k(\omega)$ γ-измеримые величины. Множество $\{y_k(\omega), k \geqslant 1\}$

будет плотным в $\mathbf{L}_+(\omega)$. Поскольку $\|(\bar{A}(\omega)+iI)^{-1}\|\leqslant 1$ на $\mathbf{L}_+(\omega)$, то

$$|y_k(\omega)-(x-P(\omega)x)|\geqslant |x_k-z_1(\omega)|. \qquad (2.4)$$

Пусть $z_1^{(n)}(\omega)=x_k$, если $|y_i(\omega)-(x-P(\omega)x)|>\frac{1}{n}$ при $i<k$ и $|y_k(\omega)-(x-P(\omega)x)|\leqslant\frac{1}{n}$. Тогда $|z^{(n)}(\omega)-z_1(\omega)|=|z_1(\omega)-x_k|\leqslant\frac{1}{n}$ в силу (2.4). Очевидно, $z^{(n)}(\omega)$ $\mathfrak{S}$-измерима, значит γ-измеримой величиной будет и $z_1(\omega)$ как предел $z^{(n)}(\omega)$. Таким образом, величина $(iI+A(\omega))^{-1}x$ $\mathfrak{S}$-измерима, значит и $(U(\omega)x,y)$ $\mathfrak{S}$-измеримо при $x\in\tilde{\mathbf{X}}$, $y\in\mathbf{D}$. Используя ограниченность $U(\omega)$ $(\|U(\omega)\|=1)$ и плотность $\mathbf{D}$ в $\tilde{\mathbf{X}}$, убеждаемся, что $(U(\omega)x,y)$ $\mathfrak{S}$-измеримо при всех $x,y\in\mathbf{X}$. Поэтому $U(\omega)\in\mathbf{L}(\Omega,\mathbf{X})$. Значит и $U^k(\omega)$ (степени оператора $U(\omega)$) при всех целых k принадлежат $\mathbf{L}(\Omega,\mathbf{X})$. Поскольку операторы $E_\lambda(\omega)$ определяются как пределы

$$(E_\lambda(\omega)x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k^{(n)}(\lambda)(U^k(\omega)x,y),$$

где $\alpha_k^{(n)}(\lambda)$ не зависят от ω, то $(E_\lambda(\omega)x,y)$ $\mathfrak{S}$-измеримо и, значит, $E_\lambda(\omega)\in\mathbf{L}(\Omega,\mathbf{X})$.

3. Спектральное представление сильного симметричного оператора

Положим, что $A(\omega)\in\mathbf{L}_s(\Omega,\mathbf{X})$ и $A(\omega)$ симметричен, тогда $A(\omega)e_k$ определено для любого базиса $\{e_k\}$. Поэтому в силу доказанного можно указать в $\mathbf{X}$ такое плотное линейное множество $\mathbf{D}$ и семейство проектирующих операторов $\{E_\lambda(\omega),\ \lambda\in\mathbf{R}\}$, принадлежащих $\mathbf{L}(\Omega,\mathbf{X})$, для которых выполняются условия 1), 2), а с вероятностью 1 — соотношения

3′) при $\lambda<\mu$ и $x\in\mathbf{D}$

$$(E_\mu(\omega)-E_\lambda(\omega))A(\omega)x=A(\omega)(E_\mu(\omega)-E_\lambda(\omega))x; \qquad (2.5)$$

4′) при $-\infty\leqslant\lambda<\mu\leqslant+\infty$, $x\in\mathbf{D}$

$$|A(\omega)(E_\mu(\omega)-E_\lambda(\omega))x|^2=\int_\lambda^\mu\sigma^2d(E_\sigma(\omega)x,x); \qquad (2.6)$$

$$(A(\omega)(E_\mu(\omega)-E_\lambda(\omega))x,x)=\int_\lambda^\mu\sigma d(E_\sigma(\omega)x,x) \qquad (2.7)$$

(интеграл берется по множеству $[\lambda, \mu)$). Установим сначала формулу (2.5). Поскольку $A(\omega)x$ — элемент $\mathbf{X}$, а $E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega)$ — ограниченный оператор, то левая часть (2.5) имеет смысл. Оператор $A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))$ следует понимать как слабый оператор

$$(A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, y) = ((E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, A(\omega)y)$$

(здесь правая часть равенства имеет смысл). Выберем в $\mathbf{D}$ базис $\{e_k\}$. Воспользуемся тем, что $\bar{A}(\omega)x = A(\omega)x$ на $\mathbf{D}$ с вероятностью 1. Тогда, обозначая через $\bar{A}(\omega)$ самосопряженное расширение $A(\omega)$ в области $\mathbf{D}$, получаем

$$\begin{aligned}((E_\mu(\omega) &- E_\lambda(\omega))A(\omega)x, e_k) = \\ &= ((E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))\bar{A}(\omega)x, e_k) = (\bar{A}(\omega)(E_\mu(\omega) - \\ &- E_\lambda(\omega))x, e_k) = ((E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, \bar{A}(\omega)e_k) = \\ &= ((E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, A(\omega)e_k) = \\ &= (A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, e_k). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(A(\omega)&(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, e_k)^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}((E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))A(\omega)x, e_k)^2 = \\ &= |(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))A(\omega)x|^2 \leqslant |A(\omega)x|^2 < \infty\end{aligned}$$

и $A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x$ — величина со значениями в $\mathbf{X}$. Из ряда равенств (2.8) вытекает (2.5). Равенства (2.6), (2.7) являются следствиями (2.5), (2.2), (2.3), а также совпадения $A(\omega)$ и $\bar{A}(\omega)$ на $\mathbf{D}$ с вероятностью 1.

Покажем, что формулы (2.5) — (2.7) можно распространить на все $x \in \mathbf{X}$. Поскольку $(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))A(\omega)$ и $A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))$ — стохастически эквивалентные слабые операторы, если первый из них сильный, то второй также будет сильным. Заметим далее, что при $x \in \mathbf{D}$

$$|A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x| \leqslant [|\lambda| \vee |\mu|]|x|$$

в силу (2.6), (2.2). Так как обе части равенств (2.6), (2.7) при $-\infty < \lambda < \mu < +\infty$ непрерывны по x, $A(\omega)(E_\mu(\omega)) - E_\lambda(\omega)) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, то (2.6), (2.7) выполняются для всех

$x \in \mathbf{X}$ с вероятностью 1. Поскольку

$$\int_{\lambda}^{\mu} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x,\,x) = |\,A(\omega)\,(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))\,x\,|^2 =$$

$$= |\,(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))\,A(\omega)\,x\,|^2 \leqslant |\,A(\omega)\,x\,|^2,$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x,\,x) < \infty\right\} = 1.$$

Покажем теперь, что формула (2.7) справедлива и в том случае, когда $-\infty \leqslant \lambda < \mu \leqslant +\infty$. Достаточно рассмотреть случаи: а) $\lambda = 0$, $\mu = +\infty$; б) $\lambda = -\infty$, $\mu = 0$, но так как они совершенно аналогичны, остановимся лишь на случае б). Запишем

$$|\,A(\omega)\,(E_0(\omega) - E_{-n}(\omega))\,x\,|^2 = \int_{-n}^{0} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x,\,x).$$

В силу условия 1)

$$|\,(E_0(\omega) - E_{-n}(\omega))\,A(\omega)\,x\,|^2 =$$

$$= ((E_0(\omega) - E_{-n}(\omega))\,A(\omega)\,x,\ (E_0(\omega) - E_{-n}(\omega))\,A(\omega)\,x) =$$

$$= |\,E_0(\omega)\,A(\omega)\,x\,|^2 - |\,E_{-n}(\omega)\,A(\omega)\,x\,|^2.$$

Поэтому для всех n

$$|\,E_0(\omega)\,A(\omega)\,x\,|^2 \geqslant \int_{-n}^{0} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x,\,x)$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|\,E_0(\omega)\,A(\omega)\,x\,|^2 = |\,A(\omega)\,E_0(\omega)\,x\,|^2 \geqslant \int_{-n}^{0} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x,\,x).$$

Пусть $x_n \in \mathbf{D}$. Используя ранее доказанное, получаем

$$|\,A(\omega)\,E_0(\omega)\,x_n\,|^2 = \int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d\,(E_\sigma(\omega)\,x_n,\,x_n). \qquad (2.9)$$

При $x_n \to x$, $A(\omega)\,x_n \to A(\omega)\,x$ по вероятности. Поэтому

$$|\,A(\omega)\,E_0(\omega)\,x_n - A(\omega)\,E_0(\omega)\,x\,|^2 =$$

$$= |\,E_0(\omega)\,(A(\omega)\,x_n - A(\omega)\,x)\,|^2 \leqslant |\,A(\omega)\,x_n - A(\omega)\,x_0\,|^2.$$

Значит и $A(\omega) E_0(\omega) x_n \to A(\omega) E_0(\omega) x$ по вероятности. Используя неравенство

$$|d(E_\sigma(\omega) x, x) - d(E_\sigma(\omega) y, y)| \leqslant$$
$$\leqslant |d(E_\sigma(\omega)(x-y), x-y)| + 2|d(E_\sigma(\omega) y, x-y)| \leqslant$$
$$\leqslant d(E_\sigma(\omega)(x-y), x-y) + 2\varepsilon d(E_\sigma(\omega) y, y) +$$
$$+ \frac{2}{\varepsilon} d(E_\sigma(\omega)(x-y), x-y),$$

получаем

$$\left|\int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d(E_\sigma(\omega) x_n, x_n) - \int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d(E_\sigma(\omega) x, x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) \int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d(E_\sigma(\omega)(x_n - x), x_n - x) +$$
$$+ 2\varepsilon \int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d(E_\sigma(\omega) x, x) \leqslant \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) |A(\omega) x_n - A(\omega) x| +$$
$$+ 2\varepsilon |A(\omega) x|.$$

Правая часть в силу произвольности $\varepsilon > 0$ сходится по вероятности к нулю. Поэтому правая часть (2.9) сходится по вероятности к $\int_{-\infty}^{0} \sigma^2 d(E_\sigma(\omega) x, x)$, а левая часть — к $|A(\omega) \times$ $\times E_0(\omega) x|$. Формула (2.6) установлена для всех λ и $\mu \in [-\infty, \infty]$.

Аналогично формула (2.7) распространяется на $\lambda = -\infty$ или $\mu = +\infty$. При $x \in \mathbf{D}$

$$(A(\omega) E_0(\omega) x, y) = \int_{-\infty}^{0} \sigma d(E_\sigma(\omega) x, x). \tag{2.10}$$

Пусть $x_n \in \mathbf{D}$, $x_n \to x$. Тогда

$$|(A(\omega) E_0(\omega) x_n, x_n) - (A(\omega) E_0(\omega) x, x)| \leqslant$$
$$\leqslant |E_0(\omega) A(\omega) x_n - E_0(\omega) A(\omega) x| |x_n| +$$
$$+ |E_0(\omega) A(\omega) x| |x - x_n| \to 0,$$
$$\left|\int_{-\infty}^{0} \sigma d(E_\sigma(\omega) x, x) - \int_{-\infty}^{0} \sigma d(E_\sigma(\omega) x_n, x_n)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{0} \frac{1+\sigma^2}{2} |d(E_\sigma(\omega) x, x) - d(E_\sigma(\omega) x_n, x_n)| \to 0$$

по вероятности при $n \to \infty$. Подставляя в (2.10) x_n вместо x и переходя к пределу, убеждаемся, что (2.10) справедливо при всех $x \in \mathbf{X}$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Если* $A(\omega)$ — *симметричный оператор из* $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, *то существует семейство проектирующих операторов* $\{E_\lambda(\omega), \lambda \in \mathbf{R}\}$ *из* $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, *удовлетворяющие условиям* 1) *и* 2), *для которых выполнены формулы* (2.5) — (2.7) *для всех* $x \in \mathbf{X}$ и $-\infty \leqslant \lambda < \mu \leqslant +\infty$.

Замечание 1. Поскольку

$$|d(E_\sigma(\omega)x, y)| \leqslant \frac{1}{2}[d(E_\sigma(\omega)x, x) + d(E_\sigma(\omega)y, y)],$$

то определен интеграл

$$\int_\lambda^\mu \sigma d(E_\sigma(\omega)x, y) = (A(\omega)(E_\mu(\omega) - E_\lambda(\omega))x, y).$$

Замечание 2. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma dE_\sigma(\omega)x$$

определен для всех $x \in \mathbf{X}$ и почти всех ω, при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma dE_\sigma(\omega)x = A(\omega)x. \qquad (2.11)$$

§ 5. УРАВНЕНИЯ С СИММЕТРИЧНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Эволюционные уравнения

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dx_t(\omega)}{dt} = A(\omega)x_t(\omega), \quad t \geqslant 0, \quad x_0 \in \mathbf{X}, \qquad (2.12)$$

где $x_t(\omega)$ — искомая функция со значениями в $\mathbf{X}(\Omega)$, $A(\omega)$ — симметричный оператор из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Уравнение (2.12) следует понимать в слабом смысле, т. е. необходимо найти такую функцию $x_t(\omega)$, чтобы для всех x выполнялось равенство

$$\frac{d}{dt}(x_t(\omega), x) = (A(\omega)x, x_t(\omega)), \quad t > 0;$$

$$(x_0(\omega), x) = (x_0, x). \qquad (2.13)$$

Используем спектральное семейство $E_\lambda(\omega)$, существование которого утверждает теорема § 4. Предположим, что при $t > 0$ выражение конечно

$$\gamma_t(\omega, x) = \int e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x). \tag{2.14}$$

Если, кроме того,

$$\mathbf{P}\left\{\int |\lambda| e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x) < \infty\right\} = 1, \tag{2.15}$$

то $\gamma_t(\omega, x)$ дифференцируемо по t и

$$\frac{d}{dt}\gamma_t(\omega, x) = \int \lambda e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x).$$

Пусть $y_t(\omega, x)$ определяется из равенства

$$(y_t(\omega, x), z) = \int e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, z). \tag{2.16}$$

Тогда

$$|y_t(\omega, x)|^2 = \int e^{2\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x)$$

и в силу (2.14) $y_t(\omega)$ с вероятностью 1 является случайной величиной со значениями из $\mathbf{X}$. Далее

$$(y_t(\omega, x), A(\omega) x) = \int \lambda e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x);$$

$$(y_t(\omega, x), x) = \int e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega) x, x).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(y_t(\omega, x), x) = (y_t(\omega, x), A(\omega) x).$$

Но тогда для всех $x_0 \in \mathbf{X}$, $x \in \mathbf{X}$

$$\frac{d}{dt}(y_t(\omega, x_0), x) = (y_t(\omega, x_0), A(\omega) x).$$

Таким образом, при выполнении условия (2.15) при $x = x_0$ решение уравнения (2.12) задается формулой

$$x_t(\omega) = \int e^{\lambda t} dE_\lambda(\omega) x_0. \tag{2.17}$$

Заметим, что для выполнения (2.15) достаточно, чтобы при некотором $\gamma(\omega)$ выполнялось неравенство

$$(A(\omega) x, x) \leqslant \gamma(\omega)(x, x), \tag{2.18}$$

так как в этом случае $\int\limits_{\gamma(\omega)}^{\infty} d(E_\lambda(\omega)x, x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{X}$.

Значит

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda| e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega)x, x) = \int\limits_{-\infty}^{\gamma(\omega)} |\lambda| e^{\lambda t} d(E_\lambda(\omega)x, x),$$

а функция $|\lambda| e^{\lambda t}$ $(t > 0)$ на $(-\infty, \gamma)$ ограничена. Покажем, что при выполнении условия (2.18) решение уравнения (2.12) удовлетворяющее условию

$$|x_t(\omega)| \leqslant \alpha(\omega) e^{t\gamma^*(\omega)},$$

где $\gamma^*(\omega)$ —некоторая $\mathfrak{S}$-измеримая величина, единственно и, следовательно, задается равенством (2.17). Доказательство единственности достаточно провести для случая $x_0 = 0$. Пусть $\lambda > 0$ и $\Gamma_\lambda = \{\omega\colon\ \gamma^*(\omega) + \gamma(\omega) < \lambda\}$. Тогда при $\omega \in \Gamma_\lambda$, $x \in \mathbf{X}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt}(x_t(\omega), x)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(A(\omega)x, x_t(\omega))\,dt. \tag{2.19}$$

Обозначим

$$z_\lambda(\omega) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} x_t(\omega)\,dt. \tag{2.20}$$

Тогда, интегрируя левую часть (2.19) по частям, находим

$$\lambda(z_\lambda(\omega), x) = (A(\omega)x, z_\lambda(\omega)). \tag{2.21}$$

Рассмотрим вместо $A(\omega)$ самосопряженный случайный оператор $\bar{A}(\omega)$, построенный в § 4. Из (2.21) вытекает, что при $x \in \mathbf{D}$

$$\lambda(z_\lambda(\omega), x) = (\bar{A}(\omega)x, z_\lambda(\omega)).$$

Значит на $z_\lambda(\omega)$ оператор $\bar{A}(\omega)$ определен и $\bar{A}(\omega) z_\lambda(\omega) = \lambda z_\lambda(\omega)$. Поскольку

$$(\bar{A}(\omega)x, x) = \int\limits_{-\infty}^{\gamma(\omega)} d(E_\sigma(\omega)x, x) \leqslant \gamma(\omega)(x, x),$$

то

$$(\bar{A}(\omega) z_\lambda(\omega), z_\lambda(\omega)) \leqslant \gamma(\omega) |z_\lambda(\omega)|^2$$

при $\omega \in \Gamma_\lambda$. Но $(\bar{A}(\omega) z_\lambda(\omega), z_\lambda(\omega)) = \lambda |z_\lambda(\omega)|^2$ и значит при $\omega \in \Gamma_\lambda$

$$(\gamma(\omega) - \lambda) |z_\lambda(\omega)|^2 \leqslant 0,$$

что возможно лишь при $|z_\lambda(\omega)| = 0$. Так как $\Gamma_\mu \supset \Gamma_\lambda$ при $\lambda < \mu$, то $z_\mu(\omega) = 0$ на Γ_λ при $\mu > \lambda$. Отсюда вследствие (2.20) вытекает, что $x_t(\omega) = 0$ на Γ_λ, каково бы ни было λ. Поскольку $\Omega = \bigcup_\lambda \Gamma_\lambda$, то $x_t(\omega) = 0$ на Ω. Единственность решения доказана.

2. Уравнения типа Шредингера

Пусть $A(\omega)$ такой же, как и в предыдущем пункте. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx_t(\omega)}{dt} = i\tilde{A}(\omega)\,x_t(\omega), \quad t \geqslant 0, \quad x_0(\omega) = x_0, \qquad (2.22)$$

где $x_t(\omega)$ принимает значения из $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{A}(\omega)$ — естественное продолжение $A(\omega)$ на $\tilde{\mathbf{X}}$. Как и раньше, уравнение (2.22) следует понимать в слабом смысле, т. е. для всех $x \in \tilde{\mathbf{X}}$ выполняется равенство

$$\frac{d(x_t(\omega), x)}{dt} = i(x_t(\omega), \tilde{A}(\omega)x), \quad t > 0, \quad (x_0(\omega), x) = (x_0, x). \qquad (2.23)$$

Можно убедиться, что решение имеет вид

$$x_t(\omega) = \int e^{it\lambda} dE_\lambda(\omega)\,x_0,$$

причем никаких дополнительных ограничений типа (2.15) накладывать не нужно, поскольку

$$\int \lambda e^{it\lambda} d(E_\lambda(\omega)x, x)$$

всегда абсолютно сходится вместе с

$$\int \lambda^2 d(E_\lambda(\omega)x, x).$$

Заметим далее, что

$$|x_t(\omega)|^2 = \left(\int e^{it\lambda} d\,E_\lambda(\omega)\,x_0, \int e^{it\lambda} dE_\lambda(\omega)\,x_0\right) =$$

$$= \int e^{it\lambda}\overline{e^{it\lambda}} d(E_\lambda(\omega)x_0, x_0) = \int d(E_\lambda(\omega)x_0, x_0) = |x_0|^2.$$

Таким образом, оператор

$$U_t(\omega)\,x_0 = \int e^{it\lambda} dE_\lambda(\omega)\,x_0$$

принадлежит $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ с вероятностью 1 и является унитарным.

3. Спектральные моментные функции

Построенные в предыдущем пункте операторы $U_t(\omega)$ могут быть использованы для вычисления спектральных моментных функций:

$$\mathfrak{M}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}(C_1, \ldots, C_k) =$$
$$= \mathbf{M}\, \mathrm{sp}\,(E_{\lambda_1}(\omega) C_1) \ldots \mathrm{sp}\,(E_{\lambda_k}(\omega) C_k), \qquad (2.24)$$

где $C_1, \ldots, C_k \in \mathbf{L}_0(\mathbf{X})$. В частности, моментная функция первого порядка определяется оператором

$$\mathscr{E}(\lambda) = \mathbf{M} E_\lambda(\omega).$$

Существование математического ожидания здесь (и в формуле (2.24)) вытекает из ограниченности $E_\lambda(\omega)$. Зная оператор $\mathscr{E}(\lambda)$, можно вычислять некоторые моментные функции решения уравнения (2.12), например

$$\mathbf{M} x_t(\omega) = \int e^{\lambda t} d\mathscr{E}(\lambda)\, x_0;$$

$$\mathbf{M}\, |x_t(\omega)|^2 = \int e^{2\lambda t} d\,(\mathscr{E}(\lambda)\, x_0, x_0);$$

$$\mathbf{M}\,(x_t(\omega),\ x_s(\omega)) = \int e^{(t+s)\lambda} d\,(\mathscr{E}(\lambda)\, x_0,\ x_0).$$

Поскольку $\mathscr{E}(\lambda)$ — симметричный оператор, то для вычисления этой функции достаточно знать $(\mathscr{E}(\lambda)\, x, x)$ для любого x. Это неубывающая функция. Ее преобразование Фурье — Стилтьеса будет

$$\int e^{i\lambda t} d\,(\mathscr{E}(\lambda)\, x,\ x) = \mathbf{M}\,(U_t(\omega)\, x,\ x). \qquad (2.25)$$

Таким образом, для вычисления $\mathscr{E}(\lambda)$ достаточно вычислить левую часть (2.25). Если оператор $A(\omega)$ в уравнении (2.22) ограничен неслучайной постоянной, то

$$\mathbf{M}\,(U_t(\omega)\, x,\ x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mathbf{M}\,(A^n(\omega)\, x,\ x).$$

В общем случае можно использовать следующее утверждение.

Лемма. Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ симметричен, $A_m(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, $\|A_m(\omega)\| < m$, $A_m(\omega)$ симметричны и $A_m(\omega)\, x \to A(\omega)\, x$ по вероятности $\forall\, x \in \mathbf{X}$. Обозначим через $U_t^{(m)}(\omega)\, x_0$ решение уравнения (2.22), если $A_m(\omega)$ заменить $A(\omega)$, тогда $U_t^{(m)}(\omega)\, x_0 \to U_t(\omega)\, x_0$ по вероятности.

Доказательство. Заметим, что

$$|U_t^{(m)}(\omega)x_0 - U_{t+h}^{(m)}(\omega)x_0|^2 = |U_h^{(m)}(\omega)x_0 - x_0|^2 =$$
$$= 2|x_0|^2 - 2\operatorname{Re}(U_h^{(m)}(\omega)x_0, x_0) =$$
$$= 2\int(1-\cos h\lambda)\,d(E_\lambda^{(m)}(\omega)x_0, x_0) \leqslant$$
$$\leqslant h^2\int\lambda^2 d(E_\lambda^{(m)}(\omega)x_0, x_0) = h^2|A_m(\omega)x_0|^2,$$

где $E_\lambda^{(m)}(\omega)$ — спектральное семейство для $A_m(\omega)$. Значит функции $U_t^{(m)}(\omega)x_0$ равномерно непрерывны по t относительно m. Далее при $\gamma > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t}U_t^{(m)}(\omega)x_0 dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t + itA_m(\omega)}x_0 dt = (\gamma I - iA_m(\omega))^{-1}x_0.$$

Из унитарности $U_t^{(m)}(\omega)$ вытекает, что

$$\|(\gamma I - iA_m(\omega))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\gamma}. \qquad (2.26).$$

Точно так

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t}U_t(\omega)\,dt = (\gamma I - i\bar{A}(\omega))^{-1}$$

(здесь $\bar{A}(\omega)$ — самосопряженное расширение $A(\omega)$) и $\|(\gamma I - iA(\omega))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\gamma}$. Поэтому для доказательства сходимости по вероятности

$$(\gamma I - iA_m(\omega))^{-1}x \to (\gamma I - i\bar{A}(\omega))^{-1}x$$

для всех $x \in \mathbf{X}$ достаточно установить ее на некотором плотном множестве. Множество y представимых в виде

$$y = (\gamma I - i\bar{A}(\omega))\,x,$$

где $x \in \mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{X}$ (это установлено в § 4 при $\gamma = 1$, для любого $\gamma > 0$ достаточно рассмотреть оператор $\frac{1}{\gamma}\bar{A}(\omega)$), отсюда получаем

$$(\gamma I - iA_m(\omega))^{-1}y - (\gamma I - i\bar{A}(\omega))^{-1}y =$$
$$= i(\gamma I - iA_m(\omega))^{-1}[\bar{A}(\omega)x - A_m(\omega)x].$$

Это выражение стремится к нулю в результате совпадения $A(\omega)x$ и $A(\omega)x$ при $x \in \mathbf{D}$, условия леммы и неравенства

(2.26). Таким образом, для равномерно непрерывных функций $U_t^{(m)}(\omega)\, x$ сходятся их преобразования Лапласа, откуда вытекает и сходимость самих функций. ■

Замечание. Если $A_m(\omega)$ удовлетворяют условиям леммы, то спектральные моментные функции высших порядков могут быть вычислены с помощью своего преобразования Фурье:

$$\int \ldots \int d_{\lambda_1}, \ldots, d_{\lambda_k} \mathfrak{M}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}(C_1, \ldots, C_k)\, e^{i\lambda_1 t_1 + \cdots + i\lambda_k t_k} =$$

$$= \mathbf{M}\,(\mathrm{sp}\, U_{t_1}(\omega)\, C_1) \ \ldots \ (\mathrm{sp}\, U_{t_k}(\omega)\, C_k), \qquad (2.27)$$

где правая часть определяется как предел

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}\,(\mathrm{sp}\, U_{t_1}^{(m)}(\omega)\, C_1) \ \ldots \ (\mathrm{sp}\, U_{t_k}^{(m)}(\omega)\, C_k),$$

а для $U_t^{(m)}(\omega)$ можно воспользоваться выражением

$$U_t^{(m)}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} (A_m(\omega))^n.$$

4. Уравнение типа Фредгольма

Рассмотрим уравнение

$$x(\omega) = x + \alpha A(\omega)\, x(\omega), \qquad (2.28)$$

где $A(\omega)$ — симметричный случайный оператор из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $x \in \mathbf{X}$, $x(\omega)$ — искомая величина со значениями в $\mathbf{X}(\Omega)$, α — некоторое вещественное число. Это уравнение можно рассматривать и при комплексных α, в этом случае $x(\omega)$ выбирается в $\tilde{\mathbf{X}}(\Omega)$, а под $A(\omega)$ понимается естественное продолжение оператора с $\mathbf{X}$ на $\tilde{\mathbf{X}}$. Уравнение (2.28) следует понимать в слабом смысле:

$$(x(\omega), y) = (x, y) + \alpha\,(x(\omega), A(\omega)\, y), \quad \forall\, y \in \mathbf{X}. \quad (2.29)$$

Используя спектральное представление (2.29), уравнение сводится к виду

$$(x(\omega), y) = (x, y) + \alpha \int \lambda\, (dE_\lambda(\omega)\, y, x(\omega));$$

$$(x, y) = \int (\alpha\lambda - 1)\, d\,(E_\lambda(\omega)\, y, x(\omega)) =$$

$$= \int (\alpha\lambda - 1)\, d\,(E_\lambda(\omega)\, x(\omega), y),$$

откуда

$$
\begin{aligned}
x &= \int (\alpha\lambda - 1)\, dE_\lambda(\omega)\, x(\omega), \\
x(\omega) &= \int \frac{1}{\alpha\lambda - 1}\, dE_\lambda(\omega)\, x.
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Если интеграл справа существует, то легко проверить, что действительно $x(\omega)$, заданное формулой (2.30), будет решением (2.29). Когда решение (2.29) будет единственно? Рассмотрим (2.29) при $x = 0$. Если $x(\omega)$ такое решение, то

$$\frac{1}{\alpha}(x(\omega),\ y) = (x(\omega),\ A(\omega)\, y)$$

и значит $\frac{1}{\alpha}$ является собственным значением самосопряженного расширения $\tilde{A}(\omega)$ оператора $A(\omega)$. Если α — комплексное число, $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, то это невозможно. Пусть α вещественно. Обозначим через $\lambda_i(\omega)$ точки дискретного спектра $\tilde{A}(\omega)$,

$$\Gamma_\alpha = \left\{\omega:\ \text{при некотором } i\ \ \alpha = \frac{1}{\lambda_i(\omega)}\right\}.$$

Может быть не более чем счетное число точек α, для которых $\mathbf{P}\{\Gamma_\alpha\} > 0$. Действительно, пусть α таково, что $(\mathscr{E}(\lambda)\, x, x)$, где $\mathscr{E}(\lambda) = \mathbf{M}E_\lambda(\omega)$ непрерывна по λ в точке $1/\alpha$ для всех x из некоторого счетного плотного в $\mathbf{X}$ множества. Тогда и

$$\mathbf{M}\{(E_{\lambda_1}(\omega)\, x,\ x) - (E_{\lambda_2}(\omega)\, x,\ x)\} = (\mathscr{E}(\lambda_1)\, x, x)\, (\mathscr{E}(\lambda_2)\, x,\ x) \to 0$$

при $\lambda_1 \downarrow 1/\alpha$, $\lambda_2 \uparrow 1/\alpha$. Значит, и $(E_{\lambda_1}(\omega)\, x, x) - (E_{\lambda_2}(\omega)\, x, x) \to 0$ при $\lambda_1 \downarrow 1/\alpha$, $\lambda_2 \uparrow 1/\alpha$, так как $(E_\lambda(\omega)\, x,\ x)$ — неубывающая функция. Если $\omega \in \Gamma_\alpha$, то существует такое $z(\omega)$, что

$$(E_{\lambda_1}(\omega)\, z(\omega),\ z(\omega)) - (E_{\lambda_2}(\omega)\, z(\omega),\ z(\omega)) \downarrow (z(\omega),\ z(\omega)) \tag{2.31}$$

при $\lambda_1 \downarrow 1/\alpha$, $\lambda_2 \uparrow 1/\alpha$. Если x выбрано так, что $\mathbf{P}\{|x - z(\omega)| < \varepsilon\} > 0$, x таково, что $(E_\lambda(\omega)\, x,\ x)$ непрерывно в точке $1/\alpha$, $|x| = 1$, то, так как $\mathbf{P}\{|(E_\lambda(\omega)\, x, x) - (E_\lambda(\omega) \times z(\omega),\ z(\omega))| \leqslant 2\varepsilon\} > 0$, скачок $E_\lambda(\omega)\, z(\omega)$ в точке $1/\alpha$ не превосходит 4ε, что противоречит (2.31) для $\varepsilon < 1/4$. Заметим, что точки непрерывности $(\mathscr{E}(\lambda)\ x,\ x)$ для всех x из некоторого счетного плотного множества совпадают с точками слабой непрерывности по λ операторной функции $\mathscr{E}(\lambda)$. Таким образом, уравнение (2.28) имеет единственное решение для всех α, для которых $1/\alpha$ является точкой слабой непрерывности $\mathscr{E}(\lambda)$ (т. е. $(\mathscr{E}(\lambda)\ x,\ y)$ непрерывно при всех $x,\ y$). Это решение, если оно существует, имеет вид (2.30).

Для того чтобы правая часть (2.30) была определена как величина из $\mathbf{X}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int \left(\frac{1}{\alpha\lambda - 1}\right)^2 d\,(E_\lambda(\omega)\,x,\ x) < \infty. \tag{2.32}$$

Замечание. Неравенство (2.32) выполнено, если

$$\int \left(\frac{1}{\alpha\lambda - 1}\right)^2 d\,(\mathscr{E}(\lambda)\,x,\ x) < \infty. \tag{2.33}$$

Укажем одно условие выполнимости (2.33). Введем спектральную плотность:

$$\rho_\lambda(x) = \frac{d}{d\lambda}(\mathscr{E}(\lambda)\,x,\ x).$$

Допустим, что $\rho_\lambda(x)$ дважды непрерывно дифференцируема по λ. Тогда для выполнения (2.33) необходимо и достаточно, чтобы $\rho_{1/\alpha}(x) = 0$.

§ 6. УРАВНЕНИЯ С ПОЛУОГРАНИЧЕННЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

1. Неотрицательные замкнутые случайные операторы

При решении как эволюционных, так и уравнений типа Фредгольма результаты, полученные в § 5 для симметричных случайных операторов, можно распространить на полуограниченные случайные операторы. Случайный оператор $A(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$ называется полуограниченным, если существует такая $\mathfrak{S}$-измеримая величина $\gamma(\omega)$, что с вероятностью 1 выполнено неравенство

$$\forall x \qquad (A(\omega)\,x,\ x) \leqslant \gamma(\omega)\,(x,\ x). \tag{2.34}$$

Рассматривая вместо оператора $A(\omega)$ оператор $\gamma(\omega)I - A(\omega)$, всегда можно свести изучение полуограниченного оператора к изучению неотрицательного.

В этом параграфе рассмотрим полуограниченные или неотрицательные операторы, для которых в некотором базисе $\{e_k\}$ сходятся ряды

$$\forall i \quad \sum_{k=1}^{\infty}(A(\omega)\,e_i,\ e_k)^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty}(A(\omega)\,e_k,\ e_i)^2 < \infty. \tag{2.35}$$

В этом случае можно определить случайные величины

$$A(\omega) e_l = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega) e_l, e_k) e_k, \quad A^*(\omega) e_l = \sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega) e_k, e_l) e_k. \tag{2.36}$$

Далее пусть $\sigma_l > 0$ таковы, что

$$\sum_{l,k} (A(\omega) e_l, A(\omega) e_k)^2 \sigma_l^2 \sigma_k^2 < \infty;$$

$$\sum_{l,k} (A^*(\omega) e_l, A^*(\omega) e_k)^2 \sigma_l^2 \sigma_k^2 < \infty.$$

Если $B \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ и $Be_k = \sigma_k e_k$, то операторы $C(\omega) = BA(\omega) B$, $C^*(\omega) = BA^*(\omega) B$ стохастически эквивалентны операторам из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ (доказательство такое, как в п. 1 § 4). Эти операторы взаимно сопряжены и область их значений при всех ω содержится в $\mathbf{D}$ области значений оператора B. Под $C(\omega)$ и $C^*(\omega)$ понимаем именно операторы из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Положим

$$\tilde{A}(\omega) = B^{-1} C(\omega) B^{-1}, \quad \tilde{A}^*(\omega) = B^{-1} C^*(\omega) B^{-1}.$$

Эти операторы при любом ω определены на $\mathbf{D}$, при этом для $x \in \mathbf{D}$, $y \in \mathbf{X}$

$$(\tilde{A}(\omega) x, y) = (A(\omega) x, y), \quad (\tilde{A}^*(\omega) x, y) = (A^*(\omega) x, y) = \\ = (x, A(\omega) y)$$

с вероятностью 1. Операторы $\tilde{A}(\omega)$ и $\tilde{A}^*(\omega)$ допускают замыкание с множества $\mathbf{D}$. Это вытекает из следующего предложения.

Лемма 1. Пусть C — ограниченный оператор, C^* его сопряженный, область значений C и C^* лежит в $\mathbf{D}$, а B — симметричный оператор с областью значений $\mathbf{D}$. Тогда оператор $B^{-1}CB^{-1}$, определенный на $\mathbf{D}$, допускает замыкание.

Доказательство. Так как при $x, y \in \mathbf{D}$

$$(B^{-1}CB^{-1}x, y) = (x, B^{-1}C^*B^{-1}y),$$

то оператор $B^{-1}CB^{-1}$ совпадает с замкнутым оператором $[B^{-1}C^*B^{-1}]^*$ (сопряженным с $B^{-1}C^*B^{-1}$) и, следовательно, допускает замыкание. ∎

Обозначим замыкания $\tilde{A}(\omega)$ и $\tilde{A}^*(\omega)$ с $\mathbf{D}$ соответственно через $\hat{A}(\omega)$ и $\hat{A}^*(\omega)$. Они будут совпадать с $\tilde{A}(\omega)$ и $\tilde{A}^*(\omega)$

на $\mathbf{D}$. Тогда области определения $\hat{A}(\omega)$ и $\hat{A}^*(\omega)$ будут зависеть от ω. Следует иметь в виду, что операторы $\hat{A}(\omega)$ и $\hat{A}^*(\omega)$ не будут сопряженными при любом ω.

Предположим, что оператор $A(\omega)$ неотрицателен. Тогда оператор $\tilde{A}(\omega)$ также неотрицателен на $\mathbf{D}$; поскольку

$$(\tilde{A}(\omega)x, x) = (\tilde{A}^*(\omega)x, x),$$

то неотрицательным будет оператор $\tilde{A}^*(\omega)$. Поэтому операторы $\hat{A}(\omega)$ и $\hat{A}^*(\omega)$, как замыкания неотрицательных, будут неотрицательными в своих областях определения. Теперь построим резольвенту для оператора $\hat{A}(\omega)$, для этого сначала рассмотрим неслучайные операторы.

2. Резольвента неотрицательного оператора

Пусть A — неслучайный замкнутый оператор с областью определения $\mathbf{D}$, плотной в $\mathbf{X}$, для которого при $x \in \mathbf{D}$ $(Ax, x) \geqslant 0$. Обозначим через $\mathbf{L}$ область значений оператора $A + I$, где $\mathbf{L}$ — линейное многообразие. Если $x_n \in \mathbf{L}$, то $x_n = y_n + Ay_n$. При этом

$$|x_n|^2 = (y_n + Ay_n, y_n + Ay_n) =$$
$$= |y_n|^2 + 2(Ay_n, y_n) + |Ay_n|^2 \geqslant |y_n|^2 + |Ay_n|^2.$$

Из сходимости x_n к некоторому пределу x_0 вытекает, что $y_n \to y_0$, $Ay_n \to z_0$, и в результате замкнутости оператора $z_0 = Ay_0$ и $x_0 = y_0 + Ay_0$. Таким образом, $\mathbf{L}$ замкнуто. Допустим, что оператор A максимальный, если $\mathbf{L} = \mathbf{X}$. Покажем, что в этом случае для всех $\lambda > 0$ область значений оператора $\lambda I + A$ совпадает с $\mathbf{X}$. Поскольку

$$((\lambda I + A)x, (\lambda I + A)x) = \lambda^2 |x|^2 + 2\lambda(Ax, x) + |Ax|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \lambda^2 |x|^2,$$

то отсюда вытекает, что для всех $\lambda > 0$ определен оператор $R_\lambda = (\lambda I + A)^{-1}$, для которого $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Этот оператор будем называть резольвентой оператора A. По предположению, оператор R_1 определен на $\mathbf{X}$. Пусть $|\lambda - 1| < 1$, тогда уравнение

$$(\lambda I + A)x = y \tag{2.37}$$

имеет решение для всех $y \in \mathbf{X}$. Действительно, полагая, что $x = R_1 z$, получаем

$$(\lambda - 1) R_1 z + z = y;$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n R_1^n y$$

(ряд сходится ввиду того, что $\| (1 - \lambda) R_1 \| \leqslant | 1 - \lambda | < 1$). Последняя формула дает выражение для резольвенты при $| 1 - \lambda | < 1$

$$R_\lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n R_1^{n+1} y.$$

Аналогично можем установить, что в том случае, когда R_{λ_1} определена на $\mathbf{X}$, то при $| \lambda - \lambda_1 | < \lambda_1$, справедлива формула

$$R_\lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1 - \lambda)^n R_{\lambda_1}^{n+1} y \qquad (2.38)$$

$\left(\text{ряд сходится, так как } \| (\lambda_1 - \lambda) R_{\lambda_1} \| \leqslant \frac{|\lambda_1 - \lambda|}{\lambda_1} < 1\right)$. Соотношение (2.38) позволяет определить резольвенту для всех $\lambda > 0$ (при этом автоматически устанавливается разрешимость уравнения (2.37) для всех $\lambda > 0$). Более того, с помощью соотношения (2.38) можно установить существование резольвенты для всех комплексных λ, для которых $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

При всех положительных λ оператор R_λ будет также неотрицательным. Действительно, пусть $x = \lambda y + Ay$ (в таком виде по доказанному представимы все $x \in \mathbf{X}$), тогда

$$(R_\lambda x, x) = (R_\lambda (\lambda y + Ay), \lambda y + Ay) = (y, \lambda y + Ay) = \\ = \lambda | y |^2 + (y, Ay) \geqslant 0.$$

Замечание. В этом пункте резольвентой оператора назван оператор $(\lambda I + A)^{-1}$, тогда как по общепринятой терминологии это резольвента оператора $-A$. Однако для неотрицательных операторов такое определение более естественно. Во избежание путаницы всегда будет приводиться формула, определяющая резольвенту.

Теперь покажем, что любой замкнутый неотрицательный оператор можно продолжить до максимального неотрицательного. Пусть $\mathbf{L}$ не совпадает с $\mathbf{X}$. Обозначим через $\mathbf{N}$ ортогональное дополнение к $\mathbf{L}$. Тогда при $z \in \mathbf{N}$

$$0 = (Ax + x, z), \ (x, z) = -(Ax, z) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbf{D}.$$

Таким образом, определен A^*z, $(x, z + A^*z) = 0$ $\forall x \in \mathbf{D}$ и значит $A^*z = -z$. Поэтому, если $z \in \mathrm{N} \cap \mathbf{D}$, то

$$0 \leqslant (Az, z) = (z, A^*z) = -|z|^2, \quad z = 0.$$

Определим оператор $\tilde{A}$ на $\mathrm{N} + \mathbf{D}$ соотношением. Если $x = y + z$, $y \in \mathbf{D}$, $z \in \mathrm{N}$, то

$$\bar{A}x = Ay + z.$$

Покажем, что $\bar{A}$ замкнут. Пусть $x_n = y_n + z_n$, $x_n \to x_0$, $\bar{A}x_n \to x_0$. Это значит, что сходятся выражения

$$x_n + \bar{A}x_n = y_n + Ay_n + 2z_n.$$

Поскольку $y_n + Ay_n \in \mathbf{L}$, $2z_n \in \mathrm{N}$, то существуют пределы $\lim z_n = z_0 \in \mathrm{N}$, $\lim y_n = x_0 - z_0$. Кроме того, существует предел $Ay_n = \bar{A}x_n - z_n$. Поэтому $y_0 = x_0 - z_0 \in \mathbf{D}$, $\lim Ay_n = Ay_0$ и $\lim \bar{A}x_n = y_0 + z_0 = \bar{A}x_0$. Наконец, покажем, что оператор $\bar{A}$ неотрицателен. Для $x = y + z$, $y \in \mathbf{D}$, $z \in \mathrm{N}$

$$(\bar{A}x, x) = (Ay + z, y + z) =$$
$$= (Ay, y) + (z, z) + (z, y) + (Ay, z) = (Ay, y) + (z, z) \geqslant 0,$$

так как $(Ay + y, z) = 0$ $(Ay + y \in \mathbf{L}, z \in \mathrm{N})$.

Отметим, что продолжение оператора до максимального осуществляется, вообще говоря, неединственно.

3. Резольвента неотрицательного случайного оператора

Пусть $A(\omega)$ — неотрицательный оператор, удовлетворяющий условиям п. 1, § 6, $\hat{A}(\omega)$ — замкнутый оператор, совпадающий с $A(\omega)$ на $\mathbf{D}$. В качестве $\mathbf{D}$ удобно взять линейную оболочку векторов $\{e_k, k = 1, 2, \ldots\}$. Обозначим через $\tilde{A}(\omega)$ максимальный оператор, построенный по $\hat{A}(\omega)$ таким образом, как указывалось в предыдущем пункте. Пусть $\bar{R}_\lambda(\omega, A) = (\lambda I + \bar{A}(\omega))^{-1}$. Этот оператор при любом ω принадлежит $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, $\|\bar{R}_\lambda(\omega, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$. Докажем, что $\bar{R}_\lambda(\omega, A) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, т. е. для всех x, $y \in \mathbf{X}$ величина $(\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,x, y)$ является $\mathfrak{S}$-измеримой. Используя формулу (2.38), можем убедиться, что достаточно доказать $\mathfrak{S}$-измеримость $(\bar{R}_1(\omega, A)\,x, y)$. Обозначим через $Q(\omega)$ оператор проектирования на подпространство $\mathbf{N}_\omega$, ортогональное множеству $\{z : z = x + \hat{A}(\omega)x\}$ (ω фиксировано). Как показано в п. 2. § 5, оператор $Q(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Заметим, что при построении $\bar{R}_1(\omega, A)\, y$ есть единственное решение уравнения $x + \bar{A}(\omega)\, x = y$, нетрудно видеть, что при $y \in \mathbf{N}_\omega$ решением будет $x = \frac{1}{2} y$. Таким образом, при $y \in \mathbf{N}_\omega$ и $\bar{R}_1(\omega, A)\, y \in \mathbf{N}_\omega$ при этом $\bar{R}_1(\omega, A)\, y = \frac{1}{2} y$. Поэтому

$$\bar{R}_1(\omega, A)\, Q(\omega)\, x = \frac{1}{2} Q(\omega)\, x.$$

Далее, $x - Q(\omega)\, x$ принадлежит замыканию множества

$$\mathbf{L}_\omega^0 = \{z:\ z = x + \bar{A}(\omega)\, x,\ \ x \in \mathbf{D}\}.$$

Поскольку линейные комбинации векторов $z_k(\omega) = e_k + \tilde{A}(\omega) e_k$ плотные в $\mathbf{L}_\omega^0$, то $x_2(\omega) = \bar{R}_1(\omega, A)\, (I - Q(\omega))x$, являющееся решением уравнения

$$x_2(\omega) + \hat{A}(\omega)\, x_2(\omega) = (I - Q(\omega))\, x,$$

можно построить следующим образом. Ортогонализируем последовательность $z_k(\omega)$; пусть это будут векторы $y_1(\omega)$, $y_2(\omega)$, ... Пусть

$$\xi_k(\omega) = ((I - Q(\omega))\, x,\ y_k(\omega)).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \left| x_2(\omega) + \hat{A}(\omega)\, x_2(\omega) - \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\, y_k(\omega) \right| = 0$, то можно указать такие $x^{(n)}(\omega) \in \mathbf{D}$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\, y_k(\omega) = x^{(n)}(\omega) + \check{A}(\omega)\, x^{(n)}(\omega),$$

тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, | x_2(\omega) - x^{(n)}(\omega) | \leqslant \lim_{n\to\infty} | x_2(\omega) + \hat{A}(\omega)\, x_2(\omega) -$$

$$- x^{(n)}(\omega) - \hat{A}(\omega)\, x^{(n)}(\omega) | = 0.$$

Если $y_k(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_{kj}(\omega)\, z_j(\omega)$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\, y_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}(\omega)\, z_j(\omega),$$

значит

$$x^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \sum_{j=1}^{k} \alpha_{kj}(\omega) e_j.$$

Так как $\xi_k(\omega)$ и $\alpha_{kj}(\omega)$ являются $\mathfrak{S}$-измеримыми величинами, то $x^{(n)}(\omega) \in \mathbf{X}(\Omega)$, а значит и $x_2(\omega) \in \mathbf{X}(\Omega)$. Тем самым доказано, что

$$\bar{R}_1(\omega, A)x = x_2(\omega) + \frac{1}{2}Q(\omega)x \in \mathbf{X}(\Omega)$$

или $\bar{R}_1(\omega, A) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$.

По определению резольвенты $\bar{R}_\lambda(\omega, A)$ выполнены соотношения:

$$\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x + \bar{R}_\lambda(\omega, A)\bar{A}(\omega)x = x, \quad x \in \mathbf{D} + \mathbf{N}_\omega; \tag{2.39}$$

$$\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x + \bar{A}(\omega)\bar{R}_1(\omega, A)x = x, \quad x \in \mathbf{X}. \tag{2.40}$$

Из (2.39) и равенства $A(\omega)x = \bar{A}(\omega)x$ при $x \in \mathbf{D}$ следует, что

$$\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x + \bar{R}_\lambda(\omega, A)A(\omega)x = x, \quad x \in \mathbf{D}. \tag{2.41}$$

Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, тогда $\bar{R}_\lambda(\omega, A)A(\omega)$ определено как произведение случайных операторов, при этом оно является также оператором из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Поскольку соотношение (2.41) можно продолжить на все $\mathbf{X}$, используя непрерывность слагаемых по x в смысле сходимости по вероятности, справедливо соотношение

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A)A(\omega) = I - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A). \tag{2.42}$$

Из (2.42) и неравенства $\|\bar{R}_\lambda(\omega, A)\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$ получаем соотношение

$$\forall x \in \mathbf{X} \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x = x - \lim_{\lambda\to\infty} \bar{R}_\lambda(\omega, A)A(\omega)x = x \tag{2.43}$$

(предел с вероятностью 1).

Лемма 2. Для всех $x(\omega) \in \mathbf{X}(\Omega)$ с вероятностью 1

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x(\omega) = x(\omega).$$

Доказательство. Так как $\|\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)\| \leqslant 1$, то

$$|\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x(\omega) - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)x_n(\omega)| \leqslant |x(\omega) - x_n(\omega)|.$$

Положим $x_m(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \xi_k(\omega) e_k$, где $\xi_k(\omega) = (x(\omega), e_k)$. Тогда для любого m

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} |\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A) x(\omega) - x(\omega)| > \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{|x(\omega) - x_m(\omega)| > \varepsilon\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}\{\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} |\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A) e_k - e_k| > 0\}.$$

Учитывая (2.43) и сходимость $x_m(\omega)$ к $x(\omega)$ с вероятностью 1, убеждаемся в справедливости леммы. ■

Следствие. Для всех $x \in \mathbf{X}$ с вероятностью 1 выполняется соотношение

$$A(\omega) x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda[x - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A) x], \tag{2.44}$$

в частности, $A(\omega)$ — сильный предел последовательности случайных операторов $n(I - n\bar{R}_n(\omega, A))$, принадлежащих $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, $(\|n(I - n\bar{R}_n(\omega, A))\|) \leqslant 2n$.

Соотношение (2.44) можно использовать для определения $A(\omega) x(\omega)$ в том случае, когда $x(\omega) \in \mathbf{X}(\Omega)$. Предположим, что

$$A(\omega) x(\omega) = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda[x(\omega) - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A) x(\omega)], \tag{2.45}$$

если справа существует предел по вероятности (вследствие ограниченности $\lambda\bar{R}_\lambda$ выражение под знаком предела определено).

Заметим, что операторы $\bar{R}_\lambda(\omega, A)$ и $\bar{R}_\mu(\omega, A)$ перестановочны при $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Поэтому существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda[\bar{R}_\mu(\omega, A) x - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)] \bar{R}_\mu(\omega, A) =$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda[\bar{R}_\mu(\omega, A) x - \bar{R}_\mu(\omega, A)(\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)) x] =$$
$$= \bar{R}_\mu(\omega, A)\{\lim_{\lambda\to\infty} [\lambda(x - \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A) x)]\}$$

(здесь использована ограниченность оператора $\bar{R}_\mu(\omega, A)$, из которой вытекает, что сходимость по вероятности последовательности $x_n(\omega) \in \mathbf{X}(\Omega)$ к $x(\omega)$ влечет сходимость по вероятности $\bar{R}_\mu(\omega, A) x_n(\omega)$ к $\bar{R}_\mu(\omega, A) x(\omega)$). Таким образом, справедливо равенство

$$A(\omega)\bar{R}_\mu(\omega, A)x = \bar{R}_\mu(\omega, A)A(\omega)x \tag{2.46}$$

(левая часть определена с помощью формулы (2.45)).

4. Уравнения типа Фредгольма

Пусть $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ — неотрицательный оператор и для некоторого базиса $\{e_k\}$ выполнено второе из неравенств (2.35) (первое выполняется автоматически). Рассмотрим уравнение вида

$$A(\omega)y(\omega) + \lambda y(\omega) = x(\omega). \tag{2.47}$$

При этом значения $A(\omega)$ на случайных элементах из $\mathbf{X}(\Omega)$ определяются с помощью (2.45), $y(\omega)$ — искомая величина из $\mathbf{X}(\Omega)$, а $x(\omega)$ заданная. Покажем, что при сформулированных предположениях при $\lambda > 0$ (2.47) имеет единственное решение (с точностью до стохастической эквивалентности), определяющееся формулой

$$y(\omega) = \bar{R}_\lambda(\omega, A)x(\omega) \tag{2.48}$$

(оператор $\bar{R}_\lambda(\omega, A)$ определен в предыдущем пункте). Для того чтобы убедиться, что правая часть (2.48) является решением (2.47), сначала покажем, что величина $A(\omega)y(\omega)$ определена

$$A(\omega)\bar{R}_\lambda(\omega, A)x(\omega) =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}[\mu(I - \mu\bar{R}_\mu(\omega, A))]\bar{R}_\lambda(\omega, A)x(\omega) =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}[\mu\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \mu^2\bar{R}_\mu(\omega, A)\bar{R}_\lambda(\omega, A)]x(\omega).$$

Воспользуемся теперь соотношением, вытекающим из определения $\bar{R}_\mu(\omega, A)$ (резольвентным уравнением),

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \bar{R}_\mu(\omega, A) = (\mu - \lambda)\bar{R}_\mu(\omega, A)\bar{R}_\lambda(\omega, A).$$

Из него вытекает равенство

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \mu\bar{R}_\mu(\omega, A)\bar{R}_\lambda(\omega, A) =$$

$$= \bar{R}_\lambda(\omega, A) - \frac{\mu}{\mu-\lambda}[\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \bar{R}_\mu(\omega, A)] =$$

$$= -\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\bar{R}_\lambda(\omega, A) + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\bar{R}_\mu(\omega, A).$$

Поэтому, воспользовавшись леммой 2, получаем

$$\lim_{\mu\to\infty} [\mu\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \mu^2\bar{R}_\mu(\omega, A)\,\bar{R}_\lambda(\omega, A)]\,x(\omega) =$$

$$= -\lambda \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu}{\mu-\lambda}\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,x(\omega) + \lim_{\mu\to\infty}\frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\bar{R}_\mu(\omega, A)\,x(\omega) =$$

$$= -\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,x(\omega) + x(\omega).$$

Итак, доказано, что $A(\omega)\,y(\omega)$ определено в том случае, когда определено $y(\omega)$ формулой (2.48), причем

$$A(\omega)\,y(\omega) = -\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,x(\omega) + x(\omega) = -\lambda y(\omega) + x(\omega),$$

т. е. удовлетворяется уравнение (2.47).

Теперь пусть $y(\omega)$ произвольное решение (2.47) (в смысле определения (2.45)). Тогда, применяя к обеим частям равенства (2.47) оператор $\bar{R}_\lambda(\omega, A)$, получаем

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,A(\omega)\,y(\omega) + \lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,y(\omega) = = \bar{R}_\lambda(\omega, A)\,x(\omega). \tag{2.49}$$

Поскольку

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,A(\omega)\,y(\omega) =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}\{\mu\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,y(\omega) - \mu^2\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,\bar{R}_\mu(\omega, A)\,y(\omega)\} =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}\left\{\mu\bar{R}_\lambda(\omega, A) - \frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\bar{R}_\lambda(\omega, A) + \frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\bar{R}_\mu(\omega, A)\right\}\times$$

$$\times\, y(\omega) = -\lambda\bar{R}_\lambda(\omega, A)\,y(\omega) + y(\omega) \tag{2.50}$$

(здесь снова использованы резольвентное уравнение и лемма 2), подставляя последнее выражение в левую часть (2.49), получаем формулу (2.48).

5. Уравнения эволюционного типа

Пусть $A(\omega)$ удовлетворяет условиям предыдущего пункта. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dt}x_t(\omega) + A(\omega)\,x_t(\omega) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{2.51}$$

где $x_t(\omega)$ — искомая функция при $t \geqslant 0$ со значениями в $\mathbf{X}(\Omega)$, начальное значение $x_0(\omega)$ считается заданным. Значение оператора $A(\omega)$ на случайных элементах определяем снова с помощью формулы (2.45). Под решением понимаем такую функцию $x_t(\omega)$, для которой существует производная по t в смысле сходимости по вероятности со значениями в $\mathbf{X}(\Omega)$, применив оператор $A(\omega)$, равенство выполнено. Покажем, что уравнение (2.51) имеет единственное решение. Пусть $x_0 = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}(x_t(\omega),\ x_t(\omega)) = -2(A(\omega)\,x_t(\omega) : x_t(\omega)) =$$
$$= -2\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda(I-\lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A))\,x_t(\omega),\ x_t(\omega)) \leqslant 0,$$

так как для всех $x \in \mathbf{X}$

$$((I-\lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A))\,x,\ x) = (x,\ x) - (\lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x,\ x) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\lambda\|\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\|)\,|x|^2 \geqslant 0.$$

Поэтому $(x_t(\omega),\ x_t(\omega)) = |x_t(\omega)|^2$ — убывающая функция, равная нулю при $t = 0$.

Для нахождения решения уравнения (2.51) применим к обеим частям оператор $\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)$. Используя равенство (2.50), убеждаемся, что уравнение принимает вид

$$\frac{d}{dt}\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x_t(\omega) - \lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x_t(\omega) + x_t(\omega) = 0.$$

Умножая это равенство на $e^{-\lambda t}$ и интегрируя от 0 до ∞ (используя ограниченность оператора $\overline{R}_\lambda$), получаем

$$\lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}x_t(\omega)\,dt - \overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x_0(\omega) -$$
$$-\lambda\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}x_t(\omega)\,dt + \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}x_t(\omega)\,dt = 0.$$

Таким образом, преобразование Лапласа решения определяется формулой

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}x_t(\omega)\,dt = \overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x_0(\omega). \tag{2.52}$$

Существование преобразования Лапласа вытекает из ограниченности $|x_t(\omega)|^2$, которая установлена выше. Действительно ли выражение $\overline{R}_\lambda(\omega,\ A)\,x_0(\omega)$ является преобразованием Лапласа дифференцируемой функции, это проверяется в каждом случае отдельно. Если существует дифференцируемая функция $z_t(\omega)$, что

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} z_t(\omega)\,dt = \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, x_0(\omega),$$

то легко проверить, что для всех $\lambda > 0$

$$\frac{d}{dt}\bar{R}_\lambda(\omega, A)\, z_t(\omega) - \lambda \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, z_t(\omega) + z_t(\omega) = 0.$$

Откуда

$$\lambda \bar{R}_\lambda(\omega, A)\frac{d}{dt} z_t(\omega) + \lambda\,[z_t(\omega) - \lambda \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, z_t(\omega)] = 0.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to \infty$, используя лемму 2 и формулу (2.45), убеждаемся, что выполняется (2.51).

Можно указать такие $x_0(\omega)$, при которых существует решение. Пусть $x_0(\omega) = (R_1(\omega, A))^3 x$ (куб оператора). Тогда

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A)\, x_0(\omega) = \frac{1}{\lambda} x_0(\omega) - \frac{1}{\lambda^2} A(\omega)\, x_0(\omega) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^3} A^2(\omega)\, x_0(\omega) - \frac{1}{\lambda^3} A^3(\omega)\, \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, x_0(\omega).$$

Выражения в правой части определены с использованием равенств

$$A(\omega)\, x_0(\omega) = A(\omega)\, \bar{R}_1(\omega, A)\, (\bar{R}_1(\omega, A))^2 x =$$

$$= (I - \bar{R}_1(\omega, A))\, (\bar{R}_1(\omega, A))^2 x,$$

$$A^2(\omega)\, x_0(\omega) = A(\omega)\, (I - \bar{R}_1(\omega, A))\, (\bar{R}_1(\omega, A))^2 x =$$

$$= (I - \bar{R}_1(\omega, A))^2\, \bar{R}_1(\omega, A)\, x,$$

$$A^3(\omega)\, \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, x_0(\omega) = \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, (I - \bar{R}_1(\omega, A))^3 x,$$

которые могут быть получены с помощью формул (2.42), (2.46). Значит

$$\bar{R}_\lambda(\omega, A)\, x_0(\omega) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x_0(\omega)\,dt - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} A(\omega)\, x_0(\omega)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^2 A^2(\omega)\, x_0(\omega)\,dt - \frac{1}{\lambda^3} \bar{R}_\lambda(\omega, A)\, A^3(\omega)\, x_0(\omega).$$

Первые три слагаемых являются преобразованием Лапласа дифференцируемой функции

$$x_0(\omega) - tA(\omega)\, x_0(\omega) + \frac{t^2}{2} A^2(\omega)\, x_0(\omega).$$

Используя обратное преобразование Лапласа, ограниченность $\overline{R}_\lambda(\omega) A^3(\omega) x_0(\omega)$ при $\operatorname{Re}\lambda > \delta > 0$, находим, что последнее слагаемое преобразование Лапласа функции

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \delta} e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda^3} \overline{R}_\lambda(\omega, A)\, A^3(\omega)\, x_0(x)\, d\lambda,$$

которая также дифференцируема.

ОПЕРАТОРНЫЕ МАРТИНГАЛЫ

§ 7. ОПЕРАТОРНЫЕ МАРТИНГАЛ-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Слабый операторный мартингал

Пусть $A_t(\omega)$, $t \in T \subset R$ принадлежит $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ и для всех $t \in T$ определена σ-алгебра $\mathfrak{f}_t$, $\mathfrak{f}_t \subset \gamma$ ($\{\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P}\}$ — исходное вероятностное пространство), так что выполнены условия:

1) $\mathfrak{f}_{t_1} \subset \mathfrak{f}_{t_2}$ при $t_1 < t_2$;

2) $(A_t(\omega)\ x, y)$ измеримо относительно $\mathfrak{f}_t$ для всех x, $y \in \mathbf{X}$. Семейство $A_t(\omega)$ называется слабым операторным мартингалом относительно $\mathfrak{f}_t$, если, кроме 1) и 2), выполнены условия:

3) $\mathbf{M}\,|(A_t(\omega)\,x, y)| < \infty$ для $t \in T$; $x, y \in \mathbf{X}$;

4) при $t < s$ $x, y \in \mathbf{X}$

$$\mathbf{M}\,\{(A_s(\omega)\,x,\ y)/\mathfrak{f}_t\} = (A_t(\omega)\,x,\ y). \tag{3.1}$$

Если $A_t(\omega)$ — слабый мартингал (слово «операторный» в тех случаях, когда речь идет о случайных операторах, будет опущено) относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$ (напомним, что потоком σ-алгебр называется семейство, для которого выполнено условие 1)), то он является слабым мартингалом относительно потока $\mathfrak{f}_t^*$, где $\mathfrak{f}_t^*$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы величины $(A_s(\omega)\,x,\ y)$, $s \in T$, $s \leqslant t$, $x, y \in \mathbf{X}$. Поскольку поток $\mathfrak{f}_t^*$ определяется самим семейством $\{A_t(\omega),\ t \in T\}$, то слабый мартингал относительно потока $\mathfrak{f}_t^*$ будем называть просто слабым мартингалом.

В этом параграфе нас интересует тот случай, когда $T = \{1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, такие мартингалы иногда называются мартингал-последовательностями. Очевидно, что если $\{A_n(\omega)\}$ является слабым мартингалом, то $(A_n(\omega)\,x,\ y)$ — числовым мартингалом отно·

сительно того же потока $\mathfrak{f}_t$, относительно которого является мартингалом $\{A_n(\omega)\}$. Это обстоятельство позволяет применять известные результаты, относящиеся к числовым мартингалам, уже к операторным мартингалам. Рассмотрим это утверждение на примере теоремы о существовании предела.

Теорема 1. *Пусть* $\{A_n(\omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *— слабый операторный мартингал, для которого* $\sup\limits_n \mathbf{M}\,|(A_n(\omega)\,x, y)| < \infty$ *для всех* $x, y \in \mathbf{X}$. *Тогда последовательность* $A_n(\omega)$ *с вероятностью* 1 *имеет слабый предел* $A(\omega)$, *для которого* $\mathbf{M}\,|(A(\omega)\,x, y)| < \infty$ *для всех* $x, y \in \mathbf{X}$. *Если, кроме того, для некоторого плотного множества* $\mathbf{D} \subset \mathbf{X}$ *величины* $(A_n(\omega)\,x, y)$ *равномерно (относительно* n*) интегрируемы для всех* $x, y \in \mathbf{D}$, *то тогда*

$$\mathbf{M}(A(\omega)\,x, y) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}(A_n(\omega)\,x, y); \tag{3.2}$$

$$(A_n(\omega)\,x, y) = \mathbf{M}\{(A(\omega)\,x, y)/\mathfrak{f}_n\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из теоремы о пределе числового мартингала [8, с. 82] и теоремы 1 § 3. Из теоремы о существовании замыкания числового мартингала [8, с. 84] вытекает эквивалентность равенств (3.2) и (3.3), а также выполнение этих равенств при $x, y \in \mathbf{D}$. Положим

$$(\hat{A}_n(\omega)\,x, y) = \mathbf{M}\{(A(\omega)\,x, y)/\mathfrak{f}_n\}, \tag{3.4}$$

где $A(\omega)$ — слабый предел $A_n(\omega)$. Очевидно, что это условное математическое ожидание существует и удовлетворяет условию W1) (билинейность по x и y). Для того чтобы убедиться, что $\hat{A}_n(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$, нужно показать ограниченность по вероятности при $|x| < 1$, $|y| < 1$ правой части (3.4), что вытекает из неравенства

$$\mathbf{M}\,|(\hat{A}_n(\omega)\,x, y)| \leqslant \mathbf{M}\mathbf{M}\{|(A(\omega)\,x, y)|/\mathfrak{f}_n\} = \mathbf{M}\,|(A(\omega)\,x, y)|$$

и леммы § 2. Теперь заметим, что при $x, y \in \mathbf{D}$ с вероятностью 1

$$(\hat{A}_n(\omega)\,x, y) = (A_n(\omega)\,x, y),$$

значит, $\hat{A}_n(\omega) = A_n(\omega)$.

2. Сильный операторный мартингал

Пусть $A_t(\omega)$, $s \in T \subset \mathbf{R}$ принадлежит $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и является слабым мартингалом относительно потока $\mathfrak{f}_t$. Если для всех $x \in \mathbf{X}$, $t \in T$, $\mathbf{M}\,|A_t(\omega)\,x| < \infty$, то $\{A_t(\omega), t \in T\}$ называется сильным операторным мартингалом относительно потока $\mathfrak{f}_t$. Рассмотрим условия существования предела сильного операторного мартингала.

Теорема 2. *Пусть* $\{A_n(\omega),\ n = 1, 2, \ldots\}$ *— сильный мартингал, для которого выполнено условие*

$$\sup_n \mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,x| < \infty, \quad x \in \mathbf{X}. \tag{3.5}$$

Тогда для существования с вероятностью 1 сильного предела

$$A(\omega)\,x = \lim_{n\to\infty} A_n(\omega)\,x, \quad x \in \mathbf{X} \tag{3.6}$$

необходимо и достаточно существование такого вполне непрерывного симметричного положительного оператора S, *чтобы*

$$\overline{\lim_{\alpha\to\infty}}\,\sup_n \mathbf{P}\,\{|S^{-1}A_n(\omega)\,x| > \alpha\} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbf{X}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Необходимость условия теоремы вытекает из теоремы 2 [8, с. 379], ввиду существования предела в правой части (3.7) следует слабая сходимость мер $\mu_n(\cdot)$, являющихся распределениями величин $A_n(\omega)\,x$, поэтому вследствие упомянутой выше теоремы существует такой оператор S, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}\,\sup_n \mu_n(\{x\colon |S^{-1}x| > \alpha\}) = 0,$$

последнее эквивалентно (3.7).

Достаточность. Из теоремы 1 следует существование для всех x, $y \in \mathbf{X}$ предела

$$\lim_{n\to\infty} (A_n(\omega)\,x,\ y) = (A(\omega)\,x,\ y),$$

где $A(\omega) \in \mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, так как $\mathbf{M}\,|(A_n(\omega)x,\ y)| \leqslant |y|\,\mathbf{M}\,|A_n(\omega)x|$ и выполнено (3.5). Покажем, что $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Для этого достаточно, чтобы $A_n(\omega)\,x$ сильно сходилось по вероятности. Из (3.7) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое α, что

$$\mathbf{P}\,\{|S^{-1}A_n(\omega)\,x| > \alpha\} < \varepsilon \quad \text{для всех } n.$$

Поскольку $\{y : |S^{-1}y| \leqslant \alpha\}$ — компакт, то существует конечномерное подпространство $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}$, являющееся δ-сетью в нем. Пусть Q — оператор проектирования на $\mathbf{N}$. Тогда

$$\mathbf{P}\{|A_n(\omega)x - A_m(\omega)x| > 3\delta\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}\{|S^{-1}A_n(\omega)x| > \alpha\} + \mathbf{P}\{|S^{-1}A_m(\omega)x| > \alpha\} +$$
$$+ \mathbf{P}\{|QA_n(\omega)x - QA_m(\omega)x| > \delta\},$$

так как при $z \in \{y : |S^{-1}y| \leqslant \alpha\}$, $|z - Qz| < \delta$. Пусть $f_1, \ldots$ $\ldots, f_l$ — базис в $\mathbf{N}$. Тогда

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{P}\{|QA_n(\omega)x - QA_m(\omega)x| > \delta\} \leqslant$$
$$\leqslant \overline{\lim_{n,m\to\infty}} \sum_{l=1}^{l} \mathbf{P}\left\{|(A_n(\omega)x, f_l) - (A_m(\omega)x, f_l)| > \frac{\delta}{l}\right\} = 0.$$

Значит

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \mathbf{P}\{|A_n(\omega)x - A_m(\omega)x| > 3\delta\} \leqslant 2\varepsilon.$$

Из последнего соотношения вытекает, что $A_n(\omega)x$ сильно сходится по вероятности к некоторому пределу. Поскольку $(A_n(\omega)x, y)$ сходится к $(A(\omega)x, y)$ для всех y, то

$$\Sigma(A_n(\omega)x, e_k)e_k \to \Sigma(A(\omega)x, e_k)e_k$$

по вероятности, причем ряд справа сходится и значит $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и $A_n(\omega)x \to A(\omega)x$ по вероятности для всех x. Отсюда $|A_n(\omega)x| \to |A(\omega)x|$ по вероятности. Заметим далее, что $|A_n(\omega)x|$ является числовым субмартингалом:

$$\mathbf{M}(|A_n(\omega)x|/\mathfrak{f}_{n-1}) = \mathbf{M}(\sup_k (A_n(\omega)x, y_k)/\mathfrak{f}_{n-1}) \geqslant$$
$$\geqslant \sup_k (A_{n-1}(\omega)x, y_k) = |A_{n-1}(\omega)x|,$$

где $\{y_k\}$ — последовательность векторов из $\mathbf{X}$, плотная на единичной сфере $\{x : |x| = 1\}$. Из условия (3.5), теоремы 1 и следствия [8, с. 81—82] вытекает существование с вероятностью 1 предела $\lim_{n\to\infty} |A_n(\omega)x|$, который, очевидно, совпадает с пределом по вероятности.

Поэтому $\lim_{n\to\infty} |A_n(\omega)x| = |A(\omega)x|$. Таким образом, можно указать такое $\Lambda \subset \mathfrak{S}$, что $\mathbf{P}(\Lambda) = 1$ и счетное плотное множество $\mathbf{D}$ в $\mathbf{X}$, чтобы для всех $y \in \mathbf{D}$ и $\omega \in \Lambda$

$$\lim_{n\to\infty} (A_n(\omega)x, y) = (A(\omega)x, y), \quad \lim_{n\to\infty} |A_n(\omega)x| = |A(\omega)x|.$$

Из этих соотношений следует, что при $\omega \in \Lambda$

$$\lim A_n(\omega)x = A(\omega)x.$$

Замечание. Если, кроме условий теоремы, можно указать такое плотное множество $\mathbf{D}$ в $\mathbf{X}$, что последовательность $(A_n(\omega)x, y)$ равномерно интегрируема относительно n, то

$$\mathbf{M}A(\omega)x = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}A_n(\omega)x; \tag{3.8}$$

$$A_n(\omega)x = \mathbf{M}[A(\omega)x/\mathfrak{f}_n]. \tag{3.9}$$

Это утверждение вытекает непосредственно из теоремы 1.

Более удобно проверяемые условия существования предела можно получить, предполагая существование вторых моментов.

Теорема 3. *Пусть* $\{A_n(\omega), n = 1, 2, \ldots\}$ — *сильный мартингал, для которого выполнено условие*

$$\forall x \in \mathbf{X} \quad \sup_n \mathbf{M}|A_n(\omega)x|^2 < \infty. \tag{3.10}$$

Тогда с вероятностью 1 *существует сильный предел* $\lim_{n\to\infty} A_n(\omega)x = A(\omega)x$, $x \in \mathbf{X}$ *и выполнены равенства* (3.8) *и* (3.9).

Доказательство. Существование пределов $\lim_{n\to\infty} (A_n(\omega)x, y) = (A(\omega)x, y)$ вытекает из теоремы 1. Покажем, что $A_n(\omega)x$ сходится в среднем квадратическом к некоторому пределу. При $m > n$

$$\mathbf{M}(A_n(\omega)x, A_m(\omega)x) = \mathbf{M}\,\mathbf{M}\{(A_n(\omega)x, A_m(\omega)x)/\mathfrak{f}_n\} =$$
$$= \mathbf{M}(A_n(\omega)x, \mathbf{M}(A_m(\omega)x/\mathfrak{f}_n)) = \mathbf{M}(A_n(\omega)x, A_n(\omega)x).$$

Поэтому

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M}(A_n(\omega)x - A_m(\omega)x, A_n(\omega)x - A_m(\omega)x) =$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M}[(A_n(\omega)x - A_n(\omega)x) - 2(A_n(\omega)x, A_m(\omega)x) +$$
$$+ (A_m(\omega)x, A_m(\omega)x)] = \lim_{n,m\to\infty} [\mathbf{M}(A_n(\omega)x, A_n(\omega)x) -$$
$$- \mathbf{M}(A_m(\omega)x, A_m(\omega)x)] = 0.$$

Значит $A_n(\omega)x$ сильно сходится по вероятности к $A(\omega)x$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично теореме 2.

Замечание. Пусть $x_n(\omega)$ — последовательность случайных величин в $\mathbf{X}$. Она называется мартингалом, если $\mathbf{M}|x_n(\omega)| < \infty$ и $\mathbf{M}(x_m(\omega)/\mathfrak{f}_n) = x_n(\omega)$ при $m > n$, где $\mathfrak{f}_n$ — σ-алгебра, порожденная величинами $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)$. Из теоремы 3 вытекает, что мартингал $x_n(\omega)$ имеет предел, если $\sup\limits_n \mathbf{M}|x_n(\omega)|^2 < \infty$. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему к последовательности операторов $\langle a \circ x_n(\omega)\rangle$, где $a \in \mathbf{X}$.

3. Операторный мартингал

Последовательность случайных операторов $A_n(\omega)$ из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ называется операторным мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{f}_n$, если:

1. $\forall x, y \in \mathbf{X}$, $(A_n(\omega)x, y)$ является числовым мартингалом относительно $\mathfrak{f}_n$;
2. $\mathbf{M}\|A_n(\omega)\| < \infty$.

Нас интересуют условия, при которых операторный мартингал имеет предел в операторной норме.

Теорема 4. *Пусть $A_n(\omega)$ — операторный мартингал для которого выполнены условия:*

1) *последовательность $\|A_n(\omega)\|$ равномерно интегрируема;*

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $\mathbf{N}$, что для всех*

$$\mathbf{P}\{\|P_{\mathbf{N}}A_n(\omega)P_{\mathbf{N}} - A_n(\omega)\| > \varepsilon\} < \varepsilon, \tag{3.11}$$

где $P_{\mathbf{N}}$ — оператор проектирования на $\mathbf{N}$. Тогда существует такой оператор $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, что

$$\mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty}\|A_n(\omega) - A(\omega)\| = 0\} = 1.$$

Доказательство. Оператор $A(\omega)$, естественно, должен совпадать со слабым пределом последовательности $A_n(\omega)$, существующим вследствие теоремы 1, так как

$$\sup_n \mathbf{M}|(A_n(\omega)x, y)| \leqslant |x||y| \sup_n \mathbf{M}\|A_n(\omega)\|.$$

Покажем, что $A_n(\omega)$ сходится по операторной норме и по вероятности к некоторому пределу. Заметим, что $P_{\mathbf{N}}A_n(\omega)P_{\mathbf{N}}$

также является мартингалом относительно потока $\mathfrak{f}_n$, так как

$$\mathbf{M}\,[(P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ y)/\mathfrak{f}_{n-1}] = \mathbf{M}\,[(A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ P_{\mathrm{N}}y)/\mathfrak{f}_{n-1}] = \\ = (A_{n-1}(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ P_{\mathrm{N}}y) = (P_{\mathrm{N}}A_{n-1}(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ y).$$

При этом существует слабый предел

$$\lim\,(P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ y) = (P_{\mathrm{N}}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}}x,\ y).$$

Если $\{e_1,\ \ldots,\ e_l\}$ — базис в N, то

$$\|P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N}}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}}\| \leqslant \sqrt{\sum_{k,\,j=1}^{l}((A_n(\omega) - A(\omega))\,e_k,\ e_j)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\|P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N}}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}}\| = 0, \tag{3.12}$$

каково бы ни было N. Поэтому при $\delta < \varepsilon$

$$\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \mathbf{P}\,\{\|A_n(\omega) - A_m(\omega)\| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \Big[\mathbf{P}\,\{\|P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - P_{\mathrm{N}}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}}\| >$$

$$> \varepsilon - \delta\} + \mathbf{P}\left\{\|P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\| > \frac{\delta}{2}\right\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\|P_{\mathrm{N}}A_n(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - A_m(\omega)\| > \frac{\delta}{2}\right\}\Big] \leqslant \delta$$

(первое слагаемое справа равно нулю в силу (3.12)). Из последнего соотношения вытекает сходимость $A_n(\omega)$ по норме и по вероятности. Этот предел совпадает с $A(\omega)$. Очевидно, что $P_{\mathrm{N}}\,A_n(\omega)P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)$ сходится по норме и по вероятности к $P_{\mathrm{N}}\,A(\omega)P_{\mathrm{N}} - A(\omega)$. Значит в силу (3.11)

$$\mathbf{P}\,\{\|P_{\mathrm{N}}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}} - A(\omega)\| > \varepsilon\} < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Выберем последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$ так, чтобы $\Sigma\varepsilon_k < \infty$. Пусть N_k — конечномерные подпространства, удовлетворяющие условию 2) теоремы с ε_k. Из (3.13) вытекает, что

$$\mathbf{P}\,\{\lim_{k\to\infty}\|P_{\mathrm{N}_k}A(\omega)\,P_{\mathrm{N}_k} - A(\omega)\| = 0\} = 1. \tag{3.14}$$

Заметим, что $\|A_n(\omega)\|$ сх дится по вероятности к $\|A(\omega)\|$, поэтому вследствие условия 1) теоремы $\mathbf{M}\|A(\omega)\| < \infty$. Поскольку $\|P_{\mathrm{N}_k}\,A(\omega)\,P_{\mathrm{N}_k} - A(\omega)\| \leqslant 2\,\|A(\omega)\|$, го из (3.14) в силу теоремы Лебега получаем

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{M}\| P_{\mathrm{N}_k} A(\omega) P_{\mathrm{N}_k} - A(\omega)\| = 0. \tag{3.15}$$

Последовательность $\| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\|$ при любом N является субмартингалом, так как, взяв плотную на единичной сфере последовательность $\{x_k\}$, имеем

$$\| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\| = \sup_{k,j} ((P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)) x_k, x_j)$$

(слева стоит sup счетного множества мартингалов). Из неравенства

$$\| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\| \leqslant 2\| A_n(\omega)\|$$

вытекает, что этот субмартингал равномерно интегрируем и, следовательно,

$$\mathbf{M}\| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\| \uparrow \mathbf{M}\| P_{\mathrm{N}} A(\omega) P_{\mathrm{N}} - A(\omega)\|$$

(по доказанному $\| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\|$ сходится по вероятности к $\| P_{\mathrm{N}} A(\omega) P_{\mathrm{N}} - A(\omega)\|$, а значит вследствие этого он сходится к тому же пределу и с вероятностью 1). Используя неравенство (25) [8, с. 81], можем утверждать

$$\mathbf{P}\{\sup_n \| P_{\mathrm{N}} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}} - A_n(\omega)\| \geqslant \alpha\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha}\mathbf{M}\| P_{\mathrm{N}} A(\omega) P_{\mathrm{N}} - A(\omega)\|. \tag{3.16}$$

Далее

$$\mathbf{P}\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\| A_n(\omega) - A(\omega)\| > \delta\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left\{\sup_n \| P_{\mathrm{N}_k} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}_k} - A_n(\omega)\| > \frac{\delta}{3}\right\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\| P_{\mathrm{N}_k} A(\omega) P_{\mathrm{N}_k} - A(\omega)\| > \frac{\delta}{3}\right\} +$$

$$+ \mathbf{P}\left\{\overline{\lim_{n\to\infty}}\| P_{\mathrm{N}_k} A_n(\omega) P_{\mathrm{N}_k} - P_{\mathrm{N}_k} A(\omega) P_{\mathrm{N}_k}\| > \frac{\delta}{3}\right\}.$$

Последняя вероятность в правой части равна нулю вследствие (3.12), две другие можно сделать сколь угодно малыми выбором k в силу (3.16) и (3.15).

Замечание 1. В условиях теоремы $(A_n(\omega)x, y)$ равномерно интегрируемо, поэтому на основании теоремы 1

$$\mathbf{M}(A(\omega)/\mathfrak{f}_n) = A_n(\omega).$$

Замечание 2. Обозначим через $\mathbf{L}^c(\mathbf{X})$ множество всех вполне непрерывных линейных операторов. Множество $\mathbf{L}^c(\mathbf{X})$ с операторной нормой и естественными операциями сложения и умножения на числа является сепарабельным банаховым пространством. Всюду плотным множеством в $\mathbf{L}^c(\mathbf{X})$ является множество операторов вида $P_{\mathbf{N}} A P_{\mathbf{N}}$, где $\mathbf{N}$ — конечномерное подпространство $\mathbf{X}$. Нетрудно установить, что для любого компактного подмножества $R \subset \mathbf{L}^c(\mathbf{X})$ и $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное подпространство $\mathbf{N}$, что

$$\sup_{A \in R} \| P_{\mathbf{N}} A P_{\mathbf{N}} - A \| < \varepsilon. \tag{3.17}$$

Наоборот, если для ограниченного замкнутого множества R для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное $\mathbf{N}$, при котором выполнено (3.17), то R компактно. Отсюда вытекает, что условия: а) $A(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, б) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечномерное пространство $\mathbf{N}$, что

$$\mathbf{P}\{\| P_{\mathbf{N}} A(\omega) P_{\mathbf{N}} - A(\omega) \| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы $\mathbf{P}\{A(\omega) \in \mathbf{L}^c(\mathbf{X})\} = 1$. Таким образом, мартингалы, рассматриваемые в теореме 4, принимают значения в $\mathbf{L}^c(\mathbf{X})$. Тогда условие 2) теоремы является необходимым и для сходимости. Действительно, из теоремы о слабой сходимости мер в полном сепарабельном метрическом пространстве [8, с. 379] вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $R \subset \mathbf{L}^c(\mathbf{X})$, что $\mathbf{P}\{A_n(\omega) \in R\} \geqslant 1 - \varepsilon$ для всех n. Но тогда в силу (3.17)

$$\mathbf{P}\{\| P_{\mathbf{N}} A_n(\omega) P_{\mathbf{N}} - A_n(\omega) \| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Приведем пример операторного мартингала, удовлетворяющего условию 1) теоремы, для которого не существует предела $\lim\limits_{n \to \infty} A_n(\omega)$ в операторной норме.

Пример. Пусть $\{e_k\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{X}$, Q_k — оператор проектирования на e_k, ξ_k — последовательность независимых случайных величин, для которых $\mathsf{M}\xi_k = 0$. Тогда последовательность

$$A_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Q_k$$

является операторным мартингалом $\| A_n(\omega) \| = \sup\limits_{k \leqslant n} |\xi_k|$. Таким образом, для выполнения условия 1) теоремы достаточно, чтобы

$$\mathbf{M} \sup_k |\xi_k| < \infty.$$

В этом случае $A(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k Q_k$ является случайным оператором, но

$$\| A(\omega) - A_n(\omega) \| = \sup_{k>n} |\xi_k|,$$

легко выбрать так последовательность ξ_k, чтобы $\sup_{k>n} |\xi_k|$ не стремился к нулю (например, считая, что ξ_k одинаково распределены и ограничены).

§ 8. СХОДИМОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Бесконечные произведения как мартингалы

Пусть $B_n(\omega)$ — последовательность независимых операторов из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Нас интересуют условия сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (I + B_k(\omega)), \tag{3.18}$$

т. е. существования предела произведений $\prod_{k=1}^{n} (I + B_k(\omega))$. Отметим прежде всего, что это произведение определено и принадлежит $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Это вытекает из следующего предложения.

Лемма. Если $A(\omega)$ и $B(\omega)$ принадлежат $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и независимы, то $A(\omega)B(\omega)$ определено и принадлежит $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{F}_B$ σ-алгебру, порожденную оператором $B(\omega)$. Для любого $z \in \mathbf{X}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (A(\omega) z, e_k)^2 = |A(\omega) z|^2$$

сходится по вероятности. Значит, для любого z и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_m \mathbf{P} \left\{ \left| \sum_{k=n}^{n+m} (A(\omega) z, e_k)^2 \right| > \varepsilon \right\} = 0. \tag{3.19}$$

Поскольку $B(\omega)x \in \mathbf{X}$ с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{\sum_{k=n}^{n+m}(A(\omega)B(\omega)x, e_k)^2 > \varepsilon/f_B\} =$$

$$= \mathbf{P}\{\sum_{k=n}^{n+m}(A(\omega)z, e_k)^2 > \varepsilon\}|_{z=B(\omega)x}$$

и в силу независимости $A(\omega)$ и $B(\omega)$,

$$\mathbf{P}\{\sum_{k=n}^{n+m}(A(\omega)B(\omega)x, e_k)^2 > \varepsilon\} =$$

$$= \int \mathbf{P}\{\sum_{k=n}^{n+m}(A(\omega)z, e_k)^2 > \varepsilon\}\,\mathbf{P}\{B(\omega)x \in dz\}. \qquad (3.20)$$

Из (3.19) и (3.20) с учетом теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает доказательство леммы.

Рассмотрим последовательность

$$A_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n}(I + B_k(\omega)).$$

Из леммы следует, что $A_n(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Покажем, что при условии $\mathbf{M}|B_k(\omega)x| < \infty$, $\mathbf{M}B_k(\omega)x = 0$ для всех x $A_n(\omega)$ будет сильным операторным мартингалом. Действительно, из леммы § 2 вытекает существование таких постоянных β_k, что

$$\mathbf{M}|B_k(\omega)x| \leqslant \beta_k|x|.$$

Далее заметим, что для независимых операторов $A(\omega)$ и $B(\omega)$, для которых $\mathbf{M}|A(\omega)x| \leqslant \alpha|x|$, $\mathbf{M}|B(\omega)x| \leqslant \leqslant \beta x$ выполняется соотношение

$$\mathbf{M}(|A(\omega)B(\omega)x|) = \mathbf{M}[\mathbf{M}|A(\omega)z||_{z=B(\omega)x}] \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\mathbf{M}|B(\omega)x| \leqslant \alpha\beta|x|.$$

Поскольку

$$\mathbf{M}|x + B_k(\omega)x| \leqslant |x| + \mathbf{M}|B_k(\omega)|x \leqslant (1+\beta_k)|x|,$$

то

$$\mathbf{M}|A_n(\omega)x| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+\beta_k)|x|. \qquad (3.21)$$

Если $\mathfrak{f}_n$ обозначает σ-алгебру, порожденную $B_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, n$, то тогда $B_{n+1}(\omega)$ не зависит от $\mathfrak{f}_n$, $A_n(\omega)$ измеримо относительно $\mathfrak{f}_n$, отсюда

$$\mathbf{M}\,[(A_{n+1}(\omega)\,x,\,y)/\mathfrak{f}_n] = (A_n(\omega)\,x,\,y) + \\ + \mathbf{M}\,[(A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x,\,y)/\mathfrak{f}_n].$$

Покажем, что второе слагаемое справа равно нулю. Пусть $\xi(\omega)$ — произвольная, $\mathfrak{f}_n$ — измеримая ограниченная величина. Тогда

$$\mathbf{M}\,(\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x,\,y) = \\ = \mathbf{M}\mathbf{M}\,((\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x,\,y)/\mathfrak{f}_{B_{n+1}}) = \\ = \mathbf{M}\,\{\mathbf{M}\,(\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,z,\,y)_{z=B_{n+1}(\omega)x}\},$$

где $\mathfrak{f}_{B_{n+1}}$ — σ-алгебра, порожденная $B_{n+1}(\omega)$. Так как $\mathbf{M}\,|(\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,z,\,y)| < \infty$ при $z,\,y \in \mathbf{X}$, то в силу леммы § 2 существует такой ограниченный оператор S, при котором $\mathbf{M}\,(\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,z,\,y) = (Sz,\,y)$. Поэтому

$$\mathbf{M}\,\{\mathbf{M}\,(\xi(\omega)\,A_n(\omega)\,z,\,y)_{z=B_{n+1}(\omega)x}\} = \\ = \mathbf{M}\,(SB_{n+1}(\omega)\,x,\,y) = \mathbf{M}\,(B_{n+1}(\omega)\,x,\,S_y^*) = 0.$$

Тем самым доказано соотношение

$$\mathbf{M}\,[(A_{n+1}(\omega)\,x,\,y)/\mathfrak{f}_n] = (A_n(\omega)\,x,\,y).$$

Из (3.21) вытекает, что $A_n(\omega)$ — сильный операторный мартингал.

Теперь можно использовать теоремы о сходимости мартингалов для доказательства сходимости бесконечного произведения. Приведем одну такую общую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{M}B_k(\omega)x = 0$ *и для всех* $x \in \mathbf{X}$ $\mathbf{M}\,|B_k(\omega)\,x|^2 < \infty$. *Обозначим через* V_k *такие ограниченные симметричные неотрицательные операторы, для которых* $\mathbf{M}\,|B_k(\omega)\,x|^2 = (V_k\,x,\,x)$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(V_kx,\,x)$ *сходится для всех* $x \in \mathbf{X}$ *и существует такое* l, *что*

$$\left\|\sum_{k=l}^{\infty} V_k\right\| < 1,$$

то $\prod\limits_{k=1}^{n}(I + B_k(\omega))\,x$ *имеет с вероятностью* 1 *предел для всех* $x \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Поскольку $A_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n}(I + B_k(\omega))$ является сильным мартингалом, то для доказательства теоремы, учитывая теорему 3 §7, достаточно доказать, что для всех ограничена величина

$$\mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,x|^2.$$

Обозначим через R_n неотрицательный симметричный оператор, для которого

$$\mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,x - x|^2 = (R_n x, x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(R_{n+1}x, x) &= \mathbf{M}\,|A_{n+1}(\omega)\,x - x|^2 = \mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,x + \\ &+ A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x - x|^2 = \mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,x - x|^2 + \\ &+ 2\mathbf{M}\,(A_n(\omega)\,x - x,\ A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x) + \\ &+ \mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x|^2 = (R_n x, x) + \\ &+ \mathbf{M}\,(R_n B_{n+1}(\omega)\,x,\ B_{n+1}(\omega)\,x) + \mathbf{M}\,|B_{n+1}(\omega)\,x|^2,\end{aligned}$$

так как по доказанному ранее $\mathbf{M}\,(A_n(\omega)\,x - x,\ A_n(\omega) \times B_{n+1}(\omega)\,x) = 0$, а

$$\mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x|^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}\,(|A_n(\omega)\,B_{n+1}(\omega)\,x|^2/\mathfrak{f}_{B_{n+1}}) =$$

$$= \mathbf{M}\,\{\mathbf{M}\,|A_n(\omega)\,z|^2_{z=B_{n+1}(\omega)x}\} = \mathbf{M}\,\{[\,|z|^2 + (R_n z, z)]_{z=B_{n+1}(\omega)x}\}.$$

Пусть $\|R_n\|$ — норма оператора R_n. Тогда, поскольку $0 \leqslant R_n \leqslant R_{n+1}$, то $\|R_{n+1}\| \geqslant \|R_n\|$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\,(R_n B_{n+1}(\omega)\,x,\ B_{n+1}(\omega)\,x) &\leqslant \|R_n\|\,\mathbf{M}\,|B_{n+1}(\omega)\,x|^2 = \\ &= \|R_n\|\,(V_{n+1}x, x).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(R_{n+1}x, x) \leqslant (R_n x, x) + (1 + \|R_n\|)\,(V_{n+1}x, x),$$

а при $n > l$

$$(R_{n+1}x, x) \leqslant (R_l x, x) + (1 + \|R_n\|) \sum_{k=l+1}^{n+1} (V_k x, x).$$

Отсюда

$$\|R_{n+1}\| \leqslant \|R_l\| + (1 + \|R_n\|)\,\Big\|\sum_{k=l+1}^{n+1} V_k\Big\| \leqslant \|R_l\| +$$

$$+ (1 + \|R_n\|)\,\Big\|\sum_{k=l+1}^{\infty} V_k\Big\| \leqslant \|R_l\| + (1 + \|R_{n+1}\|)\,\Big\|\sum_{k=l+1}^{\infty} V_k\Big\|.$$

Поэтому

$$\| R_{n+1} \| \leqslant \left(1 - \left\| \sum_{k=l+1}^{\infty} V_k \right\|\right)^{-1} \left(\| R_l \| + \left\| \sum_{k=l+1}^{\infty} V_k \right\| \right).$$

Рассмотрим теперь бесконечное произведение в другом порядке сомножителей:

$$\prod_{k=\infty}^{1} (I + B_k(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{1} (I + B_k(\omega)) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (I + B_n(\omega)) \ldots (I + B_1(\omega)). \qquad (3.22)$$

Заметим, что это бесконечное произведение более естественно, чем предыдущее, так как к элементу x операторы $(I + B_k(\omega))$ применяются последовательно в порядке возрастания индексов. Если $B_k(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, то и $\prod_{k=n}^{1} (I + B_k(\omega)) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Если $\mathbf{M} B_k(\omega)\, x = 0 \; \forall x \in \mathbf{X}$, то последовательность

$$\tilde{A}_n(\omega) = \prod_{k=n}^{1} (I + B_k(\omega)) \qquad (3.23)$$

будет сильным операторным мартингалом. Действительно,

$$\tilde{A}_{n+1}(\omega) = \tilde{A}_n(\omega) + B_{n+1}(\omega)\, \tilde{A}_n(\omega), \qquad (3.24)$$

а

$$\mathbf{M}\left[(B_{n+1}(\omega)\, \tilde{A}_n(\omega)\, x, y)/\mathfrak{f}_n\right] = \mathbf{M}\,(B_{n+1}(\omega)\, z, y)\big|_{z=\tilde{A}_n(\omega)x} = 0.$$

Если операторы $B_n(\omega)$ таковы, что $B_n^*(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, то тогда

$$\tilde{A}_n^*(\omega) = \prod_{k=1}^{n} (I + B_k^*(\omega)),$$

и для исследования сходимости этого бесконечного произведения можно использовать теорему 1 (заметим, однако, что из сильной сходимости $\tilde{A}_n^*(\omega)$ вытекает лишь слабая сходимость $A_n(\omega)$). Для доказательства сильной сходимости последовательности $\tilde{A}_n(\omega)$ приходится применять более жесткие (чем в теореме 1) условия.

Теорема 2. *Пусть* $B_n(\omega)$ *независимы.* $(V_n x, x) = \mathbf{M} \mid B_n(\omega) x, x|^2$.

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|V_n\| < \infty,$$

то последовательность $\tilde{A}_n(\omega)x$, *определяемая равенством* (3.23), *с вероятностью* 1 *имеет предел, каково бы ни было* $x \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Как и в теореме 1, достаточно доказать ограниченность $\mathbf{M}|\tilde{A}_{n+1}(\omega)x|^2$. Из (3.23) находим

$$\mathbf{M}|\tilde{A}_{n+1}(\omega)x|^2 = \mathbf{M}|\tilde{A}_n(\omega)x|^2 + \mathbf{M}|B_{n+1}(\omega)\tilde{A}_n(\omega)|^2 =$$

$$= \mathbf{M}|\tilde{A}_n(\omega)x|^2 + \mathbf{M}(V_{n+1}\tilde{A}_n(\omega)x, \ \tilde{A}_n(\omega)x) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}|\tilde{A}_n(\omega)x|^2(1 + \|V_{n+1}\|).$$

Следовательно,

$$\mathbf{M}|\tilde{A}_{n+1}(\omega)x|^2 \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+\|V_k\|)|x|^2 \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1+\|V_k\|)|x|^2 \leqslant \right.$$

$$\leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\|V_k\|\right\}|x|.$$

2. Сходимость бесконечных произведений при существовании двух моментов

Рассмотрим бесконечное произведение (3.18) с независимыми $B_k(\omega) \in \mathrm{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которых $\mathbf{M}|B_k(\omega)x|^2 < \infty \ \forall x \in \mathbf{X}$. Тогда существуют такие ограниченные операторы U_k и V_k, что

$$\mathbf{M}(B_k(\omega)x, y) = (U_kx, x), \quad \mathbf{M}|B_k(\omega)x - U_kx|^2 = (V_kx, x),$$

причем V_k симметричный и неотрицательный. (В отличие от предыдущего пункта не предполагается, что $U_k = 0$.)

Исследуем сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=\infty}^{1}(I + B_k(\omega)) = \lim_{n\to\infty}(I + B_n(\omega))(I + B_{n-1}(\omega)) \ldots$$

$$\ldots (I + B_1(\omega)). \tag{3.25}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1) *при некотором* l *бесконечное произведение неслучайных операторов*

$$\prod_{k=\infty}^{l}(I + U_k)$$

сходится в операторной норме к невырожденному оператору;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \|V_k\| < \infty$.

Тогда бесконечное произведение (3.25) *с вероятностью* 1 *сильно сходится, т. е. для всех* $x \in \mathbf{X}$ *с вероятностью* 1 *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} (I + B_n(\omega))(I + B_{n-1}(\omega)) \ldots (I + B_1(\omega))\, x. \quad (3.26)$$

Доказательство. Выражение под знаком предела в (3.26) определено в силу результатов предыдущего пункта. Очевидно, достаточно доказать существование предела

$$\lim_{n\to\infty} (I + B_n(\omega))(I + B_{n-1}(\omega)) \ldots (I + B_l(\omega))\, x,$$

где l — число, указанное в условии 1) теоремы. Поэтому можно считать, что условие 1) выполняется при $l = 1$. Тогда все операторы $(I + U_k)$ будут невырождены. Положим

$$A_n(\omega) = (I + U_1)^{-1} \ldots (I + U_n)^{-1} (I + B_n(\omega)) \ldots (I + B_1(\omega)).$$

Тогда

$$A_{n+1}(\omega) = (I + U_1)^{-1} \ldots (I + U_{n+1})^{-1} (I + B_{n+1}(\omega)) \times$$
$$\times (I + U_n) \ldots (I + U_1) A_n(\omega) = (I + \hat{B}_{n+1}(\omega)) A_n(\omega),$$

где

$$\hat{B}_{n+1}(\omega) = (I + U_1)^{-1} \ldots (I + U_{n+1})^{-1} (B_{n+1}(\omega) -$$
$$- U_{n+1})(I + U_n) \ldots (I + U_1).$$

Очевидно, $\hat{B}_{n+1}(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Кроме того,

$$\mathbf{M}(\hat{B}_{n+1}(\omega)\, x, y) = \mathbf{M}([B_{n+1}(\omega) - U_{n+1}](I + U_n) \ldots$$
$$\ldots (I + U_1)\, x, [(I + U_1)^{-1} \ldots (I + U_{n+1})^{-1}]^* y) = 0,$$

$$\mathbf{M} | \hat{B}_n(\omega)\, x |^2 \leqslant \|(I + U_1)^{-1} \ldots (I + U_n)^{-1}\|^2 \mathbf{M} | B_n(\omega)(I +$$
$$+ U_{n-1}) \ldots (I + U_1)\, x |^2 \leqslant \|(I + U_1)^{-1} \ldots$$
$$\ldots (I + U_n)^{-1}\|^2 \|(I + U_{n-1}) \ldots (I + U_1)\|^2 \|V_n\|.$$

Из условия 1) теоремы вытекает ограниченность выражений

$$\|(I+U_n)\ \dots\ (I+U_1)\| \text{ и } \|(I+U_n)^{-1}\ \dots\ (I+U_1)^{-1}\|.$$

Поэтому при некотором $\gamma > 0$

$$\mathbf{M}\,|\,\hat{B}_n(\omega)\,x\,|^2 < \gamma\|V_n\|\,|\,x\,|^2.$$

Пусть $\hat{V}_n$ — неотрицательный симметричный оператор такой, что

$$\mathbf{M}\,|\,\hat{B}_n(\omega)\,x\,|^2 = (\hat{V}_n x,\ x).$$

Тогда $\|\hat{V}_n\| \leqslant \gamma\|V_n\|$. Так как

$$A_n(\omega) = (I+\hat{B}_n(\omega))\ \dots\ (I+\hat{B}_1(\omega)),$$

то из теоремы 2 вытекает, что $A_n(\omega)\,x$ с вероятностью 1 имеет предел. Заметим, что

$$(I+B_n(\omega))\ \dots\ (I+B_1(\omega))\,x = \left(\prod_{k=n}^{1}(I+U_k)\right)A_n(\omega)\,x.$$

Воспользовавшись условием 1) убеждаемся в справедливости теоремы. ■

3. Сходимость бесконечных произведений в абсолютной норме

Предположим, что операторы $B_n(\omega)$ таковы, что

$$\|B_n(\omega)\|_2^2 = \operatorname{sp} B_n^*(\omega)\,B_n(\omega) < \infty \tag{3.27}$$

с вероятностью 1, исследуем сходимость бесконечных произведений вида (3.18) или (3.22) в норме $\|\cdot\|_2$, определяемой (3.27). Эта норма называется абсолютной операторной нормой (или следовой). Этот случай представляет интерес, так как здесь можно получить необходимые и достаточные условия сходимости.

Теорема 4. *Пусть* $B_n(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega,\ \mathbf{X})$ *независимы, для всех* n *выполнено условие* (3.27) *и при всех* n *оператор* $I + B_n(\omega)$ *невырожден. Обозначим для* $\delta > 0$

$$B_n^\delta(\omega) = \begin{cases} B_n(\omega), & \text{если } \operatorname{sp} B_n^*(\omega)\,B_n(\omega) \leqslant \delta; \\ 0, & \text{если } \operatorname{sp} B_n^*(\omega)\,B_n(\omega) > \delta, \end{cases} \quad U_n^\delta = \mathbf{M}B_n^\delta(\omega).$$

Для того чтобы бесконечное произведение (3.22) *сходилось в* $\mathbf{L}(\Omega,\ \mathbf{X})$ *к невырожденному оператору, необходимо, чтобы при* $\delta < 1$ *выполнялись условия:*

1) *бесконечное произведение*

$$\prod_{n=\infty}^{1} (I + U_n^{\delta})$$

сходилось в $\|\cdot\|_2$ *к невырожденному оператору;*

2) *сходился ряд* $\Sigma \mathbf{M} \operatorname{sp} (B_n^{\delta}(\omega) - U_n^{\delta})^* (B_n^{\delta}(\omega) - U_n^{\delta})$;

3) $\Sigma \mathbf{P} \{\operatorname{sp} B_n^*(\omega) B_n(\omega) > \delta\} < \infty$

и достаточно, чтобы эти условия выполнялись при некотором $\delta > 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Легко проверить, что из сходимости произведения неслучайных операторов $\prod_{k=\infty}^{1} (I + A_k)$ в норме $\|\cdot\|_2$ вытекает, что $\| A_k \|_2 \to 0$. Поэтому из сходимости бесконечного произведения (3.22) в норме $\|\cdot\|_2$ с вероятностью 1 следует, что $\operatorname{sp} B_n^*(\omega) B_n(\omega) \to \to 0$ с вероятностью 1, а из независимости величин $\operatorname{sp} B_n^*(\omega) B(\omega)$ вытекает, что $\forall \delta > 0$

$$\sum_n \mathbf{P} \{\operatorname{sp} B_n^*(\omega) B_n(\omega) > \delta\} < \infty$$

(ср., например, теорема 5 [8, с. 91]). Необходимость условия 3) доказана. Если оно выполнено, то произведение (3.22) и

$$\prod_{\infty}^{1} (I + B_n^{\delta}(\omega)) \tag{3.28}$$

отличаются только конечным числом (невырожденных) сомножителей (начиная с некоторого n $B_n^{\delta}(\omega) = B_n(\omega)$) и, следовательно, сходятся одновременно. Из сходимости произведения (3.28) вытекает, что величины

$$\eta_n = \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2$$

ограничены по вероятности. Покажем, что тогда у них существуют равномерно ограниченные моменты. Введем величины

$$\eta_{l,n} = \left\| \prod_{k=n}^{l+1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2, \quad l < n.$$

Нетрудно видеть, что для всех $l < n$

$$\eta_n \leqslant (1 + \eta_l)(1 + \eta_{l,n}) - 1.$$

Пусть ν — такой номер, что η_ν впервые больше $\alpha > 0$. Тогда, поскольку $\eta_{\nu-1} < \alpha$, $\eta_{\nu-1,\nu} < \delta$, то $\eta_\nu < (1+\alpha)(1+\delta) - 1 = \alpha + \delta(1+\alpha)$. Если теперь ν_1 такой номер, что η_{ν_1} впервые больше β ($\beta > (1+\alpha)(1+\delta)$), то $\nu < \nu_1$ и, значит,

$$(1+\alpha)(1+\delta)(1+\eta_{\nu,\nu_1}) > \beta;$$

$$\eta_{\nu,\nu_1} > \frac{\beta}{(1+\alpha)(1+\delta)} - 1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{\sup_n \eta_n > \beta - 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{\sup_n \eta_n > \alpha\} \mathbf{P}\left\{\sup_{n,m} \eta_{n,m} > \frac{\beta}{(1+\alpha)(1+\delta)}\right\}.$$

Полагая $\beta = (1+\alpha)^2(1+\delta)$, находим

$$\mathbf{P}\{\sup_n \eta_n > (1+\alpha)^2(1+\delta)\} \leqslant \mathbf{P}^2\{\sup_{m>n>0} \eta_{n,m} > \alpha\}.$$

Аналогично устанавливаем неравенство

$$\mathbf{P}\{\sup_n \eta_n > (1+\alpha)^k(1+\delta)^{k-1} - 1\} \leqslant \mathbf{P}^k\{\sup_{m>n\geqslant 0} \eta_{n,m} > \alpha\}.$$

Точно так же

$$\mathbf{P}\{\sup_{n\geqslant l} \eta_{l,n} > (1+\alpha)^k(1+\delta)^{k-1} - 1\} \leqslant \mathbf{P}^k\{\sup_{m>n\geqslant l} \eta_{n,m} > \alpha\}.$$

Из сходимости произведения (3.28) в $\|\cdot\|_2$ вытекает, что для любого $\alpha > 0$ можно указать такое l, что при $m > n \geqslant l$

$$\mathbf{P}\{\sup_{m>n\geqslant l} \eta_{m,n} > \alpha\} < \varepsilon.$$

Следовательно, если только ε выбрано так, что

$$\Sigma[(1+\alpha)^k(1+\delta)^{k-1}]^r \varepsilon^k < \infty,$$

то

$$\mathbf{M}(\sup_{n\geqslant l} \eta_{l,n})^r \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\alpha)^k(1+\delta)^{k-1}]^r \mathbf{P}\{\sup_{n\geqslant l} \eta_{l,n} >$$

$$> (1+\alpha)^{k-1}(1+\delta)^{k-2} - 1\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} [(1+\alpha)^k \, 1+\delta)^{k-1}]^r \varepsilon^k.$$

В то же время $\eta_l \leqslant (1+\delta) - 1$. Следовательно,

$$\mathbf{M}|\sup_n \eta_n|^r < \infty. \tag{3.29}$$

Далее

$$\left\| \prod_{k=n}^{1} (I + \mathbf{M}B_k^{\delta}(\omega)) - \prod_{k=m}^{1} (I + \mathbf{M}B_k^{\delta}(\omega)) \right\|_2 =$$

$$= \left\| \mathbf{M}\left(\prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) \right) - \prod_{k=m}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) \right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M} \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - \prod_{k=m}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) \right\|_2 \to 0$$

при $m, n \to \infty$, так как

$$\left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - \prod_{k=m}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) \right\|_2 \to 0$$

по вероятности, кроме того, эта величина мажорируется выражением

$$2 \sup_n \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\| = 2 \sup_n \eta_n,$$

а $\mathbf{M} \sup\limits_n \eta_n < \infty$, как установлено выше. Таким образом,

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + \mathbf{M}B_k^{\delta}(\omega)) - \prod_{k=m}^{1} (I + \mathbf{M}B_k^{\delta}(\omega)) \right\|_2 = 0.$$

Тем самым доказана необходимость условия 1). Из (3.29) вытекает, что величина

$$\rho_n = \mathbf{M}\eta_n^2 = \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\left(\prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right)^* \left(\prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right) =$$

$$= \mathbf{M} \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2^2$$

ограничена.

Но тогда ограниченной будет и величина

$$\mathbf{M} \left\| \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2^2,$$

так как

$$\left\| \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} \right\| \left\| \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) - I \right\|_2 +$$

$$+ \left\| \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} - I \right\|_2,$$

последнее слагаемое справа ограничено. поскольку $\prod\limits_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta)$ сходится в $\|\cdot\|_2$ к невырожденному оператору, значит, $(\prod\limits_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta))^{-1}$ будет сходиться в $\|\cdot\|_2$ к обратному оператору от $\prod\limits_{k=\infty}^{1}(I+U_k^\delta)$. Кроме того,

$$\left\|\left(\prod_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta)\right)^{-1}\right\| \leqslant 1+\left\|\left(\prod_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta)\right)^{-1}-I\right\|_2.$$

Положим

$$\left(\prod_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta)\right)^{-1}\prod_{k=n}^{1}(I+B_k^\delta(\omega))-I=C_n(\omega),$$

тогда (см. п. 2 § 8)

$$(I+C_{n+1}(\omega))=(I+\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega))(I+C_n(\omega)),$$

где

$$\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)=\left[\prod_{k=n+1}^{1}(I+U_k^\delta)\right]^{-1}(B_{n+1}^\delta(\omega)-U_{n+1}^\delta)\prod_{k=n}^{1}(I+U_k^\delta). \tag{3.30}$$

Очевидно, $M\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)=0$. Так как $C_n(\omega)$ — мартингал, то и $MC_n(\omega)=0$. В силу независимости $C_n(\omega)$ и $\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)$

$$M\,\mathrm{sp}\,C_n^*(\omega)\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)=M\,\mathrm{sp}\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)C_n(\omega)=$$
$$=M\,\mathrm{sp}\,C_n^*(\omega)\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)C_n(\omega)=M\,\mathrm{sp}\,C_n^*(\omega)B_{n+1}^{\delta*}(\omega)C_n(\omega)=$$
$$=M\,\mathrm{sp}\,B_{n+1}^{\delta*}(\omega)B_{n+1}^\delta(\omega)C_n(\omega)=MC_n^*(\omega)B_{n+1}^{\delta*}(\omega)B_{n+1}^\delta(\omega)=0.$$

Значит,

$$M\,\mathrm{sp}\,C_{n+1}^*(\omega)C_{n+1}(\omega)=M\,\mathrm{sp}\,(C_n(\omega)+\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)+$$
$$+B_{n+1}^\delta(\omega)C_n(\omega))^*(C_n(\omega)+\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)+\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)C_n(\omega))=$$
$$=M\,\mathrm{sp}\,[C_n^*(\omega)C_n(\omega)+\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)+$$
$$+C_n^*(\omega)\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega)C_n(\omega)]\geqslant$$
$$\geqslant M\,\mathrm{sp}\,C_n^*(\omega)C_n(\omega)+M\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)\tilde{B}_{n+1}^\delta(\omega).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)\,B_{n+1}^{\delta}(\omega) \leqslant \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C_n^*(\omega)\,C_n(\omega),$$

слева стоит ограниченная величина. Заметим теперь, что

$$\mathrm{sp}\,(UBV)^*(UBV) = \mathrm{sp}\,(V^*B^*U^*UB^*V) \leqslant$$
$$\leqslant \|V\|^2\,\mathrm{sp}\,B^*U^*UB = \|V\|^2\,\mathrm{sp}\,UBB^*U^* \leqslant \|V\|^2\,\|U\|^2\,\mathrm{sp}\,B^*B.$$

Поэтому, учитывая (3.30), получаем

$$\mathrm{sp}\,(B_{n+1}^{\delta}(\omega) - U_{m+1}^{\delta})^*\,(B_{n+1}^{\delta}(\omega) - U_{n+1}^{\delta}) \leqslant$$
$$\leqslant \left\| \prod_{k=n+1}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right\|^2 \left\| \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} \right\|^2 \mathrm{sp}\,\tilde{B}_{n+1}^{\delta}\tilde{B}_n^{\delta}.$$

Поскольку множители справа при $\mathrm{sp}\,\tilde{B}_{n+1}^{\delta*}(\omega)\tilde{B}_{n+1}^{\delta}(\omega)$ ограничены (условие 1) уже установлено), то существует такая постоянная α, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,(B_k^{\delta}(\omega) - U_k^{\delta})^*\,(B_k^{\delta}(\omega) - U_k^{\delta}) \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_k^{\delta*}(\omega)\,\tilde{B}_k^{\delta}(\omega).$$

Необходимость условия 2) доказана.

Достаточность. Как отмечалось, при выполнении условия 3) бесконечные произведения

$$\prod_{\infty}^{1} (I + B_k(\omega)) \ \text{ и } \prod_{\infty}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega))$$

сходятся одновременно. Докажем сходимость второго произведения. Из условия 1) вытекает, что оно будет сходиться, если существует предел в $\|\cdot\|_2$ выражения

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=n}^{1} (I + U_k^{\delta}) \right)^{-1} \prod_{k=n}^{1} (I + B_k^{\delta}(\omega)) = \prod_{\infty}^{1} (I + \tilde{B}_k^{\delta}(\omega)),$$

где $\tilde{B}_k^{\delta}(\omega)$ выражается через $B_k^{\delta}(\omega)$ по формуле (3.30). Из условия 2) и (3.30) вытекает, что

$$\sum \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_k^{\delta}(\omega)\,\tilde{B}_k^{\delta}(\omega) < \infty. \tag{3.31}$$

Если

$$C_n(\omega) = \prod_{n}^{1} (I + \tilde{B}_k^{\delta}(\omega)) - I, \quad C_{n+1}(\omega) =$$
$$= C_n(\omega) + \tilde{B}_{n+1}^{\delta}(\omega) + \tilde{B}_{n+1}^{\delta}(\omega)\,C_n(\omega),$$

то, как установлено при доказательстве необходимости,

$$\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_{n+1}(\omega)\,C^*_{n+1}(\omega) = \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,C^*_n(\omega) +$$
$$+ \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega) + \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega)\,C_n(\omega). \tag{3.32}$$

Но

$$\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega)\,C_n(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\,\|C_n(\omega)\|^2\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,C_n(\omega)\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega) =$$
$$= \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,C_n(\omega)\,\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega)$$

(вследствие независимости $C_n(\omega)$ и $B^{\delta}_{n+1}(\omega)$). Поэтому

$$1 + \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_{n+1}(\omega)\,C_{n+1}(\omega) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,C_n(\omega))\,(1 + \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_{n+1}(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_{n+1}(\omega));$$

$$\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,C^*_n(\omega)\,C_n(\omega) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}(1 + \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}^{\delta*}_k(\omega)\,\tilde{B}^{\delta}_k(\omega)) - 1 \tag{3.33}$$

(правая часть последнего неравенства ограничена в силу (3.31)). Таким образом, $C_n(\omega)$ является мартингалом в гильбертовом пространстве $\mathbf{X}_2$ линейных операторов Гильберта — Шмидта (т. е. таких операторов A, для которых $\mathrm{sp}\,A^*A < \infty$) со скалярным произведением $(A, B) = \mathrm{sp}\,B^*A$ и нормой $\|A\|_2$. Поскольку $\mathbf{M}\,\|C_n(\omega)\|_2^2$ ограничено, то сходимость $C_n(\omega)$ в норме $\|\cdot\|_2$ вытекает из замечания к теореме 3 § 7.

Доказать невырожденность произведения (3.22) можно, рассматривая произведение $\prod_{n=\infty}^{m}(I + B_n(\omega))$ при достаточно больших m. Произведения $\prod_{n=\infty}^{m}(I + B^{\delta}_n(\omega))$ и $\prod_{n=\infty}^{m}(I + \tilde{B}^{\delta}_n(\omega))$ одновременно невырождены, а последнее произведение невырождено, если

$$\left\|\prod_{n=\infty}^{m}(I + \tilde{B}^{\delta}_n(\omega)) - I\right\| < 1.$$

Используя (3.33) для произведения $\prod\limits_{n=\infty}^{m}$, можем записать

$$\mathbf{P}\left\{\left\|\prod_{n=\infty}^{m}(I+\tilde{B}_n^{\delta}(\omega))-I\right\|<1\right\}\geqslant 1-$$

$$-\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\left(\prod_{n=\infty}^{m}(I+\tilde{B}_n^{\delta}(\omega))-I\right)^{*}\left(\prod_{n=\infty}^{m}(I+\tilde{B}_n^{\delta}(\omega))-I\right)\geqslant$$

$$\geqslant 2-\prod_{n=m}^{\infty}(1+\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_n^{\delta*}(\omega)\,\tilde{B}_n^{\delta}(\omega)).$$

Далее

$$\mathbf{P}\left\{\prod_{n=\infty}^{m}(I+B_n(\omega))\neq\prod_{n=\infty}^{m}(I+B_n^{\delta}(\omega))\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\mathrm{sp}\,B_n^{*}(\omega)\,B_n(\omega)>\delta\right\}.$$

Следовательно, произведение $\prod\limits_{n=\infty}^{m}(I+B_n(\omega))$ не вырождено с вероятностью, не меньшей, чем

$$2-\prod_{n=m}^{\infty}(1+\mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,\tilde{B}_n^{\delta*}(\omega)\,\tilde{B}_n^{\delta}(\omega))-\sum_{n=m}^{\infty}\mathbf{P}\left\{\mathrm{sp}\,B_n^{*}(\omega)\,B_n(\omega)>\delta\right\},$$

а последнее выражение стремится к 1 при $m\to\infty$. ■

Замечание. Если в теореме 4 условие 1) заменить условием 1′, бесконечное произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(I+U_k^{\delta})$$

сходится в $\|\cdot\|_2$ к невырожденному оператору, то утверждения теоремы будут справедливы для бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(I+B_k(\omega))$.

§ 9. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ МАРТИНГАЛЫ

1. Некоторые свойства числовых непрерывных локальных мартингалов

Пусть ξ_t, $t\geqslant 0$ — непрерывный случайный процесс в $\mathbb{R}$. Он называется непрерывным локальным мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$, если существует такая последовательность марковских моментов τ_n (относительно потока $\mathfrak{f}_t$), что $\tau_n \uparrow \infty$ с вероятностью 1 и $\xi_{t\wedge\tau_n}$ является мартингалом относительно $\mathfrak{f}_t$. Если ξ_t — непрерывный локальный мартингал, а

$$\zeta_n = \inf\{s : |\xi_s| > n\}, \ \inf\varnothing = +\infty,$$

то $\xi_{t\wedge\zeta_n}$ также будет мартингалом. Это вытекает из того, что $\xi_{t\wedge\tau_m\wedge\zeta_n}$ является мартингалом для всех m [9, с. 21], при этом

$$\mathbf{M}\,|\xi_{t\wedge\tau_m\wedge\zeta_n} - \xi_{t\wedge\tau_l\wedge\zeta_n}|^2 \to 0 \text{ при } m, l \to \infty,$$

так как $\xi_{t\wedge\tau_m\wedge\zeta_n} - \xi_{t\wedge\tau_l\wedge\zeta_n} \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому $\xi_{t\wedge\varsigma_n}$ как среднеквадратический предел мартингалов является также мартингалом. Таким образом, при определении непрерывного локального мартингала всегда в качестве моментов τ_n можно использовать моменты ς_n.

Для любого непрерывного локального мартингала ξ_t существует такой непрерывный неубывающий процесс $\langle\xi\rangle_t$ ($\langle\xi\rangle_0 = 0$), для которого $\xi_t^2 - \langle\xi\rangle_t$ также является непрерывным локальным мартингалом (см. [9, с. 51—52; 56—57], теорема 20). Процесс $\langle\xi\rangle_t$ называется (квадратической) характеристикой мартингала ξ_t. Если ξ_t и η_t — непрерывные локальные мартингалы, то непрерывный процесс ограниченной вариации

$$\frac{1}{2}(\langle\xi+\eta\rangle_t - \langle\xi\rangle_t - \langle\eta\rangle_t) = \langle\xi, \eta\rangle_t \tag{3.34}$$

обладает тем свойством, что $\xi_t\eta_t - \langle\xi, \eta\rangle_t$ является локальным мартингалом, где процесс $\langle\xi, \eta\rangle_t$ называется взаимной характеристикой ξ_t и η_t.

Лемма 1 Характеристика локального мартингала может быть вычислена по формуле

$$\langle\xi\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi_{\frac{k+1}{n}t} - \xi_{\frac{k}{n}t}\right)^2, \tag{3.35}$$

где предел понимается в смысле сходимости по вероятности (см. [9, с. 61], теорема 22). Из формулы (3.34) следует, что взаимная характеристика непрерывных локальных мартингалов может быть вычислена как предел по вероятности

$$\langle\xi, \eta\rangle_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\xi_{\frac{k+1}{n}t} - \xi_{\frac{k}{n}t}\right)\left(\eta_{\frac{k+1}{n}t} - \eta_{\frac{k}{n}t}\right). \tag{3.36}$$

Если ξ_t — непрерывный локальный мартингал, то для всех $\varepsilon > 0$ и $N > 0$

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\xi_t| > \varepsilon\} \leqslant \frac{N}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}\{\langle\xi\rangle_T > N\} \tag{3.37}$$

(см. [9, с. 63], лемма 9). Если ξ_t — квадратично интегрируемый мартингал, т. е. $\sup_{t<\infty}\mathbf{M}\xi_t^2 < \infty$, то для любого марковского момента τ $\mathbf{M}\,\xi_\tau^2 = \mathbf{M}\,\langle\xi\rangle_\tau$ ([9, с. 52], формула (44)). В общем же случае имеет место неравенство

$$\mathbf{M}\xi_\tau^2 \leqslant \mathbf{M}\,\langle\xi\rangle_\tau.$$

Однако, если

$$\sup_t \mathbf{M}\xi_{t\wedge\tau}^2 < \infty, \quad \mathbf{M}\xi_\tau^2 = \mathbf{M}\,\langle\xi\rangle_\tau \tag{3.38}$$

(это вытекает из того, что $\xi_{t\wedge\tau}$ в этом случае квадратично интегрируемый мартингал).

Теорема 1. *Пусть $\xi_n(t)$ — последовательность непрерывных локальных мартингалов, для которой $\langle\xi_n - \xi_m\rangle_t \to 0$ для всех t при $m,\ n \to \infty$. Тогда существует такой непрерывный локальный мартингал $\xi(t)$, что $\langle\xi_n - \xi\rangle_t \to 0$ по вероятности. При этом для всех $T > 0$*

$$\sup_{t\leqslant T}|\xi_n(t) - \xi(t)| \to 0, \quad \langle\xi_n\rangle_T \to \langle\xi\rangle_T.$$

Доказательство. Из формулы (3.35) вытекают неравенства

$$\langle\xi_n\rangle_t \leqslant 2\langle\xi_m\rangle_t + 2\langle\xi_n - \xi_m\rangle_t;$$

$$|\langle\xi_n\rangle_t - \langle\xi_m\rangle_t| \leqslant \sqrt{\langle\xi_n - \xi_m\rangle_t\,(\langle\xi_n\rangle_t + \langle\xi_m\rangle_t)}. \tag{3.39}$$

Из первого неравенства вытекает ограниченность $\langle\xi_n\rangle_t$ по вероятности, из второго (учитывая ограниченность) — сходимость $\langle\xi_n\rangle_t$ к некоторому неубывающему процессу $\alpha(t)$. Поскольку правая часть монотонна по t, то $\langle\xi_1\rangle_t$ равномерно сходится к $\alpha(t)$ на каждом конечном интервале. Далее, на основании формулы (3.37) получаем

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\xi_n(t) - \xi_m(t)| > \varepsilon\} \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}\{\langle\xi_n - \xi_m\rangle_T > \delta\}.$$

По условию $\mathbf{P}\{\langle\xi_n - \xi_m\rangle_T > \delta\} \to 0$ при $n,\ m \to \infty$ при всех δ и T. Значит

$$\lim_{n,m\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\xi_n(t) - \xi_m(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Таким образом, последовательность процессов $\xi_n(t)$ равномерно сходится по вероятности к некоторому непрерывному процессу $\xi(t)$. Выберем так подпоследовательность n_k, чтобы

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\leqslant k}|\xi_{n_k}(t)-\xi(t)|>\frac{1}{k}\right\}\leqslant\frac{1}{k^2};$$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{t\leqslant k}|\langle\xi_{n_k}\rangle_t-\alpha(t)|>\frac{1}{k}\right\}\leqslant\frac{1}{k^2}.$$

Тогда $\xi_{n_k}(t)\to\xi(t)$ равномерно на каждом конечном интервале с вероятностью 1. Следовательно, с вероятностью 1 для всех T величина конечна

$$\eta_T=\sup_{t\leqslant T}\sup_k[|\xi_{n_k}(t)|,\ \langle\xi_{n_k}\rangle_t].$$

Последовательность марковских моментов времени τ_l

$$\tau_l=\inf\{T:\eta_T>l\}$$

обладает свойством: $\tau_l\to\infty$ при $l\to\infty$. Поскольку $\xi_{n_k}(t\wedge\tau_l)$ являются мартингалами и $\xi_{n_k}(t\wedge\tau_l)\to\xi(t\wedge\tau_l)$, а $\mathbf{M}|\xi_{n_k}(t\wedge\tau_l)|^2<l$, то $\xi(t\wedge\tau_l)$ также мартингал. Таким образом, $\xi(t)$ — непрерывный локальиый мартингал, точно так

$$\xi^2_{n_k}(t\wedge\tau_l)-\langle\xi_{n_k}\rangle_{t\wedge\tau_l}\to\xi^2(t\wedge\tau_l)-\alpha(t\wedge\tau_l)$$

и

$$\mathbf{M}|\xi^2_{n_k}(t\wedge\tau_l)-\langle\xi_{n_k}\rangle_{t\wedge\tau_l}|\leqslant l^2+l.$$

Значит $\alpha(t)$ будет характеристикой непрерывного локального мартингала $\xi(t)$.

Замечание. Если последовательность непрерывных локальных мартингалов $\xi_n(t)$ такова, что для всех T и $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T}|\xi_n(t)|>\varepsilon\}=0,$$

то $\langle\xi_n\rangle_t\to 0$ для всех t. Действительно, если бы последнее условие не выполнялось, то, переходя к некоторой подпоследовательности, мы имели бы $\mathbf{P}\{\langle\xi_{n_k}\rangle_T>\delta\}>\delta$ при некотором $\delta>0$.

Обозначим

$$\tau_k=\inf[s:|\xi_{n_k}(s)|>\rho].$$

Тогда на основании (3.38)

$$\mathbf{M}\xi^2_{n_k}(\tau_k\wedge T)=\mathbf{M}\langle\xi_{n_k}\rangle_{T\wedge\tau_k}.$$

Значит

$$\rho^2 \geqslant \mathbf{M}\,\langle \xi_{n_k}\rangle_{T\wedge\tau_k} \geqslant \delta\mathbf{P}\,\{\{\langle \xi_{n_k}\rangle_T > \delta\} \cap \{\tau_k > T\}\} \geqslant$$
$$\geqslant \delta\,[\delta - \mathbf{P}\,\{\tau_k \leqslant T\}].$$

Поскольку для всех $\rho > 0\mathbf{P}\,\{\tau_k \leqslant T\} \to 0$ при $k \to \infty$, то $\rho^2 \geqslant \delta^2$, каково бы ни было $\rho > 0$, что противоречит предположению $\delta > 0$.

Таким образом, если последовательность непрерывных локальных мартингалов $\xi_n(t)$ равномерно сходится к некоторому процессу на каждом конечном интервале по вероятности, то тогда $\xi_n(t) - \xi_m(t)$ будет также сходиться к нулю при $n, m \to \infty$ $\langle \xi_n - \xi_m\rangle_t \to 0$ и будут выполнеиы условия теоремы 1. Поэтому предельный процесс будет мартингалом, и $\langle \xi_n\rangle_t \to \langle \xi_0\rangle_t$ равномерно на любом конечном интервале по вероятности.

2. Непрерывные мартингалы со значениями в X

Рассмотрим $\mathbf{X}$-значный непрерывный процесс $x(t, \omega)$, $t \geqslant 0$. Он называется непрерывным локальным мартингалом, если для любого $\in \mathbf{X}$ процесс $(x, (t, \omega), y)$ является локальным мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$, где $\mathfrak{f}_t$ порождена величинами $x(s, \omega)$, $s \leqslant t$. Обозначим взаимную характеристику локальных мартингалов $(x, (t\ \omega), x)$ и $(x, (t, \omega), y)$ через $\alpha_t(\omega, x, \ )$. Из формулы (3.36) вытекает, что

$$\alpha_t(\omega, x, y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(x\left(\frac{k+1}{n}t, \omega\right) - \right.$$
$$\left. - x\left(\frac{k}{n}t, \omega\right), x\right)\left(x\left(\frac{k+1}{n}t, \omega\right) - x\left(\frac{k}{n}t, \omega\right), y\right)$$

(предел по вероятности). Так как выражение под знаком предела имеет вид $(A_t^{(n)}(\omega)\,x, y)$, где $A_t^{(n)}(\omega)$ — случайный оператор вида

$$A_t^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\langle x\left(\frac{k+1}{n}t, \omega\right) - \right.$$
$$\left. - x\left(\frac{k}{n}t, \omega\right) \circ x\left(\frac{k+1}{n}t, \omega\right) - x\left(\frac{k}{n}t, \omega\right)\right\rangle,$$

то на основании теоремы 1 § 3

$$\alpha_t(\omega, x, y) = (A_t(\omega) x, y),$$

где $A_t(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$. Очевидно также, что $(A_t(\omega) x, y) = (A_t(\omega) y, x)$, $(A_t(\omega) x, x) \geqslant 0$, так что $A_t(\omega)$ — неотрицательный симметричный слабый случайный оператор. Этот оператор обозначается $\langle x \rangle_t(\omega)$ и называется операторной характеристикой локального мартингала $x(t, \omega)$. Из определения вытекают следующие свойства:

1) $(\langle x \rangle_t(\omega) x, y)$ непрерывно по t (с вероятностью 1) для всех $x, y \in \mathbf{X}$;

2) $(\langle x \rangle_t(\omega) x, x)$ — неубывающая непрерывная функция.

Более важное свойство сформулировано в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный локальный $\mathbf{X}$-значный мартингал, $\langle x \rangle_t(\omega)$ — его операторная характеристика. Если $\{e_k\}$ — ортонормированный базис, то*

$$\sigma_t(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle x \rangle_t(\omega) e_k, e_k) \tag{3.40}$$

определено и является непрерывной неубывающей функцией, причем

$$|x_t(\omega)|^2 - \sigma_t(\omega)$$

также является локальным мартингалом.

Доказательство. Рассмотрим ряд из непрерывных локальных числовых мартингалов

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(x(t, \omega) e_k)^2 - (A_t(\omega) e_k, e_k)]$$

и покажем, что он сходится к некоторому мартингалу. В то же время

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x(t, \omega), e_k)^2 = |x(t, \omega)|^2 < \infty.$$

Далее для любого n, обозначая

$$\zeta_n = \inf [t : |x(t, \omega)| > n],$$

получаем

$$\mathbf{M} \sum_{k=1}^{m} (\langle x \rangle_{t \wedge \zeta_n}(\omega) e_k, e_k) = \mathbf{M} \sum_{k=1}^{m} (x(t \wedge \zeta_n, \omega), e_k)^2 \leqslant n.$$

Отсюда, учитывая неотрицательность $(A_{t\wedge\zeta_n}(\omega)e_k, e_k)$, убеждаемся, что сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\langle x\rangle_{t\wedge\zeta_n}(\omega)e_k, e_k)$$

для всех n, а значит, и сходится ряд (3.40).

Поскольку при $s<t$

$$\sigma(s,\omega)-\sum_{k=1}^{m}(A_s(\omega)e_k, e_k)=\sum_{k=m+1}^{\infty}(A_s(\omega)e_k, e_k)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=m+1}^{\infty}(A_t(\omega)e_k, e_k)=\sigma(t,\omega)-\sum_{k=1}^{m}(A_t(\omega)e_k, e_k),$$

то ряд (3.40) сходится равномерно и, следовательно, $\sigma(t,\omega)$ — непрерывная неубывающая функция. Пусть теперь

$$\zeta_n'=\inf[t:\sigma(t,\omega)>n];$$

$$\tau_n=\zeta_n\wedge\zeta_n'.$$

Тогда $\tau_n\uparrow\infty$ при $n\to\infty$ с вероятностью 1.

$$\sum_{k=1}^{m}[(x(t\wedge\tau_n,\omega), e_k)^2-(\langle x\rangle_{t\wedge\tau_n}(\omega)e_k, e_k)]$$ —

последовательность мартингалов (по m), ограниченных величиной $2n$ (не зависящей от m), сходящаяся к процессу

$$|x(t\wedge\tau_n,\omega)|^2-\alpha(t\wedge\tau_n,\omega),$$

являющегося также мартингалом (при любом n). Значит, $|x(t,\omega)|^2-\alpha(t,\omega)$ — непрерывный локальный мартингал.

Замечание. Пусть $x(t,\omega)$ и $y(t,\omega)$ — непрерывные локальные мартингалы, тогда таким же будет и процесс $x(t,\omega)+y(t,\omega)$. Поскольку

$$(x(t,\omega), y(t,\omega))=\frac{1}{2}[|x(t,\omega)+y(t,\omega)|^2-|x(t,\omega)|^2-$$

$$-|y(t,\omega)|^2],$$

то

$$(x(t,\omega), y(t,\omega))-\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\{(\langle x+y\rangle_t(\omega)e_k, e_k)-$$

$$-(\langle x\rangle_t(\omega)e_k, e_k)-(\langle y\rangle_t(\omega)e_k, e_k)\}\Big)$$

будет также локальным мартингалом. Выражение

$$\langle x, y\rangle_t(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\{\langle x+y\rangle_t(\omega) - \langle x\rangle_t(\omega) - \langle y\rangle_t(\omega)\} e_k, e_k)$$

называется взаимной характеристикой непрерывных локальных X-значных мартингалов. Эта взаимная характеристика может быть вычислена как предел по вероятности

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}t, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t, \omega\right),\right.$$
$$\left. y\left(\frac{k}{n}t, \omega\right) - y\left(\frac{k-1}{n}t, \omega\right)\right).$$

Достаточно доказать это для $y = x$. Пусть $\tau_\alpha = \inf[t; \langle x\rangle_t > \alpha]$. Очевидно, достаточно проверить, что

$$\langle x\rangle_{t\wedge\tau_\alpha} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|x\left(\frac{k}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right)\right|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right), e_m\right)^2,$$

так как

$$\mathbf{M}\sum_{k=1}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right), e_m\right)^2 =$$
$$= \mathbf{M}(\langle x\rangle_{t\wedge\tau_\alpha}(\omega) e_m, e_m),$$
$$\sum_m \mathbf{M}(\langle x\rangle_{t\wedge\tau_\alpha}(\omega) e_m, e_m) = \alpha < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right), e_m\right)^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x\left(\frac{k}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right) - x\left(\frac{k-1}{n}t\wedge\tau_\alpha, \omega\right), e_m\right)^2 =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}(\langle x\rangle_{t\wedge\tau_\alpha}(\omega) e_m, e_m).$$

Теорема 3. *Пусть $x_n(t, \omega)$ — последовательность непрерывных X-значных локальных мартингалов относительно* *потока σ-алгебр* $\mathfrak{f}_t$, $\langle x_n - x_m\rangle_t(\omega)$ *— характеристика локального мартингала* $x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)$. *Если для некоторого базиса* $\{e_k\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_n - x_m\rangle_t(\omega) e_k, e_k) \tag{3.41}$$

на любом конечном интервале равномерно сходится к нулю по вероятности, то существует такой непрерывный $\mathbf{X}$*-значный локальный мартингал* $x_0(t, \omega)$, *что* $x_n(t, \omega) \to x_0(t, \omega)$ *при* $x, y \in \mathbf{X}$, $(\langle x_n\rangle_t(\omega) x, y) \to (\langle x_0\rangle_t(\omega) x, y)$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_n\rangle(\omega) e_k, e_k) \to \sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_0\rangle(\omega) e_k, e_k)$ *равномерно на любом конечном интервале по вероятности.*

Доказательство. Из неравенств (3.39) легко получить ограниченность $\sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_n\rangle_t(\omega) e_k, e_k)$ относительно n по вероятности и, следовательно, равномерную сходимость по вероятности на каждом конечном промежутке последовательности

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_n\rangle_t(\omega) e_k, e_k)$$

к некоторому пределу $\sigma(t, \omega)$.
Так как

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \leqslant T} |x_n(t, \omega) - x_m(t, \omega)| > \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta}{\varepsilon^2} + \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} (\langle x_n - x_m\rangle_t(\omega) e_k, e_k) > \delta\right\},$$

то из условий теоремы вытекает, что $x_n(t, \omega)$ равномерно сходится на каждом конечном интервале к некоторому пределу $x_0(t, \omega)$. При этом для всех $x \in \mathbf{X}$ $(x_n(t, \omega), x)$ сходится к $(x_0(t, \omega), x)$, а значит на основании замечания к теореме 1 характеристика $(x_n(t, \omega), x)$ также сходится к $(x_0(t, \omega), x)$. Значит

$$(\langle x_n\rangle_t(\omega) x, x) \to (\langle x_0\rangle_t(\omega) x, x),$$

$$(\langle x_n\rangle_t(\omega) x, y) = \frac{1}{2}[(\langle x_n\rangle_t(\omega)(x + y), x + y) -$$
$$- (\langle x_n\rangle_t(\omega) x, x) - (\langle x_n\rangle_t(\omega) y, y)] \to (\langle x_0\rangle_t(\omega) x, y)$$

равномерно на каждом конечном интервале по вероятности. Выбрав подпоследовательность n_m так, чтобы $x_{n_m}(t, \omega)$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(\langle x_{n_m}\rangle_t(\omega)\, e_k, e_k)$ сходились к своим пределам равномерно на каждом конечном интервале с вероятностью 1 так, как в теореме 1, убеждаемся, что $x_0(t, \omega)$ является мартингалом и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\langle x_0\rangle_t(\omega)\, e_k, e_k) = \sigma(t, \omega). \quad \blacksquare$$

Замечание. Следующее утверждение аналогично замечанию к теореме 1. Пусть $x_n(t, \omega)$ — последовательность непрерывных **X**-значных локальных мартингалов. Если существует такой **X**-значный процесс $x_0(t, \omega)$, что для всех $T > 0$

$$\sup_{t \leqslant T} | x_n(t, \omega) - x_0(t, \omega) |$$

сходится по вероятности к нулю, то:

а) $x_0(t, \omega)$ является непрерывным локальным мартингалом;

б) для всех $t > 0$ $\sum_{k=1}^{\infty}(\langle x_n - x_0\rangle_t(\omega)\, e_k, e_k) \to 0$ по вероятности; в) для всех $x, y \in \mathbf{X}$ $(\langle x_n\rangle_t(\omega)\, x, y) \to (\langle x_0\rangle_t(\omega)\, x, y)$ равномерно на каждом конечном интервале по вероятности.

3. Операторный непрерывный мартингал

Пусть $\{A_t(\omega),\ t \geqslant 0\}$ — слабый операторный мартингал. Назовем его непрерывным (операторным) мартингалом, если: 1) $A_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ для всех $t \geqslant 0$; 2) $A_t(\omega)x$ — процесс с вероятностью 1 непрерывный в **X**.

Если рассмотреть $A_t(\omega)\, x$ как функцию двух переменных t и x, то по t она непрерывна, по x непрерывна по вероятности. Оказывается, что $\sup_{t \leqslant T} | A_s(\omega)\, x - A_t(\omega)\, y | \to 0$ по вероятности для всех $T > 0$ при $x - y \to 0$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. Если $A_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ при $t \geqslant 0$ и $A_t(\omega)\, x$ непрерывно по x и по вероятности, то для всех $T > 0$ величина

$$\psi(x) = \sup_{t \leqslant T} | A_t(\omega)\, x |$$

ограничена по вероятности при $| x | \leqslant 1$.

Доказательство. Положим

$$\psi_n(x) = \sup_{k\leq n} |A_{\frac{kT}{n}}(\omega)\, x|.$$

Функция $\psi_n(x)$ непрерывна по x по вероятности и $\psi_n(x) \uparrow \uparrow \psi(x)$. Кроме того,

$$\psi(x+y) \leq \psi(x) + \psi(y).$$

Используя эти свойства, доказать лемму можно аналогично лемме § 2. ■

Легко убедиться, что $A_t(\omega)\, x$ будет непрерывным локальным мартингалом в $\mathbf{X}$. Обозначим

$$\sigma_t(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle A(\omega)\, x\rangle_t\, e_k, e_k),$$

где $\langle A(\omega)\, x\rangle_t$ — операторная характеристика локального $\mathbf{X}$-значного мартингала $A_t(\omega)\, x$.

Рассмотрим выражение

$$\sigma_t(x, y, \omega) = \frac{1}{2}[\sigma_t(x+y, \omega) - \sigma_t(x, \omega) - \sigma_t(y, \omega)],$$

которое обладает следующими свойствами:

1) $\sigma_t(x, y, \omega)$ непрерывно по t, $\sigma_t(x, x, \omega)$ — неубывающая неотрицательная функция.

2) для всех $x, y \in \mathbf{X}$ $(A_t(\omega)\, x, A_t(\omega)\, y) - \sigma_t(x, y, \omega)$ является числовым локальным мартингалом относительно $\mathfrak{f}_t$.

Действительно,

$$(A_t(\omega)\, x, A_t(\omega)\, y) - \sigma_t(x, y, \omega) = \frac{1}{2}[\,|A_t(\omega)(x+y)|^2 -$$

$$- \sigma_t(x+y, \omega) - (|A_t(\omega)\, x|^2 - \sigma_t(x, \omega)) -$$

$$- (|A_t(\omega)\, y|^2 - \sigma_t(y, \omega))],$$

а $|A_t(\omega)\, z|^2 - \sigma_t(z, \omega)$ при всех $z \in \mathbf{X}$ — локальный мартингал относительно потока σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$.

3) при $x, y, z \in \mathbf{X}$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ с вероятностью 1

$$\sigma_t(\alpha x + \beta y, z, \omega) = \alpha\sigma_t(x, z, \omega) + \beta\sigma_t(y, z, \omega). \qquad (3.42)$$

Действительно,

$$(A_t(\omega)(\alpha x + \beta y),\ A_t(\omega)\, z) - \sigma_t(\alpha x + \beta y, z, \omega)$$

и

$$(A_t(\omega)(\alpha x + \beta y),\ A_t(\omega)\, z) - \alpha\sigma_t(x, z, \omega) - \beta\sigma_t(y, z, \omega)$$

являются непрерывными локальными мартингалами. Значит такой будет и их разность

$$\sigma_t(\alpha x+\beta y, z)-\alpha\sigma_t(x, z, \omega)-\beta\sigma_t(y, z, \omega). \qquad (3.43)$$

Поскольку эта разность — непрерывный процесс ограниченной вариации, то ее характеристика (см. формулу (3.35)) равна нулю. Отсюда следует, что выражение (3.43) равно нулю. Тем самым равенство (3.42) установлено, поскольку $\sigma_0(x, y, \omega)=0$.

4) Используя симметричность $\sigma_t(x, y, \omega)$, убеждаемся, что при $x_1, \ldots, x_k$; $y_1, \ldots, y_l\in \mathbf{X}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\beta_1, \ldots, \beta_l\subset R$

$$\sigma_t\left(\sum\alpha_i x_i, \sum\beta_j y_j, \omega\right)=\sum\alpha_i\beta_j\sigma_t(x_i, y_j, \omega).$$

Теорема 4. *Функция* $\sigma_t(x, y, \omega)$ *представима в виде*

$$\sigma_t(x, y, \omega)=(\langle A\rangle_t(\omega)\,x, y),$$

где $\langle A\rangle_t(\omega)$ — *при любом* $t\geqslant 0$ *случайный оператор из* $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$.

Доказательство. Положим $A_t^{(n)}(\omega)=A_t(\omega)P_n$ где P_n — оператор проектирования на подпространство, порожденное $\{e_1, \ldots, e_n\}$, где $\{e_k\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathbf{X}$. Очевидно, что $A_t(\omega)P_n$ также является операторным непрерывным мартингалом, если

$$\sigma_t^{(n)}(x, \omega)=\sum_{k=1}^{\infty}(\langle A^{(n)}(\omega)\,x\rangle_t e_k, e_k);$$

$$\sigma_t^{(n)}(x, y, \omega)=\frac{1}{2}[\sigma_t^{(n)}(x+y, \omega)-\sigma_t^{(n)}(x, \omega)-\sigma_t^{(n)}(y, \omega)],$$

то

$$\sigma_t^{(n)}(x, y, \omega)=\sigma_t(P_n x, P_n y, \omega).$$

Поскольку $|x-P_n x|\to 0$ при $n\to\infty$, то на основании леммы для любого $T>0$

$$\sup_{t\leqslant T}|A_t(\omega)\,x-A_t^{(n)}(\omega)\,x|\to 0$$

по вероятности. Значит, на основании замечания к теореме 3 $\sigma_t^{(n)}(x, \omega)\to\sigma_t(x, \omega)$, $\sigma_t^{(n)}(x, y, \omega)\to\sigma_t(x, y, \omega)$ по вероятности. Поэтому достаточно показать, что

$$\sigma_t^{(n)}(x, y, \omega)=(\langle A^{(n)}\rangle_t(\omega)\,x, y), \qquad (3.44)$$

где $\langle A^{(n)}\rangle_t(\omega)\in\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, а затем воспользоваться теоремой 1, § 3. Но из свойства 4) вытекает, что

$$\sigma_t^{(n)}(x, y, \omega)=\sigma_t(P_n x, P_n y, \omega)=$$

$$= \sigma_t \left(\sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k, \ \sum_{k=1}^{n} (y, e_k) e_k, \omega \right) =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \sigma_t (e_k, e_j, \omega) (x, e_k) (y, e_j).$$

Значит, для $\sigma_t^{(n)}$ справедлива формула (3.44), если положить

$$\langle A^{(n)} \rangle_t (\omega) = \sum_{k,j=1}^{n} \sigma_t (e_k, e_j, \omega) \langle e_k \circ e_j \rangle.$$

Очевидно, что $\langle A^{(n)} \rangle_t \in \mathbf{L} (\Omega, \mathbf{X}) \subset \mathbf{L}_w (\Omega, \mathbf{X})$. ■

Операторная функция $\langle A \rangle_t (\omega)$ со значениями в $\mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$ (где $\mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$ — множество симметричных неотрицательных слабых случайных операторов) называется характеристикой непрерывного операторного мартингала $A_t (\omega)$. $\langle A \rangle_t (\omega)$ не убывает с t: при $t_1 < t_2$ $\langle A \rangle_{t_2} (\omega) - \langle A \rangle_{t_1} (\omega) \in \mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$.

Поскольку $A_t (\omega) \in \mathbf{L}_s (\Omega, \mathbf{X})$, то определен оператор $A_t^* (\omega) A_t (\omega) \in \mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$. Из свойства 2) следует, что

$$A_t^* (\omega) A_t (\omega) - \langle A \rangle_t (\omega)$$

является слабым локальным мартингалом.

Если $B_t (\omega) \in \mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$ при $t_1 < t_2$ $B_{t_2} (\omega) - B_{t_1} (\omega) \in$ $\ni \mathbf{L}_w^+ (\Omega, \mathbf{X})$, $B_0 (\omega) = 0$, и $B_t (\omega)$ слабо непрерывно по t,

$$A_t^* (\omega) A_t (\omega) - B_t (\omega) -$$

слабый локальный мартингал, то $B_t (\omega) = \langle A \rangle_t (\omega)$. Это вытекает из того, что тогда $(B_t (\omega) - \langle A \rangle_t (\omega)) x$ будет непрерывным локальным мартингалом ограниченной вариации и, следовательно, его характеристика равна нулю.

Из теоремы 3 и замечания к ней вытекает следующая теорема о сходимости непрерывных операторных мартингалов.

Теорема 5. *Пусть* $A_t^{(n)} (\omega)$ — *последовательность непрерывных операторных мартингалов относительно потока* $\mathfrak{f}_t$.

1. Если для всех $x \in \mathbf{X}$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n,m \to \infty} \mathbf{P} \{ \sup_{t \leq T} (\langle A^{(n)} - A^{(m)} \rangle_t (\omega) x, x) > \varepsilon \} = 0, \quad (3.45)$$

то существует такой непрерывный операторный мартингал $A_t^{(0)} (\omega)$ относительно потока $\mathfrak{f}_t$, что для всех $x \in \mathbf{X}$, $T > 0$

и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T} | A_t^{(n)}(\omega)\, x - A_t^{(0)}(\omega)\, x | > \varepsilon\} = 0, \tag{3.46}$$

при этом

$$\lim_{n\to} \mathbf{P}\{\sup_{t\leqslant T} | (\langle A^{(n)}\rangle_t(\omega)\, x, x) - (\langle A^{(0)}\rangle_t(\omega)\, x, x) | > \varepsilon\} = 0. \tag{3.47}$$

2. Если для последовательности $A_t^{(n)}(\omega)$ выполнено (3.46), то выполнены также и соотношения (3.45) и (3.47).

4. Сильный винеровский операторный процесс

Операторный процесс $W_t(\omega)$, $t \geqslant 0$ со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ называется сильным винеровским процессом, если:

а) $(W_t(\omega)\, x, y)$ при всех $x, y \in \mathbf{X}$ винеровский процесс со средним 0, относительно потока $\mathfrak{f}_t$, порожденного величинами $\{(W_s(\omega)\, u, z),\ s \leqslant t$ и $u, z \in \mathbf{X}\}$;

б) $W_t(\omega)\, x$ с вероятностью 1 непрерывный процесс в $\mathbf{X}$. Очевидно, что $W_t(\omega)$ будет непрерывным операторным мартингалом. Поскольку для числового процесса $(W_t(\omega)\, x, y)$ характеристика совпадает с величиной

$$\mathbf{M}(W_t(\omega)\, x, y)^2 = t\mathbf{M}(W_1(\omega)\, x, y)^2,$$

то характеристика $\langle W\rangle_t(\omega)$ имеет вид

$$(\langle W\rangle_t(\omega)\, x, x) = t\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}(W_1(\omega)\, x, e_k)^2 = t\mathbf{M}\,| W_1(\omega)\, x |^2.$$

Таким образом,

$$\langle W\rangle_t(\omega) = tB,$$

где B — ограниченный симметричный неотрицательный оператор

$$B = \mathbf{M}W_1^*(\omega)\, W_1(\omega).$$

Глава 4

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И УРАВНЕНИЯ

§ 10. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО X-ЗНАЧНОМУ МАРТИНГАЛУ

1. Определение

Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный локальный мартингал со значениями в $\mathbf{X}$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$. Рассмотрим функцию $z(t, \omega)$ со значениями в $\mathbf{X}$, определенную и измеримую на $\{[0, \infty) \times \Omega, \mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}\}$, где $\mathfrak{A}_+$ —σ-алгебра борелевских множеств на $[0, \infty]$. Положим, что $x(t, \omega)$ измерима относительно $\mathfrak{f}_t$ при всех $t \geqslant 0$. Построим стохастический интеграл

$$\int_0^T (z(t, \omega),\ dx(t, \omega)). \tag{4.1}$$

Обозначим через $\langle x \rangle_t(\omega)$ характеристику мартингала $x(t, \omega)$. При определении интеграла (4.1) будем следовать обычному плану [7]. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех функций $z(t, \omega)$, обладающих указанными выше свойствами измеримости, а $\mathcal{F}^0$—подмножество ступенчатых функций из $\mathcal{F}$, т.е. таких функций $z(t, \omega)$, для которых существует такая последовательность точек $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < \ldots$, что $z(t, \omega) = z(t_k, \omega)$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Если $t_m < T \leqslant t_{m+1}$, положим

$$I(z, x)_T = \int_0^T (z(t, \omega),\ dx(t, \omega)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} (z(t_k, \omega),\ x(t_{k+1}, \omega) - x(t_k, \omega)) +$$

$$+ (z(t_m, \omega),\ x(T, \omega) - x(t_m, \omega)). \tag{4.2}$$

Как функция T правая часть непрерывна. Отметим следующие свойства функции $I(z, x)_T$.

I. $I(z, x)_T$ является непрерывным локальным мартингалом относительно $\mathfrak{f}_t$.

II. Если $z'(t, \omega) \in \mathcal{F}^0$, то взаимная характеристика мартингалов $I(z, x)_t$ и $I(z', x)_t$ задается формулой

$$\langle I(z, x),\ I(z', x)\rangle_t = \int_0^t (d\langle x\rangle_s(\omega) z(s, \omega),\ z'(s, \omega)), \quad (4.3)$$

где интеграл в правой части (4.3) для ступенчатых функций $z(s, \omega)$ и $z'(s, \omega)$ из $\mathcal{F}^0$ определяется равенством

$$\int_0^t (d\langle x\rangle_s(\omega) z(s, \omega),\ z'(s, \omega)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} ([\langle x\rangle_{t_{k+1}}(\omega) - \langle x\rangle_{t_k}(\omega)] z(t_k, \omega),\ z'(t_{k-1}, \omega)) +$$

$$+ ([\langle x\rangle_t(\omega) - \langle x\rangle_{t_m}(\omega)] z(t_m, \omega),\ z'(t_m, \omega)), \quad (4.4)$$

если $z(s, \omega)$ и $z'(s, \omega)$ постоянны на интервалах $[t_0, t_1)$ $[t_1, t_2,)$ ..., $[t_m,\ t_{m+1})$ и $t \in (t_m, t_{m+1})$. Справедливость формулы (4.3) вытекает из того, что приращение

$$\langle I(z, x),\ I(z', x)\rangle_t - \langle I(z, x), I(z', x)\rangle_{t_m}$$

на отрезке $[t_m, t_{m+1}]$ совпадает со взаимной характеристикой мартингалов

$$(z(t_m, \omega),\ x(t, \omega) - x(t_m, \omega));\quad (z'(t_m, \omega),\ x(t, \omega) - x(t_m, \omega))$$

которая равна

$$([\langle x\rangle_t(\omega) - \langle x\rangle_{t_m}(\omega)] z(t_m, \omega),\ z'(t_m, \omega))$$

в силу определения $\langle x\rangle_t(\omega)$ и $\mathfrak{f}_{t_m}$-измеримости $z(t_m, \omega)$ и $z'(t_m, \omega)$.

III. $I(z, x)_t$ является аддитивным и однородным функционалом по z, если $z,\ z' \in \mathcal{F}$, а $\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}$, то с вероятностью 1

$$I(\alpha z + \alpha' z', x)_t = \alpha I(x, x)_t + \alpha' I(z', x)_t.$$

Предположим, что последовательность $z_n(t, \omega) \in \mathcal{F}^0$ такова, что для данного $T > 0$ (по вероятности)

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T (d\langle x\rangle_t(\omega)[z_n(t, \omega) - z_m(t, \omega)], z_n(t, \omega) - z_m(t, \omega)) = 0. \quad (4.5)$$

Тогда на основании теоремы 1 § 9 можно утверждать, что существует такой непрерывный локальный мартингал I_t относительно потока $\mathfrak{f}_t$, для которого

$$\sup_{t\leq T} |I_t - I(z_n, x)_t| \to 0$$

по вероятности. Характеристикой этого мартингала вследствие той же теоремы является предел по вероятности характеристик мартингалов $I(z_n, x)$, т. е.

$$\langle I\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^t (d\langle x\rangle_s(\omega) z_n(s, \omega),\ z_n(s, \omega)).$$

Если последовательности $z_n(t, \omega)$, удовлетворяющей (4.5), можно приписать некоторый предел $z(t, \omega) \in \mathcal{F}$, то тогда, естественно, положить

$$\int_0^T (z(t, \omega),\ dx(t, \omega)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (z_n(t, \omega),\ dx(t, \omega));$$

$$\int_0^T (d\langle x\rangle_s(\omega) z(s, \omega),\ z(s, \omega)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^T (d\langle x\rangle_s(\omega) z_n(s, \omega),\ z_n(s, \omega)) \tag{4.6}$$

(по вероятности). Если, кроме того, дана другая последовательность $z'_n(t, \omega)$, для которой выполнено (4.5) и существует предел в указанном смысле $z'(t, \omega)$, то будем полагать

$$\int_0^T (d\langle x\rangle_s(\omega) z(s, \omega),\ z'(s, \omega)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^T (d\langle x\rangle_s(\omega) z_n(s, \omega),\ z'_n(s, \omega)).$$

Используя это распространение интеграла, определим его на более широком классе функций, при этом свойства I—III будут выполнены (предельный переход в (4.6) выполняется одновременно для всех допустимых значений T в силу теоремы 1 § 9, предел будет непрерывным локальным мартингалом).

Наибольшая трудность заключается в том: когда последовательности $z_n(t, \omega)$, удовлетворяющей (4.5), целесообразно приписать некоторое предельное значение? Не исключена возможность, что при нашем построении функции $z(t, \omega)$ мы должны будем приписать несколько значений интеграла $I(z, x)_t$. В следующем пункте указан достаточно широкий класс функций $\langle x\rangle_t(\omega)$ для которого построение интеграла возможно.

2. Интегралы для процессов с регулярными характеристиками

Для построения стохастического интеграла следует определить интеграл, стоящий в правой части (4.3). Из теоремы 2 § 9 вытекает, что для характеристики X-значного мартингала $\langle x\rangle_t(\omega)$ определена величина

$$\lambda_t(\omega) = \mathrm{sp}\,\langle x\rangle_t(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (\langle x\rangle_t(\omega)\,e_k, e_k),$$

где e_k — ортонормированный базис в $\mathbf{X}$, при этом $\lambda_t(\omega)$ является непрерывной неубывающей функцией, измеримой относительно $\mathfrak{f}_t$. Нетрудно заметить, что для всех $y \in \mathbf{X}$ и $t_1 < t_2$

$$(\langle x\rangle_{t_2}(\omega)\,x, x) - (\langle x\rangle_{t_1}(\omega)\,x, x) \leqslant [\lambda_{t_2}(\omega) - \lambda_{t_1}(\omega)]\,(x, x).$$

Поэтому существует такая функция $\rho(t, \omega, x)$, что

$$(\langle x\rangle_t(\omega)\,x, x) = \int_0^t \rho(s, \omega, x)\,d\lambda_s(\omega),$$

при этом можно считать, что $0 \leqslant \rho(t, \omega, x) \leqslant (x, x)$ и $\rho(t, \omega, x)$ $\mathfrak{f}_t$-измеримо.

Полагая $\rho(t, \omega, x, y) = \frac{1}{2}[\rho(t, \omega, x+y) - \rho(t, \omega, x) - \rho(t, \omega, y)]$, можем убедиться, что существует такой оператор $R_t(\omega)$ из $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, что

$$\rho(t, \omega, x, y) = (R_t(\omega)\,x, y),$$

при этом $R_t(\omega)$ — неотрицательный симметричный оператор и $(R_t(\omega)\,x, x) \leqslant (x, x)$. Отсюда вытекает, что $R_t(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ и $\|R_t(\omega)\| \leqslant 1$. Таким образом,

$$\langle x\rangle_t(\omega) = \int_0 R_s(\omega)\,d\lambda_s(\omega),$$

где $R_s(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, $R_s(\omega)$ — симметричный и неотрицательный оператор. Определим оператор $R_s^{1/2}(\omega)$ — положительный корень квадратный из симметричного оператора $R_s(\omega)$. Очевидно, $\| R_s^{1/2}(\omega) \| \leqslant 1$, $R_s^{1/2}(\omega)$ также $\mathfrak{f}_s$-измерим. Для $\langle x \rangle_t(\omega)$ имеет место представление

$$\langle x \rangle_t(\omega) = \int_0^t R_s^{1/2}(\omega) R_s^{1/2}(\omega)\, d\lambda_s(\omega),$$

которое будет использовано для построения интеграла в правой части (4.3). Рассмотрим более широкий класс операторных функций $\langle x \rangle_t(\omega)$, который понадобится нам в дальнейшем. Назовем операторную функцию со значениями из $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ регулярной, если она представима в виде

$$\langle x \rangle_t(\omega) = \int_0^t \Phi_s^*(\omega) \Phi_s(\omega)\, d\lambda_s(\omega), \tag{4.7}$$

где $\Phi_s(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и $\Phi_s^*(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $\lambda_s(\omega)$ — непрерывная неубывающая функция, $|\Phi_s(\omega) x|$ — ограниченная по s, величины $(\Phi_s(\omega) x, y)$ и $\lambda_s(\omega)$ являются $\mathfrak{f}_s$-измеримыми при $x, y \in \mathbf{X}$. Интеграл справа в (4.7) при $x, y \in \mathbf{X}$ определяется как слабый следующим соотношением:

$$(\langle x \rangle_t(\omega) x, y) = \int_0^t (\Phi_s(\omega) x,\ \Phi_s(\omega) y)\, d\lambda_s(\omega). \tag{4.8}$$

Предполагается, что для $x \in \mathbf{X}$ функция $\Phi_s(\omega) x$ измерима относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}$ и для всех $t > 0$

$$\int_0^t |\Phi_s(\omega) x|^2\, d\lambda_s(\omega) < \infty$$

с вероятностью 1.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\langle x \rangle}$ множество функций $z(t, \omega)$ из $\mathcal{T}$, для которых при всех $T > 0$

$$\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega)|^2\, d\lambda_s(\omega) < \infty \tag{4.9}$$

с вероятностью 1, где

$$|\Phi_s(\omega) z(s, \omega)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\Phi_s(\omega) z(s, \omega), e_k)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (z(s, \omega),\ \Phi_s^*(\omega) e_k)^2$$

(правая часть этого соотношения определена в силу существования $\Phi_s^*(\omega)x$ для всех $x \in \mathbf{X}$). Для функций $z(s,\omega)$ и $z'(s,\omega)$ из $\mathcal{F}_{\langle x\rangle}$ положим

$$\int_0^T (d\langle x\rangle_s(\omega)\, z(s,\omega),\ z'(s,\omega)) =$$
$$= \int_0^T (\Phi(s,\omega)\, z(s,\omega),\ \Phi(s,\omega)\, z'(s,\omega))\, d\lambda_s(\omega). \quad (4.10)$$

Пусть далее $\mathcal{F}^0_{\langle x\rangle} = \mathcal{F}^0 \cap \mathcal{F}_{\langle x\rangle}$.

Теорема. *Для любой функции $z(t,\omega) \in \mathcal{F}_{\langle x\rangle}$ можно указать такую последовательность $z_n(t,\omega)$ из $\mathcal{F}^0_{\langle x\rangle}$, чтобы для всех $T > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega)\, z(s,\omega) - \Phi_s(\omega)\, z_n(s,\omega)|^2\, d\lambda_s(\omega) = 0 \quad (4.11)$$

(по вероятности).

Доказательство. Достаточно доказать существование такой последовательности $z_n(t,\omega)$, для которой (4.11) выполняется при заданном T. Действительно, если $z_n^{(k)}(t,\omega)$ — такая последовательность, что (4.11) выполняется, если $T = k$, то, полагая $z_n(t,\omega) = z_n^{(k)}(t,\omega)$ при $k-1 < t < k$, получаем искомую. Пусть T зафиксировано. Выберем базис $\{e_k\}$. Так как для любого k функция $|\Phi_s(\omega)e_k|$ ограничена по s, то можно выбрать такие неслучайные $\alpha_k \downarrow 0$, чтобы функция

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |\Phi_s(\omega)\, e_k|$$

была также ограничена на $[0, T]$. Пусть

$$\varphi_s(\omega) = \sup_{\tau<s} \sum \alpha_k |\Phi_\tau(\omega)\, e_k|, \quad \chi_n(t,\omega) = \begin{cases} 1, & \varphi_t(\omega) \leqslant n; \\ 0, & \varphi_t(\omega) > n. \end{cases}$$

Очевидно, что для построения последовательности, удовлетворяющей (4.11), достаточно для любого l построить последовательность $z_n^{(l)}(t,\omega) \subset \mathcal{F}^0$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega)\, z(s,\omega) - \Phi_s(\omega)\, z_n^{(l)}(s,\omega)|^2\, \chi_l(s,\omega)\, d\lambda_s(\omega) = 0,$$

так как, выбирая последовательность $l_n \uparrow \infty$ так, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n^{l_n}(s, \omega)|^2 \chi_{l_n}(s, \omega)\, d\lambda_s(\omega) = 0,$$

будем иметь и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n^{l_n}(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) = 0$$

в силу неравенства

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n^{l_n}(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) \neq \right.$$

$$\left. \neq \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n^{l_n}(s, \omega)|^2 \chi_{l_n}(s, \omega)\, d\lambda_s(\omega)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\{\chi_{l_n}(T, \omega) = 0\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $\Phi_s(\omega)$ в (4.11) можно заменить $\chi_l(s, \omega)\Phi_s(\omega)$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $|\Phi_s(\omega) e_k|$ при любом k ограничено неслучайной постоянной. Поскольку из (4.9) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega)|^2 \chi_{\{|\Phi(s,\omega) z(s,\omega)| + |z(s,\omega)| > n\}}(s)\, d\lambda_s(\omega) = 0,$$

то функцию $z(s, \omega)$ можно выбрать так, что $|\Phi(s, \omega) z(s, \omega)$ и $|z(s, \omega)|$ ограничены неслучайными постоянными. Можно считать, что функция $\lambda_T(\omega)$ ограничена, так как (4.11) эквивалентно соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n(s, \omega)|^2 d\bar{\lambda}_s(\omega) = 0,$$

где

$$\bar{\lambda}_t(\omega) = \int_0^t e^{-\lambda_s(\omega)} d\lambda_s(\omega), \text{ а } \int_0^T e^{-\lambda_s(\omega)} d\lambda_s(\omega) \leqslant 1.$$

Значит,

$$\mathbf{M} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty, \tag{4.12}$$

а для доказательства (4.11) достаточно показать, что в предположении (4.12) существует последовательность, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) = 0. \quad (4.13)$$

Пусть $z_n(s, \omega)$ — такая последовательность ступенчатых функций, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_n(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) =$$

$$= \inf_{u\in\mathcal{F}^0} \mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) u(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega). \quad (4.14)$$

Совокупность функций из $\mathcal{F}_{\langle x\rangle}$, для которых выполнено (4.12), можно рассматривать как предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(z, z') = \mathbf{M}\int_0^T (\Phi_s(\omega) z(s, \omega),\ \Phi_s(\omega) z'(s, \omega))\, d\lambda_s(\omega)$$

(точнее, необходимо рассматривать классы функций, отождествляя те функции, для которых

$$\mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) z(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z'(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) = 0.$$

Поэтому указанная последовательность $z_n(s, \omega)$ будет фундаментальна:

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) z_n(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_m(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) = 0 \quad (4.15)$$

и для любой функции $v(s, \omega) \in \mathcal{F}^0$, для которой

$$\mathbf{M}\int_0^T |\Phi_s(\omega) v(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty, \quad (4.16)$$

будет выполняться соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}\int_0^T (\Phi_s(\omega)[z(s, \omega) - z_n(s, \omega)],\ \Phi(s, \omega) v(s, \omega)\, d\lambda_s(\omega) = 0.$$

$$(4.17)$$

Из (4.14), (4.15) вытекает существование такого $\mathbf{X}$-значного процесса $y(s, \omega)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \int_0^T |y(s, \omega) - \Phi_s(\omega)[z(s, \omega) - z_n(s, \omega)]|^2 d\lambda_s(\omega) = 0, \tag{4.18}$$

а из (4.17) и (4.18), что для всех $v \in \mathcal{F}^0$, для которых выполнено (4.11),

$$\mathbf{M} \int_0^T (y(s, \omega),\ \Phi_s(\omega) v(s, \omega))\, d\lambda_s(\omega) = 0. \tag{4.19}$$

Пусть симметричный положительный оператор A таков, что

$$A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega) \in \mathbf{X}(\Omega),\ \ \mathbf{M} \int_0^T |A\Phi^*(\omega)\, y(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty.$$

Так как

$$A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega),\ e_k)\, e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (y(s, \omega),\ \Phi_s(\omega) A e_k)\, e_k,$$

то, полагая $Ae_k = \rho_k e_k$, получаем нужный нам оператор, если

$$|A\Phi^* y(s, \omega)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (y(s, \omega),\ \Phi_s(\omega) e_k)^2 \rho_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |y(s, \omega)|^2 |\Phi_s(\omega) e_k|^2 \rho_k^2 < \infty,$$

это можно добиться выбором $\rho_k > 0$, поскольку величины $|\Phi_s(\omega) e_k|$ ограничены по вероятности.
Тогда из (4.19) вытекает, что

$$\mathbf{M} \int_0^T (A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega),\ v_1(s, \omega))\, d\lambda_s(\omega) = 0 \tag{4.20}$$

для любой функции $v_1(s, \omega)$, для которой

$$\mathbf{M} \int_0^T |v_1(s, \omega)|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty. \tag{4.21}$$

Но тогда $A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega) = 0$ почти всюду по мере π, определенной на $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}$ соотношением

$$\pi(\Delta \times \Gamma) = \mathbf{M}\chi_\Gamma(\omega) \int\limits_\Delta d\lambda_s(\omega).$$

Поэтому

$$(A\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega), e_k) = (y(s, \omega), \Phi_s(\omega)\, e_k)\, \rho_k = 0$$

почти всюду по мере π. Значит, можно взять $A = I$, так как

$$\Phi_s^*(\omega)\, y(s, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} (y(s, \omega),\ \Phi_s(\omega)\, e_k)\, e_k = 0 \in \mathbf{X},$$

так что для любой функции $v(s, \omega)$, для которой выполнено (4.21),

$$0 = \mathbf{M}\int\limits_0^T (\Phi_s^*(\omega)\, y(s,\ \omega),\ v(s,\ \omega))\, d\lambda_s(\omega) =$$

$$= \mathbf{M}\int\limits_0^T (y(s,\ \omega),\ \Phi_s(\omega)\, v(s,\ \omega))\, d\lambda_s(\omega) = 0.$$

В частности, можно взять $v(s, \omega) = z(s, \omega)$, тогда

$$\mathbf{M}\int\limits_0^T (y(s,\ \omega),\ \Phi_s(\omega)\, z(s,\ \omega))\, d\lambda_s(\omega) = 0.$$

Последнее соотношение совместно с (4.19) (где $v \in \mathcal{F}^0$) дает

$$\mathbf{M}\int\limits_0^T (y(s,\ \omega),\ \Phi_s(\omega)\, [z(s,\ \omega) - z_n(s,\ \omega)])\, d\lambda_s(\omega) = 0. \tag{4.22}$$

Из (4.17), (4.22) находим

$$\mathbf{M}\int\limits_0^T (y(s,\ \omega),\ y(s,\ \omega))\, d\lambda_s(\omega) = 0. \tag{4.23}$$

Но тогда в силу (4.18)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \mathbf{M}\int\limits_0^T |\Phi_s(\omega)\, [z(s,\ \omega) - z_n(s,\ \omega)]^2\, d\lambda_s(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, 2\mathbf{M}\int\limits_0^T |\, y(s,\ \omega) - \Phi_s(\omega)\, [z(s,\ \omega) - z_n(s,\ \omega)]\,|^2\, d\lambda_s(\omega) +$$

$$+ 2\mathbf{M}\int\limits_0^T |\, y(s,\ \omega)\,|^2\, d\lambda_s(\omega) = 0.$$

Таким образом, $z_n(s, \omega)$ — последовательность, существование которой утверждалось в теореме. ■

Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный локальный X-значный мартингал, характеристика которого представима в виде (4.7), $\Phi_s(\omega)$ и $\lambda_s(\omega)$ удовлетворяет перечисленным в начале пункта условиям. Тогда для всех $z(t, \omega) \in \mathcal{F}_{\langle x \rangle}$ определен стохастический интеграл

$$\int_0^T (z(t, \omega), dx(t, \omega)),$$

являющийся непрерывным локальным мартингалом по T, его характеристика имеет вид

$$\int_0^T (\Phi_s(\omega) z(s, \omega), \Phi_s(\omega) z(s, \omega))\, d\lambda_s(\omega),$$

а взаимная характеристика таких мартингалов задается формулой

$$\langle I(z, x), I(z', x)\rangle_t = \int_0^t (\Phi_s(\omega) z(s, \omega), \Phi_s(\omega) z'(s, \omega))\, d\lambda_s(\omega).$$

Существование интеграла вытекает из теоремы. Если для $z_n(t, \omega) \in \mathcal{F}^0$ и выполнено (4.11), то тогда

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T |\Phi_s(\omega) z_n(s, \omega) - \Phi_s(\omega) z_m(s, \omega)|^2\, d\lambda_s(\omega) = 0.$$

Поэтому, как указывалось в п. 1, существует предел

$$\lim \int_0^T (z_n(t, \omega), dx(t, \omega)),$$

который будет искомым интегралом.

3. Стохастический интеграл по винеровскому процессу

Пусть $w(t, \omega)$ — X-значный винеровский процесс, для которого $\mathbf{M}(w(t, \omega), x) = 0$ и $\mathbf{M}(w, (t, \omega), x)^2 = t(Bx, x)$, где B — ограниченный оператор, тогда $w(t, \omega)$ будет X-значным мартингалом, характеристика которого будет tB. Так как

$$tB = \int_0 B^{1/2} B^{1/2} ds,$$

то эта характеристика регулярна. Класс $\mathcal{F}_{\langle w \rangle}$ совпадает с множеством тех функций $z(t, \omega)$, для которых

$$\int_0^T |B^{1/2} z(t, \omega)|^2 dt = \int_0^T (Bz(t, \omega), z(t, \omega))\, dt < \infty.$$

Для всех $z \in \mathcal{F}_{\langle w \rangle}$ определен интеграл

$$\int_0^T (z(t, \omega), dw(t, \omega)),$$

если и $z' \in \mathcal{F}_{\langle w \rangle}$, то взаимная характеристика первого интеграла и $\int_0^T (z'(t, \omega), dw(t))$ будет $\int_0^T (Bz(t, \omega), z'(t, \omega))\, dt$.

§ 11. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ИНТЕГРАЛ ПО ОПЕРАТОРНОМУ МАРТИНГАЛУ

1. Интегралы X-значных функций

Пусть $Y_t(\omega)$ — согласованный с потоком σ-алгебр $\mathfrak{f}_t$ непрерывный операторный мартингал, $\langle Y \rangle_t(\omega)$ — его характеристика (см. п. 3 § 9). Предположим, что она является регулярной в смысле, указанном в п. 2 § 10, т. е. что

$$\langle Y \rangle_t(\omega) = \int_0^t \Phi_s^*(\omega)\, \Phi_s(\omega)\, d\lambda_s(\omega), \tag{4.24}$$

где $\Phi_s(\omega)$ и $\Phi_s^*(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $\Phi_s(\omega)x$ и $\lambda_s(\omega)$ измеримы относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}$, $\Phi_s(\omega)x$ и $\lambda_s(\omega)$ измеримы относительно $\mathfrak{f}_s$, $|\Phi_s(\omega)x|$ и $\lambda_s(\omega)$ с вероятностью 1 непрерывны по s; $\lambda_s(\omega)$, кроме того, не убывает. Построим стохастический интеграл для всех функций $z(s, \omega) \in \mathcal{F}_{\langle Y \rangle}$ (см. § 10)

$$I(Y, z)_t = \int_0^t (dY_s(\omega), z(s, \omega)), \tag{4.25}$$

удовлетворяющий условиям

I. $I(Y, z)_t$ является непрерывным $\mathbf{X}$-значным локальным мартингалом относительно потока $\mathfrak{f}_t$.

II. Взаимная характеристика непрерывных $\mathbf{X}$-значных локальных мартингалов $I(Y, z)_t$ и $I(Y, z')_t$ $(z, z' \in \mathcal{F}_{\langle Y \rangle})$ определяется формулой

$$\langle I(Y, z), I(Y, z')\rangle_t = \int_0^t (d\langle Y\rangle_s(\omega) z(s, \omega), z'(s, \omega)) =$$

$$= \int_0^t (\Phi(s, \omega) z(s, \omega), \Phi(s, \omega) z'(s, \omega) d\lambda_s(\omega) \quad (4.26)$$

(интегралы, стоящие в правой части (4.26), определены в п. 2 § 10).

III. Если $z, z' \in \mathcal{F}_{\langle Y \rangle}$, $\alpha, \alpha' \in \mathbf{R}$, то с вероятностью 1

$$I(Y, \alpha z + \alpha' z')_t = \alpha I(Y, z)_t + \alpha' I(Y, z')_t.$$

Построение стохастического интеграла (4.25) проведем аналогично построенному интегралу в предыдущем параграфе.

Пусть $z(s, \omega) \in \mathcal{F}^0_{\langle Y \rangle}$, т. е. является ступенчатой функцией из $\mathcal{F}_{\langle Y \rangle}$. Если $z(t, \omega) = z(t_k, \omega)$ при $t_k < t \leqslant t_{k+1}$, где $t_k \uparrow \infty$, то положим при $t_m < t \leqslant t_{m+1}$

$$\int_0^t dY_s(\omega) z(s, \omega) = \sum_{k=0}^{m-1} (Y_{t_{k+1}}(\omega) - Y_{t_k}(\omega)) z(t_k, \omega) +$$

$$+ (Y_t(\omega) - Y_{t_m}(\omega)) z(t_m, \omega). \quad (4.27)$$

Для того чтобы убедиться, что правая часть (4.27) имеет смысл, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Если $Y_t(\omega)$ — непрерывный операторный мартингал относительно $\mathfrak{f}_t$ с характеристикой $\langle Y\rangle_t(\omega)$, удовлетворяющей (4.24), а $z(\omega)$ — $\mathbf{X}$-значная величина, измеримая относительно $\mathfrak{f}_{t_0}$, для которой

$$\mathbf{P}\{([\langle Y\rangle_{t_1}(\omega) - \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)] z(\omega), z(\omega)) < \infty\} = 1.$$

Тогда величина $[Y_{t_1}(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z(\omega)$ определена как предел по вероятности $\lim\limits_{n\to\infty} [Y_{t_1}(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z_n(\omega)$, где $z_n(\omega)$ — такая последовательность конечнозначных $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримых величин, для которой

$$\lim_{n\to\infty} (\langle Y\rangle_{t_1}(\omega) - \langle Y\rangle_{t}(\omega) (z(\omega) - z_n(\omega)), (z(\omega) - z_n(\omega))) = 0$$

$$(4.28)$$

(по вероятности), левую часть (4.28) следует понимать как

$$\int_{t_0}^{t_1} |\Phi_s(\omega)[z(\omega) - z_n(\omega)]|^2 d\lambda_s(\omega).$$

Доказательство. Предположим, что построена такая последовательность $z_n(\omega)$ $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримых конечнозначных величин, для которой выполнено (4.28). Тогда для $t > t_0$ выражение

$$[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z_n(\omega)$$

определено, поскольку для любой конечнозначной функции

$$\hat{z}(\omega) = \sum_k \chi_k(\omega) x_k \quad (\chi_l(\omega) \chi_k(\omega) = 0 \text{ при } l \neq k)$$

$$[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] \hat{z}(\omega) = \sum_k \chi_k(\omega) [Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] x_k.$$

Легко видеть, что $[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z(\omega)$ будет непрерывным локальным X-значным мартингалом (в силу $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримости $\chi_k(\omega)$), его скалярная квадратическая характеристика имеет вид

$$\sum_k \chi_k(\omega) ([\langle Y\rangle_t(\omega) - \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)] x_k, x_k) = ((\langle Y\rangle_t(\omega) -$$

$$- \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)) \hat{z}(\omega), \hat{z}(\omega)).$$

Поэтому $y_n(t, \omega) = [Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z_n(\omega)$ является последовательностью мартингалов, для которой

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\langle y_n - y_m\rangle_{t_1}(\omega) e_k, e_k) = \lim_{n,m\to\infty} ([\langle Y\rangle_{t_1}(\omega) -$$

$$- \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)] (z_n(\omega) - z_m(\omega)), z_n(\omega) - z_m(\omega)) = 0$$

(по вероятности) вследствие равенства (4.28). Значит, на основании теоремы 3 § 9 существует $\lim\limits_{n\to\infty} [Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] z_n(\omega)$. Таким образом, для доказательства леммы достаточно доказать существование последовательности $z_n(\omega)$, для которой выполняется (4.28).

Из условия

$$([\langle Y\rangle_{t_1}(\omega) - \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)] z(\omega), z(\omega)) = \int_{t_0}^{t_1} |\Phi_s(\omega) z(\omega)|^2 d\lambda_s(\omega) <$$

$$< \infty$$

вытекает, что функция

$$\int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega)|^2 d\lambda_s(\omega)$$

непрерывна (и не убывает) по t на $[t_0, t_1]$. Положим $\lambda_t^{(m)}(\omega) = \lambda_t(\omega)$, если $\int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega)|^2 d\lambda_s(\omega) \leqslant m$; $\lambda_t^{(m)}(\omega) = \lambda_\tau(\omega)$, если $\tau \leqslant t$ и $\int_{t_0}^{\tau} |\Phi_s(\omega) z(\omega)|^2 d\lambda_s(\omega) = m$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для любого m существует $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримая последовательность конечнозначных функций $z_n^m(\omega)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M} \int_{t_1}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega) - \Phi_s(\omega) z_n^{(m)}(\omega)|^2 d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0. \quad (4.29)$$

Аналогично доказательству теоремы § 10 можно установить существование такой последовательности конечнозначных $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримых функций $\hat{z}_n(\omega)$, что

$$\lim_{n,l\to\infty} \mathrm{M} \int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) \hat{z}_n(\omega) - \Phi_s(\omega) \hat{z}_l(\omega)|^2 d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0, \quad (4.30)$$

а для любой конечнозначной $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримой функции $\hat{z}(\omega)$

$$\lim_{l\to\infty} \mathrm{M} \int_{t_0}^{t} (\Phi_s(\omega) z_n(\omega) - \Phi_s(\omega) \hat{z}_l(\omega),\ \Phi_s(\omega) \hat{z}(\omega)) \times$$
$$\times d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0. \quad (4.31)$$

Пусть $y(s, \omega)$ такая функция, что

$$\lim_{n,l\to\infty} \mathrm{M} \int_{t_0}^{t} |y(s, \omega) - \Phi_s(\omega) \hat{z}_l(\omega)|^2 d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0$$

(существование такой функции вытекает из (4.30)). Тогда из (4.31) следует, что $\forall z \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{M}\left[\int_{t_0}^{t} (\Phi_s(\omega) z(\omega) - y(s, \omega),\ \Phi_s(\omega) z)\, d\lambda_s^{(m)}(\omega)/\mathfrak{f}_{t_0}\right] = 0, \quad (4.32)$$

если только

$$\mathbf{M}\int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z|^2 \, d\lambda_s^{(m)}(\omega) < \infty. \tag{4.33}$$

Очевидно, в (4.32) можно подставлять $\mathfrak{f}_{t_0}$-измеримые случайные z, если только для них выполнено (4.33). Поэтому (4.32) справедливо при $z = z(\omega)$ и $z = \hat{z}_l(\omega)$, так что

$$\mathbf{M}\int_{t_0}^{t} (\Phi_s(\omega) z(\omega) - (s, \omega), \ \Phi_s(\omega) z(\omega) - \Phi_s(\omega)\hat{z}_l(\omega)) \times$$
$$\times \, d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$, убедимся, что

$$\mathbf{M}\int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega) - y(s, \omega)|^2 \, d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{l\to\infty} \mathbf{M}\int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega) - \Phi_s(\omega)\hat{z}_l(\omega)| \, d\lambda_s^{(m)}(\omega) = 0. \ \blacksquare$$

Замечание. В процессе доказательства леммы установлено, что при $t > t_0$ в условиях леммы

$$[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] \, z(\omega)$$

является непрерывным локальным $\mathbf{X}$-значным мартингалом, взаимная характеристика мартингалов $[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] \, z(\omega)$ и $[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] \, z_1(\omega)$ определяется соотношением

$$([\langle Y\rangle_t(\omega) - \langle Y\rangle_{t_0}(\omega)] \, z(\omega), \ z_1(\omega)) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} (\Phi_s(\omega) z(\omega), \ \Phi_s(\omega) z_1(\omega)) \, d\lambda_s(\omega), \tag{4.34}$$

следовательно, если $\sigma(Y, z, t)$ — операторная характеристика локального мартингала $[Y_t(\omega) - Y_{t_0}(\omega)] \, z(\omega)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sigma(Y, z, t) e_k, e_k) = \int_{t_0}^{t} |\Phi_s(\omega) z(\omega)|^2 \, d\lambda_s(\omega).$$

Таким образом, правая часть (4.27) является $\mathbf{X}$-значным непрерывным локальным мартингалом. Для функций $z(s, \omega)$ и $z'(s, \omega)$ из $\mathcal{F}^0_{\langle Y\rangle}$ из (4.34) вытекает формула (4.26).

Таким образом установлено, что при определении стохастического интеграла соотношением (4.27), удовлетворяются условия I—III.

Если $z_n(t, \omega)$ — такая последовательность функций из $\mathcal{F}^0_{\langle Y\rangle}$, то для всех $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T |\Phi_s(\omega)[z_n(s, \omega) - z(s, \omega)]|^2 d\lambda_s(\omega) = 0, \quad (4.35)$$

где $z(t, \omega) \in \mathcal{F}_{\langle Y\rangle}$, то тогда

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^T |\Phi_s(\omega)[z_n(s, \omega) - z_m(s, \omega)]|^2 d\lambda_s(\omega) = 0,$$

поэтому последовательность **X**-значных непрерывных локальных мартингалов

$$\int_0^t dY_s(\omega) z_n(s, \omega)$$

в силу теоремы 3 § 9 сходится к некоторому **X**-значному непрерывному локальному мартингалу, который обозначим

$$\int_0^t dY_s(\omega) z(s, \omega) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t dY_s(\omega) z_n(s, \omega). \quad (4.36)$$

Из теоремы § 10 вытекает, что для всех $z(t, \omega) \in \mathcal{F}_{\langle Y\rangle}$ можно указать такую последовательность $z_n(t, \omega) \in \mathcal{F}^0_{\langle Y\rangle}$, чтобы выполнялось (4.35). Поэтому формула (4.36) позволяет определить интеграл (4.25) для всех $z(t, \omega) \in \mathcal{F}_{\langle Y\rangle}$. Поскольку условия I—III выполнены для $z(t, \omega) \in \mathcal{F}^0_{\langle Y\rangle}$, они выполняются и для $z(t, \omega) \in \mathcal{F}^0_{\langle Y\rangle}$ (условие I вытекает из определения, условие II получаем на основании замечания к теореме 3 § 9, так как его достаточно проверить при $z' = z$, условие III — с помощью предельного перехода в равенстве, справедливом для ступенчатых функций).

2. Интегралы операторнозначных функций

В этом пункте при тех же предположениях относительно процесса $Y_t(\omega)$ определим интегралы вида

$$\int_0 Z_s(\omega)\, dY_s(\omega) \quad \text{и} \quad \int_0^t dY_s(\omega) Z_s(\omega),$$

где $Z_s(\omega)$ — некоторая операторнозначная функция. Начнем со второго. Поскольку $Z_s(\omega)x$ является $\mathbf{X}$-значной функцией, то определен интеграл

$$\int_0^t dY_s(\omega) Z_s(\omega) x,$$

если только $Z_s(\omega) x \in \mathcal{F}_{\langle Y \rangle}$, т. е.

$$\int_0^T |\Phi_s(\omega) Z_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty. \tag{4.37}$$

Пусть $Z_s(\omega)$ — измеримая функция со значениями из $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ (здесь и далее, говоря об измеримой случайно операторной функции $Z_t(\omega)$, подразумеваем функции, для которых при всех $x, y \in \mathbf{X}$ числовая функция $(Z_t(\omega) x, y)$ измерима относительно $\mathfrak{A}_+ \times \mathfrak{S}$), измеримая при любом s относительно $\mathfrak{f}_s$, для которой $\Phi_s(\omega) Z_s(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и для всех $x \in \mathbf{X}$ выполнено (4.37). Множество функций Z, для которых выполняются указанные условия, обозначим через $T_{\langle Y \rangle}$. Для $Z \in T_{\langle Y \rangle}$ операторный непрерывный мартингал обозначим через $I_t(Y, Z)$ при всех $x \in \mathbf{X}$

$$I_t(Y, Z) x = I_t(Y, z_x),$$

где $z_x = Z_t(\omega) x$. Операторная характеристика этого операторного мартингала определяется соотношением

$$\langle I(Y, Z)\rangle_t = \int_0^t Z_s^*(\omega) \Phi_s^*(\omega) \Phi_s(\omega) Z_s(\omega) d\lambda_s(\omega) \tag{4.38}$$

(интеграл справа понимается в слабом смысле: для $x, y \in \mathbf{X}$

$$\left(\int_0^t Z_s^*(\omega) \Phi_s^*(\omega) Z_s(\omega) ds, \ x, \ y\right) = \int_0^t (Z_s^*(\omega) \Phi_s^*(\omega) \Phi_s(\omega) \times$$

$$\times Z_s(\omega) x, \ y) d\lambda_s(\omega) = \int_0^t (\Phi_s(\omega) Z_s(\omega) x, \ \Phi_s(\omega) Z_s(\omega) y) \times$$

$$\times d\lambda_s(\omega)$$

и существует на основании условия (4.37)).

Обозначим

$$I_t^*(Z, Y) = \int_0^t Z_s(\omega) dY_s(\omega). \tag{4.39}$$

Легко видеть, что для ступенчатых функций $Z_s(\omega)$ при естественном определении правой части (4.39) как суммы

$$\Sigma Z_{t_k}(\omega)\,[Y_{t_{k+1}\wedge T}(\omega) - Y_{t_k\wedge T}(\omega)]$$

справедливо соотношение

$$I_t^*(Z, Y) = [I_t(Y^*, Z^*)]^* \qquad (4.40)$$

(знак * в правой части равенства (4.40) обозначает переход к сопряженным операторам) при условии, что правая часть (4.40) имеет смысл. Поэтому можно определить интеграл (4.39) с помощью (4.40), если выполнены следующие условия:

а) Y_t^* является непрерывным локальным операторным интегралом с регулярной характеристикой, представленной в виде

$$\langle Y^*\rangle_t(\omega) = \int_0^t \Psi_s^*(\omega)\,\Psi_s(\omega)\,d\lambda_s(\omega);$$

б) измеримая функция $Z_s(\omega)$ со значениями из $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$ такова, что $\Psi_s(\omega)\,Z_s^*(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, и

$$\int_0^t Z_s(\omega)\,\Psi_s^*(\omega)\,\Psi_s(\omega)\,Z_s^*(\omega)\,d\lambda_s(\omega) \in \mathbf{L}_w^+(\Omega, \mathbf{X}). \qquad (4.41)$$

Тогда формула (4.40) определяет непрерывный локальный мартингал со значениями в $\mathbf{L}_w(\Omega, \mathbf{X})$, при этом $[I_t^*(Z, Y)]^*$ является сильным операторным мартингалом, характеристика которого определяется левой частью (4.41).

Неудобство приведенного определения состоит в том, что, во-первых, нужно накладывать дополнительные условия на Y_t, во-вторых, построенный интеграл сам уже не является, вообще говоря, непрерывным мартингалом, а таковым является процесс с сопряженными значениями, в частности, характеристику только последнего процесса можно вычислить.

Определим интеграл (4.39) для другого класса функций $Z_t(\omega)$ как предел интегралов от простых функций, при этом никаких дополнительных предположений на мартингал $Y_t(\omega)$ мы накладывать не будем. Класс интегрируемых фуикций окажется, правда, довольно узким.

Обозначим через T^0 множество всех функций $Z_t(\omega)$, удовлетворяющих условиям.

1) $Z_t(\omega)$ определено при $t \geqslant 0$, принимает значения из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ и для всех $t \geqslant 0$ измеримо относительно $\mathfrak{f}_t$;

2) $Z_t(\omega)$ — ступенчатая функция.

Пусть $Z_t(\omega)$ постоянно на интервалах $[t_k, t_{k+1})$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots$, $t_n \uparrow \infty$. Положим

$$I^*(Z, Y)_t = \Sigma Z_{t_k}(\omega)[Y_{t_{k+1}\wedge t}(\omega) - Y_{t_k\wedge t}(\omega)] =$$

$$= \sum_{k<m} Z_{t_k}(\omega)[Y_{t_{k+1}}(\omega) - Y_{t_k}(\omega)] + Z_{t_m}[Y_t(\omega) - Y_{t_m}(\omega)] \tag{4.42}$$

при $t \in [t_m, t_{m+1}]$. Очевидно, что $Z_{t_m}(\omega)[Y_t(\omega) - Y_{t_m}(\omega)]$ является непрерывным локальным операторным мартингалом. Вычислим его характеристику. Как вытекает из замечания к теореме 2 § 9, его характеристика в момент $t_m + t$ совпадает с пределом

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} | Z_{t_m}(\omega)(Y_{\frac{k+1}{n}t+t_m}(\omega) - Y_{\frac{k}{n}t+t_m}(\omega))\, x|^2.$$

Эта величина оценивается сверху выражением

$$\|Z_{t_m}(\omega)\|^2 \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} | (Y_{\frac{k+1}{n}t+t_m}(\omega) - Y_{\frac{k}{n}t+t_m}(\omega))\, x|^2 =$$

$$= \|Z_{t_m}(\omega)\|^2 \int_{t_m}^{t_m+t} |\Phi_s(\omega)\, x|^2\, d\lambda_s(\omega).$$

Таким образом, при определении $I^*(Z, Y)_t$ по формуле (4.42) получаем

$$\langle I^*(Z, Y)\rangle_t \leqslant \int_0^t \|Z_s(\omega)\|^2\, \Phi_s^*(\omega)\, \Phi_s(\omega)\, d\lambda_s(\omega). \tag{4.43}$$

Формула (4.43) позволяет распространить определение интеграла на класс $T^{(u)}_{\langle Y\rangle}$ функций $Z_t(\omega)$, удовлетворяющих условию 1), а также следующему условию 3), что для любой функции $Z_t(\omega) \in T^{(u)}_{\langle Y\rangle}$ можно указать такую последовательность $Z_t^{(n)}(\omega)$, которая для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$ имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \|Z_s^{(n)}(\omega) - Z_s(\omega)\|^2\, |\Phi_s(\omega)\, x|^2\, d\lambda_s(\omega) = 0 \tag{4.44}$$

в смысле сходимости по вероятности. Если $Z_t(\omega) \in T^{(u)}_{\langle Y\rangle}$ и $Z_t^{(n)}(\omega)$ удовлетворяет (4.44), то

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_0 \| Z_s^{(m)}(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)\|^2 |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) = 0$$

по вероятности для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$, поэтому для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n,m\to\infty} (\langle I^*(Z^{(m)} - Z^{(n)}, Y)\rangle_t(\omega) x, x) = 0,$$

значит, на основании теоремы 5 § 9 $I^*(Z^{(n)}, Y)_t$ сходится к некоторому непрерывному локальному операторному мартингалу, который обозначим $I^*(Z, Y)_t$, а через $\hat{T}^{(u)}_{\langle Y\rangle}$ наименьший класс функций, удовлетворяющий условию 1) и замкнутый относительно сходимости; $Z_t^{(n)}(\omega) \to Z_t(\omega)$, если для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\int_0^t \| Z_t^{(n)}(\omega) - Z_t(\omega)\|^2 |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) \to 0,$$

по вероятности. Очевидно, что определение интеграла $I^*(Z, Y)_t$ можно по непрерывности распространить на $\hat{T}^{(u)}_{\langle Y\rangle}$, при этом $I^*(Z, Y)_t$ будет непрерывным локальным операторным мартингалом, а его характеристика будет удовлетворять неравенству (4.43). Кроме того, $I^*(Z, Y)_t$ является линейной однородной функцией $Z \in \hat{T}^{(u)}_{\langle Y\rangle}$. Покажем, что $\hat{T}^{(u)}_{\langle Y\rangle}$ содержит все функции $Z_t(\omega)$, удовлетворяющие условию 1), для которых

$$\int_0^t \| Z_s(\omega)\|^2 |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) < \infty$$

при $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{X}$ и для всех t за исключением, быть может, счетного числа точек

$$\| Z_s(\omega) - Z_t(\omega)\| \to 0$$

по вероятности при $s \to t$. Действительно, пусть $V_t(\omega)$ определяется равенством: $V_t(\omega) = Z_t(\omega)$, если $\| Z_t(\omega)\| \leqslant \alpha$, $V_t(\omega) = 0$, если $\| Z_t(\omega)\| > \alpha$, а α выбрано так, что

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^\infty \chi_{\{\|Z_t(\omega)\| = \alpha\}} e^{-\lambda_t(\omega)} d\lambda_t(\omega) = 0\right\} = 1. \qquad (4.45)$$

Тогда $V_t(\omega)$ почти для всех t непрерывно в операторной норме по вероятности, т. е.

$$\| V_s(\omega) - V_t(\omega) \| \to 0$$

по вероятности при $s \to t$ почти для всех t. Положим $V_t^{(n)}(\omega) = V_{\frac{k}{n}}(\omega)$ при $\frac{k}{n} \leqslant t < \frac{k+1}{n}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \| V_s^{(n)}(\omega) - V_s(\omega) \|^2 |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) = 0$$

по вероятности, так как $\| V_t^{(n)}(\omega) - V_t(\omega) \|^2 \leqslant 4\alpha^2$ и $\| V_t^{(n)}(\omega) - V_t(\omega) \|^2 \to 0$ почти для всех t по мере $d\lambda_t(\omega)$. Таким образом, если выполнено (4.45), то $V_t(\omega) \in T^{(u)}_{\langle Y \rangle}$. Заметим, что для любой последовательности α_k

$$\sum_k \mathbf{M} \int_0^\infty \chi_{\{\|Z_t(\omega)\| = \alpha_k\}} e^{-\lambda_t(\omega)} d\lambda_t(\omega) \leqslant 1.$$

поэтому существует не более счетного множества таких α, для которых (4.45) не выполнено.

Из соотношения

$$\int_0^t \| Z_s(\omega) - V_s(\omega) \|^2 |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega) =$$

$$= \int_0^t \| Z_s(\omega) \|^2 \chi_{\{\|Z_s(\omega)\| > \alpha\}} |\Phi_s(\omega) x|^2 d\lambda_s(\omega)$$

вытекает, что при $\alpha \to \infty$ левая часть стремится к нулю, т. е. $Z_t(\omega) \in \hat{T}^{(u)}_{\langle Y \rangle}$.

Заметим, что приведенные определения интеграла $I^*(Z, Y)$ не противоречат одно другому: если Y и Z таковы, что определены оба эти интеграла, то они совпадают. Это вытекает из того, что они являются слабыми пределами одних и тех же интегральных сумм.

3. Стохастический интеграл по операторному винеровскому процессу

Пусть $W_t(\omega)$ — сильный винеровский операторный процесс (см. п. 4 § 9). Обозначим через $\beta(x, y, u, v)$ четырехлинейную форму на $\mathbf{X}$, для которой

$$\mathbf{M}(W_t(\omega) x, y)(W_t(\omega) u, v) = t\beta(x, y, u, v).$$

Как вытекает из п. 4 § 2, если $W_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, то сходится ряд

$$\Sigma\beta(x, e_k, x, e_k) = (Bx, x),$$

где B — неотрицательный ограниченный симметричный оператор. При этом (см. п. 4 § 9)

$$\langle W \rangle_t(\omega) = tB.$$

Используя результаты предыдущего пункта, убеждаемся, что $I(W, Z)_t$ определено для всех $Z_t(\omega)$, измеримых при любом t относительно $\mathfrak{f}_t$ и принимающих значения из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которых для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\int_0^t |B^{1/2} Z_s(\omega) x|^2 ds = \int_0^t (BZ_s(\omega) x, Z_s(\omega) x)\, ds =$$

$$= \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \beta(Z_s(\omega) x, e_k Z_s(\omega) x, e_k)\, ds < \infty.$$

Для интеграла $I^*(Z, W)_t$ в этом случае можно точно вычислить характеристику, это позволит распространить его на более широкий класс функций Z.

Пусть $Z(\omega)$ — некоторый $\mathfrak{f}_{t_k}$-измеримый оператор из $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$. Тогда при $t > t_k$ оператор $W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)$ не зависит от $Z(\omega)$ и на основании леммы § 8

$$Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X}).$$

Легко видеть, что это произведение является слабым локальным операторным мартингалом. Вычислим пока формально характеристику этого мартингала. Для этого введем оператор R_x, определяемый соотношением $(R_x u, v) = \beta(x, u, x, v)$, где R_x — неотрицательный симметричный оператор с конечным следом, являющийся квадратической функцией x и $\operatorname{sp} R_x = (Bx, x)$. Взаимная характеристика мартингалов

$$(Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)]x, y); \quad (Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)]x, u)$$

совпадает с

$$\mathbf{M}\{(Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)]x, y)(Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] \times$$
$$\times x, u)/\mathfrak{f}_{t_k}\} = (t - t_k)(R_x Z^*(\omega) y, Z^*(\omega) x) =$$
$$= (t - t_k)(Z(\omega) R_x Z^*(\omega) y, u).$$

Заметим, что оператор $Z(\omega) R_x Z^*(\omega)$ определен как слабый, при этом он неотрицателен и симметричен. Действительно, пусть $\{f_n(x)\}$ — базис собственных векторов R_x, $\lambda_n(x)$ — соответствующие собственные значения. Тогда

$$(Z(\omega) R_x Z^*(\omega) y, u) = \sum_n (R_x Z^*(\omega) y, f_n)(f_n, Z^*(\omega) u) =$$

$$= \sum_n \lambda_n(x) (Z^*(\omega) y, f_n)(f_n, Z^*(\omega) u)$$

и, следовательно, $Z(\omega) R_x Z^*(\omega) \in \mathbf{L}_\omega(\Omega, \mathbf{X})$.

Процесс $Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)]$ отличается от гауссового процесса с независимыми приращениями лишь $\mathfrak{f}_{t_k}$-измеримым множителем, его характеристика выражается через условное математическое ожидание:

$$\mathbf{M} | Z(\omega) [W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] x |^2 = (t - t_k) \sum_{j=1}^{\infty} (Z(\omega) R_x \times$$

$$\times Z^*(\omega) e_j, e_j) = (t - t_k) \operatorname{sp} Z(\omega) R_x Z^*(\omega) = (t - t_k) \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (Z(\omega) f_n(x), e_j)^2 = (t - t_k) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) | Z(\omega) f_n(x) |^2.$$

Правая часть последнего равенства определена не всегда. Покажем, что в том случае, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n | Z(\omega) f_n(x) |^2$ сходится, то $Z(\omega)[W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)]$ является непрерывным локальным мартингалом в $\mathbf{X}$. Действительно, в этом случае

$$Z(\omega) [W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_t(n, x, \omega) f_n(x), \quad (4.46)$$

где

$$\beta_t(n, x, \omega) = (Z(\omega) [W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] x, f_n(x)) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} ([W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] x, f_m(x)) (Z^*(\omega) f_m(x), f_n(x)).$$

Заметим, что $w_m(t) = ([W_t(\omega) - W_{t_k}(\omega)] x, f_m(x))$ — одномерный винеровский процесс, при этом

$$\mathbf{M} w_m(t) w_l(t) = (t - t_k)(R_x f_m(x), f_l(x)) = \lambda_m(x)(t - t_k) \delta_{lm}.$$

Таким образом,

$$\beta_t(n, x, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) (Z(\omega) f_m(x), f_n(x)).$$

Подставляя это выражение в (4.46), находим $Z(\omega)[W_t(\omega) -$

$$- W_{t_k}(\omega)]\, x = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sum_{n=1}^{\infty} (Z(\omega) f_m(x),\ f_n(x)) f_n(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t)\, Z(\omega) f_m(x).$$

Поскольку $Z(\omega) f_m(x)$ — $\mathfrak{f}_{t_k}$-измеримая $\mathbf{X}$-значная величина, то для всех n

$$\sum_{m=1}^{n} w_m(t)\, Z(\omega) f_m(x)$$

является непрерывным локальным $\mathbf{X}$-значным мартингалом с характеристикой

$$(t - t_k) \sum_{m=1}^{n} \lambda_m(x)\, |Z(\omega) f_m(x)|^2.$$

Из сходимости этого выражения при $n \to \infty$ к $(t - t_k) \times \times \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m(x)\, |Z(\omega) f_m(x)|^2$ и теоремы 3 § 9 вытекает, что $\sum_{m=1}^{\infty} w_m(t)\, Z(\omega) f_m(x)$ сходится к непрерывному локальному $\mathbf{X}$-значному мартингалу с характеристикой

$$(t - t_k) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x)\, |Z(\omega\ f_n(x)|^2 = (t - t_k)\, \mathrm{sp}\, Z(\omega)\, R_x Z^*(\omega) =$$

$$= (t - t_k) \sum_{n=1}^{\infty} \beta(x,\ Z^*(\omega) e_k,\ x,\ Z^*(\omega) e_k).$$

Пусть $Z(t, \omega)$—ступенчатая $\mathfrak{f}_t$-измеримая функция при всех t со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которой с вероятностью 1 для всех t и x ограничена величина

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \beta(x,\ Z_s^*(\omega) e_k,\ x,\ Z_s^*(\omega) e_k)\, ds. \tag{4.47}$$

Множество этих функций обозначим T_β^0. Для $Z \in T_\beta^0$ определен стохастический интеграл $I^*(Z, W)_t$ с помощью равенства (4.42), при этом $I^*(Z, W)_t$ — непрерывный локальный операторный мартингал, характеристика которого определяется выражением (4.47).

Обозначим через T_β минимальный класс функций $Z_t(\omega)$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $Z_t(\omega)$ определено для $t \geqslant 0$, принимает значения из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, измеримо по совокупности t и ω, для всех t является $\mathfrak{f}_t$-измеримой величиной;

б) T_β содержит T_β^0;

в) если $Z_t^{(n)}(\omega) \in T_\beta$ и $Z_t(\omega)$ таково, что для всех x и $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \operatorname{sp}[Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)] R_x [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)]^* ds = 0,$$

то $Z_t(\omega) \in T_\beta$. На класс T_β стохастический интеграл $I^*(Z, W_t)$ может быть распространен по непрерывности.

Укажем достаточное условие принадлежности $Z_s(\omega)$ к T_β. Операторная функция $Z_s(\omega)$ со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ называется сильно непрерывной в среднем квадратическом, если для всех $x \in \mathbf{X}$ $\mathbf{M}\,|Z_s(\omega)x|^2 < \infty$ и при $t \geqslant 0$

$$\lim_{s\to t} \mathbf{M}\,|Z_s(\omega)x - Z_t(\omega)x|^2 = 0. \qquad (4.48)$$

Обозначим через B_{st} ограниченный оператор, определенный соотношением

$$\mathbf{M}(Z_s(\omega)x,\ Z_t(\omega)y) = (B_{st}x,\ y)$$

(его ограниченность вытекает из ограниченности B_{tt}, которая является следствием леммы § 2, и неравенства $(B_{st}x, y)^2 \leqslant (B_{ss}x, x)(B_{tt}y, y)$). Заметим, что $B_{st} = \mathbf{M}Z_t^*(\omega)Z_s(\omega)$. Функция $(B_{st}x, y)$ непрерывна по совокупности переменных s и t, так как

$$|(B_{st}x,\ y) - (B_{\sigma\tau}x,\ u)| = |\mathbf{M}(Z_\varepsilon(\omega)x - Z_\sigma(\omega)x,\ Z_t(\omega)y) + \mathbf{M}(Z_\sigma(\omega)x,\ Z_t(\omega)y - Z_\tau(\omega)y)| \leqslant (\mathbf{M}\,|Z_s(\omega)x - Z_\sigma(\omega)x|^2)^{1/2}(\mathbf{M}\,|Z_t(\omega)y|^2)^{1/2} + (\mathbf{M}\,|Z_t(\omega)y - Z_\tau(\omega)y|^2)^{1/2},$$

а из (4.48) вытекает ограниченность $\mathbf{M}\,|Z_t(\omega)x|^2$ на любом конечном промежутке.

Из непрерывности B_{st} следует ограниченность $\|B_{st}\|$ на каждом ограниченном множестве изменения s и t.

Лемма 2. Если операторная функция $Z_s(\omega)$ удовлетворяет условию а) и сильно непрерывна в среднем квадратическом, то $Z_s(\omega) \in T_\beta$.

Доказательство. Положим $Z_s^{(n)}(\omega) = Z_{\frac{[ns]}{n}}(\omega)$, где $[ns]$ — целая часть ns. Тогда

$$\mathbf{M}\int_0^t \operatorname{sp}[Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)] R_x [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)]^* ds =$$

$$= \int_0^t \operatorname{sp} \mathbf{M} [Z_s(\omega) - Z_{\frac{[ns]}{n}}(\omega)]^* [Z_s(\omega) - Z_{\frac{[ns]}{n}}(\omega)] R_x ds =$$

$$= \int_0^t \operatorname{sp} \mathbf{M} [Z_s^*(\omega) Z_s(\omega) + Z_{\frac{[ns]}{n}}^*(\omega) Z_{\frac{[ns]}{n}}(\omega) - Z_s^*(\omega) Z_{\frac{[ns]}{n}}(\omega) -$$

$$- Z_{\frac{[ns]}{n}}^*(\omega) Z_s(\omega)] R_x ds = \int_0^t \operatorname{sp}[B_{ss} + B_{\frac{[ns]}{n}\frac{[ns]}{n}} - B_{\frac{[ns]}{n}s} -$$

$$- B_{s\frac{[ns]}{n}}] R_x ds = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x) ([B_{ss} + B_{\frac{[ns]}{n}\frac{[ns]}{n}} - B_{\frac{[ns]}{n}s} -$$

$$- B_{s\frac{[ns]}{n}}] f_k(x),\ f_k(x))\, ds.$$

Последнее выражение стремится к нулю вследствие равномерной сходимости ряда под знаком интеграла относительно n (так как $|f_k| \leqslant 1$, $\|B_{su}\| \leqslant \|B_{tt}\|$ при s, $u \leqslant t$), а для любого k слагаемые стремятся к нулю при $n \to \infty$ (так как $(B_{su} f_k, f_k)$ непрерывно по совокупности переменных). ■

Пусть теперь $Y_t(\omega)$ — неоднородный непрерывный гауссов процесс с независимыми приращениями со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ (неоднородный винеровский процесс). Обозначим

$$\beta_t(x,\ u,\ y,\ v) = \mathbf{M}(Y_t(\omega) x,\ y)(Y_t(\omega) y,\ v).$$

Предположим, что существует непрерывная неубывающая функция $\lambda(t)$, для которой

$$\beta_t(x,\ u,\ x,\ v) = \int_0^t (R_x(s) u,\ v)\, d\lambda(s),$$

где $R_x(s)$ — ядерный оператор, квадратически зависящий от x и при любом x слабо непрерывный по s. Тогда аналогично предыдущему можно построить интеграл $I^*(Z, Y)_t$ для всех функций $Z_s(\omega)$ из $\hat{T}_\beta$, где $\hat{T}_\beta$ — минимальный класс функций $Z_t(\omega)$, удовлетворяющий условиям а) и б) этого пункта, а также условию в), если $Z_t^{(n)}(\omega) \in \hat{T}_\beta$ и $Z_t(\omega)$ таково, что x и $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \operatorname{sp} [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)] R_x(s) [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)]^* d\lambda(s) = 0,$$

то $Z_t(\omega) \in \hat{T}_\beta$. Интеграл $I^*(Z, Y)_t$ является непрерывным операторным мартингалом, имеющим вид

$$(\langle I^*(Z, Y)_t\rangle x, x) = \int_0^t \operatorname{sp} Z_s(\omega) R_x(s) Z_s^*(\omega) d\lambda(s). \quad (4.49)$$

Лемма 3. Пусть операторная функция $Z_s(\omega)$ удовлетворяет условию а) и сильно непрерывна в среднем квадратическом, а для $R_x(s)$ выполнено соотношение

$$\lim_{s\to t} \operatorname{sp} |R_x|(s) - R_x(t)| = 0, \quad (4.50)$$

каково бы ни было $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbf{X}$ ($|A|$ для симметричного ограниченного оператора A определяется как функция $|\cdot|$ этого оператора). Тогда $Z_s(\omega) \in \hat{T}_\beta$.

Доказательство. Используя обозначения леммы, получаем

$$\mathbf{M} \int_0^t \operatorname{sp} [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)] R_x(s) [Z_s(\omega) - Z_s^{(n)}(\omega)]^* d\lambda(s) =$$

$$= \int_0^t \operatorname{sp} B_{\frac{[ns]}{n}s} R_x(s) d\lambda(s) = \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\frac{lt}{m}}^{\frac{l+1}{m}t} \operatorname{sp} B_{\frac{[ns]}{n}s} R_x\left(\frac{lt}{m}\right) d\lambda(s) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\frac{lt}{m}}^{\frac{l+1}{m}t} \operatorname{sp} B_{\frac{[ns]}{n}s} \left[R_x(s) - R_x\left(\frac{lt}{m}\right)\right] d\lambda(s),$$

где $[ns]$ — целая часть ns. Первая сумма справа стремится к нулю при любом m (это доказывается аналогично лемме 2). Вторая сумма по абсолютной величине оценивается выражением

$$\gamma \sum_{l=0}^{m-1} \int_{\frac{lt}{m}}^{\frac{l+1}{m}t} \operatorname{sp} \left| R_x(s) - R_x\left(\frac{lt}{m}\right) \right| d\lambda(s) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\lambda(t) \sup_{|u-s|\leqslant \frac{t}{m}, u,s\leqslant t} \operatorname{sp} | R_x(s) - R_x(u) |,$$

где $\gamma \geqslant \| B_{su} \|$, выражение справа стремится к нулю при $m \to \infty$ в силу [4.50]. ■

Замечание. Нетрудно убедиться, что $\int_0^t Z_s(\omega) dY_s(\omega)$ сильно стохастически непрерывно в среднем квадратическом, так как

$$\mathbf{M} \left| \int_t^{t+h} Z_s(\omega)\, dY_s(\omega)\, x \right|^2 \leqslant \sup_{t\leqslant s\leqslant t+h} \| \mathbf{M} Z_s^*(\omega)\, Z_s(\omega) \| \int_t^{t+h} R_x(s)\, ds.$$

§ 12. ОПЕРАТОРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1. Операторные функции случайных операторов

При рассмотрении операторных стохастических уравнений мы остановимся на операторных функциях (являющихся коэффициентами уравнения) случайных операторов, являющихся значениями искомой операторной функции. Покажем, что в любую операторную функцию $R(A)$, определенную на $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ и удовлетворяющую некоторым условиям гладкости по A, можно подставить вместо A случайный оператор из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. При этом $R(A(\omega))$ для $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ определяется с помощью предельного перехода.

Лемма. Пусть $R(A)$ определено на $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, принимает значения из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ и для всех $A, B \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$(R(A) - R(B))^* (R(A) - R(B))^* \leqslant \gamma (A - B)^* (A - B).$$

Тогда, если P_n — оператор проектирования на конечномерное пространство, то для всех $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и $x \in \mathbf{X}$ существует предел в смысле сходимости по вероятности

$$\lim_{n\to\infty} R(A(\omega) P_n)\, x.$$

Доказательство. Очевидно, что $A(\omega) P_n \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$ с вероятностью 1. Поэтому

$$|R(A(\omega) P_n) x - R(A(\omega) P_m) x|^2 = ([R(A(\omega) P_n) - R(A(\omega) P_m)]^* [R(A(\omega) P_n) - R(A(\omega) P_m)] x, x) \leqslant \leqslant \gamma |A(\omega)(P_n x - P_m x)|^2.$$

Из того, что $P_n x - P_m x \to 0$ при $n, m \to \infty$ вытекает, что $|A(\omega)(P_n x - P_m x)| \to 0$ по вероятности, поскольку $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. ■

Замечание. Пусть $R(s, A)$ определено на $[0, \infty) \times \mathbf{L}(\mathbf{X})$, принимает значения из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, при любом s удовлетворяет условию леммы с γ, не зависящим от s, и при любом $A \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ сильно непрерывно по s. Тогда выражение

$$R(s, A(\omega)) = \lim_{n\to\infty} R(s, A(\omega) P_n)$$

с вероятностью 1 сильно непрерывно по s. Это вытекает из сильной непрерывности $R(s, A(\omega) P_n)$ и равномерной по вероятности сходимости $R(s, A(\omega) P_n)$ к пределу, который является следствием того, что оценка, полученная в лемме, равномерна по s.

2. Стохастические уравнения, содержащие $I(Y, Z)_t$

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(s, X_s(\omega))\, ds + \int_0^t dY_s(\omega) B(s, X_s(\omega)), \tag{4.51}$$

где $\{Y_s(\omega), \mathfrak{f}_s\}$ — некоторый непрерывный сильный локальный мартингал, $X_t(\omega)$ — искомая функция со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $X_0(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ — $\mathfrak{f}_0$-измеримая заданная величина, $A(s, Z)$ и $B(s, Z)$ — заданные операторные функции на $\mathbf{L}(\mathbf{X}) \times [0, \infty)$, удовлетворяющие при некотором $\gamma > 0$ условию: для всех Z_1 и $Z_2 \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$

$$[A(s, Z_1) - A(s, Z_2)]^* [A(s, Z_1) - A(s, Z_2)] + [B(s, Z_1) - B(s, Z_2)]^* [B(s, Z_1) - B(s, Z_2)] \leqslant \leqslant \gamma (Z_1 - Z_2)^* (Z_1 - Z_2). \tag{4.52}$$

Тогда по доказанной лемме величины $A(s, X_s(\omega))$ и $B(s, X_s(\omega))$ определены для любого $\mathfrak{f}_s$-измеримого оператора $\mathbf{X}_s(\omega)$, и, как легко заметить из доказательства леммы, оба оператора будут $\mathfrak{f}_s$-измеримы. $\mathbf{X}_t(\omega)$ является решением (4.51), если определены оба интеграла в правой части (4.51) (первый из этих интегралов определяется как сильный), это значит, что для любого $x \in \mathbf{X}$ должен существовать интеграл $\mathbf{X}$-значной случайной функции

$$\int_0^t A(s, X_s(\omega))\, x ds,$$

и для любого t с вероятностью 1 выполняется равенство (4.51). Так как левая часть равенства стохастически эквивалентна сильно непрерывному операторному процессу, то рассмотрим лишь сильно непрерывные решения (значения интегралов при замене интегрируемых функций стохастически эквивалентные также стохастически эквивалентны).

Теорема 1. *Пусть функции* $A(s, Z)$, $B(s, Z)$ *удовлетворяют условию* (4.52) *и сильно непрерывны по* s *при фиксированном* $Z \subset \mathbf{L}(\mathbf{X})$, *а характеристика мартингала* $\{(Y_s(\omega), \mathfrak{f}_s\}$ *представима в виде*

$$\langle Y \rangle_t(\omega) = \int_0^t \Phi_s^*(\omega)\, \Phi_s(\omega)\, ds,$$

причем $\Phi_s(\omega) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, $\mathfrak{f}_s$-*измеримо, и существует такая возрастающая непрерывная* $\mathfrak{f}_t$-*измеримая функция* $\gamma_t(\omega)$, *для которой* $\|\Phi_s(\omega)\| = \|\Phi_s^*(\omega)\| \leqslant \gamma_t(\omega)$ *при* $s \leqslant t$. *Тогда уравнение* (4.51) *имеет, притом единственное решение* $X_t(\omega)$ (*с точностью до стохастической эквивалентности*).

Доказательство. Установим сначала единственность. Пусть $X_t(\omega)$ и $X_t'(\omega)$ — сильно непрерывные решения (как указывалось выше, мы рассматриваем лишь эти решения). Пусть τ — такой марковский момент относительно потока $\mathfrak{f}_t$, что при $s \leqslant \tau$ выполнено неравенство $\|X_s(\omega)\, x\| + \|X_s'(\omega)\, x\| + \gamma_s(\omega) \leqslant \alpha$, где $x \in \mathbf{X}$, $\alpha > 0$. Если $\alpha \uparrow \infty$, то $\tau \uparrow \infty$. Записав уравнение (4.51) для $X_s'(\omega)$ и вычитая одно уравнение из другого, получим для любого $x \in \mathbf{X}$ соотношение

$$[X_t(\omega) - X_t'(\omega)]\, x = \int_0^t [A(s, X_s(\omega) - A(s, X_s'(\omega)]\, x ds +$$

$$+ \int_0^t t dY_s(\omega)\, [B(s, X_s(\omega)) - B(s, X_s'(\omega))]\, x. \qquad (4.53)$$

Заметим, что

$$\left|\int_0^t [A(s, X_s(\omega)) - A(s, X'_s(\omega))]\, x\,ds\right|^2 \leqslant t\int_0^t |[A(s, X_s(\omega)) -$$

$$- A(s, X'_s(\omega))]\, x|^2\, ds \leqslant \gamma t\int_0^t |[X_s(\omega) - X'_s(\omega)]\, x|^2\, ds.$$

Далее, второе слагаемое в правой части (4.53) является непрерывным локальным мартингалом с характеристикой (см. формулу (4.26))

$$\int_0^t |\Phi_s(\omega)[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X'_s(\omega))]\, x|^2\, ds \leqslant \int_0^t \gamma_s(\omega)\, \times$$

$$\times |[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X'_s(\omega))]\, x|^2\, ds \leqslant \gamma_t(\omega)\, \gamma_t' \times$$

$$\times \int_0^t |[X_s(\omega) - X'_s(\omega)]\, x|^2\, ds.$$

В силу сделанных предположений о моменте τ

$$\gamma_{t\wedge\tau}(\omega) \int_0^{t\wedge\tau} |[X_s(\omega) - X'_s(\omega)]|^2\, ds \leqslant 4\alpha^3 t.$$

Поэтому существует

$$\mathrm{M}\int_0^{t\wedge\tau} dY_s(\omega)\,[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X'_s(\omega))\, x|^2 =$$

$$= \mathrm{M}\int_0^{t\wedge\tau} |\Phi_s(\omega)[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X'_s(\omega))]\, x|^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \mathrm{M}\int_0^{t\wedge\tau} |[X_s(\omega) - X'_s(\omega)]\, x|^2\, ds,$$

точно так

$$\mathrm{M}\left|\int_0^{t\wedge\tau} [A(s, X_s(\omega)) - A(s, X'_s(\omega))]\, x\,ds\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma t \mathrm{M}\int_0^{t\wedge\tau} |[X_s(\omega) - X'_s(\omega)]\, x|^2\, ds.$$

Подставляя в (4.53) вместо t $t \wedge \tau$, взяв модуль и возводя в квадрат, найдем

$$\mathbf{M} \,|\, [X_{t\wedge\tau}(\omega) - X'_{t\wedge\tau}(\omega)]\, x \,|^2 \leqslant 2\mathbf{M} \int\limits_0^{t\wedge\tau} [A(s,\ X_s(\omega)) -$$

$$- A(s,\ X'_s(\omega))]\, x ds \,|^2 + 2\mathbf{M} \int\limits_0^{t\wedge\tau} dY_s(\omega)\, [B(s,\ X_s(\omega)) -$$

$$- B(s,\ X'_s(\omega))]\, x \leqslant 2\gamma(t+\alpha)\, \mathbf{M} \int\limits_0^{t\wedge\tau} |\, [X_s(\omega) - X'_s(\omega)]\, x \,|^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma(t+\alpha) \int\limits_0^t \mathbf{M} \,|\, [X_{s\wedge\tau}(\omega) - X'_{s\wedge\tau}(\omega)]\, x \,|^2\, ds. \qquad (4.54)$$

Обозначим $\alpha(t) = \mathbf{M} \,|\, [X_{t\wedge\tau}(\omega) - X'_{t\wedge\tau}(\omega)]\, x \,|^2$. Тогда для любого $T > 0$ можно указать такое β_T, что $\alpha(T) \leqslant \leqslant \beta_T \int\limits_0^t \alpha(s)\, ds$ при $t \leqslant T$. Так как $\alpha(t) \geqslant 0$, то $\alpha(t) = 0$ (см., например [7, с. 41]).

Значит,

$$\mathbf{M} \,|\, [X_{t\wedge\tau}(\omega) - X'_{t\wedge\tau}(\omega)]\, x \,|^2 = 0.$$

Переходя к пределу при $\alpha \uparrow \infty$ (α входит в определение τ), получаем $M \,|\, [\mathbf{X}_t(\omega) - \mathbf{X}'_t(\omega)]\, x \,|^2$ для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$. Единственность доказана.

Докажем существование. Приведенное доказательство единственности показывает, что операторные стохастические уравнения могут рассматриваться аналогично обычным стохастическим дифференциальным уравнениям (см., например [7], § 6 гл. 2). Поэтому при доказательстве существования мы подробно разъясним лишь те части, в которых проявляется специфика операторного случая. Решение уравнения (4.51) построим методом последовательных приближений. Положим

$$X_t^0(\omega) = X(\omega),\quad X_t^n(\omega) = X(\omega) + \int\limits_0^t A(s,\ X_s^{n-1}(\omega))\, ds +$$

$$+ \int dY_s(\omega)\, B(s,\ X_s^{n-1}(\omega)),\quad n \geqslant 1. \qquad (4.55)$$

Заметим, что интегралы в правой части (4.55) определены. Действительно, функция $A(s, X_s^{n-1}(\omega))$ является сильно непрерывной по s, если только $X_s^{n-1}(\omega)$ сильно непрерывно, так как

$$\begin{aligned}|A(s, X_s^{n-1}(\omega))x - A(u, X_s^{n-1}(\omega))x|^2 \leqslant 2|A(s, X_s^{n-1}(\omega))x - \\ - x - A(u, X_s^{n-1}(\omega))x|^2 + 2|A(s, X_s^{n-1}(\omega))x - \\ - A(u, X_u^{n-1}(\omega))x|^2 \leqslant 2|A(s, X_s^{n-1}(\omega))x - \\ - A(u, X_s^{n-1}(\omega))x|^2 + 2\gamma|X_s^{n-1}(\omega)x - X_u^{n-1}(\omega)x|^2,\end{aligned}$$

оба слагаемых в правой части стремятся к нулю при $u \to s$ (первое слагаемое в силу замечания к лемме). Стохастический интеграл в (4.55) также существует (см. § 11), так как

$$B(s, X_s^{n-1}(\omega))x \in \mathcal{F}_{\langle Y\rangle}$$

вследствие существования интеграла

$$\int_0^t |\Phi_s^*(\omega) B(s, X_s^{n-1}(\omega))x|^2 ds,$$

если только $X_s^{n-1}(\omega)$ сильно непрерывно (в этом случае и $B(s, X_s^{n-1}(\omega))$ сильно непрерывно, доказательство точно такое, как и для $A(s, X_s^{n-1}(\omega))$). Таким образом, если $X_t^{n-1}(\omega)$ определено и сильно непрерывно, то определено $X_t^n(\omega)$ и, следовательно, является сильно непрерывным. Поскольку $X_t^0(\omega)$ сильно непрерывно, по индукции заключаем, что все $X_t^n(\omega)$ определены и сильно непрерывны. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega) = \int_0^t [A(s, X_s^n(\omega)) - A(s, X_s^{n-1}(\omega))]\,ds + \\ + \int_0^t dY_s(\omega)[B(s, X_s^n(\omega)) - B(s, X_s^{n-1}(\omega))].\end{aligned}$$

Пусть τ — такой марковский момент, что при $s \leqslant \tau$ $\gamma_s(\omega) \leqslant \beta$. Аналогично неравенству (4.54), но лишь заменив безусловные математические ожидания условными относительно σ-алгебры $\mathfrak{f}_0$, находим, что при $t \leqslant \tau$

$$\mathbf{M}(|X_{t\wedge\tau}^{n+1}(\omega)x - X_{t\wedge\tau}^{n}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0) \leqslant 2\gamma(T+\beta)\times$$

$$\times\int_0^t \mathbf{M}(|X_{s\wedge\tau}^{n}(\omega)x - X_{s\wedge\tau}^{n-1}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0)\,ds. \tag{4.56}$$

Для того чтобы убедиться в конечности правой части (4.56), покажем, что она конечна при $n = 1$

$$\int_0^t \mathbf{M}(|X_{s\wedge\tau}^{1}(\omega)x - X_{s\wedge\tau}^{0}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0)\,ds = \int_0^t \mathbf{M}\Bigg(\Bigg|\int_0^{s\wedge\tau} A(u,$$

$$X_0(\omega))\,du + \int_0^{s\wedge\tau} dY_u(\omega)\,B(u, X_0(\omega))\Bigg)x|^2/\mathfrak{f}_0)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t\int_0^{s\wedge\tau} [|A(u, X_0(\omega))x|^2 + \mathbf{M}\{|\Phi_u(\omega)B(u, X_0(\omega))x|^2/\mathfrak{f}_0\}]\times$$

$$\times\,du\,ds \leqslant (t+\beta)\int_0^t\int_0^s (|A(u, X_0(\omega))x|^2 +$$

$$+|B(u, X_0(\omega\,x|^2)\,du\,ds.$$

Из условия (4.52) и слабой непрерывности $A(u, 0)$ и $B(u, 0)$ вытекает, что для любого $T > 0$ можно указать такое γ_T, что

$$|A(u, Z)x|^2 + |B(u, Z)x|^2 \leqslant \gamma_T(|x|^2 + |Zx|^2). \tag{4.57}$$

Поэтому

$$\int_0^t \mathbf{M}(|X_{s\wedge\tau}^{1}(\omega)x - X_{s\wedge\tau}^{0}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0)\,ds \leqslant \gamma_T(T+\beta)\frac{t^2}{2}(|x|^2 +$$

$$+|X_0(\omega)x|^2).$$

Полагая $\hat{\gamma}_T = \gamma_T \wedge 2\gamma(T+\beta)$, получаем из (4.56) по индукции

$$\mathbf{M}(|X_{t\wedge\tau}^{n+1}(\omega)x - X_{t\wedge\tau}^{n}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0) \leqslant \frac{(\hat{\gamma}_T T)^{n+1}}{(n+1)!}(|x|^2 + |X(\omega)|^2).$$

Воспользовавшись неравенством для супремума мартингала, можем записать

$$\mathbf{M}(\sup_{t\leqslant T}|X_{t\wedge\tau}^{n+1}(\omega)x - X_{t\wedge\tau}^{n}(\omega)x|^2/\mathfrak{f}_0) \leqslant$$

$$\leqslant 2TM\left(\int_0^{T\wedge\tau} |A(s,\ X_s^n(\omega))x - A(s,\ X_s^{n-1}(\omega))x|^2 ds/\mathfrak{f}_0\right) +$$

$$+ 8M\left(\left|\int_0^{T\wedge\tau} dY_s(\omega)[B(s,\ X_s^n(\omega))x - B(s,\ X_s^{n-1}(\omega))x]^2/\mathfrak{f}_0\right.\right) \leqslant$$

$$\leqslant 4\frac{(\hat{\gamma}_\tau T)^n}{n!}(|x|^2 + |X_0(\omega)x|^2).$$

Из этого неравенства вытекает, что для всякого $T > 0$, $x \in \mathbf{X}$ последовательность $\mathbf{X}$-значных процессов $X_{t\wedge\tau}^n(\omega)x$ с вероятностью 1 равномерно сходится к некоторому процессу на $X_t^\tau(\omega)$ [0, T]. Поэтому $X_t^\tau(\omega)$ как сильный предел операторов из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ будет также оператором из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Используя неравенства

$$\left|\int_0^t A(s,\ X_{s\wedge\tau}^n(\omega))x ds - \int_0^t A(s,\ X_s^\tau(\omega))x ds\right|^2 \leqslant t\gamma\int_0^t |X_s^n(\omega)x -$$

$$- X_s^\tau(\omega)x|^2 ds,$$

$$(\langle I(Y,\ B(s,\ X_{s\wedge\tau}^n) - B(s,\ X_s^\tau))\rangle_t x,\ x) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\int_0^t |X_{s\wedge\tau}^n(\omega)x - X_s^\tau(\omega)x|^2 ds$$

и переходя к пределу при $n \to \infty$ в (4.55), если в нем заменим t на $t \wedge \tau$, получим

$$X_t^\tau(\omega) = X(\omega) + \int_0^{t\wedge\tau} A(s,\ X_s^\tau(\omega))ds + \int_0^{s\wedge\tau} dY_s(\omega)B(s,\ X_s^\tau(\omega)).$$

Очевидно также, что если τ' — другой момент, построенный по $\beta' > \beta$, то $X_s^\tau(\omega) = X_s^{\tau'}(\omega)$ при $s \leqslant \tau$. Поэтому существует предел $X_t^\tau(\omega)$ при $\beta \uparrow \infty$ $X_t(\omega)$. Этот предел является решением уравнения (4.51). ■

Замечание. Пусть $\gamma_t(\omega) \leqslant \gamma_1$. Тогда в соотношении (4.56) можно заменить τ на $+\infty$. Пусть, кроме того, $\mathbf{M}|X_0(\omega)x|^2 < \infty$ для всех x. Тогда в (4.56) можно взять безусловное математическое ожидание, а затем супремум по x, в результате чего соотношение приобретает вид

$$\|\mathbf{M}(X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega))^*(X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega))\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma(T + \gamma_1)\int_0^t \|\mathbf{M}(X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega))(X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega))\| ds.$$

Кроме того, из оценок при $n = 1$ находим

$$\| \mathbf{M} (X_t^1 (\omega) - X_t^0 (\omega))^* (X_t^1 (\omega) - X_t^0 (\omega)) \| \leqslant$$

$$\leqslant (t + \gamma_1) \gamma_T \int_0^t (1 + \| \mathbf{M} X_0^* (\omega) X_0 (\omega) \|) ds.$$

Поэтому в этом случае

$$\| \mathbf{M} (X_t^{n+1} (\omega) - X_t^n (\omega))^* (X_t^{n+1} (\omega) - X_t^n (\omega)) \| = O \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right) ;$$

$$\| \mathbf{M} (X_t (\omega) - X_t^n (\omega))^* (X_t (\omega) - X_t^n (\omega) \| \to 0.$$

(Это вытекает из неравенства

$$\| \mathbf{M} (X_t (\omega) - X_t^n (\omega))^* (X_t (\omega) - X_t^n (\omega)) \|^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \| \mathbf{M} (X_t^{m+1} (\omega) - X_t^m (\omega))^* (X_t^{m+1} (\omega) - X_t^m (\omega)) \|^{1/2}.)$$

3. Стохастические уравнения, содержащие $I^* (Z, Y)_t$

Рассмотрим теперь стохастическое уравнение

$$X_t (\omega) = X_0 (\omega) + \int_0^t A (s, X_s (\omega)) ds + \int_0^t B (s, X_s (\omega)) dY_s (\omega) \tag{4.58}$$

(обозначения такие же, как и в предыдущем пункте). Рассмотрим лишь тот случай, когда $Y_t (\omega)$ является сильно непрерывным гауссовым процессом с независимыми приращениями со значениями в $\mathbf{L}_s (\Omega, \mathbf{X})$, предположим, что

$$\mathbf{M} (Y_t (\omega) x, u) \mathbf{M} (Y_t (\omega) x, v) = \int_0^t (R_x (s) u, v) ds, \tag{4.59}$$

где $R_x (s)$ — ядерный оператор, квадратично зависящий от x, удовлетворяющий следующему условию:

$$\lim_{s \to t} \operatorname{sp} | R_x (s) - R_x (t) | = 0. \tag{4.60}$$

Как установлено в п. 3 § 11, для существования стохастического интеграла в (4.58) в этом случае достаточно, чтобы функция

$$\mathbf{M} | B (s, X_s (\omega) x - B (t, X_t (\omega)) x |^2$$

стремилась к нулю при $s \to t$ (она в этом случае будет и непрерывной по s и t). Последнее выражение оценивается величиной

$$2\mathbf{M}\,|B(s,\ X_t(\omega))\,x - B(t,\ X_t(\omega))\,x|^2 +$$
$$+\ 2\mathbf{M}\,|B(s,\ X_s(\omega))\,x - B(s,\ X_t(\omega))\,x|^2.$$

Пусть выполнено условие (4.52) и $B(s,\ Z)$ сильно непрерывно по s. Тогда выполнено соотношение (4.57) и, следовательно,

$$|B(s,\ X_t(\omega))\,x - B(t,\ X_t(\omega))\,x|^2 \leqslant 4\gamma((x,\ x) + |X_t(\omega)\,x|^2),$$

так что, если $\mathbf{M}\,|X_t(\omega)\,x|^2 < \infty$, то

$$\lim_{s\to t}\mathbf{M}\,|B(s,\ X_t(\omega))\,x - B(t,\ X_t(\omega))\,x|^2 = 0$$

в силу теоремы Лебега, так как $|B(s, X_t(\omega))\,x - B(t, X_t(\omega))\,x| \to 0$ по вероятности.

Для второго слагаемого в (4.61) получаем оценку

$$\mathbf{M}\,|B(s,\ X_s(\omega))\,x - B(s,\ X_t(\omega))\,x|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \gamma\mathbf{M}\,|X_s(\omega)\,x - X_t(\omega)\,x|^2.$$

Правая часть стремится к нулю, если $X_s(\omega)\,x$ непрерывно по s в среднем квадратическом. Таким образом, при указанных предположениях относительно $B(s, Z)$ стохастический интеграл $I^*(B(s, X), Y)_t$ определен, если $X_s(\omega)\,x$ для всех x непрерывен по s в среднем квадратическом. При этом интеграл сильно непрерывен в среднем квадратическом:

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t B(s,\ X_s(\omega))\,dY_s(\omega)\,x - \int_0^{t+h} B(s,\ X_s(\omega))\,dY_s(\omega)\,x\right|^2 =$$
$$= \mathbf{M}\left|\int_t^{t+h} B(s,\ X_s(\omega))\,dY_s(\omega)\,x\right|^2 =$$
$$= \int_t^{t+h} \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,B^*(s,\ X_s(\omega))\,B(s,\ X_s(\omega))\,R_x(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_T \int_t^{t+h} \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,(I + X_s^*(\omega)\,X_s(\omega))\,R_x(s)\,ds \qquad (4.62)$$

(из соотношения (4.57) вытекает, что $B^*B \leqslant \gamma_T(I + Z^*Z)$).

Так как выражение $M\,|X_s(\omega)\,x|^2$ ограничено по s для всех x, то $\mathbf{M}\,X_s^*(\omega)X_s(\omega) = V_s$ — ограниченная операторная функция. Поэтому правая часть (4.62) стремится к нулю при $t \leqslant T$ равномерно при $h \to 0$, каково бы ни было T.

Используя (4.57), (4.52), можно также убедиться в существовании и сильной непрерывности интеграла

$$\int_0^t A(s, X_s(\omega))\, ds$$

для сильно непрерывного в среднем квадратическом процессе $X_s(\omega)$:

$$\mathbf{M}\left|\int_0^{t+h} A(s, X_s(\omega))\, dsx - \int_0^t A(s, X_s(\omega))\, dsx\right|^2 =$$

$$= \mathbf{M}\left|\int_t^{t+h} A(s, X_s(\omega))\, ds\right|^2 \leqslant h\int_t^{t+h} \mathbf{M}\,|A(s, X_s(\omega))\, x|^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant h\gamma_T \int_t^{t+h} ((x, x) + \mathbf{M}\,|X_s(\omega)\, x|)^2\, ds \text{ при } h \to 0.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $A(s, Z)$, $B(s, Z)$ *удовлетворяют условиям теоремы 1, а* $Y_t(\omega)$ *— гауссов процесс с независимыми приращениями,* для которого выполнены соотношения (4.59), (4.60), *а* $X_0(\omega)$ — $\mathfrak{f}_0$-измеримая величина со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, X)$, *для которой* $\mathbf{M}\,|X_0(\omega)x^2| < \infty$ для всех $x \in \mathbf{X}$. Уравнение (4.58) имеет решение тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $X_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ *и* $X_t(\omega)\, x$ *непрерывны по* t *для всех* x;

2) $X_t(\omega)$ $\mathfrak{f}_t$*-измеримо*;

3) $\lim\limits_{s \to t} \mathbf{M}\,|X_t(\omega)\, x - X_s(\omega)\, x|^2 = 0$ *для всех* $x \in \mathbf{X}$.

Решение, удовлетворяющее этим условиям единственно.

Доказательство. Единственность. Пусть $X_t(\omega)$ и $X'_t(\omega)$ — решения, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда, поступая так, как при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\mathbf{M}\,|X_t(\omega)\, x - X'_t(\omega)\, x|^2 \leqslant 2t\gamma \int_0^t \mathbf{M}\,|X_s(\omega)\, x - X'_s(\omega)\, x|^2\, ds +$$

$$+ \gamma\mathbf{M}\int_0^t \operatorname{sp}(X_s(\omega) - X'_s(\omega))\, R_x(s)\, (X_s(\omega) - X'_s(\omega))^*\, ds \leqslant$$

$$\leqslant 2t\gamma \int_0^t \| \mathbf{M} [X_s(\omega) - X'_s(\omega)]^* [X_s(\omega) - X'_s(\omega)] \, ds \| \, |x|^2 +$$

$$+ 2\gamma \int_0^t \| \mathbf{M} [X_s(\omega) - X'_s(\omega)]^* [X_s(\omega) - X'_s(\omega)] \| \operatorname{sp} R_x(s) \, ds. \tag{4.63}$$

По предположению $\operatorname{sp} R_x(s) = (R(s)x, x)$, где $R(s)$ вследствие (4.60) слабо непрерывная по s и, следовательно, ограниченная функция. Пусть $\| R(s) \| \leqslant \gamma_T$ при $s \leqslant T$ (будем считать, что оно совпадает с γ_T в (4.57)). Тогда из соотношения (4.63), взяв супремум по $|x| \leqslant 1$, находим

$$\| \mathbf{M} (X_t(\omega) - X'_t(\omega))^* (X_t(\omega) - X'_t(\omega)) \| \leqslant 2 [T\gamma +$$

$$+ \gamma\gamma_T] \int_0^t \| \mathbf{M} (X_s(\omega) - X'_s(\omega))^* (X_s(\omega) - X'_s(\omega)) \| \, ds, \tag{6.46}$$

откуда вытекает, что

$$\| \mathbf{M} (X_t(\omega) - X'_t(\omega))^* (X_t(\omega) - X'_t(\omega)) \| = 0.$$

Поэтому $(\mathbf{M} (X_t(\omega) - X'_t(\omega))^* (X_t(\omega) - X'_t(\omega)) x, \ x) =$ $= \mathbf{M} |X_t(\omega) x - X'_t(\omega) x|^2 = 0$ для всех $x \in \mathbf{X}$. Единственность решения доказана. Существование решения докажем снова методом последовательных приближений. Положим

$$X_t^0(\omega) = X_0(\omega), \ X_t^{n+1}(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(s, \ X_s^n(\omega)) \, ds +$$

$$+ \int_0^t B(s, \ X_s^n(\omega)) \, dY_s(\omega). \tag{4.65}$$

Существование интегралов в правой части для случая, когда $X_s^n(\omega)$ сильно непрерывно в среднем квадратическом, установлено, при этом оба интеграла также оказываются сильно непрерывными в среднем квадратическом. Поскольку $X_s^0(\omega)$ сильно непрерывно в среднем квадратическом, то по индукции устанавливаем существование всех интегралов в правой части (4.65) и сильную непрерывность $X_t^n(\omega)$ в среднем квадратическом для всех n.

Вычитая равенства (4.65) для двух последовательных значений n одно из другого и проводя те же оценки, что и в неравенствах (4.63), (4.64), получаем при $t \leqslant T$

$$\| \mathbf{M} (X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega))^* (X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega)) \| \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma (T + \gamma_T) \int_0^t \| \mathbf{M} (X_s^n(\omega) - X_s^{n-1}(\omega))^* (X_s^n(\omega) -$$

$$- X_s^{n-1}(\omega)) \| ds. \tag{4.66}$$

Полагая $2\gamma [T + \gamma_T] = \beta_T$ из (4.66), получаем

$$\| \mathbf{M} (X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega))^* (X_t^{n+1}(\omega) - X_t^n(\omega)) \| \leqslant \alpha_T \frac{(\beta_T T)^{n+1}}{(n+1)!}; \tag{4.67}$$

$$\alpha_T = \frac{\gamma_T}{\gamma} (1 + \| \mathbf{M} X_0^*(\omega) X_0(\omega) \|).$$

Действительно, в силу (4.57)

$$\| \mathbf{M} (X_t^1(\omega) - X_t^0(\omega))^* (X_t^1(\omega) - X_t^0(\omega)) \| \leqslant 2 \| \mathbf{M} \left(\int_0^t A(s, X_0(\omega)) \times \right.$$

$$\left. \times ds \right)^* \left(\int_0^t A(s, X_0(\omega)) ds \right) \| + 2 \| \mathbf{M} \left(\int_0^t B(s, X_0(\omega)) dY_s(\omega) \right)^* \times$$

$$\times \left(\int_0^t B(s, X_0(\omega)) ds \right) \| \leqslant [2T \int_0^t \| \mathbf{M} A^*(s, X_0(\omega)) A(s, X_0(\omega)) \| \times$$

$$\times ds + 2 \int_0^t \| B^*(s, X_0(\omega)) B(s, X_0(\omega)) \| \sup_{|x| \leqslant 1} \operatorname{sp} R_x(s) \leqslant$$

$$\leqslant (2T + \gamma_T) \gamma_T \int_0^t (1 + \| \mathbf{M} X_0^*(\omega) X_0(\omega) \| ds =$$

$$= \beta_T \frac{\gamma_T}{\gamma} (1 + \| \mathbf{M} X_0^*(\omega) X_0(\omega) \|) t = \beta_T \alpha_T t$$

и далее (4.67) получается из (4.66) по индукции. Из оценки (4.67) вытекает, что для всех $x \in \mathbf{X}$ и $t > 0$ существует сильный предел по вероятности

$$\lim_{n \to \infty} X_t^n(\omega) x = X_t(\omega) x,$$

где $X_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. При этом при $t \leqslant T$

$$\sqrt{\mathbf{M} | X_t^n(\omega) x - X_t(\omega) x |^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=n}^{\infty} \sqrt{\mathbf{M}\,|X_t^m(\omega)\,x - X_t^{m+1}(\omega)\,x|^2} \leqslant |x| \sum_{m=n}^{\infty} \|\mathbf{M}\,(X_t^m(\omega) -$$

$$- X_t^{m+1}(\omega))^*\,(X_t^m(\omega) - X_t^{m+1}(\omega))\|^{1/2} \leqslant |x| \sum_{m=n}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha_T\,(\beta_T T)^{m+1}}{(m+1)!}}.$$

Поэтому $X_t^n(\omega)\,x$ сходится к $X_t(\omega)\,x$ равномерно в среднем квадратическом. Отсюда легко получить, что

$$\left\|\mathbf{M}\left(\int_0^t A(s,\ X_s^n(\omega))\,ds - \int_0^t A(s,\ X_s(\omega))\,ds\right)^* \times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t A(s,\ X_s^n(\omega))\,ds - \int_0^t A(s,\ X_s^n(\omega))\,ds\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant T_\gamma \int_0^T \|\mathbf{M}\,(X_s^n(\omega) - X_s(\omega))^*\,(X_s^n(\omega) - X_s(\omega))\|\,ds \to 0$$

и

$$\left\|\mathbf{M}\left(\int_0^t B(s,\ X_s^n(\omega))\,dY_s(\omega) - \int_0^t B(s,\ X_s(\omega))\,dY_s(\omega)\right)^* \times\right.$$

$$\left.\times\left(\int_0^t B(s,\ X_s^n(\omega))\,dY_s(\omega) - \int_0^t B(s,\ X_s(\omega))\,dY_s(\omega)\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \|\mathbf{M}\,(X_s^n(\omega) - X_s(\omega))^*\,(X_s^n(\omega) - X_s(\omega))\| \sup_{|x|\leqslant 1} \operatorname{sp} R_x(s)\,ds \to 0.$$

Переходя к пределу в (4.65) при $n \to \infty$, убеждаемся, что $X_t(\omega)$ — решение уравнения (4.58). То, что это решение $\mathfrak{f}_t$-измеримо и непрерывно в среднем квадратическом, вытекает из равномерной среднеквадратической сходимости $X_t^n(\omega)$ к $X_t(\omega)$, а то, что $X_t(\omega)$ непрерывно с вероятностью 1,— из непрерывности правой части уравнения (4.58). ■

4. Некоторые обобщения

В этом пункте мы рассмотрим уравнения типа (4.51) и (4.58), коэффициенты которых удовлетворяют следующему, более общему условию, чем условие (4.52).

Условие А. Существует последовательность унитарных операторов U_k и чисел $\gamma_k \geqslant 0$, таких, что $\Sigma\gamma_k = \gamma < \infty$

и для всех $Z_1, Z_2 \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$, $s \geqslant 0$

$$[A(s, Z_1) - A(s, Z_2)]^*[A(s, Z_1) - A(s, Z_2)] +$$
$$+ [B(s, Z_1) - B(s, Z_2)]^*[B(s, Z_1) - B(s, Z_2)] \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k U_k^* (Z_1 - Z_2)^* (Z_1 - Z_2) U_k$$

и для любого $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ функции $A(s, Z)$ и $B(s, Z)$ сильно непрерывны.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют условию А, $Y_t(\omega)$ — сильно непрерывный гауссов процесс с независимыми приращениями, для которого выполнено условие* (4.59), $X_0(\omega)$ — $\mathfrak{f}_0$ *-измеримая величина из* $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, *для которой* $\mathbf{M}\,|X_0(\omega)\,x\,|^2 < \infty$ *для всех* $x \in \mathbf{X}$. *Тогда уравнения* (4.51), (4.58) *имеют непрерывное, $\mathfrak{f}_t$-измеримое, сильно непрерывное в среднем квадратическом решение. Такое решение единственно.*

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия А правые части уравнений (4.51), (4.58) определены для сильно непрерывного в среднем квадратическом процессе $X_t(\omega)$ и что они будут также сильно непрерывны в среднем квадратическом. Для этого заметим, что из условия А вытекает существование для каждого T такой постоянной γ_T, что

$$|A(s, Z)x|^2 + |B(s, Z)x|^2 \leqslant \gamma_T \left(|x|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k |ZU_k x|^2\right). \tag{4.68}$$

Это неравенство выводится точно так, как (4.57) из (4.52). Используя это соотношение, легко установить существование и сильную непрерывность интеграла

$$\int_0^t A(s, X_s(\omega))\, ds.$$

Для интеграла

$$\int_0^t dY_s(\omega)\, B(s, X_s(\omega))\, x$$

существование вытекает из того, что для всех x при $t \leqslant T$ имеем

$$\mathbf{M} \int_0^t (B^*(s, X_s(\omega))\, R(s)\, B(s, X_s(\omega))\, x, x)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}\int_0^t \|R(s)\| \, |B(s,\ X_s(\omega))\,x|^2\,ds \leqslant \gamma_T \int_0^t \|R(s)\| \times$$

$$\times\left(|x|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \mathbf{M}\,|X_s(\omega)\,U_k x|^2\right) ds \leqslant \gamma_T\,|x|^2 \times$$

$$\times \int_0^t \|R(s)\|\,(1 + \gamma\,\|\mathbf{M}X_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\|)\,ds.$$

Аналогично устанавливается неравенство при $t < t + h < T$

$$\mathbf{M}\left|\int_t^{t+h} dY_s(\omega)\,B(s,\ X_s(\omega))\,x\right|^2 \leqslant \gamma_T\,|x|^2 \int_t^{t+h} \|R(s)\|\,(1 + \gamma \times$$

$$\times \|\mathbf{M}X_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\|)\,ds,$$

из которого вытекает сильная непрерывиость интеграла в среднем квадратическом.

Интеграл $\int_0^t B(s,\ X_s(\omega))(dY_s(\omega)$ существует в силу сильной непрерывности в среднем квадратическом (см. п. 3 §11) функции $B(s,\ X_s(\omega))$. Действительно, пусть $s \to t$. Тогда

$$\mathbf{M}\,|B(s,\ X_s(\omega))\,x - B(t,\ X_t(\omega))\,x|^2 \leqslant 2\mathbf{M}\,|B(s,\ X_s(\omega))\,x -$$

$$- B(s,\ X_t(\omega))\,x|^2 + 2\mathbf{M}\,|B(s,\ X_t(\omega))\,x - B(t,\ X_t(\omega))\,x|^2.$$

Для первого слагаемого имеем неравенство

$$\mathbf{M}\,|B(s,\ X_s(\omega))\,x - B(s,\ X_t(\omega))\,x|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_T \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\,|X_s(\omega)\,U_k x - X_t(\omega)\,U_k\,x|^2,$$

второе слагаемое стремится к нулю, так как выражение под знаком $\mathbf{M}$ сходится к нулю по вероятности и ограничено выражением

$$4\gamma_T\left(|x|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\,|X_t(\omega)\,U_k x|^2\right).$$

Как показано в п. 3 § 11, этот стохастический интеграл является также сильно непрерывным в среднем квадратическом.

Для дальнейшего доказательства необходимо получить оценки для разности интегралов, для этого воспользуемся тем, что $|U_k x|^2 = |x|^2$:

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t [A(s, X_s(\omega)) - A(s, X_s'(\omega))]\, x\, ds\right|^2 \leqslant t\int_0^t \mathbf{M}\,|A(s,$$

$$X_s(\omega))\,x - A(s, X_s'(\omega))\,x|^2\, ds \leqslant t\int_0^t \sum_k \gamma_k \mathbf{M}\,|X_s(\omega)\,U_k x -$$

$$- X_s'(\omega)\,U_k x|^2\, ds \leqslant t\gamma\int_0^t \|\mathbf{M}\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))^* \times$$

$$\times (X_s(\omega) - X_s'(\omega))\|\, ds\, |x|^2. \qquad (4.69)$$

Далее

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t dY_s(\omega)\,[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X_s'(\omega))]\, x\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \|R_s\| \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k\, |\mathbf{M}\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))\, U_k x|^2\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \gamma \sup_{s\leqslant t}\|R_s\|\int_0^t \|\mathbf{M}\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))^*\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))\|\, ds, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t [B(s, X_s(\omega)) - B(s, X_s'(\omega))]\, dY_s(\omega)\, x\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \mathbf{M}\,\mathrm{sp}\,[B(s, X_s(\omega)) - B(s, X_s'(\omega))]^*\,[B(s, X_s(\omega)) -$$

$$- B(s, X_s'(\omega))]\, R_x(s)\, ds \leqslant \int_0^t \mathbf{M}\ \mathrm{sp} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k U_k^* (X_s(\omega) - X_s'(\omega))^* \times$$

$$\times (X_s(\omega) - X_s'(\omega))\, U_k R_x(s)\, ds = \int_0^t \mathrm{sp}\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k U_k^* \mathbf{M}\,(X_s(\omega) -$$

$$- X_s'(\omega))^*\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))\, U_k R_x(s)\, ds \leqslant \gamma \sup_{s\leqslant t} R(s)\, |x|^2 \times$$

$$\times \int_0^t \|\mathbf{M}\,(X_s(\omega)) - X_s'(\omega))^*\,(X_s(\omega) - X_s'(\omega))\|\, ds. \quad (4.71)$$

Используя неравенства (4.69) — (4.71), можно аналогично теоремам 1 и 2 установить единственность решения, а методом последовательных приближений — существование решения. ■

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 13. ОБОБЩЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА

1. Общий вид линейного уравнения

Если исходить из стохастических уравнений, рассмотренных в предыдущем параграфе, то под линейными уравнениями следует понимать уравнение вида

$$dX_t(\omega) = A(t, X_t(\omega))\,dt + dY_t(\omega)\,B(t, X_t(\omega)) \qquad (5.1)$$

или

$$dX_t(\omega) = A(t, X_t(\omega))\,dt + B(t, X_t(\omega))\,dY_t(\omega), \qquad (5.2)$$

где $A(t, Z)$ и $B(t, Z)$ — линейные функции по $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ со значениями в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$. Чтобы правые части уравнений (5.1), (5.2) имели смысл, нужно придать смысл их коэффициентам в том случае, если аргумент $X_t(\omega)$ принадлежит не $\mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X})$, а $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Пусть $R(Z)$ — некоторая линейная функция из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$. Изучим условия, при которых определено выражение $R(A, (\omega))$, где $A(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$.

Лемма. Пусть выполнены такие условия:

1) $R(Z)$ непрерывна на $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в операторной норме и существует такой базис $\{e_k\}$, что для всех $x \in \mathbf{X}$ и $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$\lim_{n\to\infty} R(ZP_n)\,x = R(Z)\,x,$$

где P_n — оператор проектирования на подпространство, порожденное $e_1, \ldots, e_n$;

2) для всех $x, y, u, v \in \mathbf{X}$ существует

$$\beta_A(x, y, u, v) = \mathbf{M}\,(A(\omega)\,x, y)(A(\omega)\,u, v);$$

3) для всех $x \in \mathbf{X}$ сходится ряд

$$\sum_{i,j,k,l} (R(\langle e_i \circ e_j\rangle)\,x,\ R(\langle e_k \circ e_l\rangle))\,\beta_A(e_i, e_j, e_k, e_l). \qquad (5.3)$$

Тогда последовательность случайных операторов $R(A(\omega)P_n)$ сильно сходится к некоторому случайному оператору $R(A(\omega)) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. При этом существует $\mathbf{M}|R(A(\omega))x|^2$, и это выражение совпадает с (5.3).

Доказательство. Поскольку

$$A(\omega)P_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \circ A(\omega) e_k \rangle \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X}),$$

$$R(A(\omega)P_n) = \sum_{k=1}^{n} R(\langle e_k \circ A(\omega) e_k \rangle) x =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} (A(\omega) e_k, e_l) R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x.$$

Поэтому

$$|R(A(\omega)P_n)x|^2 = \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} (A(\omega) e_k, e_l) R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x \right|^2.$$

Так как оператор $A(\omega)P_n$ вырожденный, то с вероятностью 1

$$\lim_{m\to\infty} \| P_m A(\omega) P_n - A(\omega) P_n \| = 0,$$

значит,

$$\lim_{m\to\infty} \| R(P_m A(\omega) P_n) - R(A(\omega) P_n) \| = 0.$$

Поэтому

$$|R(A(\omega)P_n)x|^2 = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} (P_m A(\omega) e_k, e_l) R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x \right|^2 =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (A(\omega) e_k, e_l) R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x \right|^2.$$

Следовательно, вследствие теоремы Фату

$$\mathbf{M}|R(A(\omega)P_n)x|^2 \leqslant \lim_{m\to\infty} \mathbf{M} \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (A(\omega) e_k, e_l) \times \right.$$

$$\left. \times R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x \right|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{l,j=1}^{m} (R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x, R(\langle e_l \circ e_j \rangle x) \times$$

$$\times \mathbf{M}(A(\omega) e_k, e_l)(A(\omega) e_l, e_j) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{l,j=1}^{\infty} (R(\langle e_k \circ e_l \rangle) x,$$

$$R(\langle e_l \circ e_j \rangle) x) \beta_A(e_k, e_l, e_l, e_j). \tag{5.4}$$

Аналогично устаиавливаем, что при $n < m$

$$\mathbf{M} | R(A(\omega) P_n) x - R(A(\omega) P_m) x |^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n<k,l\leqslant m} \sum_{i,j=1}^{\infty} (R(\langle e_k \circ e_i\rangle) x,\ R(\langle e_l \circ e_j\rangle) x) \beta_A(e_k, e_i, e_l, e_j).$$

Поэтому в силу сходимости ряда (5.3)

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M} | R(A(\omega) P_n) x - R(A(\omega) P_m) x |^2 = 0,$$

так что $R(A(\omega) P_n) x$ сходится в среднем квадратическом (а значит, и сильно) к некоторому пределу, который мы условились обозначать $R(A(\omega))x$. При этом

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} | R(A(\omega) P_n) x |^2 = \mathbf{M} | R(A(\omega)) x |^2. \tag{5.5}$$

Подобные соображения показывают, что $R(P_m A(\omega) P_n) x$ при $m \to \infty$ сходится в среднем квадратическом (при фиксированном n) к $R(A(\omega) P_n) x$, так что

$$\mathbf{M} | R(A(\omega) P_n) x |^2 = \lim_{m\to\infty} \mathbf{M} | R(P_m A(\omega) P_n) x |^2.$$

Поскольку в ряде соотношений (5.4) вместо неравенства имеет место равенство, то, учитывая (5.5), получаем

$$\mathbf{M} | R(A(\omega)) x | =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l\leqslant n} \sum_{i,j=1}^{\infty} (R(\langle e_k \circ e_i\rangle) x,\ R(\langle e_l \circ e_j\rangle) x) \beta_A(e_k, e_i, e_l, e_j). \blacksquare$$

Замечание. $\mathbf{M} | R(A(\omega)) x |^2$ как предел неотрицательиых ограниченных квадратических форм относительно x будет также такой формой.

Нетрудно записать линейное уравнение, обобщающее (5.1) и (5.2),

$$dX_t(\omega) = A(t, X_t(\omega))\, dt + dY_t(\omega) B_1(t, X_t(\omega)) +$$
$$+ B_2(t, X_t(\omega))\, dY_t(\omega),$$

где коэффициенты являются линейными функциями X. Заметим, что мартингальная часть уравнения (т. е. содержащая дифференциал мартингала $dY_t(\omega)$) является линейной операторной функцией $X_t(\omega)$ и $dY_t(\omega)$. Это соображение подсказывает общий вид линейного операторного уравнения:

$$dX_t(\omega) = A(t, X_t(\omega))\, dt + B(t, X_t(\omega),\ dY_t(\omega)), \tag{5.6}$$

где $B(t, Z, W)$ — функция, определенная при любом t на $\mathbf{L}(\mathbf{X}) \times \mathbf{L}(\mathbf{X})$ и принимающая значения из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, линейная по каждому аргументу. Чтобы уравнение (5.6) имело смысл, необходимо определить стохастический интеграл

$$\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega)), \tag{5.7}$$

что мы и рассмотрим далее.

2. Одно обобщение стохастического интеграла

Пусть $Y_t(\omega)$ — операторный гауссов процесс с независимыми приращениями со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которого

$$\mathbf{M}(Y_t(\omega)x, y) = 0, \quad x, y \in \mathbf{X};$$

$$\mathbf{M}(Y_t(\omega)x, y)(Y_t(\omega)u, v) = \beta_t(x, y, u, v), \ (x, y, u, v \in \mathbf{X}).$$

Предположим, что

$$\beta_t(x, y, u, v) = \int_0^t \beta^s(x, y, u, v)\, ds,$$

где $\beta^s(x, y, u, v)$ — локально интегрируемая функция по s при всех x, y, u, v, а при любом $s \geqslant 0$ она ограниченная четырехлинейная форма на $\mathbf{X}^4$. Для такого $Y_t(\omega)$ определим интеграл (5.7).

Пусть $B(s, Z_1, Z)$ для всех $s > 0$, $Z_1 \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ удовлетворяет условию.

I. $B(s, Z_1, Z)$ непрерывно по Z в операторной норме и для некоторого базиса $\{e_k\}$ не зависящего от s) и любого $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n\to\infty} B(s, Z_1, ZP_n)x = B(s, Z_1, Z)x$$

и ряд

$$\sum_{k,l,i,j} (B(s, Z_1, \langle e_k \circ e_l\rangle)x,\ B(s, Z_1, \langle e_i \circ e_j\rangle)x)\,\beta(e_k, e_l, e_i, e_j) \tag{5.8}$$

сходится равномерно относительно s на каждом конечном интервале. На основании леммы последняя сумма представима в виде

$$\mathbf{M}\,|B(s, Z_1, Y^s(\omega))x|^2, \tag{5.9}$$

гд $Y^s(\omega)$ — гауссов случайный оператор из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которого $\mathbf{M}Y^s(\omega) = 0$ и

$$\mathbf{M}(Y^s(\omega)x, y)(Y^s(\omega)u, v) = \beta^s(x, y, u, v).$$

В силу замечания к лемме выражение (5.9) является ограниченной квадратической формой по x, поэтому такой формой будет

$$\mathbf{M}(B(s, Z_1, Y^s(\omega))x, B(s, Z_2, Y^s(\omega))x), \; Z_1, Z_2 \in \mathbf{L}(\mathbf{X}).$$

Таким образом, определена операторная функция

$$C^\beta(s, Z_1, Z_2) = \mathbf{M}B^*(s, Z_1, Y^s(\omega))B(s, Z_1, Y^s(\omega)),$$

значениями которой служат операторы из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$. Легко убедиться, что она линейна по аргументам Z_1 и Z_2 и

$$C^\beta(s, Z_2, Z_1) = [C^\beta(s, Z_1, Z_2)]^*.$$

Заметим, что

$$(C^\beta(s, Z, Z)x, x)$$

при любом x является неотрицательной квадратической числовой функцией относительно Z, поскольку функцией является $|R(Z)x|^2$, где R — линейная функция из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$.

В дальнейшем предположим, что $C^\beta(s, Z, Z)$ удовлетворяет следующему ряду условий.

II. а) при $s \geqslant 0$ $C^\beta(s, Z, Z)$ непрерывно по Z в операторной норме;

б) при $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ $C^\beta(s, Z, Z)$ сильно непрерывно по s;

в) если $\{e_k\}$ — базис, указанный в условии I, P_n — оператор проектирования на подпространство, порожденное векторами $\{e_k, k = 1, \dots, n\}$, то для $s \geqslant 0$, $x \in \mathbf{X}$ и $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$\lim_{n, m \to \infty} (C^\beta(s, P_n Z, P_m Z)x, x) = (C^\beta(s, Z, Z)x, x).$$

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения леммы, убеждаемся, что для $Z_s(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которых при $x \in \mathbf{X}$ сходится ряд

$$\sum_{k,i,l,j} (C^\beta(s, \langle e_k \circ e_i \rangle, \langle e_l \circ e_j \rangle)x, x)\mathbf{M}(Z_s(\omega)e_k, e_i)(Z_s(\omega)e_l, e_j), \tag{5.10}$$

существует предел (в смысле сходимости в среднем)

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} C^\beta(s, Z_s(\omega)P_n, Z_s(\omega)P_m),$$

этот предел обозначим $C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))$, при этом

$$\mathbf{M}(C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))x, x).$$

совпадает с выражением (5.10). Таким образом, $C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))$ определено как слабый неотрицательный оператор с конечным математическим ожиданием.

Пусть $\mathfrak{f}_s$ — некоторый поток σ-алгебр, относительно которого $Y_s(\omega)$ является мартингалом. Обозначим через T^2_β множество операторных функций $Z_t(\omega)$ со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, удовлетворяющих условиям:

а) $Z_t(\omega)$ определено и измеримо при $t \geqslant 0$;

б) для всех $x \in \mathbf{X}$ $\mathbf{M}|Z_t(\omega)x|^2 < \infty$;

в) для всех $s > 0$ определено $C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))$ и $\mathbf{M}(C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))x, x) < \infty$ (т. е. сходится ряд (5.10)) и для всех $t > 0$, $x \in \mathbf{X}$

$$\int_0^t \mathbf{M}(C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))x, x)\,ds < \infty.$$

Покажем, что для всех $Z_s(\omega) \in T^2_\beta$ можно определить интеграл (5.7) так, чтобы выполнялись условия.

А. Этот интеграл как функция t является сильным операторным мартингалом, его операторная характеристика имеет вид

$$\int_0^t C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))\,ds.$$

Б. Интеграл является линейной функцией $Z_s(\omega)$. Рассмотрим сначала интеграл

$$\int_0^t B(s, Z, dY_s(\omega)),$$

где $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$ не зависит ни от s, ни от ω. Определим его с помощью равенства

$$\int_0^t B(s, Z, dY_s(\omega)) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t B(s, Z, d\langle e_k \circ Y_s(\omega) e_k\rangle) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^t B(s, Z, \langle e_k \circ e_l\rangle)\, d(Y_s(\omega) e_k, e_l). \qquad (5.11)$$

Слагаемые в правой части (5.11) являются обычными стохастическими интегралами операторных неслучайных функций по (зависимые между собой) одномерным гауссовым процессам, имеющим в совокупности независимые приращения. Взаимная характеристика мартингалов $(Y_s(\omega)e_k, e_l)$ и $(Y_s(\omega)e_i, e_j)$ будет $\beta_s(e_k, e_l, e_i, e_j)$. Поэтому характеристика мартингала

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\int_0^t B(s, Z\langle e_k \circ e_l\rangle)\, d(Y_s(\omega)e_k, e_l)$$

будет

$$\int_0^t \sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{m} (B^*(s, Z, \langle e_k \circ e_l\rangle) B(s, Z, \langle e_i \circ e_j\rangle) \times$$

$$\times x, x)\, \beta^s(e_k, e_l, e_i, e_j)\, ds.$$

Вследствие условия I подынтегральная функция при n, $m \to \infty$ равномерно сходится к $C^\beta(s, Z, Z)$ (ряд (5.8) равномерно сходится). Поэтому, применяя теорему 5 § 9, можем убедиться, что ряд в правой части (5.11) сильно сходится к непрерывному операторному мартингалу с характеристикой

$$\int_0^t C^\beta(s, Z, Z)\, ds.$$

Положим для интервала $\Delta = [s, t]$ и $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$I_\Delta(Z) = \int_s^t B(u, Z, dY_u(\omega)),$$

где $I_\Delta(Z)$ является $\mathfrak{f}_t$-измеримым случайным оператором со значениями в $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ (при любых Z), при этом

$$\mathbf{M}(|I_\Delta(Z)x|^2/\mathfrak{f}_s) = \int_s^t C^\beta(u, Z, Z)\, du.$$

Распространим $I_\Delta(Z)$ на случайные Z, для которых $Z(\omega)$ является $\mathfrak{f}_s$-измеримой величиной со значениями из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$. Очевидно, что $I_\Delta(Z)$ не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{f}_s$, но линейно зависит от Z. Если $Z(\omega)$ $\mathfrak{f}_s$-измеримо, для всех n имеет смысл

$$I_\Delta(Z(\omega) P_n) = \sum_{k=1}^{n} I_\Delta(\langle e_k \circ Z(\omega) e_k \rangle) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\infty} (Z(\omega) e_k, e_l) I_\Delta(\langle e_k \circ e_l \rangle),$$

поскольку для всех k

$$\mathbf{M}\left(\left| \sum_{l=1}^{\infty} (Z(\omega) e_k, e_l) I_\Delta(\langle e_k \circ e_l \rangle) x \right|^2 / \mathfrak{f}_s\right) =$$

$$= \sum_{l,j=1}^{\infty} (Z(\omega) e_k, e_l)(Z(\omega) e_k, e_j) \int_s^t (C^\beta(u, \langle e_k \circ e_l \rangle, \langle e_k \circ e_j \rangle) \times$$

$$\times x, x)\, du = \int_s^t (C^\beta(u, \langle e_k \circ Z(\omega)) e_k \rangle, \langle e_k \circ Z(\omega) e_k \rangle) x, x)\, du.$$

Используя последнее соотношение, легко убеждаемся, что

$$\mathbf{M}(| I_\Delta(Z(\omega) P_n) x |^2 / \mathfrak{f}_s) = \int_s^t (C^\beta(u, Z(\omega) P_n, Z(\omega) P_n) x, x)\, ds,$$

$$\mathbf{M}(| I_\Delta(Z(\omega)(P_n - P_m)) x |^2 / \mathfrak{f}_s) =$$

$$= \int_s^t (C^\beta(u, Z(\omega)(P_n - P_m), Z(\omega)(P_n - P_m)) x, x)\, du.$$

Следовательно, если $Z(\omega)$ таково, что существует

$$\int_s^t C^\beta(u, Z(\omega), Z(\omega))\, du,$$

то определено как сильный предел

$$I_\Delta(Z(\omega)) = \lim_{n\to\infty} I(Z(\omega) P_n).$$

Если, кроме того,

$$\int_s^t \mathbf{M}(C^\beta(u, Z(\omega), Z(\omega)) x, x)\, du < \infty$$

для всех $x \in \mathbf{X}$, то

$$\mathbf{M} | I_\Delta(Z(\omega)) x |^2 < \infty$$

и при $\tau \in \Delta\, I_{[s,\tau]}(Z(\omega))$ как функция τ будет непрерывным операторным мартингалом с характеристикой

$$\int_s^\tau C^\beta(u, Z(\omega), Z(\omega))\, du.$$

Пусть $Z_s(\omega)$ — ступенчатая функция из T_β^2, постоянная на интервалах $[s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, \ldots$, где $0 = s_0 < s_1 < \ldots$ $\ldots, s_n \to \infty$. Тогда для всех k

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathbf{M}C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))\, ds = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathbf{M}C^\beta(s, Z_{s_k}(\omega), Z_{s_k}(\omega))\, ds$$

и, следовательно, при $\tau \in [s_k, s_{k+1})$ определена величина

$$I_{[s_k,\tau)}(Z_{s_k}(\omega)).$$

Положим

$$\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega)) = \sum I_{[s_k\wedge t, s_{k+1}\wedge t)}(Z_{s_k}(\omega))$$

(в правой части этого равенства лишь конечное число слагаемых). Поскольку при $t \in [t_k, t_{k+1})$ выражение $I_{[s_k,t)}(Z_{s_k}(\omega))$ является непрерывным операторным мартингалом с характеристикой

$$\int_{s_k}^t C^\beta(u, Z_{s_k}(\omega), Z_{s_k}(\omega))\, du = \int_{s_k}^t C^\beta(u, Z_u(\omega), Z_u(\omega))\, du,$$

то для интеграла, определенного таким образом, выполнено условие А, очевидно, для него выполнено и Б.

Если $Z_t^{(n)}(\omega)$ такая последовательность ступенчатых функций из T_β^2, что для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^t (\mathbf{M}C^\beta(u, Z_u^{(n)}(\omega) - Z_u^{(m)}(\omega), Z_u^{(n)}(\omega) - Z_u^{(m)}(\omega))x, x)\, du = 0, \tag{5.12}$$

то последовательность мартингалов

$$\int_0^t B(s, Z_s^{(n)}(\omega), dY_s(\omega))$$

сильно сходится в среднем квадратическом (на основании теоремы 5 § 9). Предположим, что $Z_t(\omega)$ такая функция из T_β^2, что для всех $x \in \mathbf{X}$ и $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t (\mathbf{M} C^\beta (u, Z_u^{(n)}(\omega) - Z_u(\omega), Z_u^{(n)}(\omega) - Z_u(\omega))\, x, x)\, du = 0. \tag{5.13}$$

Тогда для последовательности $Z_t^{(n)}(\omega)$ выполнено (5.12) и можно положить

$$\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t B(s, Z_s^{(n)}(\omega), dY_s(\omega))$$

(существование сильного предела справа вытекает из (5.12). Легко убедиться, что этот предел не зависит от выбора последовательности, для которой выполнено (5.13).

Пусть $Z_t(\omega) \in T_\beta^2$. Тогда определен интеграл

$$\int_0^t B(s, (Z_s(\omega) e_k, e_l) \langle e_k \circ e_l \rangle, dY_s(\omega)) =$$
$$= \int_0^t (Z_s(\omega) e_k, e_l)\, B(s, \langle e_k \circ e_l \rangle, dY_s(\omega)).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно построить последовательность числовых ступенчатых функций $\psi_n(s, \omega)$, таких, что $\psi_n(s, \omega) \langle e_k \circ e_l \rangle \in T_\beta^2$ и для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left\{ \mathbf{M} \int_0^t [\psi_n(s, \omega) - (Z_s(\omega) e_k, e_l)]^2 \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times C^\beta (s, \langle e_k \circ e_l \rangle, \langle e_k \circ e_l \rangle)\, ds \right\} x, x \right) = 0.$$

Из непрерывности $(C^\beta(s, \langle e_k \circ e_l \rangle, \langle e_k \circ e_l \rangle)\, x, x)$, вытекает, что для этого достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^t \mathbf{M} [\psi_n(s, \omega) - (Z_s(\omega) e_k, e_l)]^2\, ds = 0. \right. \tag{5.14}$$

Существование же такой $\mathfrak{F}_s$-согласованной последовательности ступенчатых функций $\psi_n(s, \omega)$, что выполняется (5.14), устанавливается аналогично лемме 1 в [6, с. 487].

Определим далее (для той же функции $Z_t(\omega)$) интеграл

$$\int_0^t B(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k \rangle, dY_s(\omega)).$$

Пусть $\psi_\alpha(s) = 1$, если $\sup_n \| MC^\beta(s, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle, \langle e_k \circ P_n \times \times Z_s(\omega) e_k \rangle) \| \leqslant \alpha$, $\psi_\alpha(s) = 0$, если $\sup_n \| MC^\beta(s, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) \times \times e_k \rangle, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle) \| > \alpha$. Поскольку для всех x

$$(MC^\beta(s, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle) x, x) \to$$
$$\to (MC^\beta(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k \rangle, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k \rangle) x, x),$$

то последовательность $\| MC^\beta(s, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle, \langle e_k \circ \circ P_n Z_s(\omega) e_k \rangle) \|$ ограничена при любом s. Следовательно, $\varphi_\alpha(s) \uparrow 1$ при $\alpha \to \infty$. Положим

$$\int_0^t B(s, \langle e_k \circ \psi_\alpha(s) Z_s(\omega) e_k \rangle, dY_s(\omega)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t B(s, \langle e_k \quad \psi_\alpha(s) (Z_s(\omega) e_k, e_j) e_j \rangle, dY_s(\omega)). \quad (5.15)$$

Сходимость ряда в правой части вытекает из того, что при $n < m$ характеристика мартингала

$$\sum_{j=n+1}^{m} \int_0^t \psi_\alpha(s) (Z_s(\omega) e_k, e_j) B(s, \langle e_k \circ e_j \rangle, dY_s(\omega))$$

равна

$$\sum_{i,j=n+1}^{m} \int_0^t \psi_\alpha(s) (Z_s(\omega) e_k, e_i) (Z_s(\omega) e_k, e_j) \times$$
$$\times C^\beta(s, \langle e_k \circ e_i \rangle, \langle e_k \circ e_j \rangle) ds,$$

а ее математическое ожидание —

$$\int_0^t \sum_{i,j=n+1}^{m} \psi_\alpha(s) \mathbf{M} (Z_s(\omega) e_k, e_i) (Z_s(\omega) e_k, e_j) \times$$
$$\times C^\beta(s, \langle e_k \circ e_i \rangle, \langle e_k \circ e_j \rangle) ds.$$

Но

$$\Big\| \psi_\alpha(s) \sum_{i,j=n+1}^{m} \mathbf{M} (Z_s(\omega) e_k, e_i) (Z_s(\omega) e_k, e_j) \times$$

$$\times C^{\beta}(s, \langle e_k \circ e_l\rangle, \langle e_k \circ e_j\rangle)\Bigg\| = \psi_\alpha(s) \| \mathbf{M} C^{\beta}(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega)) \times$$

$$\times (P_m - P_n) e_k\rangle, \langle e_k \circ (P_m - P_n) Z_s(\omega) e_k\rangle \| \leqslant$$

$$\leqslant \psi_\alpha(s)(2\| \mathbf{M} C^{\beta}(s, \langle e_k \circ P_m Z_s(\omega) e_k\rangle, \langle e_k \circ P_m Z_s(\omega)\rangle)\| +$$

$$+ 2\| \mathbf{M} C^{\beta}(s, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k\rangle, \langle e_k \circ P_n Z_s(\omega) e_k\rangle)\|) \leqslant 4\alpha.$$

Кроме того, для всех s и $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{l,j=n+1}^{m} (\mathbf{M}(Z_s(\omega) e_k, e)(Z_s(\omega) e_k, e_j) C^{\beta}(s, \langle e_k \circ e_l\rangle, \langle e_k \circ e_j\rangle) x, x) = 0$$

вследствие сходимости ряда (5.10). Поэтому для всех $x \in \mathbf{X}$ и $t > 0$

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^t \sum_{l,j=n+1}^{m} \psi_\alpha(s) \mathbf{M}(Z_s(\omega) e_k, e_l)(Z_s(\omega) e_k, e_j) \times C^{\beta}(s, \langle e_k \circ e_l\rangle, \langle e_k \circ e_j\rangle) ds = 0.$$

Тем самым сходимость ряда справа в (5.15) доказана. Поскольку при $\alpha < \alpha_1$ характеристикой мартингала

$$\int_0^t B(s, \langle e_k \circ [\psi_{\alpha_1}(s) - \psi_\alpha(s)] Z_s(\omega) e_k\rangle, dY_s(\omega))$$

является

$$\int_0^t [\psi_{\alpha_1}(s) - \psi_\alpha(s)] C^{\beta}(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle) ds,$$

и последнее выражение сильно стремится к нулю при $\alpha, \alpha_1 \to \infty$, то существует сильный предел

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^t B(s, \langle e_k \circ \psi_\alpha(s) Z_s(\omega) e_k\rangle, dY_s(\omega)).$$

Этот предел считаем равным

$$\int_0^t B(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle, dY_s(\omega)), \tag{5.16}$$

он является мартингалом с характеристикой

$$\int_0^t C^\beta(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle)\, ds,$$

кроме того, интеграл (5.16) аддит вен по Z.

Положим далее

$$\int_0^t B(s, Z_s(\omega) P_n, dY_s(\omega)) = \sum_{k=1}^n \int_0^t B(s, \langle e_k \circ Z_s(\omega) e_k\rangle, dY_s(\omega)). \tag{15.7}$$

Этот интеграл является мартиигалом с характеристикой

$$\int_0^t \mathbf{M} C^\beta(s, Z_s(\omega) P_n, Z_s(\omega) P_n)\, ds.$$

Полагая

$$\bar{\psi}_\alpha(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sup\limits_n \| C^\beta(s, Z_s(\omega) P_n, Z_s(\omega) P_n)\| \leqslant \alpha, \\ 0, & \text{если } \sup\limits_n \| C^\beta(s, Z_s(\omega) P_n, Z_s(\omega) P_n)\| > \alpha, \end{cases}$$

точно так, как и выше, определим

$$\int_0^t B(s, \bar{\psi}_\alpha(s) Z_s(\omega), dY_s(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t B(s, \bar{\psi}_\alpha(s) \times$$

$$\times Z_s(\omega) P_n, dY_s(\omega)),$$

а затем

$$\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega)) = \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^t B(s, \bar{\psi}_\alpha(s) Z_s(\omega), dY_s(\omega)),$$

где оба предела существуют как сильные среднеквадратические. Легко проверить, что для интеграла таким образом, определенного, выполняются условия А и Б.

Замечание. Пусть $Y^s(\omega)$, не зависящий от $Z_s(\omega)$ гауссов случайный оператор, для которого

$$\mathbf{M}(Y^s(\omega) x, y)(Y^s(\omega) u, v) = \beta^s(x, y, u, v).$$

Тогда по определению C^β

$$C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega)) = \mathbf{M}(B^*(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega)) \times$$

$$\times B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))/Z_s(\omega))$$

и, значит,

$$MC^{\beta}(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega)) = MB^*(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega)) \times$$
$$\times B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega)).$$

Поэтому на основании условия А

$$\mathbf{M}\left|\int_0^t B(s, Z_s(\omega)), dY_s(\omega))\, x\right|^2 = \int_0^t \mathbf{M}\,|\,B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))\, x\,|^2\, ds$$

или

$$\mathbf{M}\left[\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega))\right]^* \left[\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega))\right] =$$
$$= \int_0^t \mathbf{M}B^*(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))\, B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))\, ds. \quad (5.18)$$

Аналогично можно установить равенство

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega))\, x, y\right)\left(\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega))\, u, v\right) =$$
$$= \int_0^t \mathbf{M}\,(B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))\, x, y)\,(B(s, Z_s(\omega), Y^s(\omega))\, u, v)\, ds \quad (5.19)$$

для всех $x, y, u, v \in \mathbf{X}$.

§ 14. ОПЕРАТОРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Определение линейного уравнения

В этом параграфе рассматриваются условия существования и единственности решения линейного стохастического дифференциального уравнения, приведенного в § 13 (уравнение (5.6)), и изучаются его свойства. В интегральной форме это уравнеие имеет вид

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(s, X_s(\omega))\, ds + \int_0^t B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega)), \quad (5.20)$$

где $X_0(\omega)$ — заданное начальное значение искомого решения $X_t(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $A(s, Z)$ — линейная функция по Z из $[0, \infty) \times \mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, а $B(s, Z_1, Z_2)$ — линейная функция по аргументам Z_1 и Z_2 из $[0, \infty) \times \mathbf{L}(\mathbf{X}) \times \mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$.

Пусть фиксированы некоторый поток σ-алгебр $\mathfrak{F}_t$ и гауссов процесс с независимыми приращениями $Y_t(\omega)$, принимающий значения из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$ и согласованный с потоком $\mathfrak{F}_t$. Для того чтобы стохастический интеграл в правой части (5.20) имел смысл (такой интеграл определен в п. 2 § 13), предположим, что следующие условия выполнены.

I. $\mathbf{M}(Y_t(\omega)x, y) = 0, \quad x, y \in X;$

$$\mathbf{M}(Y_t(\omega)x, y)(Y_t(\omega)u, v) = \int_0^t \beta^s(x, y, u, v)\, ds,$$

$$(x, y, u, v \in \mathbf{X}),$$

где $\beta^s(x, y, u, v)$ при $s \geqslant 0$ — ограниченная четырехлинейная форма на $\mathbf{X}^4$, непрерывная по s;

II. Определена функция

$$C^\beta(s, Z_1, Z_2) = \sum_{k,l,l_1} \beta^s(e_k, e_l, e_l, e_l) B^*(s, Z_1, \langle e_l \circ e_l \rangle) \times$$
$$\times B(s, Z_2, \langle e_k \circ e_l \rangle),$$

где ряд справа сходится сильно и локально равномерно по s, $\{e_k\}$ — фиксированный базис, при этом функция $C^\beta(s, Z_1, Z_2$ непрерывна (сильно) по s, по норме $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ непрерывна по Z_1 и Z_2, кроме того, для всех $x, y \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n,m\to\infty} (C^\beta(s, Z_1P_n, Z_2P_m)x, y) = (C^\beta(s, Z_1, Z_2)x, y),$$

где $P_n = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k \circ e_k \rangle$.

При выполнении этих условий стохастический интеграл в (5.20) определен, если только для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$

$$\int_0^t (\mathbf{M}C^\beta(s, X_s(\omega) X_s(\omega))x, x)\, ds < \infty,$$

где

$$(\mathbf{M}C^\beta(s, X_s(\omega), X_s(\omega))x, x) = \lim_{n,m\to\infty} (\mathbf{M}C^\beta(s, X_s(\omega) \times$$
$$\times P_n, X_s(\omega) P_m)x, x).$$

Для того чтобы в линейную функцию из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ — — $A(s, Z)$ можно было подставить случайный оператор из $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, будем предполагать выполненным следующее условие.

III. $A(s, Z)$ сильно непрерывно по s, непрерывно по норме $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ по Z и для всех x

$$A(s, Z)x = \lim_{n\to\infty} A(s, ZP_n)x.$$

Установим достаточные условия существования первого интеграла в правой части (5.20).

Лемма 1. Пусть $\mathbf{M}|X_s(\omega)x|^2 < \infty$ для всех $x \in \mathbf{X}$ и $s \geqslant 0$,

$$\beta_X(s, t;\ x, y, u, v) = \mathbf{M}(X_s(\omega)x, y)(X_t(\omega)u, v)$$

и для всех $s, t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{X}$ сходится ряд

$$\sum_{i,j,k,l} (A(s, \langle e_i \circ e_j\rangle)x, A(t, \langle e_k \circ e_l\rangle)x)\beta_X(s, t;\ e_i, e_j, e_k, e_l) =$$
$$= (R(s, t)x, x).$$

Если для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$ существует интеграл

$$\int_0^t\int_0^t (R(\sigma, \tau)x, x)\,d\sigma d\tau,$$

то для всех $t > 0$ и $x \in \mathbf{X}$ определен интеграл $\int_0^t [A(\tau, X_\tau \times$ $\times (\omega))x]\,d\tau$, который принадлежит $\mathbf{X}(\Omega)$, т. е.

$$\int_0^t A(\tau, X_\tau(\omega))\,d\tau \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X}).$$

Доказательство. Из леммы § 13 вытекает, что в условиях леммы определена функция

$$Z_s(\omega) = A(s, X_s, (\omega)) \in \mathbf{L}(\Omega, \mathbf{X}),$$

при этом

$$\mathbf{M}(Z_s(\omega)x, Z_t(\omega)x) = (R(s, t)x, x).$$

Случайный процесс $z(t, \omega) = Z_t(\omega)x$ является измеримым, при этом

$$\mathbf{M}(Z(t, \omega), Z(s, \omega)) = \gamma(t, s) = (R(s, t)x, x)$$

и функция $\gamma(t, s)$ интегрируема на $[0, T] \times [0, T]$, каково бы ни было T. Пусть $\Lambda_n = \{t\colon \gamma(t, t) < n\}$.

Тогда для всех t определен интеграл

$$\int_0 \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds,$$

так как

$$\mathbf{M}\int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\,|z(s,\ \omega)|^2\, ds = \int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\,\gamma(s,\ s)\, ds < \infty.$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds,\ \int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds\right) =$$

$$= \int_0^t\int_0 \chi_{\Lambda_n}(\sigma)\,\chi_{\Lambda_m}(\tau)\,\gamma(\sigma,\ \tau)\, d\sigma d\tau.$$

Поскольку $\chi_{\Lambda_n}(s) \uparrow 1$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M}\left(\int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds,\ \int_0 \chi_{\Lambda_m}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds\right) =$$

$$= \int_0^t\int_0^t \gamma(\sigma,\ \tau)\, d\sigma d\tau$$

и, значит,

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbf{M}\left|\int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds - \int_0^t \chi_{\Lambda_m}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds\right|^2 = 0.$$

Отсюда и вытекает существование интеграла

$$\int_0^t z(s,\ \omega)\, ds = \lim_{n\to\infty}\int_0^t \chi_{\Lambda_n}(s)\, z(s,\ \omega)\, ds$$

сильный предел в среднем квадратическом).

2. Существование и единственность решения

Обычно в теории стохастических дифференциальных уравнений для доказательства существования и единственности решения предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям Липшица. Для операторных уравнений с линейными коэффициентами используется условие, аналогичное условию Липшица. Пусть $C(Z_1, Z_2)$ — линейная функция из $\mathbf{L}(\mathbf{X}) \times \mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ по каждому аргументу, $C(Z_1, Z_2) = C^*(Z_2, Z_1)$ и $C(Z, Z)$ неотрицательна. Допустим, что $C(Z_1, Z_2)$ удовлетворяет условию L_γ, если $C(Z(\omega), Z(\omega))$ определено для всех $Z(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которых существует $MZ^*(\omega) Z(\omega)$ и

$$\| MC(Z(\omega), Z(\omega)) \| \leqslant \gamma \| MZ^*(\omega) Z(\omega) \|.$$

Приведем пример билинейной функции, удовлетворяющей условию L_γ. Пусть $S, V \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$

$$C(Z_1, Z_2) = S^* Z_2^* V^* V Z_1 S.$$

Тогда

$$(MC(Z(\omega), Z(\omega))x, x) = \mathbf{M} | VZ(\omega) Sx |^2 \leqslant \| V \|^2 \mathbf{M} | Z(\omega) Sx |^2 = \\ = \| V \|^2 (\mathbf{M}Z^*(\omega) Z(\omega) Sx, Sx) \leqslant \| V \|^2 \| \mathbf{M}Z^*(\omega) Z(\omega) \| \| S \|^2 | x |^2.$$

Значит,

$$\| MC(Z(\omega), Z(\omega)) \| = \sup_{|x|=1} (MC(Z(\omega), Z(\omega))x, x) \leqslant \\ \leqslant \| V \|^2 \| S \|^2 \| MZ^*(\omega) Z(\omega) \|$$

и $C(Z_1, Z_2)$ удовлетворяет условию L_γ с $\gamma = \| V \|^2 \| S \|^2$.

Поскольку суммы билинейных функций, удовлетворяющих условию L_γ, также удовлетворяют этому условию (с некоторым другим γ), то функции вида

$$C(Z_1, Z_2) = \sum_k S_k^* Z_2 V_k^* V_k Z_1 S_k$$

будут удовлетворять условию L_γ $\left(\gamma = \sum_k \| S_k \|^2 \| V_k \|^2\right)$.

Теорема. *Пусть для всех $T > 0$ можно указать такое $\gamma > 0$, что функция $A^*(s, Z_2) A(s, Z_1)$ и $C^\beta(s, Z_1, Z_2)$ удовлетворяют условию L_γ и выполнены условия I—III. Если $\mathbf{M}X_0^*(\omega) X_0(\omega)$ определено и $X_0(\omega)$ $\mathfrak{f}_0$-измеримо, то уравнение* (5.20) *имеет $\mathfrak{f}_t$-согласованное решение $X_t(\omega)$, для которого существует $\mathbf{M}X_t^*(\omega) X_t(\omega)$ и $\| \mathbf{M}X_t^*(\omega) X_t(\omega) \|$, локально ограничены. Такое решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности: если $\overline{X}_t(\omega)$ — другое решение, то $\forall x \in \mathbf{X}$ и $t > 0$*

$$\{\overline{X}_t(\omega) x = X_t(\omega) x\} = 1.$$

Доказательство. Докажем сначала единственность решения. Если $X_t(\omega)$ и $\overline{X}_t(\omega)$ решения (5.20), то

$$X_t(\omega)-\overline{X}_t(\omega)=\int_0^t A(s, X_s(\omega)-\overline{X}_s(\omega))\,ds+$$
$$+\int_0^t B(s, X_s(\omega)-\overline{X}_s(\omega), dY_s(\omega)). \tag{5.21}$$

Обозначая $X_t(\omega)-\overline{X}_t(\omega)=Z_t(\omega)$, получаем при $t\leqslant T$

$$\mathbf{M}\,|Z_t(\omega)x|^2\leqslant 2\mathbf{M}\left|\int_0^t A(s, Z_s(\omega))\,x\,ds\right|^2+$$
$$+2\mathbf{M}\left|\int_0^t B(s, Z_s(\omega), dY_s(\omega))\,x\right|^2\leqslant 2t\int_0^t \mathbf{M}\,(A^*(s, Z_s(\omega))\times$$
$$\times A(s, Z_s(\omega))\,x, x)\,ds+2t\int_0^t(\mathbf{M}C^\beta(s, Z_s(\omega), Z_s(\omega))\,x, x)\,ds\leqslant$$
$$\leqslant 2t\int_0^t\gamma\,\|\mathbf{M}Z_s^*(\omega)\,Z_s(\omega)\|\,|x|^2\,ds+2\gamma\int_0^t\|\mathbf{M}Z_s^*(\omega)\,Z_s(\omega)\|\times$$
$$\times|x|^2\,ds\leqslant(2T+2)\,\gamma\int_0^t\|\mathbf{M}Z_s^*(\omega)\,Z_s(\omega)\|\,ds\,|x|^2.$$

Таким образом, при $|x|=1$, $t\leqslant T$

$$(\mathbf{M}Z_t^*(\omega)\,Z_t(\omega)\,x, x)\leqslant(2T+2)\,\gamma\int_0^t\|\mathbf{M}Z_s^*(\omega)\,Z_s(\omega)\|\,ds.$$

Взяв слева sup по x при $|x|=1$, находим при некотором $\lambda<\infty$

$$\|\mathbf{M}Z_t^*(\omega)\,Z_t(\omega)\|\leqslant\lambda\int_0^t\|\mathbf{M}Z_s^*(\omega)\,Z_s(\omega)\|\,ds. \tag{5.22}$$

Из этого неравенства вытекает, что $\|\mathbf{M}Z_t^*(\omega)\,Z_t(\omega)\|=0$. Единственность доказана. Существование, как обычно в теории стохастических дифференциальных уравнений, докажем методом последовательных приближений. Положим

$$X_t^0(\omega)=X_0(\omega),$$

$$X_t^{(n)}(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t A(s, X_s^{(n-1)}(\omega))\,ds + \tag{5.23}$$

$$+ \int_0^t B(s, X_s^{(n-1)}(\omega), dY_s(\omega)), \quad n \geqslant 1;$$

$$Z_t^{(n)}(\omega) = X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(n-1)}(\omega), \quad n > 0, \quad Z_t^{(0)}(\omega) = X_0(\omega).$$

Существование интегралов в правой части (5.23) вытекает из условий I—III и того, что A^*A, C^β удовлетворяют условию L_γ на каждом конечном промежутке. Вычитая последовательные равенства (5.23), получаем рекуррентное соотношение

$$Z_t^{(n)}(\omega) = \int_0^t A(s, Z_s^{(n-1)}(\omega))\,ds + \int_0^t B(s, Z_s^{(n-1)}(\omega), dY_s(\omega)),$$

из которого точно так, как из (5.21), получено (5.22), получаем, что при некотором λ, зависящим от T,

$$\| \mathbf{M}[Z_t^{(n)}(\omega)]^* Z_t^{(n)}(\omega) \| \leqslant \lambda \int_0^t \| \mathbf{M}(Z_s^{(n-1)}(\omega))^* Z_s^{(n-1)}(\omega) \|\,ds,$$

$$t \leqslant T.$$

Следовательно,

$$\| \mathbf{M}(Z_t^{(n)}(\omega))^* Z_t^{(n)}(\omega) \| \leqslant \frac{(\lambda t)^n}{n!} \| \mathbf{M} X_0^*(\omega) X_0(\omega) \|. \tag{5.24}$$

Так как

$$X_t^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^{n} Z_t^{(k)}(\omega)$$

и ряд справа сильно сходится ввиду неравенства (5.24), то у последовательности $X_t^{(n)}(\omega)$ существует сильный предел

$$X_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_t^{(k)}(\omega).$$

Легко убедиться, что в смысле сильной сходимости операторов

$$\int_0^t A(s, X_s^{(n)}(\omega))\,ds \to \int_0^t A(s, X_s(\omega))\,ds;$$

$$\int_0^t B(s, X_s^{(n)}(\omega), dY_s(\omega)) \to \int_0^t B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega)).$$

Поэтому, переходя к пределу в (5.23), получаем (5.20). Локальная ограниченность $\|\mathbf{M}X_t^*(\omega)X_t(\omega)\|$ вытекает из неравенства

$$|\mathbf{M}X_t(\omega)x|^2 = \left|\mathbf{M}\sum_{k=0}^{\infty} Z_t^{(k)}(\omega)x\right|^2 \leqslant \mathbf{M}\left|\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}(2^l Z_t^{(k)}(\omega)x)\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k}\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \mathbf{M}|Z_t^{(k)}(\omega)x|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4\lambda t)^k}{k!}\mathbf{M}\|X_0^*(\omega)X_0(\omega)\|$$

(здесь использовано неравенство (5.24)). ■

3. Линейные преобразования решений

Пусть $X_t(\omega)$ — решение уравнения (5.20), коэффициенты которого удовлетворяют условиям теоремы. Предположим, что $R(Z)$ — линейная обратимая функция из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, для которой выполнены условия:

1) $R(Z(\omega))$ определено для всех $Z(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$;
2) $R^*(Z_2)R(Z_1)$ удовлетворяет условию L_γ при некотором γ.

Рассмотрим функции $\hat{X}_t(\omega) = R(X_t(\omega))$. Она удовлетворяет следующему соотношению

$$\hat{X}_t(\omega) = R(X_0(\omega)) + \int_0^t R(A(s, X_s(\omega))\,ds +$$

$$+ \int_0^t R(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))). \tag{5.25}$$

Чтобы убедиться в этом, нужно проверить, что обыкновенное и стохастическое интегрирование перестаночны с операцией R. Проверим это для стохастического интеграла. Заметим сначала, что

$$\int_0 R(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))P_n) = R\left(\int_0^t (B(s, \mathbf{X}_s(\omega), dY_s(\omega))P_n\right), \tag{5.26}$$

так как R_t непрерывна по норме, а

$$\int_0^t B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))P_n$$

является пределом в опера орной норме интегральных сумм и определенных с их помощью стохастических интегралов

$$\int_0^t B(s, X_s^{(m)}(\omega), dY_s(\omega)) P_n,$$

для которых $\int_0 B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))$ является сильным пределом $\int_0^t B(s, X_s^{(m)}(\omega), dY_s(\omega))$ (построение интеграла описано в п. 2 § 13). Переходя к пределу в (5.26) при $n \to \infty$, получаем требуемое соотношение. Пусть далее $R^{-1}(Z)$ обозначает функцию, обратную к R. Тогда, полагая

$$\hat{A}(s, Z) = R(A(s, R^{-1}(Z))), \quad \hat{B}(s, Z_1, Z_2) = \\ = R(B(s, R^{-1}(Z_1), Z_2)),$$

можем переписать (5.25) в виде

$$\hat{X}_t(\omega) = \hat{X}_0(\omega) + \int_0^t \hat{A}(s, \hat{X}_s(\omega))\, ds + \int_0^t \hat{B}(s, \hat{X}_s(\omega), dY_s(\omega)). \tag{5.27}$$

Так, с помощью преобразования R мы перешли от одного линейного уравнения (5.20) к другому (5.27). Коэффициенты $\hat{A}$ и $\hat{B}$ удовлетворяют условиям теоремы, если $R^{-1}(Z)$ в свою очередь удовлетворяет условиям 1) и 2), приведенным в начале пункта.

Более важные преобразования получаются, если преобразование R также будет зависеть от t.

Лемма 2. Пусть $X_t(\omega)$ — решение уравнения (5.19), а функция $R_t(Z)$ при любом $t \geqslant 0$ является непрерывной (по норме) линейной функцией из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, такой, что выполнены условия:

а) $R_t(Z)$ обратима по Z:

б) существует сильная производная

$\frac{d}{dt} R_t(Z) = R_t'(Z)$, $R_t'(Z)$ непрерывна по t, Z (сильно);

в) функции $R_t(Z)$, $R_t^{-1}(Z)$ и $R_t'(Z)$ определены при $Z = Z(\omega) \in \mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, для которых существует $MZ^*(\omega) Z(\omega)$;

г) функция $R_t^*(Z_2) R_t(Z_1)$ удовлетворяет условию L_γ ($\gamma > 0$);

д) для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $|s-t| < \delta$ операторная функция

$$[R_t - R_s]$$

удовлетворяет условию L_ε. Тогда функция $\hat{X}_t(\omega) = R(X_t(\omega))$ удовлетворяет стохастическому уравнению (5.27), где

$$\hat{A}(t, Z) = R'_t(R_t^{-1}(Z)) + R_t(A(t, R_t^{-1}(Z)));$$

$$\hat{B}(t, Z_1, Z_2) = R_t(B(t, R_t^{-1}(Z_1), Z_2)).$$

Доказательство. Пусть сначала

$$R_t = R_0 + tR_1, \quad R'_t = R_1.$$

Тогда

$$R_t(X_t(\omega)) = R_0(X_t(\omega)) + tR_1(X_t(\omega)).$$

Используя формулу (5.25) для R_0 и R_1, находим

$$R_t(X_t(\omega)) = R_0(X_0(\omega)) + \int_0^t R_0(A(s, X_s(\omega)))\,ds + \int_0^t R_0(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) + tR_1(X_0(\omega)) + t\int_0^t R_1(A(s, X_s(\omega)))\,ds + t\int_0^t R_1(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))). \tag{5.28}$$

Справедливы соотношения

$$t\int_0^t R_1(A(s, X_s(\omega)))\,ds = \int_0^t sR_1(A(s, X_s(\omega)))\,ds + \int_0^t\int_0^\tau R_1(A(s, X_s(\omega)))\,ds\,d\tau; \tag{5.29}$$

$$t\int_0^t R_1(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) = \int_0^t sR_1(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) + \int_0^t\int_0^\tau R_1(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega)))\,d\tau \tag{5.30}$$

(чтобы убедиться в их справедливости, достаточно в двойных интегралах справа поменять порядок интегрирования). Подставляя полученные соотношения в (5.28), находим

$$R_t(X_t(\omega)) = R_0(X_0(\omega)) + \int_0^t [R_0(A(s, X_s(\omega))) +$$

$$+ sR_1(A(s, X_s(\omega))] ds + \int_0^t [R_0(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) +$$

$$+ sR_1(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega)))] + \int_0^t R_1(X_0(\omega) +$$

$$+ \int_0^s A(\tau, X_\tau(\omega)) d\tau + \int_0^s B(\tau, X_\tau(\omega), dY_\tau(\omega))) ds.$$

Последнее соотношение с помощью обозначений R_t и R_t' можно переписать в следующем виде:

$$R_t(X_t(\omega)) = R_0(X_0(\omega)) + \int_0^t [R_s(A(s, X_s(\omega))) +$$

$$+ R_s'(X_s(\omega))] ds + \int_0^t R_s(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))).$$

Пусть $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t$,

$$R_t^{(n)}(Z) = R_{t_k^{(n)}}(Z) + \frac{t - t_k^{(n)}}{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}} [R_{t_{k+1}^{(n)}}(Z) - R_{t_k^{(n)}}(Z)]$$

$$\text{при } t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}].$$

По доказанному для любого промежутка $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ справедливо соотношение

$$R_{t_{k+1}^{(n)}}^{(n)}(X_{t_{k+1}^{(n)}}(\omega)) - R_{t_k^{(n)}}^{(n)}(X_{t_k^{(n)}}(\omega)) =$$

$$= \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} [R_s^{(n)}(A(s, X_s(\omega))) + R_s^{(n)\prime}(X_s(\omega))] ds +$$

$$+ \int_{t_k^{(n)}}^{t_{k+1}^{(n)}} R_s^{(n)}(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$R_t^{(n)}(X_t(\omega)) - R_0^{(n)}(X_0(\omega)) = \int_0^t [R_s^{(n)}(A(s, X_s(\omega))) +$$

$$+ R_s^{(n)\prime}(X_s(\omega))]\,ds + \int_0^t R_s^{(n)}(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))). \quad (5.31)$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$ и $\max_k (t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}) \to 0$. Вследствие наложенных условий и равенства

$$R_s^{(n)\prime} = \frac{1}{t_{k+1}^{(n)} - t_k^{(n)}} [R_{t_{k+1}^{(n)}} - R_{t_k^{(n)}}],$$

$$[R_s^{(n)}(A(s, X_s(\omega))) + R_s^{(n)\prime}(X_s(\omega))] \to R_s(A(s, X_s(\omega))) +$$

$$+ R_s'(X_s(\omega))$$

сильно в среднем квадратическом и равномерно относительно s. Поэтому в первом интеграле в правой части (5.31) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Покажем, что и во втором интеграле справа можно совершить предельный переход. Положим

$$Q_s^{(n)} = R_s - R_s^{(n)}.$$

В силу условия д) операторная функция $Q_s^{(n)*}Q_s^{(n)}$ удовлетворяет при достаточно больших n условию L_ε. Поэтому, если $\hat{Y}_s(\omega)$ имеет гауссово распределение, для которого

$$\mathbf{M}(\hat{Y}_s(\omega)x, y)(\hat{Y}_s(\omega)u, v) = \beta^s(x, y, u, v)$$

(см. условие 1)) и $\hat{Y}_s(\omega)$ не зависит от $X_s(\omega)$, то

$$\|\mathbf{M}[Q_s^{(n)}(B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega)))]^* Q_s^{(n)}(B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega)))\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \|\mathbf{M}B^*(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega))\,B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega))\| =$$

$$= \varepsilon \|\mathbf{M}\mathbf{M}(B^*(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega))\,B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega)) \mid X_s(\omega))\| =$$

$$= \varepsilon \|\mathbf{M}C^\beta(s, X_s(\omega), X_s(\omega))\| \leqslant \varepsilon\gamma \|\mathbf{M}X_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\|.$$

Поэтому на основании формулы (5.19) получаем

$$\left\|\mathbf{M}\left[\int_0 Q_s^{(n)}(B(s, X_s(\omega), d\hat{Y}_s(\omega)))\right]^* \times\right.$$

$$\times \left[\int_0^t Q_s^{(n)} (B(s, X_s(\omega), d\hat{Y}_s(\omega))) \right] \Bigg\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int_0^t \mathbf{M} [Q_s^{(n} (B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega)))]^* Q_s^{(n)} (B(s, X_s(\omega), \hat{Y}_s(\omega))) ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\gamma \int_0^t \| \mathbf{M} X_s^* (\omega) X_s(\omega) \| ds.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \Bigg\| \mathbf{M} \left[\int_0^t Q_s^{(n)} (B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) \right]^* \times$$

$$\times \int_0^t Q_s^{(n)} (B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))) \Bigg\| = 0.$$

Возможность предельного перехода под знаком стохастического интеграла в (5.31) доказана. Совершая такой предельный переход, получаем соотношение

$$R_t(X_t(\omega)) = R_0(X_0(\omega)) + \int_0^t [R_s'(X_s(\omega)) +$$

$$+ R_s(A(s, X_s(\omega)))] ds + \int_0^t R_s(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))), \quad (5.32)$$

из которого вытекает доказательство леммы. ■

Пусть функция $R_s(Z)$ выбрана так, что

$$R_s'(Z) + R_s(A(s, Z)) = 0 \quad (5.33)$$

для всех $Z \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$. Тогда выражение, стоящее под знаком обычного интеграла в (5.32), обращается в нуль, а $R_t(X_t(\omega))$ — в мартингал. Укажем, как найти функцию R_s, удовлетворяющую (5.33). Обозначим через $\mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$ пространство линейных функций $R(Z)$ из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, а через $\mathbf{L}_\mathrm{II}(\mathbf{X})$ пространство линейных функций из $\mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$ в $\mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$. В этих пространствах вводятся естественным образом нормы:

если $R \in \mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$, то $\|R\|_\mathrm{I} = \sup\limits_{\|z\| \leqslant 1} \|R(Z)\|$,

если $\alpha \in \mathbf{L}_\mathrm{II}(\mathbf{X})$, то $\|\alpha\|_\mathrm{II} = \sup\limits_{\|R\|_\mathrm{I} \leqslant 1} \|\alpha(R)\|_\mathrm{I}$.

Пусть $A(Z) \in \mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$. Тогда в $\mathbf{L}_\mathrm{I}(\mathbf{X})$ определена линейная операция

$$[\alpha(R)](Z) = R(A(Z)).$$

При этом

$$\|\mathfrak{a}\|_{11} = \sup_{\|R\|_1 \leqslant 1} \|R(A(Z))\| = \sup_{\|R\|_1 \leqslant 1} \sup_{\|Z\| \leqslant 1} \|R(A(Z))\| \leqslant \|A\|.$$

Пусть $\mathfrak{a}_s(R) = R(A(s, \cdot))$. Уравнение (5.33) можно трактовать как линейное уравнение в банаховом пространстве $\mathbf{L}(\mathbf{X})$:

$$\frac{d}{ds} R_s + \mathfrak{a}_s(R_s) = 0. \tag{5.34}$$

Как вытекает из общей теории линейных уравнений в банаховом пространстве, если $\mathfrak{a}_s$ ограничен и непрерывен по s в $\|\cdot\|_{11}$, уравнение (5.34) имеет единственное решение, каково бы ни было начальное условие R_0. Обозначим умножение в $\mathbf{L}_1(\mathbf{X})$ знаком $*$. Оператор $\mathfrak{a}_s$ имеет вид

$$\mathfrak{a}_s(R) = R * A(s, \cdot),$$

т. е. справа оператор умножения на фиксированный линейный оператор из $\mathbf{L}_1(\mathbf{X})$. Поэтому решения (5.34) порождают неоднородную полугруппу: если $R_{t,s}$ решение (5.34) для $s \geqslant t$, удовлетворяющее начальному условию $R_{t,t} = I$, где I — единичный оператор в $\mathbf{L}_1(\mathbf{X})$, то при $t < u < s$ $R_{t,s} = R_{t,u} * R_{u,s}$. Так как в силу непрерывности решения в $\|\cdot\|_1$ при достаточно малых $s - t$ $R_{t,s}$ близок к единичному и, следовательно, обратим, то оператор $R_s = R_{0,s}$, удовлетворяющий (5.34), будет обратим при всех $s > 0$.

Особо просто преобразование к мартингалу решения уравнения (5.20) в том случае, когда $A(s, Z)$ не зависит от s. Тогда уравнение (5.34) имеет решение

$$R_s = \exp\{-sA(\cdot)\} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} A^{*n}(\cdot), \tag{5.35}$$

где

$$A^{*n}(Z) = A(A^{*(n-1)}(Z)), \quad A^{*1}(Z) = A(Z).$$

4. Уравнения для моментов решения стохастического уравнения

Рассмотрим лишь уравнения для первых двух моментных функций. Пусть $S_t = \mathsf{M}X_t(\omega)$ (поскольку в условиях теоремы существует $\mathsf{M}X_t^*(\omega)X_t(\omega)$, то эта величина определена). Взяв математическое ожидание обеих частей (5.20) и учитывая, что второй интеграл является мартингалом, находим

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mathbf{M}A(s, X_s(\omega))\,ds =$$

$$= S_0 + \int_0^t A(s, \mathbf{M}X_s(\omega))\,ds = S_0 + \int_0^t A(s, S_s)\,ds.$$

Перестановка математического ожидания и интегрирования по ds возможна в результате неравенства

$$\mathbf{M}\,|A(s, X_s(\omega))\,x| \leqslant \sqrt{\mathbf{M}\,|A(s, X_s(\omega))\,x|^2} \leqslant$$

$$\leqslant |x| \sqrt{\gamma \,\|\mathbf{M}X_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\|}.$$

Равенство

$$\mathbf{M}A(X_s(\omega)) = A(\mathbf{M}X_s(\omega))$$

справедливо, если A^*A удовлетворяет условию L_γ, так как

$$\mathbf{M}A(X_s(\omega)\,P_n)\,x = A(\mathbf{M}X_s(\omega)\,P_n)\,x,$$

в этом равенстве можно совершить предельный переход при $n \to \infty$ (справа в силу того, что $\mathbf{M}X_s(\omega) \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$, слева — так как $A(X_s(\omega)\,P_n)\,x \to A(X_s(\omega))\,x$ сильно по вероятности и

$$\mathbf{M}\,|A(X_s(\omega)\,P_n)\,x|^2 \leqslant \gamma\,|x|^2\,\|\mathbf{M}P_nX_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\,P_n\| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma\,|x|^2\,\|\mathbf{M}X_s^*(\omega)\,X_s(\omega)\|.$$

Таким образом, оператор S_t удовлетворяет линейному операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} S_t = A(t, S_t), \quad S_t = S_0 \text{ при } t = 0.$$

Для вычисления второго момента преобразуем решение уравнения к мартингальному виду. Пусть R_s — функция из $\mathbf{L}_I(\mathbf{X})$, удовлетворяющая условию $R_0 = I$ и уравнению (5.33). Тогда

$$R_t(X_t(\omega)) = X_0(\omega) + \int_0^t R_s(B(s, X_s(\omega), dY_s(\omega))).$$

Полагая $\hat{X}_t(\omega) = R_t(X_t(\omega))$, $\hat{B}(s, Z_1, Z_2) = R_s(B(s, R^{-1}Z_1, Z_2))$, $\hat{\beta}(s, x, y, u, v) = \mathbf{M}(\hat{X}_s(\omega)\,x, y)(\hat{X}_s(\omega)\,u, v)$ и используя равенство (5.19) § 13, получаем

$$\hat{\beta}(t, x, y, u, v) = \mathbf{M}(X_0(\omega)x, y)(X_0(\omega)u, v) +$$

$$+ \int_0^t \mathbf{M}(\hat{B}(s, \hat{X}_s(\omega), Y^s(\omega))x, y)(\hat{B}(s, \hat{X}_s(\omega), Y^s(\omega))u, v)\,ds.$$

Дифференцируя это соотношение по t и используя равенство

$$(B(s, \hat{X}_s(\omega), Y^s(\omega))x, y) = \sum_{i,k}(\hat{B}(s, \langle e_i \circ e_k\rangle, Y^s(\omega))x, y) \times$$

$$\times (\hat{X}_s(\omega)e_i, e_k),$$

получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\beta}(t, x, y, u, v) = \sum_{i,j,k,l}[\mathbf{M}(\hat{B}(s, \langle e_i \circ e_k\rangle, Y^s(\omega))x, y) \times$$

$$\times (\hat{B}(s, \langle e_j \circ e_l\rangle, Y^s(\omega))u, v)]\,\hat{\beta}(t, e_i, e_k, e_j, e_l). \quad (5.36)$$

Если x, y, u, v принимают значения из базиса $\{e_k\}$, то (5.36) можно рассматривать как бесконечную линейную систему дифференциальных уравнений. Пусть Φ^{IV} — пространство ограниченных четырехлинейных форм β на $\mathbf{X}^4$, для которых

$$\beta(x, y, u, v) = \beta(u, v, x, y), \quad \sup_{|x|\leqslant 1}\sum_k |\beta(x, e_k, x, e_k)| < \infty$$

(моментная функция второго порядка для сильного оператора $Z(\omega)$, для которого $\mathbf{M}|Z(\omega)x|^2 < \infty$, удовлетворяет этим условиям). Обозначим

$$\gamma^s_{ikjl}(x, y, u, v) = \mathbf{M}(\hat{B}(s, \langle e_i \circ e_k\rangle, Y^s(\omega))x, y) \times$$

$$\times (\hat{B}(s, \langle e_j \circ e_l\rangle, Y^s(\omega))u, v).$$

Тогда, если для всех $\beta \in \Phi^{\mathrm{IV}}$ сходится ряд

$$\sum_{i,j,k,l}\beta(e_i, e_k, e_j, e_l)\,\gamma^s_{ikjl},$$

и является формой из Φ^{IV}, то определен ограниченный оператор на Φ

$$\mathfrak{a}^s\beta = \sum \beta(e_i, e_k, e_j, e_l)\,\gamma^s_{ikjl}$$

и уравнение (5.36) можно понимать как линейное уравнение в Φ^{IV}:

$$\frac{d}{ds}\hat{\beta}_s = \alpha^s\hat{\beta}_s,\ \beta_0(x, y, u, v) = \mathbf{M}(X_0(\omega)x, y)(X_0(\omega)u, v).$$

Пусть $\beta_X(s, x, y, u, v) = \mathbf{M}(X_s(\omega)x, y)(X_s(\omega)u, v)$. Тогда

$$\beta_X(s, x, y, u, v) = \mathbf{M}(R_s^{-1}(X_s(\omega))x, y)(R_s^{-1}(X_s(\omega))u, v) =$$
$$= \sum_{i,k,j,l}(R_s^{-1}(\langle e_i \circ e_k\rangle)x, y)(R_s^{-1}(\langle e_j \circ e_l\rangle)u, v) \times$$
$$\times \hat{\beta}(s, e_i, e_k, e_j, e_l) \qquad (5.37)$$

(этот ряд сходится, если $(R_s^{-1})^* R^{-1}$ удовлетворяет условию L_γ).

§ 15. НЕПРЕРЫВНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОЛУГРУППЫ

Решения простейших линейных уравнений — стохастические полугруппы

Рассмотрим уравнение вида

$$dX_t(\omega) = A_tX_t(\omega)\,dt + dY_t(\omega)\,X_t(\omega), \qquad (5.38)$$

где A_t — локально ограниченная и измеримая функция со значениями из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, $Y_t(\omega)$ — гауссов процесс с независимыми приращениями, для которого

$$\mathbf{M}(dY_t(\omega)x, y) = 0,\ \mathbf{M}(dY_t(\omega)x, y)(dY_t(\omega)u, v) =$$
$$= \beta^t(x, y, u, v)\,dt. \qquad (5.39)$$

Это уравнение имеет вид (5.6) § 13, где $A(t, Z) = A_t(Z)$, $B(t, Z_1, Z_2) = Z_2^*Z_1$. В нашем случае

$$\mathbf{M}\,|A_tZ(\omega)x|^2 \leqslant \|A_t\|^2\,\mathbf{M}\,|Z(\omega)x|^2,$$

$$C^\beta(t, Z_1, Z_2) = Z_2^*\mathbf{M}Y'^*(\omega)\,Y'(\omega)\,Z_1 = Z_2^*R_tZ_1,$$

где $(R_tx, x) = \mathbf{M}\,|Y'(\omega)x|^2$ обозначения § 13).
Если R_t — ограниченная функция в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, то

$$\mathbf{M}(C^\beta(t, Z(\omega), Z(\omega))x, x) \leqslant \|R_t\|\,\mathbf{M}\,|Z(\omega)x|^2.$$

Таким образом, условие L_γ выполняется как для A^*A, так и C^β. На основании теоремы § 14 существует единственное решение уравнения (5.38) на любом интервале $[s, \infty)$,

($s > 0$) при любом начальном условии $X_s(\omega)$, не зависящем от процесса $\{Y_t(\omega) - Y_s(\omega),\ t \geqslant s\}$. Обозначим через $X_t^s(\omega)$ решение уравнения (5.38) на $[s, \infty)$, для которого $X_s^s(\omega) = I$. Отметим наиболее важные свойства операторной функции $\{X_t^s(\omega),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

1. Пусть $\mathfrak{f}_t^s$ — σ-алгебра, порожденная величинами $Y_u(\omega) - Y_s(\omega)$, $s \leqslant u \leqslant t$. Тогда $X_t^s(\omega)$ — $\mathfrak{f}_t^s$-измеримо и значит, каковы бы ни были $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$, величины $\{X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega),\ k = 0, \ldots, n\}$ независимы между собой (поскольку независимы σ-алгебры $\mathfrak{f}_{t_{k+1}}^{t_k}$).

2. При $s < u < t$ с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$X_t^u(\omega)\, X_u^s(\omega) = X_t^s(\omega). \tag{5.40}$$

Действительно, пусть для $t > u$ (u и s фиксированы) $Z_t(\omega) = X_t^u(\omega)\, X_u^s(\omega)$. Тогда

$$Z_t(\omega) = X_u^s(\omega) + \left(\int_u^t A_\tau X_\tau^u(\omega)\, d\tau\right) X_u^s(\omega) + \left(\int_u^t dY_\tau(\omega)\, X_\tau^u(\omega)\right) X_u^s(\omega).$$

Легко проверить, что любой $\mathfrak{f}_u^0$-измеримый оператор можно внести под знак как стохастического, так и обычного интеграла, поскольку его можно внести под знак интегральной суммы, с помощью которой аппроксимируется интеграл. Поэтому

$$Z_t(\omega) = X_u^s(\omega) + \int_u^t A_\tau Z_\tau(\omega)\, d\tau + \int_u^t dY_\tau Z_\tau(\omega)\, d\tau. \tag{5.41}$$

Далее при $t \geqslant 0$

$$X_t^s(\omega) = I + \int_s^t A_\tau X_\tau^s(\omega)\, d\tau + \int_s^t dY_\tau(\omega)\, X_\tau^s(\omega) =$$

$$= X_u^s(\omega) + \int_u^t A_\tau X_\tau^s(\omega)\, d\tau + \int_u^t dY_\tau(\omega)\, X_\tau^s(\omega). \tag{5.42}$$

Сравнивая (5.41), (5.42) и учитывая единственность решения, получаем $Z_t(\omega) = X_t^s(\omega)$, $t \geqslant u$, тем самым (5.40) установлено.

3. Существует $\mathbf{M}X_t^s(\omega) = S_t^s \in \mathbf{L}(\mathbf{X})$, при этом $S_t^s = S_t^u S_u^s$ для $s \leqslant u \leqslant t$, S_t^u удовлетворяет интегральному уравнению

$$S_t^u = I + \int_u^t A_\tau S_\tau^u d\tau, \tag{5.43}$$

поэтому S_t^u непрерывно в норме $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ по t и имеет непрерывный (по t) обратный. Поскольку $S_t^u = S_t^0 [S_u^0]^{-1}$, то S_t^u непрерывно (в норме $\|\cdot\|$) и по обеим переменным. Все указанные свойства S_t^u вытекают из уравнения (5.43), которое можно получить из (5.42), взяв математическое ожидание и полагая $s = u$.

4. Пусть

$$\mathbf{M}\,|dY_t(\omega)\,x|^2 = (R_t x, x)\,dt,$$

где R_t — локально ограниченная функция из $\mathbf{L}(\mathbf{X})$. Тогда, полагая $\gamma(\tau) = 2\|A_\tau\| + \|R_\tau\|$, получаем

$$\|\mathbf{M}(X_t^s(\omega))^* X_t^s(\omega)\| \leqslant \exp\left\{\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau\right\} \tag{5.44}$$

и

$$\|\mathbf{M}(X_t^s(\omega) - I)^* (X_t^s(\omega) - I)\| \leqslant \left(2\exp\left\{\int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau\right\} + 1\right) \times$$
$$\times \int_s^t \gamma(\tau)\,d\tau. \tag{5.45}$$

Для доказательства нам потребуется один частный случай формулы Ито для операторных стохастических интегралов.

Лемма 1. Пусть операторные функции $X_s^{(1)}(\omega)$ и $X_s^{(2)}(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$X_s^{(i)}(\omega) = X_0^{(i)}(\omega) + \int_0^s A_\tau^{(i)} d\tau +$$
$$+ \int_0^s dY_\tau^{(i)}(\omega)\,B_\tau^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

где $Y_\tau^{(i)}(\omega)$ — гауссовы процессы с независимыми приращениями, согласованные с потоком σ-алгебр $\mathfrak{f}_\tau$, $A_\tau^{(i)}$, $B_\tau^{(i)}$ — такие $\mathfrak{f}_\tau$-измеримые процессы, для которых существуют соответствующие интегралы

$$\mathbf{M}\,(dY_\tau^{(1)}(\omega)\,x,\ y)\,(dY_\tau^{(2)}(\omega)\,u,\ v) = \gamma^{1,2}(\tau,\ x,\ y,\ u,\ v)\,d\tau,$$

$x,\ y,\ u,\ v \in \mathbf{X}$.

Если $x,\ y,\ u,\ v \in \mathbf{X}$ то,

$$(X_s^{(1)}(\omega)\,x,\ y)\,(X_s^{(2)}(\omega)\,u,\ v) = (X_0^{(1)}(\omega)\,x,\ y)\,(X_0^{(2)}(\omega)\,u,\ v) +$$
$$+\int_0^s (X_\tau^{(1)}(\omega)\,x,\ y)\,(A_\tau^{(2)}u,\ v)\,d\tau + \int_0^s (A_\tau^{(1)}x,\ y)\,(X_\tau^{(2)}(\omega)\,u,\ v)\,d\tau +$$
$$+\int_0^s \gamma^{1,2}(\tau,\ B_\tau^{(1)}x,\ y,\ B_\tau^{(2)}u,\ v)\,d\tau +$$
$$+\int_0^s (X_\tau^{(1)}(\omega)\,x,\ y)\,(dY_\tau^{(2)}(\omega)\,B_\tau^{(2)}u,\ v) +$$
$$+\int_0^s (dY_\tau^{(1)}(\omega)\,B_\tau^{(1)}x,\ y)\,(X_\tau^{(2)}(\omega)\,u,\ v). \qquad (5.46)$$

Доказательство леммы вытекает нз формулы Ито для непрерывных мартингалов (см. [9, с. 96], теорема 1), так как взаимная характеристика непрерывных мартингалов $\int_0^s (dY_\tau^{(1)}(\omega)\,B_\tau^{(1)}x,\ y)$ и $\int_0^s (dY_\tau^{(2)}(\omega)\,B_\tau^{(2)}u,\ v)$ в силу определения взаимной характеристики двух мартингалов (см. формулу (3.36)) имеет вид

$$\int_0^s \gamma^{1,2}(\tau,\ B_\tau^{(1)}x,\ y,\ B_\tau^{(2)}u,\ v)\,d\tau.$$

Возвратимся к доказательству неравенств (5.44) и (5.45). На основании формулы (5.46)

$$\mathbf{M}\,(X_t^s(\omega)\,x,\ e_k)^2 = \mathbf{M}\,(x,\ e_k)^2 +$$
$$+2\int_s^t \mathbf{M}\,(X_\tau^s(\omega)\,x,\ e_k)\,(A_\tau X_\tau^s(\omega)\,x,\ e_k)\,d\tau +$$
$$+\int^t \mathbf{M}\beta^\tau\quad(X_\tau^s x,\ e_k,\ X_\tau^s x,\ e_k)\,d\tau.$$

Просуммировав это соотношение по базису $\{e_k\}$, найдем

$$\mathbf{M}\,|X_t^s(\omega)\,x|^2 = |x|^2 + 2\int_s^t \mathbf{M}\,(A_\tau X_\tau^s(\omega)\,x,\ X_\tau^s(\omega)\,x) + \int_s^t \mathbf{M}\,(R_\tau X_\tau^s(\omega)\,x,\ X_\tau^s(\omega)\,x)\,d\tau \leqslant |x|^2 + \int_s^t \gamma_\tau \mathbf{M}\,|X_\tau^s(\omega)\,x|^2\,d\tau. \tag{5.47}$$

Из этого неравенства вытекает (5.44). Используя (5.47), находим

$$\mathbf{M}\,|X_t^s(\omega)\,x - x|^2 = \mathbf{M}\,|X_t^s(\omega)\,x|^2 + |x|^2 - 2\mathbf{M}\,(x,\ X_t^s(\omega)\,x) = \mathbf{M}\,|X_t^s(\omega)\,x|^2 - |x|^2 - 2\mathbf{M}\,(x,\ X_t^s(\omega)\,x - x) \leqslant$$

$$\leqslant \int_s^t \gamma_\tau \mathbf{M}\,|X_\tau^s(\omega)\,x|^2\,d\tau - 2\int_s^t \mathbf{M}\,(A_\tau X_\tau^s x,\ x)\,d\tau \leqslant \int_s^t [\gamma_\tau \mathbf{M}\,|X_\tau^s(\omega)\,x|^2 + \|A_\tau\|\,(\mathbf{M}\,|X_\tau^s(\omega)\,x|^2 + |x|^2)]\,d\tau.$$

Из этого соотношения вытекает (5.45).

5. Для любого $x \in \mathbf{X}$ случайная функция $X_t^s(\omega)\,x$ со значениями в $\mathbf{X}$ с вероятностью 1 непрерывна по t. Действительно, $X_t^s(\omega)\,x$ — сумма непрерывного $\mathbf{X}$-значного мартингала и интеграла

$$\int_s^t A_\tau X_\tau^s(\omega)\,x d\tau. \tag{5.48}$$

Поскольку $|A_\tau X_\tau^s(\omega)\,x| \leqslant \|A_\tau\|\,\|X_\tau^s(\omega)\,x\|$ и $\mathbf{M}\,|X_\tau^s(\omega)\,x|$ локально ограничены, то $|A_\tau X_\tau^s(\omega)\,x|$ с вероятностью 1 интегрируема по τ, поэтому интеграл (5.48) является с вероятностью 1 непрерывной функцией верхнего предела.

Другое простейшее линейное уравнение имеет вид

$$dZ_t(\omega) = Z_t(\omega)\,A_t dt + Z_t(\omega)\,dY_t(\omega). \tag{5.49}$$

Обозначим через $Z_t^s(\omega)$ решение уравнения (5.49) на $[s, \infty)$ с начальным условием $Z_s(\omega) = I$. Аналогично тому, как были установлены свойства 1) — 5), можно установить их и для $Z_t^s(\omega)$.

1*) При $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$ величины $\{Z^{t_k}_{t_{k+1}}(\omega),\ k = 0, \ldots, n\}$ независимы.

2*) При $s \leqslant u \leqslant t$ с вероятностью 1 выполнено равенство

$$Z^s_u(\omega)\, Z^u_t(\omega) = Z^s_t(\omega).$$

3*) Существует $\mathbf{M} Z^s_t(\omega) = \tilde{S}^s_t$, при $s \leqslant u \leqslant t$ $\tilde{S}^s_t = \tilde{S}^s_u \tilde{S}^u_t$ и

$$\tilde{S}^s_t = I + \int\limits_s^t \tilde{S}^s_\tau A_\tau d\tau.$$

4*) Оценки (5.44) и (5.45) остаются справедливыми, если в левую часть вместо $X^s_t(\omega)$ подставить $Z^s_t(\omega)$.

5*) Для любого $x \in \mathbf{X}$ случайная функция $Z^s_t(\omega)$ со значениями в $\mathbf{X}$ с вероятностью 1 непрерывна по t.

2. Обращение времени у стохастического дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнение (5.38) на конечном промежутке времени $t \in [0, \alpha]$. Положим

$$\tilde{Y}_t(\omega) = Y_\alpha(\omega) - Y_{\alpha-t}(\omega), \quad Z_t(\omega) = X^\alpha_{\alpha-t}(\omega), \quad \tilde{A}_t = A_{\alpha-t}.$$

Тогда $Z_t(\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$dZ_t(\omega) = Z_t(\omega)\, \tilde{A}_t dt + Z_t(\omega)\, d\tilde{Y}_t(\omega). \tag{5.50}$$

Для доказательства этого утверждения установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $X_t(\omega)$ — решение уравнения (5.38) с начальным условием $X_0(\omega) = I$. Тогда

$$X_t(\omega) - I = \\ = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int\limits_{\frac{kt}{n}}^{\frac{k+1}{n}t} A_\tau d\tau + Y_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - Y_{\frac{k}{n}t}(\omega) \right) X_{\frac{kt}{n}}(\omega)$$

(предел сильный в среднем квадратическом).

Доказательство. Воспользовавшись равенством

$$X_t(\omega) - I = \sum_{k=0}^{n-1} \left(X_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - X_{\frac{k}{n}t}(\omega) \right)$$

и свойством 2) $(X_t(\omega) = X_t^0(\omega))$, получим

$$X_t(\omega) - I = \sum_{k=0}^{n-1} [X^{\frac{k}{n}t}_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - I]\, X_{\frac{kt}{n}}(\omega).$$

Положим

$$X^{\frac{k}{n}t}_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - I - \int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t} A_\tau d\tau - \int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t} dY_\tau(\omega) = U_{n,k}(\omega), \quad (5.51)$$

тогда

$$U_{n,k}(\omega) = \int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t} A_\tau (X^{\frac{k}{n}t}_\tau(\omega) - I)\, d\tau + \int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t} dY_\tau(\omega) \times$$

$$\times (X^{\frac{k}{n}t}_\tau(\omega) - I).$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что для всех $x \in \mathbf{X}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{M} \left| \sum_{k=0}^{n-1} U_{n,k}(\omega)\, X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x \right|^2 = 0. \quad (5.52)$$

Из независимости $U_{nk}(\omega)$ и $X_{\frac{k}{n}t}(\omega)$ вытекает, что

$$\mathsf{M}\, | U_{n,k}(\omega)\, X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x | =$$

$$= \mathsf{MM}\, [(U^*_{n,k}(\omega)\, U_{n,k}(\omega)\, X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x, \quad X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x)/X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x] =$$

$$= \mathsf{M}\, (\{\mathsf{M}U^*_{n,k}(\omega)\, U_{n,k}(\omega)\}\, X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x, \quad X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x).$$

Используя неравенства (5.44) и (5.45), можем установить, что при некотором $\delta > 0$

$$\| \mathsf{M}U^*_{n,k}(\omega)\, U_{n,k}(\omega) \| \leqslant \frac{\delta}{n^2}. \quad (5.53)$$

Поэтому $\mathsf{M}\, | U_{n,k}(\omega)\, X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x |^2 \leqslant \frac{\delta}{n^2}\, \mathsf{M}\, | X_{\frac{k}{n}t}(\omega)\, x |^2 \leqslant \leqslant \frac{\delta_1}{n^2} | x |^2$, где δ_1 — некоторая постоянная (использовано неравенство (5.44)). Из последней оценки вытекает (5.52), а значит, и утверждение леммы.

Замечание. Используя представление

$$X_t(\omega) - I = \sum_{k=0}^{n-1} [X_t^{\frac{k}{n}t}(\omega) - X_t^{\frac{k+1}{n}t}(\omega)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X_t^{\frac{k+1}{n}t}(\omega)\,[X^{\frac{k}{n}t}_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - I],$$

(5.51), (5.53) аналогично лемме 2 устанавливаем равенство

$$X_t(\omega) - I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} X_t^{\frac{k+1}{n}t}(\omega)\left(\int\limits_{\frac{kt}{n}}^{\frac{k+1}{n}t} A_\tau d\tau + \right.$$

$$\left. + Y_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - Y_{\frac{k}{n}t}(\omega)\right). \qquad (5.54)$$

Используя соотношение (5.54), можем записать

$$X_\alpha^{\alpha-t}(\omega) - I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} X_\alpha^{\alpha-\frac{k}{n}t}(\omega)\left(\int\limits_{\alpha-\frac{k+1}{n}t}^{\alpha-\frac{k}{n}t} A_\tau d\tau + \right.$$

$$\left. + Y_{\alpha-\frac{k}{n}t}(\omega) - Y_{\alpha-\frac{k+1}{n}t}(\omega)\right)$$

(соотношение (5.54) применяется к процессу $V_s(\omega) = X_{\alpha-t+s}^{\alpha-t}(\omega)$ при $s = t$). Последнее равенство после замены A на $\tilde{A}$, $Y - \tilde{Y}$ и $X - Z$ преобразуется следующим образом:

$$Z_t(\omega) - I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} Z_{\frac{k}{n}t}(\omega)\left(\int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t} \tilde{A}_\sigma d\sigma + \right.$$

$$\left. + \tilde{Y}_{\frac{k+1}{n}t}(\omega) - \tilde{Y}_{\frac{k}{n}t}(\omega)\right). \qquad (5.55)$$

Поэтому

$$Z_t(\omega) - I = \int_0^t Z_\sigma(\omega)\,\tilde{A}_\sigma d\delta + \int_0^t Z_\sigma(\omega)\,d\tilde{Y}_\sigma(\omega) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}[Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}t}(\omega)]\,\tilde{A}_\sigma d\sigma +\right.$$

$$\left.+ \int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}[Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}t}(\omega)]\,d\tilde{Y}_\sigma(\omega)\right).$$

Для доказательства справедливости уравнения (5.50) остается доказать, что предел в правой части (он существует как сильный в среднем квадратическом) равен нулю. Справедлива оценка

$$\mathbf{M}\left|\int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}(Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}t}(\omega))\,\tilde{A}_\sigma x d\sigma\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{n}\int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}\mathbf{M}\,|(Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}\cdot t}(\omega))\,\tilde{A}_\sigma x\,|^2\,d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{t}{n}\,\delta\,|x|^2\int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}\|\mathbf{M}\,(Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}t}(\omega))^*\,(Z_\sigma(\omega) -$$

$$- Z_{\frac{k}{n}}\ (\omega))\,\|\,d\sigma = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(здесь использовано (5.45)). Следовательно,

$$\mathbf{M}\left|\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}(Z_\sigma(\omega) - Z_{\frac{k}{n}t}(\omega))\,\tilde{A}_\sigma d\sigma\right\}x\right|^2 = nO\left(\frac{1}{n^3}\right) \to 0.$$

Воспользовавшись некоррелированностью слагаемых в сумме

$$Z_n(\omega)=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}[Z_\sigma(\omega)-Z_{\frac{k}{n}t}(\omega)]\,d\tilde{Y}_\sigma(\omega)\,x,$$

получаем

$$\mathbf{M}\,|Z_n(\omega)|^2=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{M}\left|\int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}[Z_\sigma(\omega)-Z_{\frac{k}{n}t}(\omega)]\,d\tilde{V}_\sigma(\omega)\,x\right|^2=$$

$$=O\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\frac{k}{n}t}^{\frac{k+1}{n}t}\|\mathbf{M}\,(Z_\sigma(\omega)-Z_{\frac{k}{n}t}(\omega))^*\,(Z_\sigma(\omega)-\right.$$

$$\left.-Z_{\frac{k}{n}t}(\omega))\|\,d\sigma\right)=nO\left(\frac{1}{n^3}\right)\to 0$$

(здесь использовано неравенство (5.44)). Уравнение (5.50) установлено.

3. Определение стохастической полугруппы

Свойства 1) и 2) (или 2*)), которым удовлетворяют решения простейших линейных уравнений, являются основными для стохастических полугрупп, определяемых ниже. Семейство операторов $X_t^s(\omega)$ со значениями $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, определенных при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ (или $0\leqslant s<t<\infty$), называется стохастической (сильной) полугруппой, если выполнены следующие условия.

I. Пусть $\mathfrak{f}_t^s$ — σ-алгебра, порожденная величннами $\{X_\tau^\sigma(\omega)\,x,\ \ x\in\mathbf{X},\ \ s\leqslant\sigma\leqslant\tau\leqslant t\}$, тогда σ-алгебры $\mathfrak{f}_t^0$ и $\mathfrak{f}_T^t$, $0<t<T$ независимы.

II. При $u\leqslant s\leqslant t$

$$X_t^s(\omega)\,X_s^u(\omega)=X_t^u(\omega),\qquad X_t^t(\omega)=I.$$

II*. При $u\leqslant s\leqslant t$

$$X_s^u(\omega)\,X_t^s(\omega)=X_t^u(\omega),\qquad X_t^t(\omega)=I.$$

В случае II полугруппа называется левой, в случае II* — правой. Легко видеть, что если $X_t^s(\omega)$ — левая полугруппа $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, то $\hat{X}_t^s(\omega) = X_{T-s}^{T-t}(\omega)$ является правой полугруппой. Поскольку мы изучаем полугруппы на конечных интервалах, то можно рассмотреть полугруппы лишь одного какого-нибудь вида, например только левые. Полугруппы, являющиеся решениями линейных уравнений вида (5.38), обладают некоторыми дополнительными условиями регулярности.

III. $\forall x \in \mathbf{X}$ $X_t^s(\omega)x$ сильно непрерывна по t;

IV. $\|\mathbf{M}(X_t^s(\omega))^* X_t^s(\omega)\|$ локально ограничена и

$$\lim_{\substack{t-s\to 0\\ t,s\leqslant T}} \|\mathbf{M}(X_t^s(\omega)-I)^*(X_t^s(\omega)-I)\| = 0.$$

Сильная непрерывность решения установлена, например в теореме 1 § 12. Условие IV вытекает из (5.44) и (5.45). Изучим строение стохастических полугрупп, удовлетворяющих условиям I—IV.

Обозначим $Q_t^s = \mathbf{M}X_t^s(\omega)$. Существование, а следовательно, и ограниченность математического ожидания вытекают из IV. Из условия II находим (в силу независимости $X_t^s(\omega)$ и $X_s^u(\omega)$, которые являются следствием 1), что при $u \leqslant s \leqslant t$

$$Q_t^u = \mathbf{M}X_t^s(\omega)X_s^u(\omega) = \mathbf{M}X_t^s(\omega)\mathbf{M}X_s^u(\omega) = Q_t^sQ_s^u. \quad (5.56)$$

Кроме того,

$$\|Q_t^s - I\|^2 = \sup_{|x|\leqslant 1}|\mathbf{M}(X_t^s(\omega)x - x)|^2 \leqslant \sup_{|x|\leqslant 1}\mathbf{M}|X_t^s(\omega)x - x|^2 =$$
$$= \sup_{|x|\leqslant 1}(\mathbf{M}(X_t^s(\omega)-I)^*(X_t^s(\omega)-I)x, x) =$$
$$= \|\mathbf{M}(X_t^s(\omega)-I)^*(X_t^s(\omega)-I)\|.$$

Значит,

$$\lim_{\substack{t-s\to 0\\ t,s\leqslant T}} \|Q_t^s - I\| = 0. \quad (5.57)$$

Из (5.56) вытекает, что функция $Q_t = Q_t^0$ со значениями в $\mathbf{L}(\mathbf{X})$ является непрерывной по норме и для всех $t > 0$, определена и непрерывна по t также и функция Q_t^{-1} (так как при $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ $Q_t = Q_t^{t_{n-1}} \ldots Q_{t_1}$ и при достаточно малом $\max\limits_k (t_{k+1} - t_k)$ все сомножители в произведении обратимы в силу (5.58)).

Положим

$$\hat{X}_t^s(\omega) = Q_t^{-1} X_t^s(\omega) Q_s. \tag{5.58}$$

Покажем, что $\hat{X}_t^s(\omega)$ также является (левой) полугруппой, для которой выполнены условия III и IV. Легко видеть, что σ-алгебра, порожденная величинами $\{\hat{X}_\tau^\sigma(\omega),\ x \in \mathbf{X},\ s \leqslant \sigma < \tau < t\}$, совпадает с $\mathfrak{f}_t^s$ так, что условие I выполнено. Далее при $u \leqslant s \leqslant t$

$$\hat{X}_t^s(\omega)\hat{X}_s^u(\omega) = Q_t^{-1} X_t^s(\omega) Q_s Q_s^{-1} X_s^u(\omega) Q_u =$$

$$= Q_t^{-1} X_t^s(\omega) X_s^u(\omega) Q_u = \hat{X}_t^u(\omega)$$

выполнено II. Поскольку в силу условия III $X_t^s(\omega)\ Q_s\ x$ сильно непрерывно по t, а Q_t^{-1} непрерывно в норме $\mathbf{L}(\mathbf{X})$, то непрерывным по t будет и

$$Q_t^{-1} X_t^s(\omega) Q_s x.$$

Наконец,

$$\| \mathbf{M}(\hat{X}_t^s(\omega) - I)^* (\hat{X}_t^s(\omega) - I) \| = \sup_{|x| \leqslant 1} \mathbf{M} | \hat{X}_t^s(\omega) x - x |^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|x| \leqslant 1} (\mathbf{M} | Q_t^{-1}(X_t^s(\omega) - I) Q_s x |^2 + | Q_t^{-1}(Q_s - Q_t) x |^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| Q_t^{-1} \|^2 (\| Q_s \|^2 \| \mathbf{M}(X_t^s(\omega) - I)^* (X_t^s(\omega) - I) \| + \| Q_s - Q_t \|^2).$$

Правая часть ограничена и стремится к нулю в силу условия IV и непрерывности Q_t.

Заметим, что

$$\mathbf{M}\hat{X}_t^s(\omega) = Q_t^{-1} \mathbf{M} X_t^s(\omega) Q_s = Q_t^{-1} Q_t^s Q_s = Q_t^{-1} Q_t = I.$$

Поэтому для $\hat{X}_t^s(\omega)$ выполнено следующее условие.

V. $\hat{X}_t^s(\omega)$ является мартингалом по t относительно $\mathfrak{f}_t^s$. Действительно, при $s < t_1 < t_2$

$$\mathbf{M}[(\hat{X}_{t_2}^s(\omega) x, y)/\mathfrak{f}_{t_1}^s] = \mathbf{M}[(\hat{X}_{t_2}^{t_1}(\omega) \hat{X}_{t_1}^s(\omega) x, y)/\mathfrak{f}_{t_1}^s] =$$

$$= ([\mathbf{M}\hat{X}_{t_2}^{t_1}(\omega)] \hat{X}_{t_1}^s(\omega) x, y) = (\hat{X}_{t_1}^s(\omega) x, y)$$

(мы воспользовались независимостью $\hat{X}^{t_1}_{t_2}(\omega)$ от $\mathfrak{f}^{s}_{t_1}$ и измеримостью $\hat{X}^{s}_{t_1}(\omega)$ относительно $\mathfrak{f}^{s}_{t_1}$). Таким образом, изучение полугрупп, удовлетворяющих условиям I—IV с помощью преобразования (5.58), можно свести к изучению полугрупп, удовлетворяющих дополнительному условию V. Кроме того, если $\hat{X}^{s}_{t}(\omega)$ удовлетворяют условиям I—V, то для любой непрерывной по норме обратимой функции Q_t

$$X^{s}_{t}(\omega)=Q_t\hat{X}^{s}_{t}(\omega)Q_s^{-1}$$

будет полугруппой, удовлетворяющей условиям I—IV.

4. Полугруппы, являющиеся мартингалами функций

В этом пункте изучаются полугруппы $X^{s}_{t}(\omega)$, удовлетворяющие условиям I—V.

Положим

$$R^{s}_{t}=\mathbf{M}\,(X^{s}_{t}(\omega))^{*}X^{s}_{t}(\omega).$$

Пусть $u<s<t$. Тогда вследствие независимости $X^{u}_{s}(\omega)$ и $X^{s}_{t}(\omega)$ и равенства $\mathbf{M}X^{s}_{t}(\omega)=I$ получаем

$$R^{u}_{t}=\mathbf{M}\,(X^{u}_{s}(\omega))^{*}(X^{s}_{t}(\omega))^{*}X^{s}_{t}(\omega)\,X^{u}_{s}(\omega)=$$
$$=\mathbf{M}\,(X^{u}_{s}(\omega))^{*}R^{s}_{t}X^{u}_{s}(\omega)=R^{s}_{t}+\mathbf{M}\,(X^{u}_{s}(\omega)-I)^{*}R^{s}_{t}(X^{u}_{s}(\omega)-$$
$$-I)=R^{u}_{s}+\mathbf{M}\,(X^{u}_{s}(\omega))^{*}[R^{s}_{t}-I]\,X^{u}_{s}(\omega).$$

В частности,

$$R^{s}_{t}=I+\mathbf{M}\,(X^{s}_{t}(\omega)-I)^{*}(X^{s}_{t}(\omega)-I).$$

Так как $\mathbf{M}\,(X^{s}_{t}(\omega)-I)^{*}(X^{s}_{t}(\omega)-I)$ — неотрицательный симметричный оператор и R^{s}_{t} такой же, то $R^{s}_{t}-I\geqslant 0$ и при $s\leqslant\sigma<\tau\leqslant t$ для всех $y\in\mathbf{X}$ выполнено неравенство

$$(R^{s}_{t}y,\ y)\geqslant(R^{\sigma}_{\tau}y,\ y)\geqslant(y,\ y). \qquad (5.59)$$

Лемма 3. Пусть $s=t_0<t_1<\ldots<t_n=t$. Тогда

$$\left\|\mathbf{M}\sum_{k=0}^{n-1}(X^{t_k}_{t_{k+1}}(\omega)-I)^{*}(X^{t_k}_{t_{k+1}}(\omega)-I)\right\|\leqslant\|R^{s}_{t}-I\|. \qquad (5.60)$$

Доказательство. Имеем

$$X_t^s(\omega) - I = \sum_{k=0}^{n-1} (X_t^{t_k}(\omega) - X_t^{t_{k+1}}(\omega)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} X_t^{t_{k+1}}(\omega)(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I). \tag{5.61}$$

При $i < k$

$$\mathbf{M}(X_t^{t_{i+1}}(\omega)[X_{t_{i+1}}^{t_i}(\omega) - I]x,\ X_t^{t_{k+1}}(\omega)[X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I]x) =$$

$$\mathbf{M}(X_t^{t_{i+1}}(\omega)\mathbf{M}[X_{t_{i+1}}^{t_i}(\omega) - I]x,\ X_t^{t_{k+1}}(\omega)[X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I]x) = 0 \tag{5.62}$$

(мы воспользовались независимостью $X_{t_{i+1}}^{t_i}(\omega)$ от σ-алгебры $\mathfrak{f}_t^{t_{i+1}}$, относительно которой измеримы остальные операторы, входящие в последнее равенство). Поэтому

$$\mathbf{M}\,|(X_t^s(\omega) - I)x|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M}\,|X_t^{t_{k+1}}(\omega)(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x|^2.$$

Поскольку

$$\mathbf{M}\,|X_t^{t_{k+1}}(\omega)(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x|^2 =$$

$$= \mathbf{M}\mathbf{M}(|X_t^{t_{k+1}}(\omega)(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x|^2/\mathfrak{f}_{t_{k+1}}^{t_k}) =$$

$$= \mathbf{M}(R_t^{t_{k+1}}(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x,\ (X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x) \geqslant$$

$$\geqslant \mathbf{M}\,|(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x|^2$$

(мы воспользовались (5.59)), то

$$\mathbf{M}\,|(X_t^s(\omega) - I)x|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{M}\,|(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)x|^2.$$

Взяв супремум по $|x| \leqslant 1$, получаем (5.60). ■

Замечание 1. Пусть полугруппа $X_t^s(\omega)$, кроме условий I и II, удовлетворяет еще условию: распределение $X_{t+h}^t(\omega)$ зависит лишь от h. Такая полугруппа называется однородной. Если для однородной полугруппы при некотором t

$$\|\mathbf{M}(X_t^0(\omega))^*(X_t^0(\omega))\| < \infty$$

и выполнено условие V, то выполнено условие IV. Действительно, из доказательства леммы 3 вытекает, что

$$\mathrm{M}\,|X_t^0(\omega)\,x - x|^2 \geqslant n\mathrm{M}\,|(X_{\frac{t}{n}}^0(\omega) - I)\,x|^2.$$

Поэтому

$$\|\mathrm{M}\,(X_{\frac{t}{n}}^0(\omega) - I)^*\,(X_{\frac{t}{n}}^0(\omega) - I)\| \leqslant \frac{1}{n}\|\mathrm{M}\,(X_t^0(\omega) - I)^* \times$$
$$\times (X_t^0(\omega) - I)\|.$$

Замечание 2. Используя представление (5.61), имеем в обозначениях леммы

$$X_t^s(\omega) - I - \sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}(X_t^{t_{k+1}}(\omega) - I)\,(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I).$$

Из этого равенства, используя (5.62), находим при $x \in \mathbf{X}$

$$\mathrm{M}\left|\left[X_t^s(\omega) - I - \sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)\right]x,\ x\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|R_t^s - I\|\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{M}\,|(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I)\,x|^2. \qquad (5.63)$$

Следствие. Пусть имеются два разбиения отрезка $[s,\ t]$, причем одно из них подчинено другому, первое — $s = t_0 < \ldots < t_n = t$, второе — $s = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = t$, $n < m$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathrm{M}\left|\left[\sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I) - \sum_{j=0}^{m-1}(X_{\tau_{j+1}}^{\tau_j}(\omega) - I)\right]x\right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \max_k\|R_{t_{k+1}}^{t_k} - I\|\sum_{j=0}^{m-1}\mathrm{M}\,|(X_{t_{j+1}}^{t_j}(\omega) - I)\,x|^2. \qquad (5.64)$$

Чтобы убедиться в этом, используем некоррелированность слагаемых и запишем соотношение

$$\mathrm{M}\left|\left[\sum_{k=0}^{n-1}(X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I) - \sum_{j=0}^{m-1}(X_{\tau_{j+1}}^{\tau_j}(\omega) - I)\right]x\right|^2 =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{M}\left|\left[X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I - \sum_{t_k \leqslant \tau_j < t_{k+1}}(X_{\tau_{j+1}}^{\tau_j}(\omega) - I)\right]x\right|^2,$$

применим неравенство (5.63) к каждому слагаемому $\sum_{k=0}^{n-1}$ в правой части.

Теорема 1. *Если* $X_t^s(\omega)$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$ *удовлетворяет условиям* I—V, *то на* $[0, T]$ *существует сильно непрерывный гауссов процесс* $Y_t(\omega)$ *с независимыми приращениями и значениями в* $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, *для которого* $\mathbf{M}Y_t(\omega) = 0$ *и*

$$\lim_{t-s\to 0} \| \mathbf{M}(Y_t(\omega) - Y_s(\omega))^* (Y_t(\omega) - Y_s(\omega)) \| = 0 \quad (5.65)$$

такой, что для всех $s < t$

$$Y_t(\omega) - Y_s(\omega) = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum (X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I) \quad (5.66)$$

предел в (5.65) — *сильный среднеквадратический предел операторов из* $\mathbf{L}_s(\Omega, \mathbf{X})$, $s = t_0 < \cdots < t_n = t$, $t_{k+1} - t_k = \Delta t_k$.

Доказательство. Пусть $s = s_0 < \cdots < s_m = t$, $s = t_0 < \cdots < t_n = t$ два разбиения, $s = \tau_0 < \cdots < \tau_q = t$ — пересечение этих разбиений. Если $\max \Delta s_j < \delta$ и $\max \Delta t_k < \delta$, то на основании (5.64) и (5.60), оценивая отклонение сумм, построенных по первому и второму разбиению от суммы, построенной по третьему, получаем

$$\mathbf{M} \left| \left[\sum_{k=0}^{n-1} (X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega) - I) - \sum_{j=0}^{m-1} (X_{s_{j+1}}^{s_j}(\omega) - I) \right] x \right|^2 \leqslant$$
$$\leqslant 2 \max_t \| R_{t+\delta}^t - I \| \| R_t^s - I \|.$$

Поэтому предел в правой части (5.65) существует. Обозначим $Y_t^s(\omega)$ этот предел. Так как величина $Y_t^s(\omega)$ — $\mathfrak{f}_t^s$-измерима, то $Y_t^s(\omega)$ не зависит от σ-алгебры $\mathfrak{f}_s^0$, $\mathbf{M}Y_t^s(\omega) = 0$, так как величина, стоящая в (5.66) под знаком предела, имеет математическое ожидание нуль. Положим $Y_t^0(\omega) = Y_t(\omega)$. Тогда $Y_t^s(\omega) = Y_t(\omega) - Y_s(\omega)$. Из (5.63) с учетом (5.66) находим

$$\mathbf{M} | (X_t^s(\omega) - I - Y_t(\omega) + Y_s(\omega)) x |^2 \leqslant$$
$$\leqslant \| R_t^s - I \| ((R_t^s - I) x, x), \quad (5.67)$$

откуда вытекает (5.65). $Y_t(\omega)$ — процесс с независимыми приращениями. Если мы докажем его сильную непрерывность, то тем самым будет установлена его гауссовость, и теорема будет полностью доказана. Выберем последовательность разбиений отрезка $[0, T]$ $0 = t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} = T$ такую, чтобы $\lim_{n\to\infty} \max_k (t_{nk+1} - t_{nk}) = 0$.

Построим последовательность операторных непрерывных мартингалов

$$X_t^{(n)}(\omega)=\sum_{k=0}^{j-1}[X_{t_{nk+1}}^{t_{nk}}(\omega)-I]+X_t^{t_{nj}}(\omega)-I,$$
$$t\in[t_{nj},t_{nj+1}].$$

Эти мартингалы, как и мартингал $Y_t(\omega)$, согласованы с потоком $\mathfrak{f}_t$. Так как по доказанному $X_t^{(n)}(\omega)$ сильно сходятся в среднем квадратическом к $Y_t(\omega)$, то $Y_t(\omega)$ является также непрерывным мартингалом (см. теорема 5 § 9).

Процесс $Y_t(\omega)$, существование которого установлено в теореме 1, будем называть гауссовым процессом, ассоциированным с полугруппой $X_t^s(\omega)$. Оказывается, по процессу $Y_t(\omega)$ можно восстановить полугруппу $X_t^s(\omega)$.

Теорема 2. *Пусть $Y_t(\omega)$ — ассоциированный с полугруппой $X_t^s(\omega)$ процесс. Тогда справедливы соотношения*

$$X_t^s(\omega)-I=\lim_{\max\Delta t_k\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}X_t^{t_{k+1}}(\omega)[Y_{t_{k+1}}(\omega)-Y_{t_k}(\omega)];\qquad(5.68)$$

$$X_t^s(\omega)=\lim_{\max\Delta t_k\to 0}(I+Y_{t_n}(\omega)-Y_{t_{n-1}}(\omega))(I+Y_{t_{n-1}}(\omega)-$$
$$-Y_{t_{n-2}}(\omega))\ \dots\ (I+Y_{t_1}(\omega)-Y_{t_0}(\omega)),\qquad(5.69)$$

оба предела существуют как сильные, $s=t_0<t_1<\cdots$ $\cdots<t_n=t,\ \Delta t_k=t_{k+1}-t_k$.

Доказательство. Используя представление (5.61), запишем

$$X_t^s(\omega)-I-\sum_{k=0}^{n-1}[Y_{t_{k+1}}(\omega)-Y_{t_k}(\omega)]X_{t_k}^s(\omega)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}X_t^{t_{k+1}}(\omega)[X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega)-I-Y_{t_{k+1}}(\omega)+Y_{t_k}(\omega)].$$

Следовательно, на основании (5.67), использовав лемму 3, получаем

$$\mathrm{M}\left|\sum_{k=0}^{n-1}X_t^{t_{k+1}}(\omega)[X_{t_{k+1}}^{t_k}(\omega)-I-Y_{t_{k+1}}(\omega)+Y_{t_k}(\omega)]\,x\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\|R_t^{t_{k+1}}\|\,\|R_{t_{k+1}}^{t_k}-I\|\,((R_{t_{k+1}}^{t_k}-I)x,x)\leqslant$$
$$\leqslant\|R_t^s\|\,\|R_t^s-I\|\max_k\|R_{t_{k+1}}^{t_k}-I\|\,|x|^2.$$

Соотношение (5.68) доказано.

Обозначим для $i < j$

$$Z_j^i(\omega) = (I + Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega)) \ldots (I + Y_{t_{i+1}}(\omega) - Y_{t_i}(\omega)).$$

Тогда

$$Z_n^k(\omega) - I = \sum_{j=k+1}^{n} Z_n^j(\omega)[Z_j^{j-1}(\omega) - I].$$

Поэтому, используя независимость $Z_n^j(\omega)$ и $Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega)$, получим

$$\mathrm{M}\,|Z_n^k(\omega)x|^2 = (x, x) + \sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{M}\,|Z_n^j(\omega)[Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega)]x|^2 \leqslant (x, x) + \sum_{j=k+1}^{n} \|\mathrm{M}(Z_n^j(\omega))^* \times$$

$$\times (Z_n^j(\omega))\|(\mathrm{M}(Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega))^*(Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega))x, x) \leqslant$$

$$\leqslant (x, x) + \sup_{k \leqslant j \leqslant n} \|\mathrm{M}(Z_n^j(\omega))^*(Z_n^j(\omega))\| \times$$

$$\times \mathrm{M}(Y_{t_n}(\omega) - Y_{t_k}(\omega))^*(Y_{t_n}(\omega) - Y_{t_k}(\omega))\|(x, x).$$

Если $s < t$ таковы, что

$$\|\mathrm{M}(Y_t(\omega) - Y_s(\omega))^*(Y_t(\omega) - Y_s(\omega))\| \leqslant \gamma < 1, \qquad (5.70)$$

то

$$\sup_k \sup_{|x| \leqslant 1} |Z_n^k(\omega)x|^2 \leqslant \gamma \sup_j \|\mathrm{M}(Z_n^j(\omega))^* Z_n^j(\omega)\| + 1$$

и, следовательно,

$$\|\mathrm{M}(Z_n^k(\omega))^* Z_n^k(\omega)\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma}.$$

Очевидно, что формулу (5.69) достаточно доказать для достаточно малых $t - s$. Пусть выполнено (5.70) при $\gamma < \frac{1}{2}$, тогда

$$Z_n^k(\omega) - X_t^{t_k}(\omega) = \sum_{j=k+1}^{n} Z_n^j(\omega)[Z_j^{j-1}(\omega) - I] - \sum_{j=k+1}^{n} X_t^{t_j}(\omega)[X_{t_j}^{t_{j-1}}(\omega) - I] =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} [Z_n^j(\omega) - X_t^{t_j}(\omega)]\,[Z_j^{j-1}(\omega) - I] +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{n} X_t^{t_j}(\omega)\,[Z_j^{j-1}(\omega) - X_{t_j}^{t_{j-1}}(\omega)].$$

Используя снова некоррелированность слагаемых в любой сумме (5.70), находим

$$\mathbf{M}\,|(Z_n^k(\omega) - X_t^{t_k}(\omega))\,x\,|^2 \leqslant 2 \sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{M}\,|[Z_n^j(\omega) -$$

$$- X_t^{t_j}(\omega)]\,[Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega)]\,x\,|^2 +$$

$$+ 2 \sum_{j=k+1}^{n} \mathbf{M}\,|X_t^{t_j}(\omega)\,[I + Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega) - X_{t_j}^{t_{j-1}}(\omega)]\,x\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{j=k+1}^{n} \|\mathbf{M}\,(Z_n^j(\omega) - X_t^{t_j}(\omega))^*\,(Z_n^j(\omega) - X_t^{t_j}(\omega))\,\| \times$$

$$\times (\mathbf{M}\,(Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega))^*\,(Y_{t_j}(\omega) - Y_{t_{j-1}}(\omega))\,x,\ x) +$$

$$+ 2 \sum_{j=k+1}^{n} \|R_t^{t_j}\|\,\|R_{t_j}^{t_{j-1}} - I\|\,((R_{t_j}^{t_{j-1}} - I)\,x,\ x).$$

Отсюда получаем следующее неравенство

$$\sup_{|x|\leqslant 1} \sup_k \mathbf{M}\,|(Z_n^k(\omega) - X_t^{t_k}(\omega))\,x\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\gamma \sup_j \|\mathbf{M}\,[Z_n^j(\omega) - X_t^{t_j}(\omega)]^*\,[Z_n^j(\omega) - X_t^{t_j}(\omega)]\,\| +$$

$$+ 2\,\|R_t^s\|\,\max_j \|R_{t_j}^{t_{j-1}} - I\|\,\|R_t^s - I\|.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{M}\,(Z_n^0(\omega) - X_t^s(\omega))^*\,(Z_n^0(\omega) - X_t^s(\omega))\,\| \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|R_t^s\|\,\|R_t^s - I\|\,\frac{\max_j \|R_{t_j}^{t_{j-1}} - I\|}{1 - 2\gamma}.$$

Переходя к пределу при $\max \Delta t_j \to 0$, получаем (5.69). ■

Замечание. Используя обращение времени, соотношение (5.68) можно записать так:

$$\tilde{X}_t^s(\omega) = I + \lim_{\max\Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{X}_{t_k}^s(\omega)\,[\tilde{Y}_{t_{k+1}}(\omega) - \tilde{Y}_{t_k}(\omega)], \quad (5.71)$$

где

$$\tilde{X}_t^s(\omega) = X_{T-s}^{T-t}, \quad \tilde{Y}_t(\omega) = Y_T(\omega) - Y_{T-t}(\omega),$$
$$s = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

Поскольку $\tilde{X}_t^s(\omega)$ непрерывно по t в среднем квадратическом, то предел в правой части (5.71) совпадает со стохастическим интегралом $\tilde{X}_t^s(\omega)$ как функция t удовлетворяет уравнению

$$\tilde{X}_t^s(\omega) = I + \int_s \tilde{X}_t^s(\omega)\, d\tilde{Y}_t(\omega). \qquad (5.72)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1966. 543 с.
2. *Белопольская Я. И., Далецкий Ю. Л.* Диффузионные процессы в гладких банаховых многообразиях.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1977, 37.
3. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы. Киев, Наук. думка, 1977. 216 с.
4. *Вахания Н. Н.* Вероятностные распределения в линейных пространствах. Тбилиси, Мецниереба, 1971. 153 с.
5. *Вершик А. М., Судаков В. Н.* Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах.— Зап. науч. семинара Ленингр. отд-ния Мат. ин-та, 1969, 12, с. 7—67.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., Наука, 1965. 632 с.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, Наук. думка, 1968. 354 с.
8. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. М., Наука, 1971. 664 с.
9. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 3. М., Наука, 1975. 496 с.
10. *Гирко В. Л.* Случайные матрицы. Киев, Вища школа, 1975. 447. с.
11. *Гренандер У.* Вероятности на алгебраических структурах. М., Мир, 1965. 276 с.
12. *Далецкий Ю. Л.* Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения.— Успехи мат. наук. 1967, 22, № 4, с. 3—54.
13. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.— Л., ОНТИ, 1936. 79 с.
14. *Марченко В. А., Пастур Л. А.* Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц.— Мат. сб., 1967, 72, № 4, с. 507—536.
15. *Минлос Р. А.* Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1959, 8, с. 497—518.
16. *Пастур Л. А.* Спектры случайных операторов.— Успехи мат. наук, 1973, 28, № 1, с. 3—64.
17. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы вероятностей.— Теория вероятностей и ее применение, 1956, 1, с. 177—238.

18. *Сазонов В. В.* Замечание о характеристических функционалах.— Теория вероятностей и ее применение, 1958, **3**, с. 201—205.
19. *Сазонов В. В., Тутубалин В. Н.* Распределение вероятностей на топологических группах.— Теория вероятностей и ее применение 1966, **11**, с. 3—55.
20. *Скороход А. В.* Иследование по теории случайных процессов Киев, Изд-во Киев. ун-та, 1961. 212 с.
21. *Скороход А. В.* Мультипликативные матричные случайные процессы.— Тр. VII Всесоюз. конф. по теории вероятности и мат. статистике. Тбилиси, 1963, с. 81—85.
22. *Скороход А. В.* Построение марковских процессов с помощью мультипликативных функционалов.— В кн.: Зимняя школа по теории вероятности. Киев, 1964, с. 191—216. (Ин-т математики АН УССР).
23. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1975. 232 с.
24. *Скороход А. В.* Мартингалы и стохастические полугруппы.— Теория случайных процессов, 1976, вып. 4, с. 86—94.
25. *Скороход А. В.* О спектральных разложениях для обобщенных случайных операторов.— В кн.: Предельные теоремы для случайных процессов. Киев, 1977.
26. *Скороход Т. А.* Бесконечные произведения случайных матриц.— Теория случайных процессов, 1977, вып. 5, с. 86—92.
27. *Смолянов О. Г., Фомин С. В.* Меры на топологических линейных пространствах.— Успехи мат. наук, 1976, **31**, № 4, с. 3—56.
28. *Partasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. New York, Acad. press, 1967. 276 p.
29. *Skorohod A. V.* Random operators in Hilbert space. Lecture notes in mathematics 330. Berlin — Heidelber — New York, Springer, 1976, p. 562—591,

Анатолий Владимирович Скороход

СЛУЧАЙНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Печатается по постановлению ученого совета Института математики АН УССР

Редактор *Б. В. Хитровская.* Оформление художника *Д. Д. Грибова.* Художественный редактор *И. П. Антонюк.* Технический редактор *Г. М. Терезюк.* Корректоры *Е. Н. Межерицкая, Е. А. Дубарь*

Информ. бланк № 2301.

Сдано в набор 18.04.78. Подписано в печ. 26.09.78. БФ 00774.
Формат 84×108/32. Бумага типогр. № 1. Лит. гарн. Выс. печ.
Усл. печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 9,64 Тираж 2600 экз. Заказ 8—1052.
Цена 1 руб. 50 коп.

Издательство «Наукова думка», 252601, Киев, ГСП, Репина, 3.

Изготовлено Нестеровской городской типографией Львовского облполиграфиздата (г. Нестеров, ул. Горького, 8) с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР (г. Киев, Довженко, 3) зак. 4331.