

М. Д. СМАРЫШЕВ

---

# НАПРАВЛЕННОСТЬ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН



ИЗДАТЕЛЬСТВО „СУДОСТРОЕНИЕ“  
Ленинград  
1973

Освоение человечеством богатств Мирового океана, обеспечение безопасности судоходства, дальнейшее развитие рыболовства и многие другие задачи, возникающие в процессе народно-хозяйственного развития, требуют непрерывного совершенствования гидроакустической техники и, в частности, гидроакустических излучающих и приемных антенн.

Предлагаемая читателю монография посвящена изложению элементов теории направленности гидроакустических антенн. В ней определены основные параметры, характеризующие направленные свойства гидроакустических антенн, и описаны методы их вычисления. Рассмотрены антенны наиболее распространенных типов: линейные, поверхностные и объемные (дискретные и непрерывные), а также рефлекторные и рупорные.

Приведены формулы, определяющие основные параметры перечисленных антенн. Наряду с точными методами расчета, требующими использования электронно вычислительных машин, рассмотрены и приближенные.

Изложен приближенный метод определения влияния случайных ошибок возбуждения элементов на характеристику направленности и на коэффициент концентрации многоэлементных гидроакустических антенн.

Книга содержит большое количество графиков, иллюстрирующих зависимость основных параметров антенн от различных факторов. Эти графики могут быть использованы в качестве справочного материала при инженерных расчетах антенн.

Книга рассчитана на читателей, имеющих математическую подготовку в объеме программ высших технических учебных заведений и знающих общую теорию звука.

Илл. 115. Указатель литерат. 72 назв.

Рецензенты: доктор техн. наук, профессор Ю. М. Сухаревский, доктор техн. наук, профессор А. М. Тюрин.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Стремительное развитие гидроакустики привело к выделению и формированию самостоятельной области науки и техники, непосредственно связанной с изучением направленных свойств приемных и излучающих гидроакустических антенн, т. е. акустических антенн, работающих в водной среде.

Физические основы излучения звука и теории направленности рассмотрены в ряде работ по общей акустике, электроакустике и гидроакустике, таких, как «Колебания и звук» Ф. Морза, «Основы акустики» Е. Скучика, «Курс лекций по теории звука» С. Н. Ржевкина, «Электроакустика» В. В. Фурдуева, «Основы гидролокации» Дж. Уоррен Хортон, «Волновые задачи гидроакустики» Е. Л. Шендерова и др. В этих книгах наряду с изложением теории излучения звука приводятся самые общие сведения и только немногие частные примеры, иллюстрирующие направленные свойства некоторых акустических антенн.

Более углубленные исследования направленных свойств акустических и гидроакустических антенн, представляющие собой фундамент теории направленности в ее настоящем виде, содержатся в работах Л. Я. Гутина, А. А. Харкевича, М. И. Карновского, В. Н. Тюлина, Ю. М. Сухаревского, И. Н. Мельтрегера, Г. Штенцеля, К. Менгеса и др. В основном эти работы были выполнены в 1930—1950 гг. В последнее время и в СССР и за рубежом публикуется большое количество статей, посвященных различным вопросам приема и излучения звука как отдельными преобразователями, так и антеннами различных типов. За рубежом опубликованы две монографии (Г. Штенцель «Руководство к расчету звуковых процессов» и К. Фейк «Направленный звук»), посвященные теории направленности в основном простейших акустических антенн.

Таким образом, теория направленности гидроакустических антенн располагает достаточно большим объемом как разработанных методов исследования, так и конкретных результатов, однако практическое их использование затруднено тем, что различные материалы разбросаны в многочисленных периодических изданиях и зачастую изложены с разных методических позиций. Кроме того, круг рассмотренных задач по направленности гидроакустических антенн все-таки очень ограничен и не полностью соответствует потребностям их практического использования в современной гидроакустике. В некоторой мере существующие пробелы восполняются наличием ряда книг по теории

электромагнитных антенн. Как известно, и электромагнитные и акустические поля описываются одним и тем же волновым уравнением, что в ряде случаев (особенно при приближенных оценках и расчетах параметров антенн) позволяет пользоваться одним и тем же математическим аппаратом и находить полезные аналогии. Однако существуют и принципиальные различия, связанные как с постановкой граничных условий на активных и пассивных частях антенн, так и с векторным характером электромагнитного поля и скалярным — акустического поля в воде или в воздухе.

Указанные выше обстоятельства побудили автора попытаться с единых методических позиций изложить основы теории направленности гидроакустических антенн в предлагаемой книге.

В настоящее время гидроакустические антенны используются для решения многих важных задач как в народном хозяйстве, так и в военном деле. Мы не будем рассматривать различные случаи применения гидроакустических антенн и описание их конструкций, поскольку познакомиться с этими вопросами читатель сможет по другим книгам и в первую очередь по книгам И. И. Клюкина «Подводный звук» и А. Л. Простакова «Гидроакустика и корабль».

Гидроакустические антенны можно классифицировать по ряду признаков, например, по виду используемых преобразователей, по режиму работы антенны (излучающие и приемные), по режиму работы всего гидроакустического устройства, обслуживаемого данной антенной, и т. д. При изложении теории направленности антенн наиболее целесообразной является их классификация по способу формирования полевых характеристик. По этому признаку антенны можно разделить на три группы: непрерывные и дискретные; оптического типа (фокусирующие) и, наконец, рупорные.

Непрерывными называются такие антенны, колебательная скорость на активной поверхности которых по амплитуде и по фазе непрерывна от точки к точке. Дискретными называются антенны, которые состоят из отдельных элементов, колебательная скорость активных поверхностей которых по амплитуде и фазе при переходе от одного элемента к другому может претерпевать разрывы.

Если эффект направленности дискретных и непрерывных антенн в основном обусловлен интерференцией колебаний, пришедших от различных участков антенны в точку наблюдения, то направленность фокусирующих антенн создается интерференцией колебаний, которые на пути между излучателем и этой точкой либо претерпевают отражение от поверхности (рефлекторные или зеркальные антенны), либо преломление на границе сред с различными параметрами (линзовые антенны).

В формировании направленности рупорных антенн также принимают участие отражающие поверхности (как и в случае рефлекторных антенн), однако в рупорных антеннах они располагаются в непосредственной близости от активных элементов и как бы канализируют энергию.

Дальнейшую классификацию непрерывных и дискретных антенн целесообразно производить по конфигурации геометрического обра-

зования, объединяющего колеблющиеся (активные) элементы, т. е. различать линейные, поверхностные или (если антенна состоит из многих элементов, линий или поверхностей, размещенных в некотором объеме) объемные антенны. Антенны оптического типа помимо подразделения на рефлекторные и линзовые, различают по геометрической форме рефлектора или линзы. Рупорные антенны можно классифицировать по виду рупора.

Книга состоит из восьми глав. В гл. 1 приводятся определения основных параметров, характеризующих направленные свойства гидроакустических антенн в режимах излучения и приема. На примере антенны, состоящей из дискретных элементов, показана связь между различными параметрами антенн. Гл. 2 и 3 посвящены изложению общих методов расчета звукового давления, развиваемого излучающей антенной, характеристики направленности антенны, коэффициента концентрации излучающей и помехоустойчивости приемной антенн. В гл. 4, 5, 6 рассмотрены параметры основных типов антенн — линейных, поверхностных непрерывных и дискретных. Гл. 7 содержит некоторые сведения о фокусирующих, рупорных и объемных антеннах. Последняя глава посвящена влиянию случайных ошибок возбуждения на направленность антенн и учету его при решении некоторых задач синтеза.

Учитывая отсутствие руководств по теории направленности гидроакустических антенн, автор стремился к наиболее подробному изложению общих физических основ теории и описанию свойств простейших и практически наиболее часто встречающихся антенн в ущерб некоторым более сложным теоретически или реже встречающимся практически вопросам, а в некоторых случаях — и математической строгости приводимых выводов.

В книгу не вошли многие вопросы, тесно примыкающие к теории направленности, а именно: методы обработки информации и особенности работы гидроакустических антенн в реальных условиях, в частности, влияние неоднородности среды и наличия ее границ на параметры антенн. Представляется, что эти и некоторые другие смежные проблемы заслуживают самостоятельного серьезного рассмотрения.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую признательность своим коллегам и товарищам, оказавшим помощь при работе над книгой, а также проф., д-ру техн. наук Ю. М. Сухаревскому и проф., д-ру техн. наук А. М. Тюрину, взявшим на себя труд по рецензированию книги. Их критические замечания и пожелания учтены автором при окончательной доработке рукописи.

Автор далек от мысли, что поставленную перед собой задачу он решил наилучшим образом, и поэтому заранее благодарит всех читателей, пожелавших сообщить ему свои критические замечания о книге. Отзывы направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, д. 8, издательство «Судостроение».

## ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ НАПРАВЛЕННОСТЬ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН

### § 1. Режим излучения

Акустические антенны выполняют две функции: производят преобразование энергии из одного вида в другой и создают некоторую пространственную избирательность. В соответствии с этим параметры акустических и гидроакустических антенн подразделяются на две группы: определяющие направленные свойства и эффективность преобразования энергии.

В этом параграфе мы приведем определения основных величин, характеризующих направленные свойства антенн в режиме излучения, а также для случая дискретной антенны получим выражения, связывающие эти величины между собой.

**Звуковое давление и характеристика направленности.** Поле, создаваемое излучающей антенной в окружающем пространстве, имеет весьма сложный характер. Принято различать три зоны: волновую, зону дифракции Френеля и зону дифракции Фраунгофера (дальнюю зону). Резкой границы между зонами нет. Зона дифракции Френеля начинается на расстоянии от поверхности излучателя, равном длине волны  $\lambda$ , и простирается до расстояния  $L = \frac{2D^2}{\lambda}$ , где  $D$  — наибольший размер активной поверхности антенны. Наибольший интерес в гидроакустике представляет собой зона дифракции Фраунгофера, поскольку в большинстве случаев нас интересует поле вдали от антенны.

Наиболее сложной структурой отличается поле в волновой зоне, а наиболее простой — в дальней. Выражение, определяющее звуковое давление,<sup>1</sup> развиваемое любой антенной в дальнем поле, можно представить в виде сомножителей, один из которых зависит только от расстояния от антенны и не зависит от направления на точку наблюдения, а другой — только от этого направления. Таким образом, давление в дальнем поле в направлении единичного вектора  $\mathbf{u}$  на расстоянии  $r$  от антенны имеет вид

$$p(r, \mathbf{u}) = E \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} f(\mathbf{u}), \quad (1.1)$$

где  $E$  — некоторая постоянная;  $k$  — волновое число,  $k = 2\pi/\lambda$ .

<sup>1</sup> Везде ниже вместо термина «звуковое давление» мы будем пользоваться термином «давление».

Множитель  $e^{-i\omega t}$ , характеризующий зависимость от времени, в дальнейшем мы будем опускать.

Указанная особенность позволяет вводить в рассмотрение функцию, определяющую пространственное распределение давления в дальней зоне, называемую характеристикой направленности антенны:

$$D(\mathbf{u}) = R(\mathbf{u}) e^{i \arg D(\mathbf{u})} = \frac{p(r, \mathbf{u})}{p(r, \mathbf{u}_0)} = \frac{f(\mathbf{u})}{f(\mathbf{u}_0)}, \quad (1.2)$$

где под  $\mathbf{u}_0$  понимается некоторое выбранное направление в пространстве.

В соответствии с этой формулой характеристика направленности — функция комплексная. Кроме  $D(\mathbf{u})$  мы часто будем рассматривать ее модуль  $R(\mathbf{u}) = |D(\mathbf{u})|$ , называя его амплитудной характеристикой, и аргумент  $\arg D(\mathbf{u})$ , называя его фазовой характеристикой направленности. Следует отметить, что такое определение характеристики направленности не является общепринятым и некоторые авторы понимают под ней модуль отношения давлений.

Разной возникает также в выборе направления  $\mathbf{u}_0$ , т. е. направления, в котором характеристика направленности принимается равной единице (нормируется к единице). Многие авторы нормируют характеристику направленности в направлении ее наибольшего значения, другие — в направлении оси или плоскости симметрии антенны, однако встречаются случаи, когда неудобны оба указанных способа нормировки. В литературе поэтому иногда можно встретить термин *ненормированная характеристика направленности*, соответствующий в наших обозначениях [см. выражение (1.1)] функции  $f(\mathbf{u})$  или  $Ef(\mathbf{u})$ . Применение этого термина в качестве синонима некоторой величины, пропорциональной давлению в дальнем поле, не может вызывать возражений, однако количественная оценка такого параметра не имеет смысла в связи с возможной неоднозначностью его определения. Мы будем в основном нормировать характеристику направленности в направлении ее максимального значения, если же это окажется в каком-то частном случае неудобным, будут сделаны соответствующие оговорки.

Рассмотрим основные типы характеристик направленности и терминологию, используемую обычно при описании их элементов. Прежде всего отметим, что характеристика направленности есть функция двух переменных, ибо именно две переменные определяют направление в пространстве, и поэтому она может рассматриваться как некоторая поверхность. Сечения этой поверхности плоскостями, проходящими через начало координат, называются характеристиками направленности в соответствующих плоскостях. Практически чаще всего прихо-

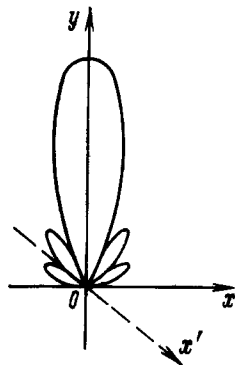


Рис. 1. Типичный вид характеристики направленности.

дится иметь дело с характеристиками направленности в горизонтальной и какой-либо из вертикальных плоскостей.

На рис. 1 показан типичный вид сечения характеристики направленности некоторой плоскостью. Если пространственная характеристика направленности является поверхностью, образуемой при вращении кривой, изображенной на рис. 1, вокруг оси  $y$ , то излучение происходит в основном внутри конуса и такая диаграмма направленности обычно называется конусообразной. Если же поворачивать кривую рис. 1 вокруг оси  $x$ , то во всех направлениях, перпендикулярных оси  $x$  и лежащих в плоскости  $yOz$ , будет создаваться одинаковое давление; соответствующая характеристика направленности называется дискообразной. Наконец, при вращении чертежа вокруг оси  $x'$  получится воронкообразная диаграмма направленности.

Часть характеристики направленности, соответствующая направлениям наибольшего излучения и ограниченная либо соседними нулями, либо достаточно глубокими минимумами, называется главным (основным) максимумом или лепестком. Кроме главного могут быть еще дополнительные (добавочные) максимумы, меньшие, чем основной, а иногда и максимумы, равные основному — единичные (т. е. равные единице). Обычно вводят в рассмотрение ширину характеристики направленности на уровне 0,707, что соответствует величине угла, в пределах которого квадрат давления изменяется в два раза.

Найдем выражения, определяющие давление, развиваемое дискретной антенной в дальнем поле, и ее характеристику направленности через давление, создаваемое отдельным элементом. Пусть антенна состоит из  $n$  элементов и нам известно давление  $p_q(\mathbf{u})$ , развиваемое в дальнем поле элементом с номером  $q$  в присутствии остальных заторможенных (не колеблющихся) элементов антенны и записанное относительно общего для всех преобразователей начала координат. Тогда в соответствии с принципом суперпозиции давление, создаваемое всей антенной, можно найти как сумму  $p_q(\mathbf{u})$ , т. е.

$$p(\mathbf{u}) = \sum_{q=1}^n p_q(\mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение величину  $p'_q(\mathbf{u})$ , определяемую следующим образом:

$$p'_q(\mathbf{u}) = \frac{p_q(\mathbf{u})}{\omega_q}, \quad (1.4)$$

где  $\omega_q$  — нормальная составляющая колебательной скорости поверхности преобразователя или так называемой точки приведения на поверхности преобразователя, если колебательная скорость различных точек поверхности неодинакова. Теперь выражение (1.3) можно записать в виде

$$p(\mathbf{u}) = \sum_{q=1}^n \omega_q p'_q(\mathbf{u}). \quad (1.5)$$



Колебательные скорости поверхностей преобразователей  $\omega_q$  могут отличаться друг от друга по амплитуде и фазе. Удобно ввести в рассмотрение отношение колебательной скорости на произвольном преобразователе к колебательной скорости какого-то выбранного преобразователя, например, преобразователя с номером  $q = 1$ :

$$\frac{\omega_q}{\omega_1} = A_q = a_q e^{i\alpha_q}. \quad (1.6)$$

Отношение  $A_q$  является в общем случае величиной комплексной и называется коэффициентом амплитудно-фазового распределения колебательной скорости элемента с номером  $q$ , причем его модуль  $a_q$  определяет амплитудное распределение, а аргумент  $\alpha_q$  — фазовое.

Учитывая формулу (1.6), выражение (1.5) можно записать в следующем виде:

$$p(u) = \omega_1 \sum_{q=1}^n A_q p'_q(u), \quad (1.7)$$

откуда в соответствии с формулой (1.2) имеем

$$D(u) = \frac{\sum_{q=1}^n A_q p'_q(u)}{\sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0)}. \quad (1.8)$$

Иногда вводят в рассмотрение величину, характеризующую эффективность антенны по сравнению с эффективностью отдельного ее преобразователя при создании звукового давления в направлении ее главного максимума  $u_0$ . Эта величина называется коэффициентом усиления по давлению и определяется модулем отношения давлений, развиваемых в дальнем поле в направлении  $u_0$  антенной и отдельным ее преобразователем, ориентированным так, что направление его максимального излучения совпадает с вектором  $u_0$ . Выражение, определяющее коэффициент усиления, имеет следующий вид:

$$K_p = \left| \frac{p(u_0)}{p_s(u_0)} \right| = \left| \frac{\sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0)}{A_s p'_s(u_0)} \right|. \quad (1.9)$$

**Мощность и сопротивление излучения.** Мощность, излучаемую антенной, можно определить путем интегрирования по поверхности антенны произведения давления на величину, комплексно сопряженную колебательной скорости, в соответствии с формулой

$$W = \frac{1}{2} \int_s p \omega^* ds, \quad (1.10)$$

где  $p$  и  $\omega$  — давление и колебательная скорость на активной поверхности антенны  $s$ .

Обычно вводится в рассмотрение сопротивление излучения антенны  $z$ ; эта величина определяется следующим образом:

$$z = \frac{2W}{|\omega|^2} = r_s - ix_s, \quad (1.11)$$

где  $r_s$  и  $x_s$  — активное и реактивное сопротивления излучения. Если колебательная скорость на всей поверхности антенны постоянна, то  $\omega$  в формуле (1.11) и есть эта скорость; при наличии же неравномерного распределения колебательной скорости возникает вопрос об определении величины  $\omega$ . Иногда под  $\omega$  в этом случае понимают усредненную по поверхности антенны колебательную скорость

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{s} \int_s \omega(s) ds,$$

но чаще считают, что  $\omega$  — колебательная скорость в некоторой точке на поверхности антенны (колебательная скорость «точки приведения»). Мы будем полагать, что  $\omega$  равно  $\omega_1$ , т. е. колебательной скорости точки приведения элемента антенны, имеющего первый номер.

Определим мощность, излучаемую одним из элементов антенны, имеющим порядковый номер  $q$ . В соответствии с формулой (1.10) эта мощность равна

$$W_q = \frac{1}{2} \int_{s_q} p \omega_q^* f^*(s_q) ds_q. \quad (1.12)$$

В этом выражении  $\omega_q$  — колебательная скорость точки приведения;  $f(s_q)$  — мода колебаний поверхности элемента.

Давление  $p$  на поверхности элемента с номером  $q$  можно выразить как сумму давлений, создаваемых всеми элементами антенны:

$$p = \sum_{g=1}^n p_g = \sum_{g=1}^n \omega_g p'_g. \quad (1.13)$$

Отсутствие аргумента  $u$  подчеркивает, что выражение  $p_g$  справедливо не только в дальнем, но и в ближнем поле.

Подставляя последнее соотношение в формулу (1.12), получим

$$W_q = \sum_{g=1}^n \frac{1}{2} \int_{s_q} p_g \omega_q^* f^*(s_q) ds_q = \sum_{g=1}^n W_{qg}, \quad (1.14)$$

и

$$W_{qg} = \frac{1}{2} \int_{s_q} p_g \omega_q^* f^*(s_q) ds_q = \frac{1}{2} \omega_g \omega_q^* \int_{s_q} p'_g f^*(s_q) ds_q, \quad (1.15)$$

где  $W_{qg}$  — мощность, расходуемая преобразователем с номером  $q$  на преодоление давления, создаваемого на его поверхности преобразователем с номером  $g$ ;  $p'_g$  — давление, развиваемое преобразователем с номером  $g$  на поверхности преобразователя с номером  $q$ , отнесенное к  $\omega_g$ .

Мощность, излучаемая всей антенной, равна сумме мощностей, излучаемых каждым преобразователем при работе остальных, т. е.

$$W = \sum_{q=1}^n W_q = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \omega_q^* \omega_g \int_{s_q} p'_g f(s_q) ds_q.$$

В соответствии с приведенным выше определением сопротивления излучения антенны имеем

$$z = \frac{2W}{|\omega_1|^2} = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \left( \frac{\omega_q}{\omega_1} \right)^* \frac{\omega_g}{\omega_1} \int_{s_q} p'_g f(s_q) ds_q = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q^* A_g z_{qg}, \quad (1.16)$$

где

$$z_{qg} = r_{qg} - ix_{qg} = \int_{s_q} p'_g f(s_q) ds_q. \quad (1.17)$$

— так называемое взаимное сопротивление излучения преобразователей с номерами  $q$  и  $g$ , т. е. часть сопротивления излучения преобразователя  $q$ , вызванная воздействием на него полем преобразователя  $g$ . Иногда кроме взаимных сопротивлений излучения вводят в рассмотрение вносимые, т. е. сопротивления излучения при реальных колебательных скоростях элементов. Определяются вносимые сопротивления излучения соотношением

$$\bar{z}_{qg} = A_q^* A_g z_{qg}, \quad (1.18)$$

и полное сопротивление излучения связано с вносимыми формулой

$$z = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \bar{z}_{qg}. \quad (1.19)$$

Вносимое сопротивление излучения, как это видно из формулы (1.18), равно взаимному при выполнении равенства  $A_q = A_g = 1$ .

Весьма существенно, что при определении взаимных и вносимых сопротивлений излучения мы вынуждены были относить удвоенную мощность к квадрату модуля колебательной скорости  $\omega$  и условились считать, что  $\omega$  равно  $\omega_1$ , т. е. колебательной скорости элемента с первым номером. При рассмотрении параметров всей антенны это обстоятельство не вызывает особых затруднений, но при переходе к параметрам одного элемента может возникнуть путаница. Действительно, исходя из формулы (1.16) можно записать, что полное сопротивление излучения элемента с номером  $q$ , т. е. его сопротивление излучения при работе всех остальных элементов антенны, определяется выражением

$$z_q = \sum_{g=1}^n A_q^* A_g z_{qg}. \quad (1.20)$$

Далее, кажется естественным для определения мощности, развиваемой элементом  $q$ , умножить  $z_q$  на  $0,5 |\omega_q|^2$ . Однако на самом деле, для определения  $W_q$ , как легко убедиться, проделывая элементарные преобразования формулы (1.14), надо  $z_q$  умножить на  $0,5 |\omega_1|^2$ . Эта

ошибка вызвана тем, что полное сопротивление излучения элемента с номером  $q$  мы определили выше по отношению к колебательной скорости не этого же элемента, а первого. Поэтому в случаях, когда возможны недоразумения, подобные приведенному выше, следует подчеркнуть, что рассматривается сопротивление излучения элемента  $q$  относительно колебательной скорости элемента с номером  $g$ .

На основании теоремы взаимности [49] можно записать, что

$$\omega_g \int_{s_g} f(s_g) p_q ds_g = \omega_q \int_{s_q} f(s_q) p_g ds_q.$$

Разделив левую и правую части этого равенства на  $\omega_g \omega_q$  и принимая во внимание определение взаимного сопротивления излучения (1.17), получим

$$z_{gq} = z_{qg}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим два слагаемых выражения (1.16): одно со значками  $gq$ , а другое со значками  $qg$ . Сумма этих слагаемых равна

$$z_{gq} (A_g A_q^* + A_q A_g^*) = 2 \operatorname{Re} (A_g A_q^*) z_{gq},$$

поэтому можно записать

$$z = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n \operatorname{Re} (A_g A_q^*) (r_{gq} - i x_{gq}), \quad (1.22)$$

откуда получим

$$r_s = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n \operatorname{Re} (A_g A_q^*) r_{gq} = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n A_g A_q^* r_{gq}; \quad (1.23)$$

$$x_s = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n \operatorname{Re} (A_g A_q^*) x_{gq} = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n A_g A_q^* x_{gq}. \quad (1.24)$$

В справедливости последних равенств выражений (1.23) и (1.24) легко убедиться, рассматривая сумму симметричных их слагаемых  $gq$  и  $qg$ .

Исходя из выражения (1.20), запишем формулы для определения  $r_q$  и  $x_q$  в виде

$$r_q = \sum_{g=1}^n [\operatorname{Re} (A_g A_q^*) r_{gq} + \operatorname{Im} (A_g A_q^*) x_{gq}]; \quad (1.25)$$

$$x_q = \sum_{g=1}^n [\operatorname{Re} (A_g A_q^*) x_{gq} - \operatorname{Im} (A_g A_q^*) r_{gq}]. \quad (1.26)$$

Заметим, что здесь  $r_q$  и  $x_q$  — полное активное и реактивное сопротивления излучения элемента  $q$  относительно колебательной скорости первого элемента.

Из сравнения четырех последних выражений следует важный вывод о том, что полные (и активное и реактивное) сопротивления излучения отдельного элемента антенны зависят и от активного и от реактивного взаимных сопротивлений излучения. Однако активное сопротивление излучения всей антенны зависит только от активных взаимных сопротивлений, аналогично и реактивное сопротивление

излучения всей антенны зависит только от реактивных взаимодействий между элементами.

Метод, которым мы определяли сопротивления излучения (полные, взаимные и вносимые), основывался на интегрировании давления непосредственно на поверхности преобразователя, поэтому часто он называется методом определения сопротивлений излучения по ближнему полю.

Вообще говоря, для нахождения активной мощности, излучаемой антенной, можно окружить антенну произвольной замкнутой поверхностью и произвести интегрирование по ней в соответствии с формулой (1.10). Однако практически проще это делать, совмещая поверхность интегрирования либо с поверхностью самой антенны, либо с поверхностью сферы большого радиуса. В первом случае процедура вычисления интеграла облегчается тем, что обычно мы считаем известной колебательную скорость поверхности преобразователя, во втором случае на помощь приходит известная связь между  $p$  и  $w$  в плоской или в сферической волне на большом расстоянии от центра сферы  $p = \rho c w$  (где  $\rho c$  — волновое сопротивление среды). Выражая отсюда  $w$  и подставляя  $w^*$  в формулу (1.10), а также учитывая, что  $s$  — сфера большого радиуса  $r$ , получим

$$W_a = \frac{r^2}{2\rho c} \int_{\Omega} |p(\mathbf{u})|^2 d\Omega, \quad (1.27)$$

где  $\Omega$  — полный телесный угол ( $ds = r^2 d\Omega$ ).

Поскольку в качестве поверхности  $s$  мы выбрали сферу большого радиуса, выражение (1.27) определяет только активную мощность, т. е. мощность, переносимую в дальнее поле. Выражая давление, развиваемое антенной через сумму давлений от отдельных элементов в соответствии с равенством (1.5), возводя модуль суммы в квадрат, меняя порядок суммирования и интегрирования, формулу (1.27) можно записать так

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{r^2}{2\rho c} \int_{\Omega} \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n w_g w_q^* p'_g(\mathbf{u}) p'_q{}^*(\mathbf{u}) d\Omega = \\ &= \frac{|w_1|^2}{2} \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n A_g A_q^* \frac{r^2}{\rho c} \int_{\Omega} p'_g(\mathbf{u}) p'_q{}^*(\mathbf{u}) d\Omega. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Отсюда следует, что

$$r_s = \frac{2W_a}{|w_1|^2} = \sum_{g=1}^n \sum_{q=1}^n A_g A_q^* \frac{r^2}{\rho c} \int_{\Omega} p'_g(\mathbf{u}) p'_q{}^*(\mathbf{u}) d\Omega.$$

Из сравнения полученного выражения с выражением (1.21) видно, что

$$r_{gq} = \frac{r^2}{\rho c} \int_{\Omega} p'_g(\mathbf{u}) p'_q{}^*(\mathbf{u}) d\Omega. \quad (1.29)$$

В соответствии с этой формулой можно определить активное взаимное сопротивление излучения элементов антенны через дальнее поле.

Иногда формулу (1.29) записывают несколько иначе, а именно:

$$r_{gq} = \frac{r^2}{2\rho c} \int_{\Omega} [p'_g(u) p'_q{}^*(u) + p'_g{}^*(u) p'_q(u)] d\Omega = \\ = \frac{r^2}{\rho c} \operatorname{Re} \int_{\Omega} p'_g(u) p'_q{}^*(u) d\Omega. \quad (1.30)$$

Эта запись более правильна, поскольку в общем случае правая часть выражения (1.29) может оказаться величиной комплексной.

**Коэффициент концентрации.** Рассмотрим две антенны, одна из которых направленная, а другая ненаправленная. Пусть  $W_{ан}$  и  $W_{а0}$  — акустические мощности, излучаемые направленной и ненаправленной антеннами соответственно. Интенсивности звука, создаваемые этими антеннами на большом расстоянии  $r$  (рис. 2) в направлении максимального давления, развиваемого первой из них, обозначим как  $I_n$

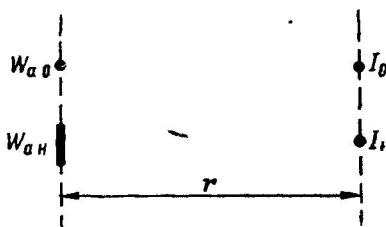


Рис. 2. К определению коэффициента концентрации.

или

$$K = \frac{I_n}{I_0} \Big|_{W_{ан}=W_{а0}}. \quad (1.32)$$

Найдем связь между мощностью, излучаемой антенной, и интенсивностью звука, создаваемой ею на расстоянии  $r$ . В случае направленной антенны интенсивность звука в направлении ее оси (т. е. в направлении ее главного максимума) определится выражением

$$I_n = \frac{|p_n(u_0)|^2}{2\rho c}, \quad (1.33)$$

и, учитывая формулу (1.27), можно записать:

$$W_{ан} = I_n r^2 \int_{\Omega} R^2(u) d\Omega. \quad (1.34)$$

Для ненаправленной антенны интенсивность звука во всех направлениях одна и та же,  $R(u) = 1$  и

$$W_{а0} = I_0 \cdot 4\pi r^2. \quad (1.35)$$

Подставляя выражения (1.34) и (1.35) в формулу (1.31), и учитывая, что  $I_0 = I_n$ , получим

$$K = \frac{4\pi}{\int_{\Omega} R^2(u) d\Omega}. \quad (1.36)$$

Вычислим коэффициент концентрации, пользуясь выражением (1.32) и формулами (1.35) и (1.34):

$$K = \frac{I_n \cdot 4\pi r^2}{W_{\text{в0}}} = \frac{I_n \cdot 4\pi r^2}{W_{\text{ан}}} = \frac{4\pi}{\int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) d\Omega}.$$

Таким образом, мы доказали тождественность двух определений коэффициента концентрации (1.31) и (1.32).

Коэффициент осевой концентрации действительно является мерой концентрации энергии в выбранном направлении. Если антенна ненаправленная,  $R(\mathbf{u}) = 1$  и из выражения (1.36) имеем  $K = 1$ . Если же характеристика направленности равна единице внутри некоторого конуса и равна нулю вне его, то с уменьшением угла при вершине конуса увеличивается концентрация энергии вдоль оси конуса и, действительно, при этом знаменатель формулы (1.36) уменьшается, а коэффициент концентрации увеличивается.

Получим еще одно выражение для определения коэффициента концентрации антенны. Как следует из формулы (1.11), активную мощность, излучаемую направленной антенной, можно определить соотношением

$$W_{\text{ан}} = \frac{1}{2} |\omega_1|^2 r_s. \quad (1.37)$$

Подставляя это выражение и выражение (1.35) в формулу (1.31), а также учитывая, что

$$I_0 = I_n = \frac{|p_n(u_0)|^2}{2\rho c},$$

получим

$$K = \frac{4\pi r^2 I_0}{\frac{1}{2} |\omega_1|^2 r_s} = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{\left| \frac{p_n(u_0) r}{\omega_1} \right|^2}{r_s}, \quad (1.38)$$

или, принимая во внимание формулы (1.7) и (1.23),

$$K = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0) \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* r_{qg}}. \quad (1.39)$$

Заметим, что не всегда бывает удобным использование осевого коэффициента концентрации, хотя бы потому, что для сложной антенны может не оказаться оси, в направлении которой естественно определять коэффициент концентрации, а направление основного максимума характеристики направленности может быть неизвестно заранее. В таких случаях вводят в рассмотрение коэффициент концентрации в заданном направлении  $K(\mathbf{u}_1)$ . Определение его совпадает с определением осевого коэффициента концентрации (формулы (1.31) и (1.32)), но под  $I_n$  надо понимать интенсивность не в осевом направлении, а в неко-

тором направления  $\mathbf{u}_1$ . Легче всего найти связь между  $K(\mathbf{u}_0)$  и  $K(\mathbf{u}_1)$  с помощью выражения (1.38). Ясно, что справедлива формула

$$K(\mathbf{u}_1) = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{\left| \frac{\rho_H(\mathbf{u}_1) r}{\omega_1} \right|^2}{r_s} = K(\mathbf{u}_0) \left| \frac{\rho_H(\mathbf{u}_1)}{\rho_H(\mathbf{u}_0)} \right|^2 = K(\mathbf{u}_0) R^2(\mathbf{u}_1), \quad (1.40)$$

и, следовательно, можно записать

$$K(\mathbf{u}_1) = \frac{4\pi}{\left| \frac{\rho_H(\mathbf{u}_0)}{\rho_H(\mathbf{u}_1)} \right|^2 \int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) d\Omega} = \frac{4\pi}{\int_{\Omega} \left| \frac{\rho_H(\mathbf{u})}{\rho_H(\mathbf{u}_1)} \right|^2 d\Omega}, \quad (1.41)$$

т. е. для коэффициента концентрации в направлении  $\mathbf{u}_1$  справедлива формула (1.36), если только под  $R(\mathbf{u})$  понимать характеристику направленности, нормированную в направлении  $\mathbf{u}_1$ .

Из определения осевого коэффициента концентрации следует, что он не может быть меньше единицы; коэффициент же концентрации в направлении  $\mathbf{u}_1$  может быть меньше единицы и даже равен нулю, если только давление, развиваемое антенной в направлении  $\mathbf{u}_1$ , равно нулю. Обычно принято под термином «коэффициент концентрации» понимать осевой коэффициент концентрации; если же имеется в виду коэффициент концентрации в направлении, отличном от направления главного максимума, это обстоятельство специально оговаривается.

**Влияние взаимодействия.** Приведенные выше формулы позволяют находить  $R(\mathbf{u})$ ,  $K$ ,  $K_p$  по известным колебательным скоростям элементов  $\omega_q$  или коэффициентам их возбуждения  $A_q$ . Однако практически значительно легче контролировать не колебательную скорость  $\omega_q$ , а напряжение  $u_q$ , подводимое к элементу антенны. Для установления связи между ними воспользуемся равенством сил, действующих на механическую систему элемента [35]

$$z_{mq}\omega_q = F_q - \int_{s_q} p f(s_q) ds_q. \quad (1.42)$$

В этом выражении  $z_{mq}$  — механическое сопротивление преобразователя;  $F_q$  — электромеханическая сила, возбуждающая колебания элемента, равная произведению подводимого напряжения  $u_q$  на коэффициент электромеханической трансформации  $m$ . Интеграл в правой части равенства определяет силу реакции среды на колебания преобразователя. Учитывая, что давление на поверхности элемента с номером  $q$  создается всеми преобразователями антенны, подставим в формулу (1.42) выражение (1.13) и, воспользовавшись обозначением (1.17), получим

$$z_{mq}\omega_q = m u_q - \sum_{g=1}^n \omega_g z_{qg}, \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.43)$$

Введем в рассмотрение величину  $Z_{qg}$ , определяемую следующим образом:

$$Z_{qg} = \begin{cases} z_{qg} + z_{mq} & \text{при } q = g \\ z_{qg} & \text{при } q \neq g. \end{cases} \quad (1.44)$$



Тогда соотношение (1.43) можно записать так:

$$\sum_{g=1}^n \omega_g Z_{qg} = m u_q, \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.45)$$

Мы получили систему уравнений, позволяющую найти  $\omega_g$  по известным  $u_q$ . С помощью этого выражения можно решить и обратную задачу: определить напряжения  $u_q$  по известным коэффициентам возбуждения  $A_q$ .

Решение системы уравнений (1.45) записывается, в соответствии с формулой Крамера, следующим образом [7]:

$$\omega_g = \frac{D_g}{D},$$

где определитель системы  $D$  и определитель  $D_g$ , получающийся из  $D$  при замене столбца с номером  $g$  столбцом из свободных членов, имеют вид

$$D = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1g} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2g} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{q1} & Z_{q2} & \dots & Z_{qg} & \dots & Z_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{ng} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}; \quad (1.46)$$

и

$$D_g = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & m u_1 & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & m u_2 & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{q1} & Z_{q2} & \dots & m u_q & \dots & Z_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & m u_n & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.47)$$

Раскладывая определитель  $D_g$  по элементам столбца с номером  $g$ , получим

$$D_g = \sum_{q=1}^n m u_q B_{qg}, \quad (1.48)$$

где  $B_{qg}$  — адьюнкт элемента  $qg$  определителя (1.47), который равен определителю, получающемуся из (1.47) при вычеркивании строки с номером  $q$  и столбца с номером  $g$ , домноженному на коэффициент  $(-1)^{q+g}$ .

Таким образом, колебательная скорость элемента с номером  $g$  равна

$$\omega_g = \frac{m}{D} \sum_{q=1}^n u_q B_{qg}, \quad (1.49)$$

и давление, развиваемое антенной, в соответствии с формулой (1.5) можно найти по формуле

$$p(u) = \frac{m}{D} \sum_{q=1}^n u_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u) = \frac{mu_1}{D} \sum_{q=1}^n h_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u), \quad (1.50)$$

где  $h_q = \frac{u_q}{u_1}$  — коэффициент передачи канала с номером  $q$ .

Для выяснения физического смысла полученного результата предположим, что напряжение подано только на один элемент антенны с номером  $q'$ . Тогда  $u_q = 0$  при всех  $g$ , не равных  $q'$ , и из выражения (1.48) получаем  $D_g = mu_{q'} B_{q'g}$  и

$$\omega_g = \frac{D_g}{D} = \frac{m}{D} u_{q'} B_{q'g}, \quad g = \overline{1, n}. \quad (1.51)$$

Подставим это равенство в формулу (1.5). Тогда давление, создаваемое всей антенной при подведении напряжения к одному из ее элементов, можно записать в виде

$$p_{aq'}(u) = \frac{mu_{q'}}{D} \sum_{g=1}^n B_{q'g} p'_g(u). \quad (1.52)$$

Сумма по  $g$  в этом выражении появилась в связи с тем, что волна, излучаемая элементом  $q'$ , заставляет колебаться остальные элементы антенны, которые также принимают участие в создании давления.

Теперь понятно, почему выражение (1.50), определяющее поле антенны при подаче напряжений на все ее преобразователи, содержит двойную сумму по элементам. Формулу (1.43) можно записать, выделяя из полного сопротивления излучения элемента с номером  $q$  его собственное сопротивление излучения, следующим образом:

$$\omega_q = \frac{u_q m}{z_{mq} + z_{qq} + \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq q}}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{qg}}. \quad (1.53)$$

Практически довольно часто встречаются случаи, когда выполняется неравенство

$$z_{mq} + z_{qq} \gg \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq q}}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{qg}. \quad (1.54)$$

Это неравенство называют условием независимости преобразователей по полю и справедливо оно либо при работе антенны вдали от резонанса механической системы преоб-

разователей (когда  $z_{mq} \gg \sum_{g=1}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{qg}$ ), либо при малой величине вно-

симых сопротивлений излучения и даже суммы их произведений на  $\omega_g/\omega_q$  по сравнению с собственным сопротивлением излучения элементов  $z_{qq}$ . Последнее соотношение может иметь место и при работе

на резонансе, если только элементы велики и далеко расположены друг от друга.

Физически условие независимости означает, что колебательная скорость элемента антенны практически не зависит от колебаний остальных элементов и, как следует из формулы (1.53), определяется выражением

$$\omega_q = \frac{m u_q}{z_{qq} + z_{mq}}. \quad (1.55)$$

Отсюда видно, что при выполнении условия (1.54), колебательные скорости, а следовательно, и коэффициенты возбуждения элементов антенны пропорциональны подводимым напряжениям (поскольку при одинаковых элементах антенны  $z_{qq}$  и  $z_{mq}$  не зависят от  $q$ ). Таким образом, при независимости преобразователей по полю характеристику направленности можно определять по формуле, получающейся из выражения (1.2) при подстановке в нее соотношений (1.5) и (1.55):

$$D(u) = \frac{\sum_{q=1}^n u_q p'_q(u)}{\sum_{q=1}^n u_q p'_q(u_0)} = \frac{\sum_{q=1}^n h_q p'_q(u)}{\sum_{q=1}^n h_q p'_q(u_0)}, \quad (1.56)$$

где  $h_q$  — коэффициент передачи канала, равный отношению  $u_q$  к  $u_1$ .

При записи формулы (1.3) мы отмечали, что  $p_c(u)$  — давление, развиваемое элементом с номером  $q$  в присутствии остальных заторможенных элементов антенны.

Приведенный анализ показывает, что это замечание было не лишним: действительно, поле, создаваемое элементом антенны, зависит от того, заторможены остальные элементы антенны или нет.

Сказанное следует учитывать при проведении экспериментальных исследований параметров элементов антенн. Так, при измерении поля, создаваемого отдельным элементом, для последующего расчета его собственного активного сопротивления излучения [по формуле (1.29), где  $g = q$ ] следует затормозить остальные преобразователи антенны. Если же измерения производятся для последующего расчета давления, создаваемого всей антенной, то можно поступать двояко: или замерить  $p'_q(u)$  при заторможенных остальных преобразователях, а затем пользоваться формулой (1.7), рассчитывая  $A_q$  с помощью системы уравнений (1.45), или непосредственно определить  $p_{aq}(u)$  при расторможенных преобразователях, а  $p(u)$  вычислить по формуле, получающейся при подстановке выражения (1.52) в равенство (1.50)

$$p(u) = \sum_{q=1}^n p_{aq}(u).$$

Запишем выражения, определяющие основные параметры антенн с учетом взаимодействия их элементов. Подставляя в формулу (1.9)

соотношения (1.50) и (1.52), получим выражение для коэффициента усиления по давлению

$$K_p = \frac{\sum_{g=1}^n u_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u_0)}{u_{q'} \sum_{g=1}^n B_{q'g} p'_g(u_0)}. \quad (1.57)$$

С помощью формул (1.2) и (1.50) в аналогичном виде можно записать и характеристику направленности

$$D(u) = \frac{\sum_{q=1}^n u_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u)}{\sum_{q=1}^n u_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u_0)}. \quad (1.58)$$

Наконец, подставляя выражение (1.58) в формулу (1.36) и принимая во внимание равенство (1.29), имеем

$$K = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \frac{\left| \sum_{q=1}^n u_q \sum_{g=1}^n B_{qg} p'_g(u_0) \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n u_q B_{qg} \sum_{q'=1}^n \sum_{g'=1}^n u_{q'} B_{q'g'} r_{gg'}}. \quad (1.59)$$

Учет влияния взаимодействия существенно усложняет расчет параметров антенны, поэтому в тех случаях, когда оно невелико, считают, что колебательные скорости элементов пропорциональны подводимым к ним напряжениям.

## § 2. Режим приема

**Чувствительность и характеристика направленности.** Чувствительность антенны определяется модулем отношения напряжения на выходных клеммах антенны (точнее — электродвижущей силы) к давлению в плоской падающей волне, фронт которой перпендикулярен направлению главного максимума характеристики направленности антенны, т. е.

$$\gamma = \left| \frac{u(u_0)}{p(u_0)} \right|. \quad (1.60)$$

Предположим, что акустический преобразователь не имеет собственных шумов и отсутствуют шумы ламп усилителей. Тогда, очевидно, при любой, сколь угодно малой, чувствительности с помощью усилителя можно получить сигнал необходимой величины. Однако на самом деле существуют шумы усилителя и самого преобразователя и поэтому антенна должна обладать чувствительностью, достаточной для того, чтобы на входе усилителя полезный сигнал был бы больше приведенного уровня шумов. Таким образом, чувствительность антенны как бы является мерой помехоустойчивости по отношению к собственным шумам.

Все сказанное выше относилось к случаю, когда от акустического входа антенны до ее выходных клемм нет никаких активных радиотехнических элементов и в том числе усилителей. В противном же случае бессмысленно определять чувствительность антенны по напряжению на выходных клеммах: во-первых, оно может быть сколь угодно большим, а во-вторых, оно уже не свидетельствует о превышении полезного сигнала над уровнем собственных шумов. Поэтому, если сигналы всех элементов суммируются после усиления их усилителями, понятием чувствительности антенны не пользуются. В этом случае рассматривают чувствительность группы преобразователей (состоящей иногда всего из одного преобразователя), сигналы от которой поступают на один усилитель.

Часто вводят в рассмотрение две величины, характеризующие чувствительность: чувствительность по полю и чувствительность по давлению. Обе они определяются по формуле (1.60), но в первом случае под  $p(\mathbf{u}_0)$  понимается давление в плоской волне, падающей на антенну, а во втором — давление на самой поверхности антенны. Так же как и коэффициент концентрации, чувствительность чаще всего определяют в направлении главного максимума характеристики направленности антенны, однако иногда говорят и о чувствительности в некотором заданном направлении, отличном от направления основного лепестка.

Пусть по сфере большого радиуса (т. е. радиуса, большего, чем  $2D^2/\lambda$ , где  $D$  — максимальный размер антенны) перемещается ненаправленный излучатель. Характеристикой направленности в приеме называется отношение напряжений на выходе антенны при приходе сигнала от излучателя, расположенного в направлении  $\mathbf{u}$  и в некотором выбранном направлении  $\mathbf{u}_0$ . Таким образом, характеристика направленности может быть записана так:

$$D(\mathbf{u}) = \frac{u(\mathbf{u})}{u(\mathbf{u}_0)}. \quad (1.61)$$

Это же определение распространяется и на случай монохроматического сигнала, поступающего на антенну от излучателя.

Найдем выражение, описывающее характеристику направленности дискретной антенны в режиме приема. Пусть на антенну из удаленной точки, расположенной в направлении  $\mathbf{u}$ , падает плоская волна. Вначале предположим, что все преобразователи заторможены, т. е. поверхности их не могут совершать колебания. Тогда силу, действующую на преобразователь с номером  $q$ , можно определить по формуле

$$F_{sq} = \int_{s_q} f(s_q) p_a(\mathbf{u}) ds_q, \quad (1.62)$$

где  $p_a(\mathbf{u})$  — давление на поверхности антенны.

На самом деле преобразователи не заторможены, т. е. и преобразователь с номером  $q$  и остальные совершают колебательные движения. В результате этих колебаний возникает вторичное акустическое поле, которое будет стремиться уменьшить поле падающей волны.

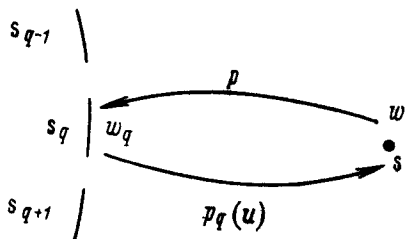
Сила, вызванная вторичным полем, может быть записана следующим образом:

$$F_{вq} = \sum_{g=1}^n \omega_g \int_{s_q} p_g' f(s_q) ds_q = \sum_{g=1}^n \omega_g z_{gq}, \quad (1.63)$$

где  $\omega_g$  — колебательная скорость преобразователя с номером  $g$ . Отнеся результирующую силу, действующую на преобразователь, к его механическому сопротивлению, найдем колебательную скорость

$$\omega_q = \frac{F_{зq} - F_{вq}}{z_{mq}} = \frac{\int_{s_q} f(s_q) p_a(u) ds_q - \sum_{g=1}^n \omega_g z_{gq}}{z_{mq}}, \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.64)$$

Интеграл в числителе этого выражения может быть вычислен с помощью теоремы взаимности, которая в наших символах записывается следующим образом:



$$\int_{s_q} \omega_q f(s_q) p_a(u) ds_q = \int_s \omega p_q(u) ds, \quad (1.65)$$

где  $s$  и  $\omega$  — поверхность и колебательная скорость удаленного ненаправленного источника плоской волны, падающей на поверхность антенны (рис. 3). В формуле (1.65)  $p_q(u)$  — давление, развиваемое преобразователем на поверхности ненаправленного источника, который можно считать малым по сравнению с длиной волны.

Поскольку на поверхности  $s$ , в силу ее малой протяженности, давление  $p_q(u)$  не меняется, его можно вынести из-под интеграла в правой части выражения (1.65). Обозначая производительность источника, равную  $\int_s \omega ds$ , символом  $Q$ , получим

$$F_{зq} = \int_{s_q} f(s_q) p_a(u) ds_q = \frac{Q}{\omega_q} p_q(u) = Q p_q'(u). \quad (1.66)$$

Подставляя последнее выражение в формулу (1.64), имеем

$$\omega_q = \frac{Q p_q'(u)}{z_{mq} + z_{qq} + \sum_{\substack{g=1 \\ g \neq q}}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{gq}}, \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.67)$$

Записав это выражение для каждого из преобразователей антенны, можно получить систему алгебраических уравнений с неизвестными  $\omega_q$ . Эта система внешне похожа на систему для определения колебательных скоростей преобразователей в режиме излучения [что

видно из сравнения формул (1.67) и (1.53)], однако в режиме приема колебательные скорости поверхностей преобразователей зависят от направления прихода сигнала, падающего на антенну (поскольку  $p'_q(\mathbf{u})$  зависит от  $\mathbf{u}$ ) и поэтому решать систему алгебраических уравнений для определения  $\omega_q$  надо заново для каждого  $\mathbf{u}$ .

Рассмотрим вначале случай независимости преобразователей по полю, т. е. случай, когда выполняется неравенство (1.54). Как и в режиме излучения, элементы антенны можно считать независимыми по полю или при работе вдали от резонанса, или при сравнительно протяженных элементах. При выполнении неравенства (1.54) формула (1.67) принимает вид

$$\omega_q = \frac{Qp'_q(\mathbf{u})}{z_{mq} + z_{qq}}. \quad (1.68)$$

Напряжение на выходе преобразователя пропорционально колебательной скорости его поверхности, поэтому можно записать

$$u_q(\mathbf{u}) = \beta p'_q(\mathbf{u}). \quad (1.69)$$

Прежде чем складывать напряжения от отдельных преобразователей, введем в канал каждого элемента некоторое электротехническое звено, которое может изменять амплитуду и фазу напряжения. Коэффициенты передачи отдельных каналов обозначим символом  $h_q$  и условимся считать, что  $h_1 = 1$ .

При этом выражение, определяющее напряжение на выходе сумматора, имеет вид

$$u = \beta \sum_{q=1}^n h_q p'_q(\mathbf{u}), \quad (1.70)$$

и характеристика направленности может быть записана следующим образом:

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{q=1}^n h_q p'_q(\mathbf{u})}{\sum_{q=1}^n h_q p'_q(\mathbf{u}_0)}. \quad (1.71)$$

Как видно из сравнения этой формулы с выражением (1.56), характеристики направленности антенны в режиме приема и излучения при отсутствии взаимодействия между элементами антенны по полю и при равенстве коэффициентов передачи  $h_q$  совпадают.

Пользуясь полученными соотношениями, легко найти связь между чувствительностью всей антенны и ее элемента. Пусть  $\mathbf{u}_0$  определяет положение главного максимума характеристики направленности всей антенны; предположим, кроме того, что направление главного максимума элемента с номером  $s$  совпадает с  $\mathbf{u}_0$ . Тогда, в соответствии с (1.69), напряжение на выходе этого элемента можно записать следующим образом:

$$u_s(\mathbf{u}_0) = \beta h_s p'_s(\mathbf{u}_0). \quad (1.72)$$

Так как напряжения на выходе всей антенны и одного элемента при падении плоской волны из точки, расположенной в направлении  $\mathbf{u}_0$ , пропорциональны чувствительности всей антенны и одного элемента, то из выражений (1.70) и (1.72) получим

$$\gamma_a = \gamma_s \frac{\left| \sum_{q=1}^n h_q p'_q(\mathbf{u}) \right|}{\left| h_s p'_s(\mathbf{u}_0) \right|} = \gamma_s K_p = \gamma_s \left| \sum_{q=1}^n \frac{h_q}{h_s} D_q(\mathbf{u}_0) \right|. \quad (1.73)$$

где  $\gamma_a$  и  $\gamma_s$  — чувствительности по полю антенны и одного ее элемента соответственно;  $K_p$  — коэффициент усиления антенны по давлению, а  $D_q(\mathbf{u}_0)$  — величина характеристики направленности элемента с номером  $q$  в направлении  $\mathbf{u}_0$ .

В режиме приема коэффициент усиления, как видно из формулы (1.73), показывает во сколько раз чувствительность антенны больше чувствительности ее элемента, в режиме излучения — во сколько раз давление в направлении максимума характеристики направленности всей антенны больше давления в направлении максимума характеристики направленности одного элемента.

Заметим, что в формуле (1.73)  $\gamma_s$  — чувствительность элемента по полю в присутствии всех остальных элементов антенны и, кроме того, поскольку при выводе мы пользовались условием (1.54), выражение (1.73) справедливо в отсутствии взаимодействия преобразователей.

Колебательные скорости элементов антенны при наличии взаимодействия по полю могут быть найдены из решения системы уравнений (1.67), которая с учетом обозначения (1.44) принимает вид

$$\sum_{g=1}^n \omega_g Z_{qg} = Q p'_q(\mathbf{u}), \quad q = \overline{1, n}. \quad (1.74)$$

Решение этой системы запишем следующим образом:

$$\omega_g = \frac{D'_g}{D}. \quad (1.75)$$

Здесь  $D$  — определитель системы, равный определителю (1.46), а  $D'_g$  — определитель, отличающийся от выражения (1.46) тем, что столбец с номером  $g$  представляет собой набор величин  $Q p'_q(\mathbf{u})$ . Считая, как и раньше, что напряжение на выходе преобразователя пропорционально его колебательной скорости, и учитывая коэффициент передачи отдельного канала  $h_g$ , напряжение, создаваемое элементом с номером  $g$ , запишем так:

$$u_g(\mathbf{u}) = \beta h_g \omega_g = \frac{\beta h_g D'_g}{D} = \frac{\beta h_g Q}{D} \sum_{q=1}^n B'_{qg} p'_q(\mathbf{u}), \quad (1.76)$$

где  $B'_{qg}$  обозначает домноженный на  $(-1)^{q+g}$  определитель, получающийся из определителя  $D'_g$  при вычеркивании из него столбца с номером  $g$  и строки с номером  $q$ . Поскольку определители  $D_g$  и  $D'_g$  от-



личаются между собой одним столбцом с номером  $g$ , а при переходе к адьюнктам  $B_{qg}$  и  $B'_{qg}$  этот столбец вычеркивается, то  $B_{cg} = B'_{qg}$ . Поэтому напряжение на выходе сумматора описывается выражением

$$u(u) = \frac{\beta Q}{D} \sum_{g=1}^n h_g \sum_{q=1}^n B_{qg} p'_q(u).$$

Поменяем местами значки суммирования  $g$  и  $q$ :

$$u(u) = \frac{\beta Q}{D} \sum_{q=1}^n h_q \sum_{g=1}^n B_{gq} p'_g(u), \quad (1.77)$$

и сравним это выражение с выражением (1.50), определяющим давление в режиме излучения. В первое из них входит адьюнкт  $B_{gq}$ , а во второе —  $B'_{qg}$ . Как  $B_{gq}$ , так и  $B'_{qg}$ , являются частью определителя (1.46), но для получения  $B_{gq}$  следует зачеркнуть столбец с номером  $q$  и строку с номером  $g$ , а для получения  $B'_{qg}$  — наоборот — столбец с номером  $g$  и строку с номером  $q$ . Принимая во внимание, что матрица (1.46) симметрична относительно главной диагонали (поскольку  $Z_{gq} = Z_{qg}$ ), а определитель не меняет свой величины при замене столбцов строками, можно записать  $B_{gq} = B'_{qg}$ .

Таким образом, из сопоставления формул (1.50) и (1.77) следует, что при равенстве коэффициентов передачи в режимах приема и излучения характеристики направленности антенны совпадают и при наличии взаимодействия элементов по полю.

Совершенно аналогично можно показать, что при взаимодействии элементов коэффициент усиления по давлению [формула (1.57)] в режиме приема (если только в обоих режимах  $h_q$  одинаковы) равен отношению чувствительности антенны и отдельного элемента [так же, как это имеет место и в отсутствии взаимодействия — сравни формулы (1.9) и (1.73)].

Сформулированные выводы относятся к параметрам антенн в дальнем поле, однако аналогичные зависимости можно было бы получить и для случая расположения точки наблюдения в режиме излучения и, соответственно, точки расположения ненаправленного излучателя в режиме приема на произвольном расстоянии от антенны.

При сравнении характеристик направленности в режимах приема и излучения мы полагаем механическое сопротивление преобразователя одним и тем же. Однако на механическое сопротивление преобразователя, особенно при сильной электромеханической связи, оказывает влияние и электрическая сторона эквивалентной схемы преобразователя, что может привести к отличию параметров антенн в рассматриваемых режимах. Разумеется, это отличие может быть практически существенным только при работе на резонансе и вблизи от него.

Процедура расчета параметров антенн в режимах приема и излучения существенно различна. В режиме излучения достаточно один раз решить систему уравнений (1.45), определяющую колебательные скорости преобразователей и, зная их, можно определить все параметры антенны, характеризующие ее направленные свойства. В режиме же приема систему (1.74) нужно решить заново для каждого направления

прихода сигнала, поскольку колебательная скорость элементов антенны зависит от положения излучателя.

Это обстоятельство приводит к тому, что на практике чаще производят расчеты параметров антенн в режиме излучения; даже приемные антенны в большинстве случаев рассчитываются как излучающие (при расчете антенн, работающих на резонансе, вместо механического сопротивления преобразователей в режиме излучения следует в формулы подставлять  $z_m$  в режиме приема).

Однако и в режиме излучения необходимость решения системы уравнений (особенно для многоэлементных антенн) делает расчет антенны с учетом взаимодействия преобразователей по полю весьма сложным. Поскольку влияние взаимодействия даже при работе на резонансе часто не приводит к существенным искажениям поля антенны, практически во многих случаях им пренебрегают. Этим, возможно, объясняется наличие сравнительно малого количества работ, посвященных оценке влияния взаимодействия, несмотря на то, что в принципе этот вопрос был рассмотрен сравнительно давно (см., например, [19]).

**Помехоустойчивость.** Помехоустойчивость — это свойство приемной антенны в силу ее пространственной избирательности выделять полезный сигнал на фоне акустических помех. Степень выделения сигнала в присутствии помех зависит от свойств поля помех вокруг антенны; одна и та же антенна при воздействии на нее различных полей помех может обладать различной помехоустойчивостью. Поэтому, строго говоря, помехоустойчивость не является параметром антенны. В связи с этим часто под помехоустойчивостью антенны понимают отношение мощностей сигнала и помех на выходе антенны при заданном конкретном поле помех. Обычно помехи являются случайными, поэтому для их описания пользуются аппаратом теории случайных процессов.

Если антенна находится в случайном стационарном поле, то и напряжения  $u_q$  от отдельных ее элементов на входе сумматора (т. е. после введения амплитудно-фазового распределения) представляют собой случайные стационарные процессы. Суммарное напряжение на выходе антенны  $u = \sum_{q=1}^n u_q$  тоже является стационарным случайным процессом. Определим мощность этого процесса, т. е. его дисперсию

$$D[u] = D \left[ \sum_{q=1}^n u_q \right] = M \left[ \left| \sum_{q=1}^n u_q \right|^2 \right].$$

Здесь  $D[x]$  и  $M[x]$  обозначают дисперсию и математическое ожидание процесса  $x$ ; при записи последнего равенства принято во внимание, что дисперсия стационарного процесса, записанного в экспоненциальной форме, равна математическому ожиданию квадрата его модуля. Следовательно,

$$D[u] = M \left[ \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n u_q u_g^* \right] = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n M [u_q u_g^*].$$

Математическое ожидание произведения одного процесса на комплексно сопряженный второй называется функцией корреляции этих процессов. В рассматриваемом случае процессы разнесены в пространстве (поскольку элементы  $q$  и  $g$  расположены в разных точках поля) и во времени (так как между каналами вводится некоторая задержка во времени, обеспечивающая получение требуемого фазового распределения), поэтому

$$M [u_q u_g^*] = K_{qg}$$

называется функцией пространственно-временной корреляции процессов  $u_q$  и  $u_g$ . Таким образом, мощность на выходе антенны можно записать в виде

$$D[u] = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}. \quad (1.78)$$

Это выражение справедливо для определения мощности и помех и сигнала. Поэтому помехоустойчивость антенны  $\chi$ , т. е. отношение мощности сигнала к мощности помех на ее выходе в общем случае записывается так:

$$\chi = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^n}. \quad (1.79)$$

Здесь  $K_{qg}^c$  и  $K_{qg}^n$  — функции пространственно-временной корреляции сигнала и помех на выходе элементов антенны, имеющих номера  $q$  и  $g$ . Из формулы (1.79) следует очевидный вывод о том, что если поле сигнала и помех (а, следовательно, и корреляционные функции  $K_{qg}^c$  и  $K_{qg}^n$ ) одинаковы, то помехоустойчивость антенны равна единице.

Во многих случаях считают, что поле сигнала в окрестности антенны не случайно, а детерминировано, тогда оказывается удобным выражать мощность сигнала не через функции корреляции, а непосредственно через напряжения, при этом формула (1.79) записывается в следующем виде:

$$\chi = \frac{\left| \sum_{q=1}^n u_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^n}. \quad (1.80)$$

Выше отмечалось, что помехоустойчивость антенны зависит от характера помех, поэтому целесообразно рассматривать помехоустойчивость в некоторых наиболее типичных для работы акустической антенны полях помех. Наиболее распространенной моделью помех является так называемое дальнее поле помех. В этой модели предполагается, что статистически независимые источники помех равной производительности равномерно распределены на поверхности сферы в дальнем поле антенны. Если поле помех задано, то появляется

возможность введения в рассмотрение некоторого параметра, определяющего помехоустойчивость антенны и зависящего только от свойств антенны.

Пусть в центре сферы большого радиуса  $r$  расположена приемная антенна, максимум характеристики направленности которой ориентирован на источник сигнала  $Q_c$  (рис. 4). Поля сигнала и помехи будем задавать их интенсивностями  $I_c$  и  $I_n$ , замеренными ненаправленным приемником, малым по сравнению с длиной волны, в центре сферы в отсутствие антенны. Поскольку источники помехи, расположенные на поверхности сферы, независимы, воздействия от них складываются энергетически и мощность помех на выходе антенны может быть определена выражением  $W_n = \delta_n I_n \int_{\Omega} R^2(u) d\Omega$ , где  $\delta_n$  — некоторая

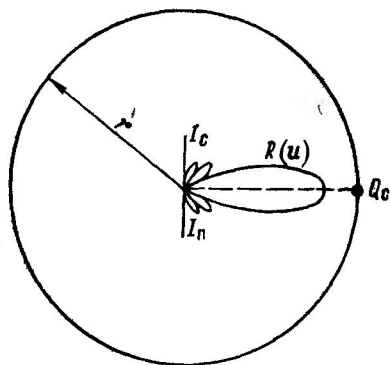


Рис. 4. К определению помехоустойчивости антенны в поле дальних помех.

постоянная. Мощность же сигнала на выходе антенны запишем в виде  $W_c = \delta_c I_c R(u_0) = \delta_c I_c$ , где  $\delta_c$  — тоже постоянный коэффициент.

Обозначив  $\delta = \delta_c / \delta_n$ , получим выражение, определяющее помехоустойчивость антенны в дальнем поле помех

$$\kappa = \frac{W_c}{W_n} = \frac{I_c}{I_n} \frac{\delta}{\int_{\Omega} R^2(u) d\Omega}. \quad (1.81)$$

Это выражение справедливо для любой антенны, в том числе и для ненаправленного приемника, поскольку  $\delta$  не зависит ни от вида антенны, ни от ее характеристики направленности. Но для ненаправленного приемника  $W_c/W_n = I_c/I_n$ , а  $R(u) = 1$ , поэтому

$$1 = \frac{\delta}{\int_{\Omega} R^2(u) d\Omega} = \frac{\delta}{4\pi},$$

откуда  $\delta = 4\pi$   
и

$$\kappa = \frac{W_c}{W_n} = \frac{I_c}{I_n} \frac{4\pi}{\int_{\Omega} R^2(u) d\Omega} = \frac{I_c}{I_n} K. \quad (1.82)$$

Таким образом, отношение  $W_c/W_n$  к  $I_c/I_n$  равно коэффициенту концентрации антенны, введенному выше, применительно к режиму излучения. Как следует из формулы (1.82), коэффициент концентрации равен отношению мощностей сигнала и помехи на выходе антенны, если только их интенсивности в поле равны между собой.

Так же, как и в случае излучения, иногда наряду с осевым коэффициентом концентрации рассматривают коэффициент концентрации в заданном направлении  $u_1$  и в режиме приема, что соответствует при-

ходу волны сигнала из удаленной точки, расположенной в направлении  $\mathbf{u}_1$ . Естественно, что формула (1.40), определяющая связь между осевым коэффициентом концентрации  $K(\mathbf{u}_0)$  и коэффициентом концентрации в направлении  $\mathbf{u}_1$ , остается справедливой и в режиме приема.

Принимая во внимание, что  $K = \kappa$  при  $I_c = I_p$ , сравним между собой выражения (1.39) и (1.80). Их числители пропорциональны одной и той же величине, а именно — мощности сигнала на выходе антенны, а знаменатели имеют одинаковую структуру. Таким образом, можно утверждать, что функция пространственно-временной корреляции на входе сумматора от элементов антенны с номерами  $q$  и  $g$  пропорциональна вносимому активному сопротивлению излучения этих элементов, и функция пространственной корреляции с точностью до постоянного множителя совпадает с активным взаимным сопротивлением излучения.

Этот вывод в гл. 3 будет получен более строгим способом.

---

## ГЛАВА 2

### **ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ, СОЗДАВАЕМЫХ АНТЕННАМИ, И ХАРАКТЕРИСТИК НАПРАВЛЕННОСТИ**

#### **§ 3. Методы, основанные на применении формулы Грина**

Современная гидроакустическая антенна представляет собой весьма сложное устройство. Обычно она состоит из большого числа преобразователей, расположенных на какой-то поверхности с некоторыми зазорами. Эти зазоры могут быть свободными или заполненными каким-либо материалом. Сами преобразователи могут быть плоскими, цилиндрическими или иной, более сложной конфигурации.

Таким образом активная поверхность антенны в общем случае не является гладкой и однородной. В связи с этим в большинстве случаев точный расчет параметров антенн невозможен. Однако практически абсолютный точный расчет и не требуется, поэтому при расчетах и теоретических исследованиях реальная антенна заменяется некоторой расчетной моделью. Эта модель выбирается так, чтобы с одной стороны она безусловно отражала основные, определяющие свойства реальной антенны, а с другой стороны максимально упрощала бы анализ и расчеты. Естественно, что для одной и той же антенны могут рассматриваться несколько различных моделей, отличающихся как по сложности расчета, так, соответственно, и по степени приближения к реальности.

В принципе задача об излучении или приеме звука антенной сводится к необходимости совместного решения двух задач — волновой и задачи о механических колебаниях преобразователей. Поэтому наиболее строгий метод должен состоять в совместном решении волнового уравнения, определяющего распространение звука в среде, и уравнения колебаний преобразователя. Однако в такой постановке

задачу удается довести до конца только в простейших случаях. В связи с этим обычно для описания колебаний преобразователя пользуются упрощениями, позволяющими рассматривать преобразователь как механическую систему с сосредоточенными параметрами. При этом, как показывает сопоставление подобных расчетов с результатами экспериментов, получается вполне достаточная точность. Что же касается решения полевой задачи, то здесь также обычно делается ряд приближений.

Рассмотрим вначале метод, основанный на формуле Грина, которую запишем в следующем виде [28, 35]:

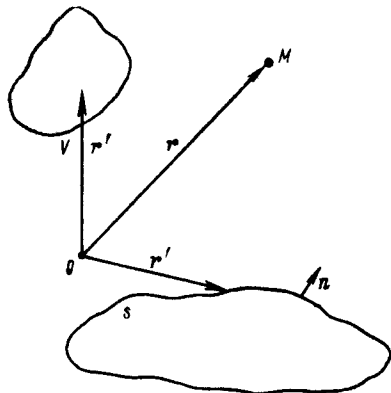


Рис. 5. Пояснение обозначений в формуле Грина.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \iiint_V \sigma(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_S [\varphi(\mathbf{r}') \times \\ & \times \frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial n} - G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}')}{\partial n}] ds. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi(\mathbf{r})$  — потенциал звукового давления в точке наблюдения  $M$ , положение которой определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ ;  $\sigma(\mathbf{r}')$  — плотность источников звука в некотором объеме  $V$ ;  $G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$  — функция Грина, т. е. функция, являющаяся решением волнового уравнения и удовлетворяющая

еще некоторым специальным требованиям;  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор, определяющий положение элементарного излучателя в объеме  $V$  или на поверхности  $s$ ;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности  $s$  (рис. 5).

Будем предполагать, что замкнутая поверхность  $s$  представляет собой поверхность антенны, а объемные источники отсутствуют. Тогда, учитывая связь между потенциалом, давлением и колебательной скоростью

$$p = -ik\rho c \varphi; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{w} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}, \quad (2.3)$$

из выражения (2.1) получим

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_S \left[ \frac{p(\mathbf{r}')}{-ik\rho c} \frac{\partial G(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial n} + \mathbf{w}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \right] ds. \quad (2.4)$$

Таким образом, в соответствии с формулой (2.4), для того, чтобы найти давление, развиваемое антенной в некоторой точке пространства, необходимо знать на поверхности антенны и распределение колебательной скорости и распределение давления. Обычно мы не располагаем информацией сразу об обеих этих величинах. Однако в некоторых случаях путем специального выбора функции Грина задача может быть существенно упрощена.

Рассмотрим различные частные случаи задания граничных условий на поверхности  $s$ .

### Расчетные формулы для различных граничных условий.

Пусть на поверхности антенны известно распределение колебательной скорости  $\omega(\mathbf{r}')$ . Антенна непрерывна. В этом случае следует воспользоваться такой функцией Грина (функцией Грина задачи Неймана), чтобы ее производная по нормали к антенне на поверхности антенны обращалась бы в нуль, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\left. \frac{\partial G_{\text{ж}}}{\partial n} \right|_s = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя это выражение в формулу Грина, записанную в виде уравнения (2.4), получим

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_s \omega(\mathbf{r}') G_{\text{ж}}(\mathbf{r}/\mathbf{r}') ds. \quad (2.6)$$

Теперь под знаком интеграла находится только заданная функция распределения колебательной скорости и, если известна функция Грина  $G_{\text{ж}}(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$ , поле в точке наблюдения определяется с помощью интегрирования по поверхности антенны.

Аналогичным же образом может быть решена задача об излучении дискретной антенны, если в зазорах между ее элементами находится акустически жесткий экран или же зазоры вообще отсутствуют. Будем считать, что все преобразователи одинаковы и одинаковы их моды колебаний  $f(\mathbf{r}_q)$  (или распределения колебательных скоростей их поверхностей). Тогда колебательная скорость точек поверхности преобразователя с номером  $q$  есть  $\omega_q f(\mathbf{r}_q)$ , где  $\omega_q$  — колебательная скорость точки приведения преобразователя; по формуле (2.5), учитывая, что в зазорах между преобразователями колебательная скорость равна нулю (или зазоры вообще отсутствуют), получим

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{q=1}^n \omega_q \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) G_{\text{ж}}(\mathbf{r}/\mathbf{r}_q) ds_q. \quad (2.7)$$

Здесь  $s_q$  — активная поверхность преобразователя с номером  $q$ ;  $\mathbf{r}_q$  — радиус-вектор точки, принадлежащей  $s_q$ .

Предположим, что все преобразователи, кроме имеющего номер  $g$ , заторможены, т. е. что колебательная скорость их поверхностей равна нулю. При этом  $\omega_q$  равно нулю, если только  $q \neq g$  и давление, создаваемое колебаниями одного преобразователя, в соответствии с формулой (2.7) имеет вид

$$p_g(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \omega_g \iint_{s_g} f(\mathbf{r}_g) G_{\text{ж}}(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g) ds_g, \quad (2.8)$$

откуда, возвращаясь к выражению (2.7), имеем

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^n p_q(\mathbf{r}) = \omega_1 \sum_{q=1}^n A_q p'_q(\mathbf{r}). \quad (2.9)$$

Таким образом, ничего принципиально нового, по сравнению с изложенным выше (см. § 1), в рассматриваемом случае мы не получили; формулы (2.8) и (2.9) свидетельствуют о том, что давление в среде равно сумме давлений, развиваемых каждым из элементов антенны в предположении, что остальные заторможены. Единственное отличие заключается в установлении связи между  $p_g(\mathbf{r})$ , или в обозначениях § 1,  $p_g(\mathbf{u})$  с функцией Грина  $G_{ж}(\mathbf{r}/r_g)$ . Рассмотрим теперь случай, когда на поверхности антенны известно распределение давления. Вначале будем считать, что антенна непрерывна. Воспользуемся функцией Грина задачи Дирихле, т. е. функцией Грина, обращающейся в нуль на поверхности антенны:

$$G_M(\mathbf{r}/r')|_s = 0. \quad (2.10)$$

Подставляя  $G_M(\mathbf{r}/r')$  в формулу (2.4), получим

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S p(\mathbf{r}') \frac{\partial G_M(\mathbf{r}/r')}{\partial n} ds. \quad (2.11)$$

Совершенно аналогично может быть найдено решение в случае дискретной антенны, на поверхности элементов которой задано распределение давления  $p_q \mu(\mathbf{r}_q)$ , а в зазорах между элементами помещен акустически мягкий экран или зазоры отсутствуют

$$p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^n p_q \iint_{s_q} \mu(\mathbf{r}_q) \frac{\partial G_M(\mathbf{r}/r_q)}{\partial n} ds_q. \quad (2.12)$$

Из этого выражения, полагая все  $p_q$ , кроме  $p_q = p_g$ , равными нулю, можно получить давление, развиваемое в среде одним преобразователем, в случае, когда давление на поверхности остальных преобразователей равно нулю

$$p_g(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} p_g \iint_{s_g} \mu(\mathbf{r}_g) \frac{\partial G_M(\mathbf{r}/r_g)}{\partial n} ds_g, \quad (2.13)$$

и связь между  $p_g(\mathbf{r})$  и  $p(\mathbf{r})$  в виде

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{q=1}^n p_q(\mathbf{r}). \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что если на поверхности антенны задано давление, то давление в окружающей среде равно сумме давлений, развиваемых отдельными преобразователями, каждое из которых определено в предположении, что давление на поверхностях остальных элементов равно нулю.

Таким образом, если на поверхности антенны известно распределение давления или колебательной скорости, а в зазорах помещен соответственно акустически абсолютно мягкий или абсолютно жесткий экран или зазоры вообще отсутствуют, то задача определения поля, создаваемого антенной, сводится к нахождению функций Грина и последующему интегрированию на поверхности антенны. Однако



практически более естественно считать, что ни давление, ни колебательная скорость на поверхности антенны нам не известны, а известны параметры механической системы преобразователей антенны и напряжения, подводимые к ним.

Рассмотрим случай, когда заданы напряжения. Будем предполагать, что антенна непрерывна и ее поверхность обладает локальным импедансом, т. е. что соседние малые по сравнению с длиной волны участки поверхности (представляющие собой активные поверхности элементарных преобразователей) механически не связаны между собой.

В соответствии с формулой (1.42) можно записать связь между колебательной скоростью отдельного малого преобразователя и давлением на его поверхности следующим образом:

$$w(\mathbf{r}') = \frac{F(\mathbf{r}') - \Delta s p(\mathbf{r}')}{z_M}, \quad (2.15)$$

где  $F(\mathbf{r}')$  — электромеханическая сила, равная произведению напряжения  $u(\mathbf{r}')$  на коэффициент трансформации  $m$ ;  $\Delta s$  — площадь активной поверхности преобразователя.

Поскольку преобразователь очень мал, давление на его поверхности можно считать постоянным, и силу, действующую на преобразователь со стороны среды, можно определить, как это и сделано при записи формулы (2.15), умножая площадь на давление. Отнеся электромеханическую силу и механическое сопротивление преобразователя к площади его поверхности, получим

$$w(\mathbf{r}') = \frac{F'(\mathbf{r}') - p(\mathbf{r}')}{z'_M}, \quad (2.16)$$

где

$$F'(\mathbf{r}') = \frac{F(\mathbf{r}')}{\Delta s} \quad \text{и} \quad z'_M = \frac{z_M}{\Delta s}.$$

Подставляя формулу (2.16) в выражение (2.4) и воспользовавшись функцией Грина  $G_{ж}(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$ , имеем

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi z'_M} \iint_s [F'(\mathbf{r}') - p(\mathbf{r}')] G_{ж}(\mathbf{r}/\mathbf{r}') ds. \quad (2.17)$$

Мы нашли связь между давлением на поверхности антенны и давлением в поле. Для определения же давления, развиваемого антенной в окружающей среде, можно поступить следующим образом. Совместим точку наблюдения  $M$  с поверхностью антенны. Тогда выражение (2.17) превратится в интегральное уравнение, поскольку и слева и под знаком интеграла будет стоять одна и та же функция  $p(\mathbf{r}')$ . Решим это интегральное уравнение каким-нибудь способом, найдем распределение давления по поверхности антенны  $p(\mathbf{r}')$ . А зная его, по формуле (2.17) можно определить и давление в окружающей антенну среде. Таким образом, в рассматриваемом случае процедура определения давления с помощью функции Грина  $G_{ж}(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$  весьма сложна.

Выбором функции Грина другого вида, а именно такого, при котором выполняется условие

$$\left. \frac{\partial G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial n} \right|_s + ik\rho c \frac{1}{z'_m} G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}') \Big|_s = 0, \quad (2.18)$$

можно исключить операцию решения интегрального уравнения (функция  $G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$  называется функцией Грина решения смешанной граничной задачи). Действительно, выражая отсюда производную от функции  $G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$  по нормали к поверхности антенны и подставляя ее в формулу (2.4), получим

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_s \left[ \frac{p(\mathbf{r}')}{z'_m} + w(\mathbf{r}') \right] G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}') ds.$$

Принимая во внимание выражение (2.16), а также учитывая, что  $F'(\mathbf{r}')/z'_m$  равно колебательной скорости элементарного преобразователя при отсутствии реакции среды, т. е. в вакууме ( $w_b$ ), запишем последнее выражение в следующем виде:

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_s w_b(\mathbf{r}') G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}') ds. \quad (2.19)$$

Находя из формулы (2.18) не производную, а саму функцию Грина и подставляя ее в формулу (2.4), после некоторых простых преобразований получим другое выражение для определения поля антенны

$$p(\mathbf{r}) = \frac{z'_m}{4\pi} \iint_s w_b(\mathbf{r}') \frac{\partial G_n(\mathbf{r}/\mathbf{r}')}{\partial n} ds. \quad (2.20)$$

Поскольку колебательную скорость поверхности элемента в вакууме легко выразить через подводимое к элементарному преобразователю напряжение как  $w_b(\mathbf{r}') = \frac{u(\mathbf{r}')m}{z'_m}$ , то с помощью любой из формул (2.19) или (2.20) можно определить поле излучения антенны, минуя необходимость решения интегрального уравнения, получающегося из выражения (2.17).

Рассмотрим теперь случай дискретной антенны с акустически жесткими зорами между преобразователями, считая известными напряжения, подводимые к преобразователям. Воспользуемся функцией Грина решения задачи Неймана, определяемой соотношением (2.5), и снова получим выражение (2.7), в котором теперь колебательные скорости преобразователей (точнее их точек приведения  $w_q$ ) нам неизвестны. Выразим колебательную скорость  $w_q$  через силы, действующие на преобразователь и его механическое сопротивление

$$w_q = \frac{F_q - \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) p(\mathbf{r}_q) ds_q}{z_m}, \quad (2.21)$$

и найдем силу реакции среды на преобразователь с помощью формулы (2.7)

$$\begin{aligned} & \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) p(\mathbf{r}_q) ds = \\ & = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{g=1}^n \omega_g \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) \iint_{s_g} f(\mathbf{r}_g) G_{\mathbf{ж}}(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}_q) ds_g ds_q. \end{aligned} \quad (2.22)$$

При записи формулы (2.21) мы учли, что в случае, когда преобразователь совершает колебания, соответствующие какой-то моде, эквивалентная сила, действующая на него со стороны среды, равна интегралу от произведения функции  $f(\mathbf{r}_q)$  на давление, а при записи формулы (2.22) в выражении (2.7) сменили индексы суммирования  $q$  на  $g$ .

Найдем выражение, определяющее взаимное сопротивление излучения преобразователей через функцию Грина, для чего подставим в формулу (1.17) равенство (2.8):

$$\begin{aligned} z_{gq} &= \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) p'_g ds_q = \\ &= -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_{s_q} f(\mathbf{r}_q) \iint_{s_g} f(\mathbf{r}_g) G_{\mathbf{ж}}(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}_q) ds_g ds_q. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Тогда выражение (2.21) запишется аналогично выражению (1.43):

$$F_q = \frac{\sum_{g=1}^n \omega_g z_{gq}}{z_M}. \quad (2.24)$$

Переписывая это уравнение  $n$  раз и изменяя при этом  $q$  от 1 до  $n$ , получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\omega_q$ . Подставляя решение системы в формулу (2.7), найдем давление, развиваемое антенной.

Так решается задача об излучении дискретной антенны с жесткими зазорами между элементами или с элементами, расположенными на поверхности антенны вплотную без зазоров, если заданы напряжения, подводимые к элементам антенны, или электромеханические силы, действующие на них, в предположении, что распределения колебательной скорости на их поверхностях постоянны. Это решение, по существу, эквивалентно приведенному выше в § 1 и отличается от него только тем, что давления, развиваемые преобразователями, выражены через функцию Грина  $G_{\mathbf{ж}}(\mathbf{r}_g/\mathbf{r}_q)$ .

Совершенно аналогично можно рассмотреть случай, когда преобразователи совершают колебания, состоящие из произвольного (в общем случае бесконечного) набора нормальных мод. Если предположить, что колебательные скорости поверхностей преобразователей  $\omega_q = \sum_{r=1}^{\infty} \omega_{rq} f_r(\mathbf{r}_q)$  нам известны, то для определения давления с помощью формулы Грина можно получить выражение, аналогичное формуле (2.7):

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{g=1}^n \iint_{s_g} \sum_{r=1}^{\infty} \omega_{rg} f_r(\mathbf{r}_g) G_{\mathbf{ж}}(\mathbf{r}/\mathbf{r}_g) ds_g. \quad (2.25)$$

Для определения эквивалентной силы, соответствующей моде с номером  $r'$ , это выражение надо умножить на  $f'_r(r'_q)$  и проинтегрировать по поверхности преобразователя с номером  $q$ . Выражая колебательную скорость преобразователя с номером  $q$  для моды  $r'$  как отношение разности сил, возбуждающих колебания моды  $r'$ , к механическому сопротивлению, соответствующему этой же моде колебаний ( $Z_{mr'}$ ), получим

$$\omega_{r'q} = \frac{F_{r'q} - \sum_{g=1}^n \omega_{rg} Z_{gqr'}}{Z_{mr'}}, \quad (2.26)$$

где

$$Z_{gqr'} = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \iint_{s_q} f_{r'}(r_q) \iint_{s_g} f_r(r_g) G_{ж}(r_q/r_g) ds_g ds_q \quad (2.27)$$

— взаимное сопротивление излучения преобразователя с номером  $g$ , совершающего колебания, соответствующие моде  $r$ , и преобразователя с номером  $q$ , колебания которого соответствуют моде  $r'$ . Придавая различные значения индексам  $r'$  и  $q$  в выражении (2.26), получим систему алгебраических уравнений. Решив эту систему и подставив решение в формулу (2.25), найдем поле, создаваемое антенной.

Вообще говоря, в большинстве случаев механическая система преобразователей допускает появление колебаний с различными модами, поэтому рассмотренный случай является наиболее общим. Однако обычно, механические сопротивления преобразователей, соответствующие различным модам при работе на какой-то фиксированной частоте, резко отличаются друг от друга по величине и наименьшую величину имеет сопротивление, соответствующее ближайшей моде. При этом колебательные скорости для мод, имеющих резонанс на частотах, далеких от рабочей частоты, малы и эффект практически определяется колебаниями с одной единственной модой. Поэтому при расчетах очень часто ограничиваются анализом излучения, соответствующего колебаниям с одной модой.

Рассматривая излучение непрерывной антенны, мы убедились, что решение задачи с помощью функции Грина  $G_{ж}(r/r')$  приводит к необходимости нахождения решения интегрального уравнения (2.17), в то время как использование функции Грина  $G_{н}(r/r')$  позволяет избежать этой трудности и выразить поле непосредственно через интеграл по поверхности антенны [выражения (2.19) и (2.20)]. Можно предполагать, что и в случае дискретной антенны использование вместо  $G_{ж}(r/r')$  функции  $G_{н}(r/r')$  облегчит решение задачи. Однако строить расчетную схему с помощью функции  $G_{н}(r/r')$  можно только введя два ограничения.

Первое из них не является новым по сравнению с только что рассмотренным случаем и заключается в том, что зазоры между элементами антенны должны либо отсутствовать, либо иметь механическое сопротивление, такое же, как и сами акустические элементы. Второе ограничение более существенно. Оно сводится к тому, что каждая точка поверхности преобразователя может самостоятельно, незави-

симо от соседних, или, как говорят, локально реагировать на воздействие со стороны поля, т. е. колебательная скорость поверхности антенны может непрерывно меняться от точки к точке. Естественно, что, поскольку для дискретных антенн, состоящих из отдельных элементов, обладающих механической колебательной системой, колебания отдельных точек поверхности элементов не являются независимыми, это ограничение позволяет рассматривать только антенны, состоящие из малых по сравнению с длиной волны преобразователей. Несмотря на указанные ограничения, этот метод находит применение при расчете антенн в связи с большим его преимуществом, заключающимся в отсутствии необходимости решения системы алгебраических уравнений.

Рассуждая совершенно аналогично тому, как это делалось при определении поля, создаваемого непрерывной антенной, для нашего случая получим

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{ik\rho c}{4\pi} \sum_{q=1}^n \int_{s_q} \omega_{Bq} G_{\mathbf{H}}(\mathbf{r}/r_q) ds_q, \quad (2.28)$$

или

$$p(\mathbf{r}) = \frac{z_m}{4\pi} \sum_{q=1}^n \int_{s_q} \omega_{Bq} \frac{\partial G_{\mathbf{H}}(\mathbf{r}/r_q)}{\partial n} ds_q, \quad (2.29)$$

где  $\omega_{Bq}$  — колебательная скорость  $q$ -го элемента в вакууме;  $\omega_{Bq} = u_q m / z'_m$  ( $u_q$  — напряжение, подводимое к этому элементу);  $z_m$  — механическое сопротивление элемента, отнесенное к площади его активной поверхности.

Мы рассмотрели три случая решения задачи об излучении антенны с помощью формулы Грина. В первом из них мы предполагали, что известна колебательная скорость на поверхности антенны, во втором — давление, в третьем случае считалось заданным распределение напряжений, подводимых к преобразователям антенны.

Не вызывает сомнений, что третий случай является самым распространенным в антенной технике. Однако в то же время он является и самым сложным для анализа. В связи с этим возникает вопрос о выяснении условий, при выполнении которых можно считать, что нам известно распределение колебательных скоростей или давлений.

**Соображения об использовании полученных соотношений.** Вернемся к выражению (2.24). В соответствии с формулами (1.14), (1.15) и (1.17) мощность, излучаемая элементом с номером  $q$ , определяется соотношением

$$W_q = \frac{1}{2} \sum_{g=1}^n \omega_g \omega_q^* z_{gq}, \quad (2.30)$$

поэтому полное сопротивление излучения элемента  $z_q$  равно

$$z_q = \frac{2W_q}{|\omega_q|^2} = \frac{1}{\omega_q} \sum_{g=1}^n \omega_g z_{gq}, \quad (2.31)$$

и выражение (2.24) можно записать в виде

$$\omega_q = \frac{F_q - \omega_q z_q}{z_M}. \quad (2.32)$$

Это соотношение, выражая из него  $\omega_q$ , можно представить следующим образом:

$$\omega_q = \frac{F_q}{z_M + z_q}. \quad (2.33)$$

В случае работы преобразователя вдали от резонанса его механическое сопротивление значительно больше сопротивления излучения, и поэтому

$$\omega_q = \frac{F_q}{z_M}. \quad (2.34)$$

Таким образом, при работе вдали от резонанса колебательная скорость не зависит от реакции поля и можно считать  $\omega_q$  известной величиной. Наоборот, при работе на резонансе, если только активные потери в преобразователе малы, а механико-акустический к. п. д. соответственно близок к единице, справедливо неравенство  $z_M \ll z_q$  и

$$\omega_q = \frac{F_q}{z_q}. \quad (2.35)$$

Произведение  $\omega_q z_q$  определяет силу, действующую на преобразователь со стороны поля [это видно, например, из выражения (2.32)], и если преобразователь мал по сравнению с длиной волны, то можно полагать, что  $\omega_q z_q = p(r_q) \Delta s_q$ . Таким образом, давление на поверхности антенны

$$p(r_q) = \frac{F_q}{\Delta s_q}, \quad (2.36)$$

и, следовательно, при работе на резонансе можно считать, что на поверхности антенны известно распределение давлений.

Здесь следует, однако, сделать одно существенное замечание. Если для случая работы вдали от резонанса всегда можно считать колебательную скорость известной, то в случае работы на резонансе можно считать известным давление только при выполнении двух условий. Эти условия заключаются в предположении малости активных потерь в преобразователе и малости размеров активной поверхности преобразователя по сравнению с длиной волны.

Кроме того, задавая распределение давления на излучающей поверхности, следует корректно формулировать граничное условие и не допускать разрыва функции  $p(\mathbf{r})$ , который возможен только при бесконечной величине колебательной скорости.

Выше мы рассмотрели применение формулы Грина для решения задачи об излучении антенны. Аналогичные расчетные выражения можно получить с помощью формулы Грина и для режима приема.

Для этого следует положить плотность источников [см. формулу (2.1)]  $\sigma(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ , где  $Q$  — производительность источника

сигнала,  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  — дельта-функция Дирака, отличная от нуля только в точке расположения источника  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , и далее рассматривать отдельные частные случаи, помещая точку наблюдения на поверхность антенны  $s$ . В режиме приема можно предполагать, что поверхность антенны акустически жесткая, абсолютно податливая, обладает локальным механическим сопротивлением или состоит из дискретных преобразователей,  $z_m$  которых известно. В первых трех случаях получаются выражения, аналогичные приведенным выше для режима излучения, если на поверхности антенны задана колебательная скорость, давление или распределение электромеханической силы. В последнем случае получается система уравнений, определяющая колебательные скорости преобразователей и совпадающая с системой (1.74). Как уже отмечалось выше, в режиме приема колебательные скорости зависят от направления прихода волны и поэтому систему уравнений нужно решать заново для каждого положения точки, в которой расположен излучатель. Практически можно этого не делать, поскольку характеристики направленности антенны в приеме и излучении совпадают (при равенстве механических сопротивлений преобразователей).

Следует заметить, что рассмотренные выше частные случаи далеко не охватывают всех возможных разновидностей задания граничных условий на поверхности антенны. Приведенные формулы справедливы только при однородных граничных условиях, так как если на поверхности преобразователей мы задавали колебательную скорость, то полагали зазоры акустически жесткими, если на поверхности преобразователей считали известным давление, то в зазорах давление приравнивали к нулю (что эквивалентно заполнению зазоров мягким материалом). Практически не менее интересны случаи неоднородных граничных условий (например, заданы колебательные скорости преобразователей, а в зазорах расположен акустически мягкий материал).

Однако задачи с неоднородными условиями на границе решаются значительно сложнее и на них мы останавливаться не будем. Укажем только, что с некоторыми методами решения таких задач можно ознакомиться в работах [22] и [71].

Сама по себе формула Грина не позволяет решить задачу об излучении или приеме звука полностью и до конца. Но с ее помощью удастся произвести анализ основных явлений, связанных с излучением и приемом звука антенной, и свести одну крупную задачу к нескольким более мелким. Часть этих мелких задач мы рассмотрели или хотя бы упомянули (решение интегральных уравнений, систем алгебраических уравнений и т. д.), но одна из них осталась пока за пределами нашего внимания. Это задача об отыскании функции Грина. Действительно, из анализа приведенных формул видно, что для нахождения параметров антенны в режиме приема или излучения необходимо знание функций Грина, причем различных функций, в зависимости от того, какие допущения могут быть сделаны в том или ином случае. Иными словами, необходимо знать поле, создаваемое точечным источником, находящимся на жесткой, импедансной или податливой поверхности антенны.

В практике наиболее широкое применение находят функции Грина задачи Неймана. Это обстоятельство объясняется особенностями преобразователей, обычно применяемых в гидроакустике. Преобразователи, обладающие механической системой, колеблются так, что колебательная скорость на активной поверхности представляет собой сумму некоторого (обычно небольшого) числа мод с различными коэффициентами, причем реакция среды способна изменять соотношение между модами, но не вид мод. Таким образом, если мы, приступая к решению задачи, не знаем реального распределения колебательной скорости по поверхности преобразователя или соотношения между амплитудами колебаний для различных мод, то вид самих мод можем предсказать заранее, а это и определяет целесообразность использования для анализа функций  $C_{ж}(r/r')$ .

Можно представить себе излучатель и совершенно иного типа. Если, например, излучение происходит из отверстий в мягком экране, то заранее известны моды давления в отверстиях и поэтому в этом случае может оказаться, что задачу об излучении удобнее решать с помощью функций Грина граничной задачи Дирихле.

Заметим, что для определения поля, создаваемого антенной, как видно из приведенных выше формул, достаточно знать не саму функцию Грина, а интеграл от произведения ее на форму колебания преобразователя, т. е., по-существу, поле, создаваемое отдельным преобразователем антенны. В связи с этим в дальнейшем мы будем пользоваться не функциями Грина, а непосредственно выражениями, определяющими давление, развиваемое преобразователями антенны во внешней среде.

#### § 4. Модельные представления антенн и некоторые общие соотношения

Рассмотрим различные расчетные модели антенн и методы определения полей, ими создаваемых.

**Плоская антенна в бесконечном экране.** Наиболее распространенный метод расчета плоских антенн основан на принципе Гюйгенса. Если имеется бесконечная плоскость, на части которой задано распределение колебательной скорости  $\omega(s)$ , а остальные участки плоскости являются абсолютно жесткими, то давление во внешнем пространстве определяется формулой

$$p = -\frac{ik\rho c}{2\pi} \iint_s \omega(s) \frac{e^{ikr'}}{r'} ds, \quad (2.37)$$

где  $r'$  — расстояние от точки излучения до точки наблюдения.

В соответствии с этой формулой элементарный источник в жестком экране излучает в полупространство ненаправленно, или, что то же самое, имеет характеристику направленности в виде полусферы. Реальные антенны не заключаются в бесконечные экраны, поэтому важно представлять себе, в каких случаях для расчета конечных антенн можно пользоваться формулой (2.37). Если антенна велика по сравнению



с длиной волны, то основная масса элементарных излучателей располагается на большом относительном расстоянии от ее краев и их характеристики направленности приближаются к полусфере. Характеристики направленности элементов на краю антенны очевидно не будут иметь вид полусферы, поскольку часть излучаемой энергии будет распространяться в тыльное относительно активной поверхности антенны полупространство. Чем больше относительные размеры антенны, тем большее число элементарных излучателей имеют характеристики направленности в виде полусферы и тем точнее результат расчета по формуле (2.37).

Обычно считают, что если размеры плоской антенны составляют 2—3 и более длин волн, то отличия в ее параметрах при работе в свободном поле и в бесконечном экране практически несущественны.

Исследование же излучения поршня без экрана представляет собой весьма сложную задачу, решенную впервые Л. Я. Гутиным [13]. В этой работе или книге С. Н. Ржевкина [30], где приведены некоторые результаты, полученные Л. Я. Гутиным, можно найти более подробные сведения и некоторые количественные соотношения.

Задача об излучении антенны в мягком плоском бесконечном экране решается сравнительно легко, только если на поверхности антенны задано распределение давления. В этом случае в соответствии со второй формулировкой принципа Гюйгенса

$$p = -\frac{i \cos \theta}{\lambda} \iint_s p(s) \frac{e^{ikr'}}{r'} ds. \quad (2.38)$$

В этой формуле  $\theta$  — угол между нормалью к плоскости и направлением на точку наблюдения. Наличие множителя  $\cos \theta$  свидетельствует о том, что даже малый по сравнению с длиной волны излучатель, помещенный в мягкий плоский бесконечный экран, обладает направленностью и излучаемая им энергия не распространяется вдоль мягкой поверхности экрана.

**Прозрачная непрерывная антенна.** Акустически прозрачные линейные, а тем более поверхностные акустические антенны весьма редко встречаются на практике. Однако анализ их свойств в ряде случаев позволяет получить интересные результаты, которые с некоторыми ограничениями могут быть распространены на реальные антенны.

Линейную непрерывную прозрачную антенну мы будем представлять в виде тонкой пульсирующей проволоки радиуса  $r_0$ , каждый элемент длины которой  $dl$  излучает как ненаправленный источник. Поверхность излучения элемента длины равна  $2\pi r_0 dl$  и производительность источника связана с его линейной скоростью соотношением  $Q = 2\pi r_0 \omega(l) dl$ . Давление, развиваемое элементом длины  $dl$ , можно найти по формуле, справедливой для ненаправленного источника; оно равно

$$dp = -\frac{ik\rho c Q}{4\pi r'} e^{ikr'} = -\frac{ik\rho c 2\pi r_0 \omega(l) e^{ikr'}}{4\pi r'} dl,$$

и давление, создаваемое всей антенной, определяется выражением

$$p = -\frac{ik\rho c r_0}{2} \int_l \omega(l) \frac{e^{ikr'}}{r'} dl. \quad (2.39)$$

В качестве модели прозрачной поверхностной антенны мы будем рассматривать некоторую пульсирующую звукопрозрачную пластину, толщина которой значительно меньше длины волны. Если линейная колебательная скорость на одной стороне этой пластины  $\omega(s)$ , то  $Q = 2\omega(s) ds$  и давление, создаваемое антенной,

$$p = -\frac{ik\rho c}{2\pi} \int_s \int_s \omega(s) \frac{e^{ikr'}}{r'} ds. \quad (2.40)$$

**Поверхностная непрозрачная антенна.** Вначале рассмотрим выражение для определения давления, создаваемого непрерывной антенной в приближении Кирхгофа.

Если в формулу Грина (2.4) в качестве функции Грина подставить ее выражение для свободного поля и предположить, что на поверхности излучающей антенны давление и колебательная скорость связаны собой так же, как и в плоской волне, то после несложных преобразований можно получить выражение

$$p = -\frac{ik\rho c}{2\pi} \int_s \int_s \frac{1 + \cos\theta}{2} \omega(s) \frac{e^{ikr'}}{r'} ds, \quad (2.41)$$

где  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности антенны в точке  $ds$  и направлением на точку наблюдения.

Из сравнения этой формулы с формулой (2.40) видно, что физический смысл приближения Кирхгофа заключается в том, что каждый элемент площади непрозрачной поверхностной антенны обладает направленностью в соответствии с выражением  $\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ . Этот множитель в формуле (2.41) очевидно приближенно учитывает дифракцию волны, излучаемой малым элементарным источником, вызванную наличием акустически непрозрачной поверхности антенны. Ясно, что учет этот весьма приближенный, поскольку направленность элемента оказывается не зависящей ни от формы, ни от волновых размеров антенны. На самом деле характеристика направленности малого элемента, находящегося, например, на поверхности акустически жесткого цилиндра, действительно несколько напоминает по виду кардиоиду [функцию  $\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ ]. Однако она изменяется при изменении волновых размеров цилиндра. Для очень малых цилиндров она менее направлена, чем функция  $\frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ , для больших — приближается к полусфере, т. е. имеет примерно одинаковые значения в переднем полупространстве и очень маленькие в тыльном.

Если волновые размеры антенны очень велики, то для анализа направленности элемента ее площади можно воспользоваться представлениями лучевой акустики, в соответствии с которыми источник излучает лучи, распространяющиеся прямолинейно. При этом источник на гладкой без изломов поверхности антенны «освещает» полупространство, следовательно, характеристика направленности его имеет вид полусферы, опирающейся на плоскость, касательную к поверхности антенны в точке расположения источника. Записывая давление, развиваемое всей антенной, можно учесть такую характеристику направленности отдельного элемента изменением пределов интегрирования в соответствии с изменением направления на точку наблюдения

$$p = -\frac{ik\rho c}{2\pi} \int_{s'} \int \omega(s) \frac{e^{ikr'}}{r'} ds, \quad (2.42)$$

где  $s'$  — та часть поверхности антенны, которая видна из точки наблюдения.

Несмотря на то, что формула (2.42) учитывает дифракцию весьма примитивно, при больших относительных размерах антенн, она обеспечивает точность расчета не худшую, чем формула (2.41). Поскольку к тому же формула (2.42) несколько проще, она часто используется при практических расчетах.

Наиболее точными методами расчета поверхностных антенн являются методы, учитывающие дифракцию на поверхности антенны, и, в частности, метод собственных функций, широко применяющийся при решении различных задач математической физики. Сущность этого метода состоит в том, что решение волнового уравнения ищется в виде суммы произведения некоторых функций, каждая из которых зависит от одной координаты. При этом в ряде случаев волновое уравнение разделяется на несколько дифференциальных уравнений, в каждое из которых входит только одна координата, что существенно облегчает их решение. Метод собственных функций имеет два существенных недостатка. Первый из них заключается в том, что он может быть применен только для определенных конфигураций активной поверхности антенн, совпадающих с координатной поверхностью одной из одиннадцати систем координат, позволяющих производить разделение переменных волнового уравнения. Практически этим методом решаются задачи об излучении цилиндра, сферы и некоторых плоских излучателей, не заключенных в бесконечный экран. Вторым недостатком метода собственных функций является то, что решение задачи представляется бесконечным одинарным или двойным рядом по собственным функциям данной задачи, что, с одной стороны, вызывает иногда чисто вычислительные трудности даже при использовании современной вычислительной техники, а с другой стороны, не позволяет производить качественный анализ и оценку результата.

В связи с этим в последние годы развиваются различные приближенные методы расчета антенн и, в частности, с привлечением высокочастотной асимптотики функций Грина [15].

**Вычисление разности хода лучей.** Для определения давления, создаваемого дискретной антенной в некоторой находящейся в дальней зоне точке, в соответствии с формулой (1.3) необходимо сложить давления  $p_q(\mathbf{u})$ , развиваемые в этой точке отдельными элементами. Процедура сложения может быть несколько различной в зависимости от того, от какой точки отсчитывается расстояние в выражении для  $p_q(\mathbf{u})$ . В большинстве случаев эта точка связана с отдельным элементом антенны, например, с его центром. Однако если  $p_q(\mathbf{u})$  получено, например, в результате решения точной задачи об излучении полос на жестком цилиндре или поршней на жесткой сфере, то начало отсчета расстояний до точки наблюдения для всех элементов антенны может быть общим и находится в центре сферы или цилиндра.

В тех случаях, когда точка, от которой отсчитывается расстояние, связана с элементом антенны, перед сложением давлений  $p_q(\mathbf{u})$  следует перейти к отсчету расстояний от общего для всей антенны начала координат. Покажем как это делается на примере простейшей дискретной антенны, состоящей из ненаправленных элементов. Будем считать элементы антенны прозрачными, т. е. настолько малыми, что они не искажают звуковое поле. Пусть центры ненаправленных элементов расположены в точках, определяемых радиусами-векторами  $\rho_q$  (рис. 6). Давление, создаваемое ненаправленным элементом с номером  $q$  определяется известным выражением

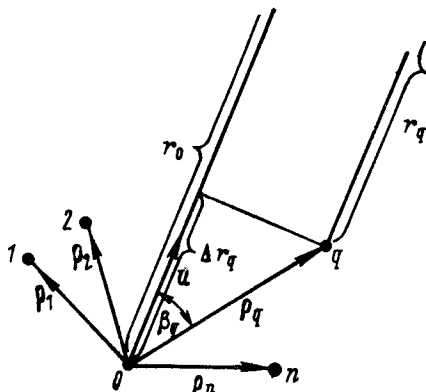


Рис. 6. К определению разности хода лучей от отдельных элементов антенны до точки наблюдения.

Рис. 6. К определению разности хода лучей от отдельных элементов антенны до точки наблюдения.

$$p_q(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho cs_0\omega q}{4\pi r_q} e^{ikr_q}, \quad (2.43)$$

где  $s_0$  — площадь элемента, а  $r_q$  — расстояние от центра элемента до точки наблюдения. Проведем от начала координат  $O$  и от центра элемента антенны с номером  $q$  в произвольном направлении, определяемом единичным радиусом-вектором  $\mathbf{u}$ , параллельные (поскольку точка наблюдения расположена очень далеко) лучи и найдем связь между  $r_0$  и  $r_q$ . Из рис. 6 видно, что  $r_q = r_0 - \Delta r_q$ , где  $\Delta r_q$  равно произведению модуля  $\rho_q$  на косинус угла  $\beta_q$  между  $\mathbf{u}$  и  $\rho_q$ . Так как величина радиуса-вектора  $\mathbf{u}$  равна единице,  $\Delta r_q$  можно выразить через скалярное произведение векторов; действительно,  $\Delta r_q = \rho_q \mathbf{u} = |\rho_q| \cdot |\mathbf{u}| \cos \beta_q = |\rho_q| \cos \beta_q$ .

Складывая теперь в соответствии с формулой (1.7) давления в точке наблюдения от отдельных элементов антенны, пренебрегая при

этом разностью хода лучей  $\Delta r_q$  в амплитудном множителе и заменяя  $r_0$  на  $r$ , получаем

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c s_0 \omega_1}{4\pi r} e^{ikr} \sum_{q=1}^n A_q e^{-ik\rho_q \mathbf{u}}. \quad (2.44)$$

Совершенно аналогичные рассуждения могут быть применены и для определения разности хода лучей от отдельных участков непрерывных линейных или поверхностных антенн до точки наблюдения. Если положение текущей точки на поверхности антенны определяется радиусом-вектором  $\rho$ , то расстояние от нее ( $r'$ ) и от начала координат ( $r$ ) до точки наблюдения, находящейся в дальнем поле в направлении  $\mathbf{u}$ , связаны соотношением  $r' = r - \rho \mathbf{u}$ .

Поэтому давления, развиваемые линейной и поверхностной прозрачными антеннами в дальнем поле, в соответствии с формулами (2.39) и (2.40) можно записать следующим образом:

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c r_0 \omega_0}{2r} e^{ikr} \int A(l) e^{-ik\rho \mathbf{u}} dl, \quad (2.45)$$

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c \omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \iint_s A(s) e^{-ik\rho \mathbf{u}} ds, \quad (2.46)$$

где  $\omega_0 A(l) = \omega(l)$  и  $\omega_0 A(s) = \omega(s)$ .

Во всех предыдущих формулах, в которые входят величины  $p_q(\mathbf{u})$ , предполагалось, что они записаны относительно общей для всей антенны точки, т. е. что расстояние  $r$  отсчитывается от общего начала координат. Рассмотрим теперь случай, когда расстояние  $r$  в выражении  $p_q(\mathbf{u})$  отсчитывается от точки, положение которой в системе координат, общей для всех элементов, определяется радиусом-вектором  $\rho_q$ . Воспользовавшись снова рис. 6, заметим, что разность хода лучей от элемента с номером  $q$  и от начала координат, в которое мысленно можно поместить излучатель, равна  $\rho_q \mathbf{u}$ . Поэтому между  $p_q(\mathbf{u})$  и  $p_q(\mathbf{u})$  существует связь

$$p_q(\mathbf{u}) = \bar{p}_q(\mathbf{u}) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}}. \quad (2.47)$$

Воспользовавшись этим соотношением, формулу (1.7) можно записать следующим образом:

$$p(\mathbf{u}) = \omega_1 \sum_{q=2}^n A_q \bar{p}'_q(\mathbf{u}) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}}. \quad (2.48)$$

**Компенсация антенны в заданном направлении.** Амплитудно-фазовые распределения на поверхности непрерывной антенны  $A(l)$  или  $A(s)$ , а также коэффициенты возбуждения дискретной антенны  $A_q$  могут иметь любой вид. Одним из часто используемых практически является распределение, обеспечивающее синфазное сложение давлений от отдельных элементов (или участков) антенны в некотором направлении в пространстве. Обычно это направление совпадает с направлением главного максимума характеристики направленности.

Из формулы (1.7) видно, что для обеспечения компенсации дискретной антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$  аргумент коэффициента возбуждения  $\alpha_q$  следует выбрать равным по абсолютной величине и противоположным по знаку аргументу  $p'_q(\mathbf{u}_0)$ , т. е. положить  $\alpha_q = -\arg[p'_q(\mathbf{u}_0)]$ . При этом  $p(\mathbf{u})$  записывается следующим образом:

$$p(\mathbf{u}) = \omega_1 \sum_{q=1}^n a_q e^{-i \arg[p'_q(\mathbf{u}_0)]} p'_q(\mathbf{u}),$$

и в направлении  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$

$$p(\mathbf{u}_0) = \omega_1 \sum_{q=1}^n a_q e^{-i \arg[p'_q(\mathbf{u}_0)]} |p'_q(\mathbf{u}_0)| \times \\ \times e^{i \arg[p'_q(\mathbf{u}_0)]} = \omega_1 \sum_{q=1}^n a_q |p'_q(\mathbf{u}_0)|.$$

Слагаемые этой суммы вещественны, что свидетельствует о синфазности колебаний, приходящих от отдельных элементов в точку наблюдения (разумеется, если только все  $a_q > 0$ ).

В случае, когда при  $A_q$ ,  $A(l)$  или  $A(s)$ , равных единице, разности фаз колебаний от отдельных элементов в удаленной точке определяются только разностью хода лучей [как это имеет место в формулах (2.44), (2.45), (2.46)], для компенсации антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$  следует положить  $\alpha_q = k\rho_q \mathbf{u}_0$ ,  $\alpha(l) = k\rho l \mathbf{u}_0$  и  $\alpha(s) = k\rho s \mathbf{u}_0$ .

При этом формулы, определяющие давления и характеристики направленности прозрачных антенн дискретной (состоящей из ненаправленных элементов), линейной и поверхностной, примут вид

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c s_0 \omega_1}{4\pi r} e^{ikr} \sum_{q=1}^n a_q e^{-ik\rho_q(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)}, \quad (2.49)$$

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{q=1}^n a_q e^{-ik\rho_q(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)}}{\sum_{q=1}^n a_q}, \quad (2.50)$$

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c r_0 \omega_0}{2r} e^{ikr} \int_l a(l) e^{-ik\rho(l-\mathbf{u}_0)} dl, \quad (2.51)$$

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\int_l a(l) e^{-ik\rho(l-\mathbf{u}_0)} dl}{\int_l a(l) dl}, \quad (2.52)$$

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c \omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \iint_s a(s) e^{-ik\rho(s-\mathbf{u}_0)} ds, \quad (2.53)$$

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\iint_s a(s) e^{-ik\rho(s-\mathbf{u}_0)} ds}{\iint_s a(s) ds}. \quad (2.54)$$

Применяя эти формулы для расчета параметров антенн различных конфигураций, в каждом конкретном случае необходимо находить скалярные произведения  $\rho \mathbf{u}$  и  $\rho \mathbf{u}_0$ . Удобнее всего это делать с помощью формулы

$$\rho \mathbf{u} = \rho_x u_x + \rho_y u_y + \rho_z u_z, \quad (2.55)$$

определяющей  $\rho \mathbf{u}$  как сумму произведений одноименных проекций векторов  $\rho$  и  $\mathbf{u}$  на оси координат.

**Фазовый центр антенны.** Характеристики направленности некоторых антенн (например, антенны в виде отрезка прямой, см. § 11), отличаются одним интересным свойством. Это свойство заключается в том, что при некотором положении начала отсчета расстояния  $r$  (т. е. начала координат) аргумент характеристики направленности либо вообще не зависит от направления в пространстве  $\mathbf{u}$ , либо (что встречается значительно чаще) при плавном изменении положения точки наблюдения в пространстве представляет собой разрывную функцию ее координат, принимающую только два значения, отличающиеся друг от друга на  $\pi$ . В таких случаях говорят, что антенна имеет фазовый центр, совпадающий с началом координат.

Окружим мысленно антенну сферой большого радиуса с центром, совпадающим с фазовым центром. Поскольку характеристика направленности пропорциональна давлению, развиваемому антенной в дальнем поле, фазы давлений во всех точках этой сферы будут либо одинаковы, либо отличаться на  $\pi$ .

Если антенну, имеющую фазовый центр, окружить сферой большого радиуса, центр которой не совпадает с фазовым центром, то фазы давлений на отдельных участках поверхности сферы будут изменяться плавно, а между этими участками будет наблюдаться перепад фазы на  $\pi$ .

Поясним сказанное примером. Пусть в начале координат помещен ненаправленный излучатель. Фазовый фронт волны, излучаемой им, совпадает с поверхностью сферы большого радиуса только в том случае, если центр сферы размещен в начале координат. Если же центр сферы не совпадает с началом координат, т. е. с фазовым центром излучателя, то фаза давления на поверхности сферы не будет постоянной.

Таким образом, если антенна и имеет фазовый центр, но отсчет расстояний в формулах, описывающих давление, развиваемое антенной в дальнем поле, или ее характеристику направленности, производится не от фазового центра, а от какой-то другой точки, принятой за начало координат, то фазовый множитель этих формул может меняться плавно при плавном изменении положения точки наблюдения. Однако есть способ, позволяющий по виду формулы для вычисления  $p(\mathbf{u})$  или  $D(\mathbf{u})$  судить о наличии фазового центра.

Пусть антенна имеет фазовый центр, расположенный в точке  $O$  (рис. 7). Это означает, что при помещении начала координат в точку  $O$  (или, что то же самое, — при отсчете расстояний в формуле, определяющей  $p(\mathbf{u})$  от точки  $O$ ) отношение  $p(\mathbf{u})$  к  $i$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) представляется некоторой вещественной функцией  $B_0(\mathbf{u})$ , изменение знака которой соответствует изменению фазы на  $\pi$ . Если же мы поместим

начало координат в точку  $O'$  и будем от нее отсчитывать расстояния то из формулы (2.47) или непосредственно из рис. 7 видно, что

$$\frac{\rho_{O'}(\mathbf{u})}{i} = B_0(\mathbf{u}) e^{-ik\rho\alpha}, \quad (2.56)$$

где  $\rho$  — радиус-вектор, определяющий положение фазового центра антенны относительно начала координат  $O'$ .

Полученное выражение позволяет утверждать, что если характеристику направленности антенны можно представить в виде произведения некоторой вещественной функции на  $e^{-ik\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)}$ , то антенна имеет фазовый центр, расположенный в точке, положение которой относительно начала координат  $O'$  характеризуется радиусом-вектором  $\rho$ .

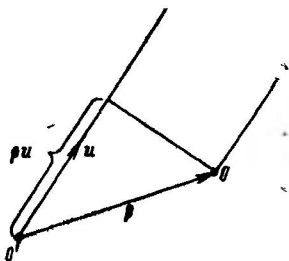


Рис. 7. К выводу формулы (2.56).

Встречаются случаи, когда аргумент характеристики направленности имеет вид, отличный от вида функции  $k\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$ . В таких случаях говорят о том, что антенна не имеет фазового центра. Физически это означает, что нет такой точки, выбрав которую в качестве центра сферы большого радиуса, можно было бы констатировать ее совпадение с фазовым фронтом излучаемой волны (понимая при этом под фазовым фронтом поверхность, колебания на которой синфазны или противофазны). Другими словами, отсутствие фазового центра свидетельствует о том, что фазовый фронт волны не является сферическим.

В случае отсутствия фазового центра естественно ввести в рассмотрение некоторый его эквивалент, т. е. такую точку, из которой как бы исходит излучение. В литературе встречаются различные способы определения такой эквивалентной точки. Можно определить частичный фазовый центр как точку, являющуюся центром кривизны поверхности равных фаз в произвольном направлении  $\mathbf{u}$ . Введенный таким образом частичный фазовый центр зависит не только от направления в пространстве  $\mathbf{u}$ , но и от ориентации плоскости, в сечении которой фазовым фронтом определяется центр кривизны. Многие авторы пользуются эквивалентным фазовым центром, называя им центр сферы, наименее отличающейся от фазового фронта. В качестве критерия отклонения поверхности сферы от поверхности равных фаз обычно рассматривается минимум среднеквадратичного отклонения во всем телесном угле. Вместе с тем излучение происходит в основном в пределах главного лепестка характеристики направленности, и поэтому представляется естественным при минимизации среднеквадратичного отклонения учитывать амплитудную диаграмму направленности, поставив ее в качестве весовой функции под интеграл по полному пространству от квадрата разности между поверхностью сферы и фазовым фронтом. Введенный таким образом эквивалентный фазовый центр в [6] назван центром излучения.

В зависимости от особенностей решаемых задач бывает удобнее пользоваться тем или иным понятием эквивалентного фазового центра.



Во многих случаях, однако, удается построить решение, не прибегая к определению его положения и ограничившись анализом аргумента характеристики направленности.

**Теорема умножения.** Пусть антенна состоит из одинаковых и одинаково ориентированных в пространстве элементов. Элементы либо акустически прозрачны, либо расположены так, что не затеяют друг друга, кроме того, будем считать заданными колебательные скорости всех элементов. При этих условиях характеристика направленности антенны равна характеристике направленности отдельного элемента, умноженной на характеристику направленности гипотетической антенны, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных в центрах реальных и имеющих такое же амплитудно-фазовое распределение, что и элементы реальной антенны.

Давление, развиваемое антенной в дальнем поле в направлении  $\mathbf{u}$  можно определить с помощью формулы (2.48):

$$p(\mathbf{u}) = \omega_1 \sum_{q=1}^n A_q \bar{p}'_q(\mathbf{u}) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}},$$

где  $\bar{p}'_q(\mathbf{u})$  — давление, развиваемое элементом с номером  $q$ , отнесенное к  $\omega_q$  и записанное относительно точки, положение которой характеризуется радиусом-вектором  $\rho_q$ .

Учитывая, что поля  $\bar{p}'_s(\mathbf{u})$ , создаваемые отдельными элементами одинаковы и одинаково ориентированы в пространстве, характеристику направленности антенны можно записать следующим образом:

$$D(\mathbf{u}) = \frac{p(\mathbf{u})}{p(\mathbf{u}_0)} = \frac{\bar{p}'_s(\mathbf{u}) \sum_{q=1}^n A_q e^{-ik\rho_q \mathbf{u}}}{\bar{p}'_s(\mathbf{u}_0) \sum_{q=1}^n A_q e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0}} = D_s(\mathbf{u}) D_p(\mathbf{u}), \quad (2.57)$$

где, как легко убедиться, подставляя формулу (2.44) в выражение (1.2),  $D_p(\mathbf{u})$  — характеристика направленности антенны, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных в центрах реальных элементов и имеющих такое же амплитудно-фазовое распределение, как и элементы реальной антенны.

Заметим, что в выводе, а следовательно, и в формулировке теоремы умножения ничего не изменится, если под элементом антенны понимать не отдельный преобразователь, а некоторую группу преобразователей. Более того, элемент может состоять из группы, каждый элемент которой в свою очередь состоит из группы преобразователей. В подобных случаях теорему умножения можно применять последовательно несколько раз, и характеристика направленности всей антенны определится произведением не двух, а большего числа сомножителей.

Мы доказали теорему умножения применительно к дискретным антеннам. Совершенно аналогично можно доказать ее и для антенн

непрерывных. В этом случае она может быть сформулирована следующим образом: характеристика направленности непрерывной антенны, полученной путем параллельного переноса некоторой кривой вдоль направляющей равна произведению характеристик направленности этой кривой и направляющей. В соответствии с теоремой умножения для непрерывных антенн характеристика направленности параллелограмма, например, равна произведению характеристик направленности его непараллельных сторон, а прозрачного цилиндра — произведению характеристик направленности направляющей и образующей.

Теорема умножения существенно упрощает во многих случаях расчеты характеристик направленности и поэтому широко используется при определении направленных свойств антенн. Однако применяя теорему умножения, следует всегда убеждаться, что выполняются все условия, при которых она справедлива. Так, например, нельзя применять теорему умножения в случае, если элементы одинаковы, но ориентированы по-разному. Кроме того, следует иметь в виду, что теорема умножения получена в предположении, что заданы колебательные скорости элементов антенны, но не напряжения, подводимые к ним. Это обстоятельство весьма существенно.

Обычно мы контролируем напряжения, подводимые к элементам антенны, а колебательные скорости элементов нам неизвестны. Как было показано выше, при работе вдали от резонанса распределение колебательных скоростей повторяет распределение подводимых к преобразователям напряжений, и применяя теорему умножения, в этом случае можно приписывать решетке ненаправленных элементов распределение, соответствующее распределению напряжений. Но в общем случае этого делать нельзя. Нельзя и подменять формулировку теоремы умножения следующей: характеристика направленности антенны равна произведению характеристики направленности одного элемента на характеристику направленности решетки ненаправленных элементов с учетом их взаимодействия по полю. Это утверждение не справедливо, поскольку взаимодействия направленных и ненаправленных элементов различны.

Поэтому в случае работы на резонансе или вблизи него следует вначале решить систему уравнений для определения колебательных скоростей направленных элементов, рассчитать характеристику направленности решетки ненаправленных элементов при полученном распределении колебательных скоростей и помножить ее на характеристику направленности отдельного элемента.

Имеется только один довольно специфический частный случай, когда теорема умножения справедлива и при работе антенны вблизи резонанса, причем характеристику направленности решетки можно определить, считая, что распределение  $A_q$  повторяет распределение подводимых напряжений. Правда, в этом случае и сама теорема умножения видоизменяется и записывается несколько иначе. Речь идет о ситуации, когда полные сопротивления излучения всех элементов антенны с учетом взаимодействий одинаковы [16].

Запишем выражение (1.67), определяющее колебательную скорость

элемента приемной антенны, следующим образом:

$$\omega_q = \frac{Qp'_q(u)}{z_M + \sum_{g=1}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{qg}}. \quad (2.58)$$

Сумма по  $g$ , стоящая в знаменателе, равна сопротивлению излучения элемента с номером  $q$ . Действительно, подставляя формулы (1.15) и (1.17) в выражение (1.14), получим

$$W_q = \frac{\omega_q}{2} \sum_{g=1}^n \omega_g z_{qg},$$

откуда

$$z_q = \frac{2W_q}{|\omega_q|^2} = \sum_{g=1}^n \frac{\omega_g}{\omega_q} z_{qg}.$$

Сопротивление излучения элемента в режиме приема зависит от направления прихода плоской волны  $u$ , поскольку колебательные скорости элементов зависят от  $u$ . Учитывая это обстоятельство, формулу (2.58) можно записать так:

$$\omega_q = \frac{Qp'_q(u)}{z_M + z_q(u)}. \quad (2.59)$$

В соответствии с условием теоремы умножения элементы одинаковы, следовательно, давления, развиваемые ими, отличаются только множителем, определяющим разность хода между началом координат и точкой, относительно которой записаны давления [см. формулу (2.47)]. Полагая  $z_q(u)$  не зависящим от  $q$ , учитывая коэффициенты передачи  $h_q$ , а также множитель  $e^{-ik\rho_q u}$ , получим выражение для напряжения на выходе сумматора

$$u(u) = \beta \sum_{q=1}^n h_q \omega_q = \frac{Q\beta p'_3(u)}{z_M + z(u)} \sum_{q=1}^n h_q e^{-ik\rho_q u},$$

откуда, переходя к характеристике направленности, имеем

$$D(u) = \frac{u(u)}{u(u_0)} = \frac{p'_3(u)}{p'_3(u_0)} \frac{z_M + z(u_0)}{z_M + z(u)} \times \\ \times \frac{\sum_{q=1}^n h_q e^{-ik\rho_q u}}{\sum_{q=1}^n h_q e^{-ik\rho_q u_0}} = D_s(u) D_B(u) D_P(u), \quad (2.60)$$

где  $D_B(u)$  — некоторый множитель (характеристика взаимодействия), учитывающий влияние взаимодействия элементов на характеристику направленности антенны;  $D_P(u)$  — характеристика направленности решетки, состоящей из точечных элементов с распределением, равным распределению коэффициентов передачи.

Напомним, что в этой формуле  $D_z(\mathbf{u})$  — характеристика направленности элемента антенны, определяемая при условии, что остальные элементы заторможены. Произведение  $D_z(\mathbf{u}) D_v(\mathbf{u})$  может рассматриваться как характеристика направленности элемента антенны в случае, когда остальные элементы расторможены.

Формула (2.60) получена нами применительно к режиму приема, однако выше было доказано, что при равенстве коэффициентов передачи  $h_q$  характеристики направленности в режиме приема и излучения одинаковы, поэтому пользоваться ею можно и для режима излучения.

Сопротивления излучения элементов в антенне могут быть одинаковы в двух случаях. Первый случай — тривиальный, встречается он тогда, когда волновые размеры активных поверхностей элементов достаточно велики и сопротивление излучения элемента в антенне определяется его собственным сопротивлением излучения и не зависит от взаимных. Но в этом случае  $z_q(\mathbf{u})$  не зависит от  $\mathbf{u}$  и  $D_v(\mathbf{u}) = 1$ . Второй случай — это работа одномерной или двумерной периодической бесконечной антенны при равномерном амплитудном распределении и линейно меняющемся фазовом. Формулы, позволяющие определить полное сопротивление излучения элемента бесконечной антенны, приводятся ниже (см. § 18).

**Теорема смещения.** Эту теорему мы сформулируем применительно к произвольной цилиндрической антенне. В частности, если направляющая цилиндра — окружность, то антенна представляет собой круговой цилиндр, а если направляющая — прямая, то антенна плоская. Покажем, что характеристика направленности произвольной цилиндрической поверхностной антенны, образующая которой параллельна оси  $z$ , в плоскости  $xOy$  при произвольном амплитудно-фазовом распределении  $A(x, y, z)$ , совпадает с характеристикой направленности в этой же плоскости направляющей, имеющей амплитудно-фазовое распределение  $f(x, y) = \int_z A(x, y, z) dz$ .

Запишем характеристику направленности рассматриваемой антенны с помощью выражений (1.2) и (2.46) в следующем виде:

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\iint_s A(x, y, z) e^{-ik\rho u} ds}{\iint_s A(x, y, z) e^{-ik\rho u_0} ds} \quad (2.61)$$

Поскольку мы будем определять характеристику направленности в плоскости  $xOy$ , а вектор  $\mathbf{u}$  лежит в этой плоскости, его проекция на ось  $z$  равна нулю. Проекции же его на оси  $x$  и  $y$  равны соответственно  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ . Будем описывать положение точки излучения на антенне координатами  $x, y, z$ , тогда произведение  $\rho \mathbf{u}$  определится выражением  $\rho \mathbf{u} = \rho_x u_x + \rho_y u_y + \rho_z u_z = x \cos \varphi + y \sin \varphi$ . Интеграл по поверхности  $s$  можно представить как двукратный интеграл, один вдоль оси  $z$  и другой вдоль образующей  $l$ . Так как фазовый множитель выражения (2.61) не зависит от координаты  $z$ , введя обозначение  $f(x, y) =$

$= \int_z A(x, y, z) dz$ , можем записать

$$D(\varphi) = \frac{\int_l f(x, y) e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dl}{\int_l f(x, y) e^{-ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} dl}, \quad (2.62)$$

где  $\varphi_0$  — угол, соответствующий направлению  $\mathbf{u}_0$ . Легко видеть, что выражение (2.62) представляет собой характеристику направленности направляющей, а следовательно, теорема доказана. В частном случае, когда амплитудно-фазовое распределение не зависит от координаты  $z$ , а высота антенны одинакова для всех  $x$  и  $y$  и равна  $H$ , функция  $f(x, y)$  равна  $HA(x, y)$  и формула (2.62) приобретает еще более простой вид

$$D(\varphi) = \frac{\int_l A(x, y) e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} dl}{\int_l A(x, y) e^{-ik(x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)} dl}. \quad (2.63)$$

Физический смысл теоремы смещения очевиден. Для характеристики направленности в плоскости  $xOy$  разности хода лучей от отдельных участков антенны не зависят от  $z$ , а зависят только от  $x$  и  $y$ . Поэтому характеристика направленности не может измениться от смещения отдельных участков антенны вдоль оси  $z$  и, в частности, от совмещения всей антенны с плоскостью  $xOy$ .

Для упрощения преобразований мы доказали теорему смещения применительно к прозрачной антенне, однако она справедлива и в более общем случае. Эта теорема, так же как и теорема умножения, часто применяется при расчетах. С ее помощью определение характеристики направленности цилиндрической антенны в плоскости  $xOy$  сводится к определению характеристики направленности дуги в той же плоскости, а определение характеристики направленности окружности или круглого поршня — к нахождению характеристики направленности отрезка прямой с некоторым амплитудным распределением.

**Теорема сложения.** Эта теорема является прямым следствием принципа суперпозиции. Сформулировать ее можно следующим образом. Если антенна имеет амплитудно-фазовое распределение  $F(s)$ , равное сумме двух функций  $A(s)$  и  $B(s)$ , то характеристика направленности ее равна сумме характеристик направленности антенны при распределении  $A(s)$  и  $B(s)$ , домноженных на некоторые коэффициенты, не зависящие от направления в пространстве. Действительно,

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\int_s F(s) e^{-ik\rho u} ds}{\int_s F(s) e^{-ik\rho u_0} ds} = \frac{\int_s A(s) e^{-ik\rho u} ds}{\int_s F(s) e^{-ik\rho u_0} ds} + \frac{\int_s B(s) e^{-ik\rho u} ds}{\int_s F(s) e^{-ik\rho u_0} ds} = \frac{\int_s A(s) e^{-ik\rho u} ds}{\int_s F(s) e^{-ik\rho u_0} ds} D_A(\mathbf{u}) + \frac{\int_s B(s) e^{-ik\rho u} ds}{\int_s F(s) e^{-ik\rho u_0} ds} D_B(\mathbf{u}), \quad (2.64)$$

где

$$D_A(\mathbf{u}) = \frac{\int_s A(s) e^{-ik\rho\mathbf{u}} ds}{\int_s A(s) e^{-ik\rho\mathbf{u}_0} ds}, \quad \text{и} \quad D_B(\mathbf{u}) = \frac{\int_s B(s) e^{-ik\rho\mathbf{u}} ds}{\int_s B(s) e^{-ik\rho\mathbf{u}_0} ds}.$$

Теорему сложения можно применять и тогда, когда на части поверхности антенны  $s$  распределение  $A(s)$  или  $B(s)$  обращается в нуль. Ее бывает удобно использовать, например, когда требуется определить направленность антенны при выходе из строя какой-то группы элементов. Характеристика направленности антенны в этом случае равна разности характеристик направленности исправной антенны и вышедшей из строя группы с некоторыми постоянными коэффициентами.

Поскольку в случае, когда фазовые центры антенны с рассматриваемыми распределениями не совпадают, применение теоремы сложения приводит к необходимости проведения сложных вычислений, практически ею чаще пользуются не для расчетов, а для получения инженерных оценок.

## § 5. Характеристики направленности в полосе частот

Во многих случаях антенна принимает или излучает не монохроматический, а шумовой сигнал, обладающий спектральной плотностью  $I(\omega)$  в некоторой полосе частот от  $\omega_1$  до  $\omega_2$ . При этом также вводится в рассмотрение характеристика направленности антенны, однако определяется она несколько сложнее.

**Общие расчетные соотношения.** Формулу для расчета характеристики направленности антенны в полосе частот  $R_\omega(\mathbf{u})$  можно получить двумя способами: используя характеристику направленности при работе на монохроматическом сигнале и с помощью функций корреляции шумового сигнала.

Определим характеристику направленности антенны в режиме приема в соответствии с формулой (1.61) как отношение напряжений  $u(\mathbf{u})$  и  $u(\mathbf{u}_0)$ , развиваемых на выходе сумматора антенны при расположении источника излучения в направлениях  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_0$ .

Запишем напряжение  $u_q(\mathbf{u}, \omega)$ , развиваемое отдельным элементом антенны на выходе сумматора с учетом коэффициента передачи канала  $h_q$ . Очевидно оно равно произведению

$$u_q(\mathbf{u}, \omega) = \gamma(\omega) |p_0| h_q D_q(\mathbf{u}, \omega), \quad (2.65)$$

где  $\gamma(\omega)$  — чувствительность элемента по полю;  $|p_0|$  — модуль давления, развиваемого источником сигнала в окрестности антенны;  $D_q(\mathbf{u}, \omega)$  — характеристика направленности элемента, записанная относительно общего для всей антенны центра. Поскольку

$$p_0 = -\frac{ikrcQ}{4\pi r} e^{ikr},$$

можно записать

$$u_q(\mathbf{u}, \omega) = \frac{krcQ}{4\pi r} \gamma(\omega) h_q D_q(\mathbf{u}, \omega). \quad (2.66)$$

или, выражая  $|p_0|$  через интенсивность сигнала в окрестности антенны,

$$u_q(\mathbf{u}, \omega) = \sqrt{2I(\omega) \rho c \gamma(\omega)} h_q D_q(\mathbf{u}, \omega).$$

Мы будем предполагать отсутствие влияния взаимодействия преобразователей по полю на распределение колебательных скоростей. Имея в виду в дальнейшем удобство сравнения полученных результатов с параметрами антенны в режиме излучения, запишем вместо  $h_q$  коэффициент возбуждения  $A_q$ . При этом последнее выражение принимает вид

$$u_q(\mathbf{u}, \omega) = \sqrt{2I(\omega) \rho c \gamma(\omega)} A_q D_q(\mathbf{u}, \omega), \quad (2.67)$$

а модуль напряжения на выходе сумматора  $u(\mathbf{u}, \omega)$  равен

$$|u(\mathbf{u}, \omega)| = \sqrt{2I(\omega) \rho c \gamma(\omega)} \left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}, \omega) \right|. \quad (2.68)$$

Отдельные частотные составляющие шумового сигнала некогерентны между собой, поэтому воздействия от них складываются квадратично и можно записать, что

$$|u(\mathbf{u})|^2 = 2\rho c \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma^2(\omega) \left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}, \omega) \right|^2 d\omega. \quad (2.69)$$

Здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно нижняя и верхняя частоты полосы пропускания приемного тракта.

Воспользовавшись выражением (1.61), получим формулу, определяющую модуль характеристики направленности в полосе частот

$$R_\omega(\mathbf{u}) = \frac{u(\mathbf{u})}{u(\mathbf{u}_0)} = \frac{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma^2(\omega) \left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}, \omega) \right|^2 d\omega \right]^{1/2}}{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma^2(\omega) \left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0, \omega) \right|^2 d\omega \right]^{1/2}}. \quad (2.70)$$

В частном случае, когда сумма в знаменателе этой формулы не зависит от частоты (что имеет место, например, для компенсированных антенн, состоящих из ненаправленных элементов), поделив числитель и знаменатель на эту сумму, получим

$$R_\omega(\mathbf{u}) = \frac{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma^2(\omega) R^2(\mathbf{u}, \omega) d\omega \right]^{1/2}}{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}}. \quad (2.71)$$

В двух последних формулах  $\gamma(\omega)$  обозначает чувствительность по полю элемента антенны. Воспользовавшись формулой (1.73) можно перейти от  $\gamma(\omega)$  к чувствительности всей антенны  $\gamma_a(\omega)$  в направлении  $\mathbf{u}_0$  и тогда выражения (2.68) и (2.70) примут вид

$$|u(\mathbf{u}, \omega)| = \sqrt{2I(\omega) \rho c \gamma_a(\omega)} R(\mathbf{u}, \omega), \quad (2.72)$$

и

$$R_{\omega}(\mathbf{u}) = \frac{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma_a^2(\omega) R^2(\mathbf{u}, \omega) d\omega \right]^{1/2}}{\left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma_a^2(\omega) d\omega \right]^{1/2}}, \quad (2.73)$$

где

$$R(\mathbf{u}, \omega) = \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(\mathbf{u}, \omega) \right|}{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(\mathbf{u}_0, \omega) \right|} = \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}, \omega) \right|}{\left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0, \omega) \right|}.$$

Непосредственные вычисления характеристики направленности антенны в полосе частот по формуле (2.73) с помощью численного интегрирования требуют большой затраты времени, особенно при больших волновых размерах антенны и широких полосах частот. Иногда удается существенно упростить вычисления, если вместо  $R(\mathbf{u}, \omega)$  подставить соответствующее выражение, содержащее сумму в случае дискретной антенны, или интеграл в случае поверхностной антенны, возвести его в квадрат и поменять местами суммирование (интегрирование) по поверхности антенны и интегрирование по частоте. Так, для дискретной антенны, проделав указанные преобразования, имеем:

$$R_{\omega}^2(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_q A_g^* I(\omega) \gamma_a^2(\omega) \frac{D_q(\mathbf{u}, \omega) D_g^*(\mathbf{u}, \omega)}{\left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0, \omega) \right|^2} d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} I(\omega) \gamma_a^2(\omega) d\omega}. \quad (2.74)$$

Следуя работам [10] и [20], формулу для расчета характеристики направленности антенны в полосе частот можно получить другим способом, позволяющим глубже уяснить ее физический смысл.

**Определение характеристики направленности через функции корреляции.** Как уже отмечалось выше [см. формулу (1.78)], мощность стационарного процесса на выходе антенны можно определить как двойную сумму от функций пространственно-временной корреляции процессов в отдельных каналах антенны. В соответствии с этим можно записать

$$R_{\omega}^2(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}(\mathbf{u})}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}(\mathbf{u}_0)}, \quad (2.75)$$

где  $K_{qg}(\mathbf{u})$  и  $K_{qg}(\mathbf{u}_0)$  — функции пространственно-временной корреляции процессов в каналах с номерами  $q$  и  $g$  при расположении источника сигнала соответственно в направлениях  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_0$ .



Найдем функции  $K_{gg}(\mathbf{u})$  и  $K_{qg}(\mathbf{u}_0)$  как математическое ожидание произведения процессов на выходе каналов  $q$  и  $g$ . Как известно (см., например, работу [32]) стационарный случайный процесс может быть записан в виде интеграла Стилтеса:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\Phi(\omega), \quad (2.76)$$

который отличается от обычного интеграла Римана тем, что под знаком интеграла стоит не приращение аргумента  $d\omega$ , а приращение некоторой функции  $d\Phi(\omega)$ , зависящей от  $\omega$ . Функция  $\Phi(\omega)$  — случайная функция и ее приращения при различных  $\omega$  независимы друг от друга. Поэтому она не имеет производной и перейти от  $d\Phi(\omega)$  к  $d\omega$ , т. е. от интеграла Стилтеса к обычному интегралу, не представляется возможным. Независимость приращений при различных  $\omega$  приводит к тому, что корреляция между  $d\Phi(\omega)$  и  $d\Phi(\omega')$  при  $\omega \neq \omega'$  равна нулю, т. е. выполняется условие  $M[d\Phi(\omega)d\Phi^*(\omega')] = 0$ . При  $\omega = \omega'$  эта величина, очевидно, пропорциональна  $N(\omega)$  — спектральной плотности на частоте  $\omega$ . Принимая во внимание эти соображения, можно записать

$$M[d\Phi(\omega)d\Phi^*(\omega')] = N(\omega)\delta(\omega - \omega')d\omega d\omega', \quad (2.77)$$

где  $\delta(\omega - \omega')$  — дельта-функция Дирака, обладающая известным свойством

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x')dx = \begin{cases} f(x') & \text{при } a \neq x' \neq b; \\ \frac{1}{2}f(x') & \text{при } x' = a \text{ или } x' = b. \end{cases} \quad (2.78)$$

Вычисляя мощность процесса  $x(t)$ , легко убедиться в правильности выражения (2.77). Действительно,

$$\begin{aligned} D[x(t)] &= M[x(t)x^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega')t} M[d\Phi(\omega)d\Phi^*(\omega')] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)d\omega, \end{aligned}$$

т. е. мощность процесса равна интегралу от его спектральной плотности.

Случайный процесс на входе сумматора в канале с номером  $q$  в соответствии с формулами (2.67) и (2.76) можно записать так:

$$x_q = \sqrt{2\rho c} \int_{-\infty}^{\infty} A_q \gamma(\omega) D_q(\mathbf{u}, \omega) d\Phi(\omega), \quad (2.79)$$

причем

$$M[d\Phi(\omega)d\Phi^*(\omega')] = I(\omega)\delta(\omega - \omega')d\omega d\omega', \quad (2.80)$$

а формирование рабочей полосы учитывается тем, что  $A_q$  считается вне интервала  $(\omega_1, \omega_2)$  равным нулю (впрочем, отсюда видно, что можно просто заменить пределы интегрирования  $-\infty$  и  $+\infty$  на  $\omega_1$  и  $\omega_2$ ).

Теперь уже легко найти и функцию пространственно-временной корреляции

$$\begin{aligned}
 K_{qg}(\mathbf{u}) &= M [x_q x_g^*] \Rightarrow \\
 &= 2\rho c M \left[ \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_q A_g^* \gamma(\omega) \gamma(\omega') D_q(\mathbf{u}, \omega) D_g^*(\mathbf{u}, \omega') d\Phi(\omega) d\Phi(\omega') = \right. \\
 &= \left. 2\rho c \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_q A_g^* \gamma^2(\omega) I(\omega) D_q(\mathbf{u}, \omega) D_g^*(\mathbf{u}, \omega) d\omega \right], \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

которую, переходя с помощью формулы (1.73) к чувствительности всей антенны, можно записать и так:

$$K_{qg}(\mathbf{u}) = 2\rho c \int_{\omega_1}^{\omega_2} A_q A_g^* \gamma_a^2(\omega) \frac{D_q(\mathbf{u}, \omega) D_g^*(\mathbf{u}, \omega) I(\omega)}{\left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0, \omega) \right|^2} d\omega. \quad (2.82)$$

Подставляя это выражение для направлений  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{u}_0$  в формулу (2.75), мы получим формулу (2.74).

В результате проделанного вывода становится ясно, что интегралы по  $\omega$  в числителе формулы (2.74) пропорциональны функции пространственно-временной корреляции напряжений в отдельных каналах антенны при падении на нее плоской волны.

**Характеристики направленности некоторых антенн в полосе частот.** В качестве примера использования формулы (2.74) для вычисления характеристик направленности в полосе частот, рассмотрим антенну, состоящую из ненаправленных элементов, при произведении  $I(\omega)\gamma^2(\omega)$ , не зависящем от частоты и равном  $b$ .

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным при выводе формулы (2.44), легко показать, что для ненаправленных элементов  $D_q(\mathbf{u}) = e^{-ik\rho_q u}$ , и так как  $A_q$  для осуществления компенсации антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$  следует выбрать равным  $a_q e^{ik\rho_q u_0}$ , по формуле (2.82) имеем

$$\begin{aligned}
 K_{qg}(\mathbf{u}) &= \frac{2\rho c b a_q a_g}{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-ik(\rho_q - \rho_g)(u - u_0)} d\omega = \\
 &= \frac{2\rho c^2 b a_q a_g}{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2 B} [e^{-ik_2 B} - e^{-ik_1 B}], \quad (2.83)
 \end{aligned}$$

где  $B = (\rho_q - \rho_g)(u - u_0)$ ;  $k_2 = \omega_2/c$ ,  $k_1 = \omega_1/c$ . Подставляя это выражение в формулу (2.75), и произведя преобразования, получим

$$R_{\omega}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2} \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g \cos\left(B \frac{k_2 + k_1}{2}\right) \frac{\sin\left(B \frac{k_2 - k_1}{2}\right)}{B \frac{k_2 - k_1}{2}}. \quad (2.84)$$

При некоторых простых расположениях ненаправленных элементов в антенне двойную сумму по элементам можно заменить одинарной. Так, например, в случае эквидистантной решетки с расстоянием между элементами, равном  $d$  и при  $a_q = 1$ , формула (2.84) преобразуется к следующему виду:

$$R_{\omega}^2(\alpha) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_s (n-s) \cos\left(B \frac{k_2 + k_1}{2}\right) \frac{\sin\left(B \frac{k_2 - k_1}{2}\right)}{B \frac{k_2 - k_1}{2}}, \quad (2.85)$$

где  $B = sd(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$ ;  $\alpha$  — угол, отсчитываемый от перпендикуляра к антенне;  $\varepsilon_s = 1$  при  $s=0$ ,  $\varepsilon_s = 2$  при  $s > 0$ .

Как уже указывалось, таким же способом удастся получить сравнительно простые формулы и для некоторых непрерывных антенн; так, например, в случае антенны, представляющей собой отрезок прямой, можно получить для  $I(\omega) \gamma_a^2(\omega) = b$

$$R_{\omega}^2(z) = \frac{1}{2z(\beta - 1)} \left\{ \frac{\cos 2\beta z - 1}{\beta z} - \frac{\cos 2z - 1}{z} + 2 \text{Si}(2\beta z) - 2 \text{Si}(2z) \right\}, \quad (2.86)$$

и для  $I(\omega) \gamma_a^2(\omega) = b \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$  ( $\omega_0$  — некоторая фиксированная частота)

$$R_{\omega}^2(z) = \frac{\beta z}{6(\beta - 1)} \left\{ \frac{2 \sin^2 z}{z^3} - \frac{2 \sin^2 \beta z}{\beta^3 z^3} + \frac{\sin 2z}{z^2} - \frac{\sin 2\beta z}{\beta^2 z^2} + \frac{2 \cos 2z}{z} - \frac{2 \cos 2\beta z}{\beta z} + 4 \text{Si}(2z) - 4 \text{Si}(2\beta z) \right\}. \quad (2.87)$$

В этих формулах обозначено:  $z = \frac{k_1 l}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$ ;  $l$  — длина отрезка;  $\beta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ;  $\text{Si}(x)$  — интегральный синус от  $x$ , определяемый соотношением

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

На рис. 8 представлены рассчитанные по этим формулам участки характеристик направленности вблизи главного максимума и меньшие уровни  $R_{\omega}(z) = 0,2$ . Характеристики направленности в полосе частот не имеют нулей, при больших относительных полосах отсутствуют четко выраженные добавочные максимумы, и уровень характеристики направленности вне главного максимума монотонно уменьшается с ростом  $z$ . Эти особенности характеристик направленности в полосе частот являются общими для многих типов антенн.

**Приближенное определение некоторых параметров характеристики направленности.** Во многих случаях расчет характеристики направленности  $R_{\omega}(u)$  сложен, но в то же время практически бывает достаточно ограничиться определением некоторых ее параметров. Рассмотрим в связи с этим приближенный расчет ширины характеристики на-

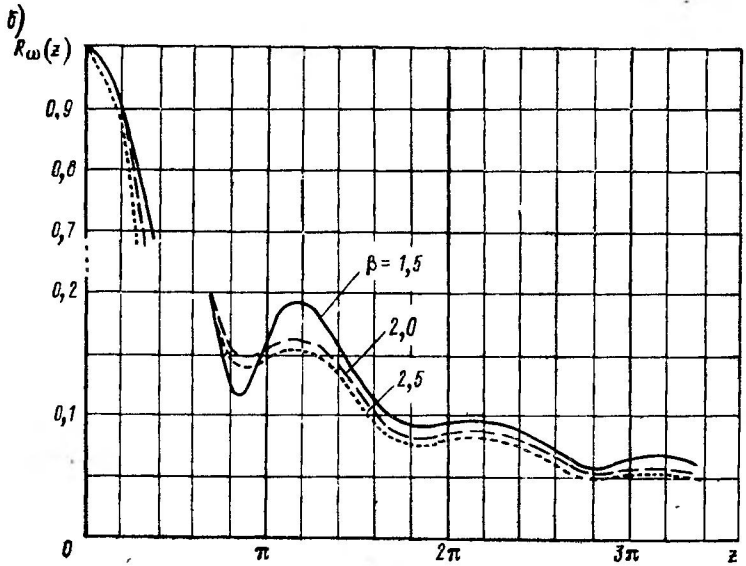
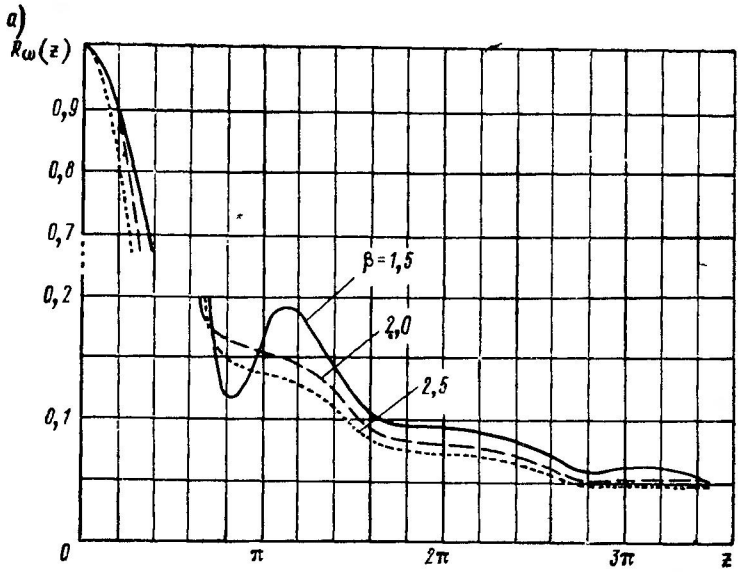


Рис. 8. Зависимость  $R_{\omega}(z)$  от  $z$  в случаях

$$a - I(\omega) \gamma_a(\omega) = b; \quad б - I(\omega) \gamma_a(\omega) = b \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

правленности на уровне 0,707 и величины характеристики направленности вне основного максимума.

Сущность приближенного расчета ширины характеристики направленности состоит в следующем. В предположении больших волновых размеров антенны, разлагая в ряды по степеням малого параметра в формуле, определяющей характеристику направленности антенны, выражение в показателе экспоненты и саму экспоненциальную функцию, стоящую под интегралом (или под знаком суммы), удастся получить приближенное выражение для  $R_\omega(\alpha)$ , справедливое вблизи направления главного максимума. Подставляя это выражение в формулу (2.73), можно произвести интегрирование по частоте и далее приближенно определить ширину характеристики направленности.

В результате таких преобразований для случая, например, линейной непрерывной антенны при отсутствии компенсации можно получить

$$R_\omega^2(\alpha) = 1 - \alpha^2 \frac{\int_x x^2 a(x) dx}{\int_x a(x) dx} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} k^2 \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}. \quad (2.88)$$

При угле характеристики направленности, равном на уровне 0,707 ее полуширине,  $R_\omega^2(\alpha_{0,7}) = 0,5$ , поэтому второе слагаемое выражения (2.86) равно 0,5 и справедливо соотношение

$$\alpha_{0,7} = \sqrt{0,5 \frac{\int_x a(x) dx}{\int_x x^2 a(x) dx} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} k^2 \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}}. \quad (2.89)$$

Следует иметь в виду, что использование этой и аналогичным образом полученных формул для приближенного определения  $\alpha_{0,7}$  при полосе, большей октавы, может привести к существенной ошибке. Связано это с тем, что исходное приближенное выражение для  $R(\alpha)$  справедливо только при  $\alpha$ , не превышающих полуширину характеристики направленности  $\alpha'$  по ее первым нулям, и при широких полосах значение  $\alpha_{0,7}$  характеристики  $R_\omega(\alpha)$  может быть больше величины  $\alpha'$  на верхних частотах полосы.

Практически часто бывает удобно ввести в рассмотрение эквивалентную частоту, т. е. такую частоту, на которой ширина характеристики направленности рассматриваемой антенны совпадает с ее шириной в полосе частот при заданном спектре. Обозначим эту частоту символом  $\omega_3$  и определим ширину характеристики направленности на частоте  $\omega_3$  по формуле (2.89), считая, что  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = \delta(\omega_3)$ ,

где  $\delta(\omega_0)$  — дельта-функция Дирака

$$\alpha_{0,7} = \sqrt{k \frac{\int_x a(x) dx}{\int_x x^2 a(x) dx} \frac{l}{k_0^2}}$$

Сравнивая это выражение с формулой (2.89), имеем

$$k_0 = \sqrt{\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} k^2 \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}} \quad (2.90)$$

или

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega^2 \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}} \quad (2.91)$$

В частных случаях при  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b$  (где  $b$  не зависит от  $\omega$ )

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_2^3 - \omega_1^3}{3(\omega_2 - \omega_1)}};$$

и при  $\gamma_0^2(\omega) I(\omega) = b \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}.$$

Рассмотрим приближенный способ оценки уровня характеристики направленности в полосе частот вне основного лепестка. Во многих случаях характеристика направленности антенны на фиксированной частоте может рассматриваться как произведение двух функций, одна из которых осциллирует, а другая — огибающая — меняется медленно. Так например, в случае антенны, имеющей конфигурацию отрезка прямой, при равномерном амплитудном распределении характеристику направленности можно представить как произведение функций  $\sin \left[ \frac{kl}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]$  и  $\left[ \frac{kl}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]^{-1}$ . Максимальное значение осциллирующей функции равно единице, и ее влияние на характеристику направленности сводится к уменьшению уровня в соответствующих направлениях, поэтому заменив осциллирующую функцию единицей, мы получим завышенное значение величины характеристики направленности как при работе на фиксированной частоте, так и в полосе частот. Подставляя в формулу (2.73) вместо характеристики на-

правленности  $R(\mathbf{u}, \omega)$  ее огибающую  $\left[\frac{kl}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha_0)\right]^{-1}$ , получим

$$R_{\omega}^2(\alpha) \leq \frac{4c^2}{l^2(\sin \alpha - \sin \alpha_0)} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{\gamma_a^2(\omega) I(\omega)}{\omega^2} d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}. \quad (2.92)$$

В частном случае при  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b$

$$R_{\omega}(z) \leq \frac{1}{z\sqrt{\beta}}, \quad (2.93)$$

и при  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$

$$R_{\omega}(z) \leq \frac{1}{z\beta} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\beta - 1}}, \quad (2.94)$$

где  $z = \frac{kl}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha_0)$ ;  $\beta = \omega_2/\omega_1$ .

Полученную оценку величины уровня характеристики направленности отрезка можно уточнить следующим образом. С помощью теоремы о среднем интеграл от произведения двух функций можно представить произведением интеграла от одной функции на значение второй функции в некоторой точке внутри промежутка интегрирования. Поэтому можно записать

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) \sin^2 \left[ \frac{kl}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right] \left[ \frac{kl}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]^{-2} d\omega = \\ & = \gamma_a^2(\omega_0) I(\omega_0) \left[ \frac{\omega_0 l}{2c}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]^{-2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2 \left[ \frac{kl}{2}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right] d\omega. \end{aligned}$$

В качестве среднего значения  $\omega_0$  выберем такое, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} & \gamma_a^2(\omega_0) I(\omega_0) \left[ \frac{\omega_0 l}{2c}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]^{-2} = \\ & = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) \left[ \frac{\omega l}{2c}(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]^{-2} d\omega. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в формулу (2.73) и вычисляя один из интегралов по  $\omega$ , получим выражение

$$R_{\omega}(z) = \frac{ck_1}{z} L(z) \sqrt{\frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) \frac{I(\omega)}{\omega^2} d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}}, \quad (2.95)$$

где  $L(z) = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos [z(\beta + 1)] \frac{\sin [z(\beta - 1)]}{z(\beta - 1)} \right\}^{1/2}$ .

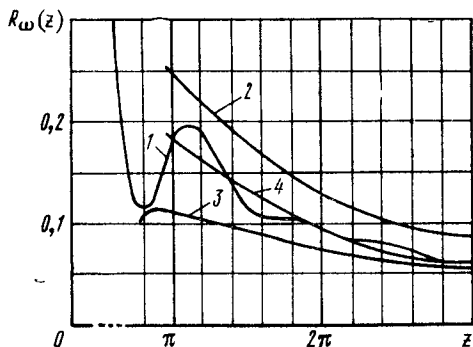
В частных случаях  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b$  и  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ , имеем соответственно

$$R_\omega(z) = \frac{1}{z \sqrt{\beta}} L(z), \quad (2.96)$$

и

$$R_\omega(z) = \frac{1}{z\beta} \sqrt{\frac{\beta^3 - 1}{3(\beta - 1)}} L(z). \quad (2.97)$$

Из выражения для  $L(z)$  видно, что его величина осциллирует около значения  $\sqrt{0,5}$ , поэтому, полагая в последних формулах  $L(z) =$



$= \sqrt{0,5}$ , можно получить некоторую среднюю величину  $R'_\omega(z)$ , к которой  $R_\omega(z)$  приближается с ростом  $z$  и  $\beta$  [поскольку при этом стремится к нулю последний множитель выражения для

Рис. 9. Характеристика направленности, рассчитанная приближенным способом (1), а также ее верхняя (2) и нижняя (3) оценки и средняя величина (4).

$L(z)$ ]. Полагая же произведение  $\cos [z(\beta + 1)] \sin [z(\beta - 1)]$  равным единице, можно получить нижнюю оценку для  $R_\omega(z)$ .

На рис. 9 представлена характеристика направленности непрерывной линейной антенны, рассчитанная по приближенной формуле (2.96) при  $\gamma_a^2(\omega) I(\omega) = b$ ,  $\beta = 1,5$ , а также ее нижняя и верхняя оценки и среднее значение, вокруг которого осциллирует  $R_\omega(z)$ .

Сравнение графиков рис. 9 и 8а показывает, что результаты расчетов по приближенной формуле (2.96) и точной формуле (2.86) практически совпадают. При относительных полосах, больших октавы, когда  $R_\omega(z)$  не имеет четко выраженных максимумов, во многих случаях вообще можно ограничиться верхней оценкой, что весьма существенно уменьшает трудоемкость расчетов.

Совершенно аналогично можно получить приближенную формулу для определения  $R_\omega(\mathbf{u})$  произвольной антенны, если только ее характеристика направленности на фиксированной частоте может быть представлена в виде произведения некоторой осциллирующей функции  $R_1(\omega, \mathbf{u})$  на плавно меняющуюся функцию  $R_2(\omega, \mathbf{u})$ . При этом оказывается, что справедливо приближенное равенство

$$R_\omega^2(\mathbf{u}) = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} R_1^2(\omega, \mathbf{u}) d\omega}{\omega_2 - \omega_1} \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) R_2^2(\omega, \mathbf{u}) d\omega}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} \gamma_a^2(\omega) I(\omega) d\omega}. \quad (2.98)$$



В случае, если максимальное значение  $R_1(\omega, \mathbf{u})$  равно единице, второй сомножитель формулы (2.98) представляет собой заведомо завышенное значение  $R_\omega^2(\mathbf{u})$ .

## ГЛАВА 3

### ОБЩИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗЛУЧАЕМОЙ МОЩНОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ И ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ АНТЕНН

#### § 6. Определение излучаемой мощности и коэффициента концентрации через сопротивление излучения антенны

Выше уже отмечалось, что существуют два основных метода расчета мощности, излучаемой антенной: через дальнее и ближнее поля. В первом из них активная мощность определяется интегрированием по поверхности сферы большого радиуса [формула (1.27)], во втором полная мощность находится с помощью интегрирования по поверхности антенны [формула (1.10)]. Найдя мощность, излучаемую антенной, легко перейти и к другим параметрам: сопротивлению излучения и коэффициенту концентрации.

**Некоторые замечания о сопротивлении излучения.** Обычно принято характеризовать излучающую способность колеблющегося тела с помощью сопротивления излучения, определяемого как отношение удвоенной излучаемой мощности к квадрату амплитуды колебательной скорости.

Однако полезно иметь в виду, что выражать излучаемую мощность через сопротивление излучения удобно только в тех случаях, когда колебательная скорость поверхности антенны либо известна, либо может быть сравнительно легко определена. Если рассматривается задача об излучении, причем колебательная скорость считается заданной (как, например, в классических задачах об излучении сферического, цилиндрического и других источников), то вполне оправдано исследование зависимости сопротивления излучения от различных параметров излучателя и частоты.

Если же рассматривается задача об излучении некоторой колебательной многорезонансной системы и заданной является механическая сила, возбуждающая колебания, соответствующие какой-то моде, а условия излучения таковы, что при изменении каких-либо параметров происходит перераспределение подводимой к излучателю энергии между модами, то в этом случае вряд ли удобно вводить в рассмотрение сопротивление излучения. Действительно, можно найти зависимость сопротивления излучения, например, от расстояния между излучателем и каким-то экраном, но с изменением этого расстояния может меняться и колебательная скорость. Таким образом, расчленив изучаемую величину — излучаемую мощность — на две: на сопротивление излучения и колебательную скорость, — мы не упростили, а усложнили решение задачи. В этом

случае, очевидно, более удобно было бы рассматривать не сопротивление излучения, а отношение излучаемой мощности к квадрату действующей силы, помноженное на некоторый постоянный коэффициент. Если же рассматривается излучатель, на поверхности которого задано давление, то пользоваться понятием о сопротивлении излучения вообще не удобно, и следует ввести в рассмотрение проводимость излучения, равную удвоенной мощности, отнесенной к квадрату модуля давления.

При расчете сложных многоэлементных антенн, когда приходится учитывать влияние на излучаемую мощность коэффициентов возбуждения отдельных элементов, удобно пользоваться понятием о вносимых и взаимных сопротивлениях излучения элементов антенны. Соответствующие формулы для определения взаимных сопротивлений излучения, а также их связь с сопротивлением излучения всей антенны, излучаемой мощностью и коэффициентом концентрации были приведены выше, и повторять мы их не будем. Отметим только, что существует связь между активной и реактивной составляющими комплексного сопротивления (см. [28] и [6])

$$r(\omega_0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega x(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega, \quad (3.1)$$

$$x(\omega_0) = \frac{2\omega_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega, \quad (3.2)$$

пользуясь которой можно найти активное (реактивное) сопротивление излучения на некоторой частоте  $\omega_0$ , если известна зависимость реактивного (активного) сопротивления излучения от частоты.

К сожалению, во многих практически интересных случаях вычисление интегралов в выражениях (3.1) и (3.2) представляет большие трудности.

**Пренебрежение взаимодействием элементов антенны.** В гл. 1 мы уже отмечали, что во многих случаях расчет параметров антенны производится без учета влияния взаимодействия элементов по полю. При этом имелось в виду, что колебательные скорости преобразователей при малом взаимодействии пропорциональны подводимым к ним напряжениям (применительно к режиму излучения) или что колебательные скорости определяются только падающей на преобразователь волной и не зависят от того, колеблются или заторможены остальные (применительно к режиму приема).

Однако взаимодействием преобразователей по полю часто пренебрегают не только при расчете колебательных скоростей, но и при определении активного сопротивления излучения антенны, а соответственно и излучаемой мощности и коэффициента концентрации. В связи с этим при кратком описании расчета, выполненного без учета взаимодействия элементов по полю, следует указывать, при расчете какого именно параметра допущено это приближение.

В случае, когда выполняется неравенство

$$\sum_{q=1}^n |A_q|^2 r_{qq} \gg \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq g}}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* r_{qg}, \quad (3.3)$$

т. е. когда сумма собственных активных сопротивлений излучения элементов антенны существенно превосходит сумму взаимных, формулы (1.23) и (1.39) принимают вид

$$r_s = \sum_{q=1}^n |A_q|^2 r_{qq} \quad (3.4)$$

и

$$K = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0) \right|^2}{\sum_{q=1}^n |A_q|^2 r_{qq}}. \quad (3.5)$$

Расчет  $r_s$  и  $K$  по этим формулам существенно упрощается, однако следует иметь в виду, что неравенство (3.3) справедливо не всегда и пользоваться формулами (3.4) и (3.5) следует только в тех случаях, когда имеются достаточные основания для пренебрежения взаимодействием элементов.

С помощью выражений (3.4) и (3.5) можно получить некоторые выводы, которые приближенно справедливы и при наличии слабого взаимодействия. Так, из формулы (3.4) видно, что активное сопротивление излучения, а следовательно, и мощность, излучаемая антенной, состоящей из независимых элементов, не зависит от фазового распределения, а зависит только от амплитудного.

Активное сопротивление излучения элемента может быть выражено через его коэффициент концентрации с помощью формулы (1.38):

$$r_{qq} = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{|p'_s r|^2}{K_s}, \quad (3.6)$$

где  $K_s$  — коэффициент концентрации элемента в направлении максимума его характеристики направленности;  $p'_s$  — давление, развиваемое элементом в этом же направлении, отнесенное к его колебательной скорости.

Давление, развиваемое элементом с номером  $q$  в направлении максимума характеристики направленности всей антенны, связано с  $p'_s$  очевидным соотношением

$$p'_q(u_0) = p'_s D_q(u_0). \quad (3.7)$$

В формуле (3.5) давления, развиваемые отдельными элементами антенны  $p'_q(u_0)$ , записаны относительно общего фазового центра. Пе-

реходя к записи относительно центра элемента и подставляя в формулу (3.5) выражения (3.6) и (3.7), получим

$$K = K_0 \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0} \right|^2}{\sum_{q=1}^n |A_q|^2}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим, при каких возбуждениях элементов коэффициент концентрации антенны при отсутствии взаимодействия элементов максимален. Из последней формулы видно, что независимо от амплитудного распределения коэффициент концентрации имеет наибольшую величину при компенсации антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$ , т. е. тогда, когда фаза возбуждения (в предположении, что  $D_q(\mathbf{u}_0)$  — вещественная функция)  $\alpha_q = k\rho_q \mathbf{u}_0$  и слагаемые числителя складываются арифметически, а не геометрически. Если характеристика направленности элемента величина комплексная, то наибольшая величина  $K$  также достигается при компенсации в направлении  $\mathbf{u}_0$ , но при этом  $\alpha_q$  будет записываться несколько иначе (см. формулу (1.2):

$$\alpha_q = k\rho_q \mathbf{u}_0 - \arg D_q(\mathbf{u}_0). \quad (3.9)$$

При полной компенсации антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$  формула (3.8) принимает вид

$$K = K_0 \frac{\left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right]^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2}. \quad (3.10)$$

Найдем теперь амплитудное распределение, обеспечивающее максимум  $K$ . Для этого вычислим производную от  $K$  по какому-то из коэффициентов  $a_q$  и приравняем ее нулю

$$\frac{\partial K}{\partial a_s} = K_0 \frac{2 \left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right] R_s(\mathbf{u}_0) \sum_{q=1}^n a_q - 2a_s \left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right]^2}{\left( \sum_{q=1}^n a_q \right)^2} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, получим

$$a_s = R_s(\mathbf{u}_0) \frac{\sum_{q=1}^n a_q}{\sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0)}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Дробь в правой части этого выражения не зависит от  $s$ , и так как нам достаточно найти оптимальное распределение с точностью до постоянного множителя, то можно записать

$$a_s = c_1 R_s(\mathbf{u}_0), \quad s = \overline{1, n}, \quad (3.11)$$

где  $c_1$  — некоторая постоянная.

Для доказательства того, что мы получили распределение, при котором  $K$  принимает максимальное, а не минимальное значение, поступим следующим образом. Рассмотрим разность между коэффициентами концентрации при распределении (3.11) и каком-то другом распределении

$$K_{\text{опт}} - K = K_3 \left\{ \sum_{q=1}^n R_q^2(\mathbf{u}_0) - \frac{\left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right]^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2} \right\} =$$

$$= K_3 \frac{\sum_{q=1}^n R_q^2(\mathbf{u}_0) \sum_{q=1}^n a_q^2 - \left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right]^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2}.$$

В соответствии с неравенством Коши—Буняковского  $\sum_{q=1}^n R_q^2(\mathbf{u}_0) \times \sum_{q=1}^n a_q^2 \geq \left[ \sum_{q=1}^n a_q R_q(\mathbf{u}_0) \right]^2$  и записанное выше выражение всегда положительно, следовательно,  $K_{\text{опт}} > K$  и найденное амплитудное распределение (3.11) действительно обеспечивает максимум коэффициента концентрации антенны, состоящей из независимых элементов.

Вообще говоря, убедиться в том, что найденное распределение соответствует именно максимальному, а не минимальному значению коэффициента концентрации, можно и на основании физических представлений. Независимые по полю элементы антенны при равномерном амплитудном распределении излучают одинаковую мощность. Если какой-то элемент антенны развернут так, что направление максимума характеристики направленности всей антенны  $\mathbf{u}_0$  соответствует малому уровню его характеристики направленности  $R_q(\mathbf{u}_0)$ , то присутствие этого элемента увеличивает излучаемую мощность, так же как и присутствие любого другого элемента, но незначительно увеличивает интенсивность сигнала в направлении  $\mathbf{u}_0$ .

Поскольку максимум коэффициента концентрации, очевидно, соответствует максимальной интенсивности в направлении  $\mathbf{u}_0$  при минимальной мощности, излучаемой всей антенной, то ясно, что амплитуду возбуждения рассматриваемого элемента для увеличения  $K$  следует уменьшать, а не увеличивать. В частности, если для какого-то элемента  $R_q(\mathbf{u}_0) = 0$ , то этот элемент не вносит вклада в увеличение интенсивности в направлении  $\mathbf{u}_0$ , но увеличивает общую мощность, излучаемую антенной, и поэтому его следует отключить или, что то же самое, возбудить с нулевой амплитудой.

Итак, максимум коэффициента концентрации антенны при отсутствии взаимодействия ее элементов по полю достигается при полной фазовой компенсации антенны в направлении максимума характеристики направленности антенны  $\mathbf{u}_0$  и амплитудном распределении, пропор-

циональном величине характеристики направленности элемента в направлении  $\mathbf{u}_0$ , т. е.

$$A_q = D_q^*(\mathbf{u}_0) e^{ik\rho_q \mathbf{u}_0}. \quad (3.12)$$

При оптимальном распределении, подставляя формулу (3.12) в выражение (3.8), имеем

$$K = K_3 \sum_{q=1}^n R_q^2(\mathbf{u}_0), \quad (3.13)$$

откуда следует, что при заданном количестве элементов в антенне наибольшую концентрацию обеспечивает плоская антенна, когда  $R_q(\mathbf{u}_0) = 1$  для всех  $q$ .

В выражении (3.13)  $K_3$  обозначает коэффициент концентрации элемента в направлении максимума его характеристики направленности. Введем в рассмотрение  $K_q(\mathbf{u}_0)$  — коэффициент концентрации элемента в направлении максимума характеристики направленности всей антенны  $\mathbf{u}_0$ . В соответствии с формулой (1.40) он равен произведению коэффициента концентрации элемента в направлении его максимального излучения (в наших обозначениях  $K_3$ ) на квадрат характеристики направленности в направлении  $\mathbf{u}_0$ , т. е.  $K_q(\mathbf{u}_0) = K_3 R_q^2(\mathbf{u}_0)$ . Поэтому максимальное значение  $K$  определяется через коэффициенты концентрации отдельных излучателей в направлении  $\mathbf{u}_0$  следующим образом.

$$K = \sum_{q=1}^n K_q(\mathbf{u}_0). \quad (3.14)$$

Пусть антенна состоит из элементов двух видов. Элементы первого вида развивают в направлении максимума своей характеристики направленности давление  $p_{3I}$ , обладают коэффициентом концентрации  $K_{3I}$  и сопротивлением излучения  $r_I$ ; всего в антенне их  $n$ . Элементов второго вида в антенне  $m$  и их параметры мы обозначим аналогично параметрам элементов первого вида, но заменим индекс  $I$  на  $II$ .

Коэффициент концентрации рассматриваемой антенны может быть записан следующим образом:

$$K = \frac{4\pi r^2}{\rho c} \frac{\left| p'_{3I} \sum_{q=1}^n A_q D_q(\mathbf{u}_0) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0} + p'_{3II} \sum_{g=1}^m A_g D_g(\mathbf{u}_0) e^{-ik\rho_g \mathbf{u}_0} \right|^2}{r_I \sum_{q=1}^n |A_q|^2 + r_{II} \sum_{g=1}^m |A_g|^2}. \quad (3.15)$$

Очевидно, что фазовое распределение, максимизирующее коэффициент концентрации антенны, как и в предыдущем случае, должно обеспечивать ее компенсацию в направлении  $\mathbf{u}_0$ . При таком фазовом распределении коэффициент концентрации антенны равен

$$K = K_{\text{эл}} \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q R_q(u_0) + \alpha \sum_{g=1}^m a_g R_g(u_0) \right|^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2 + \beta \sum_{g=1}^m a_g^2}, \quad (3.16)$$

где  $\alpha = \frac{r'_{\text{эл}}}{r'_{\text{эл}}}$ ;  $\beta = \frac{r_{\text{II}}}{r_{\text{I}}}$ .

Как и ранее, вычисляя производные и приравнявая их нулю, имеем для преобразователей первого вида

$$a_s = R_s(u_0), \quad s = \overline{1, n},$$

и для преобразователей второго вида

$$a_s = \frac{\alpha}{\beta} R_s(u_0), \quad s = \overline{1, m}.$$

Таким образом, оптимальные коэффициенты возбуждения для преобразователей первого и второго вида равны соответственно

$$A_q = D_q^*(u_0) e^{ik\rho_q u_0} \quad (3.17)$$

и

$$A_g = \frac{\alpha}{\beta} D_g^*(u_0) e^{ik\rho_g u_0}. \quad (3.18)$$

Подставляя эти выражения в формулу (3.15) и переходя к коэффициенту концентрации элемента в направлении  $u_0$ , получим

$$K_{\text{опт}} = \sum_{q=1}^n K_q(u_0) + \sum_{g=1}^m K_g(u_0), \quad (3.19)$$

откуда следует, что и в случае антенны, состоящей из различных преобразователей, коэффициент ее концентрации при оптимальном распределении равен сумме коэффициентов концентрации элементов в направлении главного максимума характеристики направленности всей антенны  $u_0$ .

## § 7. Определение сопротивления излучения и коэффициента концентрации антенны через характеристику направленности

Если поле, создаваемое антенной, и ее характеристика направленности известны, то с помощью формул (1.27) и (1.36) можно найти мощность, излучаемую антенной, и ее коэффициент концентрации. Однако во многих случаях вычисление интеграла от квадрата модуля характеристики направленности представляет собой весьма сложную задачу даже при использовании современной вычислительной техники. Поэтому в настоящее время разработано большое количество различных приближенных методов. В этом параграфе мы рассмотрим те из них, которые наиболее широко применяются на практике и являются наиболее общими. Изложение будет вестись в основном применительно к определению коэффициента концентрации.

**Графическое интегрирование.** Одним из наиболее практически распространенных является метод определения коэффициента концентрации с помощью графического интегрирования ([44], [59], [55]).

Рассмотрим вначале случай осесимметричной характеристики направленности. Направим вдоль оси симметрии характеристики направленности ось  $z$  сферической системы координат. Тогда характеристика направленности будет зависеть только от одной пространственной координаты  $\theta$  и в соответствии с формулой (1.36), учитывая, что в сферической системе координат  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ , получим

$$K = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{2}{\int_0^\pi R^2(\theta) \sin \theta d\theta}. \quad (3.20)$$

Введем замену переменных  $t = 1 - \cos \theta$ , при этом  $dt = \sin \theta d\theta$  и интеграл в знаменателе выражения (3.20) запишется следующим образом:

$$I = \int_0^2 R^2(t) dt. \quad (3.21)$$

Этот интеграл легко вычислить графически, если по оси абсцисс декартовой системы координат отложить  $t$ , а по оси ординат  $R^2(t)$ . Однако можно поступить иначе: по оси абсцисс отложить не  $t$ , а  $\theta$ , имея в виду, что  $\cos \theta = 1 - t$ , а по оси ординат не  $R^2(t)$ , а  $R(\theta)$ . При этом масштаб по обеим осям будет неравномерный, но зато отпадает необходимость пересчета от  $\theta$  к  $t$  и от  $R(\theta)$  к  $R^2(t)$ . Соответствующая координатная сетка предложена в работе [59]. На рис. 10 показана половина этой сетки в пределах изменения  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ . Часть сетки от  $\pi/2$  до  $\pi$  симметрична построенной относительно оси  $\theta = \pi/2$ . Для определения коэффициента концентрации характеристику направленности наносят на такую сетку и затем определяют площадь под кривой. Величина коэффициента концентрации находится как отношение полной площади бланка к площади под кривой.

Так можно поступить тогда, когда характеристика направленности симметрична относительно оси. Однако иногда графическое интегрирование используется для определения коэффициента концентрации по экспериментальной характеристике направленности, а эта характеристика определяется не от 0 до  $\pi$ , а от  $-\pi$  до  $+\pi$  и даже при симметричной антенне может быть несколько несимметричной. В этом случае обычно используется несколько измененная координатная сетка.

Пределы интегрирования в выражении (3.20) можно записать иначе, а именно:

$$K = \frac{4\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\pi R^2(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{4}{\int_{-\pi}^{\pi} R^2(\theta) \sin \theta d\theta} = \frac{4}{\int_{-2}^2 R^2(t) dt}. \quad (3.22)$$

Теперь для вычисления интеграла в знаменателе можно воспользоваться сеткой, отличающейся от прежней тем, что она дополнена в об-



ласти углов —  $\pi$ , 0 зеркальным изображением относительно оси  $\theta = 0$ . Коэффициент концентрации по-прежнему равен отношению площади всего бланка к площади под кривой, изображающей  $R^2(\theta)$ .

При использовании описанного метода следует иметь в виду, что направление  $\theta = 0$  совпадает с осью симметрии характеристики направленности, но в общем случае не совпадает с направлением максимума. Так, если характеристика направленности имеет воронкообразную форму, причем полный раствор по значениям характеристики направленности, равным единице, составляет  $2\theta_0$ , то на сетке должно быть изображено два максимума, равных единице, причем один из них соответствует значению  $\theta = -\theta_0$ , а другой  $\theta = \theta_0$ .

Мы рассмотрели случай, когда коэффициент концентрации определен в направлении максимума характеристики направленности. Если же требуется определить  $K$  в каком-то ином направлении, то следует или надстроить сетку для значений  $R(\theta) > 1$  (и тогда вычислять коэффициент концентрации как отношение площади бланка, ограниченной значением  $R(\theta) = 1$ , к площади под кривой), или найти  $K$  в направлении максимума характеристики направленности, а затем произвести пересчет по формуле (1.40).

Интеграл в знаменателе выражения (3.20) можно вычислить графически и иначе [55]. Известно, что выражение

$$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi$$

определяет площадь сектора, ограниченного кривой  $r$  и углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  (формула Лейбница). Поэтому, если обозначить  $r = R(\theta) \sqrt{\sin \theta}$  и начертить  $r$  в полярной системе координат в функции от  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$ , то площадь сектора определит величину искомого интеграла. Нанесение кривой  $R(\theta) \sqrt{\sin \theta}$  существенно упрощается с помощью специальной сетки (на рис. 11 показана ее часть в пределах изменения  $\theta$  от 0 до  $\pi/2$ ), координатные линии которой соответствуют значениям  $b \sqrt{\sin \theta}$ , где  $b = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1$ . Коэффициент концентрации определяется отношением площадей, ограниченных кривыми  $1 \cdot \sqrt{\sin \theta}$  и  $R(\theta) \sqrt{\sin \theta}$ . При использовании обеих сеток для расчета коэффициента концентрации антенны, имеющей сравнительно острую характеристику направленности, можно производить растяжения масштаба вдоль координатных линий для повышения точности интегрирования.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что на обеих сетках для расчета коэффициента концентрации участки характеристики направленности, соответствующие углам, близким к 0 и  $\pi$ , сжаты по сравнению с участками при  $\pi/2$  (это видно из рис. 10 и 11, на которых нанесена кривая, соответствующая  $R(\theta) = \cos \theta$ ). Это объясняется тем, что в пространстве одним и тем же интервалом  $\Delta \theta$  соответствуют различные элементарные объемы в зависимости от того, где находится интервал  $\Delta \theta$ , и если он расположен ближе к направлению  $\theta = \pi/2$ , то элементарный объем больше.

Мы рассмотрели графические методы определения коэффициента концентрации антенн, характеристики направленности которых обладают осевой симметрией. В принципе эти же методы могут быть распространены и на случай произвольной характеристики направленности. В соответствии с формулой численного интегрирования, из-

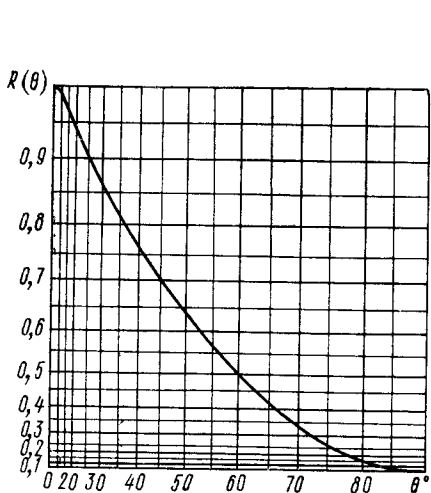


Рис. 10. Прямоугольная сетка для графического определения коэффициента концентрации.

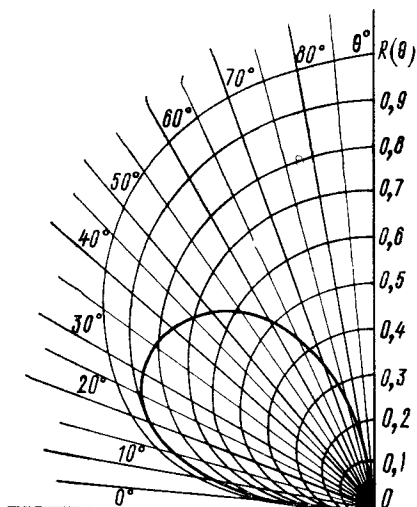


Рис. 11. Полярная сетка для графического определения коэффициента концентрации.

вестной под названием формулы прямоугольников, выражение (3.20) можно записать следующим образом:

$$K = \frac{4\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} R^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{4\pi}{n \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{\pi} R^2(\theta, \varphi_i) \sin \theta d\theta} \quad (3.23)$$

Здесь интеграл по координате  $\varphi$  заменен суммой по  $i$ , причем  $\varphi_i$  — угол, соответствующий  $i$ -му сечению характеристики направленности плоскостью, проходящей через направление  $\theta = 0$ . Всего таких плоскостей  $n$ , и угол между плоскостью с номером  $i$  и плоскостью  $\varphi = 0$  равен  $\varphi_i = i \frac{\pi}{n}$ . Рассмотрим интеграл от сечения квадрата характеристики направленности плоскостью  $i$ . По формуле (3.22) можно записать

$$\int_{-\pi}^{\pi} R^2(\theta, \varphi_i) \sin \theta d\theta = \frac{4}{K_i},$$

где  $K_i$  — коэффициент концентрации некоторой гипотетической антенны, обладающей осесимметричной характеристикой направленности, которая совпадает с сечением реальной характеристики направ-

ленности плоскостью с номером  $i$ . Подставляя это выражение в формулу (3.23), имеем

$$K = \frac{n}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{K_i}}. \quad (3.24)$$

Итак, определить коэффициент концентрации антенны можно следующим образом. Измерить или рассчитать характеристики направленности в  $n$  сечениях, проходящих через направление  $\theta = 0$ . Для каждого сечения методом графического интегрирования определить  $K_i$  — коэффициент концентрации гипотетической антенны, характеристика которой осесимметрична и совпадает с сечением данной характеристики направленности плоскостью с номером  $i$ . Затем по формуле (3.24) рассчитать  $K$ .

При достаточно большом числе сечений  $n$  указанным способом можно получить близкое к точному значение коэффициента концентрации. Однако при экспериментальном определении коэффициента концентрации обычно бывает сложно измерить характеристику направленности в большом числе сечений. Чаще всего ее измеряют всего в двух плоскостях. При этом  $n=2$  и формула (3.24) переходит в следующую:

$$K = \frac{2K_1K_2}{K_1 + K_2}. \quad (3.25)$$

Практически же часто пользуются другим выражением, связывающим между собой  $K$ ,  $K_1$  и  $K_2$

$$K = \sqrt{K_1K_2}. \quad (3.26)$$

В случае осесимметричной характеристики направленности  $K_1=K_2$  и обе формулы дают один и тот же результат  $K = K_1 = K_2$ . При характеристике неосесимметричной формула (3.26) во многих случаях обладает меньшей погрешностью. Объяснить это можно на следующем примере.

В качестве антенны, характеристика направленности которой не обладает осевой симметрией, выберем плоский поршень, ограниченный эллипсом и лежащий в жестком экране. Пусть большая полуось эллипса равна  $a$ , а малая  $b$  (рис. 12). Амплитудное распределение по поверхности поршня равномерное. Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.27)$$

Запишем в соответствии с формулой (2.55) характеристику направленности эллиптического поршня в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$ . Если  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $z$ , то скалярное произведение  $\rho$  и  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$  определится следующим образом:

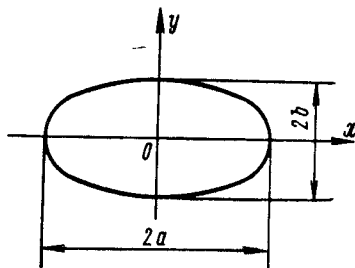
$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) &= \rho_x(u_x - u_{x0}) + \rho_y(u_y - u_{y0}) + \rho_z(u_z - u_{z0}) = \\ &= x(\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) + y(\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0) + \\ &\quad + z(\cos \theta - \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Учитывая, что для некомпенсированного плоского поршня направление главного максимума излучения совпадает с осью  $z$ , т. е.  $\theta_0 = 0$ , запишем характеристику направленности в плоскости  $xOz$  так:

$$D_1(\theta) = \frac{1}{s} \int_s e^{-ikx \sin \theta} ds = \frac{1}{s} \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} e^{-ikx \sin \theta} ds =$$

$$= \frac{b}{s} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} e^{-ikx \sin \theta} dx. \quad (3.29)$$

Совершенно аналогично характеристика направленности в плоскости  $yOz$  (т. е. в плоскости  $\varphi = \pi/2$ ) запишется следующим образом:



$$D_2(\theta) = \frac{a}{s} \int_{-b}^b \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} e^{-iky \sin \theta} dy. \quad (3.30)$$

Рис. 12. Эллиптический поршень. При  $a = b = R$  эллипс обращается в круг и характеристика направленности круга, как это следует из формулы (3.29) или (3.30)

$$D(\theta) = \frac{R}{s} \int_{-R}^R \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} e^{-ikx \sin \theta} dx.$$

Из сравнения этой формулы с формулами (3.29) и (3.30) видно, что характеристика направленности эллипса в плоскости  $xOz$  совпадает с характеристикой направленности круга, радиус которого  $R$  равен  $a$ , а в плоскости  $yOz$  — совпадает с характеристикой направленности круга с радиусом  $R = b$ . Таким образом, если мы нанесем на специальную сетку характеристику направленности  $R_1(\theta) = |D_1(\theta)|$  и определим соответствующий коэффициент концентрации  $K_1$ , то мы должны получить коэффициент концентрации гипотетической антенны с осесимметричной характеристикой  $R_1(\theta)$ , т. е. круглого поршня радиуса  $R$ . Поэтому величина  $K_1$ , если только  $a \gg \lambda$ , в соответствии с формулой (5.18), равна

$$K_1 = \frac{4\pi s}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2}.$$

Рассуждая аналогично, можем записать

$$K_2 = \frac{4\pi^2 b^2}{\lambda^2}.$$

Если для определения коэффициента концентрации эллиптического поршня по двум сечениям его характеристики направленности воспользоваться формулой (3.26), то

$$K = \sqrt{K_1 K_2} = \frac{4\pi^2 ab}{\lambda^2},$$

но так как площадь эллипса равна  $\pi ab$ , то и точное значение коэффициента концентрации равно этой же величине; действительно

$$K = \frac{4\pi s}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2 ab}{\lambda^2}.$$

Мы убедились, что в случае эллиптического поршня формула (3.26) позволяет найти точное значение  $K$ . Это дает основание полагать, что в случае других антенн, характеристики которых не являются осесимметричными, формула (3.26) также не приведет к большой ошибке.

Интересно сравнить результаты расчета коэффициента концентрации эллиптического поршня по формулам (3.25) и (3.26). В соответствии с формулой (3.25)

$$K = \frac{2K_1 K_2}{-K_1 + K_2} = \frac{8\pi^2 a^2 b^2}{\lambda^2 (a^2 + b^2)}.$$

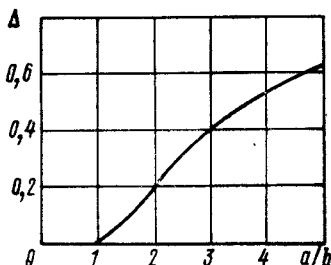


Рис. 13. Ошибка в определении коэффициента концентрации эллиптического поршня по формуле (3.25).

Обозначим точное значение коэффициента концентрации символом  $K_T$  и рассчитаем ошибку определения  $K$  по формуле (3.25)

$$\Delta = \frac{K_T - K}{K_T} = 1 - \frac{2 \frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2}.$$

На графике рис. 13 представлена зависимость ошибки определения коэффициента концентрации эллиптического поршня по формуле (3.25) от отношения  $a/b$ . Как и следовало ожидать, при  $a = b$  и  $\Delta = 0$ , но с ростом  $a/b$  ошибка растет и при  $a/b = 3$  достигает сорока процентов.

Поскольку во многих практических случаях можно считать, что неосесимметричная характеристика направленности по своему виду близка к характеристике направленности эллиптического поршня, обычно при определении коэффициента концентрации антенны по двум сечениям ее характеристики направленности пользуются формулой (3.26), а не (3.25).

**Аппроксимация характеристики направленности.** Процедура вычисления коэффициента концентрации антенны может быть существенно упрощена, если аппроксимировать характеристику направленности

антенны или ее квадрат некоторой специальным образом подобранной функцией.

Иногда удается представить квадрат характеристики направленности в виде суммы двух функций, интегралы от которых известны или легко могут быть вычислены. Приведем два примера.

Первый из них представляет собой случай, когда квадрат модуля характеристики направленности связан с квадратом модуля известной (теоретической) характеристики направленности  $R_T^2$  следующим образом:

$$R^2 = \frac{R_T^2 + \sigma^2}{1 + \sigma^2}.$$

Характеристика направленности антенны может быть представлена таким образом, когда, например, в силу разбросов параметров

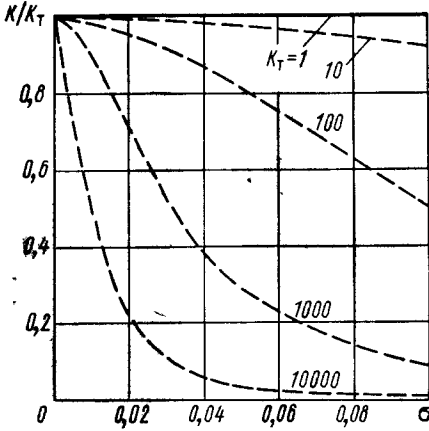


Рис. 14. Зависимость  $K/K_T$  от  $\sigma$ .

элементов антенны или каких-то ошибок измерения (в частности, ограниченного динамического диапазона приемного тракта) нулевые уровни характеристики направленности «заплыли», а дополнительные максимумы несколько увеличились. Если к электрическому сигналу, соответствующему характеристике направленности  $R_T$ , прибавляется некоторый статически независимый от него шум  $\sigma$ , то суммарное значение  $R_T^2 + \sigma^2$ , нормированное к своей максимальной величине, определяется записанной выше формулой. Величину  $\sigma$  можно определить следующим образом. Пусть  $\sigma^2 \ll 1$ , тогда  $\sigma^2 = R^2 - R_T^2$ , откуда

видно, что значение квадрата экспериментальной характеристики направленности в том направлении, в котором теоретическая характеристика направленности должна быть равна нулю, равно  $\sigma^2$ .

Найдем коэффициент концентрации антенны в рассматриваемом случае

$$K = \frac{4\pi(1 + \sigma^2)}{\int_{\Omega} (R_T^2 + \sigma^2) d\Omega} = \frac{4\pi(1 + \sigma^2)}{\int_{\Omega} R_T^2 d\Omega + 4\pi\sigma^2} = K_T \frac{1 + \sigma^2}{1 + K_T\sigma^2} \approx \frac{K_T}{1 + K_T\sigma^2},$$

где  $K_T = 4\pi \left[ \int_{\Omega} R_T^2 d\Omega \right]^{-1}$  — теоретическое значение коэффициента концентрации.

На рис. 14 представлена зависимость относительного падения коэффициента концентрации  $K/K_T$  от уровня запыливания нулей характеристики направленности  $\sigma$  (по напряжению), рассчитанная по полученной формуле.

Относительное падение коэффициента концентрации существенно зависит от его исходной теоретической величины. Так, при уровне заплывания нулей, равном всего 0,03, при  $K_T = 100$  значение  $K/K_T$  равно 0,9, а при  $K_T = 1000$  коэффициент концентрации падает в два раза. Таким образом, если по экспериментальным измерениям характеристики направленности предполагается проводить расчет коэффициента концентрации, то динамический диапазон тракта должен быть тем больше, чем больше предполагаемая величина коэффициента концентрации. Это и понятно: при широком основном максимуме характеристики направленности влияние «ореола», составляющего, например, 0,05, мало, а при узкой — объем, ограниченный в пространстве ореолом, может быть даже больше объема, ограниченного основным лепестком, и экспериментально определенный коэффициент концентрации существенно уменьшится.

Рассмотрим второй пример разбиения квадрата характеристики направленности на два слагаемых. Пусть плоская прозрачная антенна рабо-

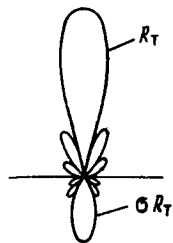


Рис. 15. Аппроксимация характеристики направленности в переднем и тыльном полупространствах двумя функциями, отличающимися на постоянный множитель.

тает вблизи неидеального экрана, такого, что в переднем полупространстве характеристика направленности формируется без искажений ( $R_T$ ), а в тыльном полупространстве создается такое же по характеру изменения с углом поле, как в переднем, но отличающееся по величине в  $\sigma$  раз (рис. 15). Обозначим  $\Omega_1$  переднее полупространство и  $\Omega_2$  — тыльное полупространство. Тогда

$$K = \frac{4\pi}{\int_{\Omega_1} R_T^2 d\Omega + \sigma^2 \int_{\Omega_2} R_T^2 d\Omega} = \frac{K_T}{1 + \sigma^2},$$

где  $K_T$  — коэффициент концентрации антенны, лежащей в абсолютно жестком экране и не излучающей в тыльное полупространство.

Этот метод оценки величины коэффициента концентрации может весьма эффективно применяться и в тех случаях, когда характеристика направленности антенны имеет несколько больших максимумов, в частности, равных основному.

Практически довольно часто характеристику направленности антенны можно представить произведением двух функций, каждая из которых зависит только от одной пространственной координаты. Примером может служить цилиндрическая антенна, работающая без компенсации.

Если экспериментально определены характеристики ее направленности в плоскости, проходящей через ось цилиндра,  $R(\theta)$  и в плоскости, перпендикулярной ей  $R(\varphi)$ , то можно предполагать, что  $R(\theta, \varphi) = R(\theta)R(\varphi)$ . В соответствии с этим предположением ко-

эффицент концентрации определяется соотношением

$$K = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2(\theta) R^2(\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{2}{\int_0^\pi R^2(\theta) \sin \theta d\theta} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} R^2(\varphi) d\varphi}. \quad (3.31)$$

Интеграл в знаменателе второго сомножителя может быть определен графически, но для этого следует воспользоваться сеткой с равномерным шагом по  $\varphi$ .

В некоторых случаях даже грубые, на первый взгляд, аппроксимации квадрата характеристики направленности приводят к хорошему результату. Рассмотрим коэффициент концентрации отрезка прямой линии. Из формулы (4.23) следует, что если  $\alpha$  — угол, отсчитываемый от оси перпендикулярной к отрезку, то его характеристика направленности имеет вид

$$R(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{kl}{2} \sin \alpha},$$

Угол  $\alpha$  равен  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси  $z$ , поэтому вместо пределов интегрирования по  $\theta$  от 0 до  $\pi$  в формуле (3.20) следует записать пределы интегрирования по  $\alpha$  от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  и вместо  $\sin \theta$  поставить  $\cos \alpha$ . Тогда

$$K = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{4\pi}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^2(\alpha, \varphi) \cos \alpha d\alpha d\varphi},$$

и так как в нашем случае  $R^2(\alpha, \varphi)$  не зависит от угла  $\varphi$ , а  $R^2(\alpha)$  — функция четная, то

$$K = \frac{1}{\int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin\left(\frac{kl}{2} \sin \alpha\right)}{\frac{kl}{2} \sin \alpha} \right]^2 \cos \alpha d\alpha}.$$

Рассмотрим подынтегральное выражение. Функция  $R^2(\alpha)$  ведет себя следующим образом. При  $\alpha = 0$  она равна единице, затем при  $\frac{kl}{2} \sin \alpha_0 = \pi$  она обращается в нуль и далее совершает затухающие периодические осцилляции, величина наибольшей из которых составляет  $0,22^2 \approx 0,05$ . Если  $kl > 1$ , то функция  $R^2(\alpha)$  быстро спадает до малых значений и сомножитель  $\cos \alpha$  мало сказывается на величине интеграла. Саму же функцию  $R^2(\alpha)$  мы приближенно аппроксимируем треугольником, вершина которого расположена при  $\alpha = 0$  и равна



единице, а основание равно расстоянию до первого нуля функции  $R^2(\alpha)$ , т. е. углу  $\alpha_0$ , определяемому выражением  $\sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{l} \approx \alpha_0$ .

Интеграл по  $\alpha$  равен площади этого треугольника, т. е. полупроизведению основания на высоту  $0,5 \cdot l \lambda/l$ . Поэтому

$$K = \frac{1}{\frac{\lambda}{2l}} = \frac{2l}{\lambda}.$$

Ниже будет показано, что эта формула при  $kl \gg 1$  является точной.

Рассмотрим еще один способ аппроксимации квадрата характеристики направленности, которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем и который в ряде случаев при больших волновых размерах антенны дает точный результат. Продемонстрируем его на примере отрезка прямой линии. Как известно, функция

$$\left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2$$

при  $l/\lambda \rightarrow \infty$  с точностью до постоянного множителя  $\lambda/l$  превращается в функцию, обладающую свойствами дельта-функции Дирака. Это обстоятельство записывается следующим образом:

$$\lim_{\frac{l}{\lambda} \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi l}{\lambda} \sin \alpha} \right]^2 = \frac{\lambda}{l} \delta(0). \quad (3.32)$$

Воспользовавшись выражением (2.78), получим

$$K = \frac{2}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda}{l} \delta(0) \cos \alpha d\alpha} = \frac{2l}{\lambda}.$$

Заметим, что по существу способы вычисления интегралов в последних примерах одинаковы, поскольку треугольник, которым мы аппроксимировали квадрат характеристики направленности при  $l/\lambda \rightarrow \infty$ , также обладает свойствами  $\delta$ -функции.

Пользуясь методом аппроксимаций, в ряде случаев удается получить весьма простыми вычислениями достаточно точный результат. Однако применяя новые аппроксимации, следует проявлять известную осторожность и стремиться проверить их на простейших примерах.

## § 8. Метод бесконечной решетки

Весьма эффективным для вычисления сопротивления излучения или коэффициента концентрации элемента антенны или антенны в целом является метод, который можно назвать методом бесконечной ре-

шетки (антенной решеткой обычно называют периодическую одномерную или двумерную антенну, состоящую из одинаковых и одинаково ориентированных элементов). Насколько нам известно, впервые он был применен М. И. Карновским [21] при вычислении сопротивления излучения ненаправленного излучателя, находящегося в бесконечной линейной решетке таких же работающих излучателей. В дальнейшем этот метод нашел существенное развитие и в настоящее время успешно применяется для решения целого ряда задач антенной техники. Физически сущность его состоит в том, что расчет сопротивления излучения элемента, находящегося в реальной периодической решетке таких же элементов, заменяется расчетом сопротивления излучения этого элемента в аналогичной, но бесконечной решетке. Поскольку в силу затухающего характера функций, описывающих взаимное сопротивление излучения элементов антенны, на сопротивление излучения элемента оказывают влияние только близко расположенные к нему другие элементы, то основная масса элементов большой конечной антенны имеет такое же сопротивление излучения, как и в бесконечной антенне.

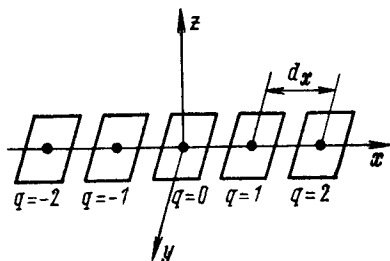


Рис. 16. Произвольный элемент в бесконечной одномерной периодической антенне.

Одномерная решетка. Пусть центры одинаковых и одинаково ориентированных в пространстве элементов образуют бесконечную эквидистантную периодическую линейную решетку; лежащую вдоль оси  $x$ . Расстояние между центрами соседних элементов равно  $d_x$  (рис. 16). Условно прием какой-то элемент антенны за нулевой и совместим с его центром начало сферической системы координат. Сопротивление излучения нулевого элемента антенны при работе всех остальных можно определить в соответствии с формулой (1.20) следующим образом

$$z_0 = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q A_0^* z_{q0}. \quad (3.33)$$

Будем полагать, что амплитуды колебаний всех элементов антенны одинаковы и имеется фазовое распределение, обеспечивающее компенсацию антенны в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ . Так как разность хода лучей от элемента с номером  $q$  и нулевым составляет  $-q d_x \sin \theta \cos \varphi$ , то коэффициент возбуждения элемента  $q$  равен  $e^{i k q d_x \sin \theta \cos \varphi}$ . Принимая во внимание, что  $A_0 = 1, A_q = A_{-q}^*, z_{0q} = z_{0,-q}$  и рассматривая сумму двух симметричных слагаемых выражения (3.33), можно записать

$$z = \sum_{q=-\infty}^{\infty} z_{0q} \operatorname{Re} A_q,$$

откуда активное сопротивление излучения элемента

$$r_s = \sum_{q=-\infty}^{\infty} r_{0q} \operatorname{Re} A_q = \operatorname{Re} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q r_{0q}. \quad (3.34)$$

Обозначим давление, развиваемое центральным элементом антенны в дальнем поле в направлении  $\theta, \varphi$  на расстоянии  $r$ , отнесенное к колебательной скорости элемента, символом  $p'(\theta, \varphi)$ . Тогда давление, развиваемое элементом с номером  $q$  и записанное относительно общего начала координат, имеет вид

$$p'_q = p'(\theta, \varphi) e^{-ikqd_x \sin \theta \cos \varphi}.$$

Активное взаимное сопротивление излучения элементов  $q$  и  $0$  определим по формуле (1.30)

$$r_{0q} = \frac{r^2}{\rho c} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |p'(\theta, \varphi)|^2 e^{-ikqd_x \sin \theta \cos \varphi} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Подставив это выражение в формулу (3.34), знаки вещественных частей можно опустить, поскольку сумма по  $q$  всегда вещественна, так как частичные суммы симметричных ее слагаемых вещественны. Поэтому можно записать

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |p'(\theta, \varphi)|^2 e^{-ikqd_x (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3.35)$$

Введем замену переменных

$$u = \sin \theta \cos \varphi, \quad (3.36)$$

$$v = \sin \theta \sin \varphi, \quad (3.37)$$

и обозначения

$$u_0 = \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad (3.38)$$

$$v_0 = \sin \theta_0 \sin \varphi_0. \quad (3.39)$$

Как известно, замена переменных в двукратных интегралах производится в соответствии с формулой

$$\int_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_{\sigma'} F(\alpha, \beta) |D| d\alpha d\beta, \quad (3.40)$$

где  $\sigma$  и  $\sigma'$  — область интегрирования, записанная в старых и новых координатах соответственно;  $D$  — якобиан преобразования, определяемый выражением

$$D = \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha} \frac{\partial \psi'}{\partial \beta} - \frac{\partial \varphi'}{\partial \beta} \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha}. \quad (3.41)$$

Функции  $\varphi'$  и  $\psi'$  определяют связь между новыми и старыми координатами  $x = \varphi'(\alpha, \beta)$ ,  $y = \psi'(\alpha, \beta)$ .

В нашем случае  $\varphi' = \theta = \arcsin \sqrt{u^2 + v^2}$  и  $\psi' = \varphi = \operatorname{arctg} \frac{v}{u}$ .

Вычисляя производные от  $\varphi'$  и  $\psi'$  по  $\alpha$  и  $\beta$  и подставляя их в выражение (3.41), получим

$$D = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{1 - u^2 - v^2}}. \quad (3.42)$$

Замена переменных  $\theta$  и  $\varphi$  на  $u$  и  $v$  в выражении (3.35) по существу эквивалентна переходу от интегрирования по поверхности сферы единичного радиуса к интегрированию по ее проекции на плоскость  $xOy$ . Одной и той же точке плоскости  $xOy$  могут соответствовать две симметричные относительно плоскости  $xOy$  точки сферы, поэтому интегрировать по плоскости  $xOy$  надо дважды. Введем переменные  $u'$  и  $v'$ , соответствующие интегрированию по нижней полусфере. Определяются они также соотношениями (3.36) и (3.37) при  $\theta > \frac{\pi}{2}$ .

Можно не записывать отдельно интегралы по  $uv$  и  $u'v'$ , а объединить их в один, имея в виду, что подынтегральные выражения отличаются только функциями, описывающими давления, все же остальные сомножители одинаковы при  $\theta$  и  $\pi - \theta$ . Учитывая сказанное, получим

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [ |p'(u, v)|^2 + |p'_n(u, v)|^2 ] \times \\ \times \sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-ikqd_x(u-u_0)} \frac{dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}. \quad (3.43)$$

В этой формуле  $p'_n(u, v)$  — давление, развиваемое элементом антенны в нижнем полупространстве. Вообще говоря, пределы интегрирования должны быть выбраны так, чтобы  $u$  и  $v$  были внутри круга единичного радиуса, т. е. чтобы выполнялось неравенство  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Однако учитывая, что под интегралом имеется сомножитель  $(1 - u^2 - v^2)^{-1/2}$ , не изменяя результата, можно записать бесконечные интегралы по  $u$  и  $v$ , а перед интегралами поставить знак вещественной части.

Сумма по  $q$  представляет собой характеристику направленности решетки, состоящей из центров элементов антенны. Эта функция имеет в общем случае в действительной части пространства несколько единичных максимумов. При стремлении числа элементов к бесконечности максимумы становятся бесконечно узкими и имеют вид  $\delta$ -функций. Так можно физически интерпретировать известное соотношение [5]

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{-ikqd_x(u-u_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \left[ \frac{d_x}{\lambda} (u-u_0) - n \right]. \quad (3.44)$$

С помощью свойства дельта-функции (2.78) можно вычислить интеграл по  $u$ . В нашем случае аргумент дельта-функции содержит коэффициент перед переменной интегрирования, поэтому следует рассмотреть интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax-b) dx.$$

Введем замену переменной  $ax = y$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) \delta(y-b) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} f\left(\frac{b}{a}\right)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax-b) dx = \frac{1}{a} f\left(\frac{b}{a}\right). \quad (3.45)$$

Принимая во внимание вышеизложенное, запишем

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \frac{\lambda}{d_x} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p'(u_n, v)|^2 + |p_n'(u_n, v)|^2}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}} dv, \quad (3.46)$$

где  $u_n$  определяется из соотношения  $\frac{d_x}{\lambda} (u_n - u_0) - n = 0$ , т. е.

$$u_n = n \frac{\lambda}{d_x} + u_0, \quad (3.47)$$

а

$$\eta_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } u_n^2 = 1; \\ 1 & \text{при } u_n^2 < 1. \end{cases}$$

Напомним, что множитель  $\eta_n$  равен 1/2 в том случае, когда положение  $\delta$ -функции совпадает с началом или концом интервала интегрирования. В нашем случае можно считать, что интеграл по  $u$  вычисляется в пределах от  $-1$  до  $+1$ , а интеграл по  $v$  от  $-\sqrt{1-u^2}$  до  $\sqrt{1-u^2}$ , а поэтому граница интегрирования по  $u$  соответствует величине  $u_n^2 = 1$ .

Итак, мы нашли полное активное сопротивление излучения элемента бесконечной одномерной эквидистантной антенны. Рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть характеристика направленности элемента антенны является произведением двух функций, одна из которых зависит только от  $u$ , а другая — только от  $v$ . Тогда

$$p(u, v) = p_0 D(u, v) = p_0 D(u) D(v), \quad (3.48)$$

где  $p_0$  — давление, развиваемое элементом в направлении, в котором  $D(u, v) = D(u) D(v) = 1$ .

Рассмотрим случай, когда  $H$  — размер элемента вдоль оси  $y$  велик по сравнению с длиной волны, а на элементе вдоль оси  $y$  (см. рис. 16) отсутствует амплитудное распределение и имеется линейное фазовое распределение. Будем считать (что, вообще говоря, не обязательно), что линейное фазовое распределение вдоль оси  $y$  обеспечивает компенсацию элемента в направлении компенсации всей антенны; тогда в наших обозначениях

$$D(v) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi H}{\lambda} (v - v_0) \right]}{\frac{\pi H}{\lambda} (v - v_0)}. \quad (3.49)$$

Подставляя последовательно формулы (3.49) и (3.48) в выражение (3.46), производя интегрирование по  $v$  с помощью известного соотношения

$$\lim_{\frac{H}{\lambda} \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sin \left[ \frac{\pi H}{\lambda} (v - v_0) \right]}{\frac{\pi H}{\lambda} (v - v_0)} \right\}^2 = \frac{\lambda}{H} \delta(v - v_0) \quad (3.50)$$

и считая для упрощения записи, что элемент излучает только в переднее полупространство, получим

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2}{\rho c} \frac{\lambda^2}{d_x H} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \frac{R^2(u_n)}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_0^2}}, \quad (3.51)$$

откуда при отсутствии компенсации элемента в плоскости  $yOz$ , когда  $v_0 = 0$ ,

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2}{\rho c} \frac{\lambda^2}{d_x H} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \frac{R^2(u_n)}{\sqrt{1 - u_n^2}}. \quad (3.52)$$

По этим формулам можно определить активное сопротивление излучения элемента антенны, представляющего собой отрезок, прямоугольник, цилиндр и т. п. при работе его в одномерной решетке таких же элементов. Напомним, что эти формулы справедливы для излучения в полупространство. В случае излучения в полный телесный угол следует вместо  $R^2(u_n)$  записать сумму  $R^2(u_n) + R_n^2(u_n)$ , где  $R_n(u_n)$  — амплитудная характеристика направленности в тыльном полупространстве, нормированная к значению  $R(0)$ .

Из формулы (3.47) следует, что  $u_n$  есть синус угла наклона единичного максимума характеристики направленности решетки ненаправленных элементов, находящихся в центрах реальных, поэтому выражение (3.52) в исходной системе координат имеет вид

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2}{\rho c} \frac{\lambda}{d_x H} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(\theta_n)}{\cos \theta_n}, \quad (3.53)$$

где

$$\cos \theta_n = \cos \left[ \arcsin \left( n \frac{\lambda}{d_x} + \sin \theta_0 \right) \right].$$

Рассмотрим случай, когда характеристика направленности элемента в плоскости  $yOz$  имеет вид  $D(v) = 1$ . Подставляя формулу (3.48) в выражение (3.46), получим

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2}{\rho c} \frac{\lambda}{d_x} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\sqrt{1-u_n^2}}^{\sqrt{1-u_n^2}} \eta_n \frac{R^2(u_n^2)}{\sqrt{1 - u_n^2 - v^2}} dv.$$

Пределы интегрирования по  $v$  выбраны, исходя из условия  $u_n^2 + v^2 \leq 1$ . После вычисления интеграла имеем

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2}{\rho c} \frac{\pi \lambda}{dx} \sum_n \eta_n R^2(u_n); \quad (3.54)$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } u_n^2 = 1; \\ 1 & \text{при } u_n^2 < 1, \end{cases}$$

а пределы суммирования по  $n$ , как это следует из предыдущего выражения, должны выбираться из условия  $u_n^2 < 1$ .

По этой формуле можно рассчитать сопротивление излучения ненаправленного элемента, элемента в виде отрезка прямой, лежащего вдоль оси  $x$ , и некоторых других при работе их в одномерной бесконечной решетке. При выводе ее, так же как и в предыдущем случае, мы предполагали, что излучение происходит в полупространство. При излучении в полное пространство следует рассчитывать  $r_s$  как сумму двух слагаемых, первое из которых совпадает с приведенными формулами, а второе отличается от них тем, что  $R(u_n)$  представляет собой характеристику направленности не в переднем, а в тыльном полупространстве.

Для того чтобы рассмотреть еще один практически весьма интересный частный случай, введем новую систему координат  $x', y', z'$  ( $\theta', \varphi'$ ) путем поворота старой вокруг оси  $y$  до совмещения осей  $z'$  и  $x$  (рис. 17). Непосредственно из рисунка видно, что  $x = z'$  и  $y = y'$ , откуда следуют равенства:

$$x = \sin \theta \cos \varphi = u = z' = \cos \theta'; \quad u = \cos \theta';$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi = v = y' = \sin \theta' \sin \varphi'; \quad v = \sin \theta' \sin \varphi'.$$

В формуле (3.46) величина  $u$  не меняется непрерывно, а имеет дискретные значения  $u_n$ . Следовательно, и  $\theta'$  имеет дискретные значения  $\theta'_n$ , откуда  $u_n = \cos \theta'_n$ ,  $v = \sin \theta'_n \sin \varphi'$ . Подставляя новые переменные в формулу (3.46), и учитывая, что

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - u_n^2 - v^2}} = \frac{\sin \theta'_n \cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta'_n - \sin^2 \theta'_n \sin^2 \varphi'}} = d\varphi',$$

получим

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \frac{\lambda}{d} \sum_n \eta_n \int_{\varphi'} |p(\theta'_n, \varphi')|^2 d\varphi'.$$

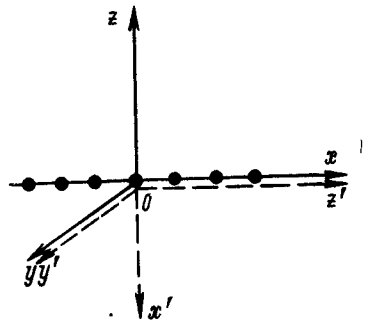


Рис. 17. Поворот системы координат.

Пределы интегрирования по  $\varphi'$  и суммирования по  $n$  определим из следующих соображений. Исходное выражение (3.35) содержало интеграл по поверхности сферы единичного радиуса. Затем мы перешли к интегрированию по поверхности диаметрального сечения сферы (переменные  $u$  и  $v$ ) и потом снова к сферической системе координат  $\theta'$ ,  $\varphi'$ . Если полагать, что функция  $p(\theta'_n, \varphi') = p_0 D(\theta'_n, \varphi')$  описывает давление в полном телесном угле, а не в его половине, то, очевидно, интеграл по  $\varphi'$  следует вычислять в пределах  $0 - 2\pi$ . Что же касается пределов суммирования по  $n$ , то следует принять во внимание соотношение (3.47), которое в новой системе координат запишется следующим образом:

$$\cos \theta'_n = n \frac{\lambda}{d} + \cos \theta'_0, \quad (3.55)$$

где  $\theta'_0$  — направление компенсации.

Очевидно,  $n$  следует выбрать таким образом, чтобы угол  $\theta'_n$  не выходил за пределы  $0, \pi$ , т. е. чтобы выполнялось неравенство  $1 \geq \cos \theta'_n \geq -1$ .

Принимая во внимание выражение (3.55), пределы суммирования по  $n$  можно записать в следующем виде:

$$-\frac{d}{\lambda}(1 + \cos \theta'_0) \leq n \leq \frac{d}{\lambda}(1 - \cos \theta'_0).$$

Поскольку  $n$  не может быть дробным, воспользуемся символом  $E(v)$ , означающим целую часть числа  $v$ , тогда

$$r_s = \frac{r^2 |p'_0|^2 \lambda}{\rho c d} \sum_{n_1 = -E\left[\frac{d}{\lambda}(1 + \cos \theta_0)\right]}^{n_2 = E\left[\frac{d}{\lambda}(1 - \cos \theta_0)\right]} \eta_n \int_0^{2\pi} R^2(\theta_n, \varphi) d\varphi, \quad (3.56)$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } \cos^2 \theta_n = 1; \\ 1 & \text{при } \cos^2 \theta_n < 1. \end{cases}$$

и

$$\cos \theta_n = n \frac{\lambda}{d} + \cos \theta_0.$$

Штрихи у символов  $\theta$  и  $\varphi$  мы опустили (напомним, что в этой формуле  $\theta$  отсчитывается от линии, проходящей через центры элементов, а  $p'_0$  — давление в том направлении, в котором  $D(\theta, \varphi) = 1$ ).

По формуле (3.56) можно определить активное сопротивление излучения элемента бесконечной решетки, а затем, предполагая, что оно равно сопротивлению излучения каждого элемента конечной, но многоэлементной антенны, найти и коэффициент концентрации всей антенны. Под элементом можно понимать и группу элементов, и антенну в целом.



Рассмотрим пример. Пусть элемент антенны представляет собой цилиндрическую антенну с образующей, параллельной оси  $z$  (рис. 18) и с произвольной направляющей. Высота антенны  $H$  велика по сравнению с длиной волны, и поэтому можно считать, что полное (т. е. с учетом взаимодействий) активное сопротивление излучения антенны, находящейся в бесконечной цепочке таких же работающих антенн, равно ее сопротивлению излучения в свободном поле. Будем полагать, что высота антенны равна расстоянию между соседними антеннами (т. е. они расположены вплотную без зазоров), а также, что вдоль образующей имеется равномерное амплитудное распределение и линейное, обеспечивающее ее компенсацию в направлении  $\theta_0$ , фазовое распределение. Тогда в соответствии с теоремой умножения характеристика направленности антенны равна произведению характеристик направленности образующей  $D_0$  и направляющей  $D_n$ , причем  $D_0$  совпадает с характеристикой направленности прямой

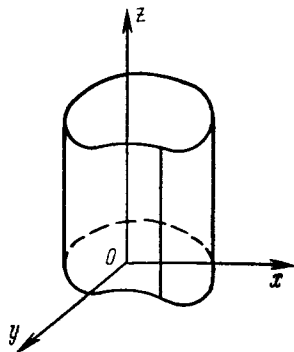


Рис. 18. К определению коэффициента концентрации произвольной цилиндрической антенны.

$$D_0(\theta) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi H}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_0) \right]}{\frac{\pi H}{\lambda} (\cos \theta - \cos \theta_0)}.$$

Подставляя в формулу (3.56) вместо  $R(\theta_n, \varphi)$  произведение  $|D_0(\theta) D_n(\theta, \varphi)|$  и учитывая (3.55), получим

$$r_s = \frac{r^2 |\rho_0'|^2}{\rho c} \frac{\lambda}{H} \sum_{n_1}^{n_2} \eta_n \left[ \frac{\sin \left( \frac{\pi H}{\lambda} n \frac{\lambda}{d} \right)}{\frac{\pi H}{\lambda} n \frac{\lambda}{d}} \right]^2 \int_0^{2\pi} R_n^2(\theta_n, \varphi) d\varphi.$$

Поскольку  $H = d$ , в направлениях  $\theta = \theta_n$  дробь, стоящая в квадрате перед интегралом, обращается в нуль при всех значениях  $n$ , кроме  $n = 0$ , при котором в нуль обращается и знаменатель, и вся дробь равна единице. Поэтому все слагаемые суммы по  $n$ , кроме нулевого, исчезают и

$$r_s = \frac{r^2 |\rho_0'|^2}{\rho c} \frac{\lambda}{H} \eta_0 \int_0^{2\pi} R_n^2(\theta_0, \varphi) d\varphi, \quad (3.57)$$

где  $\eta_0 = 1/2$  при  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = \pi$ , а при всех остальных  $\theta_0$  множитель  $\eta_0 = 1$ .

Определим коэффициент концентрации антенны по формуле (1.38):

$$K = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{|\rho_0'|^2}{r_s} = \frac{2H}{\lambda} \frac{2\pi}{\eta_0 \int_0^{2\pi} R_n^2(\theta_0, \varphi) d\varphi}. \quad (3.58)$$

Последнее выражение формулы (3.58) состоит из двух множителей. Первый из них — коэффициент концентрации линии при равномерном амплитудном распределении. Так как образующая имеет длину  $H$  и по предположению, сделанному при выводе, амплитудное распределение по ней равномерно, первый сомножитель — коэффициент концентрации образующей. Это обстоятельство заставляет предположить, что формулу можно использовать и в случае, когда амплитудное распределение вдоль образующей неравномерно, если только вместо  $2H/\lambda$  подставить величину коэффициента концентрации линии при заданном амплитудном распределении. Однако анализ формулы (3.56) показывает, что в общем случае это неверно.

Действительно, из формулы (3.56) мы имеем

$$K = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{|p_0'|^2}{r_s} = \frac{2H}{\lambda} \frac{2\pi}{\sum_{n_1}^{n_2} \eta_n R_n^2(\theta_n) \int_0^{2\pi} R_n^2(\theta_n, \varphi) d\varphi} \quad (3.59)$$

Активное сопротивление излучения линии при наличии некоторого амплитудного распределения и фазового, обеспечивающего компенсацию в направлении  $\theta_0$ , можно определить с помощью формулы (3.54). В нашей системе координат оно примет вид

$$r_s = \frac{r^2 |p_0'|^2}{\rho c} \frac{\pi\lambda}{H} \sum_{n_1}^{n_2} \eta_n R_n^2(\theta_n). \quad (3.60)$$

Удваивая это выражение в связи с тем, что в рассматриваемом случае излучение происходит в полное пространство, и находя коэффициент концентрации через квадрат давления и сопротивление излучения, получим выражение, определяющее коэффициент концентрации отрезка

$$K_n = \frac{2H}{\lambda} \frac{1}{\sum_{n_1}^{n_2} \eta_n R_n^2(\theta_n)}. \quad (3.61)$$

Из сравнения формул (3.61) и (3.59) видно, что только в частном случае, когда  $\int_0^{2\pi} R^2(\theta_n, \varphi) d\varphi$  равен некоторой константе  $M$ , не зависящей от  $\theta_n$  и  $n$ , сформулированное выше предположение справедливо и формула (3.59) может быть записана в следующем виде:

$$K = \frac{2H}{\lambda} \frac{1}{\sum_{n_1}^{n_2} \eta_n R_n^2(\theta_n)} \frac{2\pi}{M} = K_n \frac{2\pi}{M}.$$

**Двумерная решетка.** Формулу, определяющую активное сопротивление излучения элемента двумерной решетки с учетом взаимодействия всех элементов антенны можно было бы получить аналогично тому, как была выведена для одномерной решетки формула (3.46). Однако можно поступить и проще: предположить, что каждый элемент одномерной решетки представляет собой бесконечный набор элементов,

эквилидистантно расположенных вдоль некоторой прямой. Если эта линия параллельна оси  $y$  (см. рис. 16), то элементарная ячейка двумерной решетки представляет собой прямоугольник, а если составляет некоторый угол с осью  $y$ , то ячейка имеет вид параллелограмма.

В этом параграфе для упрощения записи мы рассмотрим только случай прямоугольной ячейки. Обозначим расстояние между соседними элементами вдоль оси  $y$  символом  $d_y$  и вдоль оси  $x$  — символом  $d_x$ . Давление, развиваемое элементом одномерной решетки, представляющим собой бесконечный набор малых элементов, каждый из которых относительно своего центра развивает давление  $p'_0(u, v)$ , равно произведению

$$\begin{aligned} p'(u, v) &= p'_0(u, v) \sum_{g=-\infty}^{\infty} e^{-ikgd_y(v-v_0)} = \\ &= p'_0(u, v) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta \left[ \frac{d_y}{\lambda} (v-v_0) - m \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу (3.46) и производя интегрирование по  $v$ , получим

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \frac{\lambda^2}{d_x d_y} \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{|p'_0(u_n, v_m)|^2 + |p'_{0н}(u_n, v_m)|^2}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}}, \quad (3.62)$$

где

$$\begin{aligned} v_m &= m \frac{\lambda}{d_y} + v_0, \\ u_n &= n \frac{\lambda}{d_x} + u_0. \end{aligned}$$

Определив активное сопротивление излучения элемента одномерной или двумерной решетки с учетом взаимодействия по полю через давление, создаваемое элементом в дальней зоне, по формуле (3.2) можно найти и реактивное сопротивление излучения.

В следующих главах, рассматривая параметры конкретных типов антенн, мы приведем ряд примеров расчетов по полученным формулам, а также постараемся глубже проанализировать их физический смысл.

## § 9. Определение помехоустойчивости антенны

Рассмотрим метод, позволяющий определить помехоустойчивость приемной антенны по известному распределению источников помехи вокруг нее.

Функции пространственно-временной корреляции помех на элементах антенны. Напряжение, развиваемое на выходе приемного элемента, имеющего номер  $q$ , определим как произведение его чувствительности по давлению  $\gamma'$  на усредненную по поверхности элемента  $s_q$

действующую со стороны поля силу [формула (1.66)]. Тогда

$$u'_q = \gamma' \frac{Q p'_q(r_q, \mathbf{u}_q)}{s_q} = \gamma Q p'_q(r_q, \mathbf{u}_q),$$

где  $\gamma = \gamma'/s_q$ ;  $Q$  — производительность источника помехи, расположенного в точке  $(r_q, \mathbf{u}_q)$ ;  $p'_q(r_q, \mathbf{u}_q)$  — давление, развиваемое в этой точке элементом антенны в режиме излучения при единичной колебательной скорости. При выводе формулы (1.66) мы считали, что источник сигнала удален от антенны, поскольку рассматривали характеристику направленности в режиме приема, однако эта формула справедлива и в произвольном случае, если только полагать, что  $p'_q(r_q, \mathbf{u}_q)$  определяет давление на конечном расстоянии  $r_q$ . Напряжение же на выходе  $q$ -го канала антенны перед сумматором, но после устройства, обеспечивающего введение некоторого амплитудно-фазового распределения  $h_q = A_q$ , равно

$$u_q = A_q \gamma Q p'_q(r_q, \mathbf{u}_q).$$

По этой формуле можно определить напряжение, развиваемое на входе сумматора при воздействии на антенну детерминированного сигнала. Если же сигнал случаен, то по аналогии с выражением (2.79) можно записать

$$u_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_q \gamma p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) e^{-i\omega t} Q d\Phi(\omega), \quad (3.63)$$

причем

$$M [d\Phi(\omega) d\Phi^*(\omega')] = \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega'. \quad (3.64)$$

Для проверки правильности этих выражений определим мощность на выходе канала, т. е. дисперсию процесса  $u_q(t)$ . При этом следует принять во внимание, что в общем случае и  $A_q$ ,  $\gamma$  и  $p'_q(r_q, \mathbf{u}_q)$  зависят от частоты

$$\begin{aligned} D [u_q(t)] &= M [u_q(t) u_q^*(t)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_q(\omega) A_q^*(\omega') p'_q(\omega, r_q, \mathbf{u}_q) p_q'^*(\omega', r_q, \mathbf{u}_q) \times \\ &\quad \times Q(\omega) Q^*(\omega') M [d\Phi(\omega) d\Phi^*(\omega')] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a_q^2 \gamma^2 |p'_q(r_q, \mathbf{u}_q)|^2 Q^2(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Предположим, что приемник представляет собой ненаправленный, малый по сравнению с длиной волны элемент, лежащий в плоском жестком экране. Тогда

$$p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) = -\frac{ik\rho cs_q}{2\pi r_q} e^{-ikr_q},$$

а произведение  $p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) Q$  определяет давление на поверхности элемента. Произведение его квадрата на квадрат чувствительности равно

квадрату напряжения, или, с точностью до постоянного множителя, — мощности на выходе элемента. Все же подынтегральное выражение в формуле (3.65) — спектральная плотность на частоте  $\omega$ , а интеграл от нее по частоте — полная мощность в полосе частот.

Определим теперь функцию пространственно-временной корреляции процессов, поступающих на вход сумматора с каналов  $q$  и  $g$ :

$$K_{qg} = M [u_q(t) u_g^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2 Q^2(\omega) A_q A_g^* p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) p_g'^*(r_g, \mathbf{u}_g) d\omega. \quad (3.66)$$

Эта функция называется пространственной потому, что рассматриваемые процессы разнесены в пространстве (элементы  $q$  и  $g$ ), и временной, поскольку в каналах введены различные временные сдвиги (фазы коэффициентов возбуждения  $\alpha_q$  и  $\alpha_g$ ).

Рассмотрим случай, когда источники помехи расположены непрерывно на некоторой поверхности  $\sigma$ . Имея в виду, что производительность источника  $Q$  равна произведению его площади  $s_0$  на линейную колебательную скорость  $\omega(\sigma)$ , напряжение, создаваемое на выходе канала  $q$  при воздействии на него элемента источника помехи  $d\sigma$ , по аналогии с формулой (3.63) запишем следующим образом:

$$du_q(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_q \gamma p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) e^{-i\omega t} \omega(\sigma) d\sigma d\Phi(\omega). \quad (3.67)$$

Напряжение на выходе канала с номером  $q$  при воздействии всех источников помехи:

$$u_q(t) = \int_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} A_q \gamma p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) e^{-i\omega t} \omega(\sigma) d\sigma d\Phi(\omega). \quad (3.68)$$

Определим функцию корреляции  $K_{qg}$ . Для этого полученное выражение помножим на сопряженное, в котором индекс  $q$  заменим на  $g$ , а символ  $\sigma$  на  $\sigma'$ , и выполним операцию усреднения. В результате получим

$$K_{qg} = \iint_{\sigma\sigma'} \int_{-\infty}^{\infty} K(\sigma, \sigma') A_q A_g^* \gamma^2 p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) p_g'^*(r_g, \mathbf{u}_g) d\omega d\sigma d\sigma'. \quad (3.69)$$

Здесь  $K(\sigma, \sigma') = M [\omega(\sigma) \omega^*(\sigma')] — функция корреляции колебательных скоростей источника помехи в точках, расположенных внутри элементов  $d\sigma$  и  $d\sigma'$ .$

С помощью этой формулы можно определить функцию пространственно-временной корреляции процессов двух любых каналов антенны и далее найти полную мощность помех на выходе антенны.

**Некоррелированные источники помех.** Рассмотрим случай, когда на поверхности  $\sigma$  расположены некоррелированные источники, причем площадь каждого из них равна  $s_0$  и общее число их на поверхности  $\sigma$  равно  $M$ . При этом в последнем выражении вместо двойного интеграла следует записать двойную сумму по источникам, а вместо  $d\sigma$  и  $d\sigma'$  записать  $s_0$ . Поскольку источники некоррелированы, функция корреляции колебательных скоростей равна нулю, когда рассматриваются различные источники (т. е. слагаемые двойной суммы с раз-

ными индексами), и равна квадрату колебательной скорости, когда в обеих суммах рассматривается один и тот же источник. Вследствие независимости источников двойная сумма переходит в одинарную, и мы имеем

$$K_{qg} = s_0^2 \sum_{m=0}^M \int_{-\infty}^{\infty} A_q A_g^* \gamma^2 p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) p'_g{}^*(r_g, \mathbf{u}_g) |\omega_m|^2 d\omega. \quad (3.70)$$

Если расстояния между центрами источников помех в рассматриваемом диапазоне частот малы по сравнению с длиной волны, то, воспользовавшись формулой численного интегрирования

$$\int_{\sigma} f(\sigma) d\sigma = s_0 \sum_{m=0}^M f(\sigma_m),$$

можно перейти снова от суммы к интегралу:

$$K_{qg} = s_0 \int_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} A_q A_g^* \gamma^2 p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) p'_g{}^*(r_g, \mathbf{u}_g) |\omega(\sigma)|^2 d\omega d\sigma. \quad (3.71)$$

Заметим, что это выражение можно было непосредственно получить из формулы (3.69), положив  $K(\sigma, \sigma') = s_0 |\omega(\sigma)|^2 \delta(\sigma - \sigma')$ .

Рассмотрим поведение функций корреляции помехи в некоторых простейших частных случаях расположения источников помех. Для упрощения преобразований будем считать, что либо источники помехи излучают узкополосный шум  $[\omega(\sigma) = \omega(\sigma, \omega_0) \delta(\omega - \omega_0)]$ , либо в приеме происходит узкополосная фильтрация [что может быть записано следующим образом:  $\gamma(\omega) = \gamma(\omega_0) \delta(\omega - \omega_0)$ ].

В случае, когда источник помехи всего один, из формулы (3.66) имеем

$$K_{qg} = \gamma^2 Q^2 A_q A_g^* p'_q(r_q, \mathbf{u}_q) p'_g{}^*(r_g, \mathbf{u}_g), \quad (3.72)$$

и если при этом функция корреляции определяется на ненаправленных элементах антенны, то

$$K_{qg} = C Q^2 \frac{e^{ik(r_q - r_g)}}{r_q r_g} e^{i(\alpha_q - \alpha_g)}, \quad (3.73)$$

где

$$C = \gamma^2 a_q a_g \frac{k^2 (\rho c)^2 s_0^2}{16\pi^2};$$

$r_q$  и  $r_g$  — расстояния от приемников с номерами  $q$  и  $g$  до источника помехи. Если источник помехи находится в дальнем поле (рис. 19), то  $r_q = r_0 + \frac{d_{qg}}{2} \sin \theta$  и  $r_g = r_0 - \frac{d_{qg}}{2} \sin \theta$ , и если при этом в каждый канал введена задержка, обеспечивающая компенсацию антенны в направлении  $\theta_0$ , то  $\alpha_q - \alpha_g = kd_{qg} \sin \theta_0$ , и поэтому

$$K_{qg} = \frac{C Q^2}{r_0^2} e^{ikd_{qg} (\sin \theta - \sin \theta_0)}. \quad (3.74)$$

Таким образом, если плоская волна от источника помехи одновременно поступает на два приемника, а компенсация при этом отсутствует, или если волна от источника помехи достигает приемника с некоторой задержкой во времени, которая, однако, компенсируется в тракте, то функция корреляции максимальна. При этом коэффициент корреляции, т. е. отношение функции корреляции при некоторых произвольных величинах  $d_{qg}$  и  $\theta_0$  к функции корреляции при  $d_{qg} = 0$ , равен единице. В рассмотренном примере мы предполагали, что на приемную антенну воздействует один источник помехи, однако очевидно, что полученные выражения справедливы и для воздействия одного источника случайного сигнала.

Пусть теперь источники помех расположены по окружности большого радиуса  $r_0$ , а ненаправленные приемные элементы находятся вблизи центра окружности. Поскольку выражения, приведенные выше, получены в предположении, что источники помехи

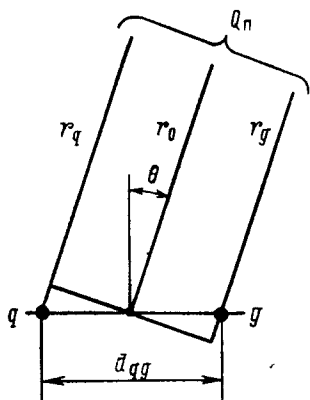


Рис. 19. Взаимное расположение источника помехи и элементов  $q$  и  $g$ .

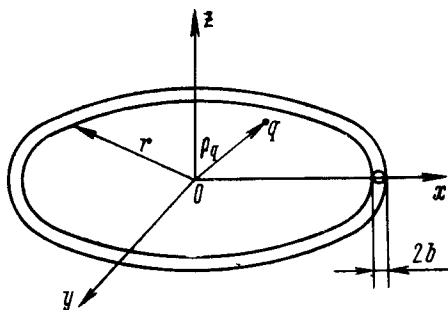


Рис. 20. К определению функции корреляции при расположении источников помех на окружности.

расположены на некоторой поверхности, то следует предположить, что они расположены не на окружности, а на поверхности тора, радиус окружности поперечного сечения которого  $b$  весьма мал (рис. 20).

Найдем расстояния от приемников до элемента площади тора, определяемого радиусом-вектором  $\mathbf{u}$  или координатами  $\varphi$  и  $r$ :

$$r_q = r - \rho_q \mathbf{u},$$

$$r_g = r - \rho_g \mathbf{u}.$$

Интеграл по поверхности тора в силу малости радиуса  $b$  будем вычислять приближенно, а именно: вычислим интеграл по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  и домножим его на длину окружности  $2\pi b$ . Учитывая сказанное, из формулы (3.71) имеем

$$K_{qg} = s_0 |\omega|^2 \cdot 2\pi \frac{b}{r} C e^{i(\alpha_q - \alpha_g)} \int_0^{2\pi} e^{-i k (\rho_q - \rho_g) \mathbf{u}} d\varphi. \quad (3.75)$$

Вычислим интеграл по  $\varphi$ . Для этого обозначим координаты центров

приемников  $x_q, y_q, z_q$  и  $x_g, y_g, z_g$  и составим произведение одноименных проекций в показателе экспоненты:

$$(\rho_q - \rho_g) u = (x_q - x_g) \cos \varphi + (y_q - y_g) \sin \varphi + (z_q - z_g) 0.$$

Проекция вектора  $u$  на ось  $z$  равна нулю, поэтому окончательный результат не будет зависеть от координат  $z_q$  и  $z_g$ . С помощью подстановки, которую мы подробно рассмотрим ниже при выводе формулы для определения характеристики направленности излучающей окружности, интеграл легко сводится к нулевой функции Бесселя. Окончательно получаем

$$K_{qg} = s_0 |\omega|^2 \cdot 4\pi^2 \frac{b}{r} C e^{i(\alpha_q - \alpha_g)} J_0(kd_{qg}), \quad (3.76)$$

где символом  $C$  обозначена та же константа, что и в предыдущем примере, а  $d_{qg}$  — проекция расстояния между элементами  $q$  и  $g$  на плоскость  $xOy$ .

Поскольку функция  $J_0(x)$  равна единице только при аргументе, равном нулю, коэффициент пространственной корреляции при  $d_{qg} > 0$  всегда меньше единицы, однако, если оба приемных элемента расположены на одной прямой, параллельной оси  $z$ , независимо от расстояния между ними он постоянен и равен единице. Коэффициент пространственно-временной корреляции ни при каких соотношениях между временами задержек сигналов в различных каналах при  $d_{qg} \neq 0$  не равен единице. В этом состоит принципиальное отличие случая воздействия на элементы антенны одиночного источника помех от воздействия многих источников.

Рассмотрим еще один случай, когда приемники окружены сферой большого радиуса, на которой расположены источники помех (так называемая модель помех дальнего поля). Так же, как и в предыдущем примере, будем предполагать, что колебательная скорость всех источников одинакова. Из формулы (3.71) имеем

$$K_{qg} = s_0 |\omega|^2 C e^{i(\alpha_q - \alpha_g)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ik(\rho_q - \rho_g) u} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

В этом случае

$$(\rho_q - \rho_g) u = (x_q - x_g) \sin \theta \cos \varphi + (y_q - y_g) \sin \theta \sin \varphi + (z_q - z_g) \cos \theta$$

и

$$K_{qg} = 4\pi s_0 |\omega|^2 C e^{i(\alpha_q - \alpha_g)} \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}}, \quad (3.77)$$

где

$$d_{qg} = \sqrt{(x_q - x_g)^2 + (y_q - y_g)^2 + (z_q - z_g)^2}.$$

Из сравнения этого выражения с формулой (4.88) видно, что в случае ненаправленных элементов антенны функция пространственной корреляции в изотропном дальнем поле совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией, описывающей активное взаимное сопротивление излучения элементов.



Пусть источники помехи расположены на сфере произвольного радиуса  $r$  и дисперсии их колебательных скоростей не одинаковы, т. е.  $|\omega(\sigma)|^2 = I_n(\sigma)|\omega_0|^2 = I_n(\mathbf{u})|\omega_0|^2$ . Тогда из формулы (3.71) имеем

$$K_{qg} = s_0 r^2 A_q A_g^* \gamma^2 |\omega_0|^2 \int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) p'_q(r_q, \mathbf{u}) p'_{g^*}(r_g, \mathbf{u}) d\Omega. \quad (3.78)$$

Сравнение этого выражения с формулой (1.29) показывает, что и для произвольных элементов функция пространственной корреляции в случае изотропных помех дальнего поля (т. е. при  $I_n(\mathbf{u}) = I_n$  и  $p'_q(r_q, \mathbf{u}) = p'_q(\mathbf{u})$ ) с точностью до постоянных сомножителей совпадает с активным взаимным сопротивлением излучения элементов антенны.

В соответствии с формулой (1.79) запишем отношение мощностей сигнала и помехи на выходе антенны, воспользовавшись выражениями (3.78) и (3.66), полагая  $Q^2(\omega) = Q_c^2 \delta(\omega - \omega_0)$

$$\begin{aligned} \frac{W_c}{W_n} &= \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^n} = \frac{Q_c^2}{s_0 r_n^2 |\omega_0|^2} \times \\ &\times \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* p'_q(r_c, \mathbf{u}_q) p'_{g^*}(r_c, \mathbf{u}_g)}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* \int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) p'_q(r_n, \mathbf{u}_q) p'_{g^*}(r_n, \mathbf{u}_g) d\Omega}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Мощности сигнала и помехи, воспринимаемые ненаправленным элементом, расположенным в центре сферы, или пропорциональные им интенсивности в поле  $I_c$  и  $I_n$  можно определить по формулам (3.78) и (3.66), полагая в них  $q = g$ . Выражая числитель и знаменатель первого сомножителя правой части формулы (3.79) через эти величины, получим

$$\begin{aligned} \frac{W_c}{W_n} &= \frac{I_c}{I_n} \int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) d\Omega \frac{r_c^2}{r_n^2} \times \\ &\times \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* p'_q(r_c, \mathbf{u}_q) p'_{g^*}(r_c, \mathbf{u}_g)}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* \int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) p'_q(r_n, \mathbf{u}_q) p'_{g^*}(r_n, \mathbf{u}_g) d\Omega}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Записывая двойные суммы как квадрат модуля соответствующих одинарных и поделив числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, помехоустойчивость антенны  $\kappa$  можно записать так:

$$\kappa = \frac{W_c}{W_n} : \frac{I_c}{I_n} = \frac{\int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) d\Omega}{\int_{\Omega} I_n(\mathbf{u}) |D\sigma(\mathbf{u})|^2 d\Omega}, \quad (3.81)$$

где  $D_6(\mathbf{u}) = \frac{r_n^2 \sum_{q=1}^n A_q p'_q(r_n, \mathbf{u}_q)}{r_c^2 \sum_{q=1}^n A_q p'_q(r_c, \mathbf{u}_0)}$  — отношение давлений, развиваемых

антенной в произвольной точке сферы радиуса  $r_n$  и в точке расположения источника сигнала, определяемой величинами  $r_c$  и  $\mathbf{u}_0$ .

В частном случае расположения источников помех на поверхности сферы большого радиуса  $r_n = r_c$  функция  $D_6(\mathbf{u})$  совпадает с характеристикой направленности антенны в дальней зоне. Если к тому же пространственный спектр помех равномерный, то  $I_n(\mathbf{u})$  не зависит от  $\mathbf{u}$  и формула (3.81) переходит в выражение (1.82), определяющее коэффициент концентрации в дальнем изотропном поле помех.

Заметим, что из соотношения (3.81) следует возможность графического определения помехоустойчивости антенны в поле ближних изотропных помех. Для этого можно пользоваться координатной сеткой рис. 10, нанося на нее не характеристику направленности в дальнем поле, а некоторую другую функцию, не равную в направлении  $\mathbf{u}_0$  единице.

Полученные нами выражения, определяющие в узкой полосе частот функцию корреляции сигналов от отдельных каналов на входе сумматора антенны, имеют одинаковую структуру. Если не принимать во внимание постоянные сомножители,  $K_{qg}$  состоит из двух частей. Первая зависит от разности времен задержек в различных каналах и не зависит от вида модели помех. Вторая же зависит от расстояния между элементами (а в общем случае и от их взаимного расположения) и от рассматриваемой модели помех. Эта вторая часть является функцией пространственной корреляции  $R_{qg}$ . Было бы чрезвычайно удобно иметь возможность исследовать функцию пространственной корреляции для рассматриваемой модели помех и потом для расчета помехоустойчивости антенны умножать на экспоненту от разности фаз возбуждения аналогично тому, что мы делаем, когда пользуемся для расчета сопротивления излучения антенны не вносимыми, а взаимными сопротивлениями излучения элементов. Однако, к сожалению, как это видно, например, из формул (3.69) и (3.71), функцию  $K_{qg}$  в полосе частот в общем случае не удастся представить в виде сомножителей, один из которых — функция пространственной корреляции помех в полосе частот.

Это обстоятельство является весьма существенным и приводит к ряду трудностей вычислительного и экспериментального характера. Так, например, если мы хотим экспериментально определить помехоустойчивость антенны в реальном поле помех, то в узкой полосе частот можно ограничиться измерением функции пространственной корреляции. В случае же работы в сравнительно широкой полосе частот так поступать нельзя и необходимо для каждого сочетания фазовых возбуждений экспериментально определять функцию пространственно-временной корреляции.

## ЛИНЕЙНЫЕ АНТЕННЫ

### § 10. Приближенный способ определения коэффициента концентрации произвольных непрерывных линейных антенн

**Вывод расчетных формул.** В соответствии с выражением (2.39), давление, развиваемое произвольной линейной антенной, поперечное сечение которой представляет собой окружность радиуса  $r_0$  ( $r_0 \ll \lambda$ ), в произвольной точке пространства определяется формулой

$$p = -\frac{ik\rho cr_0}{2} \int_l \omega(l) \frac{e^{ikr}}{r} dl.$$

Совместим точку наблюдения с поверхностью некоторого элемента площади антенны  $d\sigma' = 2\pi r_0 dl'$ . Поскольку элемент этот мал по сравнению с длиной волны и давление и колебательная скорость на его поверхности постоянны, то мощность, излучаемую элементом площади  $d\sigma'$ , можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} dW(l') &= \frac{1}{2} \int_{d\sigma'} p \omega^*(l') d\sigma' = \pi r_0 p \omega^*(l') dl' = \\ &= -\frac{ik\rho c \pi r_0^2}{2} \omega(l') \int_l \omega(l) \frac{e^{ikr}}{r} dl dl'. \end{aligned}$$

Полная мощность, излучаемая всей антенной, может быть найдена в результате интегрирования этого выражения по  $l'$

$$W = -\frac{ik\rho c \pi r_0^2}{2} \int_l \int_{l'} \omega(l) \omega^*(l') \frac{e^{ikr}}{r} dl dl'.$$

Здесь  $r$  — расстояние между точками, лежащими на элементах  $dl$  и  $dl'$ , и если их положение определяется радиусами-векторами  $\rho$  и  $\rho'$ , то  $r = |\rho - \rho'|$ .

Принимая во внимание соотношение  $\omega(l) = \omega_0 A(l) = \omega_0 a(\rho) e^{i\alpha(\rho)}$ , получим

$$W = -\frac{ik\rho c \pi r_0^2 |\omega_0|^2}{2} \int_l \int_{l'} a(\rho) a(\rho') e^{i[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')]} \frac{e^{ik|\rho - \rho'|}}{|\rho - \rho'|} dl dl'.$$

В двойном интеграле по  $l$  для каждой пары элементов интегрирования  $dl, dl'$  имеется симметричная пара  $dl', dl$ , причем подынтегральные выражения отличаются только знаком показателя экспоненты, зависящего от фазового возбуждения  $\alpha(\rho)$  и  $\alpha(\rho')$ . Поэтому в сумму подынтегральных выражений, соответствующих сочетанию элементов интегрирования  $dl, dl'$  и  $dl', dl$ , вместо первого экспоненциального множителя войдет удвоенная его действительная часть. В связи

с этим обстоятельством последнее выражение можно записать следующим образом:

$$W = -\frac{ik\rho c\pi r_0^2 |\omega_0|^2}{2} \int_l \int_{l'} a(\rho) a(\rho') \cos[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')] \frac{e^{ik|\rho-\rho'|}}{|\rho-\rho'|} dl dl'. \quad (4.1)$$

Определим активное сопротивление излучения произвольной линейной антенны

$$r_s = \frac{2 \operatorname{Re} W}{|\omega_0|^2} = k\rho c\pi r_0^2 \int_l \int_{l'} a(\rho) a(\rho') \cos[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')] \times \frac{\sin k|\rho-\rho'|}{|\rho-\rho'|} dl dl'. \quad (4.2)$$

Полученное выражение, так же как и выражение (4.1), является точным, однако использование его для практических расчетов весьма осложнено необходимостью вычисления двойного интеграла по  $l$ . Вместе с тем структура выражения (4.2) подсказывает способ его приближенного вычисления. Действительно, функция  $\frac{\sin z}{z}$ , находящаяся под интегралом, довольно быстро затухает, поэтому основной вклад в величину интеграла по  $l'$  при фиксированном положении

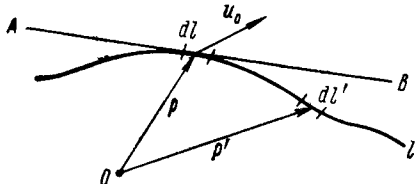


Рис. 21. К приближенному определению сопротивления излучения линейной антенны.

элемента интегрирования  $dl$  вносят только элементы  $dl'$ , близкие к  $dl$ . Мы воспользуемся этим обстоятельством для приближенного вычисления внутреннего интеграла

$$I(\rho) = \int_{l'} a(\rho') \cos[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')] \frac{\sin k|\rho-\rho'|}{|\rho-\rho'|} dl'.$$

Будем предполагать, что длина волны значительно меньше текущих радиусов кривизны линии  $l$  и ее длины. Тогда основной вклад в величину интеграла  $I(\rho)$  вносят близко расположенные к элементу  $dl$  (положение которого определяется радиусом-вектором  $\rho$ ) элементы  $dl'$ . Если радиус кривизны линии значительно больше длины волны, то эти близко расположенные элементы  $dl'$  можно считать лежащими не на линии  $l$ , а на касательной к ней в некоторой точке, принадлежащей  $dl$ . Поэтому интегрирование по кривой  $l$  заменим интегрированием по касательной  $AB$  (рис. 21). Поскольку под интегралом находится быстро затухающая функция, то без существенной погрешности интегрирование можно вести в бесконечных пределах. И еще одно предположение: пусть амплитудное распределение на участке, вносящем основной вклад в величину интеграла  $I(\rho)$ , меняется медленно. Поэтому вынесем  $a(\rho')$  за знак интеграла в точке  $\rho' = \rho$ . Совмещая ось  $x$  с касательной  $AB$ , а начало отсчета с точкой касания, имеем  $|\rho - \rho'| = x$

и

$$I(\rho) = a(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')] \frac{\sin kx}{x} dx. \quad (4.3)$$

Рассмотрим различные частные случаи. В первом из них будем предполагать, что фазовое распределение отсутствует. Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi,$$

получим

$$r_s = k\rho c\pi^2 r_0^2 \int_l a^2(\rho) dl. \quad (4.4)$$

Во втором частном случае будем предполагать, что антенна компенсирована в направлении  $u_0$ . При этом  $\alpha(\rho) = k u_0 \rho$  и  $\cos[\alpha(\rho) - \alpha(\rho')] = \cos[k u_0(\rho - \rho')]$ . При переходе от интегрирования по кривой  $l$  к интегрированию по прямой  $AB$  разность  $\rho - \rho'$  равна разности проекции векторов  $\rho$  и  $\rho'$  на ось  $x$ , т. е. просто координате  $x$ . Проекция же единичного вектора  $u_0$  на ось  $x$  равна косинусу угла между направлением компенсации и касательной к линии  $l$  в точке на  $dl$ . Обозначив этот косинус символом  $\beta(\rho)$ , получим

$$I(\rho) = a(\rho) \int_{-\infty}^{\infty} \cos[kx\beta(\rho)] \frac{\sin x}{x} dx.$$

Принимая во внимание известное равенство

$$\int_0^{\infty} \cos[kx\beta(\rho)] \frac{\sin kx}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } k > k\beta(\rho), \text{ т. е. } \beta(\rho) < 1; \\ \pi/4 & \text{при } k = k\beta(\rho), \text{ т. е. } \beta(\rho) = 1, \end{cases}$$

и возвращаясь к формуле (4.2), имеем

$$r_s = k\rho c\pi^2 r_0^2 \left[ \int_{l_1} a^2(\rho) dl_1 + \frac{1}{2} \int_{l_2} a^2(\rho) dl_2 \right], \quad (4.5)$$

где  $l_1$  — общая длина всех участков линии, не параллельных направлению компенсации (т. е. таких, где  $\beta(\rho) < 1$ );  $l_2$  — общая длина всех участков линии, параллельных направлению компенсации (т. е. таких, где  $\beta(\rho) = 1$ ).

И, наконец, последний частный случай. Пусть фазовое распределение присутствует, но меняется оно настолько медленно, что его можно считать постоянным на участке, вносящем наиболее существенный вклад в величину интеграла по  $x$  [формула (4.3)]. В этом случае можно положить  $\alpha(\rho) = \alpha(\rho')$ , и мы получаем снова формулу (4.4), которая, таким образом, справедлива не только в отсутствии фазового распределения, но и при наличии медленно меняющегося (во всяком случае медленнее, чем при компенсации отрезка вдоль его оси) фазового распределения.

Учитывая, что давление, развиваемое произвольной линией в дальнем поле в некотором направлении  $\mathbf{u}_0$ , определяется выражением (2.45),

$$p(\mathbf{u}_0) = -\frac{ik\rho c r_0 \omega_0}{2r} e^{ikr} \int_l a(\rho) e^{i\alpha(\rho)} e^{-ik\rho u_0} dl, \quad (4.6)$$

по формуле (1.38) легко определить и коэффициент концентрации линии в направлении  $\mathbf{u}_0$ .

В случае отсутствия фазового распределения

$$K = \frac{2}{\lambda} \frac{\left| \int_l a(\rho) e^{-ik\rho u_0} dl \right|^2}{\int_l a^2(\rho) dl}. \quad (4.7)$$

В случае медленно меняющегося по антенне фазового распределения

$$K = \frac{2}{\lambda} \frac{\left| \int_l a(\rho) e^{i\alpha(\rho)} e^{-ik\rho u_0} dl \right|^2}{\int_l a^2(\rho) dl}. \quad (4.8)$$

Наконец, при фазовом распределении, обеспечивающем компенсацию антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$ ,

$$K = \frac{4}{\lambda} \frac{\left| \int_l a(\rho) dl \right|^2}{2 \int_{l_1} a^2(\rho) dl_1 + \int_{l_2} a^2(\rho) dl_2}, \quad (4.9)$$

где, как и в формуле (4.5),  $l_2$  — общая длина всех участков антенны, параллельных направлению компенсации  $\mathbf{u}_0$ , а  $l_1$  — общая длина всех остальных ее участков ( $l_1 + l_2 = l$ ). Из формулы (4.9) следует, что коэффициент концентрации компенсированной произвольной непрерывной линии при равномерном амплитудном распределении равен отношению удвоенной длины линии к длине волны (если только отсутствуют участки линии, параллельные направлению компенсации).

**Определение оптимальных возбуждений.** С помощью полученных приближенных выражений легко найти (разумеется, тоже приближенно) распределения, обеспечивающие максимум коэффициента концентрации произвольной линии. Прежде всего из сравнения формул (4.7), (4.8) и (4.9) видно, что для достижения максимальной величины коэффициента концентрации в направлении  $\mathbf{u}_0$  антенну следует компенсировать в этом направлении. Таким образом, оптимальное фазовое распределение уже определено и остается найти только амплитудное. Сделать это можно с помощью прямого метода вариационного исчисления.

Разобьем в формуле (4.9) участок  $l_1$  на  $n$ , а участок  $l_2$  на  $m$  малых одинаковых элементов величиной  $\Delta l$  и заменим интегрирование по  $l$

соответствующим суммированием:

$$K = \frac{4 \Delta l}{\lambda} \frac{\left[ \sum_{q=1}^n a(\rho_q) + \sum_{g=1}^m a(\rho_g) \right]^2}{2 \sum_{q=1}^n a^2(\rho_q) + \sum_{g=1}^m a^2(\rho_g)} = \frac{4 \Delta l}{\lambda} \frac{F^2}{G}.$$

Теперь коэффициент концентрации представлен как функция  $n + m$  переменных  $a(\rho_q)$  и  $a(\rho_g)$ . Для определения  $a(\rho_q)$  и  $a(\rho_g)$ , обеспечивающих максимум  $K$ , вычислим первые производные этого выражения по  $a(\rho_s)$ , где  $s = 1, 2, \dots, n$  и по  $a(\rho_r)$ , где  $r = 1, 2, \dots, m$

$$\frac{\partial K}{\partial a(\rho_s)} = \frac{4 \Delta l}{\lambda} \frac{2FG - 2a(\rho_s)F^2}{G^2}, \quad s = \overline{1, n}$$

$$\frac{\partial K}{\partial a(\rho_r)} = \frac{4 \Delta l}{\lambda} \frac{2FG - 2a(\rho_r)F^2}{G^2}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Приравнявая к нулю полученные выражения, имеем

$$a(\rho_s) = \frac{1}{2} \frac{G}{F}, \quad s = \overline{1, n},$$

$$a(\rho_r) = \frac{G}{F}, \quad r = \overline{1, m}.$$

Записанные равенства представляют собой систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $a(\rho_s)$  и  $a(\rho_r)$ . В рассматриваемом случае нам достаточно найти решение с точностью до постоянного множителя. Такое решение легко получить, обозначая отношение  $G$  к  $F$  некоторой константой  $C$ . (Это возможно, поскольку ни  $G$ , ни  $F$  не зависят по отдельности от  $s$  или  $r$ , а зависят от сумм, в которые входят все  $s$  от 1 до  $n$  и все  $r$  от 1 до  $m$ .)

Поэтому

$$a(\rho_s) = \frac{1}{2} C, \quad s = \overline{1, n},$$

$$a(\rho_r) = C, \quad r = \overline{1, m}.$$

Возвращаясь от суммирования к интегрированию вдоль линии, получим вывод о том, что коэффициент концентрации произвольной компенсированной линии максимален при равномерном амплитудном распределении вдоль всех участков линии, не параллельных направлению компенсации, и равномерном же, но вдвое большем распределении вдоль всех участков, параллельных направлению компенсации. Убедиться в том, что найденное нами распределение обеспечивает именно максимальное, а не минимальное значение коэффициента концентрации, можно с помощью неравенства Коши—Буняковского так же, как это делалось в предыдущей главе при определении оптимального возбуждения антенны при независимости ее элементов.

Подставляя оптимальное распределение  $a(\rho) = 1$  при  $\rho$ , определяющих точки, лежащие на  $l_1$  и  $a(\rho) = 2$  при  $\rho$ , определяющих точки на  $l_2$  в формулу (4.9), получим выражение для максимальной величины

коэффициента концентрации произвольной компенсированной линейной антенны

$$K = \frac{2}{\lambda} (l_1 + 2l_2).$$

Заметим, что это выражение можно было получить непосредственно из формулы (3.19), считая, что участки линии  $l_1$  и  $l_2$  взаимно независимы.

Из последней формулы видно, что максимальная величина коэффициента концентрации линии длиной  $H$  равна  $4H/\lambda$  и достигается в том случае, когда линия представляет собой продольно компенсированный отрезок прямой.

При выводе приближенных формул для определения активного сопротивления излучения и коэффициента концентрации произвольных непрерывных линейных антенн мы предполагали, что радиусы кривизны линии значительно больше длины волны. Строго говоря, следовало бы еще считать, что отдельные ветви кривой отстоят друг от друга на расстояние значительно большее длины волны. Так например, если линия представляет собой плоскую спираль, состоящую из нескольких витков, то даже при больших относительных радиусах кривизны спирали приближенная формула может дать большую ошибку, если только расстояние между соседними витками спирали невелико по сравнению с длиной волны. Действительно, полученные формулы приближенно учитывают взаимодействие элементов линии, лежащих на одном витке спирали, и не учитывают взаимодействия отдельных витков спирали между собой, которое при малом расстоянии между витками может быть весьма существенным.

Во многих случаях ошибку, возникающую из-за взаимодействия отдельных ветвей линии, можно существенно уменьшить, производя приближенное вычисление (например, с помощью метода стационарной фазы) соответствующих интегралов.

## § 11. Антенна в виде отрезка прямой

Пусть отрезок длиной  $l$  расположен вдоль оси  $x$ . Положение радиуса-вектора  $\mathbf{u}$  в силу симметрии поля, создаваемого отрезком относительно оси  $x$ , можно определить одной пространственной координатой, например, углом  $\alpha$ , отсчитываемым от плоскости  $yOz$ .

Тогда характеристика направленности отрезка определится формулой

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\int_x A(x) e^{-ik\rho\mathbf{u}} dx}{\int_x A(x) e^{-ik\rho\mathbf{u}_0} dx}.$$

Скалярное произведение  $\rho\mathbf{u}$  равно  $x \sin \alpha$ , поскольку  $\rho_y = \rho_z = 0$ ;  $\rho_x = x$ , а проекция единичного вектора  $\mathbf{u}$  на ось  $x$  равна  $|\mathbf{u}| \sin \alpha = \sin \alpha$ . Поэтому

$$D(\alpha) = \frac{\int_x a(x) e^{i\alpha(x)} e^{-ikx \sin \alpha} dx}{\int_x a(x) e^{i\alpha(x)} e^{-ikx \sin \alpha_0} dx}. \quad (4.10)$$



Для компенсации антенны в направлении  $\alpha = \alpha_0$  следует положить  $\alpha(x) = kx \sin \alpha_0$ ; при этом

$$D(\alpha) = \frac{\int_x a(x) e^{-ikx(\sin \alpha - \sin \alpha_0)} dx}{\int_x a(x) dx}. \quad (4.11)$$

**Приближенное определение ширины характеристики направленности.** Получим приближенные выражения, определяющие ширину характеристики направленности прямой линии большого по сравнению с длиной волны размера при произвольном амплитудном распределении  $a(x)$ . Для этого совместим начало координат с центром тяжести антенны, представляя ее некоторой материальной линией, имеющей распределение плотности, соответствующее амплитудному распределению  $a(x)$ . При этом должно выполняться условие  $\int_x xa(x) dx = 0$ .

Разложим в выражении (4.11)  $\sin \alpha$  в ряд Тейлора вблизи точки  $\alpha_0$  и ограничимся тремя первыми членами разложения  $\sin \alpha = \sin \alpha_0 + \Delta \alpha \cos \alpha_0 - \frac{(\Delta \alpha)^2}{2} \sin \alpha_0$ , где  $\Delta \alpha = \alpha - \alpha_0$ . Воспользуемся также и разложением экспоненциальной функции в степенной ряд  $e^{-i\beta} = 1 - i\beta - \frac{\beta^2}{2} + \dots$ . В результате получим выражение для  $R(\alpha)$ , состоящее из трех слагаемых, причем одно из них обращается в нуль в связи с выбором начала координат в центре тяжести антенны. Окончательно будем иметь

$$R(\alpha) = 1 - \frac{k^2 [\Delta \alpha \cos \alpha_0 - 0,5 (\Delta \alpha)^2 \sin \alpha_0]^2 \int_x x^2 a(x) dx}{2 \int_x a(x) dx}. \quad (4.12)$$

Будем приближенно считать, что полная ширина характеристики направленности  $\alpha_{0,7}$  равна удвоенной величине угла между направлениями  $\alpha_0$  и  $\alpha$ , соответствующему значению характеристики направленности, равному 0,707 и лежащему слева от  $\alpha_0$ . Тогда  $\alpha_{0,7} = 2(\alpha_0 - \alpha) = -2\Delta \alpha$ . При этом  $R(\alpha) = 0,707$  и второе слагаемое выражения (4.12) равно 0,293, откуда

$$\frac{\alpha_{0,7}}{2} \cos \alpha_0 + \frac{\alpha_{0,7}^2}{8} \sin \alpha_0 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{0,586 \int_x a(x) dx}{\int_x x^2 a(x) dx}}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть первое слагаемое левой части значительно больше второго, что имеет место при  $\alpha_0 = 0$  и вплоть до некоторого значения  $\alpha_0$ , тем большего, чем меньше ширина характеристики направленности  $\alpha_{0,7}$ . Второе слагаемое не меньше чем на порядок отличается от первого при выполнении условия

$$\alpha_{0,7} \leq \frac{0,4 \cos \alpha_0}{\sin \alpha_0}$$

или, если угол  $\alpha_{0,7}$  выражен в градусах,

$$\alpha_{0,7}^0 < 23^\circ \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (4.14)$$

При выполнении этого условия из формулы (4.13) имеем

$$\alpha_{0,7} = \frac{2}{k \cos \alpha_0} \sqrt{\frac{0,586 \int \frac{a(x) dx}{x}}{\int_x x^2 a(x) dx}}. \quad (4.15)$$

Если же антенна компенсирована вдоль своей оси, т. е.  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , то из формулы (4.13) получим

$$\alpha_{0,7} = 2 \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 0,586 \int \frac{a(x) dx}{x}}{k^2 \int_x x^2 a(x) dx}}. \quad (4.16)$$

Для случая равномерного амплитудного распределения из последних двух формул можно получить следующие выражения:

$$\alpha_{0,7} = \frac{0,84}{\cos \alpha_0} \frac{\lambda}{l} \quad (4.17)$$

и

$$\alpha_{0,7} = 1,84 \sqrt{\frac{\lambda}{l}}. \quad (4.18)$$

Анализ приведенных выше соотношений позволяет сделать следующие выводы, справедливые при больших относительных размерах отрезка.

1. Зависимость ширины характеристики направленности от волнового размера антенны различна для разных углов компенсации.

2. При выполнении условия (4.14) с увеличением наклона главного максимума характеристики направленности ее ширина возрастает пропорционально  $\cos^{-1} \alpha_0$ .

3. При увеличении амплитуды возбуждения на краях отрезка характеристика направленности обостряется, а в середине — расширяется. Это утверждение становится очевидным из рассмотрения выражений (4.15) и (4.16), если предположить, что при перераспределении чувствительности вдоль антенны интеграл по ее длине от  $a(x)$  остается постоянным.

4. При большом волновом размере продольно компенсированной антенны ее характеристика направленности значительно шире, чем в отсутствие компенсации.

**Теоремы о направленности отрезка прямой.** Рассмотрим некоторые теоремы, связывающие между собой направленные свойства отрезка с амплитудно-фазовым распределением.

1. При четном относительно центра антенны амплитудном  $[a(x)]$  и нечетном фазовом  $[\alpha(x)]$  распределении антенна имеет фазовый центр, совпадающий с ее геометрическим центром.

В соответствии с формулой (4.10) при совмещении начала координат с центром излучающего отрезка его характеристика направленности может быть записана следующим образом:

$$D(\alpha) = \frac{\int_{-l/2}^{l/2} a(x) e^{i\alpha(x)} e^{-ikx \sin \alpha} dx}{\int_{-l/2}^{l/2} a(x) e^{i\alpha(x)} e^{-ikx \sin \alpha_0} dx}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим сумму значений подынтегральной функции при некоторой координате  $x$  и симметричной ей  $-x$ :

$$a(x) e^{i[\alpha(x) - kx \sin \alpha]} + a(-x) e^{i[\alpha(-x) + kx \sin \alpha]}.$$

Учитывая, что  $a(x) = a(-x)$  и  $\alpha(x) = -\alpha(-x)$ , эту сумму с помощью формулы Эйлера можно выразить так:  $2a(x) \cos[\alpha(x) - kx \sin \alpha]$ . Поэтому интегрирование в формуле (4.19) можно проводить только по половине антенны и записать

$$D(\alpha) = R(\alpha) e^{ir(\alpha)} = \frac{\int_0^{l/2} a(x) \cos[\alpha(x) - kx \sin \alpha] dx}{\int_0^{l/2} a(x) \cos[\alpha(x) - kx \sin \alpha_0] dx}.$$

Правая часть этого выражения чисто вещественная, поэтому  $r(\alpha)$  равно нулю или  $\pi$ , а следовательно, антенна имеет фазовый центр. Так как при записи характеристики направленности начало координат было выбрано в центре антенны, то фазовый центр совпадает с геометрическим центром антенны.

Теорема о фазовом центре впервые была доказана в работе [9]; справедлива и обратная теорема (см. монографию [18]), но доказательство ее значительно сложнее.

2. Умножение амплитудного распределения на некоторую постоянную величину или прибавление такой величины к фазовому распределению не изменяет характеристики направленности антенны. Доказательство этого утверждения состоит в выносе из-под знака интеграла в числителе и знаменателе формулы (4.19) одинаковых сомножителей и последующего их сокращения.

3. Введение линейного фазового распределения смещает характеристику направленности относительно оси отсчета углов  $\alpha$  и деформирует ее вдоль этой оси, но не меняет самого вида функции, описывающей характеристику направленности. Характеристику направленности линейной антенны при некотором амплитудно-фазовом распределении  $A(x)$  можно рассматривать как функцию аргумента  $\sin \alpha$ . Действительно,

$$\left| \frac{\int_{-l/2}^{l/2} A(x) e^{-ikx \sin \alpha} dx}{\int_{-l/2}^{l/2} A(x) e^{-ikx \sin \alpha_0} dx} \right| = R(\sin \alpha). \quad (4.20)$$

Если же дополнительно ввести некоторое линейное фазовое распределение  $k\beta x$ , то характеристика направленности антенны может быть записана в виде

$$\left| \frac{\int_l A(x) e^{-ikx(\sin \alpha - \beta)} dx}{\int_l A(x) e^{-ikx(\sin \alpha_0 - \beta)} dx} \right| = R(\sin \alpha - \beta). \quad (4.21)$$

Убедиться в справедливости последнего равенства можно, введя в выражении (4.20) подстановку  $\sin \alpha = \delta$ , а в выражении (4.21) подстановку  $\sin \alpha - \beta = \delta$ . Видно, что результат интегрирования по  $x$  в обоих выражениях даст одну и ту же функцию с разными аргументами.

В частном случае отсутствия фазового распределения по антенне, т. е. при  $A(x) = a(x)$ , характеристика направленности имеет основной максимум при  $\alpha = 0$ , поскольку при этом  $\sin \alpha = 0$  и происходит синфазное сложение колебаний от отдельных участков антенны. Если теперь ввести линейное фазовое распределение, то синфазное сложение будет наблюдаться при  $\sin \alpha - \beta = 0$ , т. е. в другом направлении. Таким образом, линейное фазовое распределение смещает положение основного максимума излучения в пространстве, не изменяя при этом вида функции, описывающей характеристику направленности, и оставляя, в частности, постоянной величину добавочных максимумов.

4. Изменение амплитудного распределения при отсутствии фазового не меняет положения главного максимума характеристики направленности. Характеристика направленности линейной антенны в отсутствии фазового распределения записывается следующим образом:

$$D(\alpha) = \frac{\int_l a(x) e^{-ikx \sin \alpha} dx}{\int_l a(x) e^{-ikx \sin \alpha_0} dx}.$$

Из этого выражения видно, что, независимо от вида амплитудного распределения, синфазное сложение сигналов от отдельных элементов антенны происходит в направлении  $\alpha = 0$ , поэтому в этом направлении и формируется главный максимум характеристики направленности при любом виде функции  $a(x)$ .

5. При любом амплитудном распределении (в отсутствии фазового) модуль характеристики направленности есть функция четная относительно  $\alpha$ . С помощью формулы Эйлера последнее выражение можно записать так:

$$R(\alpha) = \frac{\sqrt{\left[ \int_l a(x) \cos [kx \sin \alpha] dx \right]^2 + \left[ \int_l a(x) \sin [kx \sin \alpha] dx \right]^2}}{\left| \int_l a(x) e^{-ikx \sin \alpha_0} dx \right|}.$$

Отсюда непосредственно следует вывод о том, что  $R(\alpha) = R(-\alpha)$ .

**Характеристика направленности и коэффициент концентрации при равномерном амплитудном распределении.** Определим характеристику направленности антенны в виде отрезка прямой при равномер-

ном амплитудном и линейном фазовом распределении  $\alpha(x) = k\beta x$ . Поскольку для компенсации антенны в направлении  $\alpha_0$  требуется ввести распределение  $\alpha(x) = kx \sin \alpha_0$ , то рассматриваемое нами распределение включает в себя и компенсацию антенны в произвольном направлении. Подставляя в формулу (4.10)  $a(x) = 1$ ,  $\alpha(x) = k\beta x$  и производя интегрирование по  $x$  от  $-l/2$  до  $+l/2$ , получим

$$D(\alpha) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha - \beta) \right]}{\frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha - \beta)} \cdot \frac{\frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha_0 - \beta)}{\sin \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha_0 - \beta) \right]}. \quad (4.22)$$

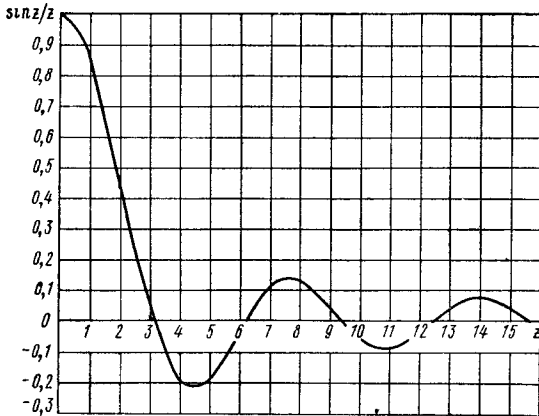


Рис. 22. График функции  $\frac{\sin z}{z}$ .

В случае компенсации антенны в направлении  $\alpha_0$  следует положить  $\beta = \sin \alpha_0$  и

$$D(\alpha) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]}{\frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)} = \frac{\sin z}{z}. \quad (4.23)$$

График функции  $\sin z/z$  изображен на рис. 22. Пользуясь им, легко определить характеристику направленности отрезка при любой его длине и при любом направлении компенсации. Функция  $\sin z/z$  равна 0,707 при  $z = \pm 1,39$ . Зная эту величину, можно найти ширину характеристики направленности на уровне 0,707 для любого угла компенсации  $\alpha_0$ . В частности, для  $\alpha_0 = 0$  и  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$  полная ширина характеристики направленности определяется выражениями

$$\alpha_{0,7} = 2 \arcsin \frac{1,39\lambda}{\pi l}$$

и

$$\alpha_{0,7} = 2 \arccos \left[ 1 - \frac{1,39\lambda}{\pi l} \right].$$

Получим выражения, определяющие ширину характеристики направленности при  $l \gg \lambda$ . В случае  $\alpha_0 = 0$ , ограничиваясь первым членом разложения арксинуса в степенной ряд, имеем

$$\alpha_{0,7} = \frac{2 \cdot 1,39\lambda}{\pi l} = 0,88 \frac{\lambda}{l} = 50^\circ \frac{\lambda}{l}. \quad (4.24)$$

В случае  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , принимая во внимание, что косинус малого угла  $\beta$  равен  $1 - \beta^2/2$ , получим

$$\alpha_{0,7} = 2 \sqrt{\frac{2 \cdot 1,39\lambda}{\pi l}} = 1,88 \sqrt{\frac{\lambda}{l}} = 108^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{l}}, \quad (4.25)$$

Заметим, что эти формулы являются более точными, чем приближенные выражения (4.17) и (4.18).

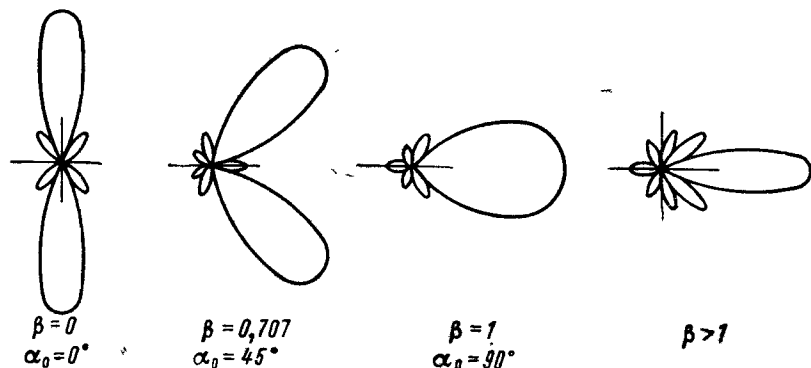


Рис. 23. Изменение характеристики направленности отрезка при изменении коэффициента  $\beta$ .

Добавочные максимумы характеристики направленности отрезка прямой располагаются примерно посредине между соседними нулями, которые имеют место при  $z = n\lambda$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ). Величина нескольких первых добавочных максимумов составляет — 0,22; 0,13; — 0,09; 0,07; — 0,06; 0,05.

При изменении угла компенсации  $\alpha_0$  от 0 до  $\pi/2$  основной максимум характеристики направленности также поворачивается от 0 до  $90^\circ$ , причем ширина его (в случае  $l \gg \lambda$ ) увеличивается вначале по закону  $\cos^{-1} \alpha_0$  [см. формулу (4.17)], а потом по более сложному закону. На рис. 23 показано изменение характеристики направленности при изменении  $\beta$ . При развороте характеристики направленности ее правые добавочные максимумы как бы «прячутся» в разрез, проходящий вдоль оси симметрии, а левые — наоборот, «появляются» из него. В случае же  $\beta > 1$  часть основного максимума «прячется» в разрез, отчего его ширина существенно уменьшается, но зато величина добавочных (по-

отношению к основному) возрастает. При  $\beta = 0$  фаза возбуждения всех элементов линии одинакова и фазовая скорость распространения излучаемой волны вдоль оси  $x$  равна бесконечности. С увеличением угла компенсации она падает и при  $\alpha_0 = \pi/2$  (при  $\beta = 1$ ) равняется скорости распространения звука в среде. Если же еще увеличивать  $\beta$ , то фазовая скорость распространения волны вдоль антенны становится меньше скорости звука в среде, поэтому антенны, обеспечивающие такой режим работы, часто называют антеннами замедленных волн.

Определим коэффициент концентрации компенсированного отрезка. Введем вместо угла  $\alpha$  дополнительный угол  $\theta$  ( $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ) и будем вычислять интеграл от квадрата характеристики направленности по полному телесному углу в сферической системе координат.

Выражение (4.22), определяющее характеристику направленности отрезка при произвольном  $\beta$ , можно записать следующим образом:

$$D(\theta) = \frac{\sin \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (\cos \theta - \beta) \right]}{\frac{\pi l}{\lambda} (\cos \theta - \beta)} E(\beta),$$

где

$$E(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta \leq 1 \\ \frac{\frac{\pi l}{\lambda} (1 - \beta)}{\sin \left[ \frac{\pi l}{\lambda} (1 - \beta) \right]} & \text{при } \beta > 1. \end{cases}$$

Эта запись предполагает, что при  $\beta \leq 1$  характеристика направленности нормируется в направлении компенсации  $\theta_0$ , а при  $\beta > 1$  в направлении  $\theta_0 = 0$  (т. е.  $\alpha_0 = \pi/2$ ). Напомним, что при  $\beta \leq 1$  справедливо соотношение  $\beta = \sin \alpha_0 = \cos \theta_0$ .

Введем замену переменной  $x = \frac{\pi l}{\lambda} (\cos \theta - \beta)$  и обозначение  $\frac{\pi l}{\lambda} = 0,5 kl = y$ . Тогда, учитывая симметрию характеристики направленности относительно оси, на которой расположен отрезок, в соответствии с формулой (3.20) имеем

$$K^{-1} = \frac{E^2(\beta)}{2y} \int_{-y(1+\beta)}^{y(1-\beta)} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{E^2(\beta)}{4y} \left\{ \int_{-y(1+\beta)}^{y(1-\beta)} \frac{dx}{x^2} - \int_{-y(1+\beta)}^{y(1-\beta)} \frac{\cos 2x}{x^2} dx \right\}.$$

Второй интеграл с помощью подстановки  $z = 2x$  легко сводится к интегральному синусу. В результате получим

$$K^{-1} = \frac{E^2(\beta)}{2kl} \left\{ \frac{\cos [kl(1-\beta)] - 1}{\frac{kl}{2}(1-\beta)} + \frac{\cos [kl(1+\beta)] - 1}{\frac{kl}{2}(1+\beta)} + 2 \text{Si} [kl(1-\beta)] + 2 \text{Si} [kl(1+\beta)] \right\}. \quad (4.26)$$

В отсутствии компенсации, т. е. при  $\beta = 0$ ,

$$K = \frac{0,5k^2l^2}{\cos kl + kl \operatorname{Si}(kl) - 1}. \quad (4.27)$$

При  $kl \rightarrow \infty$  интегральный синус стремится к  $\pi/2$  [см., например, [53], где представлены таблицы и графики функции  $\operatorname{Si}(x)$ ], поэтому при  $l \gg \lambda$

$$K = \frac{2l}{\lambda}. \quad (4.28)$$

На рис. 24 представлена зависимость коэффициента концентрации некомпенсированного отрезка от  $l/\lambda$ , определенная по точной формуле

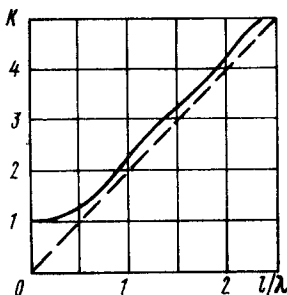


Рис. 24. Зависимость коэффициента концентрации отрезка прямой от его относительной длины.

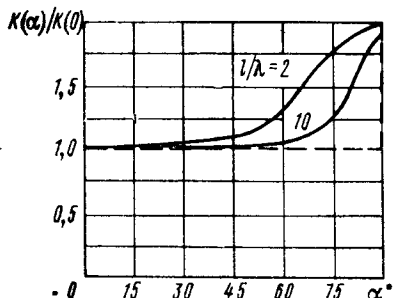


Рис. 25. Зависимость  $K(\alpha)/K(0)$  от угла компенсации  $\alpha$ .

(4.27) (сплошная кривая) и по формуле (4.28) (штриховая кривая). Как видно из сравнения приведенных кривых, наибольшее расхождение между ними наблюдается, как это и следовало ожидать, при малых отношениях  $l/\lambda$ ; начиная же с  $l/\lambda = 2$  ошибка в определении коэффициента концентрации по формуле (4.28) не превосходит 5%.

При компенсации отрезка в направлении  $\alpha_0 = 90^\circ$ , т. е. при  $\beta = 1$ , из выражения (4.26) имеем

$$K = \frac{2k^2l^2}{\cos 2kl + 2kl \operatorname{Si}(2kl) - 1}. \quad (4.29)$$

Если при этом  $l \gg \lambda$ , то  $kl \gg 1$  и

$$K = \frac{4l}{\lambda}. \quad (4.30)$$

Формулы (4.27) и (4.29) имеют одинаковую структуру; более того, если в формуле (4.27) вместо  $kl$  записать  $2kl$ , то она превратится в формулу (4.29). Отсюда следует вывод о том, что коэффициент концентрации продольно компенсированного отрезка совпадает с коэффициентом концентрации отрезка в отсутствии компенсации при вдвое большем  $kl$ , т. е. либо при той же частоте, но вдвое большей длине, либо при той же длине, но на частоте, вдвое более высокой.



На рис. 25 представлена рассчитанная по формуле (4.26), относительная зависимость коэффициента концентрации линейной антенны от угла компенсации  $\alpha_0$  при  $l/\lambda = 2$  и  $l/\lambda = 10$ . Видно, что с ростом  $\alpha_0$  коэффициент концентрации монотонно увеличивается, причем вначале медленно, а затем, начиная с некоторого угла  $\alpha_0$ , тем большего, чем больше  $l/\lambda$ , более быстро.

Рассмотрим, какие выводы можно сделать на основании приближенной формулы (4.9). В отсутствии компенсации ( $\alpha_0 = 0$ )  $l = l_1$ ;  $l_2 = 0$ , а при продольной компенсации, наоборот,  $l = l_2$ ;  $l_1 = 0$ . Принимая во внимание эти соотношения и полагая  $a(\rho) = 1$ , из формулы (4.9) получаем

$$K = \begin{cases} 2l/\lambda & \text{при } \alpha_0 < \frac{\pi}{2}, \\ 4l/\lambda & \text{при } \alpha_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (4.31)$$

На рис. 25 штриховой линией показана зависимость, соответствующая этой формуле. Как и следовало ожидать, приближенные выражения тем точнее, чем больше  $l/\lambda$ .

Ранее мы отмечали, что с увеличением угла компенсации  $\alpha_0$  ширина характеристики направленности увеличивается по закону  $\cos^{-1} \alpha_0$ . Однако коэффициент концентрации (см. рис. 25) при этом не падает. Объяснить это обстоятельство можно следующим образом. Представим пространственную характеристику направленности двумя коническими поверхностями (проходящими через значения 0,707) и кольцевой частью поверхности сферы радиуса  $R = 1$ , заключенной между ними (рис. 26). Коэффициент концентрации отрезка обратно пропорционален интегралу от квадрата характеристики направленности, т. е. площади шарового пояса. С увеличением угла компенсации ширина пояса  $\Delta$  увеличивается по закону  $\cos^{-1} \alpha_0$ , а длина средней его окружности  $2\pi b$  уменьшается по закону  $\cos \alpha_0$ , поэтому площадь пояса, а значит, и коэффициент концентрации остается постоянным. Однако, начиная с некоторого угла  $\alpha_0$  (тем большего, чем меньше  $\Delta$ , т. е. чем больше  $l/\lambda$ ), внутренний конус сомкнется в линию, и площадь пояса (теперь уже сегмента) начинает уменьшаться, а коэффициент концентрации — увеличиваться. Пользуясь формулами (4.24) и (4.25), легко вычислить отношение площадей сферического пояса при  $\alpha_0 = 0$  и сферического сегмента при  $\alpha_0 = \pi/2$ . Это отношение оказывается равным двум, что и соответствует вдвое большему коэффициенту концентрации продольно компенсированного отрезка по сравнению со случаем отсутствия компенсации.

Мы рассмотрели поведение коэффициента концентрации отрезка прямой при  $\beta \leq 1$ . Анализ формулы (4.26) показывает, что при не-

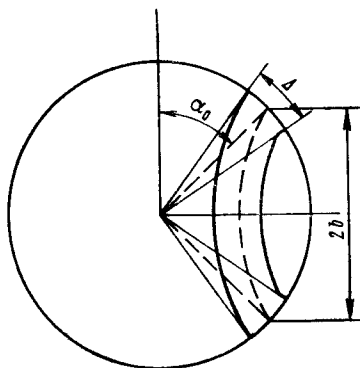


Рис. 26. К объяснению зависимости коэффициента концентрации от угла компенсации.

котором значении  $\beta$ , соответствующем равенству  $kl\beta - kl = \pi$ , наблюдается максимальное значение коэффициента концентрации, приблизительно равное (при  $l \gg \lambda$ )  $7l/\lambda$ .

Физически это объясняется тем, что с ростом  $\beta$  от единицы и выше наиболее медленно меняющаяся часть главного максимума, а именно его часть вблизи значения  $D(\alpha) = 1$ , исчезает в разрезе, совпадающем с осью антенны; при этом основной максимум характеристики направленности обостряется, а добавочный растет. Приведенное условие экстремума коэффициента концентрации соответствует уменьшению давления, развиваемого антенной вдоль оси на 36%, что вызывает увеличение первых добавочных максимумов характеристики направленности с 0,22 до 0,35.

**Влияние амплитудных и фазовых распределений.** Известен целый ряд амплитудных распределений, при которых характеристика направленности отрезка прямой выражается аналитически сравнительно простой функцией. Мы не будем приводить здесь эти распределения, при необходимости их можно найти в работах [65], [11], [34], [48] и др. Заметим только, что при падении амплитуд к краям отрезка характеристика направленности несколько расширяется, а добавочные максимумы уменьшаются; при росте амплитуд к краям отрезка — наоборот, добавочные максимумы возрастают, а основной максимум становится уже. Коэффициент концентрации отрезка при произвольном амплитудном распределении и наличии фазового распределения, обеспечивающего компенсацию в направлении, отличном от продольного к антенне, можно определить по формуле (4.9), которая в рассматриваемом случае может быть записана следующим образом:

$$K = \frac{2l \left| \int_x a(x) dx \right|^2}{\lambda \int_x a^2(x) dx}. \quad (4.32)$$

Если же амплитудное распределение определяется функцией, интеграл от которой вычисляется довольно сложно, или же амплитудное распределение вообще неизвестно, но зато известна характеристика направленности отрезка, то коэффициент концентрации отрезка можно найти численным интегрированием квадрата характеристики направленности по формуле (3.20).

При  $l \gg \lambda$  расчет по этой формуле становится сложным и может привести к заметным ошибкам. В этом случае для вычисления коэффициента концентрации отрезка прямой целесообразно воспользоваться выражением (3.61), полученным в предположении, что активное сопротивление излучения отрезка прямой в свободном поле равно активному сопротивлению этого отрезка (имеется в виду полное активное сопротивление излучения, т. е. с учетом всех взаимодействий в антенне), помещенного в бесконечную антенну из таких же отрезков, причем направление компенсации отрезков и всей антенны совпадают.

Напомним, что формула (3.61) имеет следующий вид:

$$K = \frac{2l}{\lambda} \frac{1}{\sum_{n_1}^{n_2} \eta_n R^2(\theta_n)}, \quad (4.33)$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } \cos^2 \theta_n = 1; \\ 1 & \text{при } \cos^2 \theta_n < 1; \end{cases}$$

$$n_1 = -E [d/\lambda (1 + \cos \theta_0)];$$

$$n_2 = E [d/\lambda (1 - \cos \theta_0)];$$

$$\cos \theta_n = \cos \theta_0 + n \frac{\lambda}{d}.$$

Расстояние между центрами соседних отрезков в бесконечной одномерной антенне  $d$  можно выбирать из следующих соображений. Чем больше  $d$ , тем взаимодействие отрезков в антенне меньше и тем более точный результат можно получить по формуле (4.33). Однако с увеличением  $d$  увеличивается число слагаемых в сумме по  $n$  и тем более трудоемкими становятся вычисления. Исходя из этих соображений, не следует выбирать  $d < l$ , и, с другой стороны, при  $l \geq (2 \div 3)\lambda$  не следует выбирать  $d$  существенно большим  $l$ . Как показывают расчеты, при  $l/\lambda \geq 1$  и  $d = l$  формула (4.33) обеспечивает практически достаточную точность.

Влияние на направленность отрезка фазовых распределений (за исключением линейного фазового распределения) исследовано сравнительно мало. Некоторые сведения можно найти в [1], где рассматриваются квадратичные и кубические фазовые распределения.

В случае, когда длина отрезка значительно больше длины волны, анализ направленных свойств отрезка и даже синтез его существенно упрощаются при применении метода стационарной фазы.

Этот метод позволяет приближенно вычислять интегралы от некоторой комплексной функции в случае, если модуль этой функции меняется на интервале интегрирования сравнительно медленно, а аргумент быстро. Математическая формулировка принципа стационарной фазы имеет следующий вид [48]:

$$\int_a^b f(\eta) e^{-iv(\eta)} d\eta = e^{-iv(\eta_0)} \sqrt{\frac{\pi f^2(\eta_0)}{|v''(\eta_0)|}} \{C(x_1) + C(x_2) \mp iS(x_1) \mp iS(x_2)\}, \quad (4.34)$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{|v(a) - v(\eta_0)|};$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{|v(b) - v(\eta_0)|};$$

$\eta_0$  — точка стационарной фазы, определяемая из соотношения  $v'(\eta_0) = 0$ ;  $C(x)$  и  $S(x)$  — интегралы Френеля;

$$C(x) - iS(x) = \int_0^x e^{-i\frac{\pi}{2}t^2} dt.$$

Верхние знаки в формуле (4.34) соответствуют случаю  $v'(\eta_0) > 0$ , нижние —  $v'(\eta_0) < 0$ .

Физическая сущность метода стационарной фазы состоит в том, что, если фаза подынтегрального выражения при изменении  $\eta$  от  $a$  до  $b$  несколько раз переходит через  $2\pi$ , то основной вклад в величину интеграла вносится областью, где наблюдается экстремум  $v(\eta)$ , т. е. первой зоной Френеля. Другие же участки интервала интегрирования создают колебания с противоположными знаками и примерно одинаковыми амплитудами и поэтому взаимно компенсируются. Так, вторая зона Френеля, следующая за участком, соответствующим максимальному вкладу в величину интеграла, компенсирует третью зону, четвертая — пятую и т. д. Исключения могут составлять концы интервала интегрирования  $a$  и  $b$ . Их вклады в величину интеграла и учитывают функции  $C(x)$  и  $S(x)$ .

Более подробно с физической интерпретацией метода стационарной фазы можно познакомиться в работе [50].

Часто пользуются упрощенной формулой метода стационарной фазы, получающейся из приведенной выше, при устремлении пределов интегрирования в бесконечность. Так как  $C(\infty) = S(\infty) = 0,5$  и  $1 \mp i1 = \sqrt{2}e^{\pm i\pi/4}$ , имеем

$$\int_a^b f(\eta) e^{-iv(\eta)} d\eta = \sqrt{\frac{2\pi f^2(\eta_0)}{|v''(\eta_0)|}} e^{-i[v(\eta_0) \pm \frac{\pi}{4}]}. \quad (4.35)$$

В тех случаях, когда точка стационарной фазы не находится внутри интервала интегрирования, можно считать, что  $f(\eta_0) = 0$  и поэтому весь интеграл также равен нулю.

Рассмотрим особенности применения метода стационарной фазы для расчета антенн на примере излучающего отрезка с квадратичным фазовым распределением. В соответствии с формулой (4.10) в этом случае

$$R(\alpha) = \frac{\left| \int_{-l/2}^{l/2} a(x) e^{igx^2} e^{-ikx \sin \alpha} dx \right|}{\left| \int_{-l/2}^{l/2} a(x) e^{igx^2} e^{-ikx \sin \alpha_0} dx \right|}. \quad (4.36)$$

Вычислим числитель этого выражения. Первая производная от аргумента по  $x$  равна  $v'(x) = k \sin \alpha - 2gx$ . Приравняв ее нулю, найдем точку стационарной фазы  $\eta_0 = x_0 = \frac{k \sin \alpha}{2g}$ . Вторая производная равна  $-2g$ . Подставляя полученные выражения в формулу (4.35), имеем

$$\int_{-l/2}^{l/2} a(x) e^{-i(kx \sin \alpha - gx^2)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{g}} a\left(\frac{k \sin \alpha}{2g}\right) e^{-i\left[\frac{k^2 \sin^2 \alpha}{4g} - \frac{\pi}{4}\right]},$$

откуда характеристика направленности отрезка

$$R(\alpha) = \begin{cases} a \left( \frac{k \sin \alpha}{2g} \right) & \text{при } \left| \frac{k \sin \alpha}{2g} \right| \leq \frac{l}{2} \\ 0 & \text{при } \left| \frac{k \sin \alpha}{2g} \right| > \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (4.37)$$

Первое из этих неравенств соответствует случаю, когда точка стационарной фазы находится внутри отрезка, вторая — вне.

Рассмотрим, как с помощью метода стационарной фазы можно решать обратные задачи теории направленности, т. е. задачи синтеза антенн. Пусть требуется найти возбуждение отрезка, обеспечивающее характеристику направленности, равную единице внутри сектора  $\pm \alpha_0$  и нулю вне этого сектора. Для того чтобы, начиная с угла  $\alpha = \alpha_0$  и далее, характеристика направленности равнялась нулю, следует совместить точку стационарной фазы при  $\alpha = \alpha'$  с краем излучающего отрезка, т. е. обеспечить удовлетворение равенства

$$\frac{l}{2} = \frac{k \sin \alpha'}{2g},$$

откуда

$$g = \frac{k \sin \alpha'}{l}.$$

Далее определим амплитудное распределение. Положим  $a(0) = 1$  и найдем  $a(x)$  из условия

$$R(\alpha) = 1 = a \left( \frac{k \sin \alpha}{2g} \right).$$

Таким образом, для формирования секторной характеристики направленности при квадратичном фазовом распределении,  $a(x) = 1$ , т. е. амплитудное распределение равномерно.

Рассмотрим случай, когда вид синтезируемой характеристики направленности задан следующим образом:

$$R(\alpha) = \begin{cases} \cos n\alpha & \text{при } |\alpha| \leq \frac{\pi}{2n} = \alpha' \\ 0 & \text{при } |\alpha| > \frac{\pi}{2n} = \alpha'. \end{cases}$$

Эта запись соответствует заданию характеристики направленности в виде функции, меняющейся по закону косинуса от единицы при  $\alpha = 0$  до первого нуля при  $\alpha = \alpha'$  и при больших  $\alpha$  равной нулю. Как и прежде, выберем коэффициент  $g$  таким образом, чтобы точка стационарной фазы оказалась на краю отрезка при  $\alpha = \alpha'$ , т. е. положим  $g = \frac{k \sin \alpha'}{l}$ . Амплитудное же распределение найдем из соотношения

$$R(\alpha) = \cos n\alpha = a \left( \frac{k \sin \alpha}{2g} \right) = a \left( \frac{l \sin \alpha}{2 \sin \alpha'} \right) = a(x).$$

Таким образом,

$$x = \frac{l}{2} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}; \quad \alpha = \arcsin \frac{2x \sin \alpha'}{l}$$

и

$$a(x) = \cos n\alpha = \cos \left[ n \arcsin \frac{2x \sin \alpha'}{\lambda} \right].$$

На рис. 27 показаны синтезируемые (штрихом) и полученные в результате расчета по формуле (4.36) (сплошные линии) характеристики направленности непрерывного отрезка при  $l = 15 \lambda$  и  $\alpha' = 45^\circ$ . Из графика видно, что секторная характеристика направленности получается с большими отклонениями от заданной, чем характеристика вида  $\cos n\alpha$ . Кроме того, расчеты показывают, что приближение синтезированной характеристики направленности к заданной тем лучше, чем больше  $l/\lambda$  и чем больше  $\alpha'$ .

Квадратичное фазовое распределение вводят тогда, когда при заданной ширине характеристики направленности стремятся получить наибольшее давление в направлении ее главного максимума.

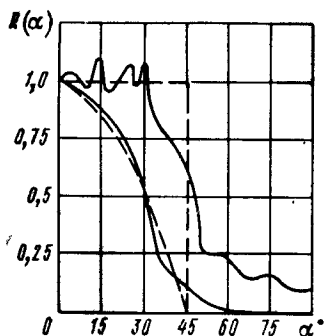


Рис. 27. Характеристики направленности отрезка, синтезированные с помощью метода стационарной фазы.

увеличивать для этого амплитуды колебательных скоростей не всегда возможно в связи с появлением кавитации, и поэтому приходится увеличивать размеры антенны, каким-либо способом расширяя ее характеристику направленности. Приблизительно оценить получающийся при этом выигрыш в давлении можно следующим образом. Сравним между собой две антенны разной длины, формирующие одинаковые по ширине характеристики направленности. Ширина характеристики направленности обеих антенн одинакова, поэтому в первом приближении одинаковы и их коэффициенты концентрации. Поскольку коэффициент концентрации

прямо пропорционален квадрату давления и обратно пропорционален активному сопротивлению излучения, отношение давлений  $p_1/p_2$ , развиваемых антеннами пропорционально корню квадратному из обратного отношения их сопротивлений излучения  $r_{s2}/r_{s1}$ . Введение плавно меняющегося квадратичного фазового распределения не изменяет активного сопротивления излучения антенны; но введение неравномерного амплитудного распределения уменьшает его.

Таким образом, выигрыш в давлении, получаемый при использовании антенны с искусственно расширенной характеристикой направленности равен корню из отношения сопротивлений излучения, т. е. в лучшем случае (в отсутствии амплитудного распределения или при наличии практически несущественного амплитудного распределения) корню квадратному из отношения их длин. Увеличивая, например, длину антенны вдвое и сохраняя при этом ширину характеристики направленности постоянной, можно увеличить давление не более чем в  $\sqrt{2}$  раз, т. е. не более чем на 40%.

В случае же двумерной антенны, когда есть возможность увеличивать сопротивление излучения и излучаемую мощность за счет увеличения двух размеров, выигрыш в давлении в лучшем случае может составить корень квадратный из отношения площадей.

## § 12. Антенна в виде окружности или дуги

**Окружность.** Разместим прямоугольную систему координат так, чтобы начало ее совпадало с центром окружности радиуса  $R$ , а ось  $z$  была бы перпендикулярна плоскости окружности. Положение элемента длины окружности  $dl$  будем определять в полярной системе координат:  $x = R \cos \psi$  и  $y = R \sin \psi$ . Направление единичного радиус-вектора  $\mathbf{u}$  в пространстве будем описывать в сферической системе координат; при этом  $u_x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $u_y = \sin \theta \sin \varphi$  и  $u_z = \cos \theta$ . Скалярное произведение векторов  $\rho \mathbf{u}$ , определяющее разность хода лучей от отдельных элементов окружности до удаленной точки в направлении  $\mathbf{u}$ , равно сумме произведений одноименных проекций этих векторов на координатные оси, т. е.  $\rho \mathbf{u} = R \cos \psi \sin \theta \cos \varphi + R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi$ . Для компенсации окружности в направлении  $\theta_0, \varphi_0$  введем фазовое распределение  $\alpha(\psi) = kR (\cos \psi \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \sin \psi \sin \theta_0 \sin \varphi_0)$ . Амплитудное распределение  $a(\psi)$  будем считать равномерным [ $a(\psi) = 1$ ]. Ось  $x$  всегда можно расположить так, что направление компенсации  $\mathbf{u}_0$  будет совпадать с плоскостью  $xOz$ , поэтому, не уменьшая общности рассмотрения, можно положить  $\varphi_0 = 0$ . Тогда в соответствии с формулой (2.39) давление, развиваемое антенной в произвольном направлении  $\theta, \varphi$ , определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{p}(\theta, \varphi) &= -\frac{ik\rho c r_0 \omega_0}{2r} e^{ikr} \int_0^{2\pi} a(\psi) e^{i\alpha(\psi)} e^{-ik\rho u} R d\psi = \\ &= -\frac{ik\rho c r_0 \omega_0 R}{2r} e^{ikr} \int_0^{2\pi} e^{ikR [\cos \psi (\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi) - \sin \psi \sin \theta \sin \varphi]} d\psi. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Введем обозначения:  $\sin \theta_0 - \sin \theta \cos \varphi = u \cos t$ ;  $\sin \theta \sin \varphi = u \sin t$ . Возводя в квадрат обе части этих равенств и складывая их, легко установить, что

$$u = \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi}.$$

Интеграл выражения, определяющего давление в дальнем поле, можно вычислить следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikRu \cos(\psi+t)} d\psi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ikRu \cos \tau} d\tau = \int_0^{2\pi} e^{ikRu \cos \tau} d\tau = 2\pi J_0(kRu).$$

Поэтому

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c \omega_0 r_0 R \pi}{r} e^{ikr} J_0 \left( \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \right) \quad (4.39)$$

и

$$R(\theta, \varphi) = \left| \frac{p(\theta, \varphi)}{p(\theta_0, \varphi_0)} \right| = \left| J_0 \left( kR \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \right) \right|. \quad (4.40)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Пусть компенсация отсутствует, т. е.  $\theta_0 = 0$ ; тогда

$$R(\theta, \varphi) = |J_0(kR \sin\theta)|. \quad (4.41)$$

Если же антенна компенсирована вдоль оси  $x$ , т. е.  $\theta_0 = \pi/2$ , то

$$R(\theta, \varphi) = \left| J_0 \left( kR \sqrt{1 + \sin^2\theta - 2\sin\theta \cos\varphi} \right) \right|. \quad (4.42)$$

При этом характеристика направленности в плоскости  $zOx$

$$R(\theta) = |J_0(kR \cos\theta)|$$

и в плоскости  $xOy$

$$R(\varphi) = \left| J_0 \left( 2kR \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right|. \quad (4.43)$$

Представить себе поведение характеристики направленности окружности при различных направлениях компенсации можно с помощью рис. 28, на котором изображена зависимость  $J_0(z)$  от  $z$ .

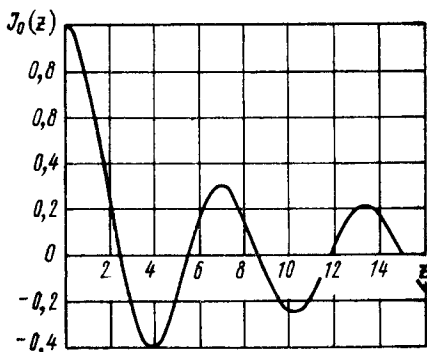


Рис. 28. График функции  $J_0(z)$ .

Функция  $J_0(z) = 0,707$  при  $z = \pm 1,13$ , добавочные максимумы характеристики направленности окружности в порядке возрастания их номера имеют следующие величины — 0,4; 0,3; — 0,25; 0,22.

Рассмотрим давление, развиваемое антенной в направлении  $\theta = \pi/2$  в отсутствии компенсации, т. е. при  $\theta_0 = 0$ . Из формулы (4.39) имеем

$$p \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) = - \frac{ikrc\omega_0 r_0 \pi R}{r} e^{ikr} J_0(kR).$$

Таким образом, с ростом  $kR$  давление изменяется по закону  $kR J_0(kR)$ , т. е. представляет собой знакопеременную функцию. При  $kR \gg 1$  справедливо асимптотическое представление

$$J_0(kR) = \frac{\cos \left( kR - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\pi kR}{2}}} \quad (4.44)$$

и

$$p \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) = - \frac{ikrc\omega_0 r_0 \pi R}{r} e^{ikr} \frac{\cos \left( kR - \frac{\pi}{2} \right)}{\sqrt{\frac{\pi kR}{2}}}. \quad (4.45)$$

Такую зависимость давления от  $kR$  можно объяснить следующим образом. В точку наблюдения приходят колебания от всех элементов окружности, однако основной вклад в давление, создаваемое в точке



наблюдения, вносят участки окружности, ближайшие к ней и наиболее удаленные от нее, а остальные взаимно компенсируются. Таким образом, давление в точке наблюдения зависит в основном от взаимодействия двух крайних зон Френеля на окружности. Когда расстояние между их центрами (т. е.  $2R - \lambda/2$ ) равно целому числу длин волн, колебания от них приходят в фазе, и давление удваивается, когда же нечетному числу полуволн,— давление равно нулю. Это обстоятельство и объясняет наличие в формуле (4.45) множителя  $\cos(kR - \pi/2) = \cos k(R - 0,25\lambda)$ .

Справедливость приведенного рассуждения можно подтвердить и иначе, а именно тем, что формулу (4.45) можно получить с помощью метода стационарной фазы, причем вычисления подтверждают наличие двух точек стационарной фазы, соответствующих двум крайним зонам Френеля.

По аналогии с тем, как выше был определен коэффициент усиления дискретной антенны по давлению, целесообразно ввести в рассмотрение и для непрерывной антенны некоторую величину, определяющую отношение чувствительностей или давлений (в зависимости от режима работы) всей антенны и ее элемента. В качестве элемента непрерывной антенны можно принять элемент ее длины и определить величину  $K_p$  как отношение чувствительности всей антенны и чувствительности ее единичного элемента длины. Ясно, что при таком определении  $K_p$  будет величиной размерной (например, в случае отрезка прямой  $K_p$  равен его длине), что не всегда удобно.

Мы поступим иначе, а именно, под коэффициентом усиления непрерывной антенны по давлению в направлении  $\mathbf{u}$  будем понимать отношение давлений, развиваемых антенной в направлении  $\mathbf{u}$  и в том направлении, в котором сигналы от всех элементов складываются в фазе. И аналогично, в случае приема  $K_p$  определим как отношение чувствительности антенны при падении плоской волны из удаленной точки, находящейся в направлении  $\mathbf{u}$ , и при синфазном сложении сигналов от всех элементарных приемников. Заметим, что величина определенного таким образом коэффициента усиления всегда не больше единицы.

Коэффициент усиления окружности по давлению в направлении  $\theta = 0$  равен единице. В направлении же  $\theta = \pi/2$  в отсутствии компенсации, как следует из формулы (4.39),

$$K_p = J_0(kR). \quad (4.46)$$

Таким образом, коэффициент усиления некомпенсированной окружности (а следовательно, и ее чувствительность) вдоль радиуса окружности всегда меньше, чем в направлении перпендикуляра к плоскости расположения окружности.

Коэффициент концентрации компенсированной окружности определим через интеграл от квадрата ее характеристики направленности:

$$K^{-1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J_0^2 \left[ kR \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \right] \times \\ \times \sin^3 \theta d\theta d\varphi.$$

В соответствии с теоремой сложения

$$J_0(ma) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(mb) J_n(mc) \cos n\varphi,$$

где

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

$a$ ,  $b$  и  $c$  — стороны треугольника;  $\varphi$  — угол между сторонами  $b$  и  $c$ .

Нетрудно видеть, что если  $kR \sin \theta$  и  $kR \sin \theta_0$  — стороны треугольника и  $\varphi$  — угол между ними, то аргумент функции Бесселя представляет собой, по теореме косинусов, третью сторону этого треугольника, поэтому

$$\begin{aligned} J_0 \left[ kR \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi} \right] &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(kR \sin \theta_0) J_n(kR \sin \theta) \cos n\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для определения коэффициента концентрации, заменяя квадрат суммы двойной суммой, меняя местами знаки интегрирования и суммирования, а также учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos n'\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{при } n = n' = 0, \\ \pi & \text{при } n = n' \neq 0, \\ 0 & \text{при } n \neq n', \end{cases}$$

получим

$$K^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n^2(kR \sin \theta_0) \int_0^{\pi} J_n^2(kR \sin \theta) \sin \theta d\theta.$$

Воспользуемся известным соотношением

$$\int_0^{\pi} J_n^2(kR \sin \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{kR} \int_0^{2kR} J_{2n}(t) dt = \frac{2}{kR} \sum_{m=0}^{\infty} J_{2n+2m+1}(2kR) \quad (4.47)$$

и запишем окончательное выражение

$$K^{-1} = \frac{1}{kR} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n J_n^2(kR \sin \theta_0) \sum_{m=0}^{\infty} J_{2n+2m+1}(2kR). \quad (4.48)$$

При отсутствии компенсации  $\theta_0 = 0$ , и так как функция  $J_n(0)$  при  $n = 0$  равна единице, а при  $n > 0$  равна нулю, получим

$$K = \frac{kR}{\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(2kR)}. \quad (4.49)$$

При работе на высоких частотах, т. е. при  $kR \gg 1$  из соотношения (4.47) следует, что

$$\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(2kR) = \frac{1}{2} \int_0^{2kR} J_0(t) dt \approx \frac{1}{2} \int_0^{\infty} J_0'(t) dt = \frac{1}{2},$$

поэтому при  $kR \gg 1$

$$K = 2kR = \frac{4\pi R}{\lambda}, \quad (4.50)$$

что и следовало из приближенной формулы (4.9).

**Дуга окружности.** Пусть дуга расположена в плоскости  $xOy$  и центр ее совмещен с началом координат. Радиус дуги  $R$ , а полный центральный угол равен  $2\psi_0$  (рис. 29). Формула, определяющая давление, развиваемое дугой окружности в произвольном направлении  $\theta$ ,  $\varphi$  при компенсации в направлении  $\theta_0$ ,  $\varphi_0 = 0$ , т. е. в произвольном направлении, лежащем в плоскости симметрии дуги  $xOz$ , очевидно, совпадает с формулой (4.38), за исключением пределов интегрирования по  $\psi$ , которые в рассматриваемом случае должны быть  $-\psi_0$  и  $+\psi_0$ . Кроме того, при наличии амплитудного распределения под знаком интеграла должен находиться множитель  $a(\psi)$ . Таким образом,

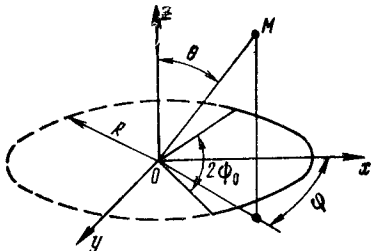


Рис. 29. Расположение дуги окружности и системы координат.

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} e^{ikr} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) \times \\ \times e^{ikR[\cos\psi(\sin\theta_0 - \sin\theta\cos\varphi) - \sin\psi\sin\theta\sin\varphi]} d\psi. \quad (4.51)$$

При отсутствии компенсации  $\theta_0 = 0$  выражение (4.51) принимает следующий вид:

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} e^{ikr} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) e^{-ikR\sin\theta\cos(\varphi-\psi)} d\psi. \quad (4.52)$$

Для того чтобы уяснить механизм формирования характеристики направленности некомпенсированной дуги, вначале вычислим интеграл этого выражения с помощью метода стационарной фазы [формула (4.34)]. Производная от аргумента подынтегрального выражения по  $\psi$  определится выражением  $v'(\eta) = kR\sin\theta\sin(\varphi - \psi)$ , откуда точка стационарной фазы, т. е. значение  $\psi$ , при котором  $v'(\eta) = 0$ , определится выражением  $\psi = \varphi$ . Вычислим вторую производную  $v''(\eta) = -kR\sin\theta\cos(\varphi - \psi)$  и подставим соответствующие выражения в формулу (4.34). В результате получим

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} e^{ikr} e^{-ikR\sin\theta} a(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{kR\sin\theta}} \times \\ \times \{C(x_1) + C(x_2) + iS(x_1) + iS(x_2)\}, \quad (4.53)$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR\sin\theta[1 - \cos(\varphi + \psi_0)]};$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR\sin\theta[1 - \cos(\varphi - \psi_0)]}.$$

Если  $x_1$  и  $x_2$  значительно больше единицы, то величина каждого из интегралов Френеля близка к 0,5 и мы имеем [этот результат можно было получить и непосредственно по формуле (4.35)]

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} e^{ikr} a(\varphi) \sqrt{\frac{2\pi}{kR \sin \theta}} e^{-i\left[kR \sin \theta - \frac{\pi}{4}\right]}. \quad (4.54)$$

Рассмотрим полученное выражение. Его аргумент, который можно написать как  $k[r - R \sin \theta + \lambda/8]$ , свидетельствует о том, что центр излучения находится (для  $\theta = \pi/2$ ) в точке, удаленной от начала координат на величину  $R - \lambda/8$ , т. е., что эффективно излучает только часть дуги со стрелой прогиба, примерно равной  $\lambda/4$ . Модуль же полученного выражения и определяет величину излучения этой части дуги. Характеристика направленности всей дуги, нормированная в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ , т. е. в направлении оси симметрии дуги  $x$ , есть

$$R(\theta, \varphi) = \frac{a(\varphi)}{\sqrt{\sin \theta}}. \quad (4.55)$$

Из этого выражения следует, что характеристика направленности дуги в горизонтальной плоскости повторяет вид амплитудного распределения вдоль дуги. Таким образом, если  $a(\varphi) = 1$  на поверхности дуги в пределах  $-\psi_0, \psi_0$ , то характеристика направленности равна единице внутри этого же сектора углов и равна нулю за его пределами. Что же касается характеристики направленности в вертикальной плоскости, то при удалении от плоскости  $xOy$  она увеличивается пропорционально  $(\sin \theta)^{-1/2}$ . Вдоль оси  $z$ , т. е. при  $\theta = 0$  в соответствии с формулой (4.55)  $R(\theta, \varphi)$  обращается в бесконечность, что, естественно, не может быть на самом деле. Объясняется это обстоятельство тем, что при  $\theta \rightarrow 0$  аргументы интегралов Френеля также стремятся к нулю, и переход от формулы (4.53) к формуле (4.54) становится неправомерным. Заметим, что сам по себе рост характеристики направленности при изменении  $\theta$  от  $\pi/2$  в сторону уменьшения  $\theta$  не вызывает удивления, поскольку вдоль оси  $z$  колебания от всех элементов дуги складываются в фазе.

Мы уже отмечали, что в первом приближении метода стационарной фазы характеристика направленности дуги повторяет функцию амплитудного распределения по дуге. Кроме того, из формулы (4.55) следует, что характеристика направленности дуги не зависит от частоты. Однако из сопоставления формулы (4.54) с более точной формулой (4.53) видно, что это не совсем так. Формула (4.54) учитывает только поле, создаваемое окрестностью точки стационарной фазы, т. е. первой зоной Френеля. Как уже отмечалось выше, остальные зоны компенсируют друг друга, кроме самых крайних зон, положение которых совпадает с концами дуги. Действие этих зон и учитывается интегралами Френеля в выражении (4.53).

Таким образом, на характеристику направленности, определяемую формулой  $R(\varphi) = a(\varphi)$ , накладывается искажающая ее некоторая осциллирующая функция. Можно предполагать, что чем меньше амплитуда концов дуги, тем меньше должно быть влияние этой иска-

жающей функции и, например, для амплитудного распределения вида  $\alpha(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$  характеристика направленности должна весьма близко приближаться к функции  $R(\varphi) = \cos \frac{\pi\varphi}{2\psi_0}$  при  $|\varphi| < \psi_0$  и  $R(\varphi) = 0$  при  $|\varphi| > \psi_0$ . Заметим, что это обстоятельство не следует из формулы (4.53), поскольку она справедлива для случая сравнительно малого изменения амплитудного распределения. В рассматриваемом случае, как это ни странно, формула (4.54) может дать более точный результат.

Прежде чем перейти к анализу коэффициента усиления и характеристик направленности некомпенсированной дуги, заметим, что дав-

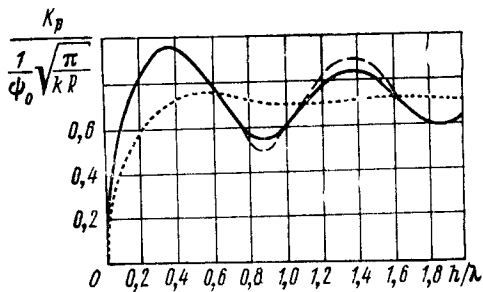


Рис. 30 Зависимость коэффициента усиления дуги от  $h/\lambda$ .

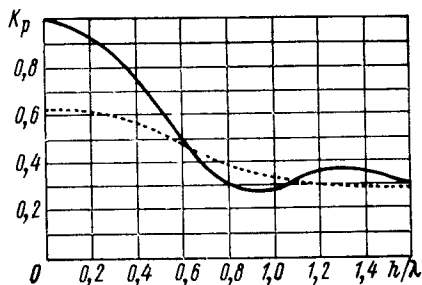


Рис. 31 Зависимость  $K_p$  от  $h/\lambda$  при  $2\psi_0 = 60^\circ$ .

ление, развиваемое ею в направлении оси  $x$  (т. е. при  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ ), зависит от величины  $kR(1 - \cos\psi_0)$ , входящей в аргумент интегралов Френеля. Так как  $R(1 - \cos\psi_0)$  равно стреле прогиба дуги  $h$ , то  $kR(1 - \cos\psi_0) = kh = 2\pi h/\lambda$ . Таким образом, изменение давления в направлении оси  $x$  определяется отношением  $h/\lambda$ . Это обстоятельство позволяет полагать, что характер изменения характеристик направленности также определяется отношением  $h/\lambda$ .

Коэффициент усиления некомпенсированной дуги по давлению в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  равен отношению выражения (4.52) или (4.53) к давлению, развиваемому дугой в направлении  $\theta = 0$ , т. е. к выражению

$$p = -\frac{ik\rho c\omega_0 r_0}{2r} e^{ikr} \cdot 2\psi_0 R.$$

В результате получим две формулы, причем первая из них является точной, а вторая — приближенной:

$$K_p = \frac{1}{2\psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right| \quad (4.56)$$

и

$$K_p = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{\pi}{kR}} \sqrt{C^2(x) + S^2(x)}, \quad (4.57)$$

где

$$x = \sqrt{\frac{2}{\pi} kR (1 - \cos \psi_0)} = 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}}$$

На рис. 30 представлены зависимости коэффициента усиления некомпенсированной дуги по давлению в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ , отнесенные к величине  $1/\psi_0 \sqrt{\frac{\pi}{kR}}$ . Сплошной линией показаны результаты расчета по формуле (4.57) и штриховой — по формуле (4.56) для случая  $kR = 10$ . При  $kR = 25$  кривая проходит между этими линиями, а при  $kR = 50$  практически сливается с результатом расчета по формуле (4.57). С помощью рис. 30 легко приближенно определить зависимость коэффициента усиления от  $h/\lambda$  при постоянном угле  $2\psi_0$  или при постоянном  $kR$  (т. е. при фиксированной частоте).

На рис. 31 сплошной линией показана рассчитанная по формуле (4.56) зависимость  $K_p$  от  $h/\lambda$  при фиксированном угле рабочего сектора  $2\psi_0$ , равном  $60^\circ$ .

Интересно рассмотреть зависимость давления, развиваемого некомпенсированной дугой в направлении  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  при  $a(\psi) = 1$  (сплошная кривая рис. 32) от  $h/\lambda$ . С точностью

Рис. 32. Изменение давления, развиваемого некомпенсированной дугой при изменении  $h/\lambda$  ( $kR = 25$ ).

построения кривые, рассчитанные по строгой формуле (4.52) и приближенной (4.53), совпадают.

При изменении  $h/\lambda$  от 0 до  $h/\lambda \approx 0,36$  давление растет, поскольку кривизна дуги сравнительно невелика, но при дальнейшем увеличении  $h/\lambda$  наблюдаются осцилляции давления, вызванные тем, что вклады давления от крайних участков дуги существенно различаются по фазе. При больших величинах  $h/\lambda$  далекие от средней точки дуги зоны Френеля компенсируют друг друга и давление практически не зависит от  $h/\lambda$ . Для случая  $kR = 25$  в соответствии с формулой (4.54) относительная величина давления равна 0,5.

Выражения для характеристики направленности некомпенсированной дуги при равномерном амплитудном распределении, нормированной в направлении оси симметрии дуги, можно получить из точной формулы (4.52) и приближенных формул (4.53) и (4.54). Они имеют следующий вид:

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{-ikR \sin \theta \cos(\varphi - \psi)} d\psi \right|}{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|}; \quad (4.58)$$

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\sqrt{[C(x_1) + C(x_2)]^2 + [S(x_1) + S(x_2)]^2}}{2\sqrt{C^2 \left(2\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\right) + S^2 \left(2\sqrt{\frac{h}{\lambda}}\right)}}, \quad (4.59)$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR \sin \theta [1 - \cos(\varphi + \psi_0)]};$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR \sin \theta [1 - \cos(\varphi - \psi_0)]};$$

и, наконец,

$$R(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \begin{cases} 1 & \text{при } |\varphi| \leq \psi_0; \\ 0 & \text{при } |\varphi| > \psi_0. \end{cases} \quad (4.60)$$

На рис. 33 сплошной линией представлены характеристики направленности дуги в плоскости  $\theta = \pi/2$  при  $kR = 25$  и при различных  $h/\lambda$ . Видно, что характеристики направленности существенно зависят от  $h/\lambda$  и в направлении  $\varphi = 0$  наблюдается провал при тех  $h/\lambda$ , для которых давление в этом направлении меньше средней величины (т. е. величины 0,5 на рис. 32). С увеличением  $h/\lambda$  число провалов увеличивается. Характеристики направленности, представленные на рис. 33 и 34, рассчитаны по формуле (4.58), но нормированы для удобства построения в направлении их максимальной величины.

На рис. 34 сплошной линией показаны характеристики направленности при фиксированной величине угла  $2\psi_0$ . В соответствии с приближенной формулой (4.60) при больших волновых размерах дуги характеристика направленности должна приближаться к секторной с полным углом раскрыва, равным  $2\psi_0$ . Как видно из графиков рис. 34, при  $h/\lambda = 1,5$  функция  $R(\varphi)$  еще существенно отличается от секторной, хотя с ростом  $h/\lambda$  и приближается к ней.

Рассмотрим аргументы интегралов Френеля в формуле (4.59) при  $\theta = \pi/2$ . Ограничиваясь двумя первыми членами разложения косинуса в степенной ряд и введя обозначение  $\varphi/\psi_0 = b$ , получим  $kR [1 - \cos(\varphi + \psi_0)] = \frac{kR\psi_0^2(b+1)^2}{2}$ . Но, с другой стороны, выражение  $h = R(1 - \cos\psi_0)$  аналогично можно приближенно представить в виде  $h = \frac{R\psi_0^2}{2}$ , откуда следует, что  $kR [1 - \cos(\varphi + \psi_0)] \approx kh(b+1)^2$ .

Таким образом, в первом приближении аргументы интегралов Френеля, а следовательно, и сама характеристика направленности не зависят порознь от  $kR$  и  $\psi_0$ , а зависят от  $h/\lambda$  и отношения  $\varphi$  и  $\psi_0$ .

Несмотря на явную нестрогость, этот вывод качественно подтверждается результатами точных расчетов. Так на рис. 35 показаны рассчитанные по точной формуле (4.58) характеристики направленности дуги при  $a(\varphi) = 1$  (сплошные линии) при одинаковых  $h/\lambda$ , но различных  $kR$ . Видно, что с ростом  $kR$  характеристики направленности

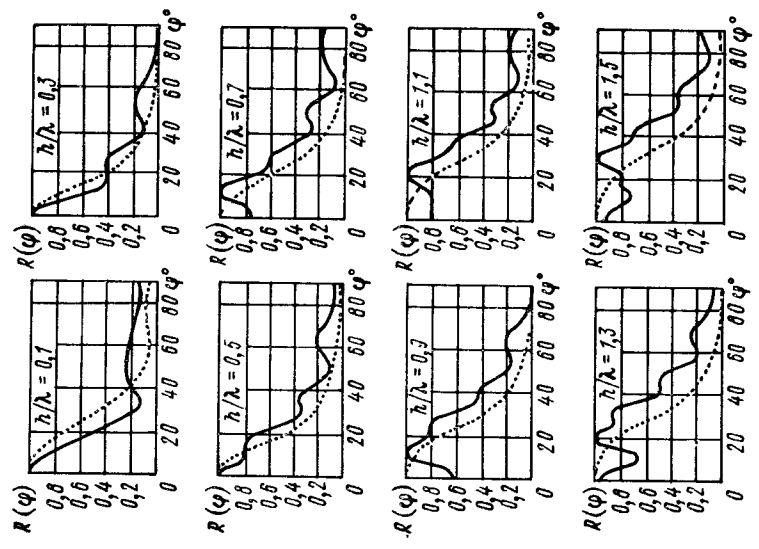


Рис. 33. Характеристики направленности некомпенсированной дуги в плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  при  $kR = 25$  и различных значениях  $h/\lambda$ .

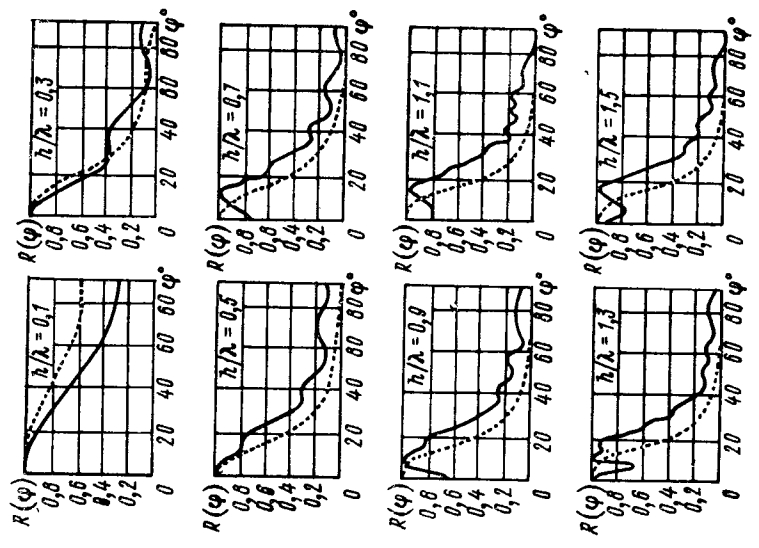


Рис. 34. Характеристики направленности некомпенсированной дуги  $2\Phi_0 = 60^\circ$  при различных значениях  $h/\lambda$  (плоскость  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).



обостряются, а их вид (при сравнительно больших уровнях) остается практически неизменным.

Сплошной линией на рис. 36 показано изменение отношения полной ширины характеристики направленности на уровне 0,707 к углу

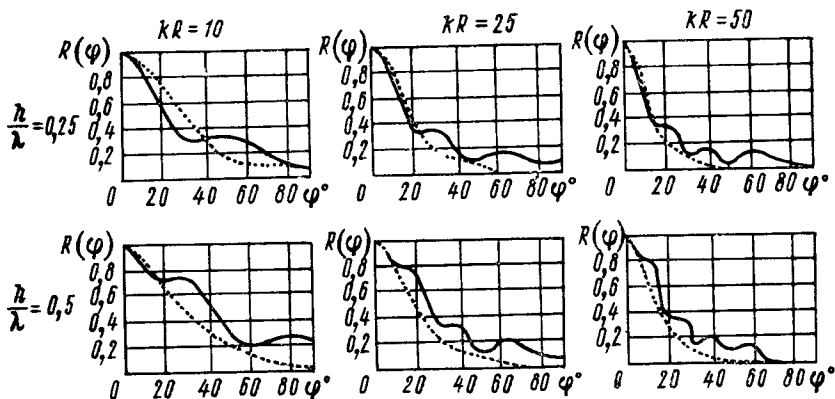


Рис. 35. Характеристики направленности некомпенсированной дуги при  $h/\lambda = 0,25$  и  $0,5$  для различных значений  $kR$  (плоскость  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

раствора рабочего сектора  $2\psi_0$  в функции от  $h/\lambda$ . Расчет производился для двух случаев, в одном из которых оставалось неизменным  $kR = 25$  (т. е. изменялось  $\psi_0$ ), а в другом фиксировалось  $\psi_0 = 30^\circ$  (т. е. изменялось  $kR$ , или, что то же самое, частота), причем результаты расчетов практически совпали. Это обстоятельство свидетельствует о том, что рис. 35 можно пользоваться при практических оценках в широком диапазоне изменения  $kR$  и  $\psi_0$ . График построен только до величины  $h/\lambda = 0,7$  в связи с тем, что при дальнейшем увеличении  $h/\lambda$  теряется смысл определения ширины характеристики направленности на уровне 0,707, поскольку в направлении  $\varphi = 0$  появляется провал, больший, чем эта величина.

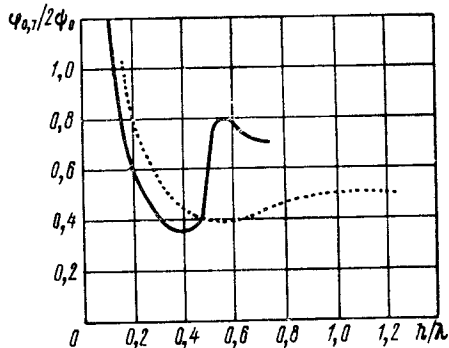


Рис. 36. Зависимость  $\varphi_{0,7}/2\varphi_0$  от  $h/\lambda$ .

Пространственная характеристика направленности некомпенсированной дуги имеет максимум в направлении  $\theta = 0$ , т. е. в этом направлении давления от всех элементов дуги складываются в фазе. Отношение же давлений, развиваемых дугой в направлениях  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ , естественно, тем больше, чем больше  $h/\lambda$ . Сказанное подтверждается рис. 37, на котором показаны нормированные в на-

правлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$  характеристики направленности дуги в вертикальной плоскости при различных  $h/\lambda$ . Расчет производился для  $kR = 10$ ; 25 и 50, причем результаты для всех  $kR$  практически совпадают.

Точное выражение для коэффициента концентрации дуги легко записать через интеграл от квадрата модуля ее характеристики направленности.

Приближенные же выражения можно получить с помощью формулы (1.38), воспользовавшись соотношением (4.5). В направлении синфазного сложения давлений от всех элементов дуги, т. е. в направлении  $\theta = 0$ ,  $K = \frac{4R\psi_0}{\lambda}$ .

Для направления вдоль оси симметрии дуги, пользуясь формулами для давления (4.52) (точной), (4.53) и (4.54) (приближенными), можно записать

$$K = \frac{R}{\lambda\psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{ikhR \cos \psi} d\psi \right|^2; \quad (4.61)$$

$$K = \frac{2}{\psi_0} \left[ C^2 \left( 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \right) + S^2 \left( 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \right) \right]; \quad (4.62)$$

$$K = \frac{1}{\psi_0}. \quad (4.63)$$

Самая приближенная из приведенных — последняя формула. Ее вид свидетельствует о том, что в первом приближении коэффициент кон-

центрации дуги не зависит от частоты. С помощью же формулы (4.62), принимая во внимание, что максимальная величина суммы квадратов интегралов Френеля равна примерно 0,9 и достигается при величине аргумента, равной 1,2, можно найти максимальную величину коэффициента концентрации. Наблюдается она при  $h/\lambda = 0,36$  и равна  $1,8\psi_0$ . Иногда удобно пользоваться ее выражением не через  $\psi_0$ , а через  $kR$ . Получить это выражение можно следующим образом. Поскольку при сравнительно небольших значениях  $\psi_0$  справедливо равенство  $\cos \psi_0 = 1 - \frac{\psi_0^2}{2}$ , то из очевидного соотношения  $1,2 =$

$$= 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} = 2 \sqrt{\frac{R(1 - \cos \psi_0)}{\lambda}}, \text{ получим } \psi_0 = 1,2 \sqrt{\frac{\lambda}{2R}}, \text{ откуда}$$

$$\text{максимальная величина } K = \frac{1,8}{\psi_0} = 1,5 \sqrt{\frac{2R}{\lambda}}.$$

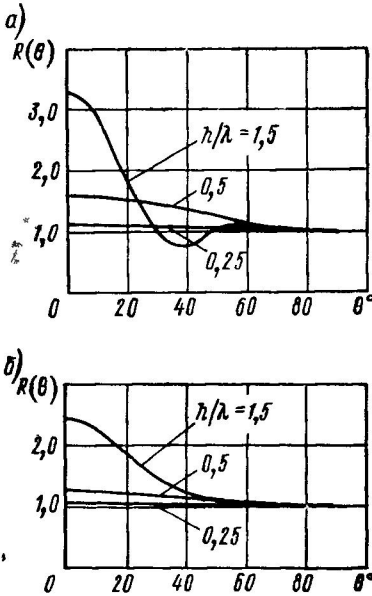


Рис. 37. Характеристики направленности некомпенсированной дуги в плоскости  $\varphi = 0$

$$a - a(\psi) = 1, \quad б - a(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$$

На рис. 38 показана зависимость произведения  $K\psi_0$  от  $h/\lambda$ . Сплошная линия соответствует расчету по приближенной формуле (4.62), не зависящей от  $kR$ . Штриховой линией показана зависимость  $K\psi_0$  от  $h/\lambda$  для  $kR = 10$ , рассчитанная по точной формуле (4.61). Расчет по этой же формуле для  $kR = 25$  дает величины  $K\psi_0$ , лежащие между этими кривыми, а для  $kR = 50$  — совпадающие с расчетом по формуле (4.62), т. е. со сплошной линией. Из графика видно, что с ростом отношения  $h/\lambda$  произведение  $K\psi_0$  приближается к единице, как это и должно быть в соответствии с формулой (4.63)

Рис. 38 удобно пользоваться при фиксированной величине полного угла рабочего сектора  $2\psi_0$  и при изменении частоты. Если же требуется рассмотреть зависимость коэффициента концентрации от  $h/\lambda$  при фиксированной частоте и изменяющемся угле  $\psi_0$ , то, пользуясь приведенным графиком и соотношением  $h = R(1 - \cos\psi_0)$ , легко построить новый график, иллюстрирующий искомую зависимость.

Мы рассматривали направленные свойства некомпенсированной дуги при равномерном амплитудном распределении. Совершенно аналогично можно получить выражения для параметров, характеризующих излучение некомпенсированной дуги при неравномерном амплитудном распределении. Пусть, например,  $a(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$ , т. е. имеет

вид косинусоиды, спадающей до нуля на краях дуги. Как отмечалось выше, в этом случае излучение краев дуги не искажает поля, создаваемого областью вокруг точки стационарной фазы, и можно ожидать, что формула (4.54) является более точной, чем формула (4.53). Поэтому приведем ряд формул, полученных для рассматриваемого случая из точной формулы (4.52) и приближенной (4.54):

$$p(\theta, \varphi) = \frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} e^{ikr} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0} e^{-ikR \sin \theta \cos(\varphi-\psi)} d\psi; \quad (4.64)$$

$$p(\theta, \varphi) = \frac{ik\rho c\omega_0 r_0 R}{2r} \cos \frac{\pi\varphi}{2\psi_0} \sqrt{\frac{2\pi}{kR \sin \theta}} e^{ikr} e^{-i \left[ kR \sin \theta - \frac{\pi}{4} \right]}; \quad (4.65)$$

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0} e^{-ikR \sin \theta \cos(\varphi-\psi)} d\psi \right|}{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|}; \quad (4.66)$$

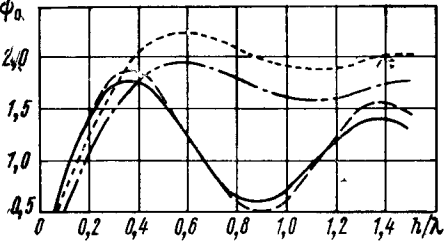


Рис. 38. Зависимость произведения  $K\psi_0$  от  $h/\lambda$  для некомпенсированной дуги.

$$R(\theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{\pi\varphi}{2\psi_0}}{\sqrt{\sin \theta}} & \text{при } |\varphi| < \psi_0; \\ 0 & \text{при } |\varphi| > \psi_0; \end{cases} \quad (4.67)$$

$$K_p = \frac{1}{2\psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|; \quad (4.68)$$

$$K_p = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}; \quad (4.69)$$

$$K = \frac{2R}{\lambda\psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|^2; \quad (4.70)$$

$$K = \frac{2}{\psi_0}. \quad (4.71)$$

В этих выражениях характеристика направленности нормирована в направлении оси симметрии дуги; коэффициент усиления по давлению и коэффициент концентрации определяются в этом же направлении.

Некоторые результаты расчетов по этим формулам приведены на рис. 30 — 36 пунктирными линиями. Из анализа этих графиков следует, что как характеристики направленности, так и зависимости  $K_p$  и давления от частоты при введении амплитудного распределения сглаживаются. Причина такого сглаживания довольно проста: как мы уже отмечали, неравномерность характеристик направленности при  $a(\psi) = 1$  объясняется интерференцией колебаний, поступающих в точку наблюдения из областей, примыкающих к точке стационарной фазы и концам дуги. В случае же  $a(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$  колебания от участков, близких к концам дуги, имеют малую амплитуду, из-за чего интерференция, а следовательно, и неравномерность поля проявляются значительно слабее.

Это же обстоятельство приводит к сглаживанию характеристик направленности дуги в плоскости  $\varphi = 0$ . На рис. 37, б показаны графики функции  $R(\theta)$  для случаев  $h/\lambda = 0,25; 0,5$  и  $1,5$ . Кривые для  $kR = 10; 25$  и  $50$  при одном и том же отношении  $h/\lambda$  совпадают.

Интересно отметить, что характеристики направленности в плоскости  $\theta = \pi/2$  при  $a(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$  приближаются (особенно с ростом

$h/\lambda$ ) к виду  $R(\varphi) = \cos \frac{\pi\varphi}{2\psi_0}$ , что подтверждает решающее влияние области стационарной фазы на величину давления в точке наблюдения. Таким образом, формула (4.67) достаточно точно (начиная с  $h/\lambda > 0,3$ ) описывает характеристику направленности в плоскости  $\theta = \pi/2$ . В плоскости же  $\varphi = 0$ , как видно из рис. 37, б, формула (4.67) дает большую ошибку (в соответствии с ней при  $\theta = 0$   $R(\theta) \rightarrow \infty$ ). Правда, характер зависимости  $R(\theta)$  от  $h/\lambda$  таков, что с ростом  $h/\lambda$   $R(0)$  уве-

личивается, и можно предполагать, что при больших  $h/\lambda$  величина  $R(\theta)$  будет приближаться к виду  $\sin^{1/2} \theta$ , однако произойдет это, вероятно, при  $h/\lambda \rightarrow \infty$ . Отмеченное обстоятельство объясняется тем, что при выводе формулы (4.67) пределы интегрирования по излучающей дуге были раздвинуты в бесконечность, что мало сказывается на давлении в плоскости  $\theta = \pi/2$ , поскольку давления от участков, расположенных вдали от точки стационарной фазы, взаимно компенсируются, но неравномерно для направления  $\theta = 0$ , в котором все колебания складываются в фазе.

Практически легко приближенно оценить вид характеристики направленности, вычисляя давления в направлениях  $\theta$  близких к  $\pi/2$  по методу стационарной фазы, а в направлении  $\theta = 0$  — по точной формуле (4.52) (сделать это несложно, так как показатель экспоненты под интегралом при  $\theta = 0$  обращается в нуль).

На рис. 38 показана зависимость произведения  $K\psi_0$  от  $h/\lambda$  для случая  $a(\psi) = \cos \frac{\pi\psi}{2\psi_0}$  пунктирной линией при  $kR = 50$  и штрихпунктирной при  $kR = 10$ . Коэффициент концентрации дуги в случае рассматриваемого амплитудного распределения, начиная примерно с  $h/\lambda = 0,4$ , больше, чем в случае  $a(\psi) = 1$ , и особенно это заметно для тех  $h/\lambda$ , при которых наблюдается провал характеристики направленности в направлении оси симметрии дуги.

Рассмотрим с помощью метода стационарной фазы влияние квадратичного фазового распределения на характеристики направленности дуги окружности. Легко показать, что при наличии фазового распределения  $a(\psi) = g\psi^2$  характеристика направленности в плоскости дуги имеет вид

$$R(\varphi) = \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) e^{ig\psi^2} e^{-ikR \cos(\varphi-\psi)} d\psi \right|}{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) e^{ig\psi^2} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|}. \quad (4.72)$$

Вычислим числитель этого выражения с помощью метода стационарной фазы [формула (4.35)]. Первая производная по  $\psi$  от аргумента подынтегрального выражения  $v'(\eta) = kR \sin(\varphi - \psi) - 2g\psi$ . Приравняв правую часть этого равенства нулю, получим трансцендентное уравнение, решение которого  $\psi_c$  определяет положение точки стационарной фазы. Вычисляя вторую производную  $v''(\eta)$  и подставляя ее в формулу (4.35), а затем полученное выражение — в формулу (4.72), имеем

$$R(\varphi) = \frac{a(\psi_c)}{a(0)} \sqrt{\frac{|kR \cos \psi_c + 2g|}{|kR \cos(\varphi - \psi_c) + 2g|}}. \quad (4.73)$$

Покажем, каким образом с помощью метода стационарной фазы можно найти возбуждение дуги, обеспечивающее формирование секторной характеристики направленности с полным углом раскрытия  $2\psi_0$ . Для того чтобы при  $|\varphi| > \varphi_0$  уровень излучения был мал, следует для направления  $\varphi = \varphi_0$  совместить положение точки стацио-

нарной фазы с концом дуги, т. е. положить  $\psi_c = \varphi_0$ . При этом  $kR \sin(\varphi_0 - \psi_0) = 2g\psi_0$ , откуда легко определяется коэффициент  $g$

$$g = \frac{kR \sin(\varphi_0 - \psi_0)}{2\psi_0}.$$

В приближении метода стационарной фазы числитель выражения (4.72) имеет следующий вид:

$$\frac{a(\eta_0)}{\sqrt{v''(\eta_0)}} = \frac{a(\psi_c)}{\sqrt{|kR \cos(\varphi - \psi_c) + 2g|}}.$$

Для того чтобы это выражение было постоянно в секторе углов  $-\varphi_0, \varphi_0$ , следует положить

$$a(\psi) = \sqrt{|kR \cos(\varphi' - \psi_c) + 2g|},$$

причем в эту формулу для каждого  $\psi_c$  следует подставлять  $\varphi'$ , найденное из выражения  $kR \sin(\varphi' - \psi_c) - 2g\psi_c = 0$ .

При таком выборе возбуждения вдоль дуги в приближении метода стационарной фазы формируется секторная характеристика направленности; точно же характеристику направленности можно определить по формуле

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \sqrt{|kR \cos(\varphi' - \psi) + 2g|} e^{i \frac{kR \sin(\varphi_0 - \psi_0)}{2\psi_0} \psi^2} e^{-ikR \cos(\varphi - \psi)} d\psi \right|}{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \sqrt{|kR \cos(\varphi' - \psi) + 2g|} e^{i \frac{kR \sin(\varphi_0 - \psi_0)}{2\psi_0} \psi^2} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|}, \quad (4.74)$$

где  $\varphi'$  находится из соотношения  $kR \sin(\varphi + \psi) - 2g\psi = 0$ .

Для формирования характеристики направленности, имеющей вид  $R(\varphi) = \cos \frac{\pi\varphi}{2\varphi_0}$  при  $|\varphi| < \varphi_0$  и  $R(\varphi) = 0$  при  $|\varphi| > \varphi_0$ , коэффициент  $g$  можно определить так же, как и в предыдущем случае, а амплитудное распределение найти из выражения

$$\cos \frac{\pi\varphi}{2\psi_0} = \frac{a(\psi_c)}{\sqrt{|kR \cos(\varphi - \psi_c) + 2g|}}.$$

Откуда

$$a(\psi) = \cos \frac{\pi\varphi'}{2\psi_0} \sqrt{|kR \cos(\varphi' - \psi_c) + 2g|},$$

где, как и раньше,

$$\varphi' = \psi_c + \arcsin \frac{2g\psi_c}{kR}.$$

Подставляя выражения для  $a(\psi)$  и  $g$  в формулу (4.72), можно найти точную формулу, определяющую характеристику направленности дуги при распределениях, обеспечивающих в приближении метода стационарной фазы требуемую характеристику направленности.

Расчеты показывают, что заданная характеристика направленности дуги, синтезированной с помощью метода стационарной фазы, вос-

производится тем более точно, чем больше волновой размер дуги и чем шире заданная характеристика направленности. Кроме того, как и следовало ожидать, лучшие результаты получаются при плавном уменьшении заданной характеристики до нуля. Сказанное подтверждается рис. 39, где представлены сплошными кривыми результаты синтеза секторной и косинусной характеристик направленности при  $2R = 5\lambda$ ,  $\varphi_0 = 30^\circ$  и  $2R = 15\lambda$ ,  $\varphi_0 = 80^\circ$  (штриховые линии соответствуют желаемым характеристикам направленности).

Заметим, что приведенный способ синтеза характеристик направленности не является оптимальным, и в каждом конкретном случае путем подбора можно получить более удовлетворительные результаты.

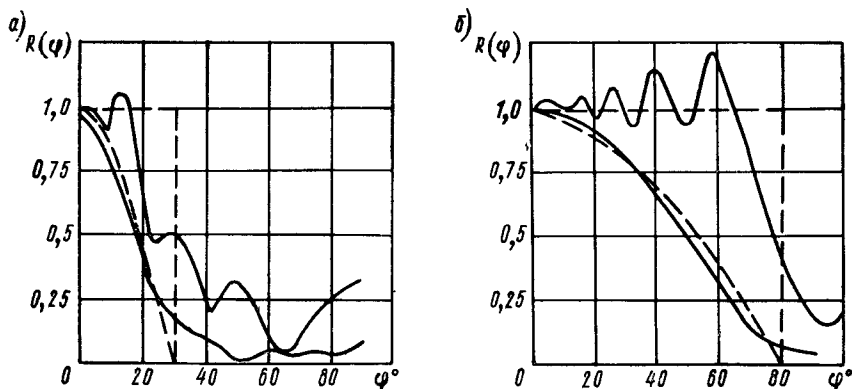


Рис. 39. Характеристики направленности дуги, синтезированные с помощью метода стационарной фазы:

$a - 2R = 25\lambda$ ,  $б - 2R = 15\lambda$ .

Рассмотрим направленные свойства дуги окружности, компенсированной в направлении оси симметрии дуги, т. е. в направлении  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\varphi_0 = 0$ . Характеристика направленности в этом случае может быть получена из формулы (4.51)

$$R(\theta, \varphi) = \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) e^{-ikR[\sin\theta \cos(\psi - \varphi) - \cos\psi]} d\psi \right|}{\int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) d\psi}. \quad (4.75)$$

Коэффициент концентрации компенсированной дуги в направлении компенсации, в соответствии с формулой (4.9), может быть выражен следующим образом:

$$K = \frac{2R}{\lambda} \frac{\left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) d\psi \right|^2}{\int_{-\psi_0}^{\psi_0} a^2(\psi) d\psi}. \quad (4.76)$$

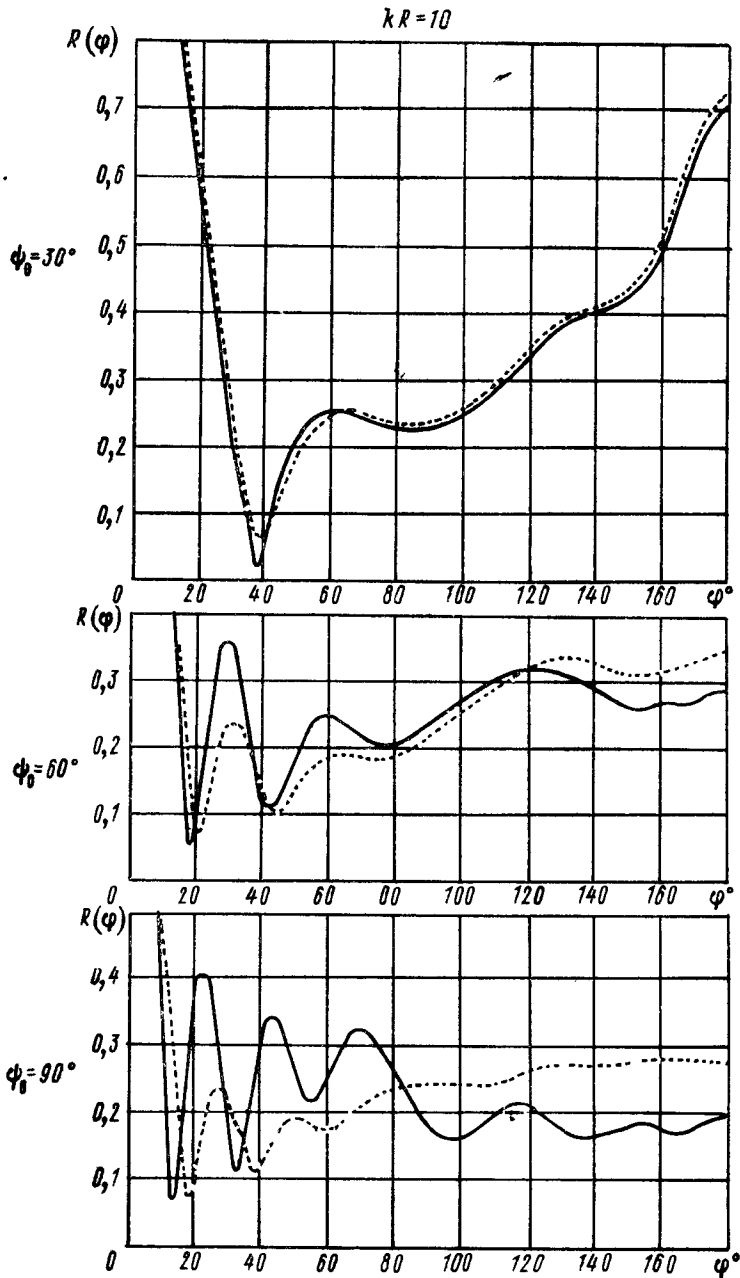
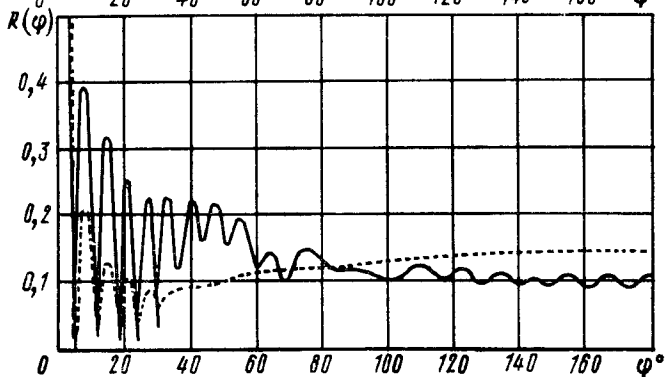
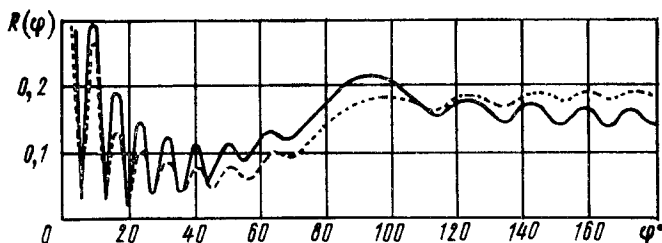
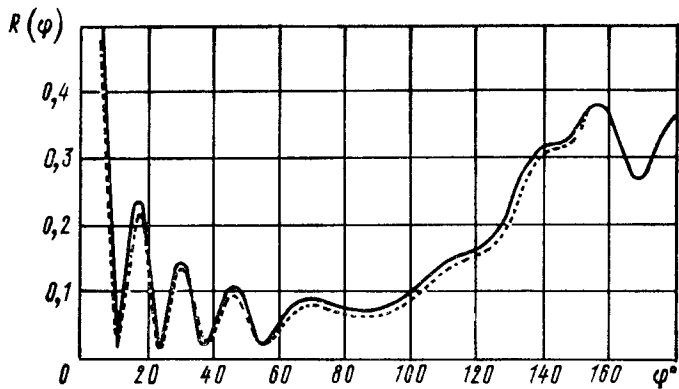


Рис. 40. Характеристики направленности



$kR = 30$



компенсированной дуги в плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

В частном случае  $a(\psi) = 1$  коэффициент концентрации равен

$$K = \frac{4R\psi_0}{\lambda} = \frac{2l}{\lambda},$$

где  $l$  — длина дуги.

Коэффициент усиления по давлению в случае равномерного амплитудного распределения  $K_p = 1$ , а в случае произвольного ампли-

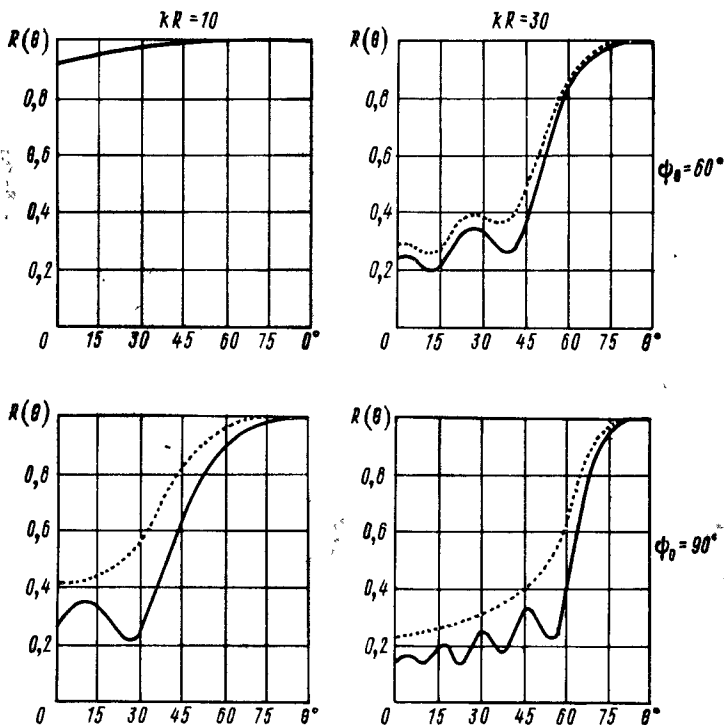


Рис. 41. Характеристики направленности компенсированной дуги в плоскости  $\varphi = 0$ .

тудного распределения определяется выражением

$$K_p = \frac{1}{2\psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) d\psi \right|. \quad (4.77)$$

На рис. 40 представлены характеристики направленности компенсированной дуги, рассчитанные в плоскости  $\theta = \pi/2$  по формуле (4.75) для случаев  $kR = 10$ ; 30 и  $\psi_0 = 30$ ; 60 и  $90^\circ$ . Сплошные линии соответствуют равномерному амплитудному распределению  $a(\psi) = 1$ , а пунктирные — падающему к краям дуги  $a(\psi) = \cos \psi$ . Из графиков видно, что с ростом угла раскрыва дуги и с ростом  $kR$  характеристика направленности обостряется. Расчеты показывают, что ширина характеристики направленности компенсированной дуги на уровне 0,707

примерно совпадает с шириной характеристики направленности прямой, длина которой равна хорде дуги. Первые добавочные максимумы при  $a(\psi) = 1$  увеличиваются с ростом  $\psi_0$  и в первом приближении не зависят от  $kR$ . В случае введения амплитудного распределения  $a(\psi) = \cos \psi$  они не зависят ни от  $kR$ , ни от  $\psi_0$  и примерно равны 22%, как и добавочные максимумы отрезка прямой. Однако в целом характеристика направленности компенсированной дуги существенно отличается по виду от характеристики направленности отрезка. Только несколько первых добавочных максимумов монотонно спадают с удалением их от основного; минимумы между ними не доходят до нуля, при углах  $\varphi > 60^\circ$  добавочные максимумы вообще выражены неотчетливо; они заменяются широким ореолом, величина которого претерпевает сравнительно небольшие осцилляции.

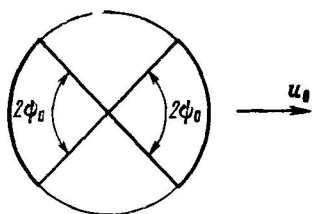


Рис. 42. Расположение двух дуг на окружности.

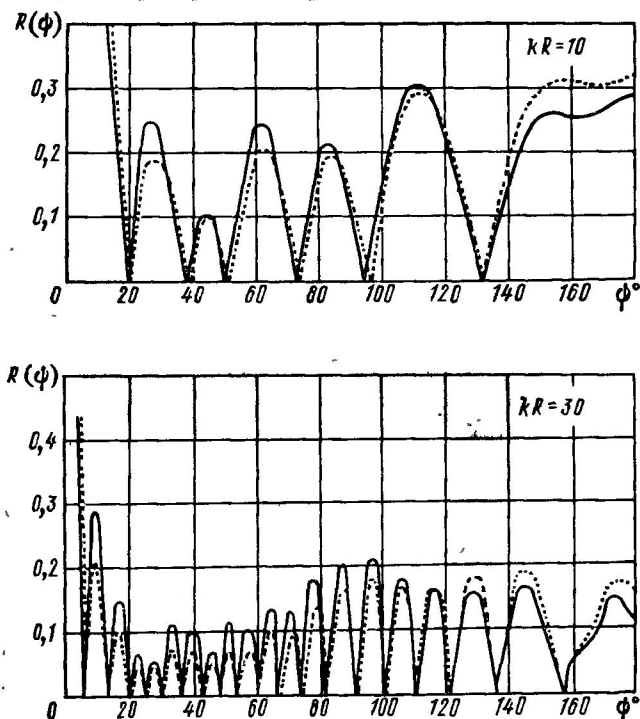


Рис. 43. Характеристики направленности двух дуг на окружности в плоскости  $\theta = \frac{\pi}{2}$  при  $\psi_0 = 60^\circ$ .

На графиках рис. 41 представлены характеристики направленности компенсированной дуги в плоскости  $\varphi = 0$ . Видно, что с ростом  $kR$  и  $\psi_0$  характеристики направленности обостряются, причем больше

при равномерном распределении (сплошные кривые), чем при косинусном (пунктирные кривые). Кроме того, осцилляции характеристик направленности при распределении  $a(\psi) \Rightarrow \cos \psi$  либо отсутствуют вообще, либо меньше, чем при  $a(\psi) = 1$

Интересно рассмотреть случай, когда линейная компенсированная антенна состоит из двух дуг, лежащих на одной окружности симметрично относительно диаметра, перпендикулярного направлению компенсации (рис. 42), т. е. случай, когда из окружности удалены две дуги, координаты точек которых соответствуют условию  $|\pi - \psi_0| > |\psi| > \psi_0$  (имеется в виду, что  $\psi$  меняется не от 0 до  $2\pi$ , а от  $-\pi$  до  $\pi$ , а  $\psi_0$  всегда положительно).

Характеристики направленности такой антенны в плоскости  $\theta = \pi/2$  представлены на рис. 43. Сравнение их со случаем одной дуги (см. рис. 40) показывает, что включение тыльного участка окружности несущественно изменяет основной максимум, но приводит к исчезновению ореола (хотя уровень добавочных максимумов, расположенных в области ореола, примерно равен его величине). Так же, как и в случае одной дуги, амплитудное распределение  $a(\psi) = |\cos \psi|$  (пунктирная кривая) уменьшает, по сравнению с равномерным амплитудным распределением (сплошная кривая), уровень добавочных максимумов характеристики направленности вплоть до углов  $\varphi = 120^\circ$ .

Интересно отметить, что несмотря на несущественное на первый взгляд отличие характеристик направленности одной и двух дуг, их коэффициенты концентрации (во всяком случае при больших величинах  $kR$ ) в соответствии с формулой (4.9) отличаются в два раза.

### § 13. Дискретные линейные антенны

**Направленность эквидистантных решеток.** Эквидистантными решетками принято называть антенны, состоящие из ненаправленных элементов, расположенных на одинаковых расстояниях вдоль прямой.

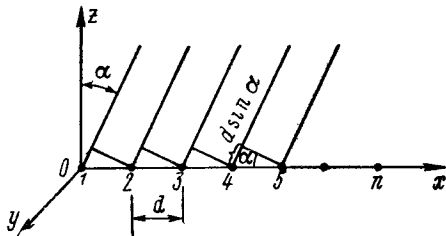


Рис. 44. Линейная эквидистантная решетка

Пусть  $n$  таких элементов размещены вдоль оси  $x$  так, что расстояния между соседними элементами одинаковы и равны  $d$  (рис. 44). Расположим начало координат в центре элемента с номером  $q = 1$ . Тогда проекции радиуса-вектора  $\rho_q$ , определяющего положение элемента с номером  $q$ , на оси  $y$  и  $z$  равны нулю, а  $\rho_{qx} = (q - 1)d$ . В силу симметрии поля, создаваемого рассматриваемой антен-

ной относительно оси  $x$ , положение единичного радиуса-вектора  $u$  можно определить одной угловой координатой  $\alpha$ , отсчитываемой, например, от плоскости  $yOz$ , перпендикулярной оси  $x$ . При этом проекция вектора  $u$  на ось  $z$  равна  $|u| \sin \alpha = \sin \alpha$  и  $\rho_q u =$

$= \rho_{qx}u_x + \rho_{qy}u_y + \rho_{qz}u_z = d(q-1) \sin \alpha$ . Подставляя это выражение в формулу (2.44), найдем давление, развиваемое эквидистантной решеткой, и переходя далее к характеристике направленности, получим

$$D(\alpha) = \frac{\sum_{q=1}^n A_q e^{-ikd(q-1) \sin \alpha}}{\sum_{q=1}^n A_q e^{-ikd(q-1) \sin \alpha_0}}.$$

Рассмотрим случай равномерного амплитудного распределения при компенсации антенны в направлении  $\alpha_0$  [ $a_q = 1$ ,  $\alpha_q = ikd(q-1) \sin \alpha_0$ ]. При этом последнее выражение запишется следующим образом:

$$D(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n e^{-ikd(q-1)(\sin \alpha - \sin \alpha_0)}.$$

Второй сомножитель этой формулы представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, поэтому, введя обозначение  $kd(\sin \alpha - \sin \alpha_0) = \beta$ , можно записать

$$\begin{aligned} D(\alpha) &= \frac{1}{n} \frac{e^{-in\beta} - 1}{e^{-i\beta} - 1} = \frac{1}{n} \frac{e^{-i\frac{n\beta}{2}}}{e^{-i\frac{\beta}{2}}} \cdot \frac{e^{-in\frac{\beta}{2}} - e^{in\frac{\beta}{2}}}{e^{-i\frac{\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta}{2}}} = \\ &= e^{-i\beta \frac{n-1}{2}} \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{n \sin \frac{\beta}{2}} \end{aligned}$$

и

$$R(\alpha) = \left| \frac{\sin \left[ \frac{kd n}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]}{n \sin \left[ \frac{kd}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \right]} \right|. \quad (4.78)$$

Как видно из этого выражения, характеристика направленности представляет собой отношение двух синусоид с разными периодами. Поскольку  $n$  — число целое, то на одном периоде синусоиды знаменателя укладывается целое число периодов синусоиды числителя и поэтому, если аргумент  $z = \frac{kd}{2} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$  равен целому числу  $\pi$ , т. е.  $z = m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ , то

$$R(\alpha) = \left| \frac{\sin nz}{n \sin z} \right| = \left| \frac{\sin n m \pi}{n \sin m \pi} \right| = 1.$$

Таким образом, при  $z = m\pi$  характеристика направленности эквидистантной решетки имеет максимумы, равные основному. Числитель обращается в нуль через интервалы, равные  $\pi/n$ , т. е. при  $z = \frac{\pi}{n} s$ , где  $s = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Основной максимум соответствует

$s = 0$ , а равные ему добавочные соответствуют  $s$ , кратному  $n$ , поскольку при этом  $z = \pi \frac{s}{n} = \pi m$ . Поэтому между двумя соседними максимумами, равными основному, располагается  $n$  минус единица нулей и  $n - 2$  добавочных максимума, меньших единицы. На рис. 45 представлены характеристики направленности эквидистантной решетки в функции от  $z$  при некоторых значениях  $n$ .

Функция  $\frac{\sin nz}{n \sin z}$  при неограниченном увеличении (или уменьшении)  $z$  имеет бесконечное число максимумов равных единице, однако в дей-

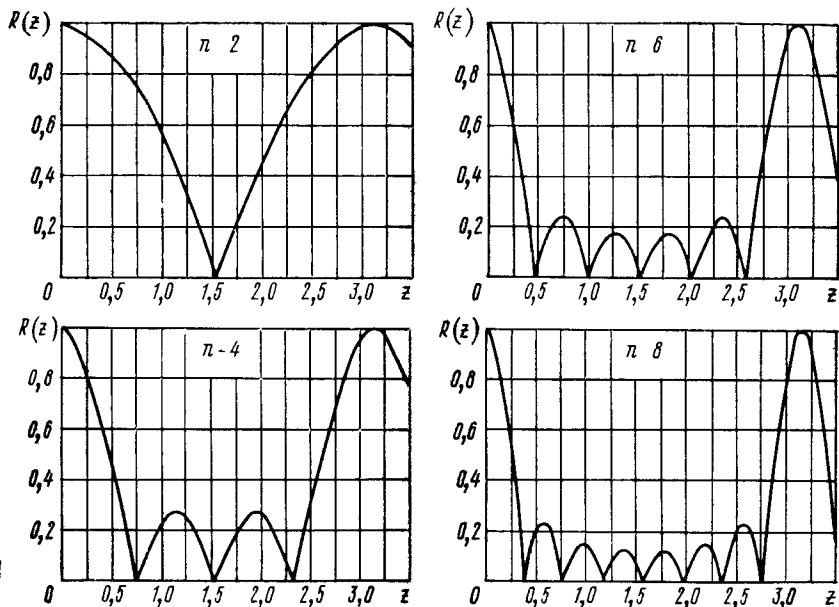


Рис. 45 Характеристики направленности линейных решеток.

ствительной области углов величина  $z$  всегда ограничена и соответственно ограничено число единичных максимумов. Так при  $\alpha_0 = 0$  в одном квадранте, т. е. при изменении  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$  и  $z$  от 0 до  $kd/2$  кроме основного максимума размещается столько единичных максимумов, равных основному, сколько раз  $\pi$  укладывается в наибольшем значении  $z$ , т. е. другими словами, — число этих максимумов равно целой части отношения  $\frac{z_{\max}}{\pi} = \frac{kd}{2\pi} = \frac{d}{\lambda}$ . Всего же в области углов от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$  число единичных максимумов равно  $2E \left[ \frac{d}{\lambda} \right] + 1$ .

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при  $\alpha_0 \neq 0$  в первом и четвертом квадрантах находится  $E [d/\lambda (1 + \sin \alpha_0)] + 1$  единичных максимумов.

В большинстве практических случаев наличие больших по величине добавочных максимумов нежелательно. Рассмотрим, при каких условиях в пределах углов  $\alpha = -\pi/2, \pi/2$  будет находиться только один максимум, равный единице

На очень низких частотах  $d/\lambda$  мало и добавочные максимумы, равные основному, отсутствуют. С ростом же частоты при  $\alpha_0 > 0$  добавочный максимум может появиться при  $\alpha = -\pi/2$ . Начало его появления можно зафиксировать условием совпадения последнего перед ним нуля характеристики направленности с направлением  $\alpha = -\pi/2$ .

Выше отмечалось, что нули имеют место при  $z = \pi \frac{s}{n}$ , а первые добавочные максимумы, равные основному, располагаются при  $z = \pm \pi$ . Таким образом, последний нуль со стороны отрицательных  $\alpha$  соответствует  $z = -\pi \frac{n-1}{n}$ ,

откуда

$$\frac{kd}{2} (1 + \sin \alpha_0) \leq \pi \frac{n-1}{n},$$

т. е.

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{n-1}{n} \frac{1}{1 + \sin \alpha_0}. \quad (4.79)$$

Это и есть условие отсутствия в характеристике направленности линейной эквидистантной решетки добавочных максимумов, равных основному. В случае отсутствия компенсации это условие имеет вид

$$\frac{d}{\lambda} \leq \frac{n-1}{n}. \quad (4.80)$$

Так как длина антенны  $l = d(n-1)$ , то домножив это неравенство слева и справа на  $n-1$  и пренебрегая слагаемым  $n^{-1}$  по сравнению с  $n$  (что возможно при большом  $n$ ), получим

$$\frac{l}{\lambda} \leq n-2. \quad (4.81)$$

Таким образом, при большом числе элементов антенны (практически при  $n > 6$ ), число элементов должно быть, по крайней мере, на два больше отношения  $l/\lambda$ . При этом характеристика направленности антенны имеет только один максимум, равный единице. Аналогичное условие для случая  $\alpha_0 > 0$  может быть получено из неравенства (4.79) в следующем виде

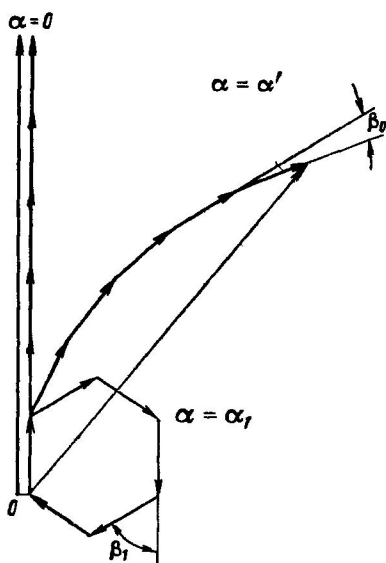
$$\frac{l}{\lambda} \leq \frac{n-2}{1 + \sin \alpha_0}. \quad (4.82)$$

Многие из изложенных выше свойств характеристики направленности эквидистантной решетки имеют очень простой физический смысл.

Так, например, непосредственно из рис 44 видно, что естественная разность хода лучей от двух соседних элементов до точки наблюдения равна  $d \sin \alpha$ , что соответствует  $kd \sin \alpha$  радианам. Ясно, что при  $\alpha_0 = 0$  независимо от числа элементов  $n$  (и даже независимо от амплитудного

распределения  $a_q$ ), если только  $kd \sin \alpha = \pi m$ , то давления от отдельных элементов складываются в фазе и в этом направлении существует максимум, равный основному.

Условия существования нуля характеристики направленности легко получить, рассматривая сложение давлений от отдельных элементов. На рис. 46 изображена сумма давлений, каждое слагаемое которой соответствует давлению, создаваемому отдельным элементом, для различных направлений  $\alpha$ . В направлении  $\alpha = 0$  давления складываются синфазно и их сумма максимальна. При  $\alpha = \alpha'$  давление



от каждого последующего элемента отличается на фазовый угол  $\beta_0 = kd \sin \alpha'$  от давления, развиваемого предыдущим элементом. В результате образуется ломаная линия. При некотором угле  $\alpha_1$  ломаная эта замкнется и суммарное давление будет равно нулю. Сумма внешних углов правильного многоугольника равна  $2\pi$ , поэтому положение первого нуля характеристики направленности определяется из условия  $n\beta_1 = nkd \sin \alpha_1 = 2\pi$ , т. е.  $z = \pi/n$ . Второй нуль характеристики направленности соответствует двойному наложению ломаной на один многоугольник (состоящий из вдвое меньшего числа сторон). При этом

$$\frac{n}{2} kd \sin \alpha_2 = 2\pi \text{ и } z = \frac{2\pi}{n}.$$

Рис 46. Сложение давлений от отдельных элементов для различных углов  $\alpha$

Нуль с порядковым номером  $s$  определяется аналогичным условием  $z = \frac{s\pi}{n}$  и со-

ответствует наложению ломаной  $s$  раз на один многоугольник, имеющий  $n/s$  сторон.

Рассмотрим процесс сложения давлений от отдельных элементов в случае большого числа плотно расположенных элементов. Для упрощения будем полагать  $\alpha_0 = 0$ . Тогда в направлении  $\alpha = 0$  все давления складываются в фазе и мы имеем некоторую постоянную величину  $l$ . При увеличении  $\alpha$  ломаная, представляющая собой результат сложения давлений от отдельных элементов при большом числе элементов и малых расстояниях между ними, по существу представляет собой дугу окружности. Длина этой дуги  $l$ , а длина хорды соответствует результирующему давлению. С увеличением угла  $\alpha$  радиус дуги непрерывно уменьшается. Фазовый угол между давлениями от крайних элементов решетки  $(n-1) kd \sin \alpha = kl \sin \alpha$  равен углу между касательными к дуге в ее начале и конце, или, что то же самое, — центральному углу дуги. Если центральный угол дуги равен  $2\pi m$ , где  $m \neq 0$ , то дуга превращается в  $m$  окружностей, наложенных друг



на друга. При этом характеристика направленности равна нулю, а  $kl \sin \alpha = 2\pi m$ . Этот вывод подтверждается анализом формулы (4.23), определяющей характеристику направленности непрерывного отрезка. Приближенно можно считать, что добавочный максимум наблюдается в случаях, когда дуга состоит из нечетного числа полуокружностей  $2r + 1$ , где  $r \geq 1$ . Тогда положение добавочного максимума с номером  $r$  определяется соотношением  $kl \sin \alpha = (2r + 1)\pi$ , а его величина равна отношению диаметра окружности к ее длине, т. е. —

$$\sigma_r \approx \frac{2l}{\pi(2r+1)} \cdot \frac{1}{l} = \frac{2}{2\pi r + \pi}.$$

Таким образом,  $\sigma_1 \approx 2/3\pi = 0,21$ ,  $\sigma_2 \approx 2,5\pi = 0,13$ ,  $\sigma_3 \approx 2,7\pi = 0,09$  и т. д. Полученные приближенные величины весьма близки к точным, приведенным выше при анализе направленных свойств непрерывного отрезка прямой.

Интересно отметить, что при сравнительно небольшом числе элементов  $n$  величина первого добавочного максимума с ростом  $n$  падает. Так,  $\sigma_1 = 0,33$  при  $n = 3$ ;  $\sigma_1 = 0,25$  при  $n = 4$ ;  $\sigma_1 = 0,22$  при  $n = 6$ .

В некоторых работах (и, в частности, в [571]) рассматривается направленность дискретных эквидистантных решеток при неравномерном амплитудном распределении. Существует целый ряд семейств амплитудных распределений, полученных по какому-нибудь правилу, для которых характеристики направленности соответствующих антенн определяются сравнительно простыми соотношениями. Чаще всего построение таких антенн производится с помощью теоремы умножения.

Так же, как и в случае непрерывного отрезка прямой, падающие к краям антенны распределения уменьшают величины добавочных максимумов, а растущие к краям — увеличивают их. Однако при достаточно большом расстоянии между соседними элементами решетки, независимо от вида амплитудного распределения наблюдаются добавочные максимумы, равные единице.

Добиться их отсутствия при том же размере антенны и том же числе элементов можно сравнительно простым способом: несколько сместить элементы вдоль оси решетки. При этом периодичность расположения элементов нарушается и синфазное сложение сигналов от всех элементов происходит только при падении волны под углом  $\alpha = 0$ . Несмотря на большое количество работ по неэквидистантным решеткам (обзор которых можно найти в книгах [2] и [34]), общая теория расчета таких решеток еще не разработана.

**Коэффициент концентрации эквидистантных решеток.** Рассмотрим вначале зависимость коэффициента концентрации эквидистантной решетки при  $a_g = 1$  в отсутствии компенсации от числа элементов и расстояния между ними. Пусть решетка состоит из очень большого числа элементов. Найдем активное сопротивление излучения одного элемента. Сделать это можно путем непосредственного суммирования взаимных сопротивлений излучения, но мы поступим иначе. В предыдущей главе была выведена формула (3.54), определяющая активное сопротивление излучения произвольного элемента бесконечной пе-

риодической линейной антенны в экране. Принимая во внимание, что в нашем случае элемент антенны ненаправлен, т. е. излучение происходит в полное пространство, и поэтому сопротивление излучения должно быть удвоено, а также учитывая, что пределы суммирования определяются из условия  $u_m^2 < 1$ , где в соответствии с формулой (3.47)  $u_m = m\lambda/d + \sin \alpha_0$ , получим

$$r_s = \frac{k^2 \rho c s_0^2 \cdot 2\pi\lambda}{16\pi^2 d} \sum_{m_1}^{m_2} \eta_m, \quad (4.83)$$

где

$$m_1 = -E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 + \sin \alpha_0) \right],$$

$$m_2 = E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 - \sin \alpha_0) \right],$$

$$\eta_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } u_m = \sin^2 \alpha_m = 1, \text{ т. е. при } |\alpha_m| = \pi/2; \\ 1 & \text{при } u_m = \sin^2 \alpha_m < 1, \text{ т. е. при } |\alpha_m| < \pi/2. \end{cases}$$

Предполагая, что активное сопротивление излучения многоэлементной антенны равно произведению числа ее элементов на полное активное сопротивление излучения элемента аналогичной бесконечной антенны, имеем

$$r_{sa} = nr_s = \frac{n\rho c s_0^2}{2\lambda d} \sum_{m_1}^{m_2} \eta_m. \quad (4.84)$$

Выше отмечалось, что  $E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 - \sin \alpha_0) \right] + E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 + \sin \alpha_0) \right] + 1$  равно общему числу единичных максимумов решетки. Таким образом, сумма по  $m$  в формуле (4.84) представляет собой сумму по всем единичным максимумам характеристики направленности решетки.

Это обстоятельство позволяет понять физический смысл последней формулы. Действительно, в соответствии с выражениями (1.37) и (1.34), активное сопротивление излучения определяется интегралом по полному телесному углу от квадрата характеристики направленности антенны. Характеристика направленности решетки ненаправленных элементов при увеличении числа ее элементов стремится к сумме  $\delta$ -функций, положение которых в пространстве совпадает с положением единичных максимумов. Поэтому и интеграл по телесному углу вырождается в сумму некоторых слагаемых, соответствующих единичным добавочным максимумам.

Давление, развиваемое линейной решеткой в направлении компенсации при  $a_q = 1$ , определится в соответствии с формулой (2.49) выражением

$$p(\alpha_0) = -\frac{ik\rho c s_0^2 \omega}{4\pi r} n e^{ikr}. \quad (4.85)$$

Подставляя два последних соотношения в формулу (1.38), получим

$$K = \frac{2dn}{\lambda} \left( \sum_{m_1}^{m_2} \eta_m \right)^{-1}. \quad (4.86)$$

В соответствии с этим выражением зависимость коэффициента концентрации от  $d/\lambda$  представляется разрывной функцией, состоящей из отрезков прямых.

С помощью формул (1.23) и (1.39) можно получить точные выражения, определяющие активное сопротивление излучения и коэффициент концентрации эквидистантной решетки, если только известны взаимные активные сопротивления излучения ее элементов  $r_{qg}$ . Найти выражения для расчета  $r_{qg}$  можно по ближнему или дальнему полю.

Подставляя формулу (2.43) в соотношение (1.17) и предполагая, что из-за малости элементов давление, создаваемое одним из них на всех точках поверхности  $S_0$  другого, одинаково, имеем

$$z_{qg} = -\frac{ik\rho cs_0}{4\pi d_{qg}} \int_{S_0} e^{ikd_{qg}} ds_0 = \\ = \frac{k^2 \rho cs_0^2}{4\pi} \left[ \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}} - i \frac{\cos kd_{qg}}{kd_{qg}} \right], \quad (4.87)$$

где  $d_{qg}$  — расстояние между центрами элементов с номерами  $q$  и  $g$ . На графике рис. 47 представлены безразмерные величины активной и реактивной составляющих взаимного сопротивления излучения ненаправленных элементов (т. е.  $r'_{qg} = \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}}$  и  $x'_{qg} = \frac{\cos kd_{qg}}{kd_{qg}}$ )

в зависимости от волнового расстояния между элементами  $d_{qg}/\lambda$ . Вычислим теперь взаимное активное сопротивление излучения ненаправленных элементов через дальнее поле по формуле (1.30). Совместим начало координат с центром одного из элементов. Тогда его фазовая характеристика определится выражением  $kr$ , а другого  $kr - kd_{qg} \cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением на точку наблюдения и прямой, соединяющей оба элемента. Поэтому в соответствии с формулой (1.30) можно записать:

$$r_{qg} = \frac{r^2}{\rho c} \left( \frac{k\rho cs_0}{4\pi r} \right)^2 \int_{\Omega} \text{Re} [e^{ikr} e^{-i(kr - kd_{qg} \cos \theta)}] d\Omega = \\ = \frac{k^2 \rho cs_0^2}{(4\pi)^2} \cdot 2\pi \int_0^\pi \cos(kd_{qg} \cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{k^2 \rho cs_0^2}{4\pi} \cdot \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}}. \quad (4.88)$$

Полученное выражение совпадает с действительной частью формулы (4.87). Подставляя формулу (4.88) в соотношения (1.23) и (1.39) и учи-

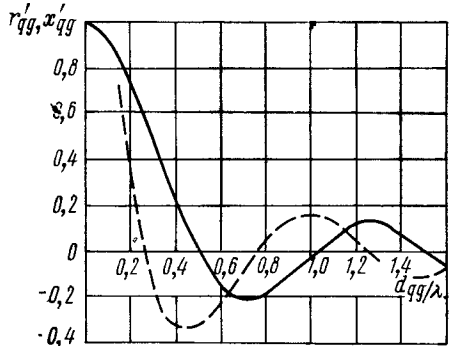


Рис. 47. Безразмерные активная (сплошная линия) и реактивная (штриховая линия) составляющие взаимного сопротивления излучения двух ненаправленных элементов, удаленных на расстоянии  $d_{qg}/\lambda$ .

таявая выражение (2.44), получим

$$r_{sa} = \frac{k^2 \rho c s_0^2}{4\pi} \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}} \quad (4.89)$$

и

$$K = \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q e^{-ik\rho_q u_0} \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}}} \quad (4.90)$$

Эта формула определяет коэффициент концентрации произвольной антенны, состоящей из ненаправленных элементов.

В случае линейной эквидистантной решетки расстояние между элементами с номерами  $q$  и  $g$  равно  $|d(q-g)|$ , а при компенсации в направлении  $\alpha_0$  фазовое возбуждение  $\alpha_q = k\rho_q u_0 = k(q-1)d \sin \alpha_0$ . Подставляя эти выражения в формулу (4.90), а также записывая вместо комплексной величины под знаком двойной суммы ее действительную часть (в справедливости чего можно убедиться, рассматривая сумму двух слагаемых с индексами  $q, g$  и  $g, q$ ), получим

$$K = \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g \cos [kd(q-g) \sin \alpha_0] \frac{\sin kd(q-g)}{kd(q-g)}} \quad (4.91)$$

В случае равномерного амплитудного распределения двойную сумму можно превратить в одинарную, если суммирование проводить не по номерам элементов, а по числам, равным отношению расстояний между произвольными и соседними элементами. При этом формула (4.91) принимает следующий вид:

$$K = \frac{n^2}{\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_s (n-s) \cos [kds \sin \alpha_0] \frac{\sin kds}{kds}} \quad (4.92)$$

где  $\varepsilon_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0; \\ 2 & \text{при } s>0. \end{cases}$

В справедливости записанного выражения легко убедиться следующим образом. Слагаемое знаменателя, соответствующее  $s=0$  равно  $n$  и пропорционально сумме собственных сопротивлений излучения элементов решетки. Слагаемое знаменателя при  $s=1$  равно  $2(n-1) \cos(kd \sin \alpha) \frac{\sin kd}{kd}$  и пропорционально сумме взаимодействий соседних элементов решетки. Действительно, таких взаимодействий слева направо  $n-1$  и справа налево тоже  $n-1$ . Слагаемое же при  $s=n-1$  определяет взаимодействие крайних элементов решетки, а множитель  $\varepsilon_s (n-s) = 2$  учитывает, что взаимодействий таких два:

первого элемента с последним и последнего с первым. Справедливость формулы (4.92) можно проверить также непосредственным выводом ее из формулы (4.91), для чего следует записать матрицу всех взаимодействий элементов в антенне и затем объединить одинаковые взаимодействия.

Линейная решетка является единственной многоэлементной антенной, для которой условие независимости элементов может выполняться не приближенно, а абсолютно строго.

Если расстояния между соседними элементами линейной решетки равны половине длины волны, то взаимные сопротивления излучения всех элементов равны нулю, и полное сопротивление излучения равно сумме собственных. В этом случае в сумме знаменателя выражения (4.92) остается всего одно слагаемое с индексом  $s = 0$ , весь знаменатель равен  $n$  и коэффициент концентрации равен числу элементов решетки. Эту же величину коэффициент концентрации имеет и при  $d = 0,5m\lambda$ , где  $m > 0$ .

Рассмотрим случай  $d < 0,5\lambda$ ,  $\alpha_0 = 0$ . При этом взаимное активное сопротивление излучения наибольшего числа одинаково взаимодействующих (а именно соседних) элементов положительно (см. рис. 47), поэтому полное сопротивление излучения больше, чем при  $d = 0,5\lambda$ . Так как давление, развиваемое в направлении главного максимума характеристики направленности, при неизменных величинах колебательных скоростей элементов не зависит от  $d/\lambda$ , то коэффициент концентрации обратно пропорционален активному сопротивлению излучения и при  $d < 0,5\lambda$  он меньше, чем при  $d = 0,5\lambda$ . При увеличении расстояния между элементами от  $0,5\lambda$  до  $\lambda$  взаимодействие ближайших элементов отрицательно и коэффициент концентрации растет. Однако при  $d/\lambda > 1$  взаимодействие большинства элементов положительно и коэффициент концентрации падает.

Приведенные рассуждения подтверждают результаты расчетов, выполненных по формуле (4.92) и представленных на рис. 48. Сплошная линия соответствует случаю  $n = 2$ , пунктирная —  $n = 10$ . На этих же графиках приведены результаты расчета по приближенной формуле (4.86) (штриховая линия).

Анализ графиков рис. 48 позволяет сделать следующие выводы.

При малых  $d/\lambda$  и большом числе элементов решетки  $n$  с ростом  $d/\lambda$  коэффициент концентрации растет почти линейно и близок к величине  $K = 2l/\lambda = 2(n-1)d/\lambda$ , соответствующей коэффициенту концентрации непрерывной линии. Однако при некотором  $d/\lambda$ , тем большем, чем больше  $n$ , и соответствующем появлению единичного максимума характеристики направленности, коэффициент концентрации резко падает, а затем до появления новых единичных максимумов растет из-за уменьшения ширины основного и добавочного максимумов. Для  $\alpha_0 = 0$  добавочные единичные максимумы появляются при  $d/\lambda = 1$ , для  $\alpha_0 = 90^\circ$  при  $d/\lambda = 0,5$ , поэтому и максимальные величины  $K$  с ростом  $\alpha_0$  сдвигаются в сторону меньших  $d/\lambda$ . Как и следовало ожидать, результаты расчета по приближенной формуле (4.86) тем точнее, чем больше  $n$ . Для  $n \geq 10$  разница результатов, полученных по точной и приближенной формулам практически заметна только в узкой

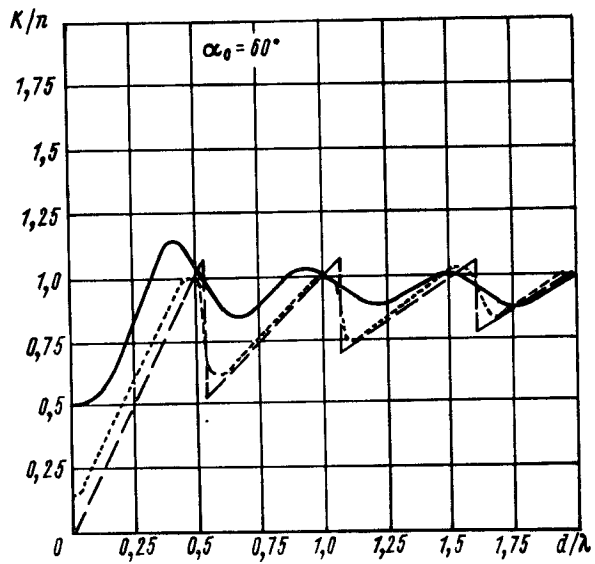
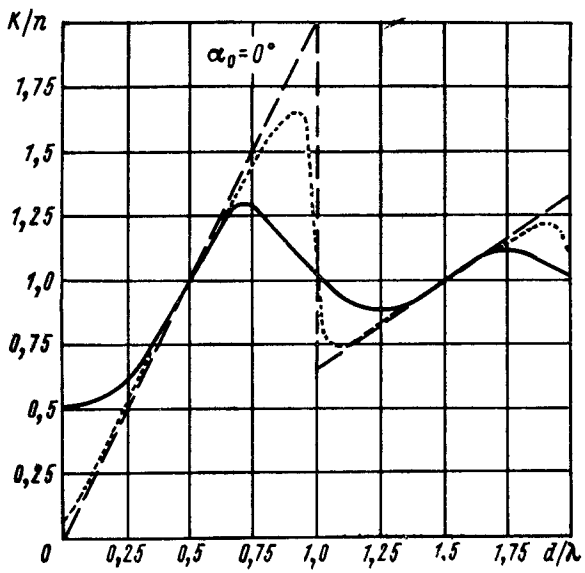
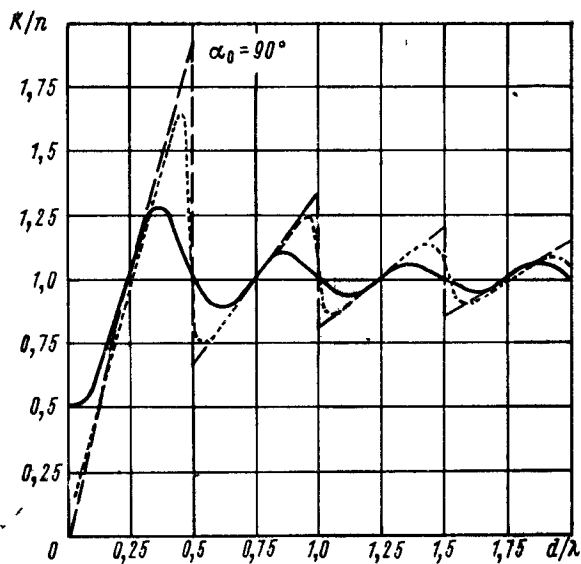
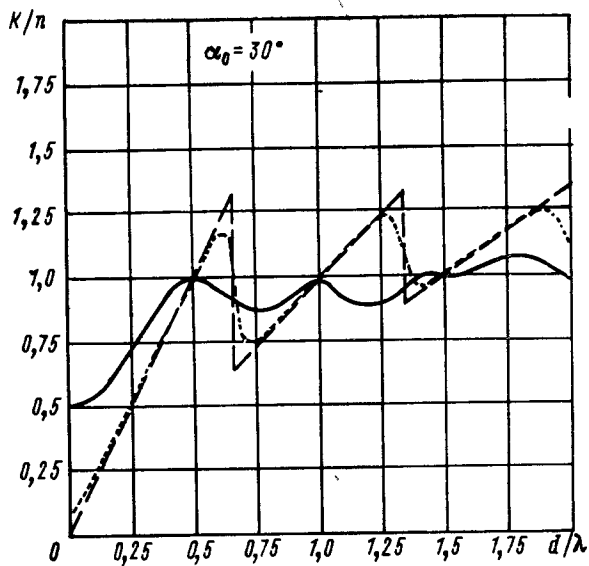


Рис 48. Зависимость отношения коэффициента конценра



ции линейной решетки к числу ее элементов от  $d/\lambda$ .

области изменения  $d/\lambda$ , лежащей вблизи от величины  $d/\lambda$ , соответствующей появлению добавочного единичного максимума. Физически это обстоятельство легко понять, если принять во внимание, что ширина единичных максимумов тем меньше, чем больше  $n$ , и при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю, поэтому появление единичных максимумов от малых их уровней до самых больших происходит при больших  $n$  за меньший интервал изменения  $d/\lambda$ , чем при малых  $n$ , и в пределе при  $n \rightarrow \infty$  скачком.

Коэффициент концентрации линейной эквидистантной решетки при неравномерном амплитудном распределении может быть определен по формуле (4.91). В случае, когда расстояния между соседними элементами кратны  $0,5 \lambda$ , сумма вносимых активных сопротивлений излучения равна нулю и

$$K = \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2}. \quad (4.93)$$

Так как это выражение максимально при  $a_q = 1$  для всех  $q$ , введение амплитудного распределения всегда уменьшает коэффициент концентрации при  $d = 0,5 m\lambda$ , где  $m$  — произвольное положительное целое число. Интересно отметить, что при этом имеют значение только величины амплитуд коэффициентов возбуждения, а распределение их по элементам антенны безразлично. Однако при  $d/\lambda$ , приближающемся к единице, т. е. тогда, когда коэффициент концентрации уменьшается из-за появления добавочных максимумов, равных единице, при распределении, падающем к краям антенны (т. е. при более широких единичных максимумах) коэффициент концентрации начнет падать при меньших  $d/\lambda$ , чем при распределении, растущем к краям. Для антенны, состоящей из большого числа элементов, эта разница невелика, поскольку единичные максимумы имеют очень малую ширину.

Если предположить, что амплитудное распределение вдоль антенны меняется настолько плавно, что на участке, вносящем существенный вклад в активное сопротивление излучения отдельного элемента, оно практически неизменно, то можно получить следующее выражение, приближенно определяющее коэффициент концентрации антенны:

$$K = \frac{2dn}{\lambda} \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2} \left( \sum_{m_1}^{m_2} \eta_m \right)^{-1}, \quad (4.94)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  и  $\eta_m$  те же, что и в формуле (4.83).

**Антенна, состоящая из отрезков, лежащих на одной прямой.** Характеристику направленности антенны, состоящей из  $n$  отрезков длиной  $l_0$ , расположенных вдоль прямой так, что расстояния между их центрами одинаковы и равны  $l$  (рис. 49), можно определить по теореме умножения как произведение двух характеристик направленности:



отрезка и эквидистантной решетки ненаправленных элементов. В результате получим

$$D(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{\lambda} \sin \alpha\right)}{\frac{\pi l_0}{\lambda} \sin \alpha} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi l n}{\lambda} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)\right]}{n \sin\left[\frac{\pi l}{\lambda} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)\right]}. \quad (4.95)$$

Анализ зависимости характеристик направленности от угла компенсации  $\alpha_0$ , длины отрезков  $l_0$  и расстояния между их центрами  $l$  благодаря тому, что эта формула состоит из двух сомножителей, рассмотренных ранее, не представляет большого труда. Несколько сложнее обстоит дело с расчетом сопротивления излучения и коэффициента концентрации.

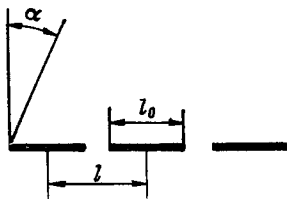


Рис. 49. Антенна, состоящая из отрезков прямой.

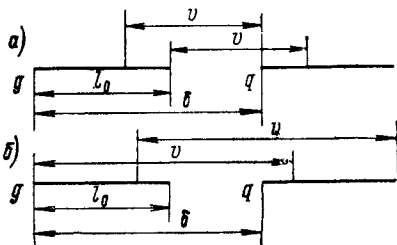


Рис. 50. К определению  $r_{qg}$  двух отрезков.

Найдем активное взаимное сопротивление излучения двух отрезков, расстояние между центрами которых равно  $l |q - g| = \delta$  (рис. 50). В соответствии с формулами (1.17) и (2.39), сопротивление излучения и давление, развиваемое линией, определяются соотношениями

$$z_{qg} = \int_{s_q} p'_g ds_q$$

и

$$p_g = -\frac{ik\rho c r_0 w}{2} \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \frac{e^{ikr}}{r} dx,$$

где  $r_0$  — радиус пульсирующего цилиндра, представляющего собой излучающий отрезок ( $2r_0 \ll \lambda$ ).

Совместим с центрами отрезков, имеющих номера  $g$  и  $q$ , начала координатных осей  $x_g$  и  $x_q$ . При этом расстояние между двумя точками, принадлежащими различным отрезкам  $r = \delta - x_g + x_q$ , а активное взаимное сопротивление отрезков определяется выражением

$$r_{qg} = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi r_0 \int_{-l_0/2}^{l_0/2} p'_g dx_q \right\} = k\rho c \pi r_0^2 \times \\ \times \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \int_{-l_0/2}^{l_0/2} \frac{\sin k(\delta - x_g + x_q)}{\delta - x_g + x_q} dx_q dx_g.$$

Введем новые переменные  $u$  и  $v$ . Символом  $v$  обозначим расстояние между двумя произвольными точками на рассматриваемых отрезках. Как видно из рис. 50,  $v$  меняется от  $\delta - l_0$  до  $\delta + l_0$ . Перебирать все возможные расстояния между двумя произвольными точками на отрезках будем следующим образом. Зафиксируем расстояние  $v$  и рассмотрим положение всех взаимодействующих пар точек при неизменном  $v$ . Как видно из рис. 50, а при  $v \leq \delta$  взаимодействуют точки отрезка  $q$ , координата  $x$  которых, отсчитываемая от левого конца отрезка  $g$ , меняется от  $\delta - v$  до  $l_0$ . Полагая  $x = u$ , заметим, что при изменении  $v$  от  $\delta - l_0$  до  $\delta$ , переменная  $u$  меняется от  $\delta - v$  до  $l_0$ . В случае же, когда расстояние между рассматриваемыми точками  $v > \delta$  (см. рис. 50, б), во взаимодействии участвуют точки отрезка  $g$ , координата которых  $x$  меняется от 0 до  $\delta + l_0 - v$ .

На основании изложенного выражение, определяющее взаимное активное сопротивление излучения отрезков  $g$  и  $q$ , можно записать следующим образом:

$$r_{qg} = k\rho c \pi r_0^2 \left\{ \int_{v=\delta-l_0}^{\delta} \int_{u=\delta-v}^{l_0} \frac{\sin kv}{v} dv du + \int_{v=\delta+l_0}^{\delta+l_0} \int_{u=0}^{\delta+l_0-v} \frac{\sin kv}{v} dv du \right\}.$$

Интегралы по  $u$  вычисляются элементарно, а интегралы по  $v$  сводятся к интегральным синусам. В результате имеем

$$r_{qg} = k\rho c \pi r_0^2 \left\{ (\delta + l_0) \text{Si} [k(\delta + l_0)] + (\delta - l_0) \times \right. \\ \left. \times \text{Si} [k(\delta - l_0)] - 2\delta \text{Si} (k\delta) - \frac{4}{k} \cos k\delta \sin^2 \frac{kl_0}{2} \right\}, \quad (4.96)$$

где  $\delta = l |q - g|$ .

Из этого выражения, устремляя расстояние  $\delta$  между взаимодействующими отрезками к нулю, можно получить формулу, определяющую собственное сопротивление излучения отрезка длиной  $l_0$

$$r_s = 2k\rho c \pi r_0^2 l_0 \left[ \text{Si} (kl_0) - \frac{2}{kl_0} \sin^2 \frac{kl_0}{2} \right].$$

Принимая во внимание, что максимальное давление, развиваемое излучающим отрезком в дальнем поле, определяется выражением

$$p = -\frac{ik\rho c \omega r_0 l_0}{2r} e^{ikr},$$

с помощью формулы (1.38) легко получить выражение для коэффициента концентрации отрезка, совпадающее с приведенной выше формулой (4.27), что подтверждает правильность проведенных вычислений.

На рис. 51 представлены кривые, рассчитанные по формуле (4.96) и показывающие изменение нормированного активного взаимного сопротивления излучения двух отрезков при изменении относительного расстояния между их центрами. При  $l_0/\lambda = 0,1$  кривая практически совпадает с функцией  $\frac{\sin k\delta}{k\delta}$  (сравни с рис. 47), определяющей взаимодействие двух ненаправленных элементов. С ростом же отно-

сительной величины элемента  $l_0/\lambda$  первый максимум кривых расширяется, а величина последующих уменьшается. Эта закономерность, как мы убедимся в дальнейшем, является общей для взаимодействия элементов конечных размеров.

Активное сопротивление излучения всей антенны при возбуждении элементов, обеспечивающем компенсацию в направлении  $\alpha_0$ , можно записать так:

$$r_r = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* r_{qg} = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g e^{ik(q-1)l \sin \alpha_0} e^{-ik(g-1)l \sin \alpha_0} r_{qg} =$$

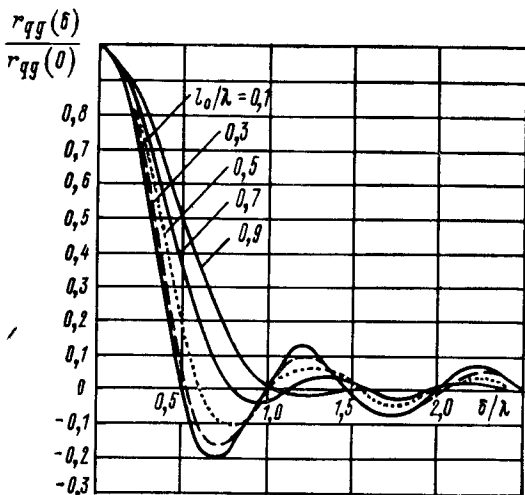


Рис. 51. Зависимость  $r_{qg}(\delta)/r_{qg}(0)$  от  $\delta/\lambda$ .

$$= k\rho c \pi r_0^2 \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g \cos [k(q-g)l \sin \alpha_0] h_{qg}, \quad (4.97)$$

где

$$h_{qg} = (\delta + l_0) \text{Si} [k(\delta + l_0)] + (\delta - l_0) \text{Si} [k(\delta - l_0)] - \\ - 2\delta \text{Si} (k\delta) - \frac{4}{k} \cos k\delta \sin^2 \frac{kl_0}{2}; \\ \delta = l|q-g|.$$

Давление, развиваемое одним отрезком в дальнем поле в направлении компенсации всей антенны  $\alpha_0$  можно найти следующим образом:

$$p(\alpha_0) = -\frac{ik\rho c r_0 \omega}{2r} e^{ikr} \int_{-l_0/2}^{l_0/2} e^{-ikx \sin \alpha_0} dx = \\ = -\frac{ik\rho c r_0 \omega l_0}{2r} e^{ikr} \frac{\sin \left( \frac{\pi l_0}{\lambda} \sin \alpha_0 \right)}{\frac{\pi l_0}{\lambda} \sin \alpha_0}. \quad (4.98)$$

Поскольку в направлении компенсации давления от всех элементов антенны складываются синфазно, давление, развиваемое всей антенной, запишется так:

$$p(\alpha_0) = -\frac{ik\rho cr_0\omega_0 l_0}{2r} e^{ikr} D(\alpha_0) \sum_{q=1}^n a_q, \quad (4.99)$$

где  $D(\alpha_0) = \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{\lambda} \sin\alpha_0\right)}{\frac{\pi l_0}{\lambda} \sin\alpha_0}$  — величина характеристики направления

одного элемента в направлении компенсации антенны.

Подставляя выражения (4.99) и (4.96) в формулу (1.38), найдем коэффициент концентрации антенны, состоящей из отрезков прямой, при компенсации в направлении  $\alpha_0$

$$K = kl_0^2 R^2(\alpha_0) \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g \cos[k(q-g)l \sin\alpha_0] h_{qg}}. \quad (4.100)$$

При равномерном амплитудном распределении двойная сумма знаменателя может быть преобразована в одинарную (так же, как и в случае эквидистантной решетки) и

$$K = kl_0^2 R^2(\alpha_0) \frac{n^2}{\sum_{s=0}^{n-1} \epsilon_s (n-s) \cos[ksl \sin\alpha_0] h_s}, \quad (4.101)$$

где  $\epsilon_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0; \\ 2 & \text{при } s>0; \end{cases}$

$$h_s = (sl + l_0) \text{Si}[k(sl + l_0)] + (sl - l_0) \text{Si}[k(sl - l_0)] - 2sl \text{Si}(ksl) - \frac{4}{k} \cos ksl \sin^2 \frac{kl_0}{2}.$$

Полное активное сопротивление излучения (т. е. сопротивление излучения с учетом всех взаимодействий между элементами) отрезка прямой, заключенного в бесконечную одномерную антенну, состоящую из таких же отрезков, можно определить по формуле (3.56). Система координат, в которой записана эта формула, выбрана так, что угол  $\theta$  отсчитывается от линии, на которой расположены центры элементов решетки (т. е.  $\theta = \pi/2 - \alpha$ ), а угол  $\varphi$  лежит в плоскости, перпендикулярной этой линии (т. е.  $R(\varphi) = 1$ ). Учитывая скачанное, а также удваивая сопротивление излучения в связи с тем, это рассматриваемая антенна не находится в экране, получим

$$r_s = \frac{k^2 \rho cr_0^2 l_0^2}{2} \frac{\lambda}{l} \sum_{m_1}^{m_2} \eta_{m_1} R^2(\alpha_{m_1}), \quad (4.102)$$

где

$$m_1 = -E \left[ \frac{l}{\lambda} (1 + \sin\alpha_0) \right];$$

$$m_2 = E \left[ \frac{l}{\lambda} (1 - \sin \alpha_0) \right];$$

$$\eta_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } |\sin \alpha_m| = 1, \\ 1 & \text{при } |\sin \alpha_m| < 1; \end{cases}$$

$$\sin \alpha_m = m \frac{\lambda}{d} + \sin \alpha_0.$$

Предположим, что полное активное сопротивление излучения отрезка в бесконечной и конечной антеннах одинаковы; тогда активное сопротивление излучения всей антенны приближенно равно  $nr_s$ , а давление, развиваемое всей антенной,  $np(\alpha_0)$ , [где  $r_s$  определяется формулой (4.102), а  $p(\alpha_0)$  — формулой (4.98)]. Зная давление, развиваемое антенной в направлении  $\alpha_0$  и ее активное сопротивление излучения, легко найти и приближенное выражение, определяющее коэффициент концентрации

$$K = \frac{2ln}{\lambda} \frac{R^2(\alpha_0)}{\sum_{m_1}^{m_2} \eta_m R^2(\alpha_m)}. \quad (4.103)$$

Это выражение получено в предположении, что амплитудное распределение вдоль антенны постоянно. Если антенна состоит из большого числа отрезков, а амплитудное распределение меняется достаточно плавно, то активное сопротивление излучения элемента с амплитудой возбуждения  $a_q$  приближенно может быть определено как произведение  $a_q^2 r_s$ . Давление же, развиваемое элементом антенны в направлении  $\alpha_0$ , легко получить, умножая  $a_q$  на выражение (4.98). Коэффициент концентрации при этом определяется выражением

$$K = \frac{2l}{\lambda} \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n a_q^2} \frac{R^2(\alpha_0)}{\sum_{m_1}^{m_2} \eta_m R^2(\alpha_m)}. \quad (4.104)$$

Приведенные приближенные формулы (4.103) и (4.104) получены для случая, когда вдоль отдельного отрезка, являющегося элементом антенны, амплитуда колебательной скорости неизменна.

Легко показать, что они остаются справедливыми и при неравномерном амплитудном распределении вдоль отрезка, если только под  $R(\alpha)$  понимать характеристику направленности отрезка при  $a(x) \neq 1$ .

Рассмотрим величину коэффициента концентрации антенны, состоящей из отрезков прямой при равномерном амплитудном распределении как вдоль отрезков, так и между ними.

На рис. 52 представлены результаты расчетов для случаев  $\alpha_0 = 0$ ,  $n = 10$ ,  $l_0/l = 0,4; 0,6; 0,8$ . Прежде всего отметим, что расчет по формуле (4.103), полученной методом бесконечной решетки (штриховые линии), дает величины, совпадающие при многих  $l/\lambda$  с величинами, полученными по точной формуле (4.101); исключением является об-

ласть изменения  $l/\lambda$ , близкая к 1 и 2, причем, чем больше  $n$ , тем она уже и практически, начиная с  $n = 10$ , результаты расчетов обоими методами совпадают. При изменении  $l/\lambda$  от 0,1 до 0,9  $K/n$  растет почти линейно, причем величина  $K \approx 2nl/\lambda$ , т. е. коэффициент концентрации рассматриваемой антенны равен коэффициенту концентрации сплошной линии, имеющей длину  $nl$ . Таким образом, при расстояниях между центрами отрезков, меньших  $0,9 \lambda$ , коэффициент концентрации не зависит от величины зазора между отрезками, т. е. от отношения  $l_0/l$ . При изменении  $l/\lambda$  от 0,9 до 1,1 существует некоторая переходная область, после которой с ростом  $l/\lambda$  отношение  $K/n$  увеличивается также линейно, но величина  $K/n$  уже зависит от  $l_0/l$  и чем больше зазоры, тем она меньше. Приближенно можно считать, что коэффициент концентрации антенны, состоящей из отрезков, при  $l/\lambda > 1,1$  равен коэффициенту концентрации сплошной линии, равной общей длине антенны  $nl$  за вычетом общей длины всех зазоров. Другими словами, при  $l/\lambda < 1$  коэффициент концентрации зависит от общей длины антенны, а при  $l/\lambda > 1$  только от суммы длин активных участков (переходная же область в окрестности  $l/\lambda = 1$  тем уже, чем больше  $n$ ).

Заметим, что этот вывод справедлив только в отсутствии фазового распределения вдоль антенны. На графике рис. 53 показано рассчитанное по формуле (4.101) отношение  $K/n$  в зависимости от  $l/\lambda$  при  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Линейный рост  $K/n$  с увеличением  $l/\lambda$  происходит при  $\alpha_0 = 30^\circ$  уже не до  $l/\lambda = 0,9$ , а только до  $l/\lambda = 0,6$ , далее появляется единичный добавочный максимум решетки ненаправленных элементов, расположенных в центрах реальных, и  $K/n$  перестает линейно увеличиваться с ростом  $l/\lambda$ .

Графики рис. 52 и рис. 53 рассчитаны при заданной величине  $l_0/l$  и изменении  $l/\lambda$ , а следовательно, и  $l_0/\lambda$ . Таким образом, они соответствуют случаю изменения частоты при сохранении геометрии антенны. На рис. 54 для  $\alpha_0 = 0$  и  $n = 10$  приведены результаты расчета коэффициента концентрации антенны, состоящей из отрезков прямой, в случае, когда волновой размер элементов не меняется, но меняется расстояние между ними (т. е. элементы раздвигаются при неизменной частоте). Как и раньше, сплошными линиями показаны результаты расчетов по точной формуле (4.101), а штриховыми — по приближенной (4.103). Видно, что и в этом случае приближенно справедлив сделанный выше вывод о влиянии зазоров на коэффициент концентрации, причем, чем больше относительный размер элемента  $l_0/\lambda$ , тем этот вывод точнее соответствует результату точного расчета. При  $l_0/\lambda = 0,5$

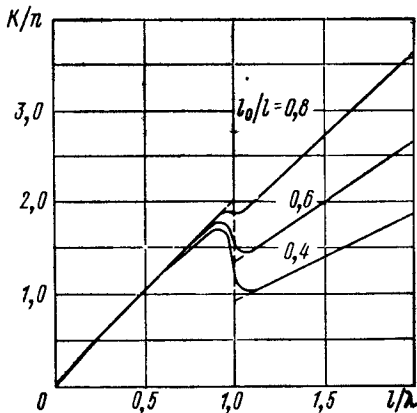


Рис. 52. Зависимость  $K/n$  от  $l/\lambda$  при  $\alpha_0 = 0$ .

при  $\alpha_0 = 30^\circ$ . Линейный рост  $K/n$  с увеличением  $l/\lambda$  происходит при  $\alpha_0 = 30^\circ$  уже не до  $l/\lambda = 0,9$ , а только до  $l/\lambda = 0,6$ , далее появляется единичный добавочный максимум решетки ненаправленных элементов, расположенных в центрах реальных, и  $K/n$  перестает линейно увеличиваться с ростом  $l/\lambda$ .

Графики рис. 52 и рис. 53 рассчитаны при заданной величине  $l_0/l$  и изменении  $l/\lambda$ , а следовательно, и  $l_0/\lambda$ . Таким образом, они соответствуют случаю изменения частоты при сохранении геометрии антенны. На рис. 54 для  $\alpha_0 = 0$  и  $n = 10$  приведены результаты расчета коэффициента концентрации антенны, состоящей из отрезков прямой, в случае, когда волновой размер элементов не меняется, но меняется расстояние между ними (т. е. элементы раздвигаются при неизменной частоте). Как и раньше, сплошными линиями показаны результаты расчетов по точной формуле (4.101), а штриховыми — по приближенной (4.103). Видно, что и в этом случае приближенно справедлив сделанный выше вывод о влиянии зазоров на коэффициент концентрации, причем, чем больше относительный размер элемента  $l_0/\lambda$ , тем этот вывод точнее соответствует результату точного расчета. При  $l_0/\lambda = 0,5$

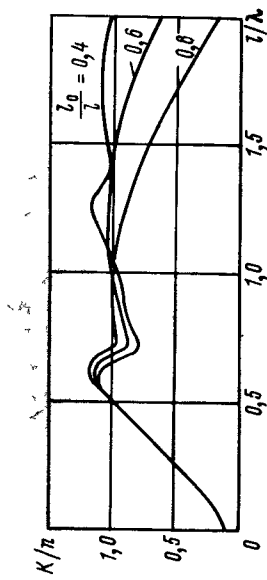


Рис. 53. Зависимость  $K/n$  от  $l/\lambda$  при  $\alpha_0 = 30^\circ$  и  $n = 10$ .

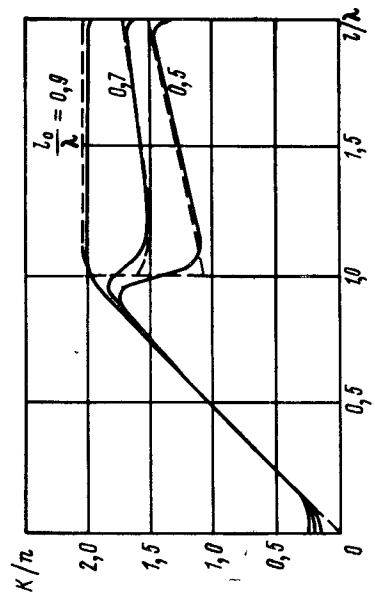


Рис. 54. Зависимость  $K/n$  от  $l/\lambda$  ( $\alpha_0 = 0$ ;  $n = 10$ ).

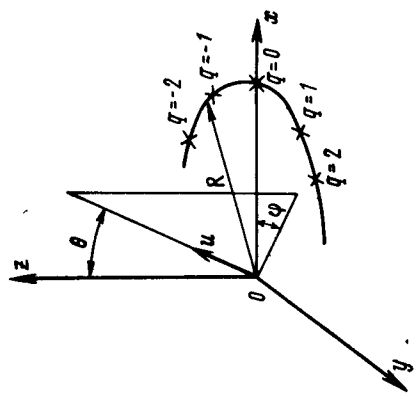


Рис. 55. Антенна, состоящая из ненаправленных элементов, лежащих на дуге окружности.

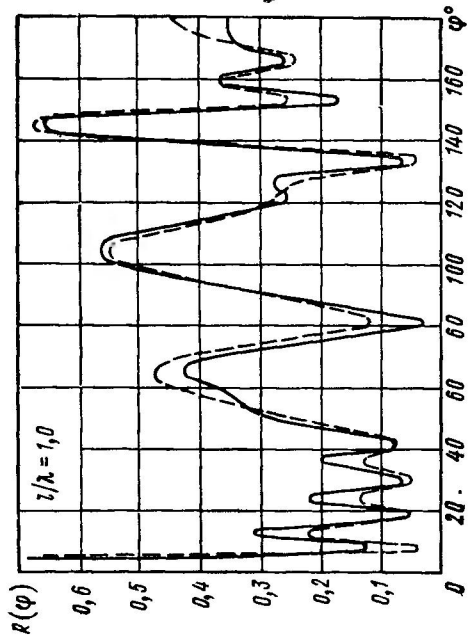
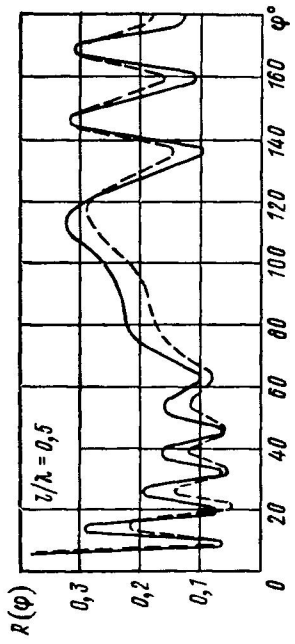
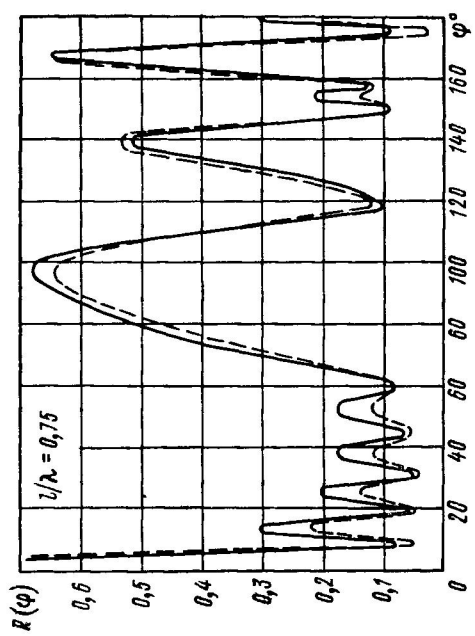
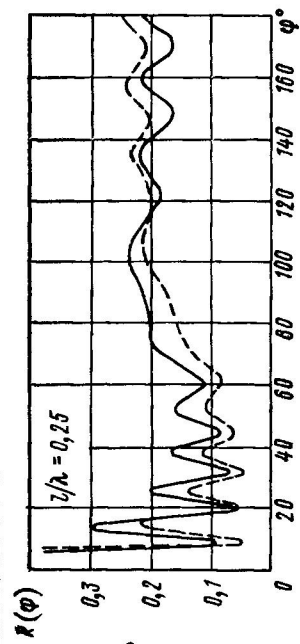


Рис. 56. Характеристики направленности компенсированной дуги, состоящей из ненаправленных элементов ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ;  $kR = 20$ ).



взаимодействие между элементами достаточно велико и в диапазоне  $l/\lambda$  от 1 до 2 величина  $K/n$  в среднем равна 1,25, а если бы элементы были независимы, то  $K$  равнялось бы  $\frac{2l_0n}{\lambda}$ , т. е.  $K/n$  равнялось бы единице.

**Антенна, состоящая из ненаправленных элементов на дуге.** Рассмотрим характеристики направленности антенны, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных на дуге окружности. Для определенности будем считать, что в середине дуги, т. е. при  $\psi = 0$ , расположен элемент, имеющий порядковый номер  $q = 0$  (рис. 55). Начало координат совместим с центром окружности, частью которой является дуга. Тогда  $x_q = R \cos \psi_q$ ,  $y_q = R \sin \psi_q$ , где  $\psi_q = q \Delta \psi$ , ( $\Delta \psi$  — угловой шаг между соседними элементами). Скалярное произведение  $\mathbf{r}_q \mathbf{u}$ , определяющее разность хода лучей от элемента  $q$  и начала координат в направлении  $\mathbf{u}$  равно  $R \sin \theta \cos \varphi \cos \psi_q + R \sin \theta \sin \varphi \sin \psi_q$  и в соответствии с формулой (2.50)

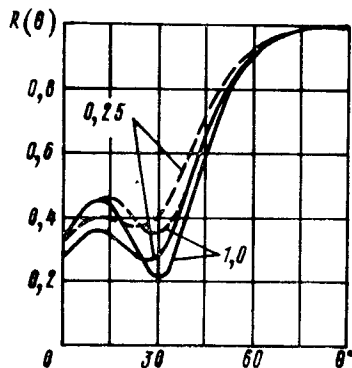


Рис. 57. Характеристики направленности компенсированной дуги, состоящей из ненаправленных элементов ( $\varphi = 0^\circ$ ,  $kR = 20$ ,  $l/\lambda = 0,25; 1,0$ ).

$$R(\theta, \varphi) =$$

$$\frac{\left| \sum_{q=-n}^n a_q e^{-ikR [\cos \psi_q (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) + \sin \psi_q (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0)]} \right|}{\sum_{q=-n}^n a_q} \quad (4.105)$$

где  $2n + 1 = N$  — общее число элементов на дуге, а углы  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  определяют направление компенсации.

На рис. 56 представлены характеристики направленности компенсированной вдоль оси  $x$  антенны, состоящей из ненаправленных элементов, лежащих на дуге. Полный рабочий сектор равен  $120^\circ$ , расстояние между соседними элементами  $l = 0,25 \lambda; 0,5 \lambda; 0,75 \lambda$  и  $\lambda$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $kR = 20$ . При  $l/\lambda = 0,25$  характеристика направленности рассматриваемой антенны не отличается от характеристики направленности непрерывной компенсированной дуги; с ростом же  $l/\lambda$ , оставаясь практически неизменной в области основного и первых добавочных максимумов, характеристика искажается в области углов, больших  $60^\circ$ . На месте сравнительно плавно меняющегося ореола, характерного для непрерывной дуги, появляются четко выраженные интерференционные максимумы, размах амплитуды которых увеличивается с ростом  $l/\lambda$ . Влияние амплитудного распределения при больших значениях  $l/\lambda$  практически не сказывается на виде характеристики направ-

ленности при  $\varphi > 60^\circ$  (сплошные кривые рис. 56 и рис. 57 соответствуют  $\alpha_q = 1$ , штриховые —  $\alpha_q = \cos\varphi_q$ ).

Как видно из рис. 57, при увеличении  $l/\lambda$  возрастают осцилляции характеристики направленности и в плоскости  $\varphi = 0$  (хотя и в значительно меньшей степени).

Поскольку направленность непрерывной дуги мало отличается от направленности аналогичной дискретной антенны в случае  $l \leq 0,5 \lambda$ , в практических расчетах часто при выполнении этого неравенства дискретную антенну заменяют непрерывной или наоборот.

## ГЛАВА 5

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ АНТЕННЫ

#### § 14. Поверхностные произвольные непрерывные антенны

**Вывод расчетных формул.** Во второй главе, рассматривая различные математические модели антенн, мы говорили о прозрачной непрерывной поверхностной антенне, представляющей собой звукопрозрачную пульсирующую пластинку, толщина которой значительно меньше длины волны. Давление, развиваемое такой антенной, в соответствии с формулой (2.40), определяется следующим образом:

$$p = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi} \int_s A(\rho) \frac{e^{ikr}}{r} ds, \quad (5.1)$$

где  $A(\rho)$   $\omega_0 = \omega(s)$  — колебательная скорость на одной стороне пластины ( $Q = 2\omega(s) ds$ ).

В дальнем поле давление определяется выражением

$$p(u) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_s A(\rho) e^{-ikru} ds. \quad (5.2)$$

Найдем активное сопротивление излучения прозрачной непрерывной антенны через давление, развиваемое ею в ближнем поле

$$r_s = \frac{r^2}{\rho c} \int_{\Omega} |p'|^2 d\Omega = \frac{\rho c}{\lambda^2} \int_{\Omega} \int_s \int_{s'} A(\rho) A^*(\rho') e^{-iku(\rho-\rho')} ds ds' d\Omega,$$

Меняя местами интегралы по  $s$ ,  $s'$  и  $\Omega$  и принимая во внимание соотношение

$$\int_{\Omega} e^{-iku(\rho-\rho')} d\Omega = 4\pi \frac{\sin k|\rho-\rho'|}{k|\rho-\rho'|},$$

получим

$$r_s = \frac{4\pi\rho c}{\lambda^2} \int_s \int_{s'} A(\rho) A^*(\rho') \frac{\sin k|\rho-\rho'|}{k|\rho-\rho'|} ds ds'. \quad (5.3)$$

Физический смысл этой формулы очевиден. Функция  $\frac{\sin k|\rho-\rho'|}{k|\rho-\rho'|}$  пропорциональна взаимному активному сопротивлению между двумя

малыми элементами площади  $ds$  и  $ds'$  и полное активное сопротивление излучения непрерывной антенны, естественно, определяется двойным интегралом от вносимого активного сопротивления излучения.

Зная давление, развиваемое антенной в направлении  $\mathbf{u}_0$  и ее активное сопротивление излучения, с помощью формулы (1.38) можно записать и выражение, определяющее коэффициент концентрации:

$$K = \frac{\left| \int_s A(\rho) e^{-ik\rho u_0} ds \right|^2}{\int_s \int_{s'} A(\rho) A^*(\rho') \frac{\sin k|\rho - \rho'|}{k|\rho - \rho'|} ds ds'} \quad (5.4)$$

Рассмотрим приближенный метод оценки коэффициента концентрации поверхностных антенн [36], основанный на приближенном вычислении их активного сопротивления излучения.

Вычислим приближенно внутренний интеграл по  $ds'$  выражения (5.3), т. е. интеграл

$$I = \int_{s'} A(\rho) A^*(\rho') \frac{\sin k|\rho - \rho'|}{k|\rho - \rho'|} ds' \quad (5.5)$$

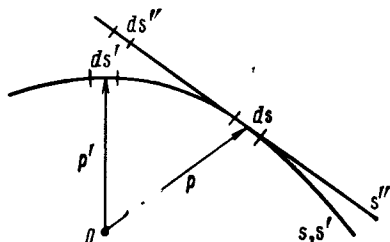


Рис. 58. К выводу приближенного выражения, определяющего коэффициент концентрации произвольной поверхностной антенны.

Вначале будем предполагать, что антенна компенсирована в направлении  $\mathbf{u}_0$ , тогда  $A(\rho) A^*(\rho') =$

$= a(\rho) a(\rho') e^{iku_0(\rho - \rho')}$  и

$$I = a(\rho) \int_{s'} a(\rho') e^{iku_0(\rho - \rho')} \frac{\sin k|\rho - \rho'|}{k|\rho - \rho'|} ds'.$$

На величину интеграла по  $s'$  (в силу уменьшения величины  $\frac{\sin k|\rho - \rho'|}{k|\rho - \rho'|}$  при увеличении  $|\rho - \rho'|$ ) в основном влияют только близкие к  $ds$  элементы  $ds'$ . Если радиусы кривизны поверхности  $s$  и ее линейные размеры больше длины волны, то эти близко расположенные элементы  $ds'$  можно считать лежащими на плоскости  $s''$ , касательной к поверхности  $s$  в некоторой точке внутри  $ds$  (рис. 58). По этой же причине величина интеграла не должна существенно измениться при раздвижении пределов интегрирования по плоскости  $s''$  в бесконечность. Кроме того, будем предполагать, что амплитудное распределение меняется настолько медленно, что в пределах области, вносящей существенный вклад в величину интеграла, оно остается практически постоянным. Таким образом, можно записать

$$I = a^2(\rho) \int_{s''} e^{iku_0(\rho - \rho')} \frac{\sin k|\rho - \rho'|}{k|\rho - \rho'|} ds''.$$

Для вычисления интеграла по плоскости  $s''$  разместим прямоугольную систему координат так, чтобы центр ее находился в точке касания с поверхностью  $s$ , а оси  $x$  и  $y$  лежали бы на плоскости  $s''$ , причем проекция  $\mathbf{u}_0$  на плоскость  $s''$  совпала бы с осью  $x$ . Поскольку точка, определяемая радиусом-вектором  $\rho$ , расположена в начале координат, модуль расстояния от нее до текущей точки на поверхности  $s''$ , т. е.  $|\rho - \rho'| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , где  $x$  и  $y$  координаты точки, определяемой радиусом-вектором  $\rho'$ . Скалярное произведение  $\mathbf{u}_0 (\rho - \rho') = u_{0x} (\rho - \rho')_x + u_{0y} (\rho - \rho')_y + u_{0z} (\rho - \rho')_z = x \sin (ds, \mathbf{u}_0)$ , так как  $u_{0y} = 0$  и  $(\rho - \rho')_z = 0$ . Символом  $(ds, \mathbf{u}_0)$  обозначен угол между направлением компенсации  $\mathbf{u}_0$  и нормалью к поверхности элемента  $ds$  в некоторой его точке. Подставляя найденные величины в выражение для определения  $I$  и переходя к полярной системе координат, запишем:

$$I = a^2(\rho) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{kr \cos \varphi \sin (ds, \mathbf{u}_0)} \frac{\sin kr}{kr} r dr d\varphi,$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $r \cos \varphi = x$ .

Интеграл по  $\varphi$  приводится к функции Бесселя. Действительно,

$$\int_0^{2\pi} e^{ib \cos \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} e^{ib \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(b).$$

Таким образом,

$$I = \frac{2\pi}{k} a^2(\rho) \int_0^{\infty} J_0[kr \sin (ds, \mathbf{u}_0)] \sin kr dr.$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$\int_0^{\infty} J_0(\alpha x) \sin \gamma x dx = \frac{1}{|\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}|},$$

получим

$$I = \frac{2\pi}{k^2} a^2(\rho) \frac{1}{|\cos (ds, \mathbf{u}_0)|}.$$

Возвращаясь к формулам (5.5) и (5.3), запишем приближенное выражение, определяющее активное сопротивление излучения компенсированной непрерывной прозрачной поверхности антенны

$$r_s = 2\rho c \int_s \frac{a^2(\rho) ds}{|\cos (ds, \mathbf{u}_0)|}. \quad (5.6)$$

Из формулы (5.6) следует один вывод, противоречащий физическому смыслу, а именно: если хоть один участок антенны касателен к направлению компенсации, то  $(ds, \mathbf{u}_0) = \frac{\pi}{2}$  и активное сопротивление излучения антенны стремится к бесконечности. На этой особенности полученной формулы мы остановимся подробнее далее, при рассмотрении коэффициента концентрации плоской антенны.

В случае отсутствия фазового распределения для каждого элемента  $ds$  угол  $(ds, \mathbf{u}_0)$  равен нулю и

$$r_s = 2\rho c \int_s a^2(\rho) ds. \quad (5.7)$$

При очень медленном изменении фазового распределения по поверхности антенны можно считать, что внутри области, вносящей существенный вклад в величину интеграла  $I$  [формула (5.5)] не только амплитудное, но и фазовое распределение постоянно. Поэтому модуль квадрата коэффициента возбуждения  $|A(\rho)|^2 = a^2(\rho)$  можно вынести из-под знака интеграла. Переходя к интегрированию по касательной плоскости  $s''$  мы получим несобственный интеграл  $\int_0^\infty \sin kr dr$ , который при стремлении верхнего предела интегрирования к бесконечности не имеет предела. Для его приближенного вычисления можно поступить следующим образом. Будем предполагать, что в среде имеется некоторое затухание, приводящее к тому, что колебания, приходящие из бесконечности, имеют нулевую амплитуду. Тогда величину интеграла можно найти, подставляя в первообразную функцию только нижний предел, и не подставляя верхний. В результате вычислений и в этом случае мы получим формулу (5.7).

Выражения (5.6) и (5.7) получены в предположении, что поверхностная антенна прозрачна. Приближенно можно считать, что мощность, излучаемая непрозрачной антенной, излучающей в одну сторону, в два раза меньше мощности аналогичной прозрачной антенны. Тогда активное сопротивление излучения также в два раза меньше для непрозрачной антенны, чем для прозрачной, и при компенсации в направлении  $\mathbf{u}_0$

$$r_s = \rho c \int_s \frac{a^2(\rho) ds}{|\cos(ds, \mathbf{u}_0)|}. \quad (5.8)$$

При наличии же медленно меняющегося фазового распределения или при отсутствии его

$$r_s = \rho c \int_s a^2(\rho) ds. \quad (5.9)$$

Зная активное сопротивление излучения антенны, а также давление, развиваемое ею в направлении компенсации [выражение (5.2)], легко определить и коэффициент концентрации [формула (1.38)].

Так, при компенсации непрерывной поверхностной антенны в направлении  $\mathbf{u}_0$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda^2} f \frac{\left| \int_s a(\rho) ds \right|}{\int_s \frac{a^2(\rho) ds}{|\cos(ds, \mathbf{u})|}}. \quad (5.10)$$

В отсутствии фазового распределения

$$K = \frac{2\pi}{\lambda^2} f \frac{\left| \int_s a(\rho) e^{-ik\rho u_0} ds \right|^2}{\int_s a^2(\rho) ds}. \quad (5.11)$$

И, наконец, при наличии медленно меняющегося фазового распределения

$$K = \frac{2\pi}{\lambda^2} f \frac{\left| \int_s A(\rho) e^{-ik\rho u_0} ds \right|^2}{\int_s a^2(\rho) ds}. \quad (5.12)$$

В формулах (5.10), (5.11), (5.12)  $f = 2$  для непрозрачной антенны и  $f = 1$  для прозрачной.

**Определение оптимальных возбуждений.** Определим амплитудное распределение, обеспечивающее максимум коэффициента концентрации компенсированной поверхностной антенны. Аналогичную задачу для линейной непрерывной антенны в предыдущей главе мы решили с помощью прямого метода вариационного исчисления. Этот же метод может быть применен и в рассматриваемом случае, однако мы поступим несколько иначе. Предположим, что оптимальное амплитудное распределение нам известно и имеет вид  $a_0(\rho)$ . Рассмотрим коэффициент концентрации поверхностной антенны при распределении  $a_0(\rho) + \Delta b(\rho)$ , где  $b(\rho)$  — произвольная функция. Так как коэффициент концентрации максимален при  $a(\rho) = a_0(\rho)$ , то независимо от вида функции  $b(\rho)$  должно выполняться условие

$$\frac{\partial K}{\partial \Delta} \Big|_{\Delta=0} = 0.$$

Подставляя амплитудное распределение  $a(\rho) = a_0(\rho) + \Delta b(\rho)$  в формулу (5.10), вычисляя производную по  $\Delta$  и приравнявая ее к нулю, получим

$$\frac{\int_s \frac{a_0^2(\rho) ds}{|\cos(ds, u_0)|}}{\int_s a_0(\rho) ds} = \frac{\int_s \frac{a_0(\rho) b(\rho) ds}{|\cos(ds, u_0)|}}{\int_s b(\rho) ds}.$$

Левая часть этого равенства не зависит от величины  $b(\rho)$ , следовательно, и правая также не должна зависеть от нее, что имеет место при любом виде функции  $b(\rho)$ , если только положить

$$a_0(\rho) = |\cos(ds, u_0)|. \quad (5.13)$$

Определим теперь величину коэффициента концентрации поверхностной компенсированной антенны при оптимальном амплитудном распределении. Подставляя выражение (5.13) в формулу (5.10), получим

$$K = \frac{2\pi}{\lambda^2} f \int_s |\cos(ds, u_0)| ds.$$

Перейдем от интегрирования по поверхности  $s$  к ее проекции  $s'$  на плоскость, перпендикулярную направлению компенсации  $\mathbf{u}_0$ . В соответствии с известным выражением

$$\int_s F(x, y, z) ds = \int_{s'} f(x, y) \frac{ds'}{\cos \delta}, \quad (5.14)$$

где  $\delta$  — угол между осью  $z$  и нормалью к поверхности элемента  $ds$ ; можно записать:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda^2} f \int_{s'} ds' = \frac{2\pi s'}{\lambda^2} f. \quad (5.15)$$

Заметим, что, как следует из формулы (5.11), коэффициент концентрации плоского поршня в отсутствии компенсации и при равномерном амплитудном распределении равен

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} f, \quad (5.16)$$

где  $s$  — площадь поршня.

Таким образом, формула (5.15) свидетельствует о том, что при оптимальном амплитудном распределении коэффициент концентрации компенсированной непрерывной поверхностной антенны совпадает с коэффициентом концентрации плоского поршня, равновеликого проекции поверхности антенны на плоскость, перпендикулярную направлению компенсации. Если рассматриваемая антенна прозрачна, то и эквивалентный ей поршень прозрачен и

$$K = \frac{2\pi s'}{\lambda^2}, \quad (5.17)$$

а если антенна непрозрачна, то

$$K = \frac{4\pi s'}{\lambda^2}. \quad (5.18)$$

Здесь следует сделать одну оговорку. Формула перехода от интегрирования по поверхности  $s$  к ее проекции  $s'$  в виде, записанном нами выше [выражение (5.14)], справедлива только в случае, когда функция  $f(x, y)$  в пределах области  $s'$  однозначна. Поэтому полученные выше выводы справедливы для случая, когда для всей поверхности  $s$  угол между направлением компенсации и внешней нормалью к поверхности элемента  $ds$  меньше или больше  $\pi/2$ .

Для непрозрачной антенны применение приближенных формул (5.10), (5.11) и (5.12) не имеет смысла при  $\cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) < 0$ , поскольку в этом случае отдельные элементы антенны попадают в зону акустической тени (если источник находится в направлении  $\mathbf{u}_0$ ) и уже исходная формула (5.2) может иметь существенную погрешность. Для прозрачной антенны формула (5.2) справедлива и можно рассматривать случай, когда  $\cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) > 0$ .

Пусть компенсированная прозрачная антенна имеет замкнутую поверхность (сфера, эллипсоид вращения, произвольный цилиндр

и т. п.), такую, что при проектировании ее на плоскость, перпендикулярную направлению компенсации, каждой точке проекции соответствуют две точки поверхности антенны. Тогда

$$\int_s F(x, y, z) ds = \int_{s'} \left[ \frac{f'(x, y)}{\cos \delta'} + \frac{f''(x, y)}{|\cos \delta''|} \right] ds',$$

где  $f'(x, y)$  и  $\cos \delta'$  — функции, соответствующие части поверхности при  $\cos \delta > 0$ , а  $f''(x, y)$  и  $\cos \delta''$  — те же функции для части поверхности, на которой  $\cos \delta < 0$ .

Вычисляя с помощью этого выражения коэффициент концентрации произвольной замкнутой поверхностной антенны при оптимальном амплитудном распределении и без учета взаимодействия передней и тыльной сторон поверхности, получим  $K = 4\pi s'/\lambda^2$ . Таким образом, коэффициент концентрации произвольной поверхностной замкнутой прозрачной антенны примерно равен коэффициенту концентрации экранированного плоского поршня, равновеликого ее проекции на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{u}_0$ . Заметим, что учет взаимодействия передней и тыльной относительно  $\mathbf{u}_0$  частей поверхностной антенны несколько уменьшает  $K$ . Так, в случае прозрачной компенсированной цилиндрической антенны при  $kR = 10 \rightarrow 40$   $K \approx 3\pi s'/\lambda^2$ .

Рассмотрим связь между распределениями колебательной скорости и давления на поверхности антенны. Мощность, излучаемая элементом поверхности антенны, в соответствии с формулой (1.10), равна  $dW = 0,5 p(\rho) \omega^*(\rho) ds$ . Поскольку большая по сравнению с длиной волны компенсированная антенна излучает плоскую волну, приближенно можно считать, что реактивное сопротивление излучения мало и величина  $dW$  — вещественная. С другой стороны, с помощью приближенной формулы (5.8) также можно найти активную мощность, излучаемую антенной. Переходя к мощности, излучаемой элементом площади  $ds$ , приравняем ее к записанному выше выражению и получим

$$dW = \frac{1}{2} p(\rho) \omega_c^*(\rho) a(\rho) e^{-i\alpha(\rho)} ds = \frac{\rho c |\omega_0|^2 a^2(\rho) ds}{2 |\cos(ds, \mathbf{u}_0)|},$$

откуда следует, что давление на поверхности непрерывной антенны связано с колебательной скоростью соотношением

$$p(\rho) = \frac{\rho c \omega_0 a(\rho) e^{-i\alpha(\rho)}}{|\cos(ds, \mathbf{u}_0)|}.$$

Одним из основных параметров, характеризующих работу антенны в режиме излучения, является давление, развиваемое ею в направлении компенсации  $\mathbf{u}_0$ . Ясно, что для увеличения этого давления следует увеличивать колебательную скорость поверхности антенны. Однако, это не всегда возможно в силу целого ряда ограничений и в первую очередь ограничения, связанного с возможностью появления кавитации. Из условия получения максимальной величины  $p(\mathbf{u}_0)$  при кавитационном ограничении излучаемой мощности следует выбрать



амплитудное распределение так, чтобы амплитуда давления на всей поверхности антенны была бы одинаковой и равной максимально допустимой величине  $|p_m|$ . Из последнего выражения видно, что искомое амплитудное распределение определяется следующим соотношением:

$$a(\rho) = \frac{|p_m| |\cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0)|}{\rho c \omega_0}.$$

Давление, развиваемое антенной в направлении  $\mathbf{u}_0$  при таком распределении  $a(\rho)$ , можно найти по формуле (5.2)

$$\begin{aligned} p(\mathbf{u}_0) &= -\frac{ik\rho c \omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_s a(\rho) ds = -\frac{ik|p_m|}{2\pi r} e^{ikr} \times \\ &\times \int_s |\cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0)| ds = -\frac{ik|p_m|s'}{2\pi r} e^{ikr}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где  $s'$  — площадь проекции антенны на плоскость, перпендикулярную направлению компенсации.

Заметим, что плоская антенна, имеющая равномерное амплитудное распределение, развивает в направлении максимума характеристики направленности давление

$$p(\mathbf{u}_0) = -\frac{ik\rho c \omega_0 s'}{2\pi r} e^{ikr},$$

и, если давление и колебательная скорость на ее поверхности связаны между собой так же, как и в плоской волне (т. е.  $p = \rho c \omega_0 v$ ), то

$$p(\mathbf{u}_0) = -\frac{ikps'}{2\pi r} e^{ikr}.$$

Таким образом, амплитудное распределение, максимизирующее коэффициент концентрации поверхностной непрерывной антенны,  $a(\rho) = |\cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0)|$ , обеспечивает и максимальную величину давления в направлении компенсации в условиях кавитационного ограничения, причем введение этого амплитудного распределения приводит к тому, что и коэффициент концентрации и давление в направлении компенсации совпадают с аналогичными параметрами равновеликого проекции антенны на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{u}_0$ , плоского поршня с равномерным амплитудным распределением.

Строго говоря, давление и колебательная скорость на поверхности поршня не всегда связаны соотношением  $p = \rho c \omega_0 v$ , однако им можно пользоваться для приближенных оценок.

Все выводы, приведенные выше для непрозрачной поверхностной непрерывной антенны, мы получили, исходя из формул (5.1) и (5.2).

Если ограничиться случаем, когда  $(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) < \frac{\pi}{2}$  для всей поверхности

антенны, то из формулы (5.1) следует вывод о том, что малый элемент поверхности излучает в полупространство. Такой вид характеристики направленности элемента поверхности антенны больше всего соответствует случаю задания на поверхности антенны колебательной скорости, т. е. работе вне резонанса.

Найдем приближенные соотношения между основными параметрами непрозрачной антенны при работе ее на резонансе, т. е. при задании на поверхности антенны распределения давлений. Для этого рассмотрим плоскую антенну, размеры которой значительно больше длины волны. С помощью формулы (2.38) давление, развиваемое антенной, можно записать так

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik \cos \theta}{2\pi r} e^{ikr} \int_s p(\rho) e^{-ik\rho u} ds.$$

Здесь  $\theta$  — угол между произвольным направлением и нормалью к поверхности антенны.

Введем в рассмотрение распределение давления по поверхности антенны  $B(\rho) = \frac{p(\rho)}{p_0} = b(\rho) e^{i\beta(\rho)}$ , где  $p_0$  — давление в точке приведения, и положим  $b(\rho) = 1$ ,  $\beta(\rho) = k\rho u_0$ . Давление, развиваемое антенной, компенсированной в направлении  $\mathbf{u}_0$ ,

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ikp_0 \cos \theta}{2\pi r} e^{ikr} \int_s e^{-ik\rho(u-u_0)} ds = -\frac{ikp_0 \cos \theta}{2\pi r} e^{ikr} sD(\mathbf{u}),$$

где  $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{s} \int_s e^{-ik\rho(u-u_0)} ds$  — комплексная характеристика направленности такой же плоской антенны при равномерном распределении амплитуды колебательной скорости и при компенсации ее в направлении  $\mathbf{u}_0$ .

По формуле (1.27) определим мощность, излучаемую антенной

$$W = \frac{k^2 p_0^2 s^2}{8\pi^2 \rho c} \int_{\Omega} \cos^2 \theta R^2(\mathbf{u}) d\Omega.$$

Размеры антенны значительно больше длины волны, поэтому ее характеристика направленности  $R(\mathbf{u})$  имеет малую ширину. Функция же  $\cos^2 \theta$  меняется медленно [во всяком случае значительно медленнее, чем функция  $R^2(\mathbf{u})$ ], поэтому ее умножение на  $R^2(\mathbf{u})$  существенно не искажает вида функции  $R^2(\mathbf{u})$ , но изменяет ее величину пропорционально значению  $\cos^2 \theta$  в направлении максимума характеристики направленности антенны. Вынося на этом основании функцию  $\cos^2 \theta$  из-под знака интеграла при  $\theta$ , соответствующем направлению компенсации  $\mathbf{u}_0$ , т. е. при  $\theta = \theta_0$ , получим

$$W = \frac{k^2 p_0^2 s^2}{8\pi^2 \rho c} \cos^2 \theta_0 \int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) d\Omega.$$

Интеграл по телесному углу легко определить, если принять во внимание, что он равен знаменателю коэффициента концентрации [формула (1.36)], откуда, учитывая соотношение (5.18), имеем

$$\int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) d\Omega = \frac{4\pi}{K} = \frac{\lambda^2}{s} \frac{1}{\cos \theta_0}.$$

Таким образом, мощность, излучаемая плоским поршнем, на поверхности которого задано давление  $p$ , определяется выражением

$$W = \frac{p^2 s}{2\rho c} \cos \theta_0.$$

В предположении, что каждый элемент поверхности поршня излучает одинаковую мощность, получим

$$dW = \frac{p^2}{2\rho c} \cos \theta_0 ds.$$

Допущения, принятые при выводе формул (5.10), (5.11) и (5.12), по существу эквивалентны предположению о том, что элемент площади поверхностной антенны  $ds$  излучает ту же мощность, что и элемент площади очень большой плоской антенны, касательной к произвольной по форме поверхностной антенне в точке, лежащей внутри  $ds$ .

Это же предположение может быть сделано и в рассматриваемом случае. Учитывая наличие амплитудного распределения давления  $b(\rho)$ , получим

$$W = \frac{p_0^2}{2\rho c} \int_s b^2(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds. \quad (5.20)$$

Поскольку давление, развиваемое компенсированной произвольной антенной, на поверхности которой задано распределение давления, в направлении  $\mathbf{u}_0$  может быть приближенно записано как

$$p(\mathbf{u}_0) = -\frac{ikp_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_s b(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds, \quad (5.21)$$

коэффициент концентрации непрозрачной антенны определится следующим образом:

$$K = \frac{4\pi}{\rho c} \frac{\left| \frac{p(\mathbf{u}_0) r}{\omega_0} \right|^2}{r_s} = \frac{2\pi}{\rho c} \frac{|p(\mathbf{u}_0) r|^2}{W} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \int_s b(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds \right|^2}{\int_s b^2(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds}. \quad (5.22)$$

Найдем распределение давления на поверхности антенны, при котором коэффициент концентрации максимален. Прежде всего заметим, что при  $b(\rho) = 1$

$$K = \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_s \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds.$$

В силу неравенства Буняковского—Коши

$$\left[ \int_s f(\rho) \varphi(\rho) ds \right]^2 \leq \int_s f^2(\rho) ds \int_s \varphi^2(\rho) ds,$$

откуда, представляя числитель формулы (5.22) в виде произведения двух интегралов, один из которых стоит в знаменателе, получим

$$K \leq \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\int_s b^2(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds \int_s \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds}{\int_s b^2(\rho) \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \int_s \cos(\mathbf{ds}, \mathbf{u}_0) ds.$$

Таким образом, коэффициент концентрации не может быть больше величины, которую он имеет при  $b(\rho) = 1$ , откуда следует, что опти-

мальным распределением амплитуд давления является равномерное. Естественно, что это распределение является оптимальным и в смысле получения наибольшего давления в направлении  $\mathbf{u}_0$  в условиях кавитационного ограничения<sup>1</sup>.

Переходя в формулах (5.21) и (5.22) к интегрированию по проекции антенны на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{u}_0$ , при  $b(\rho) = 1$  легко убедиться, что и в случае работы на резонансе, так же как и при работе вне резонанса, давление, развиваемое произвольной поверхностной антенной в направлении компенсации и ее коэффициент концентрации при оптимальном амплитудном распределении равны соответствующим величинам для плоского равновеликого (по площади проекции) поршня.

Аналогичным образом можно рассмотреть и несколько более общий случай, когда малый элемент поверхности антенны обладает известной направленностью, вызванной дифракцией на поверхности антенны, но одинаковой для всех элементов поверхности (что, очевидно, имеет место для поверхностей постоянной кривизны).

Можно показать, что в этом случае

$$K = \frac{2\pi}{\rho c} \frac{|\rho(\mathbf{u}_0) r|^2}{W} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \int_s a(\rho) R_3(\mathbf{u}_0) ds \right|^2}{\int_s \frac{a^2(\rho) R_3^2(\mathbf{u}_0)}{\cos(ds, \mathbf{u}_0)} ds}. \quad (5.23)$$

Анализ формулы (5.23) показывает, что коэффициент концентрации достигает максимальной величины при  $a(\rho) = \frac{\cos(ds, \mathbf{u}_0)}{R_3(\mathbf{u}_0)}$  и эта максимальная величина равна коэффициенту концентрации плоского поршня при  $a(\rho) = 1$ , если площадь поршня равна площади проекции антенны на плоскость, перпендикулярную направлению компенсации.

Таким образом, эффективность непрерывной произвольной по конфигурации поверхностной антенны (оцениваемая по величине коэффициента концентрации и давления в направлении  $\mathbf{u}_0$  при наличии кавитационного ограничения) при равномерном амплитудном распределении меньше эффективности равновеликого по поперечному сечению сплошного поршня, однако существует некоторое оптимальное распределение (зависящее от направленности элемента площади антенны), при котором эффективность поверхностной антенны и плоской одинаковы. При изменении направленности элемента антенны от  $R(\mathbf{u}) = 1$  до  $R(\mathbf{u}) = \cos(ds, \mathbf{u})$  оптимальное амплитудное распределение меняется от  $a(\rho) = \cos(ds, \mathbf{u}_0)$  до равномерного.

В этом параграфе мы показали, что амплитудным распределением, максимизирующим коэффициент концентрации непрерывной поверхностной антенны при заданной колебательной скорости, является распределение  $a_0(\rho) = |\cos(ds, \mathbf{u}_0)|$ . В случае непрерывных антенн с выпуклой поверхностью, это распределение является падающим к краям

<sup>1</sup> Этот вывод другим способом был получен ранее Ю. Ю. Добровольским.

освещенной из направления  $\mathbf{u}_0$  части антенны. В § 6 в предположении независимости элементов дискретной антенны по полю было показано, что оптимальное распределение имеет вид  $a_s = R_s(\mathbf{u}_0)$ , т. е. также падает к краям рабочего участка антенны.

Интересно отметить, что в обоих этих случаях характер оптимального амплитудного распределения одинаков, несмотря на то, что причины, вызвавшие его, различны. Для непрерывной антенны или дискретной, состоящей из малых элементов, расположенных на малых расстояниях, вид оптимального распределения определяется отличием величин сопротивлений излучения различных участков антенн. Для антенны же, состоящей из независимых элементов, сопротивления излучения всех элементов одинаковы, но зато различно давление, создаваемое разными преобразователями в направлении  $\mathbf{u}_0$ .

Поскольку, несмотря на различие причин, определяющих вид оптимального амплитудного распределения, в рассматриваемых случаях результат получился качественно одним и тем же, можно предполагать, что и в промежуточном случае, когда элементы антенны не настолько малы, чтобы антенну можно было бы считать непрерывной, но и не настолько велики, чтобы быть независимыми, оптимальное распределение также является падающим к краям рабочего участка и близко к функции  $|\cos(ds, \mathbf{u}_0)|$ .

## § 15. Непрерывные плоские антенны

**Прямоугольная антенна.** Пусть в плоскости  $xOy$  расположена плоская непрерывная антенна, заключенная в бесконечный жесткий экран. Положение в пространстве точки наблюдения будем описывать сферическими координатами  $\theta$  и  $\varphi$ . Давление, развиваемое такой антенной, определится формулой (2.46)

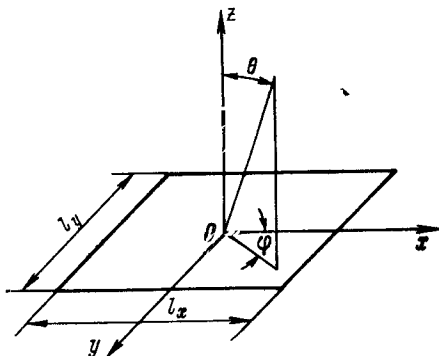


Рис. 59 Прямоугольная антенна.

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_s A(\rho) e^{-ik\rho\alpha} ds.$$

Скалярное произведение векторов  $\rho\mathbf{u}$  найдем как сумму их одноименных проекций на оси координат:  $\rho\mathbf{u} = x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi + 0\cos\theta$ , откуда

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_x \int_y a(x, y) e^{i\alpha(x, y)} \times \\ \times e^{-ik[x\sin\theta\cos\varphi + y\sin\theta\sin\varphi]} dx dy. \quad (5.24)$$

Для компенсации антенны в некотором направлении  $\theta_0, \varphi_0$  следует выбрать  $\alpha(x, y) = k\rho\mathbf{u}_0 = k(x\sin\theta_0\cos\varphi_0 + y\sin\theta_0\sin\varphi_0)$ , тогда в этом на-

правлении давления от отдельных элементов антенны будут складываться синфазно.

В случае плоской антенны, имеющей форму прямоугольника, стороны которого  $l_x$  и  $l_y$  (рис. 59) ориентированы вдоль соответствующих осей, при равномерном амплитудном распределении интегралы формулы (5.24) вычисляются элементарно и, если начало координат совпадает с центром прямоугольника, давление определяется следующим выражением:

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 l_x l_y}{2\pi r} e^{ikr} D(\theta, \varphi), \quad (5.25)$$

где

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0) \right]}{\frac{kl_x}{2} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0 \cos \varphi_0)} \times \\ \times \frac{\sin \left[ \frac{kl_y}{2} (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0) \right]}{\frac{kl_y}{2} (\sin \theta \sin \varphi - \sin \theta_0 \sin \varphi_0)}. \quad (5.26)$$

С помощью формулы (5.26) легко определить характеристику направленности при любом направлении компенсации. Так, например, если компенсация производится в плоскости  $xOz$ , то  $\varphi_0 = 0$  и

$$D(\theta, \varphi) = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0) \right]}{\frac{kl_x}{2} (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0)} \frac{\sin \left( \frac{kl_y}{2} \sin \theta \sin \varphi \right)}{\frac{kl_y}{2} \sin \theta \sin \varphi}. \quad (5.27)$$

Характеристика направленности в плоскости  $xOz$  может быть найдена из этого выражения, если положить  $\varphi = 0$

$$D(\theta) = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} (\sin \theta - \sin \theta_0) \right]}{\frac{kl_x}{2} (\sin \theta - \sin \theta_0)}. \quad (5.28)$$

В соответствии с теоремой умножения характеристика направленности прямоугольника равна произведению характеристик направленности его сторон, что и подтверждается формулой (5.26). В случае же  $\varphi_0 = 0$  и  $\varphi = 0$  характеристика направленности отрезка  $l_y$  равна единице и поэтому характеристика направленности прямоугольника совпадает с характеристикой направленности отрезка  $l_x$ .

Поскольку характеристика направленности прямоугольника представляет собой произведение двух функций, каждая из которых имеет вид  $\frac{\sin z}{z}$ , расчет ее легко произвести, пользуясь графиком рис. 22 или соответствующими таблицами.

Некоторые трудности могут возникнуть при расчете характеристик направленности компенсированного прямоугольника в плоскостях, проходящих через направление главного максимума при  $\theta_0 \neq 0$ . Характеристика направленности в одной из таких плоскостей, а именно в плоскости  $\varphi = \varphi_0$ , рассчитывается легко, поскольку при расчете достаточно изменять только одну переменную  $\theta$ . При расчете же характеристик направленности в других плоскостях следует либо одновременно менять  $\theta$  и  $\varphi$ , выразив одну координату через другую, либо произвести поворот системы координат так, чтобы новая ось  $z'$ , относительно которой отсчитывается угол  $\theta'$ , совпадала бы с направлением компенсации  $\theta_0, \varphi_0$ .

Так, например, при  $\varphi_0 = 0$  новая система координат  $x', y', z'$  может быть получена путем поворота осей  $z$  и  $x$  вокруг оси  $y$  на угол  $\theta_0$ . При этом  $y = y'$  и, следовательно,  $\sin \theta \sin \varphi = \sin \theta' \sin \varphi'$ , а  $x = x' \cos \theta_0 + z' \sin \theta_0$ , откуда  $\sin \theta \cos \varphi = x = \sin \theta' \cos \varphi' \cos \theta_0 + \cos \theta' \sin \theta_0$ . Подставляя найденные соотношения в формулу (5.27), получим

$$D(\theta', \varphi') = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} (\sin \theta' \cos \varphi' \cos \theta_0 + \cos \theta' \sin \theta_0 - \sin \theta_0) \right]}{\frac{kl_x}{2} (\sin \theta' \cos \varphi' \cos \theta_0 + \cos \theta' \sin \theta_0 - \sin \theta_0)} \times \\ \times \frac{\sin \left( \frac{kl_y}{2} \sin \theta' \sin \varphi' \right)}{\frac{kl_y}{2} \sin \theta' \sin \varphi'}. \quad (5.29)$$

Полагая в этом выражении  $\varphi' = 0$  получим формулу, определяющую характеристику направленности в плоскости  $x'Oz'$ , и отличающуюся от формулы (5.28) только сдвинутым на угол  $\theta_0$  началом отсчета углов

$$D(\theta') = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} (\sin (\theta' + \theta_0) - \sin \theta_0) \right]}{\frac{kl_x}{2} [\sin (\theta' + \theta_0) - \sin \theta_0]}.$$

В плоскости, проходящей через направление главного максимума, и перпендикулярной плоскости  $\varphi = \varphi' = 0$ , т. е. в плоскости  $\varphi' = \pi/2$  характеристика направленности имеет вид

$$D(\varphi') = \frac{\sin \left[ \frac{kl_x}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos \theta') \right]}{\frac{kl_x}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos \theta')} \cdot \frac{\sin \left( \frac{kl_y}{2} \sin \theta' \right)}{\frac{kl_y}{2} \sin \theta'}. \quad (5.30)$$

При повороте главного максимума излучения в плоскости  $xOz$ , как это видно из формулы (5.28), характеристика направленности в плоскости  $xOz$  ведет себя так же, как и характеристика направленности отрезка  $l_x$  (см. рис. 23). В плоскости же, перпендикулярной к плоскости, в которой происходит поворот главного максимума, как это видно

из анализа формулы (5.30), ширина характеристики направленности, во всяком случае при  $l_y \approx l_x \gg \lambda$ , практически не зависит от угла компенсации  $\theta_0$ . Действительно, при  $l_y \gg \lambda$  характеристика направленности отрезка  $l_y$  [второй сомножитель выражения (5.30)] имеет малую ширину, а характеристика направленности отрезка  $l_x$  в области углов, соответствующих главному максимуму характеристики направленности (т. е. сравнительно малым величинам  $\theta'$ ) отрезка  $l_y$  меняется незначительно.

Выражение для расчета коэффициента концентрации плоского компенсированного поршня легко записать через интеграл от квадрата характеристики направленности, однако интеграл этот не выражается через элементарные функции. В [72] приводятся результаты расчета коэффициента концентрации прямоугольного поршня в отсутствие компенсации, полученные с помощью разложения подынтегральной функции в ряды, и показывается, что в случае, когда стороны поршня больше одной — двух длин волн, коэффициент концентрации примерно равен  $\frac{4\pi s}{\lambda^2}$ , где  $s$  — площадь поршня.

Напомним, что такой же вывод был получен в предыдущем параграфе с помощью приближенного вычисления активного сопротивления излучения антенны. Учитывая, что угол  $(ds, u_0)$  для всех элементов поверхности плоской антенны одинаков, из формулы (5.10) получим выражение для коэффициента концентрации плоской антенны произвольной конфигурации при произвольном амплитудном распределении:

$$K = \frac{4\pi}{\lambda^2} \cos \theta_0 \frac{\left| \iint_{x,y} a(x, y) dx dy \right|^2}{\iint_{x,y} a^2(x, y) dx dy}. \quad (5.31)$$

При  $a(x, y) = 1$  двойной интеграл по поверхности антенны равен  $s$  и

$$K = \frac{4\pi s}{\lambda^2} \cos \theta_0. \quad (5.32)$$

На графике рис. 60 представлено относительное изменение коэффициента концентрации квадратного поршня со стороной  $l$ , рассчитанное по приближенной формуле (5.32) (штриховая кривая) и точно (сплошные кривые), с помощью численного интегрирования на электронно-вычислительной машине. Как видно из этого графика, приближенная формула дает тем более точный результат, чем больше относительные размеры поршня, и чем меньше угол поворота характеристики направленности  $\theta_0$ .

Интересно отметить, что в отличие от коэффициента концентрации отрезка прямой (см. рис. 25), коэффициент концентрации плоского поршня при больших  $l/\lambda$  с увеличением угла компенсации не растет, а падает. Связано это, очевидно, с тем, что несмотря на совпадение характеристик направленности отрезка и плоского прямоугольного поршня в плоскости поворота максимального излучения, пространственные характеристики направленности ведут себя по-разному. Выше



отмечалось, что расширение характеристики направленности отрезка в плоскости ее поворота компенсируется уменьшением угла раскрыва конической поверхности, образованной направлениями максимального излучения. В случае же большего по сравнению с длиной волны плоского поршня изменение коэффициента концентрации вызывается изменением ширины характеристики направленности в плоскости ее поворота, поскольку в перпендикулярной плоскости ширина характеристики направленности практически не меняется. В плоскости же поворота характеристика направленности совпадает с характеристикой направленности отрезка, являющегося одной стороной поршня и, как это следует из формулы (4.17), ширина ее изменяется по закону  $\cos^{-1} \theta_0$ . Очевидно, этим обстоятельством и объясняется падение коэффициента концентрации по закону  $\cos \theta_0$ . Вычисляя отношение ширины максимума характеристики направленности при  $\theta_0 = 90^\circ$  к ее ширине при  $\theta_0 = 0$  с помощью формул (4.17) и (4.18), легко убедиться что оно пропорционально величине  $\sqrt{l/\lambda}$  и при  $l/\lambda \rightarrow \infty$  стремится к бесконечности. Таким образом, приближенная формула (5.32) дает правильный результат и при  $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$ , но только для бесконечно большой антенны.

В связи с изложенным, применяя формулу (5.32), а также другие приближенные формулы, полученные в предыдущем параграфе, следует всегда иметь в виду, что для антенн малых относительных размеров и при больших углах между нормалью к поверхности антенны и направлением компенсации они могут привести к существенной ошибке.

**Круглая антенна.** Давление, развиваемое круглой плоской антенной радиусом  $R$ , лежащей в жестком бесконечном экране, может быть определено по формуле (5.24). Переходя к полярной системе координат  $x = u \cos \psi$ ,  $y = u \sin \psi$  и полагая  $a(x, y) = 1$ ,  $\alpha(x, y) = k r u_0$ ,  $\varphi_0 = 0$  (что не уменьшает из-за симметрии антенны общности решения) эту формулу можно записать так

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c w}{2\pi r} e^{ikr} \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-ikut} u du d\psi,$$

где  $t = \cos \psi (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0) + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi$ .

При фиксированной величине  $u$  интеграл по  $\psi$  представляет собой поле,

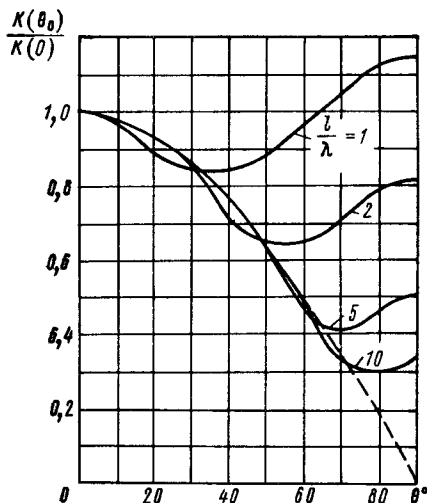


Рис. 60. Относительное изменение коэффициента концентрации квадратной антенны при изменении угла компенсации.

создаваемое окружностью радиуса  $u$ , и поэтому совпадает с интегралом выражения (4.38). Вычисляя его так же, как это делалось при определении давления, создаваемого окружностью, получим

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega}{r} e^{ikr} \int_0^R J_0(kuv) u du,$$

где  $v = \sqrt{\sin^2 \theta_0 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \varphi}$ .

Интеграл по  $u$  табличный, после его вычисления имеем

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega R^2}{2r} e^{ikr} \frac{2J_1(kRv)}{kRv}; \quad (5.33)$$

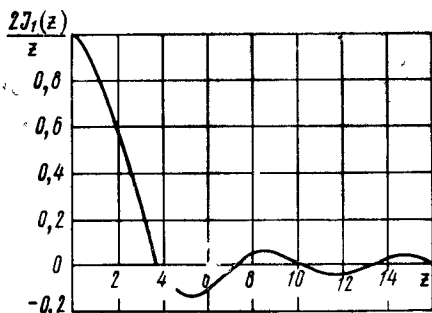


Рис. 61. График функции  $\frac{2J_1(z)}{z}$ .

$$D(\theta, \varphi) = \frac{2J_1(kRv)}{kRv}. \quad (5.34)$$

На рис. 61 представлен график функции  $\frac{2J_1(z)}{z}$ . Характерные и важные для нас особенности этой функции: она равна 0,707 примерно при  $z = \pm 1,62$ , экстремальные ее значения после первого нуля — 0,13; 0,06; — 0,04; 0,03.

Как видно из полученного выражения, характеристика направленности круглой плоской антенны имеет простое аналитическое выражение и легко может быть рассчитана при любом угле компенсации.

Приведем выражения для  $D(\theta, \varphi)$  при  $\theta_0 = 0$  и  $\theta_0 = \pi/2$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{2J_1(kR \sin \theta)}{kR \sin \theta}; \quad (5.35)$$

$$D(\theta, \varphi) = \frac{2J_1 \left[ kR \sqrt{1 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \varphi} \right]}{kR \sqrt{1 + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \varphi}}. \quad (5.36)$$

При компенсации на угол  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  сечения характеристики направленности в двух взаимно перпендикулярных плоскостях имеют вид: при  $\theta = \pi/2$  (в плоскости расположения поршня)

$$D(\varphi) = \frac{J_1 \left( 2kR \sin \frac{\varphi}{2} \right)}{kR \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad (5.37)$$

при  $\varphi = \pi/2$  (в плоскости поворота характеристики направленности)

$$D(\theta) = \frac{2J_1(kR \sqrt{1 + \sin^2 \theta})}{kR \sqrt{1 + \sin^2 \theta}}. \quad (5.38)$$

Сопrotивление излучения круглого синфазно колеблющегося поршня, расположенного в бесконечном жестком экране, определяется во многих общих руководствах по акустике и в том числе в [30]. Выражение, описывающее его, имеет вид

$$z_s = r_s - ix_s = \rho c s \left[ 1 - \frac{2J_1(2kR)}{2kR} \right] - i\rho c s \frac{S_1(2kR)}{kR},$$

где  $s$  — площадь поршня;  $S_1(x)$  — функция Струве первого порядка от аргумента  $x$ .

Зная активное сопротивление излучения круглого поршня и давление, развиваемое им в направлении  $\theta = 0$  [формула (5.33)], легко найти и коэффициент концентрации в отсутствии компенсации

$$K = \frac{k^2 R^2}{1 - \frac{2J_1(2kR)}{2kR}} = \frac{4\pi s}{\lambda^2} \frac{1}{1 - \frac{2J_1(2kR)}{2kR}}. \quad (5.39)$$

Поскольку, как видно из рис. 61, начиная с  $z = 2kR \approx 2\pi$  функция  $\frac{2J_1(z)}{z}$  не превосходит величины, равной 0,06, то, при  $R > 0,5\lambda$ , коэффициент концентрации поршня меньше, чем на 6% отличается от величины, равной  $\frac{4\pi s}{\lambda^2}$ .

Во многих учебниках и монографиях, посвященных электромагнитным антеннам, приводятся различные амплитудные распределения по поверхностям круглого и прямоугольного поршней, при которых характеристика направленности имеет сравнительно простое аналитическое выражение или обладает полезными для практических приложений особенностями. Мы не будем рассматривать эти распределения и отошлем читателя к соответствующим книгам: [1], [48] и др.

## § 16. Непрерывные цилиндрические антенны

**Излучение замкнутой цилиндрической поверхностью.** Пусть непрерывная цилиндрическая антенна имеет диаметр  $2R$  и высоту  $H$ . Разместим оси координат так, как показано на рис. 62, и определим по формуле (5.2) давление, развиваемое антенной, в предположении, что она прозрачна

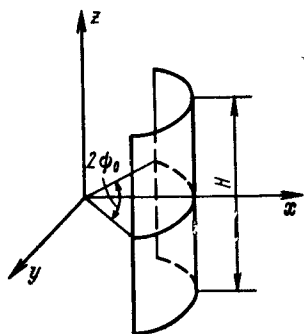
$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(z, \psi) e^{i\alpha(z, \psi)} e^{-ikr\mu} R dz d\psi. \quad (5.40)$$

Скалярное произведение  $\mathbf{r}\mathbf{u}$  запишем, исходя из того, что положение точки на поверхности антенны определяется в цилиндрической системе координат  $R, \psi, z$ , а точки наблюдения — в сферической  $r, \theta, \varphi$ ; в результате получим  $\mathbf{r}\mathbf{u} = R\cos\psi\sin\theta\cos\varphi + R\sin\psi\sin\theta\sin\varphi + z\cos\theta$ . В формуле (5.40) рабочий сектор ограничен пределами  $-\psi_0, \psi_0$  и равен  $2\psi_0$ .

При равномерном амплитудном распределении и в отсутствии компенсации давление, развиваемое в дальнем поле, определяется выражением

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 R}{2\pi r} e^{ikr} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} e^{-ikz \cos \theta} dz \times \\ \times \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{-ikR(\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \theta \sin \varphi)} d\psi. \quad (5.41)$$

Первый интеграл этого выражения встречался ранее при выводе характеристики направленности отрезка, а второй — при определении поля, создаваемого дугой окружности. Если рабочий сектор цилиндрической прозрачной антенны  $2\psi_0 = 2\pi$ , то второй интеграл характеризует излучение замкнутой окружности, и выражение (5.41) может быть записано следующим образом:



$$p(\theta, \varphi) = \\ = -\frac{ik\rho c\omega_0 R H}{r} \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos \theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos \theta} J_0(kR \sin \theta). \quad (5.42)$$

Рис. 62. Цилиндрическая непрерывная антенна.

Из этой формулы видно, что, как и следовало ожидать на основании теоремы умножения, характеристика направленности прозрачного цилиндра равна произведению двух характеристик направленности: направляющей (окружности) и образующей. Главные максимумы этих характеристик направленности развернуты в пространстве на угол  $\frac{\pi}{2}$ , что создает некоторые затруднения при определении направления, в котором следует производить нормирование характеристики направленности прозрачного цилиндра, поскольку при произвольных относительных размерах направление главного максимума всей антенны заранее неизвестно.

Определим коэффициент концентрации прозрачной цилиндрической антенны в направлении  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (величина  $\varphi$  при этом безразлична в силу симметрии задачи).

Из приближенной формулы (5.7) следует, что активное сопротивление излучения прозрачной некомпенсированной антенны при равномерном амплитудном распределении равно  $2\rho cs$ ; давление, создаваемое в направлении  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , можно найти по формуле (5.42); зная

эти две величины, легко найти и коэффициент концентрации:

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} |J_0(kR)|^2, \quad (5.43)$$

где  $s = 2\pi RH$  — площадь активной поверхности антенны.

Таким образом, коэффициент концентрации в направлении  $\theta = \frac{\pi}{2}$  при некоторых значениях  $kR$  может быть равен нулю. При больших  $kR$ , воспользовавшись асимптотическим выражением для функции  $J_0(x)$ , получим

$$K = \frac{4H}{\lambda} \cos^2\left(kR - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда видно, что при больших  $kR$  коэффициент концентрации меняется от 0 до  $4H/\lambda$ .

Для определения давления, развиваемого непрозрачной цилиндрической антенной, в соответствии с геометрическими представлениями предположим, что каждый элемент ее поверхности излучает только в переднее полупространство, т. е. имеет характеристику направленности в виде полусферы. При этом формулу, определяющую давление в направлении  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$ , можно записать так же, как записана формула (5.41), за исключением того, что интегрирование по  $\psi$  должно производиться по освещенной из точки наблюдения части цилиндра, т. е. в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ . Вычисляя интеграл по  $\psi$  с помощью метода стационарной фазы, так же, как это делалось при выводе формулы (4.54), для  $kR \gg 1$  получим

$$p\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\frac{i\rho c\omega_0}{\pi r} He^{-i\left(kr - kR + \frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{\pi kR}{2}}. \quad (5.44)$$

Учитывая, что  $r_s = \rho cs = \rho c 2\pi RH$ , найдем выражение для коэффициента концентрации

$$K = \frac{2H}{\lambda}, \quad (5.45)$$

из которого следует, что коэффициент концентрации непрозрачной некомпенсированной цилиндрической антенны равен коэффициенту концентрации отрезка, длина которого совпадает с высотой цилиндра.

**Излучение частью цилиндрической поверхности.** Выражение, определяющее давление, развиваемое некомпенсированным сектором цилиндрической антенны, легко записать, исходя из формулы (5.41). Оно имеет вид

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{i\rho c\omega_0 RH}{2\pi r} e^{ikr} D_0(\theta, \varphi) \int_{-\psi_0}^{\psi_0} a(\psi) e^{-ikR \sin \theta \cos(\varphi - \psi)} d\psi, \quad (5.46)$$

где

$$D_0(\theta, \varphi) = \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos \theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos \theta}.$$

Вычисляя интеграл по  $\psi$  так же, как это делалось в предыдущей главе, получим

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0 RH}{2\pi r} e^{ik(r-R\sin\theta)} a(\varphi) \sqrt{\frac{\pi}{kR\sin\theta}} \times \\ \times \{C(x_1) + C(x_2) + iS(x_1) + iS(x_2)\}, \quad (5.47)$$

где

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR\sin\theta [1 - \cos(\varphi + \psi_0)]}; \\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{kR\sin\theta [1 - \cos(\varphi - \psi_0)]}.$$

Полагая  $\varphi = 0$  и  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , найдем давление, развиваемое антенной в направлении оси  $x$

$$p\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = -\frac{ik\rho c\omega_0 RH}{\pi r} e^{ik(R-r)} a(0) \sqrt{\frac{\pi}{kR}} [C(x) + iS(x)], \quad (5.48)$$

где

$$C(x) + iS(x) = \int_0^x e^{-i\frac{\pi}{2}t^2} dt, \\ x = 2\sqrt{\frac{h}{\lambda}}$$

Определим коэффициент усиления некомпенсированного сектора кругового цилиндра в направлении оси  $x$  как отношение звуковых давлений, развиваемых в дальнем поле в направлении оси  $x$  рассматриваемой антенной [формула (5.48)] и плоским поршнем, имеющим размеры  $H$  и  $2R\psi_0$ . В результате при  $a(\psi) = 1$ , получим

$$K_p = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{\pi}{kR}} \sqrt{C^2(x) + S^2(x)}. \quad (5.49)$$

Из сравнения этой формулы с формулой (4.57) следует, что коэффициент усиления некомпенсированного цилиндрического сектора с углом раскрыва  $2\psi_0$  равен коэффициенту усиления дуги, имеющей центральный угол  $2\psi_0$ .

Получим выражение, определяющее коэффициент концентрации рассматриваемой непрозрачной антенны в направлении  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Будем считать, что ее активное сопротивление излучения равно  $\rho c s = \rho c 2HR\psi_0$ . Давление, развиваемое антенной, можно найти из точной формулы (5.46) или из приближенной (5.47), или, наконец, из приближенной, но полагая  $x = 2\sqrt{\frac{h}{\lambda}} \gg 1$  и считая что  $S(x) = C(x) = 0,5$ . В результате получим три выражения:

$$K = \frac{2\pi RH}{\lambda^2 \psi_0} \left| \int_{-\psi_0}^{\psi_0} e^{-ikR \cos \psi} d\psi \right|^2, \quad (5.50)$$

$$K = \frac{4\pi H}{\lambda\psi_0} \left[ C^2 \left( 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \right) + S^2 \left( 2 \sqrt{\frac{h}{\lambda}} \right) \right], \quad (5.51)$$

$$K = \frac{2\pi H}{\lambda\psi_0}. \quad (5.52)$$

Полученные формулы отличаются от аналогичных выражений (4.61), (4.62), (4.63) множителем  $\frac{2\pi H}{\lambda}$ , поэтому для определения коэффициента концентрации некомпенсированного сектора цилиндра можно воспользоваться графиками рис. 38, домножая найденное по ним значение  $K$  на коэффициент  $\frac{2\pi H}{\lambda}$ . Так же, как это делалось в случае дуги, анализируя формулу (5.51), можно показать, что максимальное значение коэффициента концентрации наблюдается при  $h/\lambda = 0,36$  и оно примерно равно

$$K = \frac{3\pi H}{\lambda} \sqrt{\frac{2R}{\lambda}}.$$

Заметим, что выражение (5.52) имеет простой физический смысл. Если бы антенна работала замкнутой цилиндрической поверхностью, то ее коэффициент концентрации в соответствии с формулой (5.45) был бы равен  $2H/\lambda$ , но при большом  $h/\lambda$  в горизонтальной плоскости формируется секторная характеристика направленности с углом раскрытия  $2\psi_0$ , что увеличивает коэффициент концентрации еще в  $2\pi/2\psi_0$  раз.

**Излучение цилиндра с учетом дифракции.** В работе [62] приведено решение задачи об излучении конечного участка бесконечного по высоте жесткого цилиндра и показано, что если колебательная скорость на поверхности цилиндра задана в виде функции  $\omega_0 a(\psi, z) = \omega_0 a(\psi) a(z)$ , то давление в окружающей среде определяется формулой

$$p(r, z, \varphi) = \frac{ik\rho c\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m V(\gamma) H_m^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \gamma^2}) \cos m\varphi e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_m^{(1)'}(R\sqrt{k^2 - \gamma^2})} d\gamma, \quad (5.53)$$

где

$$a_m = \frac{1}{\pi\eta_m} \int_0^{2\pi} a(\psi) \cos m\psi d\psi,$$

$$V(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(z) e^{-i\gamma z} dz,$$

$$\eta_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m>0, \end{cases}$$

$$\gamma = k \cos \theta.$$

При расположении точки наблюдения в дальнем поле излучения интеграл по  $\gamma$  может быть вычислен методом перевала [50] и формула принимает следующий вид:

$$p(\theta, \varphi) = \frac{\rho c \omega_0}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ikr} \frac{1}{\sin \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m V(k \cos \theta) \cos m\varphi}{H_m^{(1)'}(kR \sin \theta)} e^{-i \frac{\pi m}{2}}. \quad (5.54)$$

Рассмотрим направленные свойства сектора антенны, ограниченного углами  $\psi = -\psi_0$  и  $\psi = \psi_0$  и имеющего высоту  $H$ .

Коэффициенты разложения распределения колебательной скорости вдоль направляющей в ряд Фурье и преобразование Фурье от распределения колебательной скорости вдоль образующей, в рассматриваемом случае при  $a(\varphi) = a(z) = 1$  внутри рабочего участка антенны, имеют следующий вид:

$$a_m = \frac{1}{\pi \eta_m} \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos m\psi d\psi = \frac{2 \sin m\psi_0}{\pi \eta_m m},$$

$$V(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} e^{-i\gamma z} dz = \frac{H}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\gamma \frac{H}{2}},$$

и формула (5.53) может быть записана так:

$$p(r, z, \varphi) = \frac{ik\rho c \omega_0 H}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\psi_0 \cos m\varphi}{\eta_m m} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(r \sqrt{k^2 - \gamma^2})}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_m^{(1)'}(R \sqrt{k^2 - \gamma^2})} \frac{\sin\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\gamma \frac{H}{2}} e^{i\gamma z} d\gamma. \quad (5.55)$$

В дальнем же поле, в соответствии с формулой (5.54) давление, развиваемое сектором, равно

$$p(\theta, \varphi) = \frac{2\rho c \omega_0 H}{r \pi^2} e^{ikr} \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos \theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos \theta} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\psi_0 \cos m\varphi}{m \eta_m H_m^{(1)'}(kR \sin \theta)} e^{-i \frac{\pi m}{2}}. \quad (5.56)$$

Определим сопротивление излучения антенны в соответствии с формулами (1.10) и (1.11).

$$z = R \int_{-\psi_0}^{\psi_0} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} p' d\varphi dz.$$



Подставляя в эту формулу выражение (5.55) и поменяв местами суммирование и интегрирование, мы получим два элементарных интеграла

$$\int_{-\psi_0}^{\psi_0} \cos m\psi d\psi = \frac{2 \sin \psi_0}{m},$$

$$\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} e^{i\gamma z} dz = H \frac{\sin\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\gamma \frac{H}{2}}.$$

Окончательно выражение для сопротивления излучения некомпенсированного сектора запишется следующим образом [68]:

$$z = \frac{ik\rho c 2R H^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0}{m^2 \eta_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\left(\gamma \frac{H}{2}\right)^2} \times$$

$$\times \frac{H_m^{(1)}\left(R \sqrt{k^2 - \gamma^2}\right)}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_m^{(1)'}\left(R \sqrt{k^2 - \gamma^2}\right)} d\gamma. \quad (5.57)$$

Поскольку  $\gamma = k \cos \theta$ , первый сомножитель под знаком интеграла представляет собой квадрат характеристики направленности отрезка, имеющего длину, равную высоте рабочего сегмента цилиндра. Воспользуемся тем, что при  $H/\lambda \gg 1$  квадрат характеристики направленности отрезка обладает свойствами  $\delta$ -функции [формула (3.32)] и получим приближенное выражение для  $z$

$$z = \frac{4i\rho c R H}{\pi k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0}{m^2 \eta_m} \cdot \frac{H_m^{(1)}(kR)}{H_m^{(1)'}(kR)}. \quad (5.58)$$

Мнимая часть отношения функции Ганкеля произвольного порядка к производной от функции Ганкеля того же порядка равна  $-2i (\pi k R)^{-1} |H_m^{(1)}(kR)|^{-2}$ , поэтому из формул (5.57) и (5.58) можно получить выражения

$$r_s = \frac{4\rho c H^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0}{m^2 \eta_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\left(\gamma \frac{H}{2}\right)^2} \frac{d\gamma}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} |H_m^{(1)'}\left(R \sqrt{k^2 - \gamma^2}\right)|^2}$$

$$(5.59)$$

и

$$r_s = \frac{4\rho c \lambda H}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0}{m^2 \eta_m |H_m^{(1)'}(kR)|^2}. \quad (5.60)$$

Зная давление, развиваемое цилиндрическим сектором [формула (5.56)], и его активное сопротивление излучения, можно рассчитать

и коэффициент концентрации. Таким образом были определены зависимости  $K$  от  $h/\lambda$  при  $2\psi_0 = 60^\circ$  и при  $kR = 25$ , представленные на рис. 63 и рис. 64. Первый график относится к случаю, когда фиксирован угол раскрыва, а меняется частота, второй относится к случаю, когда частота постоянна, а меняется угол раскрыва. При расчете предполагалось, что  $H > \lambda$ , и поэтому  $r_s$  определялось в соответствии с формулой (5.60).

Интересно отметить, что кривые, рассчитанные по формуле (5.51), не учитывающей дифракцию, совпадают с кривыми, представленными на рис. 63 и 64, вычисленными по точной формуле.

Рассмотрим случай, когда  $2\psi_0 = 2\pi$ , т. е. когда излучение производится замкнутым цилиндрическим кольцом, находящимся в бесконечном цилиндрическом жестком экране. Если  $\psi_0 = \pi$ , то  $\frac{\sin m\psi_0}{m}$  равно  $\pi$  для  $m = 0$  и равно нулю для всех остальных  $m$ . При этом в суммах приведенных выше формул остается только одно слагаемое, соответствующее  $m = 0$ . Таким образом, мы получим из формулы (5.56)

$$\rho(\theta) = \frac{\rho c \omega_0 H}{\pi} e^{ikr} \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos\theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{H_0^{(1)'(kR \sin\theta)}}, \quad (5.61)$$

из формулы (5.59)

$$r_s = \frac{2\rho c H^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\gamma \frac{H}{2}\right)}{\left(\gamma \frac{H}{2}\right)^2} \cdot \frac{d\gamma}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} \left| H_0^{(1)'}\left(R \sqrt{k^2 - \gamma^2}\right) \right|^2}, \quad (5.62)$$

и из приближенной формулы (5.60)

$$r_s = \frac{2\rho c \lambda H}{\pi} \cdot \frac{1}{\left| H_0^{(1)'}(kR) \right|^2}. \quad (5.63)$$

Поскольку каждая из окружностей на антенне заключена в бесконечный цилиндрический экран и характеристики направленности всех окружностей одинаковы, давление, создаваемое антенной, должно быть пропорционально произведению характеристики направленности окружности в жестком цилиндрическом экране и отрезка прямой, длина которого равна высоте активной части антенны. Полагая в формуле (5.61)  $H \ll \lambda$ , т. е., по существу, переходя от цилиндра к окружности, легко убедиться в том, что последний множитель пропорционален характеристике направленности окружности на цилиндре.

Принимая во внимание, что  $H_0^{(1)'}(z) = -H_1^{(1)}(z)$ , и нормируя характеристику направленности окружности в направлении  $\theta = \pi/2$ , формулу (5.61) запишем так:

$$\rho(\theta) = \frac{-\rho c \omega_0 H}{\pi r H_1^{(1)}(kR)} e^{ikr} D_{\pi}(\theta) D_0(\theta), \quad (5.64)$$

где 
$$D_{\pi}(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos\theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos\theta}; \quad D_0(\theta) = \frac{H_1^{(1)}(kR)}{\sin\theta H_1^{(1)}(kR \sin\theta)}.$$

На рис. 65 представлены характеристики направленности окружности, рассчитанные по этой формуле; видно, что с ростом  $kR$  величина излучения вдоль оси цилиндра увеличивается, однако в отличие от излучения окружности в свободном пространстве характеристика направленности окружности на жестком цилиндре изменяется в пределах одного квадранта монотонно. Это обстоятельство позволяет оценить поведение характеристики направленности окружности на цилиндре, зная всего одно значение ее, а именно, ее величину в направлении  $\theta = 0$ . Зависимость этой величины от  $kR$  приведена на рис. 66.

Рассмотрим случаи, когда  $kR \gg 1$  и  $kR \ll 1$ . При  $kR \gg 1$ , воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ганкеля, из формулы (5.61) можно получить выражение, определяющее давление, развиваемое антенной в направлении  $\theta = \pi/2$ . Это выражение полностью совпадает с формулой (5.44), выведенной для случая непрозрачной антенны при аппроксимации направленности отдельного элемента поверхности полусферой. Полагая в соотношении (5.56)  $kR \ll 1$  и воспользовавшись известной формулой, определяющей величину функции Ганкеля при малом аргументе, можно получить величину в два раза меньшую, чем дает при  $kR \ll 1$  формула (5.42). Отличие объясняется тем, что рассматриваемая выше поверхностная прозрачная антенна была двухслойной, т. е. представлялась нами как пульсирующая прозрачная пластинка, производительность элемента поверхности которой равна  $Q = 2w(s)ds$ , т. е. в два раза больше, чем при той же колебательной скорости производительность элемента на жестком цилиндре.

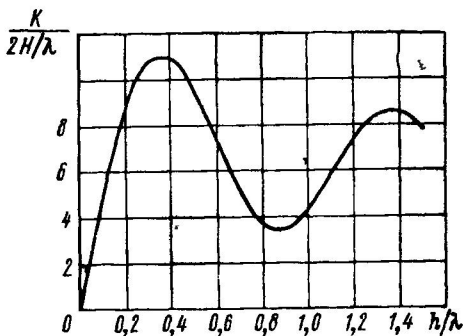


Рис. 63. Зависимость коэффициента концентрации цилиндрического сектора от  $h/\lambda$  при  $2\psi_0 = 60^\circ$ .

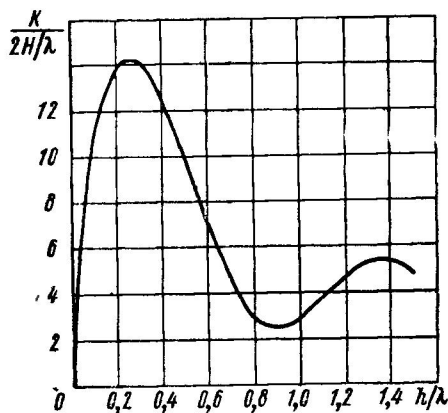


Рис. 64. Зависимость  $\frac{K\lambda}{2H}$  от  $h/\lambda$  при  $kR = 25$ .

Рассмотренные предельные случаи свидетельствуют о том, что при  $kR \gg 1$  малый элемент площади цилиндра излучает, как и следует из геометрических представлений, в полупространство, и наоборот, при  $kR \ll 1$  малый элемент площади цилиндра является ненаправленным.

На рис. 67 представлены рассчитанные по формуле (5.57) при  $m = 0$  зависимости безразмерных величин активного  $r'_s = r_s / \rho c s$  (сплошные

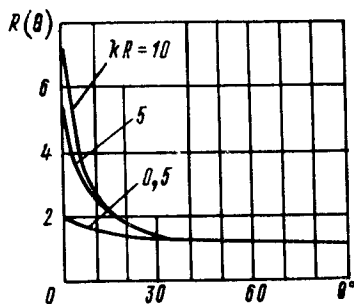


Рис. 65. Характеристики направленности окружности на жестком цилиндре.

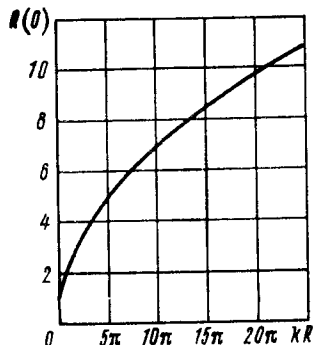


Рис. 66. Зависимость  $R(0)$  от  $kR$ .

кривые) и реактивного  $x'_s = x_s / \rho c s$  (штриховые кривые) сопротивления излучения кольца на жестком цилиндрическом экране от  $H/\lambda$  при некоторых фиксированных значениях  $kR$  [3], где  $s = 2\pi R H$ . Как видно из графика, при малых величинах  $kR$  и  $H/\lambda$  их изменение существенно влияет на  $r'_s$  и  $x'_s$ , но при больших  $kR$  и  $H/\lambda$  безразмерные активное и реактивное сопротивления излучения мало зависят

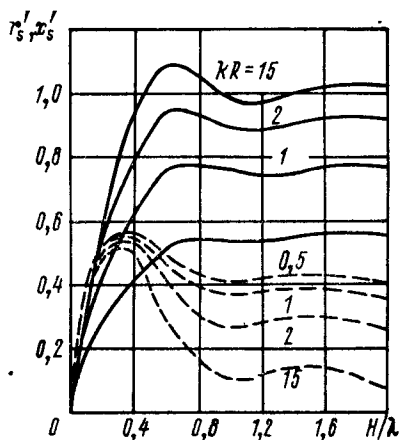


Рис. 67. Зависимость  $r'_s$  и  $x'_s$  от  $H/\lambda$  при различных  $kR$ .

от волновых размеров. Активное сопротивление излучения приближается к  $\rho c s$ , а реактивное — к нулю.

Выражение для вычисления коэффициента концентрации замкнутого цилиндрического пояса на жестком цилиндре можно получить по формуле (1.38) или (1.36). Оно имеет вид

$$K = \frac{2}{|H_1^{(1)}(kR)|^2} \int_0^\pi \left[ \frac{\sin\left(\frac{kH}{2} \cos \theta\right)}{\frac{kH}{2} \cos \theta} \right]^2 \frac{d\theta}{\sin \theta |H_1^{(1)}(kR \sin \theta)|^2}. \quad (5.65)$$

Воспользовавшись формулами (3.32) и (2.78), можно найти приближенное выражение для коэффициента концентрации, справедливое при  $H \gg \lambda$ . Это выражение имеет вид  $K = 2H/\lambda$  и совпадает с формулой (5.45), полученной для непрозрачного цилиндра в предположении, что каждый элемент его излучает в полупространство, а также с формулой (4.28), определяющей коэффициент концентрации отрезка.

На рис. 68 представлена зависимость отношения  $K$  к  $2H/\lambda$  от  $H/\lambda$ , рассчитанная для различных  $kR$  по точной формуле (5.65). Видно, что начиная с  $H/\lambda > (0,5 \div 1)$  независимо от  $kR$  коэффициент концентрации мало отличается от величины  $2H/\lambda$ , показанной штриховой линией.

Этот вывод не является очевидным. Напротив, представляя характеристику направленности кольца при сравнительно малом  $H/\lambda$  и

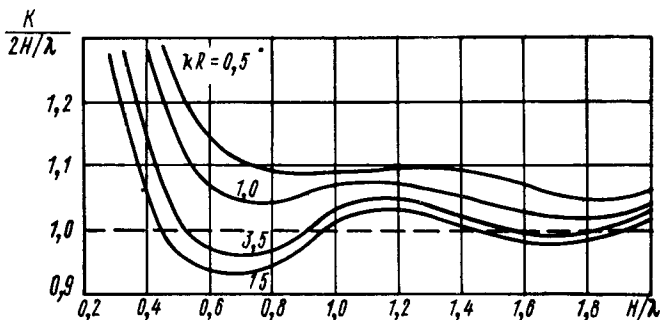


Рис. 68. Относительная зависимость коэффициента концентрации от  $H/\lambda$ .

большом  $kR$  как произведение характеристики отрезка длиной  $H$  и окружности на жестком цилиндре (см. рис. 65) и учитывая, что последняя имеет существенный всплеск в направлении  $\theta = 0$ , можно ожидать заметную потерю в величине коэффициента концентрации по сравнению с  $2H/\lambda$ . То обстоятельство, что точный расчет опровергает это рассуждение, объясняется, очевидно, малостью ширины всплеска характеристики направленности окружности.

**Компенсированная непрерывная цилиндрическая антенна.** Рассмотрим коэффициент концентрации компенсированной перпендикулярно образующей (т. е. в направлении  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ ) непрерывной прозрачной цилиндрической антенны. Воспользуемся для этого формулой (3.58), выведенной в предположении, что  $H > \lambda$ . Поскольку в рассматриваемом случае  $\theta_0 = \pi/2$ , величина  $\eta_0$  равна единице и формула (3.58) имеет вид

$$K = \frac{2H}{\lambda} \frac{2\pi}{\int_0^{2\pi} R^2 \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) d\varphi}. \quad (5.66)$$

Характеристика направленности прозрачной цилиндрической антенны равна произведению характеристик направленности направляю-

щей и образующей. В плоскости  $\theta = \pi/2$  характеристика направленности образующей равна единице, и поэтому в приведенном выражении под  $R(\pi/2, \varphi)$  можно понимать характеристику направленности направляющей.

Пусть антенна работает полным сектором  $2\pi$  и  $a(\varphi) = 1$ . Тогда  $R(\pi/2, \varphi)$  — характеристика направленности окружности, компенсированной по нормали к оси симметрии. Подставляя формулу (4.43) в выражение (5.66), получим

$$K^{-1} = \frac{\lambda}{4\pi H} \int_0^{2\pi} J_0^2 \left( 2kR \sin \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi. \quad (5.67)$$

Принимая во внимание известное соотношение

$$J_0(z \sin \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m J_m^2 \left( \frac{z}{2} \right) \cos 2m\alpha,$$

где

$$\eta_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0; \\ 1 & \text{при } m>0, \end{cases}$$

а также воспользовавшись ортогональностью тригонометрических функций, получим

$$K = \frac{H}{\lambda} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_m} J_m^4(kR) \right]^{-1}. \quad (5.68)$$

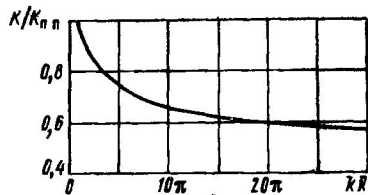


Рис. 69. Зависимость отношения  $K/K_{п.п}$  от  $kR$  в случае прозрачно-компенсированного цилиндра.

На рис. 69 представлена зависимость отношения коэффициента концентрации прозрачного компенсированного цилиндра [рассчитанного по формуле (5.68)] к коэффициенту концентрации плоского поршня,<sup>1</sup> совпадающего с диаметральной сечением цилиндра, от  $kR$ . С ростом  $kR$  эффективность прозрачного цилиндра по сравнению с экранированным плоским поршнем падает. Объясняется это, очевидно, тем, что при больших  $kR$  велики участки поверхности цилиндра, примерно параллельные направлению компенсации, т. е. имеющие большое активное сопротивление излучения или, другими словами, обладающие очень широкой направленностью по сравнению с другими участками цилиндрической поверхности. Заметим, что в соответствии с приближенной формулой (5.10) в рассматриваемом случае отношение  $K/K_{п.п}$  равно нулю. Выше уже отмечалось, что формула (5.10) дает неправильный результат при наличии участков поверхности антенны, параллельных направлению компенсации, и ошибка уменьшается с ростом относительных размеров антенны. В пределе же при  $kR \rightarrow \infty$ , как это и видно из анализа формулы (5.68) или из рис. 69, отношение  $K/K_{п.п}$  действительно стремится к нулю.

<sup>1</sup> При построении графика, приведенного на рис. 69, как и аналогичных последующих графиков, под  $K_{п.п}$  понимается величина коэффициента концентрации плоского поршня, рассчитанная по приближенной формуле (5.18).

## § 17. Сферические непрерывные антенны

**Приближенная теория.** Запишем выражение, определяющее давление, развиваемое прозрачной поверхностной сферической антенной. Для этого поместим начало сферической системы координат в центре сферы и положение текущей точки на сферической поверхности зададим координатами  $R$ ,  $\theta_c$ ,  $\varphi_c$ . Давление, развиваемое антенной в дальней зоне при произвольном возбуждении, можно записать следующим образом:

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{2\pi r} e^{ikr} \int_{\theta_c=0}^{\pi} \int_{\varphi_c=0}^{2\pi} A(\theta_c, \varphi_c) e^{-ik\rho u} R^2 \sin \theta_c d\theta_c d\varphi_c, \quad (5.69)$$

где  $\rho u = R(\sin \theta \cos \varphi \sin \theta_c \cos \varphi_c + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_c \sin \varphi_c + \cos \theta \cos \theta_c)$ .

Пусть фазовое распределение отсутствует и амплитуда колебательной скорости отлична от нуля только на поверхности сегмента сферы, соответствующего центральному углу  $\psi_0$ . Определим величину звукового давления в направлении оси симметрии рабочего сектора  $\theta = 0$ . Подставляя в формулу (5.69)  $\theta = 0$  и изменяя верхний предел интеграла по  $\theta_c$  (так, чтобы интегрирование происходило от 0 до  $\psi_0$ ), получим

$$p(0) = -\frac{ik\rho c\omega_0 R^2}{r} e^{ikr} \int_0^{\psi_0} a(\theta_c) e^{-ikR \cos \theta_c} \sin \theta_c d\theta_c. \quad (5.70)$$

При равномерном амплитудном распределении этот интеграл вычисляется элементарно и мы имеем

$$|p(0)| = \frac{\rho c\omega_0 2R}{r} \left| \sin \left[ \frac{kR}{2} (1 - \cos \psi_0) \right] \right| = \frac{\rho c\omega_0 2R}{r} \left| \sin \pi \frac{h}{\lambda} \right|, \quad (5.71)$$

где  $h = R(1 - \cos \psi_0)$  — высота рабочего участка сферической антенны. Из полученного выражения видно, что с ростом  $h/\lambda$  или, что то же самое, с ростом  $\psi_0$  модуль давления осциллирует, изменяясь от нуля до максимального значения, потом снова до нуля и т. д. Такое поведение модуля давления с ростом угла раскрыва рабочего сектора объясняется тем, что в случае сферической антенны все зоны Френеля вносят одинаковый по модулю вклад в величину давления в рассматриваемом направлении. Поскольку вклады соседних зон противофазны, то величина давления зависит от того, четное или нечетное число зон укладывается на рабочем участке сферы. При четном числе зон давление равно нулю, а при нечетном максимально и не зависит от количества взаимно компенсирующихся зон Френеля.

Вспомним, что в случае цилиндрической антенны или дуги (см. рис. 32) воздействие последующих зон уменьшается и основное влияние на величину давления оказывает первая зона Френеля. При излучении же сферической антенной давление определяется последней зоной Френеля. Это обстоятельство приводит к тому, что использование первого приближения метода стационарной фазы [формула (4.34)] в случае сферической антенны может привести к существенной погрешности. Однако если на поверхности сферического сегмента имеется амплитудное распределение, падающее от середины к краям так, что

на краях амплитуда равна нулю, то основную роль в создании поля будет играть первая зона и можно для определения поля в дальней зоне воспользоваться формулой (4.35).

Применяя формулу (4.35) дважды, для вычисления интегралов по  $\theta_c$  и  $\varphi_c$  получим

$$|p(\theta, \varphi)| = \frac{\rho c \omega_0 R}{r} a(\theta, \varphi). \quad (5.72)$$

Таким образом, если только на поверхности некомпенсированного сферического сегмента имеется амплитудное распределение  $a(\theta_c, \varphi_c)$ , спадающее на краях сегмента до нуля, то его характеристика направленности  $R(\theta, \varphi) = a(\theta, \varphi)$ , т. е. повторяет вид амплитудного распределения.

Принимая во внимание, что в соответствии с формулой (5.9) активное сопротивление излучения непрозрачного сферического сегмента при  $a(\theta_c, \varphi_c) = 1$  равно  $\rho c s = \rho c 2\pi R^2 (1 - \cos \psi_0)$ , определим его коэффициент концентрации

$$K = 8 \frac{\sin^2 \pi \frac{h}{\lambda}}{1 - \cos \psi_0} = \frac{8R}{h} \sin^2 \pi \frac{h}{\lambda}. \quad (5.73)$$

Приближенно полагая, что в окрестности максимума функции  $\sin^2 \pi h/\lambda$  функция  $h^{-1}$  меняется незначительно, можно сделать вывод о том, что максимальное значение коэффициента концентрации наблюдается при  $h/\lambda = 1/2$  и оно примерно равно  $16 R/\lambda$ .

Рассмотрим характеристику направленности сферической прозрачной непрерывной антенны при  $a(\theta_c, \varphi_c) = 1$  на всей поверхности сферы при компенсации ее вдоль оси  $\theta = 0$ . В этом случае из формулы (5.69) можно получить следующее выражение:

$$R(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left| \int_{\theta_c=0}^{\pi} \int_{\varphi_c=0}^{2\pi} e^{-ikRt} \sin \theta_c d\theta_c d\varphi_c \right|,$$

где  $t = \sin \theta \cos \varphi \sin \theta_c \cos \varphi_c + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta_c \sin \varphi_c + \cos \theta \cos \theta_c - \cos \theta_c$ .

Интеграл по  $\varphi_c$  вычисляется так же, как и аналогичный интеграл, определяющий характеристику направленности окружности. В результате имеем

$$R(\theta) = \frac{1}{2} \left| \int_0^{\pi} J_0(kR \sin \theta_c \sin \theta) e^{-ikR \cos \theta_c (\cos \theta - 1)} \sin \theta_c d\theta_c \right|.$$

Полученный интеграл табличный, после его вычисления выражение для характеристики направленности имеет вид

$$R(\theta) = \left| \frac{\sin \left( 2kR \sin \frac{\theta}{2} \right)}{2kR \sin \frac{\theta}{2}} \right|. \quad (5.74)$$

Зная характеристику направленности, легко определить и коэффициент концентрации прозрачной компенсированной сферической ан-



тенны [57]. Пусть  $x = 2kR \sin \frac{\theta}{2}$ . Тогда  $dx = kR \cos \frac{\theta}{2} d\theta$

и

$$K = 2 \left[ \int_0^{\pi} R^2 (\theta) \sin \theta d\theta \right]^{-1} = 2(kR)^2 \left[ \int_0^{2kR} \frac{\sin^2 x}{x} dx \right]^{-1}.$$

Принимая во внимание известное соотношение  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ , последний интеграл легко свести к выражению, содержащему интегральный косинус. В результате имеем

$$K = 4 (kR)^2 [\ln \gamma + \ln (4kR) - \text{Ci} (4kR)]^{-1}, \quad (5.75)$$

где  $\ln \gamma$  — постоянная Эйлера, равная 0,577.

На рис. 70 представлена зависимость отношения коэффициентов концентрации прозрачной компенсированной сферы и экранированного плоского поршня, равновеликого диаметральному сечению сферы. С ростом  $kR$  рассматриваемое отношение уменьшается. В пределе при  $kR \rightarrow \infty$  из формулы (5.75) имеем

$$\lim_{kR \rightarrow \infty} \frac{K}{K_{\text{п.п.}}} = \lim_{kR \rightarrow \infty} 4 [0,577 + \ln (4kR) - \text{Ci} (4kR)]^{-1} = 0,$$

поскольку

$$\lim_{kR \rightarrow \infty} \ln (4kR) = \infty,$$

$$\lim_{kR \rightarrow \infty} \text{Ci} (4kR) = 0.$$

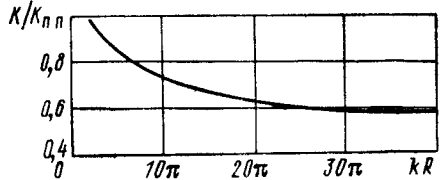


Рис. 70 Зависимость отношения  $K/K_{\text{п.п.}}$  от  $kR$  в случае прозрачной компенсированной сферы.

Таким образом, с ростом  $kR$  эффективность прозрачной непрерывной сферической компенсированной антенны по сравнению с равновеликим по диаметральному сечению плоским поршнем падает, что, очевидно, объясняется теми же причинами, как и аналогичная зависимость в случае прозрачного цилиндра. Существенно увеличить коэффициент концентрации можно отключением участков поверхности, лежащих вблизи диаметра, перпендикулярного направлению компенсации, или уменьшением амплитуды их колебаний.

**Дифракционная теория.** Из решения классической задачи об излучении участком акустически жесткой сферической поверхности ([27], [30]) известно, что давление, развиваемое сегментом сферической поверхности, симметричным относительно оси  $z$  и имеющим полный центральный угол  $2\psi_0$  в отсутствии компенсации и при равномерном амплитудном распределении, определяется выражением

$$p(r, \theta) = \frac{i\rho c \omega_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^{(1)}(kr)}{h_m^{(1)'}(kR)} P_m(\cos \theta) [P_{m-1}(\cos \psi_0) - P_{m+1}(\cos \psi_0)], \quad (5.76)$$

где  $h_m^{(1)}(x)$  и  $h_m^{(1)'}(x)$  — сферическая функция Ганкеля первого рода,

порядка  $m$  и ее производная по аргументу;  $P_m(x)$  — полином Лежандра.

При  $kr \gg 1$ , воспользовавшись асимптотическим представлением сферической функции Ганкеля, можно записать

$$p(r, \theta) = \frac{i\rho c \omega_0}{2kr} e^{ikr} \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) \frac{P_{m-1}(\cos \psi_0) - P_{m+1}(\cos \psi_0)}{h_m^{(1)'}(kR)} e^{-i\frac{\pi}{2}(m+1)}. \quad (5.77)$$

Выражение для расчета сопротивления излучения сегмента сферы и графики зависимости его активной и реактивной составляющих

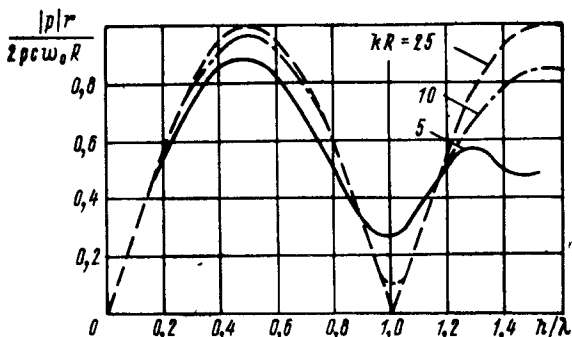


Рис. 71. Зависимость давления, развиваемого сферическим сегментом, от  $h/\lambda$ .

от радиуса сферы и величины центрального угла приведены в [27] и [30]. Мы рассмотрим характеристики направленности некомпенсированного сегмента, давление, развиваемое им в направлении оси симметрии, и коэффициент концентрации.

Выражение, определяющее характеристику направленности, может быть получено из формулы (5.77), и оно имеет вид

$$R(\theta) = \left| \frac{\sum_{m=0}^{\infty} P_m(\cos \theta) D_m(\psi_0) [h_m^{(1)'}(kR)]^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}(m+1)}}{\sum_{m=0}^{\infty} D_m(\psi_0) [h_m^{(1)'}(kR)]^{-1} e^{-i\frac{\pi}{2}(m+1)}} \right|, \quad (5.78)$$

где  $D_m(\psi_0) = P_{m-1}(\cos \psi_0) - P_{m+1}(\cos \psi_0)$ .

Коэффициент концентрации некомпенсированного сферического сегмента в направлении его оси симметрии легко найти через интеграл от квадрата характеристики направленности. Воспользовавшись

ортогональностью полиномов Лежандра, получим

$$K = \frac{\left| \sum_{m=0}^{\infty} D_m(\psi_0) [h_m^{(1)'}(kR)]^{-1} e^{-i \frac{\pi}{2}(m+1)} \right|}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m^2(\psi_0)}{(2m+1) |h_m^{(1)'}(kR)|^2}}. \quad (5.79)$$

На рис. 71 представлена рассчитанная по формуле (5.77) зависимость модуля давления в направлении  $\theta = 0$ , отнесенная к некоторой постоянной, от  $h/\lambda$  для  $kR = 25$  (штриховая линия),  $kR = 10$

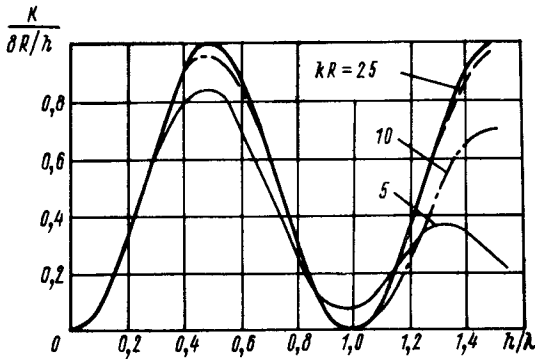


Рис. 72 Зависимость коэффициента концентрации сферического сегмента от  $h/\lambda$ .

(штрихпунктирная линия) и  $kR = 5$  (сплошная линия). Расчет по приближенной формуле (5.71) дает результат, практически полностью совпадающий со штриховой линией. Приближенная формула (5.71) приводит к существенной ошибке только при малых  $kR$  и больших  $h/\lambda$ . Объясняется это тем, что в этих случаях рабочий сектор приближается к  $180^\circ$  или может быть даже больше  $180^\circ$  и начинает сказываться направленность элемента поверхности сферы, не учитываемая формулой (5.71).

На рис. 72 представлена рассчитанная по формуле (5.79) зависимость отношения  $\frac{K}{8R/h}$  от  $h/\lambda$ . На этом же графике для сравнения толстой сплошной линией приведена зависимость, полученная по приближенной формуле (5.73). Как и следовало ожидать, при больших  $kR$  приближенная формула дает практически удовлетворительное совпадение с результатами точных расчетов.

На графиках рис. 73 приведены результаты расчета характеристик направленности некомпенсированного сферического сегмента по формуле (5.78). Для удобства построения все они нормированы к своим максимальным значениям. Видно, что, как и в случае цилиндриче-

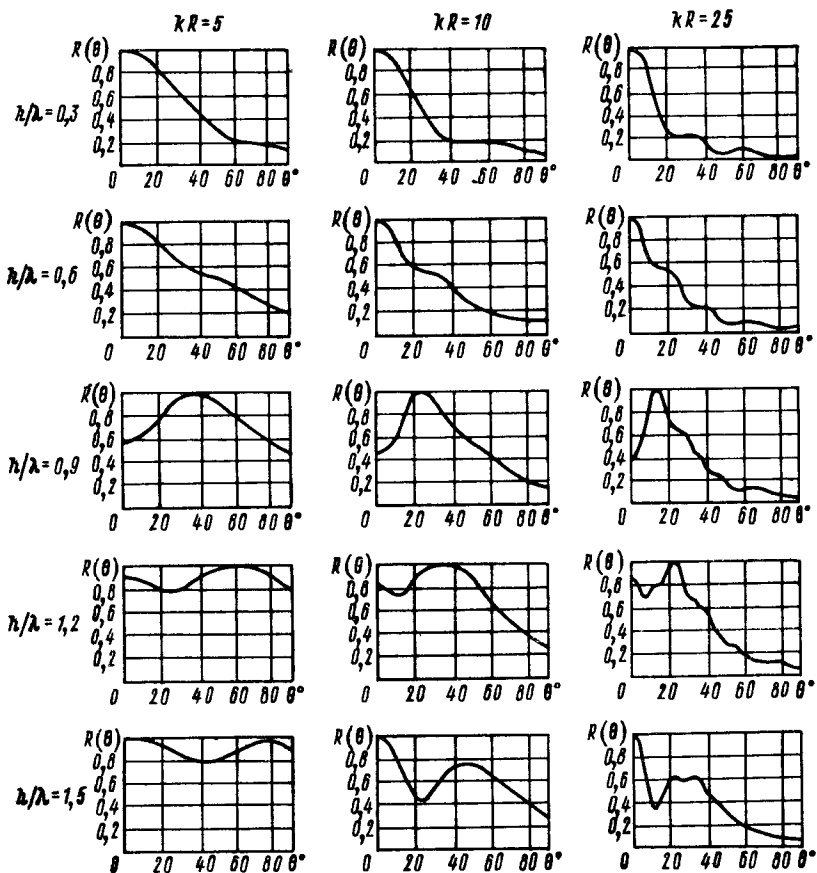


Рис. 73. Характеристика направленности некомпенсированных сферических сегментов.

ской антенны, вид характеристики направленности зависит в первую очередь от отношения  $h/\lambda$ , и с ростом  $kR$  характеристики направленности обостряются. В отличие от случая цилиндрической некомпенсированной антенны, характеристики направленности сферического сегмента имеют глубокие провалы при  $h/\lambda$ , близких к единице, двум и т. д. Существенно улучшить направленность участка сферической поверхности можно введением амплитудного распределения (об этом уже говорилось выше) или изменением его конфигурации.

---

## ГЛАВА 6

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ АНТЕННЫ

#### § 18. Бесконечные плоские периодические антенны

Расчет характеристики направленности, а также давления, развиваемого плоской дискретной антенной в дальнем поле, обычно не представляет большого труда, особенно тогда, когда известно поле, создаваемое отдельным элементом, а центры элементов образуют правильную эквидистантную решетку. Поэтому в настоящем параграфе основное внимание будет уделяться определению сопротивления излучения и коэффициента концентрации.

При малом числе элементов антенны эти параметры могут быть найдены сравнительно легко либо по известным взаимным сопротивлениям излучения элементов, либо, в крайнем случае, с помощью численного интегрирования.

Значительно сложнее дело обстоит с расчетом параметров многоэлементных антенн. Даже в тех, сравнительно редких, случаях, когда известны аналитические выражения для взаимных сопротивлений излучения элементов в жестком экране, определение сопротивления излучения отдельного элемента или антенны в целом является весьма трудоемкой задачей.

В то же время представляется очевидным, что полное (т. е. с учетом всех взаимодействий) сопротивление излучения большинства элементов многоэлементной антенны совпадает с сопротивлением излучения таких же элементов, находящихся в бесконечной антенне. Поскольку сопротивления излучения всех элементов бесконечной антенны одинаковы, появляется возможность определения их сравнительно простым способом.

В третьей главе, при рассмотрении общих методов определения сопротивления излучения и коэффициента концентрации, мы привели формулы, позволяющие вычислить активное сопротивление излучения и коэффициент концентрации участка бесконечной периодической антенны. В настоящем параграфе мы изложим метод, позволяющий определить так же реактивное сопротивление излучения и ближнее поле бесконечной антенны при условии, что ее элементы плоские и помещены в плоский акустический жесткий экран (работы [63], [64], [41], [39]).

Одномерные периодические антенны. Пусть центры произвольных по форме, одинаковых и одинаково ориентированных в пространстве плоских элементов образуют одномерную периодическую бесконечную решетку (рис. 74). Совместим начало прямоугольной системы координат  $x, y, z$  с центром преобразователя, имеющего порядковый номер  $\alpha = 0$ , ось  $x$  направим вдоль прямой, соединяющей центры элементов, ось  $y$  расположим в плоскости преобразователей, а  $z$  перпендикулярно к ней. Кроме того, введем вспомогательные системы координат  $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ , связанные с элементом  $\alpha$  и расположенные аналогично системе координат  $x, y, z$ .

В соответствии с формулой Гюйгенса (2.37), давление, развиваемое плоским элементом, помещенным в бесконечный плоский жесткий экран, определяется соотношением

$$p = -\frac{ikrc\omega_0}{2\pi} \int_s A(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} ds. \quad (6.1)$$

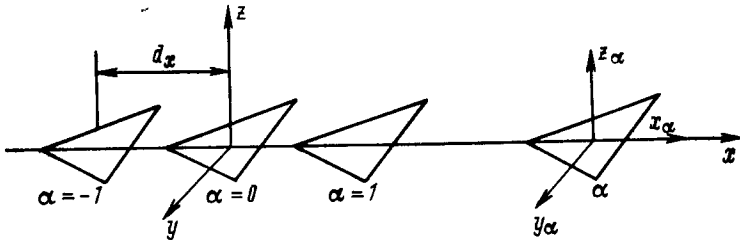


Рис. 74. Бесконечная антенна, состоящая из плоских элементов.

Будем предполагать, что рассматриваемая антенна компенсирована в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ , т. е. преобразователь с номером  $\alpha$  имеет фазовое возбуждение  $ka\alpha d_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0$  (где  $d_x$  — расстояние между центрами соседних элементов); кроме того, будем считать, что амплитудное распределение между преобразователями отсутствует, но на каждом преобразователе имеется распределение колебательной скорости  $A(x_\alpha, y_\alpha)$ .

Поле, создаваемое всей антенной, можно записать следующим образом:

$$p = -\frac{ikrc\omega_0}{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{ik\alpha d_x \sin \theta_0 \cos \varphi_0} \int_{s_\alpha} A(x_\alpha, y_\alpha) \frac{e^{ikr}}{r} ds_\alpha, \quad (6.2)$$

где  $r$  — расстояние от произвольной точки на поверхности преобразователя с номером  $\alpha$  до точки наблюдения.

Воспользуемся известным [5] интегральным представлением сферической волны

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta)} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.3)$$

где  $x$ ,  $y$  и  $z$  — проекции вектора, соединяющего точку излучения с точкой наблюдения на оси координат, а контур интегрирования по  $\theta$  проходит вдоль вещественной оси от 0 до  $\pi/2$  и далее параллельно мнимой оси от  $\pi/2 - i0$  до  $\pi/2 - i\infty$ .

По существу эта формула представляет собой разложение сферической волны по плоским. Подынтегральное выражение при  $\theta \ll \pi/2$  определяет плоскую волну, распространяющуюся вдоль направления, соответствующего углам  $\theta$  и  $\varphi$ . В этом легко убедиться, производя, например, поворот осей координат так, чтобы ось  $z'$  была ориентирована в направлении  $\theta$ ,  $\varphi$ . При этом показатель экспоненты примет вид  $ikz'$ , откуда ясно, что плоская волна распространяется вдоль оси  $z'$ . Сложнее обстоит дело с волнами, соответствующими комплексным значениям  $\theta$ . Пусть  $\theta = \pi/2 - i\theta'$ , где  $\theta'$  — какая-то величина, лежащая между 0 и  $\infty$ . Поскольку справедливы соотношения  $\sin(\pi/2 - i\theta') = \cos i\theta' = \text{ch } \theta'$  и  $\cos(\pi/2 - i\theta') = \sin i\theta' = i \text{ sh } \theta'$ , подынтегральное выражение можно записать так:

$$e^{-kz \text{ sh } \theta'} \cdot e^{ik \text{ ch } \theta' (x \cos \varphi + y \sin \varphi)}.$$

Мы получили плоскую волну, амплитуда которой убывает вдоль оси  $z$ , а распространяется волна вдоль направления  $\varphi$  с волновым числом  $k' = k \text{ ch } \theta$ , т. е. со скоростью  $c = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k \text{ ch } \theta'}$ .

Таким образом, поле ненаправленного источника можно представить состоящим из двух групп плоских волн. Одна группа волн имеет равномерную амплитуду вдоль фронтов волн и распространяется в дальнее поле. Это так называемые однородные волны. Волны второй группы имеют распределение амплитуды вдоль фронта по закону  $e^{-kz \text{ sh } \theta'}$  и называются поэтому неоднородными. Эти волны распространяются вдоль плоскости  $xOy$  и отличаются друг от друга как направлением распространения  $\varphi$ , так и скоростью распространения, меняющейся с изменением  $\theta'$  от 0 до  $\infty$  от величины  $c = \omega/k$  до нуля.

Подставим выражение (6.3) в формулу (6.2), имея в виду, что в рассматриваемом случае проекции  $r$  на оси координат можно записать так:  $x = \alpha d_x - x_\alpha$ ;  $y = y_\alpha$ ;  $z$  (где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — координаты точки наблюдения). Производя некоторые преобразования, получим

$$\rho(x, y, z) = \frac{k^2 \rho c \omega_0}{4\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{ik\alpha d_x (\sin \theta_0 \cos \varphi_0 - \sin \theta \cos \varphi)} \times \\ \times \int_{s_\alpha} A(x_\alpha, y_\alpha) e^{ik [(x-x_\alpha) \sin \theta \cos \varphi + (y-y_\alpha) \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta]} ds_\alpha \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Введем замену переменных  $u = \sin \theta \cos \varphi$  и  $v = \sin \theta \sin \varphi$  и обозначим  $u_0 = \sin \theta_0 \cos \varphi_0$  и  $v_0 = \sin \theta_0 \sin \varphi_0$ . Такая замена производилась нами в третьей главе при выводе выражения для расчета активного сопротивления излучения элемента бесконечной периодической антенны,

причем было показано, что якобиан преобразования определяется выражением (3.42). Учитывая это обстоятельство, имеем:

$$p(x, y, z) = \frac{i\omega_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-ik\alpha d_x(u-u_0)} \right] e^{ik(xu+yv+z)\sqrt{1-u^2-v^2}} \times \\ \times \frac{P'_0(u, v) r e^{-ikr} dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}},$$

где

$$p'_0(u, v) = -\frac{ik\rho c}{2\pi r} e^{ikr} \int_s A(x, y) e^{-ik(xu+yv)} ds$$

— давление, развиваемое при единичной колебательной скорости от-

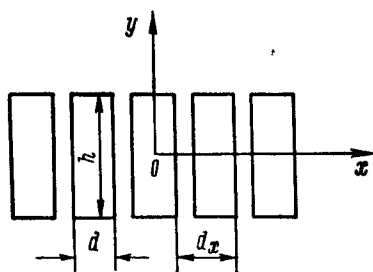


Рис. 75. Прямоугольные элементы в жестком экране.

дельным элементом антенны в дальнем поле, на расстоянии  $r$ . Поскольку это выражение одинаково для всех элементов антенны, индекс  $\alpha$  можно опустить. Сумма, заключенная в квадратные скобки, представляет собой характеристику направленности бесконечной эквидистантной решетки и равна периодической дельта-функции [формула (3.44)].

Вычисляя интеграл от произведения функций, одна из которых является периодической дельта-функцией, аналогично тому, как это делалось при выводе выражения (3.46), получим

$$p(x, y, z) = \frac{i\omega_0}{d_x} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik(xu_n+yv+z)\sqrt{1-u_n^2-v^2}} \times \\ \times \frac{P'_0(u_n, v) r e^{-ikr}}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}} dv, \quad (6.4)$$

где  $u_n = n \frac{\lambda}{d_x} + u_0$ .

С помощью этого выражения рассчитать поле вблизи бесконечной антенны несколько проще, чем по формуле (6.2). Однако в ряде случаев, когда интеграл по  $v$  может быть вычислен, получаются еще более удобные для расчета выражения.

Рассмотрим частный случай, когда элемент антенны представляет собой прямоугольник, причем возбуждение его таково, что  $A(x, y) = A(x)$ . Пусть стороны прямоугольника равны  $d$  и  $h$  (рис. 75).

Выражение, определяющее  $p'_0(u_n, v)$ , в этом случае может быть



записано следующим образом:

$$p'_0(u_n, v) = -\frac{ik\rho c}{2\pi r} e^{ikr} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} A(x) e^{-ikxu} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} e^{-ikyv} dy.$$

Интеграл по  $y$  равен произведению  $h$  на характеристику направленности отрезка длиной  $h$ , и при  $h \gg \lambda$  в соответствии с формулой

$$\lim_{h/\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi h}{\lambda} v}{\frac{\pi h}{\lambda} v} = \frac{\lambda}{h} \delta(v),$$

стремится к дельта-функции. Воспользовавшись этим, получим

$$p(x, z) = \frac{\rho c \omega_0}{d_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik(xu_n + z\sqrt{1-u_n^2})} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} A(x) e^{-ikxu_n} \frac{dx}{\sqrt{1-u_n^2}}. \quad (6.5)$$

Если и вдоль оси  $x$  прямоугольный элемент имеет равномерное амплитудное распределение, то  $A(x) = 1$  и

$$p(x, z) = \frac{\rho c \omega_0 d}{d_x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik(xu_n + z\sqrt{1-u_n^2})} \frac{\sin \frac{kdu_n}{2}}{\frac{kdu_n}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u_n^2}}. \quad (6.6)$$

В последних двух выражениях отсутствует зависимость от координаты  $y$  в связи с тем, что они определяют поле, излучаемое набором полос, строго говоря, бесконечных вдоль оси  $y$ .

Заметим, что выражения (6.4), (6.5) и (6.6), как и те, которые будут получены ниже для двухмерной бесконечной антенны, являются строгими, и с их помощью можно рассчитывать поле на любом расстоянии от бесконечной антенны. Однако при использовании их для приближенного определения давления, создаваемого многоэлементной протяженной, но конечной антенной, следует иметь в виду, что они дают хорошее приближение только вдали от краев антенны и сравнительно недалеко от ее поверхности.

На рис. 76 и рис. 77 представлены результаты расчетов модуля давления на поверхности дискретной антенны, состоящей из бесконечных полос, выполненных по формуле (6.6) при  $z = 0$ . Графики рис. 76 соответствуют случаю  $d_x = 0,5 \lambda$  и  $d = 0,4 \lambda$ . С увеличением угла компенсации  $\theta_0$  увеличивается неравномерность поля на поверхности антенны, а кроме того, увеличивается и средний уровень амплитуды давления. На рис. 77 показано изменение модуля давления на поверхности элемента антенны при  $d_x = 0,5 \lambda$ ,  $\theta_0 = 60^\circ$  и различных значениях ширины элемента  $d$ . Характер изменения давления по поверхности элемента мало зависит от  $d/d_x$ , но при  $d/d_x = 1$ , т. е. при отсутствии зазоров между элементами, и среднее значение модуля давления и неравномерность распределения его по поверхности элемента увеличиваются.

Положив  $z = 0$  в формуле (6 4), можно найти распределение давления непосредственно на поверхности антенны и с помощью выражений (1.11) и (1 10) определить сопротивление излучения отдельного элемента антенны. Поскольку сопротивления излучения всех элементов бесконечной антенны одинаковы, найдем  $z_s$  элемента с номером  $\alpha = 0$

$$z_s = \frac{1}{|\omega_0|^2} \int_{s_0} p(x, y) A^*(x, y) \omega_0^* ds_0 = \frac{\rho c s_0^2}{d_x \lambda} \times \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v)}{\sqrt{1 - u_n^2 - v^2}} dv. \quad (6.7)$$

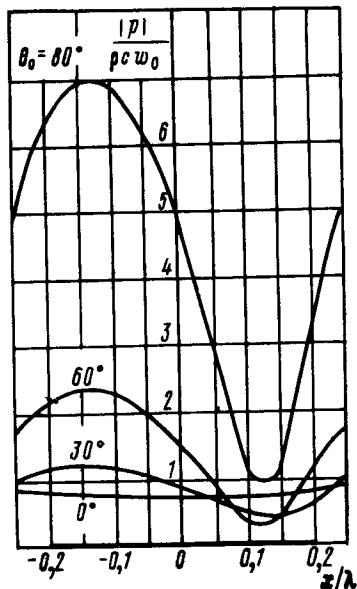


Рис. 76. Модуль давления на поверхности антенны, состоящей из бесконечных полос ( $d_x = 0,5 \lambda$ ;  $d = 0,4 \lambda$ ).

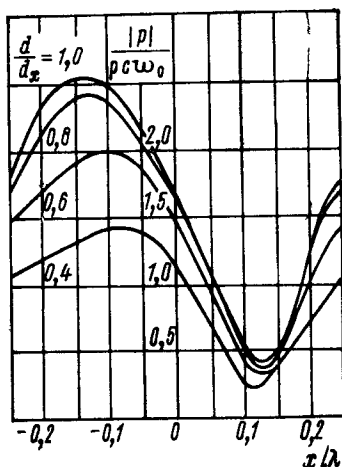


Рис. 77. Модуль давления на поверхности антенны, состоящей из бесконечных полос ( $\theta_0 = 60^\circ$ ,  $d_x = 0,5 \lambda$ ).

В этой формуле символом  $s_s$  обозначена эффективная площадь элемента антенны, определяемая соотношением

$$s_s = \int_s A(x, y) ds. \quad (6.8)$$

Поскольку исходное выражение (6 4) описывает давление, создаваемое всеми элементами антенны, величина  $z_s$ , найденная по формуле (6 7), является полным сопротивлением излучения элемента, т. е. сопротивлением излучения с учетом взаимодействия со всеми остальными элементами антенны.

Для вычисления по формуле (6 7) активного сопротивления излучения, очевидно, можно ограничиться суммированием по таким  $u_n$  и интегрированием по таким  $v$ , чтобы  $u_n^2 + v^2$  было меньше единицы.

Поэтому для вычисления  $r_s$  интегрирование следует производить от  $-\sqrt{1-u_n^2}$  до  $\sqrt{1-u_n^2}$  при  $u_n^2 \leq 1$ , для вычисления же  $x_s$  — от  $-\infty$  до  $-\sqrt{1-u_n^2}$  и от  $\sqrt{1-u_n^2}$  до  $\infty$  при  $u_n^2 \leq 1$  и от  $-\infty$  до  $\infty$  при всех остальных  $u_n$ . Так как сумма по  $n$  появилась в результате интегрирования произведения непрерывной функции на сумму дельта-функций, в тех случаях, когда одна или две дельта-функции совпадают с границей раздела вещественной и мнимой частей подынтегрального выражения (т. е. когда  $u_n = u_0 + n\lambda/d_x = \pm 1$ ), следует половину соответствующего слагаемого отнести к вещественной части, а половину — к мнимой. Учитывая это обстоятельство при записи формул для расчета  $r_s$  и  $x_s$ , после знака суммы можно поставить множитель  $1/\eta_n$ , где

$$\eta_n = \begin{cases} 2 & \text{при } |u_n| = 1, \\ 1 & \text{при } |u_n| \neq 1. \end{cases}$$

Таким образом, активное сопротивление излучения произвольного плоского элемента бесконечной периодической одномерной антенны, заключенной в жесткий экран, можно записать так:

$$r_s = \frac{\rho c s_0^2}{d_x \lambda} \sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\eta_n} \int_{-\sqrt{1-u_n^2}}^{\sqrt{1-u_n^2}} \frac{R^2(u_n, v)}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}} dv. \quad (6.9)$$

Пределы суммирования по  $n$  можно найти, принимая во внимание, что в крайних случаях, т. е. при  $v = 0$  должно выполняться неравенство  $-1 \leq u_n \leq 1$ . Таким образом,  $-1 \leq n\lambda/d_x + u_0 \leq 1$ , откуда

$$n_1 = -E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 + u_0) \right],$$

$$n_2 = E \left[ \frac{d}{\lambda} (1 - u_0) \right].$$

Вернемся к частному случаю прямоугольных элементов с равномерным распределением вдоль оси  $y$  (см рис. 75). Характеристика направленности прямоугольника в координатах  $u, v$  имеет следующий вид:

$$R(u, v) = R(u) \left| \frac{\sin\left(\frac{kh}{2}v\right)}{\frac{kh}{2}v} \right|.$$

При  $h \gg \lambda$  квадрат характеристики направленности обладает свойствами дельта-функции, поэтому из формулы (6.7) имеем

$$z = \frac{\rho c s_0^2}{d_x h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n)}{\sqrt{1-u_n^2}}, \quad (6.10)$$

$$r_s = \frac{\rho c s_3^2}{d_x h} \sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\eta_n} \frac{R^2(u_n)}{\sqrt{1-u_n^2}}. \quad (6.11)$$

В случае  $h \ll \lambda$ , когда прямоугольники вырождаются в отрезки прямых, характеристика направленности для  $|v| < 1$  имеет вид  $R(u, v) = R(u)$ , и вычисляя в формуле (6.9) интеграл по  $v$ , получим

$$r_s = \frac{\rho c s_3^2}{d_x \lambda} \sum_{n_1}^{n_2} \frac{R^2(u_n)}{\eta_n}. \quad (6.12)$$

Если вдоль координаты  $x$  возбуждение каждого элемента антенны равномерно, т. е.  $A(x) = 1$ , то в формулы (6.10), (6.11) (6.12) следует подставить  $s_3 = hd$  и

$$R(u_n) = \left| \frac{\sin\left(\frac{kd}{2} u_n\right)}{\frac{kd}{2} u_n} \right|.$$

После того, как найдено активное сопротивление излучения отдельного элемента антенны с учетом всех взаимодействий, предполагая, что  $r_s$  элемента бесконечной и большой, но конечной антенны одинаковы, можно определить активное сопротивление излучения конечной антенны, состоящей из  $N$  элементов как  $Nr_s$ . Давление же, развиваемое конечной антенной в направлении компенсации, равно  $\rho_0 N$ . Зная эти величины, легко найти коэффициент концентрации одномерной периодической антенны, состоящей из  $N$  элементов.

В общем случае он имеет вид

$$K = \frac{4\pi d_x N}{\lambda} \frac{R^2(u_0, v_0)}{\sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\eta_n} \int_{-\sqrt{1-u_n^2}}^{\sqrt{1-u_n^2}} \frac{R^2(u_n, v)}{\sqrt{1-u_n^2-v^2}} dv}. \quad (6.13)$$

Если элемент антенны прямоугольник и  $A(y) = 1$ , то при  $h \gg \lambda$

$$K = \frac{4\pi d_x h N}{\lambda^2} \frac{R^2(u_0)}{\sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\eta_n} \frac{R^2(u_n)}{\sqrt{1-u_n^2}}} \quad (6.14)$$

и при  $h \ll \lambda$

$$K = \frac{4d_x N}{\lambda} \frac{R^2(u_0)}{\sum_{n_1}^{n_2} \frac{1}{\eta_n} R^2(u_n)}. \quad (6.15)$$

Расчеты коэффициента концентрации по формуле (6.13) затруднены необходимостью вычисления интеграла по  $v$ . Мы привели два

частных случая, когда этот интеграл вычисляется легко. Отметим, что вычисляется он и еще в одном практически интересном случае, а именно, при  $R(u, v) = \cos^r \theta$ , где  $r$  — некоторое целое число. Мы не будем приводить соответствующие формулы, при необходимости их можно найти в [40].

На рис. 78 и 79 представлены рассчитанные по формулам (6.14) и (6.15) относительные изменения коэффициента концентрации антенны в функции от угла компенсации при  $h \gg \lambda$  и  $h \ll \lambda$ . Элементы располагаются без зазоров, т. е.  $d = d_x$  (см. рис. 75).

Зависимость  $K(\theta_0)/K(0)$  ведет себя по-разному в случаях  $h \gg \lambda$  и  $h \ll \lambda$ . В первом случае при  $d/\lambda \leq 0,5$  она совпадает с функцией  $\cos \theta_0$ , во втором (как и для отдельной линии) при  $\theta_0 < 90^\circ$  величина  $K(\theta_0)$  постоянна и удваивается при  $\theta_0 = 90^\circ$ .

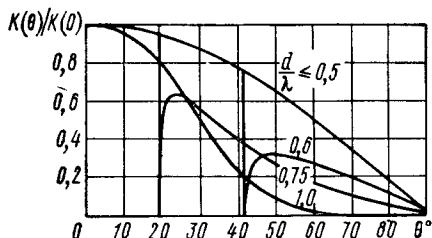


Рис. 78. Зависимость  $K(\theta)/K(0)$  для антенны, состоящей из параллельных полос при  $h \gg \lambda$ ,  $d = d_x$ .

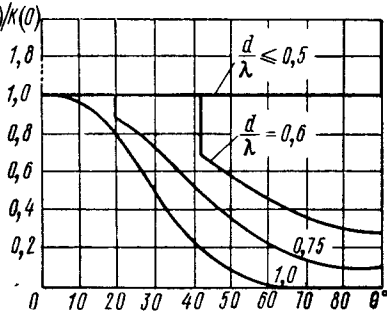


Рис. 79. Зависимость  $K(\theta)/K(0)$  для антенны, состоящей из отрезков ( $h \ll \lambda$ ,  $d = d_x$ ).

**Двухмерные периодические антенны.** Пусть центры одинаковых, но произвольных плоских элементов образуют правильную двухмерную периодическую решетку (рис. 80). Будем предполагать, что элементарная ячейка решетки (рис. 81) представляет собой параллелограмм, стороны которого  $d_x$  и  $\sqrt{d_y^2 + l^2}$ , причем одна сторона параллельна оси  $x$ , а другая составляет с осью  $y$  угол  $\psi$ . Поступая совершенно аналогично тому, как это делалось в случае одномерной решетки, т. е. записывая давление, развиваемое элементом антенны с помощью формулы Гюйгенса, раскладывая сферические волны по плоским и принимая во внимание, что проекции расстояния от точки излучения до точки наблюдения  $x, y, z$  на оси координат равны  $x - \alpha d_x - \beta l - x_{\alpha, \beta}$ ;  $y - \beta d_y - y_{\alpha, \beta}$ ;  $z$  (где  $x_{\alpha, \beta}$ ,  $y_{\alpha, \beta}$  — вспомогательные координаты с началом в центре элемента с номером  $\alpha, \beta$ ), получим

$$p(x, y, z) = \frac{\rho c \omega_0}{\lambda^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{-ik\alpha d_x (u-u_0)} \times \\ \times \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} e^{-ik\beta \frac{d_y}{\cos \psi} (v-v_0)} e^{ik \left[ xu + y \frac{v-u \sin \psi}{\cos \psi} + zB(u, v) \right]} \times$$

$$\times \int_{s_{\alpha, \beta}} A(x_{\alpha, \beta}, y_{\alpha, \beta}) e^{-ik \left[ x_{\alpha, \beta} u + y_{\alpha, \beta} \frac{v - u \sin \psi}{\cos \psi} \right]} ds_{\alpha, \beta} \frac{du dv}{B(u, v) \cos \psi}.$$

В этом выражении введены обозначения:

$$u = \sin \theta \cos \varphi; \quad v = \sin \theta \sin (\varphi + \psi);$$

$$u_0 = \sin \theta_0 \cos \varphi_0; \quad v_0 = \sin \theta_0 \sin (\varphi_0 + \psi);$$

$$B(u, v) = \left[ 1 - \left( \frac{v}{\cos \psi} - \frac{l}{d_y} u \right)^2 - u^2 \right]^{1/2},$$

а при его выводе использованы элементарные соотношения:  $d_y = \cos \psi \sqrt{d_y^2 + l^2}$ ,  $l = d_y \operatorname{tg} \psi$ ,  $B(u, v) = \cos \theta$  и  $\sin \theta \cos \varphi = (v - u \sin \psi) \cos^{-1} \psi$ .

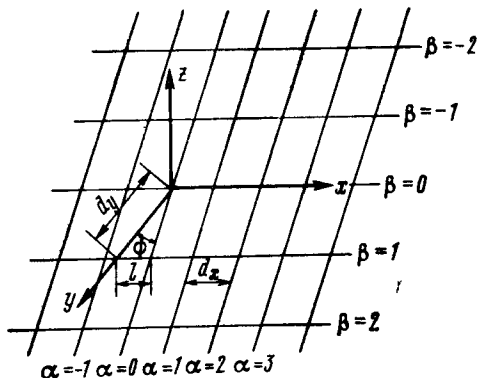


Рис. 80. Расположение центров элементов двухмерной периодической антенны с ячейкой, имеющей вид параллелограмма.

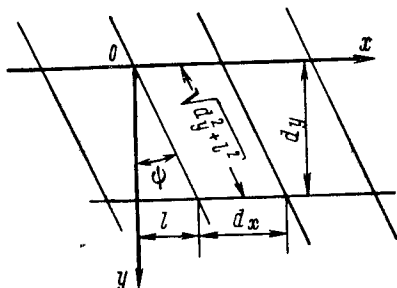


Рис. 81. Элементарная ячейка двухмерной периодической антенны.

Принимая во внимание, что суммы по  $\alpha$  и  $\beta$  представляют собой периодические  $\delta$ -функции, а интеграл по  $s_{\alpha, \beta}$  не зависит от номера элемента, интегралы по  $u$  и  $v$  можно вычислить и в результате получить

$$p(x, y, z) = \frac{i\lambda\omega_0}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik \left[ x u_n + y \frac{v_m - u_n \sin \psi}{\cos \psi} + z B(u_n, v_m) \right]} \times \frac{p'_0(u_n, v_m) r e^{-ikr}}{B(u_n, v_m)}, \quad (6.16)$$

где

$$p'_0(u_n, v_m) = -\frac{ik\rho c}{2\pi r} e^{ikr} \int_s A(x, y) e^{-ik \left( x u_n + y \frac{v_m - u_n \sin \psi}{\cos \psi} \right)} ds;$$

$$u_n = n \frac{\lambda}{d_x} + \sin \theta_0 \cos \varphi_0;$$

$$v_m = m \frac{\lambda}{d_y} \cos \psi + \sin \theta_0 \sin (\varphi_0 + \psi).$$

В случае прямоугольной элементарной решетки  $\psi = 0$ ,  $l = 0$  и мы имеем

$$p(x, y, z) = \frac{i\lambda\omega_0}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ik \left[ xu_n + yv_m + z \sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2} \right]} \times \frac{p'_0(u_n, v_m) r e^{-ikr}}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}}, \quad (6.17)$$

$$\text{где } p'_0(u_n, v_m) = -\frac{ik\rho c}{2\pi r} e^{ikr} \int_s A(x, y) e^{-ik(xu_n - yv_m)} ds;$$

$$u_n = n \frac{\lambda}{d_x} + \sin\theta_0 \cos\varphi_0;$$

$$v_m = m \frac{\lambda}{d_y} + \sin\theta_0 \sin\varphi_0.$$

С помощью формул (6.16) и (6.17) можно определить распределение давлений вблизи поверхности или на самой поверхности многоэлементной двухмерной антенны.

Интегрируя произведение давления на сопряженную колебательную скорость по поверхности элемента, можно получить формулу, определяющую его полное сопротивление излучения.

Если элементарная ячейка решетки имеет вид параллелограмма, то

$$z = \frac{\rho c s_3^2}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{B(u_n, v_m)}, \quad (6.18)$$

и если элементарная ячейка — прямоугольник, то

$$z = \frac{\rho c s_3^2}{d_x d_y} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}}, \quad (6.19)$$

$$\text{где } s_3 = \int_s A(x, y) ds.$$

Рассмотрим физический смысл полученных выражений. Начнем с формул, определяющих давление, развиваемое бесконечной периодической антенной. Заметим, что эти формулы представляют собой разложение поля по плоским волнам с различными волновыми числами. Так же как и при разложении простой сферической волны по плоским [см. формулу (6.3)], в выражении, например, (6.17) присутствуют две группы волн: однородные и неоднородные. Однородные волны соответствуют случаю, когда коэффициент перед координатой  $z$  в показателе экспоненты представляет собой вещественное число, т. е.  $u_n^2 + v_m^2 \leq 1$ . Поскольку  $u_n^2 + v_m^2$  при  $\psi = 0$  равно  $\sin^2 \theta$ , то однородные волны распространяются в переднем полупространстве  $\theta \leq \pi/2$ . Неоднородные же волны, т. е. волны, соответствующие  $u_n^2 + v_m^2 > 1$ , затухают вдоль оси  $z$  и распространяются вдоль поверхности антенны с различными скоростями.

Это утверждение становится очевидным, если вспомнить приведенный выше анализ выражения (6.3). Пространственное распределе-

ние (или пространственный спектр) однородных и неоднородных волн не является непрерывным, как в случае элементарной сферической волны или одиночного излучателя. Связано это с тем, что в случае бесконечной антенны излучение и тех и других волн происходит только в направлениях, соответствующих направлениям единичных максимумов характеристики направленности бесконечной решетки ненаправленных элементов. Действительно, как нетрудно заметить,  $u_n$  и  $v_m$  определяются теми же соотношениями, что и положение единичных максимумов периодической решетки.

Таким образом, формулы (6.16) и (6.17) определяют давление как сумму дискретного набора волн, направления которых (для действительного пространства  $\theta < \frac{\pi}{2}$ ) или скорости (для мнимого пространства, соответствующего  $\theta = \frac{\pi}{2} - i\theta'$  при  $0 < \theta' < \infty$ ) совпадают с направлениями или скоростями распространения волн вдоль единичных максимумов характеристики направленности периодической решетки, ненаправленные элементы которой расположены в центрах реальных. Величина же этих волн пропорциональна давлению, развиваемому отдельным элементом бесконечной антенны, если только это давление рассматривать не только в действительном, но и в мнимом пространстве (т. е. при  $u_n = \sin \theta \cos \varphi > 1$ ).

Структура выражений, определяющих сопротивление излучения элемента бесконечной антенны [см., например, формулу (6.19)], свидетельствует о том, что однородные, уходящие от антенны в бесконечность, волны образуют активное сопротивление излучения, а неоднородные, распространяющиеся с различными скоростями вдоль поверхности антенны — реактивное. Физический смысл формулы (6.19), во всяком случае в части активного сопротивления излучения, очень прост. Вспомним, что активное сопротивление излучения с точностью до постоянных сомножителей определяет мощность, излучаемую антенной, и попытаемся найти ее для случая бесконечной антенны.

Такая антенна излучает только вдоль единичных максимумов решетки ненаправленных элементов, и мощность, излученная вдоль максимума, имеющего номер  $n, m$ , пропорциональна квадрату давления, развиваемого отдельным элементом в этом направлении, т. е. пропорциональна  $R^2(u_n, v_m)$ . Но единичные максимумы характеристики направленности плоской антенны не одинаковы по ширине. Как уже отмечалось выше, их ширина обратно пропорциональна косинусу угла наклона, т. е. выражению  $\cos \theta_{nm} = B(u_n, v_m)$ , или в случае прямоугольной ячейки  $\cos \theta_{nm} = \sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}$ . Таким образом, мощность, излучаемая в дальнее поле единичным максимумом с номером  $nm$ , пропорциональна  $R^2(u_n, v_m) B^{-1}(u_n, v_m)$ . Для определения полной излучаемой мощности следует просуммировать это выражение по всем единичным максимумам решетки, т. е. по всем  $n$  и  $m$ , соответствующим действительному пространству. Эти операции и осуществляются формулами (6.18) и (6.19).



Аналогичный физический смысл имеют и выведенные ранее формулы для одномерной периодической бесконечной антенны, с той лишь разницей, что в случае одномерной антенны единичные максимумы решетки соответствуют в пространстве коническим поверхностям и для определения мощности, излучаемой в каждой такой поверхности, следует производить интегрирование по  $v$ .

Заметим, что если в приведенных выше формулах для определения сопротивления излучения под величиной  $R(u, v)$  понимать характеристику направленности элемента антенны, соответствующую какой-то моде колебаний его поверхности, то можно получить выражения для расчета полного сопротивления излучения элемента для этой моды (см., например, [33]).

Запишем выражение, определяющее коэффициент концентрации большой периодической антенны в предположении, что активное сопротивление излучения ее элемента совпадает с активным сопротивлением излучения элемента аналогичной бесконечной антенны.

В случае ячейки в виде параллелограмма имеем

$$K = \frac{4\pi d_x d_y}{\lambda^2} N \frac{R^2(u_0, v_0)}{\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{R^2(u_n, v_m)}{B(u_n, v_m)}}. \quad (6.20)$$

Для прямоугольной ячейки можно получить такое же выражение, но в этом случае  $B(u_n, v_m) = \sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}$ .

Рассмотрим практически часто встречающуюся ситуацию, когда расстояние между элементами выбрано так, чтобы в рассматриваемом диапазоне изменения направления компенсации в характеристике направленности решетки ненаправленных элементов, располагаемых в центрах реальных, отсутствовали добавочные максимумы, равные основному. При этом в суммах, определяющих активное сопротивление излучения, остается всего одно слагаемое и выражения для определения  $r_s$  и  $K$  приобретают простой вид.

Так, в случае антенны, состоящей из параллельных полос, при  $A(y) = 1$  имеем из формул (6.11) и (6.14):

$$r_s = \frac{\rho c s_0^2}{d_x h} \frac{R^2(u_0)}{\sqrt{1 - u_0^2}} = \frac{\rho c s_0^2}{d_x h} \frac{R^2(\theta_0)}{\cos \theta_0}; \quad (6.21)$$

$$K = \frac{4\pi d_x h N}{\lambda^2} \sqrt{1 - u_0^2} = \frac{4\pi s}{\lambda^2} \cos \theta_0. \quad (6.22)$$

В случае антенны, состоящей из отрезков прямых, из формул (6.12) и (6.15) получим

$$r_s = \frac{\pi \rho c s_0^2}{d_x \lambda} R^2(u_0) = \frac{\pi \rho c s_0^2}{d_x \lambda} R^2(\theta_0); \quad (6.23)$$

$$K = \frac{4 d_x N}{\lambda} = \frac{4H}{\lambda}. \quad (6.24)$$

Для двухмерной антенны независимо от вида элементарной ячейки из выражений (6.18) и (6.20) имеем

$$r_s = \frac{\rho c s_0^2}{d_x d_y} \frac{R^2(u_0, v_0)}{B(u_0, v_0)} = \frac{\rho c s_0^2}{d_x d_y} \frac{R^2(\theta_0, \varphi_0)}{\cos \theta_0}; \quad (6.25)$$

$$K = \frac{4\pi d_x d_y N}{\lambda^2} B(u_0, v_0) = \frac{4\pi s}{\lambda^2} \cos \theta_0. \quad (6.26)$$

Напомним, что в этих формулах  $r_s$  определяет активное сопротивление излучения одного элемента, а  $K$  — коэффициент концентрации антенны, состоящей из  $N$  элементов. При записи выражений для  $K$  мы приняли во внимание, что площадь, занимаемая большой плоской антенной, примерно равна  $d_x h N$  в случае набора полос и  $d_x d_y N$  в случае двухмерной решетки, а длина антенны  $H$ , образованной отрезками прямой, равна  $d_x N$ . Как было выяснено выше (см. § 11), коэффициент концентрации линии длиной  $H$  при  $H \gg \lambda$  равен  $2H/\lambda$ . Формула (6.24) дает значение, вдвое большее в связи с тем, что в рассматриваемом случае антенна находится в жестком экране и излучение происходит в полупространство.

Из формул (6.22), (6.24) и (6.26) следует, что, во-первых, характеристика направленности элемента многоэлементной протяженной антенны в отсутствие равных единице добавочных максимумов характеристики направленности решетки не влияет на величину коэффициента концентрации антенны и, во-вторых, возможные зазоры между элементами также не оказывают влияния на его величину. Эти выводы объясняются тем, что в случае антенны, состоящей из большого числа элементов и имеющей большие относительные размеры, характеристика направленности антенны, а следовательно, и ее коэффициент концентрации не зависят от характеристики направленности элемента и определяются характеристикой направленности решетки ненаправленных элементов, совпадающих с центрами реальных. Интересно также отметить, что из приведенных формул видно, что в рассматриваемом случае зависимость коэффициента концентрации дискретных антенн от угла компенсации такая же, как и для антенн непрерывных.

В случаях, когда расстояние между элементами и величина  $\theta_0$  таковы, что появляются единичные максимумы характеристики направленности аналогичной антенны из ненаправленных элементов, зависимости коэффициента концентрации от  $\theta_0$  имеют уже другой характер. Для двухмерной антенны (так же, как и для набора бесконечных полос — см. рис. 78) наблюдаются провалы до нуля, а для одномерной (см. рис. 79) резкие спады на углах, соответствующих появлению единичных максимумов.

Все приведенные выше формулы справедливы для равномерного амплитудного распределения между элементами антенны. Однако если предположить, что амплитудное распределение имеется, но меняется настолько медленно, что на протяжении области, существенно влияющей на сопротивление излучения элемента, его можно считать постоянным, то можно получить выражения, определяющие  $r_s$  антенны при неравномерном распределении, отличающиеся от приведенных в этом

параграфе наличием множителя  $\sum_{q=1}^N a_q^2$ . Формулы для определения коэффициента концентрации будут отличаться от приведенных тем, что вместо сомножителя  $N$  в них будут стоять сомножитель  $\left| \sum_{q=1}^N a_q \right|^2 \cdot \left( \sum_{q=1}^N a_q^2 \right)^{-1}$  в одномерном случае или  $\left| \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{g=1}^{N_2} a_{q,g} \right|^2 \cdot \left( \sum_{q=1}^{N_1} \sum_{g=1}^{N_2} a_{q,g}^2 \right)^{-1}$  — в двухмерном.

При выводе всех выражений в этом параграфе мы считали колебательную скорость преобразователей заданной и не зависящей от  $z_s$ . Другими словами, мы рассматривали случай работы вне резонанса, и  $R(u, v)$  определяло характеристику направленности элемента при заторможенных остальных преобразователях.

При работе вблизи и на резонансе преобразователей полученные формулы остаются справедливыми, но характеристику направленности всей антенны нельзя определять как произведение характеристик направленности элемента в присутствии других заторможенных элементов на характеристику направленности соответствующей решетки ненаправленных элементов. Как следует из соображений, приведенных при анализе теоремы умножения, в этом случае необходимо учитывать еще один сомножитель — характеристику взаимодействия [формула (2.60)], — имеющий вид

$$R_{вз}(\theta) = \frac{z_m + z(0)}{z_m + z(\theta)},$$

где  $z(0)$  и  $z(\theta)$  — полные сопротивления излучения элемента при компенсации антенны в направлении  $\theta = 0$  и  $\theta$ . Если антенна работает на резонансе механических колебаний преобразователей, то  $z_m \ll z(0)$  и  $z_m \ll z(\theta)$ , поэтому

$$R_{вз}(\theta) = \frac{z(0)}{z(\theta)}.$$

При малых расстояниях между элементами (т. е. при  $d_x \ll \lambda$ ,  $d_y \ll \lambda$ ), как следует из формулы (6.18), величина  $z(\theta)$  пропорциональна  $\cos^{-1} \theta$  и  $R_{вз} = \cos \theta$ . Этот вывод становится очевидным, если принять во внимание, что малый элемент в рассматриваемом случае заключен в мягкий экран, что, естественно, приводит к появлению в характеристике направленности сомножителя  $\cos \theta$ .

## § 19. Конечные плоские антенны

**Решетка ненаправленных элементов.** При анализе параметров антенн, состоящих из ненаправленных элементов, образующих правильную периодическую решетку, обычно наибольшие трудности вызывает расчет их коэффициента концентрации. В соответствии с формулой (4.90) коэффициент концентрации решетки, лежащей в плоскости

$xOy$  и компенсированной в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ , определяется выражением

$$K = \frac{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n a_q a_g \cos [(x_q - x_g) \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + (y_q - y_g) \sin \theta_0 \sin \varphi_0] \frac{\sin kd_{qg}}{kd_{qg}}}, \quad (6.27)$$

где  $d_{qg} = \sqrt{(x_q - x_g)^2 + (y_q - y_g)^2}$ .

При некоторых конкретных амплитудных распределениях и в особенности при равномерном распределении расчет знаменателя выражения (6.27) может быть упрощен путем объединения одинаковых слагаемых. Так, в отсутствие компенсации и при  $a_q = 1$ , коэффициент концентрации прямоугольной периодической решетки, ячейка которой имеет размеры  $d_x$  и  $d_y$ , равен

$$K = \frac{a^2 b^2}{\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{\beta=0}^{b-1} f(\alpha, \beta) (b - \beta)(a - \alpha) \frac{\sin \left[ k \sqrt{d_x^2 \alpha^2 + d_y^2 \beta^2} \right]}{k \sqrt{d_x^2 \alpha^2 + d_y^2 \beta^2}}}, \quad (6.28)$$

где

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha = 0, \beta = 0; \\ 2 & \text{при } \begin{cases} \alpha = 0, \beta > 0; \\ \alpha > 0, \beta = 0; \end{cases} \\ 4 & \text{при } \alpha > 0; \beta > 0; \end{cases}$$

$a$  и  $b$  — число элементов вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно (общее число элементов решетки  $N = ab$ ).

На рис. 82 представлено отношение коэффициента концентрации периодической решетки к числу ее элементов в зависимости от относительного расстояния между элементами при  $d_x = d_y = d$ . На этом же графике штриховой линией показан результат расчета для многоэлементной антенны, полученной с помощью формулы (6.20), имеющей в рассматриваемом случае (т. е. при отсутствии жесткого экрана и при  $R(u_n, v_m) = 1$ ) следующий вид:

$$K = \frac{2\pi d_x d_y}{\lambda^2} N \frac{1}{\operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2}}}}, \quad (6.29)$$

где

$$u_n = n \frac{\lambda}{d_x}; \quad v_m = m \frac{\lambda}{d_y}.$$

Как видно из графика, при  $d/\lambda$ , меньшем некоторой величины, соответствующей появлению единичных добавочных максимумов характеристики направленности, коэффициент концентрации растет про-

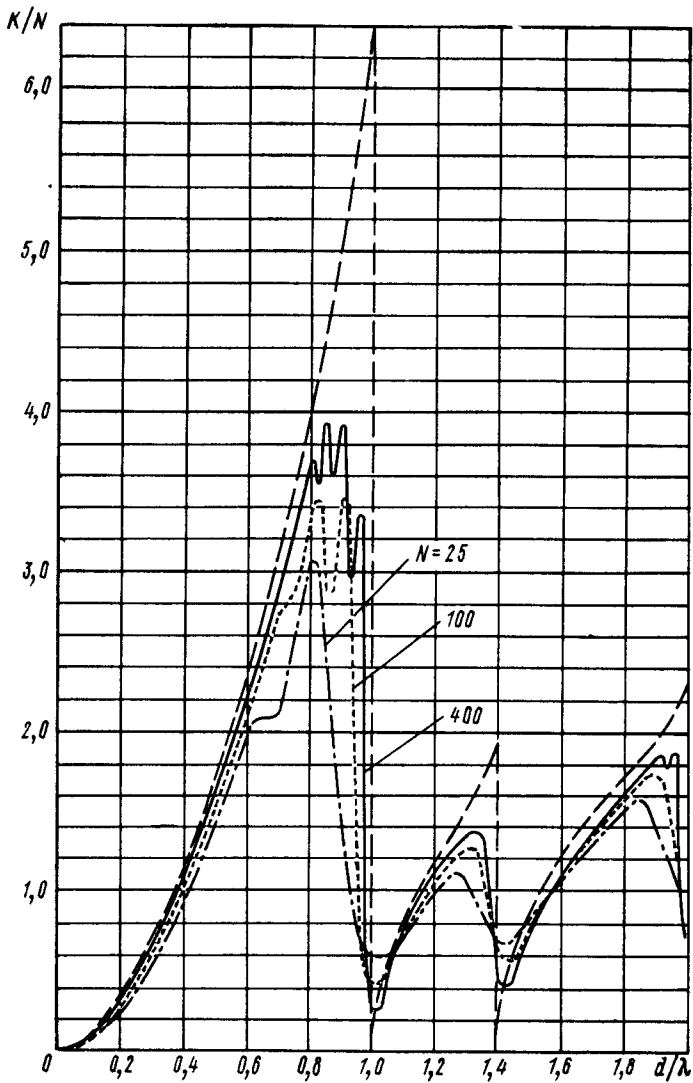


Рис. 82. Зависимость  $K/N$  от  $d/\lambda$  в случае двумерной периодической решетки.

порционально отношению площади антенны к  $\lambda^2$  (как и в случае сплошного поршня). Появление единичных добавочных максимумов вызывает резкое падение  $K$ , после чего его величина снова с ростом  $d/\lambda$  увеличивается. Чем меньше число элементов, тем при меньших  $d/\lambda$  начинается появление единичных максимумов [в соответствии с неравенством (4.80)] и тем раньше начинается падение коэффициента концентрации.

Из анализа кривых рис. 82 следует, что на поведение зависимости  $K/N$  влияет не только появление единичных максимумов, но и предшествующих им дополнительных максимумов, имеющих величину 22% (влияние этих максимумов выражается в наличии небольшой

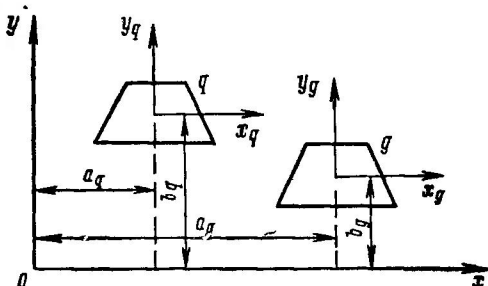


Рис. 83 Расположение элементов на плоскости.

осцилляции рассматриваемой зависимости вблизи максимального значения  $K/N$ ).

Результаты расчета по приближенным формулам наиболее отклоняются от результатов точных расчетов при  $d/\lambda$  (если  $\theta_0, \varphi_0$  — фиксированы) или при  $\theta_0, \varphi_0$  (если задано  $d/\lambda$ ), соответствующих появлению единичных добавочных максимумов. Как видно из рис. 82, в случае  $d/\lambda = 1; 1,41$  и 2 величина коэффициента концентрации, определенная

по формуле (6.29), равна нулю. Объясняется это обстоятельство тем, что выражение (6.29), строго говоря, справедливо для бесконечной антенны, а для нее единичный максимум, лежащий в плоскости  $xOy$ , в бесконечное число раз шире единичного максимума, перпендикулярного плоскости антенны. Поэтому появление максимума, лежащего в плоскости антенны, в бесконечное число раз увеличивает активное сопротивление излучения и приводит к тому, что  $K = 0$ . Разумеется, в случае антенны конечных размеров этого не происходит и коэффициент концентрации существенно отличается от нуля. Ошибку расчета можно значительно уменьшить, если вместо выражения

$\sqrt{1 - u_n^2 - v_m^2} = \cos \theta_{nm}$  в знаменателе формулы (6.29) подставить отношение ширины характеристики направленности единичного максимума с номером  $n, m$  к ширине характеристики направленности единичного максимума, перпендикулярного поверхности антенны. Таким способом можно уточнить приближенные формулы не только для решеток ненаправленных элементов, но и в общем случае.

**Направленные элементы в жестком экране.** Взаимное сопротивление излучения элементов можно определить по формуле (1.17), однако для плоских элементов, находящихся в жестком экране, можно получить выражение, позволяющее глубже понять механизм образования ближнего поля излучения и являющееся при некоторых конфигурациях взаимодействующих элементов более удобным для расчетов.

Рассмотрим поле, создаваемое произвольным плоским элементом антенны, имеющим порядковый номер  $q$ . Подставим в формулу (2.37) разложение сферической волны на плоские (6.3) и получим выражение для давления в произвольной точке  $x, y, z$  (рис. 83), которое может быть названо пространственным спектром излучения

$$p_q(x, y, z) = \frac{\rho c \omega q}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik[(x-a_q) \sin \theta \cos \varphi + (y-b_q) \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta]} \times \\ + \int_{s_q} A(x_q, y_q) e^{-ik[x_q \sin \theta \cos \varphi + y_q \sin \theta \sin \varphi]} ds_q \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6.30)$$

Физический смысл этого выражения станет ясен, если принять во внимание приведенные выше соображения относительно однородных и неоднородных волн, суперпозиция которых может описать поле сферического источника. Сравнение формул (6.30) и (6.3) показывает, что наличие направленности элемента приводит к деформации пространственного спектра точечного источника функцией, пропорциональной характеристике направленности элемента, определенной, однако, не только в действительном, но и в комплексном пространстве (поскольку  $\theta$  принимает значения  $\frac{\pi}{2} - i\theta'$ , где  $\theta'$  — меняется от 0 до  $\infty$ ).

Для того чтобы найти взаимное сопротивление излучения элементов  $q$  и  $g$  в соответствии с соотношением (1.17), следует вычислить интеграл по  $s_q$  от выражения (6.30) по поверхности элемента с номером  $g$ . В частном случае одинаковых и одинаково ориентированных в пространстве элементов, учитывая, что  $x = a_g + x_g$  и  $y = b_g + y_g$  (см. рис. 83), мы получим

$$z_{gq} = \frac{\rho c s_g^2}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ik[(a_g-a_q) \sin \theta \cos \varphi + (b_g-b_q) \sin \theta \sin \varphi]} \times \\ \times R^2(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (6.31)$$

где

$$s_g R(\theta, \varphi) = \int_{s_g} A(x, y) e^{-ik(x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi)} ds.$$

Полное сопротивление излучения антенны, состоящей из одинаковых плоских элементов, определится двойной суммой по всем элементам от  $z_{gq}$ . В частности, если считать что решетка антенны двухмерная бесконечная и периодическая, записывая двойную сумму в бесконечных пределах и воспользовавшись свойством  $\delta$ -функции для вычисления интегралов по  $\theta$  и  $\varphi$ , можно получить приведенное выше выражение (6.18).

Пусть элементы антенны имеют форму круга и распределение  $A(x, y)$  симметрично относительно его центра. Тогда, обозначив рас-

стояние между центрами взаимодействующих элементов символом  $l_{qg}$ , имеем

$$z_{qg} = \frac{\rho c s_3^2}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} \int_0^{2\pi} e^{ikl_{qg} \sin \theta \cos \varphi} R^2(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi \rho c s_3^2}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} J_0(kl_{qg} \sin \theta) R^2(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (6.32)$$

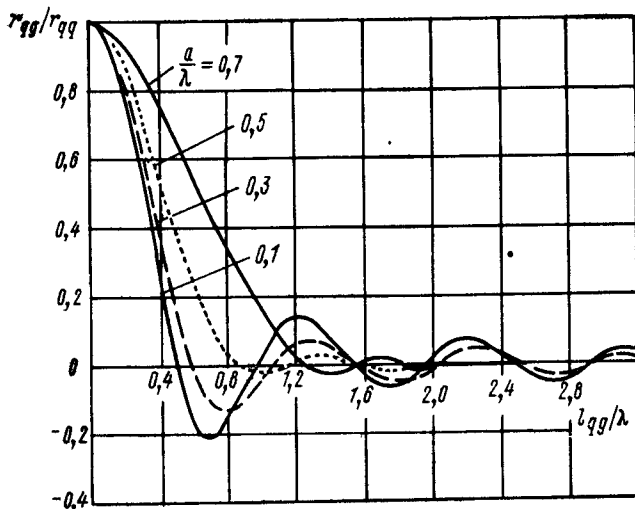


Рис. 84. Зависимость  $r_{qg}/r_{qq}$  от отношения  $l_{qg}/\lambda$  для круглых поршней в жестком экране.

В частном случае круглых поршней с равномерным амплитудным распределением, в соответствии с формулой (5.35), получим

$$z_{qg} = \frac{2\pi^2 \rho c a^4}{\lambda^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} J_0(kl_{qg} \sin \theta) \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta,$$

где  $a$  — радиус поршня.

Интеграл этого выражения вычислен Причардом [67]. Окончательное выражение для  $z_{qg}$  имеет вид

$$z_{qg} = 2\rho c s a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+0,5)}{\pi^{1/2} m! n!} \times$$

$$\times \left( \frac{a}{l_{qg}} \right)^{m+n} J_{m+1}(ka) J_{n+1}(ka) h_{m+n}(kl_{qg}), \quad (6.33)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция;  $h_{m+n}(y)$  — сферическая функция Ганкеля.



На рис. 84 представлена зависимость отнесенного к собственному взаимного активного сопротивления излучения двух плоских круглых поршней от относительного расстояния между ними  $l_{qg}/\lambda$  при различных  $a/\lambda$ . При  $\frac{a}{\lambda} \leq 0,1$  отношение  $r_{qg}/r_{qq}$  ведет себя так же, как и в случае ненаправленных элементов (сравни с рис. 47), начиная же с  $\frac{a}{\lambda} = 0,5$  и при больших  $a/\lambda$  характер зависимости  $r_{qg}/r_{qq}$  от  $l_{qg}/\lambda$  меняется. При  $l_{qg} \approx 2a$  активное взаимное сопротивление излучения примерно равно нулю и при дальнейшем увеличении  $l_{qg}$  несущественно отличается от нуля. Таким образом, если только диаметр поршня равен или больше длины волны, то приближенно можно считать, что полное активное сопротивление излучения антенны, состоящей из таких поршней (если только поршни не накладываются друг на друга), равно сумме собственных. Другими словами, при выполнении этих условий можно считать, что элементы антенны независимы, т. е., что

$$r_s = \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* r_{qg} = \sum_{q=1}^n |A_q|^2 r_{qq}, \quad (6.34)$$

или при равномерном распределении

$$r_s = nr_{qq}.$$

Рассмотрим рис. 85. На нем представлена зависимость отношения коэффициента концентрации антенны, состоящей из 100 элементов ( $10 \times 10$ ) при  $A_q = 1$ , к коэффициенту концентрации плоского поршня в зависимости от относительного расстояния между центрами элементов  $d/\lambda$  ( $d_x = d_y = d$ ). Радиус поршня  $a$  равен  $d/2$  (поршни расположены вплотную друг к другу),  $d/3$  и  $d/4$ . Размеры плоского поршня, с коэффициентом концентрации которого производится сравнение, равны максимальным размерам рассматриваемой антенны, т. е.  $s_{пп} = (9d + 2a)^2$ . Расчет производился по точной формуле, определяющей коэффициент концентрации через взаимные сопротивления излучения элементов антенны. При  $d < 0,8 \lambda$  отношение  $K/K_{пп}$  примерно равно единице, т. е. при  $d < 0,8 \lambda$  зазоры между элементами антенны не снижают ее коэффициента концентрации, который таким образом в рассматриваемом случае определяется не активной, а полной площадью антенны. Напомним, что этот же вывод следует и из формулы (6.26), справедливой для антенны больших относительных размеров при  $d < \lambda$ . Начиная с  $d \approx 1,5 \lambda$ , изменения  $K$  уже несущественны и с ростом  $d/\lambda$  коэффициент концентрации стремится к некоторой постоянной величине. Эту величину легко определить по формуле (3.8), полученной в предположении о независимости элементов антенны. Отношение  $K/K_{пп}$  при этом равно отношению площади

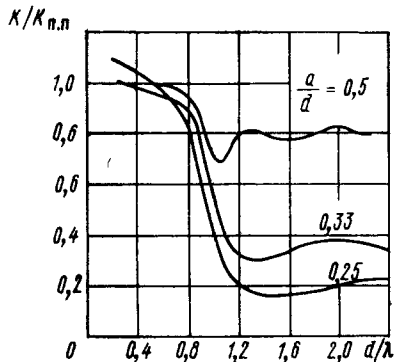


Рис. 85. Отношение  $K/K_{пп}$  для антенны из круглых поршней.

элемента к площади элементарной ячейки  $d^2$ . В случае  $d = 2a$  это отношение равно  $\pi/4 \approx 0,79$ , при  $d = 3a$  отношение  $K/K_{п.п} = \pi/9 = 0,35$  и при  $d = 4a$   $K/K_{п.п} = \pi/16 = 0,2$ . Как видно из рис. 85, к этим же величинам и приближается отношение  $K/K_{п.п}$ , рассчитанное по точной формуле.

Таким образом, если при  $d/\lambda \leq (0,8 \div 0,9)$  коэффициент концентрации определяется общей площадью антенны, то при  $d/\lambda > 1,5$  — площадью антенны за вычетом площади зазоров между элементами, т. е. активной площадью.

На рис. 86 представлена зависимость  $K/K_{п.п}$  от  $d/\lambda$  для антенны, состоящей из 100 элементов ( $10 \times 10$ ) при  $2a = d$ . В первом случае (кривая 1) элементарная ячейка антенны квадратная и  $d_x = d_y = d$ .

Во втором (кривая 2) каждый нечетный ряд элементов сдвинут по отношению к четным на половину шага в одну сторону, так что элементарная ячейка представляет собой параллелограмм со стороной  $d_x$  и высотой  $d_y$  (при этом по-прежнему  $d_x = d_y$ ). И, наконец, в третьем случае (кривая 3) ряды вплотную сдвинуты друг к другу для получения наибольшего заполнения круглыми поршнями плоской поверхности ( $d_x = d$ ;  $d_y = \sqrt{3}d/2$ ).

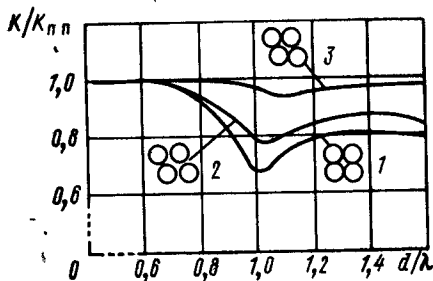


Рис. 86. Зависимость  $K/K_{п.п}$  от  $d/\lambda$  при различном расположении поршней на плоскости.

$\rightarrow \infty$  отношение  $K/K_{п.п}$  стремится к одной и той же величине, равной отношению суммарной площади всех элементов к площади равновеликого плоского поршня, т. е. к 0,79. Однако при  $d/\lambda \approx 1$  кривая 2 идет несколько выше, что связано с тем, что в этом случае появляются два, а не четыре, единичных добавочных максимума. В третьем же случае в пределе при  $d/\lambda \rightarrow \infty$  отношение  $K/K_{п.п}$  стремится к величине  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,91$ .

Мы не будем приводить расчетные зависимости коэффициента концентрации от угла компенсации  $\theta_0$ , но заметим, что начиная с  $a/\lambda = 0,6$  выполняется условие независимости элементов и в соответствии с формулой (3.8)

$$K(\theta_0) = nK_s(\theta_0) = nK_s(0)R_s^2(\theta_0),$$

т. е.

$$\frac{K(\theta_0)}{nK_s(0)} = R_s^2(\theta_0), \quad (6.35)$$

где  $K_s(\theta_0)$  и  $K_s(0)$  — коэффициенты концентрации элемента антенны в направлении  $\theta_0$  и  $\theta = 0$ , а  $R_s(\theta_0)$  — значение характеристики направленности элемента в направлении компенсации антенны.

На первый взгляд этот вывод противоречит формуле (6.20), однако если принять во внимание, что при больших относительных размерах поршней их активное сопротивление излучения не зависит от  $d_x$ ,  $d_y$  и  $\theta_0$ , то становится понятным, что коэффициент концентрации антенны пропорционален квадрату характеристики направленности в направлении  $\theta_0$ . Что же касается формулы (6.20), то в пределе при  $d/\lambda \rightarrow \infty$  двойную сумму в ее знаменателе можно заменить интегралом по пространству и после несложных преобразований привести к виду формулы (6.35).

С помощью полученной выше формулы (6.31) легко определить взаимное сопротивление излучения бесконечных (или весьма протя-

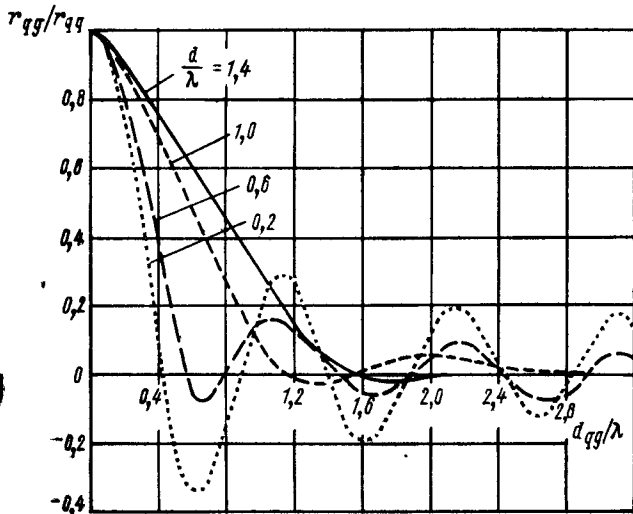


Рис. 87. Зависимость  $r_{qg}/r_{qq}$  от  $d_{qg}/\lambda$  для параллельных полос.

женных) параллельных полос. Пусть  $A(x, y) = A(x)A(y)$  и  $A(y) = 1$ , размеры же полос равны  $h$  и  $d$ , расстояние между их центрами вдоль оси  $x$  —  $d_{qg}$ . Переходя от переменных  $\theta$  и  $\varphi$  к  $u = \sin \theta \cos \varphi$  и  $v = \sin \theta \sin \varphi$  и учитывая, что  $h \gg \lambda$ , получим

$$z_{qg} = \frac{\rho ch}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikd_{qg}u} \left| \int_{-d/2}^{d/2} A(x) e^{-ikxu} dx \right|^2 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (6.36)$$

В частном случае  $A(x) = 1$  интеграл по  $x$  легко вычисляется и

$$z_{qg} = \frac{2\rho chd^2}{\lambda} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}u\right)}{\frac{kd}{2}u} \right]^2 \frac{\cos kd_{qg}u}{\sqrt{1-u^2}} du. \quad (6.37)$$

Это выражение можно было получить и иначе, воспользовавшись формулой Гюйгенса для двухмерного случая и разлагая затем цилиндрические волны по плоским.

Если ширина полосы  $d$  значительно меньше  $\lambda$ , то выражение в квадратных скобках, представляющее собой характеристику направленности линии в перпендикулярной к ней плоскости, равно единице и

$$z_{qg} = \frac{2\rho ch d^2}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\cos kd_{qu}}{\sqrt{1-u^2}} du.$$

Интеграл этого выражения равен  $\frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(kd_{qg})$  и окончательно имеем

$$z_{qg} = \frac{\pi\rho ch d^2}{\lambda} H_0^{(1)}(kd_{qg}). \quad (6.38)$$

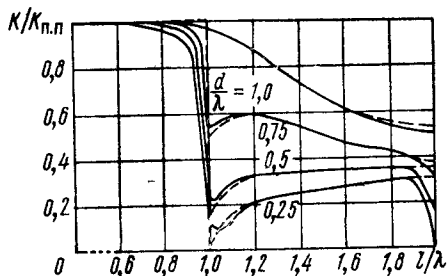


Рис. 88. Зависимость  $K/K_{п.п}$  для антенны, состоящей из двенадцати полос, от относительного расстояния между их центрами.

Эта формула определяет взаимное сопротивление излучения двух узких полосок длиной  $h$ , находящихся в жестком экране. Пусть экран отсутствует. Тогда взаимное сопротивление излучения полосок уменьшается в два раза. Свернем поверхности полосок в цилиндры с радиусами  $r_0$  ( $d = 2\pi r_0$ ). При этом взаимодействующие элементы представляют собой параллельные цилиндры, диаметры которых

значительно меньше длины волны и их  $z_{qg}$  определяется выражением

$$z_{qg} = k\rho ch \pi^2 r_0^2 H_0^{(1)}(kd_{qg}). \quad (6.39)$$

Воспользовавшись этим соотношением, легко найти сопротивление излучения и коэффициент концентрации антенн, состоящих из параллельных отрезков прямых, расположенных не только на плоскости, но и на поверхности прозрачного цилиндра произвольного сечения.

Формулу (6.39) можно получить и другим способом, а именно, непосредственным интегрированием поля, создаваемого одним пульсирующим отрезком на поверхности другого. Для этого следует только знать, что давление, развиваемое таким отрезком, пропорционально  $H_0^{(1)}(kd_{qg})$ .

Интересно заметить, что выражение для активного взаимного сопротивления излучения двух отрезков ( $r_s = k\rho ch \pi^2 r_0^2 J_0(kd_{qg})$ ) можно найти и с помощью метода стационарной фазы.

На рис. 87 представлено отношение активного взаимного сопротивления излучения двух параллельных полос шириной  $d$  к собственному активному сопротивлению излучения одной полосы при изменении относительного расстояния между центрами полос  $d_{qg}/\lambda$ . Расчет производился по формуле (6.37). Видно, что характер изменения  $r_{qg}$  при

увеличении  $d_{gg}/\lambda$  и  $d/\lambda$  качественно такой же, как и для круглых поршней (см. рис. 84), однако в случае полос осцилляции имеют большую величину.

Зная активные взаимные сопротивления излучения, можно вычислить и коэффициент концентрации антенны, состоящей из прямоугольных полос.

Отношение коэффициента концентрации такой антенны к коэффициенту концентрации равновеликого плоского поршня в функции от относительного расстояния между центрами элементов  $l$  для антенны, состоящей из двадцати элементов, представлено на рис. 88 сплошными линиями. Штриховыми линиями показан результат расчета по приближенной формуле (6.14). Из этих графиков видно, что приближенная формула дает хорошее приближение к точной величине, если только  $l/\lambda$  не близко к 1, 2 и т. д.

Мы рассмотрели взаимодействие простейших излучающих элементов в плоском жестком экране. В случае других, более сложных конфигураций элементов расчетные выражения имеют очень громоздкий вид. Так, взаимодействие прямоугольных поршней при произвольном соотношении сторон [54] не удастся выразить в замкнутом виде через табулированные функции.

## § 20. Цилиндрические антенны

**Расчетные соотношения.** Давление, развиваемое в дальнем поле круговой цилиндрической дискретной антенной, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных на  $n$  дугах, по  $2s + 1$  элементу в каждой, может быть записано следующим образом:

$$p(\theta, \varphi) = -\frac{ik\rho c\omega_0}{4\pi r} e^{ikr} \sum_{q=1}^m \sum_{g=-s}^s A_{qg} \times \\ \times e^{-ik[R \sin \theta \cos \varphi \cos g\delta + R \sin \theta \sin \varphi \sin g\delta + d_2 \cos \theta]}, \quad (6.40)$$

где  $R$  — радиус цилиндрической поверхности;  $\delta$  — центральный угол между двумя соседними элементами на каждой дуге;  $d_2$  — расстояние между соседними дугами.

Как и раньше, при анализе направленных непрерывных цилиндрических антенн положение точки наблюдения определяется в сферической системе координат  $\theta, \varphi$ , причем угол  $\theta$  отсчитывается от оси цилиндра. В этом выражении суммы по  $q$  и  $g$  разделяются и, кроме того, одна из них представляет собой сумму членов геометрической прогрессии и легко вычисляется. В результате  $p(\theta, \varphi)$  можно выразить через произведение характеристик направленности эквидистантной решетки и набора ненаправленных элементов, расположенных на дуге окружности. Поскольку соответствующие характеристики рассматривались нами ранее, на этом случае мы останавливаться не будем.

Если элемент плоский или поверхность его обладает несущественной кривизной, то можно считать, что он является частью поверхности цилиндрической антенны и воспользоваться известным реше-

нием об излучении части цилиндрической бесконечной поверхности [62]. Пусть угловой размер элемента  $2\psi_0$ , высота  $h$  и распределение колебательной скорости по его поверхности равномерно. Тогда давление, развиваемое элементом в любой точке пространства и в дальнем поле, определится выражениями (5.55) и (5.56) соответственно (в этих формулах следует только заменить  $H$  на  $h$ ). При выводе указанных формул принималось, что центр элемента имеет координаты  $x = R$ ,  $y = z = 0$ . Если же для элемента с номером  $qg$  координаты центра определяются равенствами  $x = R \cos g\delta$ ;  $y = R \sin g\delta$ ;  $z = qd_z$ , то, как легко показать,

$$p_{qg}(r, z, \varphi) = \frac{ik\rho ch\omega qg}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\psi_0 \cos m(\varphi - g\delta)}{m\eta_m} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(r\sqrt{k^2 - \gamma^2})}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_m^{(1)'}(R\sqrt{k^2 - \gamma^2})} \cdot \frac{\sin\left(\gamma \frac{h}{2}\right)}{\gamma \frac{h}{2}} e^{i\gamma(z - qd_z)} d\gamma, \quad (6.41)$$

а в дальнем поле

$$p_{qg}(\theta, \varphi) = \frac{2\rho ch\omega qg}{r\pi^2} e^{ik(r - qd_z \cos \theta)} \frac{1}{\sin \theta} \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{kh}{2} \cos \theta\right)}{\frac{kh}{2} \cos \theta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin m\psi_0 \cos m(\varphi - g\delta)}{H_m^{(1)'}(kR \sin \theta)} e^{-i\frac{\pi m}{2}}. \quad (6.42)$$

Поскольку эти выражения записаны относительно общего для всех элементов антенны начала координат, то для нахождения давления, развиваемого всей антенной, следует взять сумму по  $q$  и  $g$ , а разность хода лучей от центров элементов до точки наблюдения учитывать не надо. Таким образом, определить давление, а далее и характеристику направленности можно исходя из соотношения

$$p(\theta, \varphi) = \sum_{q=1}^m \sum_{g=-s}^s A_{qg} p'_{qg}(\theta, \varphi). \quad (6.43)$$

При компенсации антенны в направлении  $\theta_0, \varphi_0$ , как и в выражении (6.40), следует положить  $\alpha_{qg} = kR \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \cos g\delta + + kR \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \sin g\delta + qd_z \cos \theta_0$ . Если направление компенсации совпадает с центром симметрии рабочего сектора, то  $\varphi_0 = 0$  и приведенная формула несколько упрощается.

Определим взаимное сопротивление излучения двух элементов антенны. Для упрощения выкладок будем предполагать, что центр одного из них (имеющего номер 00) лежит на оси  $x$ . В соответствии с формулой (1.17), для определения  $z_{00, qg}$  следует вычислить интеграл от

давления  $p'_{00}$ , развиваемого одним из элементов при единичной колебательной скорости, по поверхности другого элемента, т. е.

$$z_{00, qg} = \int_{g\delta - \psi_0}^{g\delta + \psi_0} \int_{qd_z - \frac{h}{2}}^{qd_z + \frac{h}{2}} p'_{00}(r, z, \varphi) R dz d\varphi.$$

Учитывая соотношения

$$\int_{g\delta - \psi_0}^{g\delta + \psi_0} \cos m\varphi d\varphi = \frac{2 \sin m\psi_0 \cos mg\delta}{m}$$

и

$$\int_{qd_z - \frac{h}{2}}^{qd_z + \frac{h}{2}} e^{i\gamma z} dz = h e^{-i\gamma qd_z} \frac{\sin \gamma \frac{h}{2}}{\gamma \frac{h}{2}},$$

получим

$$z_{00, qg} = i \frac{4k\rho ch^2 R}{\pi^2} \int_0^\infty \left[ \frac{\sin\left(\gamma \frac{h}{2}\right)}{\gamma \frac{h}{2}} \right]^2 \sum_{m=0}^\infty \frac{\sin^2 m\psi_0 \cos mg\delta}{m^2 \eta m} \times \\ \times \frac{H_m^{(1)}(R \sqrt{k^2 - \gamma^2})}{\sqrt{k^2 - \gamma^2} H_m^{(1)'}(R \sqrt{k^2 - \gamma^2})} \cos \gamma qd_z d\gamma. \quad (6.44)$$

При записи этого выражения принято во внимание, что во все сомножители, кроме  $e^{i\gamma qd_z}$ , переменная  $\gamma$  входит четным образом и поэтому интеграл от  $-\infty$  до  $\infty$  заменен удвоенным интегралом от 0 до  $\infty$ .

Учитывая известную связь между функцией Ганкеля и ее производной  $H_m^{(1)'}(z) = 0,5 [H_{m-1}^{(1)}(z) - H_{m+1}^{(1)}(z)]$  и соотношение  $H_m^{(1)}(iz) = \frac{2}{\pi} i^{-m-1} K_m(z)$  (где  $K_m(z)$  — модифицированная функция Бесселя второго рода), можно показать (так, как это сделано в работе [68]), что величина интеграла от  $k$  до  $\infty$  (с учетом сомножителя  $i$ ) является величиной мнимой. Поэтому для определения активной составляющей сопротивления излучения можно ограничиться интегрированием от нуля до  $k$ . Умножая числитель и знаменатель подынтегрального выражения на величину, сопряженную знаменателю, и воспользовавшись известными выражениями  $H_m^{(1)}(z) = J_m(z) + iN_m(z)$  и

$N_{m-1}(z)J_m(z) - N_m(z)J_{m-1}(z) = \frac{2}{\pi z}$ , получим

$$r_{00, qg} = \frac{8k\rho ch^2}{\pi^3} \int_0^k \left( \frac{\sin \gamma \frac{h}{2}}{\gamma \frac{h}{2}} \right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0 \cos mg\delta \cos \gamma qd_z}{(k^2 - \gamma^2)^2 m^2 \eta_m |H_m^{(1)'}(R\sqrt{k^2 - \gamma^2})|^2} d\gamma. \quad (6.45)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть взаимодействующие элементы представляют собой кольца, расположенные на бесконечном жестком

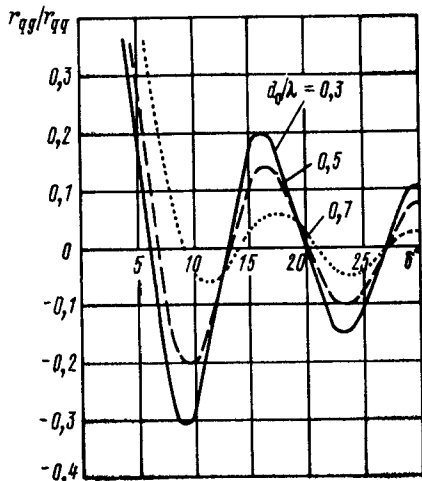


Рис. 89. Зависимость  $r_{qg}/r_{qq}$  от  $\delta$ .

цилиндре. Расстояние между центрами колец равно  $d_{qg}$ , ширина колец  $h$ , а длина их окружности  $H = 2\pi R$ . При этом  $\psi_0 = \pi$ , и в суммах по  $m$  выражений (6.44) и (6.45) остается только один член и эти выражения приводятся к виду, полученному ранее в работе [68]. Если же диаметр цилиндра значительно больше длины волны, то, воспользовавшись асимптотическим представлением функции Ганкеля, можно показать (как это и следовало ожидать), что формула (6.44) после подстановки  $\gamma = ki$  переходит в формулу (6.37), определяющую взаимное сопротивление излучения протяженных полос в жестком экране. Рассматривая другой предельный случай  $kR \rightarrow 0$ , можно получить взаимное сопро-

тивление излучения отрезков, лежащих на одной линии, активную составляющую которого мы определили выше другим способом [формула (4.96)].

Выражения (6.44) и (6.45) позволяют найти и взаимное сопротивление излучения полос, имеющих угловую ширину  $2\psi_0$  и вытянутых вдоль оси  $z$  так, что  $h \gg \lambda$ . Воспользовавшись, как это уже неоднократно делалось выше, тем, что при  $h/\lambda \rightarrow \infty$  квадрат первого сомножителя подынтегрального выражения пропорционален  $\delta$ -функции, получим

$$z_{0, g} = \frac{4i\rho ch R}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0 \cos mg\delta H_m^{(1)}(kR)}{m^2 \eta_m H_m^{(1)'}(kR)}; \quad (6.46)$$

и

$$r_{0, g} = \frac{4\rho ch \lambda}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin^2 m\psi_0 \cos mg\delta}{m^2 \eta_m |H_m^{(1)'}(kR)|^2}. \quad (6.47)$$



Заметим, что эти выражения можно получить и проще, интегрируя давление, развиваемое одной полосой, лежащей на цилиндре (найденное в работе [271]), по поверхности другой полосы.

**Некоторые результаты расчетов.** На рис. 89 представлены активные взаимные, отнесенные к собственным, сопротивления излучения полос шириною  $d_0 = 0,3 \lambda$ ;  $0,5 \lambda$  и  $0,7 \lambda$ , расположенных на цилиндре при  $kR = 25$  в функции углового расстояния между центрами полос  $\delta$ . Уровень осцилляций возрастает с уменьшением  $d_0/\lambda$ , что легко объяснить тем, что при большой ширине полос взаимодействие должно уменьшаться, а при малых  $d_0/\lambda$  рассматриваемое отношение должно приближаться к функции  $J_0(kR\delta)$ , определяющей в соответствии с выражением (6.39) активное взаимодействие параллельных линий. Интересно заметить, что для рассматриваемого  $kR$  элементы располагаются вплотную в случае  $d_0/\lambda = 0,3$  при  $\delta = 4,5^\circ$ , в случае  $d_0 = 0,5 \lambda$  при  $\delta = 7,2^\circ$  и в случае  $d_0 = 0,7 \lambda$  при  $\delta = 12^\circ$ . Таким образом, активное взаимодействие соседних элементов при расположении элементов антенны без зазоров положительно при  $d_0 < 0,5 \lambda$  и отрицательно при  $d_0 > 0,5 \lambda$ . Очевидно поэтому отношение суммы вносимых сопротивлений излучения всех элементов компенсированной антенны к сумме собственных, как показывает расчет, положительно при  $d_0 \approx 0,3 \lambda$ , равно нулю примерно при  $d = 0,5 \lambda$  и далее отрицательно вплоть до  $d_0 = 0,7 \lambda$ . Если  $d_0 > 0,5 \lambda$ , то это отношение составляет по абсолютной величине менее 7%, а при  $d_0 < 0,5 \lambda$  может быть существенным и равняться 40% при  $d_0 = 0,3 \lambda$ . Это означает, что с практически достаточной во многих случаях точностью при определении полного активного сопротивления излучения можно не учитывать вносимые, если только  $d_0 = d > (0,4 \div 0,5) \lambda$  (где  $d$  — расстояние между центрами соседних элементов).

Рассмотрим некоторые результаты расчетов зависимости коэффициента концентрации компенсированной круговой цилиндрической антенны от величины рабочего сектора, величины элементов и др. Коэффициент концентрации может быть вычислен по формуле

$$K = \frac{4\pi r^2}{\rho c |w_{0,0}|^2} \cdot \frac{\left| \sum_{q=1}^m \sum_{g=-s}^s A_{qg} p_{qg}(\theta_0, \varphi_0) \right|^2}{\sum_{q=1}^m \sum_{q'=1}^m \sum_{g=-s}^s \sum_{g'=-s}^s A_{qg} A_{q'g'}^* r_{qg, q'g'}}, \quad (6.48)$$

где  $p_{qg}(\theta, \varphi)$  и  $r_{qg, q'g'}$  — выражения, определяемые формулами (6.42) и (6.45). Если распределение вдоль образующей отсутствует, можно

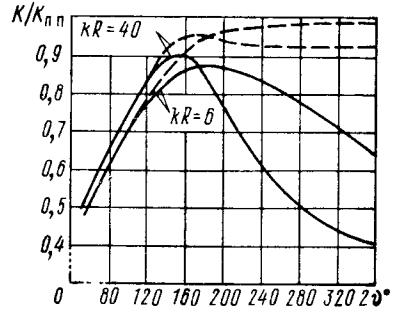


Рис. 90. Зависимость  $K/K_{пн}$  от величины рабочего сектора цилиндрической антенны.

полагать в формуле (6.48)  $m = 1$  и  $r_g, g'$  определять из соотношения (6.47). При этом в числителе останется квадрат модуля одинарной суммы, а в знаменателе четверная сумма заменится двойной, что существенно упростит вычисления.

На рис. 90 представлена зависимость отношения  $K/K_{п.п}$  ( $K_{п.п}$  — коэффициент концентрации плоского поршня, совпадающего с диаметральной сечением антенны) от величины рабочего сектора  $2\theta = (2s + 1)\delta$ . Компенсация антенны производилась с учетом дифракции (т. е. аргумент коэффициента возбуждения выбирался равным абсолютной величине аргумента поля, создаваемого элементом антенны в направлении компенсации, с обратным знаком). Заметим, что при

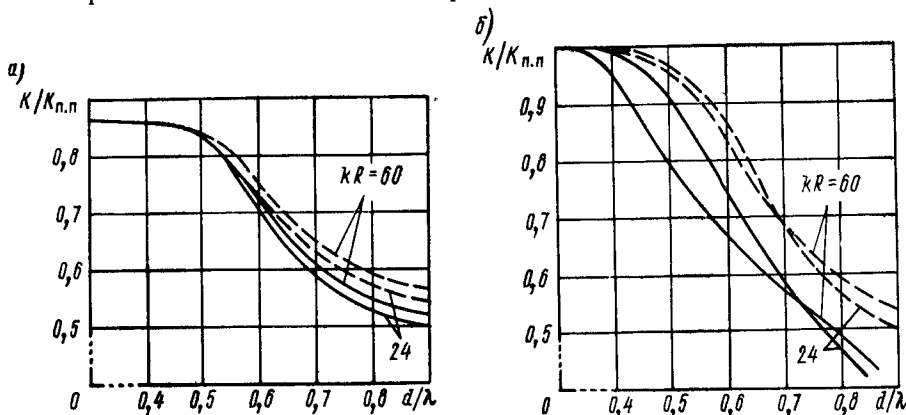


Рис. 91. Зависимость  $K/K_{п.п}$  от  $d/\lambda$   
 а —  $2\theta = 120^\circ$ ; б —  $2\theta = 180^\circ$ .

$2\theta < 180^\circ$  отличие между компенсацией с учетом дифракции и компенсации геометрической разности хода лучей практически отсутствует, но при  $2\theta > 180^\circ$  оно весьма заметно. В качестве амплитудного распределения рассматривалось два: одно из них равномерное (сплошные линии), а другое (штриховые линии) соответствовало оптимальному возбуждению при условии отсутствия взаимодействия элементов [см. выражение (3.11)]. Из этого графика (рассчитанного для случая  $d = d_0 = 0,5 \lambda$ ) видно, что коэффициент концентрации цилиндрической антенны имеет максимальную величину при угле раскрытия рабочего сектора  $2\theta = 130 \div 170^\circ$ , причем чем больше  $kR$ , тем меньше эта величина; амплитудное распределение, оптимальное в предположении независимости элементов антенны, увеличивает коэффициент концентрации тем больше, чем больше  $2\theta$  и  $kR$ . Кроме указанного распределения рассматривалось также распределение вида  $\cos \delta g$ , причем при  $2\theta < 180^\circ$  результаты расчета  $K$  для обоих распределений практически одинаковы.

Относительная зависимость коэффициента концентрации от  $d/\lambda$  при  $d = d_0$  представлена на рис. 91. С ростом  $d/\lambda$ , начиная с  $d/\lambda \approx 0,5$  в случае  $2\theta = 120^\circ$  и  $d/\lambda \approx 0,4$  в случае  $2\theta = 180^\circ$ , величина  $K/K_{п.п}$  начинает падать и при  $d/\lambda = 0,9$  приближается к значению, равному

0,5. Сплошные линии соответствуют равномерному амплитудному распределению, штриховые — распределению вида  $a_g = \cos \delta g$ . На рис. 92 показано относительное изменение коэффициента концентрации цилиндрической компенсированной антенны в функции от  $f/f_0$ , где  $f_0$  — частота, для которой отношение  $d/\lambda_0$  равно 0,3; 0,5 и 0,7. На этом графике  $k_0 R = 60$ ;  $d = d_0$ ;  $2\theta = 120^\circ$ . Сплошные и штриховые линии соответствуют тем же распределениям, что и на предыдущем рисунке.

Рассмотрим, как сказывается падение коэффициента концентрации с ростом  $d/\lambda$  на характеристике направленности антенны в плоскости направляющей.

На рис. 93 показаны характеристики направленности при  $kR = 25$  и  $2\theta = 120^\circ$  ( $d_0 = d$ ). С ростом  $d/\lambda$  основной максимум остается практически без изменений, первые добавочные даже снижаются, но вырастает широкий лепесток (ореол) в районе  $80 - 140^\circ$ , который и является причиной уменьшения отношения  $K/K_{п.п.}$ . При распределении  $a_g = \cos \delta g$  (штриховые линии) и добавочные максимумы и ореол имеют несколько меньшую величину, чем при равномерном распределении (сплошные линии).

Объяснить наличие ореола можно следующим образом. Мысленно заменим участки на краях рабочего сектора антенны (примерно от  $30^\circ$  до  $60^\circ$  с каждой стороны сектора) эквидистантными решетками, касательными к середине рассматриваемых участков. Эти решетки компенсированы в направлении оси симметрии сектора  $\psi = 0$  и поэтому при  $d/\lambda \approx 0,5$  и более их характеристики направленности имеют частично или целиком добавочный максимум равный основному. При небольшом числе элементов на антенне часть этого максимума появляется еще и при  $d/\lambda < 0,5$ , но с ростом  $d/\lambda$  он увеличивается, приближаясь к единице и передвигаясь от направления, совпадающего с осью решетки (т. е. в нашем случае от направления  $\varphi \approx 135^\circ$ ) в сторону меньших  $\varphi$ . Поскольку на самом деле в этом секторе элементы расположены не на прямой, а на дуге, присутствует направленность элемента, да и число элементов на рассматриваемом участке меньше общего числа элементов на антенне, ореол не достигает величины, равной единице. Однако он достаточно широк и поэтому существенно снижает отношение  $K/K_{п.п.}$ .

Заметим, что аналогичный ореол наблюдается и в случае прозрачной компенсированной дуги, на которой расположены ненаправленные элементы (см. рис. 56). Больше того, и вид характеристик направленности рассматриваемых антенн в области углов примерно до  $120^\circ$  почти одинаков. Это обстоятельство свидетельствует о том, что вид

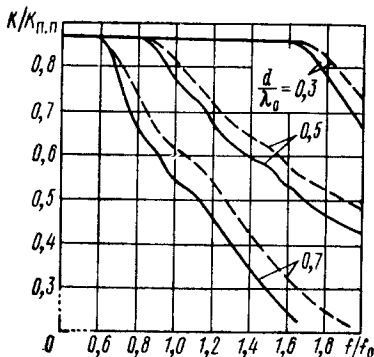


Рис. 92. Зависимость  $K/K_{п.п.}$  от  $f/f_0$  при  $k_0 R = 60$ ,  $d = d_0$ .

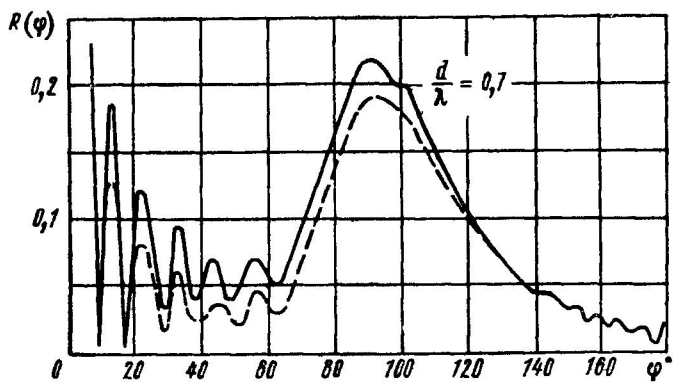
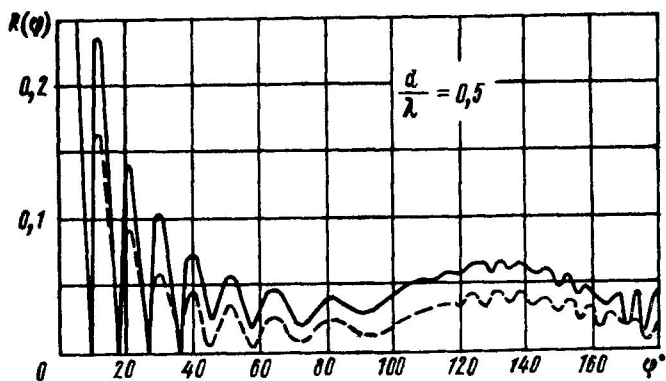
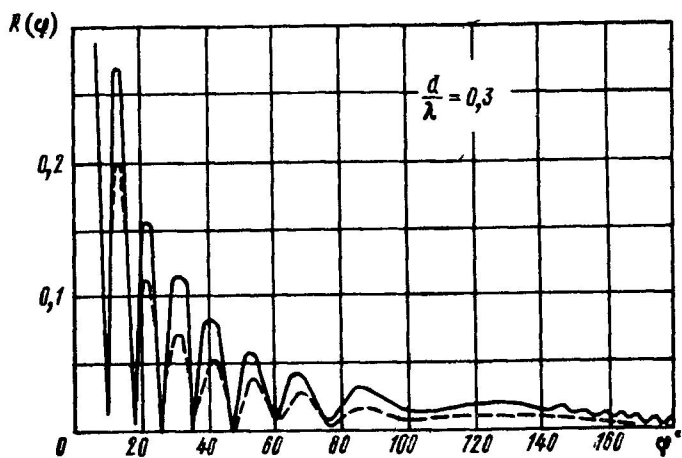


Рис. 93. Характеристики направленности компенсированного цилиндра.

характеристики направленности элемента меньше влияет на характеристику направленности антенны в переднем полупространстве, чем, например, расстояние между элементами или величина  $kR$ .

Из приведенного объяснения и результатов некоторых расчетов следует, что замедленный рост коэффициента концентрации при увеличении  $d/\lambda$  ( $d = d_0$ ) вызывается в первую очередь ростом относительного расстояния между центрами элементов ( $d/\lambda$ ) и в значительно меньшей степени — обострением характеристики направленности элемента, обусловленным увеличением  $d_0/\lambda$ . В некоторых случаях при изменении  $d_0/\lambda$  от 0,25 до 0,75 наблюдается даже небольшое возрастание  $K/K_{п.п.}$

Мы не будем подробно рассматривать случай компенсации цилиндрической антенны в направлении, отличном от  $\theta = \pi/2$ , и только коротко остановимся на некоторых качественных результатах. При расстояниях между элементами антенны вдоль образующей ( $d_z$ ), меньших  $0,5 \lambda$ , ее дискретность не имеет существенного значения и с отклонением направления компенсации от плоскости  $\theta = \pi/2$  на угол  $\beta$  коэффициент концентрации при сравнительно больших  $kR$  уменьшается по закону  $\cos \beta$  вплоть до углов  $\beta = 60 \div 70^\circ$ . Сложнее обстоит дело при  $d_z/\lambda > 0,5$  и, например, равном 1; 1,5. В этом случае появляются единичные добавочные максимумы характеристики направленности образующей, существенно ухудшающие характеристику направленности всей антенны и уменьшающие ее коэффициент концентрации. При большом расстоянии между центрами элементов  $d_z$  и сравнительно острой характеристике направленности  $R(\beta)$  элемента в плоскости образующей можно приближенно считать, что отдельные параллельные пояса антенны независимы между собой и с увеличением угла компенсации  $\beta$  коэффициент концентрации падает пропорционально  $R^2(\beta)$ .

Точный расчет коэффициента концентрации цилиндрической антенны при компенсации ее в плоскости образующей весьма сложен, поэтому для инженерных оценок целесообразно пользоваться приближенной формулой (3.59), выведенной для антенны, являющейся частью бесконечной периодической излучающей структуры.

Если на поверхности цилиндра элементы в виде прямоугольников располагаются вплотную без зазоров, а амплитудно-фазовое распределение отсутствует, то в плоскости направляющей характеристика направленности имеет вид  $R(\varphi) = 1$ . Если же между элементами есть зазоры, то характеристика направленности искажается, на ней появляются провалы и подъемы. Рассмотрим некоторые результаты расчетов таких характеристик направленности, произведенные в соответствии с формулами (6.42) и (6.43) при  $kR = 10; 25$  и 50. Пусть  $l$  обозначает расстояние между центрами соседних полос вдоль окружности основания цилиндра, а  $d$  — ширину полосы.

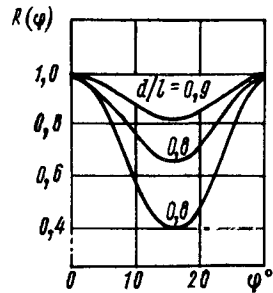


Рис. 94. Участок характеристики направленности при  $kR = 10$ ;  $l/\lambda = 0,8$ .

При  $l/\lambda = 0,6$  даже при сравнительно больших зазорах ( $d/l = 0,6$ ) при  $kR = 25$  и  $kR = 50$  неравномерность характеристики направленности не проявляется; при  $kR = 10$  она составляет  $\sim 2\%$ . При  $l/\lambda = 0,8$  неравномерность существенно возрастает и для  $kR = 10$  и  $d/l = 0,6$  провалы достигают 40% (рис. 94); при  $kR = 25$  она меньше

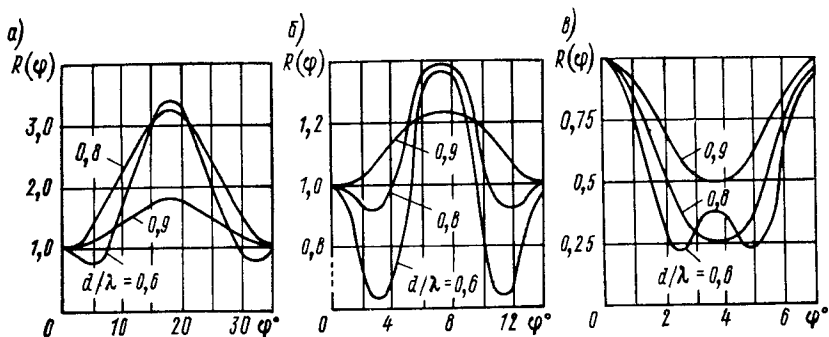


Рис. 95. Участки характеристики направленности некомпенсированного цилиндра при  $l/\lambda = 1$ :

а —  $kR = 10$ , б —  $kR = 25$ , в —  $kR = 50$

и составляет 3, 6 и 11% соответственно для  $d/l = 0,9, 0,8; 0,6$ . Таким образом, неравномерность характеристики направленности увеличивается с ростом  $l/\lambda$  и уменьшается с ростом  $kR$  и  $d/l$ . На рис. 95 представлены участки характеристики направленности, соответствующие одному периоду расположения полос на цилиндре (и соответственно одному периоду неравномерности  $R(\varphi)$ ) в случае  $l/\lambda = 1$ . Видно, что при таком расстоянии между центрами соседних полос даже небольшой зазор, составляющий 10% от  $l$ , приводит к существенной неравномерности. Интересно отметить, что напротив центра элемента ( $\varphi = 0$ ) может быть как провал, так и подъем величины  $R(\varphi)$ . На графиках рис. 94 и 95 функции  $R(\varphi)$  нормированы в направлении  $\varphi = 0$ .

## ГЛАВА 7

### НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ТИПЫ АНТЕНН

#### § 21. Фокусирующие и рупорные антенны

Электромагнитные и акустические поля описываются дифференциальным уравнением одного и того же вида, так называемым волновым уравнением. Это обстоятельство приводит к некоторым аналогиям между электромагнитными и акустическими явлениями и позволяет, в частности, распространять принципы построения электромагнитных приборов на акустические, и наоборот.

В акустике известен ряд антенн, принцип формирования характеристик направленности которых аналогичен соответствующим принципам оптических приборов. К таким антеннам в первую очередь относятся фокусирующие — линзовые и рефлекторные антенны. История создания таких антенн, а также некоторые основные физические явления, связанные с их использованием, описаны в монографии [31]. Одна из первых работ, посвященных теории рефлекторных антенн, принадлежит Л. Я. Гутину [12].

Мы рассмотрим только наиболее характерный случай использования фокусирующих антенн, а именно — рефлекторную антенну с отражателем в виде параболоида вращения.

**Рефлекторная антенна с параболическим отражателем.** Пусть в фокусе параболоида вращения с углом раскрыва  $\alpha_0$  помещен облучатель (рис. 96), характеристика направленности которого  $R(\alpha)$  развернута в направлении на вершину параболоида. По аналогии с электромагнитными антеннами акустические и гидроакустические фокусирующие антенны могут быть рассчитаны с помощью поверхностного или апертурного методов.

Сущность этих методов сводится к тому, что вначале определяется поле либо на поверхности фокусирующей антенны, либо в ее апертуре (раскрыве), а потом уже вычисляется поле, создаваемое антенной. И первая и вторая из указанных предварительных операций являются приближенными, и погрешность их тем меньше, чем больше относительные размеры антенны.

Найдем поле, создаваемое облучателем в раскрыве параболического зеркала. Если  $p_0$  — давление, развиваемое облучателем вдоль оси на расстоянии  $F$  в свободном пространстве, то давление на некотором другом расстоянии  $r$  равно

$$p(\alpha, r) = \frac{p_0 F}{r} e^{ik(r-F)} R(\alpha). \quad (7.1)$$

Различные лучи, исходящие из облучателя под разными углами, до попадания их на рефлектор проходят различные расстояния, поэтому давление в разных точках рефлектора будет различным. Отражаясь от рефлектора в соответствии с законами геометрической акустики, лучи идут параллельно оси симметрии параболоида вращения и образуют в раскрыве плоский фронт; при этом амплитуда давления вдоль луча остается постоянной. Поэтому модуль распределения давления в раскрыве рефлектора имеет следующий вид

$$p(y) = \frac{p_0 F}{l} R(\alpha),$$

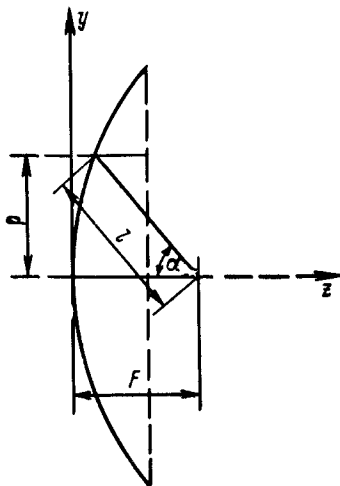


Рис. 96. Геометрия параболического отражателя

где в соответствии с уравнением параболы в полярной системе координат  $l = \frac{2F}{1 + \cos \alpha}$  ( $F$  — фокусное расстояние).

Подставив в эту формулу величину  $\alpha$ , выраженную через  $y$ , можно получить распределение давления в раскрыве как функцию  $y$ . Однако для практических расчетов удобнее пользоваться переменной  $\alpha$ , чем  $y$ .

Зная распределение давления в раскрыве рефлектора и предполагая, что в плоскости раскрыва во внешней по отношению к параболоиду области давление равно нулю, можно найти поле вдали от антенны с помощью формулы Гюйгенса (2.38)

$$p = -\frac{i \cos \theta}{\lambda} \int_0^a \int_0^a p(\rho, \psi) \frac{e^{ikr'}}{r'} \rho d\rho d\psi, \quad (7.2)$$

где  $p(\rho, \psi)$  — распределение давления в раскрыве параболоида, а  $r'$  — расстояние от произвольной точки на поверхности раскрыва до точки наблюдения.

Направим вдоль оси параболоида ось  $z$ , а положение точки наблюдения в пространстве определим углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $z$ . Тогда, производя преобразования, аналогичные проделанным при определении характеристики направленности круглого поршня, и пренебрегая затенением, вносимым облучателем, получим

$$p(\theta) = -\frac{ikp_0 \cos \theta}{2r} e^{ikr} \int_0^a (1 + \cos \alpha) R(\alpha) J_0(k\rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

Как видно из рис. 96,  $\rho = l \sin \alpha$ , но  $l = \frac{2F}{1 + \cos \alpha}$ , поэтому

$$\rho = 2F \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = a \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}} \quad \text{и} \quad \rho d\rho = \frac{4F^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha} d\alpha.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$p(\theta) = -\frac{i \cdot 2kF^2 p_0 \cos \theta}{r} e^{ikr} \int_0^{\alpha_0} J_0 \left( ka \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0}{2}} \sin \theta \right) R(\alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\alpha. \quad (7.3)$$

Дальнейший расчет зависит от вида функции  $R(\alpha)$ . Однако и при задании  $R(\alpha)$  простейшим образом характеристику направленности рефлекторной антенны  $R(\theta)$  не удастся выразить через табулированные функции. Для инженерных прикидок можно вычислить распределение в раскрыве рефлектора, а затем аппроксимировать его одной из известных в литературе функций, для которых в замкнутом виде вычисляется характеристика направленности круглого поршня.



Амплитудное распределение по радиусу раскрыва рефлектора обычно монотонно падает к его краю, поэтому характеристики направленности рефлекторных антенн несколько шире, чем равновеликого плоского поршня, а добавочные максимумы меньше. Ясно, что чем больше угол раскрыва рефлектора и чем острее характеристика направленности облучателя (если только она облучает рефлектор основным максимумом), тем резче распределение в раскрыве и тем меньше добавочные максимумы антенны.

Определим коэффициент усиления рефлекторной антенны как модуль отношения давлений, развиваемых на расстоянии  $r$  в направлении  $\theta = 0$  ею и ее облучателем (в предположении, что он развернут на  $180^\circ$ ). Из формул (7.3) и (7.1) имеем [31]

$$K_p = 2kF \int_0^{\alpha_0} R(\alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\alpha. \quad (7.4)$$

Мощность, излучаемую рефлекторной антенной, в предположении, что она равна мощности, излучаемой облучателем, определим, подставляя выражение (7.1) в формулу (1.27)

$$W_a = \frac{F_0^2 F^2 \pi}{\rho c} \int_0^{\pi} R^2(\alpha) \sin \alpha d\alpha.$$

Зная же излучаемую мощность и давление, легко найти коэффициент концентрации

$$K = 8k^2 F^2 \frac{\left( \int_0^{\alpha_0} R(\alpha) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} d\alpha \right)^2}{\int_0^{\pi} R^2(\alpha) \sin \alpha d\alpha}. \quad (7.5)$$

Принимая во внимание, что интеграл в знаменателе этого выражения равен двум, поделенным на коэффициент концентрации облучателя  $K_0$ , получим

$$K = K_0 K_p^2, \quad (7.6)$$

откуда следует вывод, что коэффициент усиления антенны по давлению равен корню квадратному из отношения ее коэффициента концентрации к коэффициенту концентрации облучателя.

На графике рис. 97 показана зависимость коэффициента концентрации рефлекторной антенны, отнесенного к коэффициенту концентрации равновеликого плоского поршня ( $K_{п.п} = k^2 a^2$ ), от угла раскрыва параболического отражателя для случаев, когда характеристика направленности облучателя аппроксимируется единицей или при  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$  функцией  $\cos^s \alpha$  и при  $\alpha > \frac{\pi}{2}$  нулем ( $s = 0,5; 1; 2$ ).

Обращает на себя внимание наличие экстремума коэффициента концентрации, положение которого зависит от характеристики на-

правленности облучателя. Объясняется это тем, что при малых углах раскрыва параболоида значительная доля излучаемой облучателем мощности уходит за пределы раскрыва, а при больших в раскрыве появляется резкая неравномерность поля. Естественно, что чем менее направлен облучатель, тем при больших значениях  $\alpha_0$  еще не будет происходить падения коэффициента концентрации, вызванного этой неравномерностью, и тем при больших  $\alpha_0$  будет наблюдаться максимум отношения  $K/K_{п.п.}$

Интересно отметить, что максимальная величина коэффициента концентрации рефлекторной антенны с параболическим отражателем наблюдается при уровне поля на краю раскрыва, составляющим примерно 0,3 от его уровня в центре раскрыва.

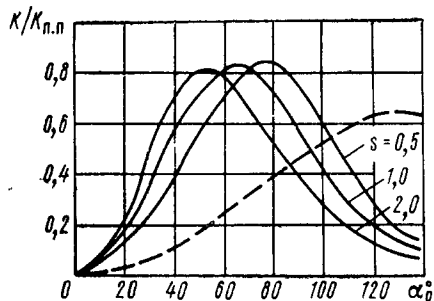


Рис. 97. Зависимость отношения  $K/K_{п.п.}$  от  $\alpha_0$  при  $R(\alpha) = 1$  (штриховая линия) и

$$R(\alpha) = \begin{cases} \cos^2 \alpha & \text{при } |\alpha| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } |\alpha| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ (сплошные линии).}$$

Кроме параболического могут использоваться отражатели и некоторых других конфигураций ([8], [14] и др.).

**Рупорные антенны.** Излучающие и приемные устройства, снабженные рупором, широко применяются в различных областях техники и, в частности, в электроакустике.

Основным достоинством рупорных антенн является обеспечение ими формирования практически частотно-независимой характеристики направленности в широком диапазоне частот.

Строгого и общего решения задачи об излучении рупорных антенн в настоящее время не существует, однако накоплен значительный объем приближенных методов расчета и экспериментальных данных, позволяющий проводить разработку и проектирование таких антенн.

Основные теоретические и экспериментальные исследования в области рупорных антенн для электроакустических устройств выполнены в сороковых годах и изложены в работах [11], [44], [45] и др. Одна из первых работ по рупорным гидроакустическим антеннам опубликована в 1954 г. [60].

Следует заметить, что в отличие от рефлекторных антенн, для которых в предположении, что в точку наблюдения поступает только отраженная рефлектором волна, несущественно, является ли отражатель акустически мягким или акустически жестким, для рупорных антенн акустические параметры стенок рупора играют существенную роль. Если стенки рупора можно считать жесткими, то расчет гидроакустической рупорной антенны не отличается от расчета аналогичной антенны в электроакустике [17]. В этом случае постоянство направленности рупорной антенны в полосе частот объясняется тем, что с повышением частоты усиливается ослабление поля в сечении рупора к его краям, вследствие чего эффективный источник как бы уменьшается в размерах и уходит в глубь рупора [45].

При наличии мягких стенок рупора на поверхности волнового фронта в его выходном отверстии наблюдается спадающее на краях до нуля амплитудное распределение, что так же, как и в случае некомпенсированных криволинейных поверхностей, приводит к формированию мало изменяющейся с частотой характеристики направленности.

В качестве примера рассмотрим излучение линейного источника радиуса  $a$ , помещенного в вершине рупора, образованного двумя абсолютно мягкими полуплоскостями (рис. 98).

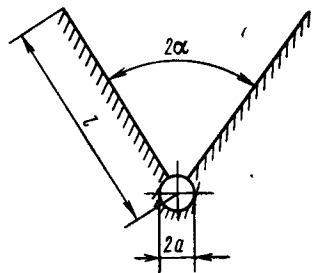


Рис. 98. Рупорная антенна.

Реальные конструкции рупорных антенн имеют стенки рупора конечной длины, однако в случае мягких стенок, имеющих длину, большую  $(1,5 - 2)\lambda$ , дополнение их до бесконечности несущественно изменяет поле излучения.

Поле внутри рупора может быть представлено в виде суперпозиции нормальных волн для задачи об излучении в цилиндрической системе координат, выбранных так, чтобы обеспечивалось выполнение условия  $p = 0$  на стенках рупора [47]

$$p(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_{\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha}}^{(1)}(kr) \cos \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right]. \quad (7.7)$$

Неизвестные коэффициенты  $A_m$  должны быть определены из условия равенства нормальных составляющих колебательной скорости при  $r = a$  со стороны излучателя и поля.

Колебательная скорость в поле определится выражением

$$\omega = -\frac{i}{krc} \cdot \frac{\partial p(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{1}{irc} \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_{\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha}}^{(1)'}(ka) \times \\ \times \cos \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right]$$

Колебательную скорость на поверхности цилиндрического излучателя можно представить в виде разложения либо по функциям  $\cos m\varphi$ , либо по функциям  $\cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right]$ . Разложение по функциям  $\cos m\varphi$  удобнее в том случае, когда предполагается, что заданными являются электромеханические силы, действующие на цилиндрический излучатель на различных модах колебаний цилиндра, имеющих вид  $\cos m\varphi$ . Если же считать, что задана колебательная скорость на участке цилиндра внутри сектора  $2\alpha$ , то удобнее пользоваться разложением по второй из указанных систем функций.

В последнем случае, представляя колебательную скорость на поверхности цилиндра рядом

$$\omega_{\text{ц}}(\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right], \quad (7.8)$$

где

$$B_m = \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \omega_{\text{ц}}(\varphi) \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right] d\varphi, \quad (7.9)$$

имеем

$$A_m = \frac{i\rho c B_m}{H_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}^{(1)'}(ka)} \quad (7.10)$$

и

$$p(r, \varphi) = i\rho c \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{H_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}^{(1)}(kr)}{H_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\alpha}}^{(1)'}(ka)} \cos \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{\alpha} \varphi \right]. \quad (7.11)$$

Как известно (см., например, приложение X в [28]), при малых аргументах производные от функций Ханкеля чрезвычайно резко возрастают с ростом их порядка. Поэтому при малом  $ka$  при практически произвольном виде функции  $\omega_{\text{ц}}(\varphi)$ , в сумме последнего выражения определяющую роль будет играть только одно слагаемое при  $m=0$ . Характеристика направленности будет иметь вид  $R(\varphi) = \cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha}$ , а коэффициент концентрации в соответствии с формулой (3.58) равен

$$K = \frac{2H}{\lambda} \cdot \frac{2\pi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2(\varphi) d\varphi} = \frac{4\pi H}{\lambda\alpha}, \quad (7.12)$$

где  $H$  — высота рупорной антенны, предполагаемая равной высоте излучателя. Поскольку формула (3.58) справедлива при  $H > \lambda$ , формула (7.12) может применяться при выполнении этого неравенства.

При размере  $a$  излучателя рупорной антенны, сравнимом с длиной волны, в выражении (7.11) следует удерживать несколько членов и

характеристика направленности  $R(\varphi)$  не будет иметь вид  $\cos \frac{\pi\varphi}{2\alpha}$ . Практически можно считать, что вид характеристики направленности рупорной антенны с ростом частоты не меняется до тех пор, пока направленность излучателя (плоского или участка цилиндрической поверхности) меньше направленности, определяемой раскрывом рупора (т. е. имеющей место на низких частотах).

## § 22. Объемные антенны

Объемными обычно называют антенны, элементы которых распределены в некотором объеме и имеют малые волновые размеры, так что не происходит затенения одних элементов другими. К объемным антеннам примыкают и звукопрозрачные поверхностные антенны, расположенные вблизи экранов, поскольку при этом за экраном появляется совокупность мнимых источников, образующая вместе с реальными распределение источников в некотором объеме.

**Антенна, состоящая из параллельных излучающих плоскостей.** Вычислим взаимное активное сопротивление излучения двух плоских прозрачных антенн. Пусть две прозрачные непрерывные плоские антенны лежат в параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно  $h$ .

Тогда давление, развиваемое одной из антенн в дальнем поле, можно записать следующим образом:

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c\omega_0 s}{2\pi r} e^{ikr} D(\mathbf{u}), \quad (7.13)$$

где  $s$  — площадь антенны, а  $D(\mathbf{u})$  ее комплексная характеристика направленности.

Давление, развиваемое второй антенной в предположении, что ее размеры такие же, как и первой, записанное относительно общего для двух антенн начала координат, отличается только множителем  $e^{ikh \cos \theta}$ , где  $\theta$  — угол, отсчитываемый от перпендикуляра к плоскости антенны. В соответствии с формулой (1.30) активное взаимное сопротивление излучения антенн имеет вид

$$r_{1,2} = \frac{k^2 \rho c s^2}{4\pi^2} \int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) \cos(kh \cos \theta) d\Omega, \quad (7.14)$$

где  $R(\mathbf{u})$  — амплитудная характеристика направленности одной из антенн.

Для упрощения дальнейшего анализа предположим, что размеры антенн значительно превосходят длину волны и функция  $R^2(\mathbf{u})$  меняется вблизи своего максимального значения более резко, чем функция  $\cos(kh \cos \theta)$ . Тогда более плавно меняющуюся функцию можно вынести из-под знака интеграла в точке экстремума функции  $R^2(\mathbf{u})$ , т. е. в точке, соответствующей направлению компенсации каждой из антенн  $\theta_0$ . При этом выражение (7.14) приобретает вид

$$r_{1,2} = \frac{k^2 \rho c s^2}{4\pi^2} \cos(kh \cos \theta_0) \int_{\Omega} R^2(\mathbf{u}) d\Omega.$$

Нетрудно убедиться, что правая часть полученной формулы без множителя  $\cos(kh \cos \theta_0)$  представляет собой собственное активное сопротивление излучения одной из антенн  $r_s$ , поэтому справедливо соотношение

$$r_{1,2} = r_s \cos(kh \cos \theta_0), \quad (7.15)$$

которое с помощью приближенной формулы (5.6) в случае равномерного амплитудного распределения вдоль плоской антенны может быть записано так

$$r_{1,2} = 2\rho cs \frac{\cos(kh \cos \theta_0)}{\cos \theta_0}. \quad (7.16)$$

Заметим, что это же выражение более сложным путем можно было бы получить и с помощью метода стационарной фазы, не прибегая к выносу из-под знака интеграла функции  $\cos(kh \cos \theta_0)$ .

Рассмотрим случай, когда плоская прозрачная некомпенсированная антенна расположена параллельно плоскому абсолютно жесткому или абсолютно мягкому экрану на расстоянии  $H$ . Если экран жесткий, то его воздействие на поле в переднем полупространстве эквивалентно помещению второй плоской антенны, отнесенной от первой на расстояние  $h = 2H$ , и колеблющейся синфазно с ней. При этом давление в переднем полупространстве запишется следующим образом:

$$p(\mathbf{u}) = -\frac{ik\rho c\omega_0 s}{\pi r} e^{ikr} D(\mathbf{u}) \cos\left(\frac{kh}{2} \cos \theta\right), \quad (7.17)$$

где последний множитель представляет собой характеристику направленности двух точечных излучателей.

Активное сопротивление излучения такой антенны равно сумме собственного сопротивления излучения плоскости и вносимого сопротивления излучения, создаваемого отражением плоскости в экране, т. е.

$$r_s = 2\rho cs (1 + \cos kh), \quad (7.18)$$

поэтому в соответствии с выражением (1.38) имеем

$$K = \frac{8\pi s}{\lambda^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{kh}{2}}{1 + \cos kh} = \frac{4\pi s}{\lambda^2}. \quad (7.19)$$

Таким образом, и давление, создаваемое антенной в направлении  $\theta = 0$ , и ее активное сопротивление излучения зависят от расстояния до экрана  $H = h/2$ , а коэффициент концентрации от  $H$  не зависит.

Совершенно аналогично для случая мягкого экрана в выражении (7.17) вместо  $\cos\left(\frac{kh}{2} \cos \theta\right)$  будет стоять множитель, определяющий характеристику направленности двух противофазно возбужденных ненаправленных элементов, т. е.  $\sin\left(\frac{kh}{2} \cos \theta\right)$ , а в выражении (7.18) вместо знака плюс будет стоять знак минус, в результате и в этом случае коэффициент концентрации не будет зависеть от  $H$ .

Полученные выводы легко понять, если анализировать величину коэффициента концентрации с помощью его выражения через интеграл от квадрата характеристики направленности антенны. Действительно, наличие жесткого или мягкого экранов приводит (кроме исключения излучения в тыльное полупространство, что удваивает коэффициент концентрации) к появлению в характеристике направленности множителя  $\cos\left(\frac{kh}{2}\cos\theta\right)$  или  $\sin\left(\frac{kh}{2}\cos\theta\right)$ . Эти множители при больших размерах антенны, а следовательно, при узких ее характеристиках направленности несущественно изменяют  $R^2(u)$  и соответственно мало влияют на величину коэффициента концентрации. Поэтому-то коэффициент концентрации антенны и не зависит от  $H$ . При малых же волновых размерах антенны величина  $H$  должна существенно влиять на коэффициент концентрации и в предельном случае точечного излучателя, находящегося вблизи жесткого и мягкого экранов, легко получить соответствующие выражения

$$K = 4 \frac{\cos^2 \frac{kh}{2}}{1 + \frac{\sin kh}{kh}} \quad \text{и} \quad K = 4 \frac{\sin^2 \frac{kh}{2}}{1 - \frac{\sin kh}{kh}}.$$

Рассмотрим теперь объемную антенну, состоящую из  $n$  одинаковых плоских параллельных непрерывных антенн. Будем предполагать, что амплитудное распределение равномерно, а фазовое обеспечивает компенсацию как каждой из плоскостей, так и всей антенны в направлении  $\theta_0$ . Давление, развиваемое такой антенной в направлении  $u_0$ , может быть записано в соответствии с формулой (7.13) следующим образом:

$$p(u_0) = -\frac{ik\rho c\omega_0 s}{2\pi r} e^{ikr} n,$$

где  $n$  — число плоскостей.

Активное сопротивление излучения антенны определится суммой вносимых

$$\begin{aligned} r_s &= \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* r_{qg} = 2\rho c s \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n e^{ikh_{qg}\cos\theta_0} \cdot \frac{\cos(kh_{qg}\cos\theta_0)}{\cos\theta_0} = \\ &= 2\rho c s \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \frac{\cos^2(kh_{qg}\cos\theta_0)}{\cos\theta_0}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

где  $h_{qg}$  — расстояние между плоскостями, имеющими номера  $q$  и  $g$ .

Формула, определяющая коэффициент концентрации антенны, принимает вид

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} \cos\theta_0 \frac{n^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \cos^2(kh_{qg}\cos\theta_0)}.$$

В случае  $\theta_0 = 0$ , т. е. компенсации антенны в направлении перпендикуляра к плоскостям, имеем

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} \cdot \frac{n^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \cos^2 kh_{qg}}. \quad (7.21)$$

Если расстояния между соседними плоскостями одинаковы и равны  $h$ , то, воспользовавшись тождествами

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \cos^2 kh(q-g) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \cos 2kh(q-g) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \left| \sum_{q=1}^n e^{-i2khq} \right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sin nkh}{n \sin kh} \right)^2, \end{aligned} \quad (7.22)$$

получим

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} \cdot \frac{2}{1 + \left( \frac{\sin nkh}{n \sin kh} \right)^2}. \quad (7.23)$$

Отношение в знаменателе полученного выражения, как и следовало ожидать, представляет собой величину  $R$  характеристики направленности антенны, состоящей из ненаправленных элементов, расположенных в центрах плоскостей, причем антенна компенсирована в направлении  $\theta = 0$ , а величина  $R$  взята в направлении  $\theta = \pi$ . Поскольку величина  $R^2(\pi)$  при любых  $kh$  заключена в пределах от 0 до 1, коэффициент концентрации объемной антенны заключен в пределах от  $2\pi s/\lambda^2$  до  $4\pi s/\lambda^2$ .

Это обстоятельство иллюстрируется рис. 99, на котором изображена зависимость отношения  $\frac{K}{2\pi s/\lambda^2}$  от  $h/\lambda$  при  $n = 2; 3$  и  $4$ .

Таким образом, коэффициент концентрации объемной антенны, состоящей из параллельных протяженных плоских элементов, не может быть выше коэффициента концентрации равновеликого плоского поршня в экране или, другими словами, развитие объемной антенны большого поперечного сечения в глубину не приводит к увеличению коэффициента концентрации по сравнению с равновеликим экранированным плоским поршнем.

Мы рассматривали дискретный набор параллельных плоских протяженных элементов, образующих антенну; нетрудно перейти к непрерывному (точнее — весьма частому) расположению плоскостей. В этом случае совершенно аналогично можно получить формулу

$$K = \frac{2\pi s}{\lambda^2} \cdot \frac{H^2}{\int_0^H \int_0^H \cos^2 k(z-z') dz dz'} = \frac{4\pi s}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 kH}{(kH)^2}}.$$

Из этого выражения видно, что и в случае непрерывной объемной антенны при большом относительном размере ее сечения, перпендикулярного направлению компенсации, увеличение глубины антенны  $H$  не приводит к существенному увеличению коэффициента концентрации.



Этот вывод на первый взгляд не является очевидным. Действительно, переходя от ненаправленной антенны к продольно компенсированной линии, мы получаем выигрыш в коэффициенте концентрации, пропорциональный длине линии, т. е. пропорциональный глубине антенны. При переходе же от плоскости к объему выигрыш не превосходит двух раз.

Объяснение этого явления заключается в следующем. Взаимное сопротивление излучения (или пространственно-временная корреляция помех) для двух точек, лежащих на продольно компенсированной линии на расстоянии  $z$ , описывается функцией  $\cos kz \cdot \frac{\sin kz}{kz}$ , имеющей

затухающий характер. Поэтому линия может приближенно представляться набором независимых (по взаимному сопротивлению излучения или по помехам) участков, а чем больше таких участков, тем больше величина коэффициента концентрации. В случае же продольно компенсированной плоскости, состоящей из параллельных отрезков, функция корреляции имеет вид  $\cos kz \cdot J_0(kz)$ ; эта функция затухает медленнее, чем предыдущая, и рост коэффициента концентрации продольно компенсированной плоскости при увеличении ее размера вдоль направления компенсации должен происходить более медленно, чем в предыдущем случае. И, наконец, для объемной антенны функция корреляции помех на отдельных составляющих ее плоскостях имеет вид  $\cos^2 kz$ , т. е. вообще не затухает с ростом  $z$ . Поэтому-то существенно и не растет коэффициент концентрации объемной антенны при увеличении ее продольного размера.

Все приведенные выше рассуждения относительно коэффициента концентрации объемной антенны основывались на формуле (7.15), при выводе которой предполагалось, что поперечные размеры антенны значительно больше длины волны.

Для определения влияния относительной величины поперечного сечения антенны на величину ее коэффициента концентрации рассмотрим гипотетическую непрерывную объемную антенну, заключенную внутри отрезка кругового цилиндра высотой  $H$  и диаметра  $D$ , компенсированную вдоль оси цилиндра.

**Непрерывная объемная антенна, заключенная внутри отрезка кругового цилиндра.** Характеристика направленности такой антенны, в соответствии с теоремой умножения, определится произведением характеристик направленности круглого прозрачного поршня и про-

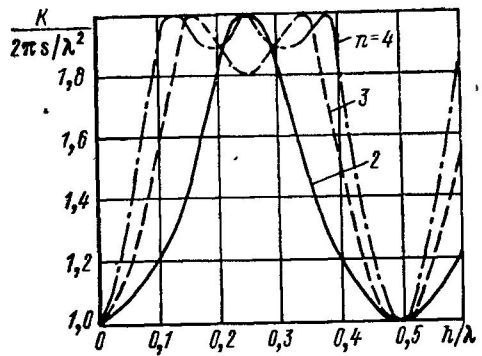


Рис. 99. Зависимость отношения  $\frac{K}{2\pi s/\lambda^2}$  от  $h/\lambda$  для различного числа плоскостей объемной решетки  $n$  ( $h$  — расстояние между плоскостями).

должно компенсированного отрезка длиной  $H$ , т. е.

$$R(\theta) = \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \cdot \frac{\sin \left[ \frac{kH}{2} (1 - \cos \theta) \right]}{\frac{kH}{2} (1 - \cos \theta)}. \quad (7.24)$$

На рис. 100 приведены результаты расчетов коэффициента концентрации антенны [38], вычисленного путем интегрирования квадрата характеристики направленности. На оси ординат отложено отношение величины коэффициента концентрации объемной антенны и коэффициента концентрации равновеликого по поперечному сечению плоского поршня, заключенного

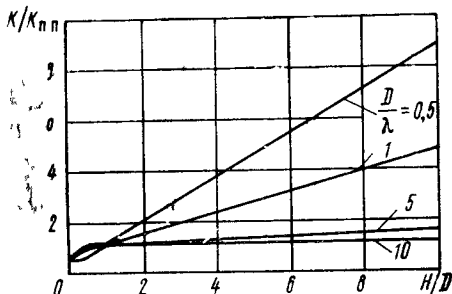


Рис. 100. Зависимость отношения  $K/K_{п.п}$  для объемной непрерывной антенны от  $H/D$  при различных  $D/\lambda$ .

и, например, для  $D/\lambda = 0,5$  и  $H/D = 10$  величина  $K/K_{п.п}$  примерно равна 9.

Такая зависимость величины  $K/K_{п.п}$  от  $H/D$  свидетельствует о том, что только в случае протяженных параллельных плоскостей функция пространственно-временной корреляции осциллирует не затухая. Для параллельных плоскостей, имеющих размеры, сравнимые с длиной волны, эта функция, очевидно, затухает, и тем быстрее, чем меньше  $D/\lambda$ .

Поведение кривых на рис. 100 можно объяснить и иначе, а именно— рассматривая изменение ширины характеристики направленности антенны при изменении  $D/\lambda$  и  $H/\lambda$ . Дело в том, что ширина характеристики направленности продольно компенсированного отрезка мед-

ленно (пропорционально  $\sqrt{\frac{H}{\lambda}}$ ) уменьшается с ростом  $H/\lambda$ , в то время как ширина характеристики направленности поршня обратно пропорциональна отношению  $D/\lambda$ . Поэтому, если поперечное сечение объемной антенны велико, то для обострения характеристики направленности, создаваемой им, относительные размеры продольно компенсированного отрезка должны быть весьма велики.

Из сказанного ясно, что объемные антенны следует использовать в случаях, когда либо поперечный относительный размер антенны  $s/\lambda^2$  мал, а требуется увеличить коэффициент концентрации по сравнению

с  $\frac{4\pi s}{\lambda^2}$ , либо поперечный размер велик, но нет возможности постановки экрана. В последнем случае, располагая две, три или более прозрачных плоских антенны, можно получить величину коэффициента концентрации, близкую к  $\frac{4\pi s}{\lambda^2}$ . Число плоскостей, образующих объемную антенну, должно быть тем больше, чем шире диапазон рабочих частот (см. рис. 99).

## ГЛАВА 8

### ПАРАМЕТРЫ АНТЕНН ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ВОЗБУЖДЕНИЯ

#### § 23. Влияние случайных ошибок на характеристику направленности антенны

Экспериментальные характеристики направленности антенн всегда отличаются от определенных теоретически, и не только из-за неполного соответствия расчетной модели реальной антенне и ошибок измерений, но и в связи с неизбежным наличием различных случайных разбросов и ошибок. Наиболее существенными из них являются разбросы чувствительности (по амплитуде и фазе) отдельных элементов антенны, ошибки воспроизведения требуемого амплитудно-фазового возбуждения (вызванные разбросом параметров элементов устройств, принимающих участие в формировании направленности антенны) и ошибки установки преобразователей на поверхности антенны. Случайные ошибки могут быть независимыми и зависимыми, коррелированными. Часто зависимости ошибок между собой могут быть весьма сложными, особенно если принять во внимание наличие элементов согласования преобразователя с электрическими устройствами и возможные разбросы параметров этих элементов. Кроме того, одни ошибки (например, ошибки установки и ориентации преобразователей) зависят от положения точки наблюдения, а другие (например, ошибки воспроизведения требуемого распределения) не зависят от него.

Ясно, что попытка строгого решения задачи о влиянии ошибок на направленные свойства антенны может привести к чрезвычайно сложным расчетам и практически мало полезным результатам, поскольку величины отдельных ошибок редко известны точно.

Особого внимания заслуживают ошибки систематические; они могут накапливаться от элемента к элементу и в результате привести к заметному искажению характеристики направленности. Обычно, однако, сравнительно легко, с одной стороны, оценить влияние этих ошибок и определить допустимую их величину, а с другой стороны, при разработке антенны и цепей формирования принять меры к их ограничению.

Мы будем рассматривать только случайные ошибки и, кроме того, будем считать, что все они не зависят от направления на точку наблюдения, т. е. сводятся к ошибкам возбуждения элементов антенны.

За последние 10—15 лет предложено немало методов оценки искажений тех или иных параметров антенн при наличии различных ошибок. Одними из первых серьезных работ в этом направлении являются работы [70], [56], [61], [69], в более позднее время интересные результаты получены Л. Г. Содиным [43] и Я. С. Шифриным [51].

Недостатком большинства предложенных методов является то, что разработаны они применительно к частным видам антенн при некоторых предположениях относительно законов распределения ошибок и расположения элементов или их возбуждения. Кроме того, во многих работах за исходные приняты такие параметры ошибок, которые трудно поддаются непосредственному измерению и сложно связаны с величинами технологических допусков.

Практически (особенно при анализе многоэлементных антенн при сравнительно небольших ошибках) представляется целесообразным использование простых приближенных методов, позволяющих достаточно быстро производить инженерные оценки и имеющих наглядный физический смысл.

Рассмотрим один из таких методов, являющийся, по существу, некоторым упрощением метода Рузе [70].

Для облегчения анализа под характеристикой направленности антенны в присутствии случайных ошибок возбуждения  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})$  мы будем понимать модуль отношения давления, развиваемого антенной в направлении  $\mathbf{u}$  при наличии случайных ошибок, к модулю давления в направлении  $\mathbf{u}_0$  в отсутствие ошибок. Таким образом, для дискретной антенны можно записать

$$R_{\text{ош}}(\mathbf{u}) = \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_{q\text{ош}} p'_q(\mathbf{u}) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}} \right|}{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(\mathbf{u}) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0} \right|}, \quad (8.1)$$

где  $A_{q\text{ош}}$  — коэффициент возбуждения элемента при наличии случайных ошибок;  $p'_q(\mathbf{u})$  — давление, развиваемое элементом при единичной колебательной скорости, записанное относительно точки, определяемой вектором  $\rho_q$ .

Значение комплексной характеристики направленности в некотором направлении  $\mathbf{u}$  при наличии ошибок возбуждения можно представить как сумму двух векторов: вектора, представляющего собой характеристику направленности в отсутствие ошибок  $R(\mathbf{u})$  и некоторого вектора  $\Delta R(\mathbf{u})$ . Этот вектор можно разложить на две составляющих, одна из которых  $X$  параллельна вектору  $R(\mathbf{u})$ , а другая,  $Y$ , перпендикулярна ему. Тогда характеристику направленности  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})$  можно определить выражением

$$R_{\text{ош}}(\mathbf{u}) = \sqrt{[R(\mathbf{u}) + X]^2 + Y^2}. \quad (8.2)$$

Составляющие вектора  $\Delta R(\mathbf{u})$ ,  $X$  и  $Y$ , зависят от ошибок возбуждения каждого из элементов антенны; поэтому их можно вычислить как

сумму величин  $x_q$  и  $y_q$  по всем элементам. При этом

$$R_{\text{ош}}(\mathbf{u}) = \sqrt{\left[ R(\mathbf{u}) + \sum_{q=1}^n x_q \right]^2 + \left[ \sum_{q=1}^n y_q \right]^2}.$$

Поскольку  $X$  и  $Y$  определяются суммой случайных величин, будем считать, что они распределены по нормальному закону со стандартом  $\sigma$  и независимы друг от друга. Строго говоря, это утверждение нуждается в доказательстве и в ряде случаев доказывается строго; мы уже будем предполагать, что приближенно оно справедливо и в общем случае.

Как известно (см., например, [52]), величина  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})$ , определяемая выражением (8.2) при указанных свойствах  $X$  и  $Y$ , распределена по обобщенному закону Релея, имеющему вид

$$W(R_{\text{ош}}) = \frac{R_{\text{ош}}(\mathbf{u})}{\sigma^2} I_0 \left( \frac{R(\mathbf{u}) R_{\text{ош}}(\mathbf{u})}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{R^2(\mathbf{u}) + R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})}{2\sigma^2}},$$

где  $I_0(\alpha) = J_0(i\alpha)$  — модифицированная функция Бесселя, или функция Бесселя от мнимого аргумента.

Это распределение при  $\frac{R^2(\mathbf{u})}{\sigma^2} \rightarrow 0$  переходит в распределение Релея, а при  $\frac{R^2(\mathbf{u})}{\sigma^2} \rightarrow \infty$  приближается к нормальному. Между величинами  $\sigma$  и  $R(\mathbf{u})$  существует следующая связь [24]:

$$M[R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})] = 2\sigma^2 + R^2(\mathbf{u}). \quad (8.3)$$

Воспользуемся этим соотношением для определения стандарта распределения величин  $X$  и  $Y$ . Вычислим вначале математическое ожидание квадрата модуля характеристики направленности [т. е. квадрата выражения (8.1)]

$$M[R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})] = \frac{M \left[ \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_{q\text{ош}} A_{g\text{ош}}^* \rho_q'(\mathbf{u}) \rho_g'^*(\mathbf{u}) e^{-ik\mathbf{u}(\rho_q - \rho_g)} \right]}{\left| \sum_{q=1}^n A_q \rho_q'(\mathbf{u}_0) e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0} \right|^2}. \quad (8.4)$$

Представим коэффициент возбуждения  $A_{q\text{ош}}$  суммой двух векторов  $A_q + B_q$ , где  $B_q$  — случайный вектор, определяющий ошибку возбуждения и имеющий нулевое математическое ожидание (рис. 101). Тогда произведение  $A_{q\text{ош}} A_{g\text{ош}}^*$  равно  $A_q A_g^* + A_q B_g^* + B_q A_g^* + B_q B_g^*$  и, поскольку математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, числитель выражения (8.4) можно записать в виде четырех слагаемых, каждое из которых представляет собой двойную сумму от математического ожидания некоторых выражений. В первом слагаемом нет случайных величин и поэтому его математическое ожидание равно его величине, во втором и

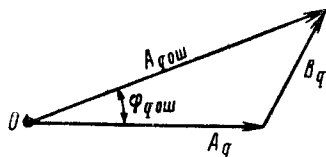


Рис. 101. Разложение вектора  $A_{q\text{ош}}$  на две составляющие.

В третьем слагаемых есть только один случайный множитель с математическим ожиданием равным нулю, поэтому эти слагаемые равны нулю. Остается рассмотреть последнее слагаемое, в которое входит произведение  $B_q B_g^*$ . Математическое ожидание произведения случайных независимых величин равно нулю, поэтому

$$M [B_q B_g^*] = \begin{cases} 0 & \text{при } q \neq g \\ M [|B_q|^2] = M [b_q^2] & \text{при } q = g, \end{cases}$$

где  $b_q$  — модуль вектора  $B_q$ .

Вместо двойной суммы четвертого слагаемого остается одинарная, и окончательно имеем

$$M [R_{\text{ош}}^2(u)] = \frac{\left| \sum_{q=1}^n A_q \rho'_q(u) e^{-ik\rho_q u} \right|^2 + \sum_{q=1}^n M [b_q^2] | \rho'_q(u) |^2}{\left| \sum_{q=1}^n A_q \rho'_q(u_0) e^{-ik\rho_q u_0} \right|^2}. \quad (8.5)$$

Найдем связь между амплитудными и фазовыми ошибками возбуждения, с одной стороны, и математическим ожиданием модуля вектора  $B_q$  — с другой. Из векторной диаграммы, изображенной на рис. 101 видно, что

$$\begin{aligned} b_q = |B_q| &= \sqrt{|A_q|^2 + |A_{q\text{ош}}|^2 - 2|A_q||A_{q\text{ош}}|\cos\Phi_{q\text{ош}}} = \\ &= \sqrt{a_q^2 + a_{q\text{ош}}^2 - 2a_q a_{q\text{ош}} \cos\Phi_{q\text{ош}}}, \end{aligned}$$

где  $\Phi_{q\text{ош}}$  — фазовая ошибка возбуждения.

Будем рассматривать  $b_q$  как функцию двух случайных величин  $a_{q\text{ош}}$  и  $\Phi_{q\text{ош}}$  и воспользуемся методом линеаризации [42], который при независимости  $a_{q\text{ош}}$  и  $\Phi_{q\text{ош}}$  приводит к выражению

$$M [b_q^2] = \sigma(b_q) \approx \left( \frac{\partial b_q}{\partial a_{q\text{ош}}} \right)_0^2 \sigma^2(a_{q\text{ош}}) + \left( \frac{\partial b_q}{\partial \Phi_{q\text{ош}}} \right)_0^2 \sigma^2(\Phi_{q\text{ош}}).$$

Вычисляя первые производные от  $b_q$  по  $a_{q\text{ош}}$  и  $\Phi_{q\text{ош}}$  в точке, соответствующей их математическим ожиданиям ( $M[a_{q\text{ош}}] = 0$  и  $M[\Phi_{q\text{ош}}] = 0$ ), и раскрывая неопределенности, получим

$$M [b_q^2] = \sigma^2(a_{q\text{ош}}) + a_{q\text{ош}}^2 \sigma^2(\Phi_{q\text{ош}}).$$

Будем считать, что стандарт распределения амплитудных ошибок не одинаков для всех элементов антенны, а пропорционален амплитуде возбуждения в отсутствии ошибок; тогда  $\sigma^2(a_{q\text{ош}}) = \varepsilon a_q^2$ , где  $\varepsilon$  — некоторое постоянное число, равное стандарту распределения элемента, имеющего  $a_q$ , равное единице. При этом  $M[b_q^2] = a_q^2 [\varepsilon^2 + \sigma^2(\Phi_{q\text{ош}})]$ . Стандарт распределения фазовых ошибок для всех элементов антенны одинаков, поэтому можно опустить индекс  $q$  в аргументе  $\sigma^2(\Phi_{\text{ош}})$  и ввести обозначение  $\Delta^2 = \varepsilon^2 + \sigma^2(\Phi_{\text{ош}})$ . В дальнейшем будем называть величину  $\Delta^2$  суммарной дисперсией случайных ошибок возбуждения.

Подставляя последние соотношения в формулу (8.5), получим

$$M[R_{\text{ош}}^2(u)] = R^2(u) + \Delta^2 G(u). \quad (8.6)$$

В этом выражении  $G(u)$  — чувствительность антенны к случайным ошибкам возбуждения, определяемая равенством

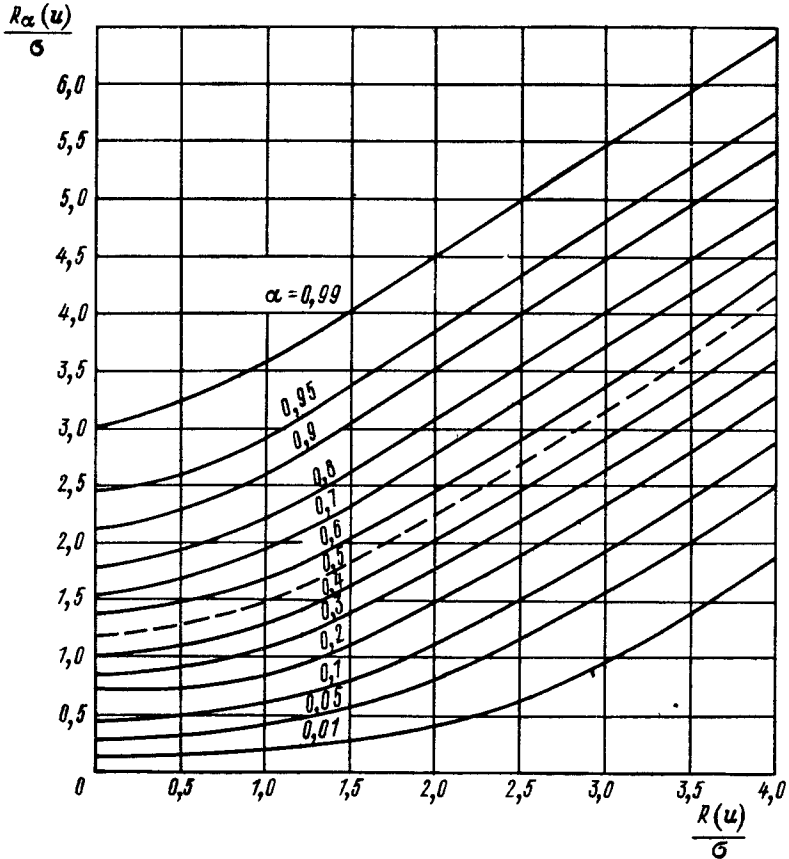


Рис. 102. Зависимость  $\frac{R_{\alpha}(u)}{\sigma}$  от  $\frac{R(u)}{\sigma}$  при некоторых уровнях вероятности  $\alpha$ .

$$G(u) = \frac{\sum_{q=1}^n \alpha_q^2 |p'_q(u)|^2}{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0) e^{-ik\rho_q u_0} \right|^2} = \frac{\sum_{q=1}^n |A_q p'_q(u)|^2}{\left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(u_0) e^{-ik\rho_q u_0} \right|^2}. \quad (8.7)$$

Сравнивая между собой выражения (8.3) и (8.6), легко установить, что

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \Delta^2 G(u). \quad (8.8)$$

Таким образом мы определили среднеквадратичное отклонение, или стандарт  $\sigma$ , являющийся одним из параметров обобщенного закона распределения Релея. Зная  $\sigma$ , для каждого значения  $R(u)$  легко определить любые его статистические характеристики: математическое ожидание, величину  $R_\alpha(u)$ , т. е. такую величину, относительно которой можно утверждать с заданной вероятностью  $\alpha$ , что она больше отдельных реализаций  $R_{\text{ош}}(u)$  и т. д. К сожалению, аналитические зависимости между этими величинами весьма сложны, и поэтому связь между параметрами обобщенного распределения Релея обычно устанавливают с помощью графиков или таблиц. На рис. 102 представлена зависимость между  $R(u)/\sigma$  и  $R_\alpha(u)/\sigma$  для некоторых уровней вероятности  $\alpha$ , построенная на основании таблиц, приведенных в работе [52]. Пунктиром изображена кривая, соответствующая  $\alpha = 0,5$ , т. е. математическому ожиданию  $R_{\text{ош}}(u)$ .

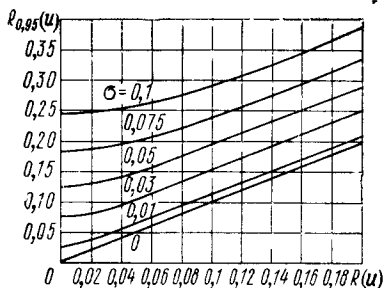


Рис. 103. Зависимость величины  $R_{0,95}(u)$  от  $R(u)$  при различных  $\sigma$ .

теристики направленности  $R(u)$  и со стандартом  $\sigma$ . Поэтому при  $R(u)/\sigma > 4$  необходимые параметры распределения легко определить с помощью таблиц нормального распределения.

Процедуру нахождения  $R_\alpha(u)$  можно упростить, построив для некоторых  $\alpha$  графики, параметром семейства кривых на которых является  $\sigma$ .

На рис. 103 и 104 показаны такие графики для  $\alpha = 0,95$  и  $0,99$ , а на рис. 105 представлены графики для  $\alpha = 0,5$ , т. е. для математического ожидания  $R_{\text{ош}}(u)$ . По этим графикам можно определить математическое ожидание характеристики направленности при наличии ошибок и уровень, который с вероятностью 0,95 или 0,99 она не превосходит. В случае необходимости более точного определения параметров распределения характеристик направленности можно воспользоваться специальными таблицами параметров обобщенного распределения Релея.

Во многих практических случаях, особенно в начале разработки антенны, дисперсии амплитудных и фазовых ошибок бывают неизвестны, но представляется возможным задание допусков на разброс амплитуд и фаз отдельных элементов. В таких ситуациях следует определить дисперсию, исходя из возможного допуска и задавшись видом закона распределения ошибок внутри допуска. Естественнее всего предполагать, что ошибки распределены по нормальному закону, но



неясно, какова вероятность того, что все ошибки укладываются в заданный допуск. Если эта вероятность равна 0,9; 0,99 и 0,999, то стандарт связан с допуском  $2E$  ( $\pm E$ ) соответственно соотношениями

$$\sigma = \frac{E}{1,6}; \quad \sigma = \frac{E}{2,6}; \quad \sigma = \frac{E}{3,3}.$$

Таким образом, суммарную дисперсию случайных ошибок в случае нормального распределения ошибок можно определить по формуле

$$\Delta^2 = \varepsilon^2 + \sigma^2 (\varphi_{\text{ош}}) = \left(\frac{\Delta\varphi}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{m}\right)^2, \quad (8.9)$$

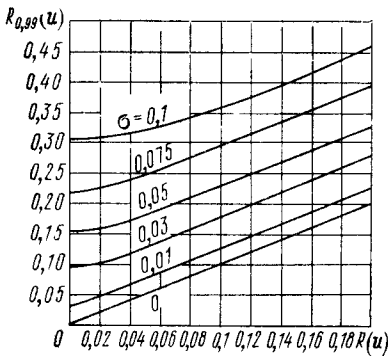


Рис. 104 Зависимость величины  $R_{0,99}(u)$  от  $R(u)$  при различных  $\sigma$ .

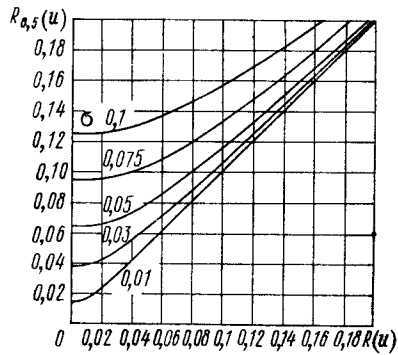


Рис 105. Зависимость величины  $R_{0,5}(u)$  от  $R(u)$  при различных  $\sigma$ .

где  $\Delta\varphi$  и  $\Delta a$  — половина допусков на фазовые и амплитудные ошибки, а  $m$  равно 1,6; 2,6; 3,3 или какому-то другому числу, в зависимости от того, с какой вероятностью можно утверждать, что все ошибки лежат внутри допусков.

В эту формулу следует подставлять  $\Delta\varphi$  в радианах, а  $\Delta a$  в долях от номинальной амплитуды колебаний элементов.

Иногда при расчетах предполагается, что ошибки внутри допусков распределены равномерно, при этом

$$\Delta^2 = \frac{(\Delta\varphi)^2}{3} + \frac{(\Delta a)^2}{3}. \quad (8.10)$$

Формула (8.7) определяет величину, которую называют чувствительностью антенны к случайным ошибкам возбуждения. Рассмотрим поведение ее в различных случаях. Пусть антенна состоит из ненаправ-

ленных элементов и компенсирована в направлении  $\mathbf{u}_0$ . Тогда  $G(\mathbf{u})$  не зависит от  $\mathbf{u}$  и имеет вид

$$G = \frac{\sum_{q=1}^n a_q^2}{\left| \sum_{q=1}^n a_q \right|^2} \quad (8.11)$$

Если амплитудное распределение равномерно, то  $G = 1/n$ , где  $n$  — число элементов в антенне. При этом  $\sigma = 0,5 \Delta^2 G = 0,5 \Delta^2 n^{-1}$ , откуда видно, что чувствительность антенны к случайным ошибкам возбуждения определяет степень осреднения ошибок по элементам с учетом соответствующих весовых коэффициентов. Для компенсированной антенной решетки при равномерном амплитудном распределении  $G = n^{-1}$  и ошибки осредняются по всем элементам антенны в равной мере. Если компенсация отсутствует и  $a_q \neq 1$ , то  $G(\mathbf{u})$  становится больше, чем  $n^{-1}$ , т. е. число элементов, эффективно осредняющих ошибки возбуждения, как бы уменьшается.

Заметим, что физически величина  $G(\mathbf{u})$  пропорциональна отношению мощности, которую излучала бы антенна в отсутствии взаимодействия ее элементов к интенсивности, создаваемой ею в дальнем поле в направлении максимума характеристики направленности. Отсюда и без математического анализа ясно, что компенсированные антенны имеют меньшую чувствительность к случайным ошибкам возбуждения, чем некомпенсированные криволинейные. Так большой чувствительностью к случайным ошибкам должна обладать, например, некомпенсированная цилиндрическая антенна, работающая сектором  $2\pi$ . Это и понятно, ведь в этом случае давление в дальнем поле определяется только элементами, расположенными в первой зоне Френеля, и, с одной стороны, осреднение происходит по малому числу преобразователей, а с другой стороны, при наличии ошибок остальные зоны Френеля могут не полностью компенсировать друг друга. И то и другое приводит к увеличению искажений характеристики направленности, что и отражается на увеличении  $G(\mathbf{u})$ .

В случае выполнения условий теоремы умножения, выражение (8.7) можно записать так:

$$G(\mathbf{u}) = R_s^2(\mathbf{u}) \frac{\sum_{q=1}^n |A_q|^2}{\left| \sum_{q=1}^n A_q e^{-ik\rho_q \mathbf{u}_0} \right|^2} = R_s^2(\mathbf{u}) G_0, \quad (8.12)$$

где  $R_s(\mathbf{u})$  — характеристика направленности отдельного элемента;  $G_0$  — чувствительность к случайным ошибкам антенны, состоящей из ненаправленных элементов.

Из формулы (8.6) следует, что математическое ожидание квадрата характеристики направленности равно сумме квадрата характеристики направленности антенны без ошибок и квадрата некоторого рассеянного поля. При выполнении условий теоремы умножения это рассеянное поле имеет направленность, совпадающую с направленностью отдельного элемента, а в случае ненаправленного элемента оно также ненаправлено.

Рассмотрим пример расчета искажений характеристики направленности антенны при наличии случайных ошибок. Пусть линейная антенна состоит из десяти ненаправленных элементов и  $A_q = 1$  для всех  $q$ . Будем считать, что амплитудные и фазовые ошибки возбуждения равновероятно распределены внутри интервалов  $\pm \Delta\varphi$  и  $\pm \Delta\alpha$ , причем  $\Delta\varphi = 10^\circ$  и  $\Delta\alpha = 0,15$ . Переводя градусы в радианы и вычисляя  $\Delta^2$  по формуле (8.10), получим  $\Delta^2 = 0,018$ , откуда  $\sigma^2 = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,018 = 0,0009$  и  $\sigma = 0,03$ . Рассмотрим параметры  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})$  в направлении  $\mathbf{u}_1$ , таком, что  $R(\mathbf{u}_1)$  определяется известной величиной, например, 0,1. С помощью графиков, приведенных на рис. 100, рис. 99 и рис. 98, зная  $\sigma$  и  $R(\mathbf{u}_1)$  находим, что математическое ожидание характеристики направленности при наличии ошибок равно примерно 0,106 и что с вероятностью 0,99 (0,95) величина  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u}_1)$  не превосходит 0,175 (0,15).

Аналогично можно решить и обратную задачу, т. е. по заданному с какой-то вероятностью допустимому искажению характеристики направленности найти возможную суммарную дисперсию и далее — допуск на амплитудно-фазовые ошибки.

## § 24. Влияние случайных ошибок на коэффициент концентрации и помехоустойчивость антенны

Для приближенного нахождения математического ожидания коэффициента концентрации будем исходить из определения коэффициента концентрации через интеграл от квадрата модуля характеристики направленности. Воспользуемся методом линеаризации для вычисления математического ожидания функции через математические ожидания ее аргументов и примем во внимание, что математическое ожидание интеграла равно интегралу от математического ожидания подынтегральной функции. Кроме того, учтем, что в соответствии с формулой (8.1) характеристика направленности  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})$  при  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  может быть неравна единице и поэтому подставлять в формулу, определяющую  $K$ , следует отношение  $R_{\text{ош}}(\mathbf{u})/R_{\text{ош}}(\mathbf{u}_0)$ . В результате получим следующее выражение:

$$M[K] = \frac{4\pi M [R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u}_0)]}{\int_{\Omega} M [R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})] d\Omega}.$$

Учитывая формулу (8.6) и полагая  $R(u_0) = 1$ , имеем

$$M[K] = \frac{4\pi [1 + \Delta^2 G(u_0)]}{\int_{\Omega} R^2(u) d\Omega - \Delta^2 \int_{\Omega} G(u) d\Omega}.$$

Рассмотрим случай, когда выполняются условия теоремы умножения. При этом  $G(u)$  определяется формулой (8.12) и

$$M[K] = \frac{1 + \Delta^2 R_0(u_0) G_0}{1 + \Delta^2 K G_0 K_0^{-1}},$$

где  $K$  и  $K_0$  — коэффициенты концентрации антенны (без учета ошибок возбуждения) и элемента;  $G_0$  — чувствительность к случайным ошибкам гипотетической решетки, элементы которой расположены в центрах реальных и имеют такое же возбуждение.

В большинстве практических случаев можно считать, что  $1 \gg \Delta^2 R_0(u_0) G_0$  и поэтому

$$M[K] = \frac{K}{1 + \Delta^2 K G_0 K_0^{-1}}. \quad (8.13)$$

Если элементы антенны расположим на криволинейной поверхности и условия теоремы умножения не выполняются, то не удастся в общем случае вычислить интеграл по полному телесному углу от  $G(u)$  и получить простую формулу для определения  $M[K]$ . Однако иногда приближенно можно полагать, что элементы ненаправленные и тогда несколько заниженное значение  $M[K]$  найдется из выражения

$$M[K] = \frac{K}{1 + \Delta^2 K G_0}. \quad (8.14)$$

И, наконец, для грубой оценки математического ожидания коэффициента концентрации компенсированной антенны, состоящей из большого числа элементов, расположенных на расстояниях, близких к  $0,5 \lambda$ , полагая приближенно  $K = n$  и  $G = n^{-1}$ , где  $n$  — число элементов антенны, можно пользоваться простой формулой

$$M[K] = \frac{K}{1 + \Delta^2} \approx K(1 - \Delta^2).$$

Полученные соотношения справедливы и для помехоустойчивости антенны в поле дальних изотропных помех, поскольку эта величина совпадает с коэффициентом концентрации. Однако подобные же выражения можно получить и для помехоустойчивости антенны в произвольном поле помех.

Действительно, в соответствии с формулой (1.79) отношение мощностей сигнала и помехи в узкой полосе частот на выходе антенны оп-

ределяется отношением двойных сумм от функций корреляции

$$\frac{W_c}{W_n} = \chi = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^n} = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q \text{ош} A_g^* \text{ош} R_{qg}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q \text{ош} A_g^* \text{ош} R_{qg}^n},$$

где  $K_{qg}^c$ ,  $R_{qg}^c$ ,  $K_{qg}^n$ ,  $R_{qg}^n$  — функции пространственно-временной и пространственной корреляции сигналов и помех соответственно.

Переходя к математическому ожиданию отношения  $\chi$  и воспользовавшись методом линеаризации, получим

$$M[\chi] = \frac{M \left[ \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q \text{ош} A_g^* \text{ош} R_{qg}^c \right]}{M \left[ \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q \text{ош} A_g^* \text{ош} R_{qg}^n \right]}. \quad (8.15)$$

Заметим, что это же выражение иногда получают без привлечения метода линеаризации, несколько изменяя постановку задачи, а именно, вычисляя не математическое ожидание отношения  $W_c$  и  $W_n$ , а сразу отношение их математических ожиданий. При этом не математическое ожидание помехоустойчивости антенны при наличии случайных ошибок возбуждения, а сама помехоустойчивость определяется как отношение математических ожиданий  $W_c$  и  $W_n$ .

Математические ожидания модулей двойных сумм выражения (8.15) могут быть вычислены так же, как математическое ожидание выражения  $R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})$ . Действительно, как видно из формулы (8.4), функция  $R_{\text{ош}}^2(\mathbf{u})$  определяется аналогичной двойной суммой такого же вида. В результате вычислений получим

$$M[\chi] = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* R_{qg}^c + \Delta^2 \sum_{q=1}^n |A_q|^2 R_{qq}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* R_{qg}^n + \Delta^2 \sum_{q=1}^n |A_q|^2 R_{qq}^n} = \frac{\frac{W_c}{W_n} + \Delta^2 G_n^c}{1 + \Delta^2 G_n^n}, \quad (8.16)$$

где

$$G_n^c = \frac{\sum_{q=1}^n |A_q|^2 R_{qq}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* R_{qg}^n};$$

$$G_n^n = \frac{\sum_{q=1}^n |A_q|^2 R_{qq}^n}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* R_{qg}^n} = \frac{W_c}{W_n} \cdot \frac{\sum_{q=1}^n |A_q|^2 R_{qq}^n}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n A_q A_g^* R_{qg}^c} = \frac{W_c}{W_n} G_n^c.$$

В частных случаях формула (8.16) может быть существенно упрощена. Особенно простые выражения получаются, если источники помех расположены на поверхности сферы произвольного радиуса. При этом появляется возможность ввести в рассмотрение помехоустойчивость антенны  $\kappa$ , относя  $W_c/W_n$  к отношению интенсивностей сигнала и помехи в центре сферы, и рассматривать математическое ожидание  $\kappa$ . Воспользовавшись формулой (3.80), можно записать математическое ожидание  $\kappa$  следующим образом:

$$M[\kappa] = \frac{\kappa + \Delta^2 G_n^c}{1 + \Delta^2 \kappa G_n^c}, \quad (8.17)$$

где

$$G_n^c = \frac{r_c^2 \int_{\Omega} I_n(u) d\Omega \sum_{q=1}^n |A_q p'_q(r_c, u_q)|^2}{r_n^2 \int_{\Omega} I_n(u) \left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(r_n, u_q) \right|^2 d\Omega};$$

$$G_n^n = \frac{r_n^2 \int_{\Omega} I_n(u) \sum_{q=1}^n |A_q p'_q(r_n, u_q)|^2 d\Omega}{r_c^2 \int_{\Omega} I_n(u) \left| \sum_{q=1}^n A_q p'_q(r_c, u_q) \right|^2 d\Omega}.$$

Для многоэлементных компенсированных антенн можно полагать  $\kappa \gg \Delta^2 G_n^c$  и формула (8.17) несколько упрощается.

## § 25. Учет влияния случайных ошибок возбуждения при синтезе антенн

Все задачи, решаемые теорией антенн, можно подразделить на прямые и обратные. К прямым относятся задачи определения направленных свойств антенн при заданной их конфигурации и заданном возбуждении. К обратным — нахождение антенн по заданным направленным свойствам. В большинстве случаев конфигурация антенны считается заданной и в обратных задачах теории антенн, а определяется распределение возбуждения. Иногда вместо прямых и обратных задач говорят об анализе и синтезе антенн.

За небольшим исключением, касающимся приближенного определения возбуждений, обеспечивающих максимум коэффициента концентрации и синтеза антенн с помощью метода стационарной фазы, все рассмотренные выше вопросы относятся к анализу антенн. Задачи и методы синтеза антенн подробно изложены в работах [26] и [18] и останавливаться здесь на их изложении мы не будем.

Представляется, однако, целесообразным рассмотреть некоторые методы, связанные с учетом случайных ошибок возбуждения. Анализ выражения (8.7), определяющего чувствительность антенны к случай-

ным ошибкам, показывает, что введение амплитудных распределений, отличных от равномерных, и фазовых, отличных от обеспечивающих компенсацию антенны в некотором направлении, приводит к увеличению искажений параметров антенн при наличии ошибок. Из этого ясно, что при конечной величине суммарной дисперсии случайных ошибок бессмысленно вводить распределения, обеспечивающие, например, очень малый уровень добавочных максимумов — из-за увеличения  $G(\mathbf{u})$  при небольших расчетных максимумах реальные могут существенно возрасти.

В связи с этим представляется целесообразным развитие таких методов синтеза антенн, которые позволяли бы определять распределения, обеспечивающие удовлетворение некоторых требований не к расчетным параметрам антенн, а к их математическому ожиданию или к их величине, определяемой с заданной вероятностью при наличии известных случайных ошибок возбуждения.

К сожалению, в части синтеза антенн по заданным характеристикам направленности такие методы отсутствуют, однако есть ряд работ, рассматривающих максимизацию коэффициента концентрации или помехоустойчивости антенны при наличии случайных ошибок возбуждения.

Первой работой, в которой связывалась максимизация коэффициента концентрации антенны с ее чувствительностью к случайным ошибкам, была работа [58]. В ней предлагался метод определения семейства возбуждений антенны, причем каждому из возбуждений соответствуют свои величины  $K$  и  $G$ . Исходя из разумного соотношения между величиной коэффициента концентрации и чувствительности к случайным ошибкам (чем выше  $K$ , тем больше  $G$  и тем больше падение  $M[K]$  из-за ошибок) можно выбрать наиболее подходящий вариант возбуждений. Следующим шагом явилась работа [37], в которой предлагалось определять возбуждения, обеспечивающие максимум математического ожидания коэффициента концентрации или помехоустойчивости антенны при заданной величине случайных ошибок возбуждения.

Воспользуемся средним выражением равенства (8.16), определяющим математическое ожидание отношения сигнал/помеха на выходе антенны непосредственно через возбуждения элементов. Коэффициенты возбуждения и функции пространственной корреляции в общем случае являются величинами комплексными, поэтому представим их как сумму действительных и мнимых частей. Затем вычислим производные от  $M[\chi]$  по действительной и мнимой части коэффициента возбуждения элемента с произвольным номером  $s$  и приравняем их нулю.

Полученные два уравнения объединяются в одно, имеющее вид

$$M[\chi] = \frac{\sum_{q=1}^n A_q R_{qs}^c + \Delta^2 A_s R_{ss}^c}{\sum_{q=1}^n A_q R_{qs}^n + \Delta^2 A_s R_{ss}^n}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (8.18)$$

Решение этой системы и является распределением, обеспечивающим при заданной дисперсии случайных ошибок  $\Delta^2$  максимум математического ожидания  $\chi$ .

Система (8.18) является нелинейной, поскольку и  $M[\chi]$  зависит от неизвестных  $A_q$ , поэтому пользоваться ею для расчетов достаточно сложно.

Запишем ее несколько иначе:

$$\sum_{q=1}^n A_q R_{qs}^n + \Delta^2 A_s R_{ss}^n = \frac{1}{M[\chi]} \left[ \sum_{q=1}^n A_q R_{qs}^c + \Delta^2 A_s R_{ss}^c \right], \quad s = \overline{1, n} \quad (8.19)$$

и рассмотрим некоторые частные случаи.

Прежде всего заметим, что для многоэлементной антенны второе слагаемое в правой части значительно меньше первого и поэтому им можно пренебречь. Кроме того, в некоторых случаях, в частности, при падении на антенну сигнала от одного источника, функция  $R_{qs}^c$  представляется произведением двух сомножителей, каждый из которых зависит только от одного индекса  $q$  или  $s$ , т. е.  $R_{qs}^c = R_q^c R_s^c$ . При таких допущениях выражение (8.19) принимает следующий вид:

$$\sum_{q=1}^n A_q R_{qs}^n + \Delta^2 A_s R_{ss}^n = R_s^c \frac{\sum_{q=1}^n A_q R_q^c}{M[\chi]}; \quad s = \overline{1, n}. \quad (8.20)$$

Отношение в правой части не зависит от  $s$  и может быть обозначено символом  $C$ . Поскольку нам достаточно определить неизвестные коэффициенты  $A_q$  с точностью до произвольного (но одинакового для всех  $A_q$ ) сомножителя, обозначим  $A'_q = A_q/C$  и получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{q=0}^n A'_q R_{qs}^n + \Delta^2 A'_s R_{ss}^n = R_s^c, \quad s = \overline{1, n}. \quad (8.21)$$

Решение такой системы уже не представляет больших трудностей.

Если случайные ошибки возбуждения элементов антенны отсутствуют, то  $\Delta^2 = 0$  и мы имеем систему

$$\sum_{q=1}^n A'_q R_{qs}^n = R_s^c; \quad s = \overline{1, n}, \quad (8.22)$$

соответствующую случаю абсолютной максимизации помехоустойчивости или коэффициента концентрации антенны, рассмотренному впервые несколько иными способами для электромагнитных антенн в работе [46] и для акустических антенн в работе [66].

Аналогично можно рассмотреть максимизацию коэффициента кон-



центрации при некоторых условиях, налагаемых на возбуждения элементов антенн. Так можно решить задачу о максимизации коэффициента концентрации при условии, что элементы излучают синфазно, или происходит синфазное сложение колебаний от отдельных элементов в заданном направлении, или имеется некоторая известная зависимость между коэффициентами возбуждения по амплитуде или фазе (что может представлять интерес при практическом осуществлении устройств, обеспечивающих введение распределений).

В случае изотропных помех дальнего поля функция  $K_{qs}^n$  пропорциональна взаимному активному сопротивлению излучения между элементами  $q$  и  $s$ , а  $K_{qs}^c$  в соответствии с формулой (3.72) пропорционально  $\rho'_q(u_0) \rho_s^{**}(u_0)$ , поэтому выражение (8.21) принимает вид

$$\sum_{q=1}^n A_q r_{qs} + \Delta^2 A_s r_{ss} = \rho_s^{**}(u_0), \quad s = \overline{1, n}, \quad (8.23)$$

и если элементы антенны ненаправлены, то

$$\sum_{q=1}^n A_q \frac{\sin k |\rho_q - \rho_s|}{k |\rho_q - \rho_s|} + \Delta^2 A_s = e^{ik\rho_s u_0}, \quad s = \overline{1, n}.$$

При записи этих выражений принято во внимание, что коэффициенты возбуждения интересуют нас с точностью до постоянного множителя и поэтому все постоянные коэффициенты опущены.

Мы не будем подробно останавливаться на результатах расчетов коэффициентов концентрации при оптимальных возбуждениях и укажем только на некоторые основные зависимости. При увеличении числа элементов антенны, если расстояния между их центрами постоянны, так же, как и при увеличении расстояния между элементами, эффект увеличения коэффициента концентрации существенно снижается. То же самое происходит и при увеличении числа измерений антенны, т. е. при переходе от линейных к поверхностным и объемным антеннам. Практически существенного эффекта можно добиться только для очень близкого расположения многих элементов антенны и при достаточно малых ошибках  $\Delta^2$ . Сказанное относится к случаю изотропных помех дальнего поля; для других же моделей распределения источников помех выигрыш при максимизации математического ожидания помехоустойчивости может быть заметным и для сравнительно больших антенн, причем чем более неравномерно поле помех, тем эффективнее применение оптимальных возбуждений.

Весьма плодотворная идея предложена в работе [25]. Суть ее сводится к следующему. Безотносительно от характера поля помех в ряде случаев целесообразно получить характеристику направленности, имеющую в некоторых областях пространства произвольный уровень, а в других — малый, или же меняющийся примерно по известному закону. Для решения таких задач можно задаться некоторым распределением помех в дальнем или ближнем полях (или пространственным спектром помех), а затем, определив функции корреляции, найти оптимальные коэффициенты возбуждения, решая системы (8.21) или

(8.22). Таким образом, можно решать целый ряд задач синтеза антенн не по заданным характеристикам направленности, а по некоторым соотношениям их интегральных параметров. В частности, можно синтезировать антенну при заданной величине дисперсии случайных ошибок с минимальным излучением мощности в некоторые области пространства, например, вне угла, занимаемого главным максимумом характеристики направленности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современное состояние теории направленности гидроакустических антенн можно охарактеризовать следующим образом.

Имеющиеся в арсенале исследователей теоретические методы анализа направленных свойств антенн позволяют с практической точки зрения достаточно точно определять параметры антенн, если только известно поле, создаваемое отдельным элементом антенны. Для некоторых антенн, которые условно можно отнести к простейшим, поле отдельного элемента определяется сравнительно легко. В первую очередь к классу простейших следует отнести антенны, состоящие из ненаправленных элементов, меньших длины волны, а также плоские антенны при больших относительных размерах и плотном расположении элементов. Несколько сложнее обстоит дело в случае поверхностных цилиндрических, сферических или других антенн, когда направленность элемента в существенной степени определяется дифракцией на поверхности самой антенны. Если при этом активные поверхности элементов плоские и элементы расположены на поверхностной антенне больших волновых размеров с малыми зазорами, то для сферических, круговых и эллиптических цилиндрических антенн и некоторых других можно воспользоваться строгим решением об излучении элемента, полученным, например, с помощью разложений в ряды по собственным функциям.

Однако практически могут встретиться случаи, когда вследствие различной кривизны поверхностей элементов и всей антенны, присутствия акустических экранов или других конструктивных особенностей невозможно использовать классические решения об излучении источника на поверхности сферы или цилиндра.

В настоящее время ведутся интенсивные поиски методов определения полей источников при сложных граничных условиях как по импедансным свойствам, так и по конфигурации. Достигнутые в этом направлении успехи пока скромны: решены только простейшие задачи, да и то решение часто требует очень большого объема вычислительных работ. Представляется, что такое состояние рассматриваемого вопроса может измениться радикальным образом только после разработки принципиально новых эффективных методов теории дифракции. Практически же, в случаях, когда поле отдельного элемента антенны не поддается расчету, при анализе направленных свойств антенны приходится задаваться им исходя или из априорных сведе-

ний, или из экспериментальных данных, полученных в близких условиях.

Естественно, что для грубой оценки параметров антенн достаточным бывает довольно грубое приближение к реальному полю элемента, но для точного расчета, особенно для точного расчета коэффициента концентрации при сравнительно больших расстояниях между элементами или малых уровней характеристики направленности необходимо точное знание поля излучения элемента.

В связи с этим одним из основных направлений развития теории направленности гидроакустических антенн была и остается разработка методов определения полей отдельных элементов антенн с учетом их конструктивных особенностей.

Требуют дальнейшего развития и методы определения сопротивлений излучения отдельных элементов и всей антенны в целом. Общие расчетные выражения, определяющие эти величины, записываются сравнительно просто, однако их практический расчет в настоящее время весьма сложен и далеко не во всех случаях может быть доведен до конца.

В книге приведен приближенный метод расчета параметров антенн при наличии разбросов амплитудно-фазовых возбуждений элементов. Этот метод с успехом может использоваться для инженерных оценок, однако в случаях, когда требуется большая точность, а тем более, когда требуется учитывать отказы элементов, необходимо применение более точных методов. Проблеме расчета надежности антенн при наличии отказов и разбросов параметров элементов в настоящее время уделяется определенное внимание, однако пока еще не разработаны достаточно простые методы, обеспечивающие нужную точность. В некоторой степени положение спасает возможность применения в каждом конкретном случае методов статистического моделирования на ЦВМ, однако такой путь не является вполне удовлетворительным.

Много нерешенных (или решаемых недостаточно эффективно) вопросов относится к исследованию направленности гидроакустических антенн в реальных условиях, как в части полей помех и сигналов, воздействующих на антенну, так и в части влияния на направленность антенн окружающей среды, включая и элементы конструкции носителей.

Эти и многие другие вопросы теории направленности гидроакустических антенн еще ждут своих исследователей.

---

**ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕЕ НЕИЗОТРОПНЫХ ПОМЕХ ДАЛЬНЕГО ПОЛЯ**

В реальных условиях работы гидроакустические антенны могут находиться под воздействием весьма сложного поля помех (см. например, [29]). Изучение помехоустойчивости антенн в таких условиях может производиться путем создания модели поля помех, приближающийся к реальному полю, и последующего расчета антенн применительно к этой модели.

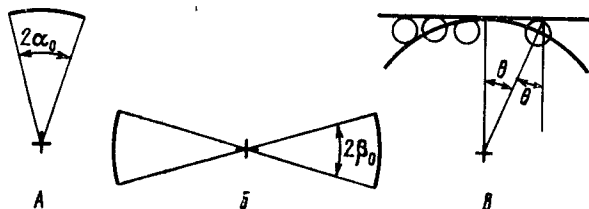


Рис. I. Расположение источников помех.

Рассмотрим помехоустойчивость линейной антенны в предположении, что источники помех распределены на отдельных участках сферы большого радиуса. В случае *A*, показанном на рис. I, независимые источники помех равномерно распределены по сегменту сферы с центральным углом  $2\alpha_0$ , в случае *B* — по шаровому поясу с центральным углом  $2\beta_0$ , в случае *B* источники расположены на поверхности верхней полусферы и имеют распределение колебательных скоростей, соответствующее закону  $\cos^{1/2} \theta$ . Как показано в [23], последний случай эквивалентен воздействию на антенну дальних источников, распределенных равномерно на плоскости и имеющих характеристики направленности, описываемые функцией  $\cos \theta$ . Для упрощения будем считать, что излучение источников узкополосно, т. е. что  $\omega(\sigma) = \omega(\sigma) \delta(\omega_0)$ . Тогда из формулы (3.71) имеем

$$K_{qg}^n = s_0 r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_q A_g^* \gamma^2 p'_q(r_q, u_q) p'_g(r_g, u_g) |\omega(\theta, \omega_0)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (1)$$

Пусть элементы антенны ненаправлены и лежат вдоль вертикальной оси  $z$ ; нулевой элемент лежит в точке  $z = 0$ ; расстояние между соседними элементами  $d$ ; амплитудно-фазовое распределение равномерно. Тогда

$$p'_q(r_q, u_q) = -\frac{ik_0 c s_0}{4\pi r} e^{ik(r-qd \sin \theta)},$$

откуда

$$K_{qg}^n = 2\pi C \int_0^\pi |\omega(\theta)|^2 e^{-ikd(q-g) \sin \theta} \sin \theta d\theta, \quad (2)$$

где

$$C = \left( \frac{k_0 c \gamma s_0}{4\pi} \right)^2.$$

Полагая в случае А

$$w(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\theta| < \alpha_0; \\ 0 & \text{при } |\theta| > \alpha_0; \end{cases}$$

в случае В

$$w(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| < \beta_0; \\ 0 & \text{при } \left| \theta - \frac{\pi}{2} \right| > \beta_0; \end{cases}$$

в случае В

$$w(\theta) = \begin{cases} \cos \theta^{1/2} & \text{при } |\theta| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{при } |\theta| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

и вычисляя интеграл в формуле (2), получим выражения, определяющие функции пространственной корреляции помех на ненаправленных элементах соответственно в трех рассматриваемых случаях

$$K_{qg}^n = \frac{2\pi s_0 C}{k d_{qg}} [\sin k d_{qg} - \sin(k d_{qg} \cos \alpha_0) + i \cos k d_{qg} - i \cos(k d_{qg} \cos \alpha_0)];$$

$$K_{qg}^n = \frac{2\pi s_0 C}{k d_{qg}} \sin(k d_{qg} \sin \beta_0);$$

$$K_{qg}^n = \frac{2\pi s_0 C}{(k d_{qg})^2} [\cos k d_{qg} + k d_{qg} \sin k d_{qg} - 1 - i \sin k d_{qg} + i k d_{qg} \cos k d_{qg}];$$

где  $d_{qg} = d(q-g)$ .

Пусть источник сигнала производительностью  $Q$  находится в дальнем поле в направлении  $\theta = \pi/2$ . Тогда в соответствии с формулой (3.74) имеем

$$K_{qg}^c = \frac{CQ}{r^2},$$

и помехоустойчивость антенны, т. е. частное от деления отношения сигнала и помехи на выходе антенны на это же отношение для ненаправленного элемента (для определенности имеющего порядковый номер  $q$ ) выражается следующим образом:

$$\chi = \frac{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^c}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^n} \cdot \frac{K_{qq}^n}{K_{qq}^c} = \frac{n^2}{\sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n K_{qg}^r}, \quad (3)$$

где  $K_{qg}^r$  — действительная часть коэффициента пространственной корреляции помех на элементах антенны (мнимые части  $K_{qg}^n$  в двойной сумме по  $q$  и  $g$  компенсируют друг друга, что ясно из анализа суммы двух слагаемых с индексами  $q, g$  и  $g, q$ ), имеющая в рассматриваемых случаях следующий вид:

в случае А

$$K_{qg}^r = \frac{\sin k d_{qg} - \sin(k d_{qg} \cos \alpha_0)}{k d_{qg} (1 - \cos \alpha_0)};$$

в случае Б

$$K'_{qg} = \frac{\sin(k d_{qg} \sin \beta_0)}{k d_{qg} \sin \beta_0}; \quad (4)$$

в случае В

$$K'_{qg} = \frac{\cos k d_{qg} + k d_{qg} \sin k d_{qg-1}}{0,5 (k d_{qg})^2}.$$

В целях получения основных закономерностей, иллюстрирующих зависимость  $\chi$  от поля помех, и волновых размеров антенны, будем считать, что антенна не дискретна, а непрерывна; при этом

$$\chi = \frac{H^2}{\int_0^H \int_0^H K'(z - z') dz dz'}$$

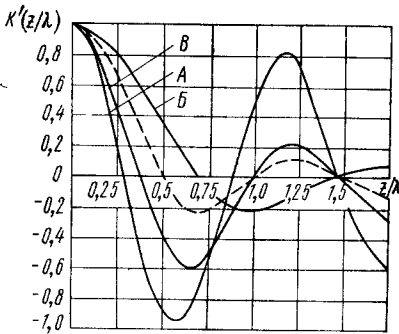


Рис. II. Коэффициент корреляции помех в рассматриваемых случаях при  $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/4$ .

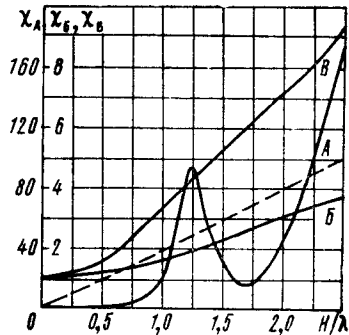


Рис. III. Зависимость  $\chi$  от  $H/\lambda$  для рассматриваемых моделей помех при  $\alpha_0 = \beta_0 = \pi/4$ .

где  $K'(z - z')$  определяется формулами (4), в которых вместо  $d_{qg}$  подставлена величина  $z - z'$ ;  $H$  — длина линии.

Двойной интеграл знаменателя преобразуется в одинарный, и в результате вычислений имеем.

для случая А

$$\chi = \frac{0,5k^2H^2(1 - \cos \alpha_0)}{kH [Si(kH) - Si(kH \cos \alpha_0)] + \cos kH - 1 - \cos^{-1} \alpha_0 [\cos(kH \cos \alpha_0) - 1]};$$

для случая Б

$$\chi = \frac{0,5k^2H^2 \sin \beta_0}{kH Si(kH \sin \beta_0) + \sin^{-1} \beta_0 [\cos(kH \sin \beta_0) - 1]};$$

для случая В

$$\chi = \frac{0,25k^2H^2}{\ln(kH\gamma) - Ci kH}.$$

Здесь  $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$  — интегральный синус;

$$\text{Ci}(x) = - \int_0^x \frac{\cos t}{t} dt \text{ — интегральный косинус;}$$

$$\gamma = e^c = 1,78 \text{ (} c \text{ — постоянная Эйлера).}$$

На рис. II представлен вид функций  $K'(z/\lambda)$ , где  $z$  — расстояние между элементами. Для сравнения приведена штриховая кривая функции  $K'(z/\lambda)$  для изотропного дальнего поля.

На рис. III показана зависимость  $\chi$  от отношения  $H/\lambda$ . Помехоустойчивость антенны существенно зависит от характера поля помех. Как и следовало ожидать, она максимальна при расположении источников помех над антенной и минимальна при совпадении направлений прихода сигнала и помех. Штриховой линией на рис. III показано изменение помехоустойчивости антенны в изотропном поле помех.

Интересно отметить, что величины  $\chi_A$ ,  $\chi_B$  и  $\chi_B$  по-разному зависят от частоты.

Полагая  $kH \gg 1$ , для случаев А и Б можно получить следующие выражения:

$$\chi = \frac{2\pi^2 H^2}{\lambda^2} \cos \alpha_0; \quad \chi = \frac{2H}{\lambda} \sin \beta_0.$$

Сравнивая рис. II и III, можно заметить, что уход первого нуля коэффициента корреляции в область больших  $z/\lambda$  при неизменном характере спада его огибающей (по сравнению со случаем изотропного дальнего поля) приводит к уменьшению  $\chi$  и наоборот, уход первого нуля в область меньших  $z/\lambda$  при увеличении осцилляций  $K'(z/\lambda)$  приводит к увеличению помехоустойчивости антенны.

## ПРИЛОЖЕНИЕ II

### НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН

Приведем некоторые примеры использования формул и графиков, содержащихся в книге, для расчета параметров гидроакустических антенн.

**Пример 1.** Определим параметры некомпенсированного сектора кругового цилиндра с центральным углом  $2\psi_0 = 50^\circ$  и высотой  $H = 5\lambda$ , расстояние между элементами  $d = 0,3\lambda$ ,  $kR = 34$  ( $R$  — радиус цилиндра).

Вычислим отношение стрелки прогиба рабочего участка сектора к длине волны:

$$h/\lambda = R/\lambda (1 - \cos \psi_0) = \frac{34}{2\pi} (1 - 0,906) \approx 0,51.$$

Так как  $d < 0,5\lambda$ , можно считать, что антенна непрерывна. Вид характеристики направленности в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, можно определить с помощью рис. 35. Отличительной особенностью ее является то, что на основном максимуме имеются две «ступеньки»: одна примерно на уровне 0,8, другая на уровне 0,3. Ширину основного максимума  $\Phi_{0,7}$  найдем, пользуясь рис. 36. При  $h/\lambda = 0,5$  отношение  $\Phi_{0,7}/2\psi_0 \approx 0,6$ ; откуда  $\Phi_{0,7} \approx 30^\circ$ . Приближенную оценку коэффициента концентрации можно сделать по формуле (5.52)

$$K = \frac{2\pi H}{\lambda \psi_0} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 180^\circ}{25^\circ \pi} = 72.$$



Более точно величину  $K$  можно определить, пользуясь замечанием, сделанным после вывода формулы (5.52), и графиком, приведенным на рис. 38. Умножая  $2\pi H/\lambda$  на величину  $1,5/\psi_0$  (определенную по рис. 38 для  $h/\lambda = 0,5$ ) имеем:

$$K = \frac{2\pi H \cdot 1,5}{\lambda \psi_0} = 72 \cdot 1,5 = 108.$$

Найдем чувствительность антенны  $\gamma$  в предположении, что чувствительность ее элемента  $\gamma_0$  известна и элементы соединяются параллельно. Пользуясь формулой (5.49) и рис. 30, имеем:

$$K_p = \frac{1}{\psi_0} \sqrt{\frac{\pi}{kR}} \cdot 0,9 \approx 0,7,$$

откуда  $\gamma \approx 0,7 \gamma_0$ .

Для определения характеристики направленности в плоскости оси цилиндра в соответствии с теоремой умножения следует умножить характеристику направленности линии длиной  $5\lambda$  на характеристику направленности дуги. Так как последняя в области основного максимума линии меняется незначительно (см. рис. 37, а), то в этой области характеристика направленности сектора совпадает с характеристикой направленности отрезка (т. е. имеет ширину, на уровне  $0,7$  равную  $2 \arcsin \frac{1,39\lambda}{\pi H} \approx 10^\circ$ ), а в направлении углов, близких к оси цилиндра, характеристика направленности дуги примерно в  $1,5$  раза увеличивает уровень добавочных максимумов линии.

**Пример 2.** Определим коэффициент концентрации компенсированной круговой цилиндрической антенны при аппроксимации характеристики направленности ее элементов в переднем полупространстве следующими функциями:

$$\left. \begin{aligned} D(\theta') &= \cos^{1/2} \theta'; \\ D(\theta') &= \cos \theta'; \\ D(\theta') &= \cos^2 \theta'; \\ D(\theta') &= |\sin 2\theta'|, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где  $\theta'$  — угол между нормалью к поверхности элемента и направлением на точку наблюдения.

Излучение элементов антенны в тыльное полупространство отсутствует.

Будем предполагать, что сопротивления излучения отдельных горизонтальных рядов антенны одинаковы и равны сопротивлению излучения таких же рядов в бесконечной по вертикали антенне. При этом в соответствии с формулой (3.59)

$$K = \frac{2H}{\lambda} \frac{2\pi}{\sum_{n_1}^{n_2} \eta_n \int_0^{2\pi} R^2(\theta_n, \varphi) d\varphi}, \quad (6)$$

где

$$n_1 = -E \left[ \frac{h}{\lambda} (1 + \cos \theta_0) \right];$$

$$n_2 = E \left[ \frac{h}{\lambda} (1 - \cos \theta_0) \right];$$

$$\eta_n = \begin{cases} 0,5 & \text{при } \cos^2 \theta_n = 1; \\ 1 & \text{при } \cos^2 \theta_n < 1; \end{cases}$$

$$\cos \theta_n = n \frac{\lambda}{h} + \cos \theta_0;$$

$R(\theta, \varphi)$  — характеристика направленности горизонтального (расположенного вдоль направляющей) ряда элементов,  $h$  — расстояние между элементами антенны вдоль образующей;  $H$  — произведение числа горизонтальных рядов элементов на  $h$ ;  $\theta$  — угол, отсчитываемый от оси цилиндра;  $\theta_0$  — угол компенсации антенны.

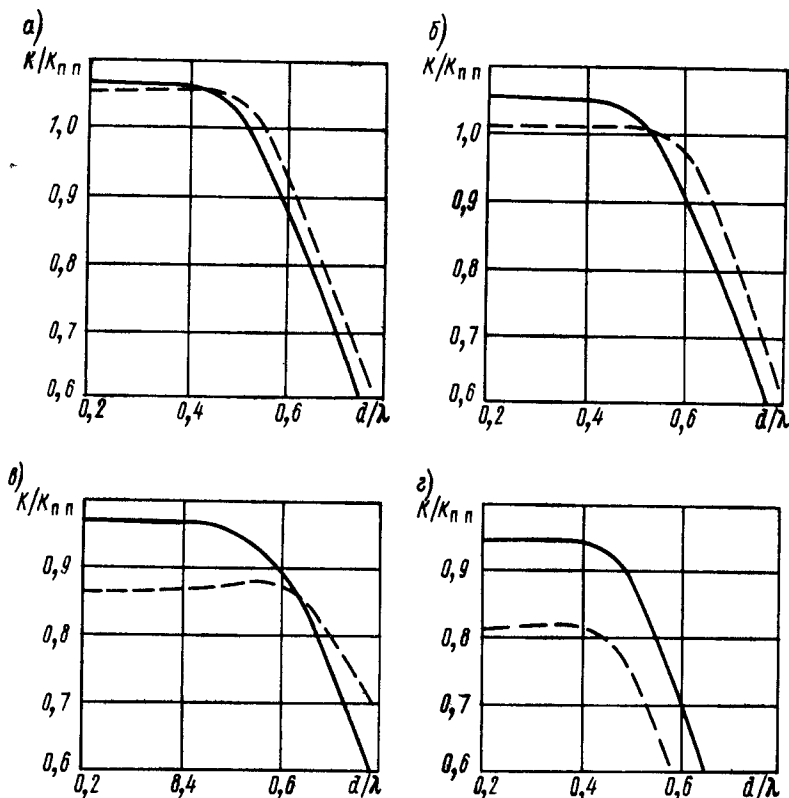


Рис. IV. Зависимость  $K/K_{п.п}$  от  $d/\lambda$ . Варианты  $D(\theta)$

$$a - \cos^{1/2} \theta', \quad б - \cos \theta',$$

$$в - \cos^2 \theta', \quad г - |\sin 2\theta'|,$$

———— распределение  $a_s = 1$ ,

----- распределение  $a_s = D(\psi_s)$ .

Прежде всего найдем связь между углом  $\theta'$  в формулах (5) и углами  $\theta$  и  $\varphi$  сферической системы координат, в которой записана формула (6). Совершая двойной поворот координатной системы, получим

$$\cos \theta' = \sin \theta \cos(\varphi - \psi_s),$$

где  $\psi_s$  — угол, определяющий положение элемента цилиндрической антенны, имеющего номер  $s$ .

Мы не приводили формулу для расчета характеристики направленности дискретной дуги, элементы которой обладают известной направленностью, од-

нако ее легко записать по аналогии с формулой (4.105), справедливой для не-направленных элементов:

$$R(\theta, \varphi) = \left[ \sum_{q=-s}^s a_s R_s(\theta_0) G_s(\theta_0) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left| \sum_{q=-s}^s a_s R_s(\theta, \varphi) G_s(\theta, \varphi) e^{-ikR [\cos \psi_s (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta_0) + \sin \psi_s \sin \theta \sin \varphi]} \right| \quad (7)$$

Здесь

$$G_s(\theta, \varphi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \cos \theta' > 0; \\ 0 & \text{при } \cos \theta' < 0; \end{cases}$$

$R_s(\theta, \varphi)$  — характеристика направленности элемента с номером  $s$ , записанная в координатах  $\theta, \varphi$ .

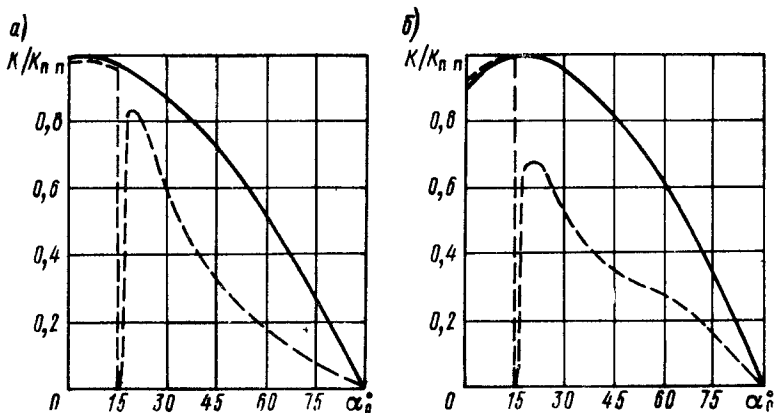


Рис. V. Зависимость  $K/K_{nп}$  от  $\alpha_0$ .

$a - D(\theta') = \cos \theta'$ ,  $б - D(\theta') = |\sin 2\theta'|$ ,  
 —————  $h/\lambda = 0,5$ , — — — —  $h/\lambda = 0,7$ .

На рис. IV представлены результаты расчетов, произведенных по формуле (6), отнесенные к коэффициенту концентрации плоского поршня, совпадающего с проекцией рабочего участка антенны на диаметрально плоскость (рабочий сектор принят равным  $120^\circ$  и  $s_{nп} = 2HR \sin 60^\circ$ ;  $\theta_0 = \pi/2$  и  $2R = 5\lambda$ . Как и в случае элементов в виде полос (см рис 91), с увеличением  $d/\lambda$  отношение  $K/K_{nп}$  падает, причем характер падения (так же, как и величина исходного значения) существенно зависит от вида характеристики направленности элемента.

При  $d/\lambda > 0,5 - 0,6$  оптимальное распределение увеличивает коэффициент концентрации за исключением случая, приведенного на рис. IV, г, в котором, в связи со специфическим видом характеристики направленности, взаимодействие элементов проявляется более заметно. На рис. 109 видно, что максимальная величина  $K$  имеет место при  $D(\theta') = \cos^{1/2} \theta'$ . Однако следует иметь в виду, что при других величинах рабочего сектора и  $hR$ , оптимальной может оказаться другая функция  $D(\theta')$ .

На рис. V представлена зависимость величины  $K/K_{nп}$  от угла поворота характеристики направленности в вертикальной плоскости  $\alpha_0$  ( $\alpha_0 = \theta_0 - \frac{\pi}{2}$ ).

При расчете этой зависимости  $d/\lambda$  полагалось равным 0,5, а  $h/\lambda$  принималось равным 0,5 и 0,7.

Как видно из графика, при  $D(\theta') = |\sin 2\theta'|$  коэффициент концентрации с ростом  $\alpha_0$  вначале растет, а затем падает. В случае  $h/\lambda = 0,7$  при  $\alpha_0 \approx 15^\circ$  имеют место резкие провалы величины  $K$ , вызванные появлением единичного добавочного максимума решетки в направлении  $\theta = 0$ . Для антенны конечной величины эти провалы также будут иметь место, но коэффициент концентрации не будет падать до нуля и соответственно характер изменения  $K$  будет более плавным.

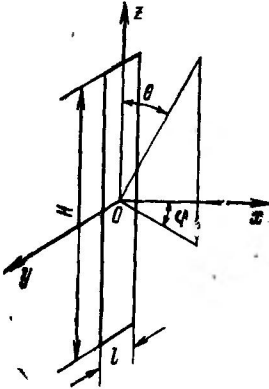


Рис. VI. Расположение системы координат относительно антенны.

**Пример 3.** Определим коэффициент концентрации прямоугольной компенсированной непрерывной антенны, одна сторона которой ( $H$ ) значительно больше  $\lambda$ , а другая ( $l$ ) сравнима с длиной волны в воде (рис. VI).

Для вычисления коэффициента концентрации при компенсации в плоскости  $xOz$ , принимая во внимание, что  $H \gg \lambda$ , можно воспользоваться формулой (3.58) (поскольку плоскость можно рассматривать как частный случай цилиндра с прямолинейной направляющей). В этой формуле  $R_n(\theta_0, \varphi)$  — характеристика направленности направляющей, т. е. отрезка длиной  $l$ , лежащего вдоль оси  $y$ . Легко показать, что в выбранной системе координат  $R_n(\theta, \varphi)$  имеет вид

$$R(\theta, \varphi) = \frac{1}{l} \int_{-l/2}^{l/2} e^{iky \sin \theta \sin \varphi} dy,$$

откуда

$$K = \frac{2Hl^2}{\lambda} \frac{2\pi}{\eta_0 \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ik(y-y') \sin \theta_0 \sin \varphi} d\varphi dy dy'} = \frac{2Hl^2}{\lambda} \left[ \eta_0 \int_0^l (l-y) J_0(ky \sin \theta_0) dy \right]^{-1},$$

где

$$\eta_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \theta_0 < \pi; \\ 0,5 & \text{при } \theta_0 = 0 \text{ и } \theta_0 = \pi. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что антенна излучает одной стороной и находится в бесконечном жестком экране; поэтому интеграл по  $\varphi$  записан в пределах  $-\pi/2, \pi/2$ , а не от 0 до  $2\pi$ , как в формуле (3.58). Вычислив интеграл по  $\varphi$  и введя в рассмотрение угол компенсации  $\alpha_0$ , отсчитываемый от оси  $x$  ( $\alpha_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ ), получим

$$K = \frac{2H}{\lambda} t, \quad (8)$$

где

$$t = \frac{kl \cos \alpha_0}{\eta_0 \left[ 2 \sum_{s=0}^{\infty} J_{2s+1}(kl \cos \alpha_0) - J_1(kl \cos \alpha_0) \right]};$$

$$\eta_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } |\alpha_0| \neq \pi/2; \\ 0,5 & \text{при } |\alpha_0| = \pi/2. \end{cases}$$

На рис. VII представлена зависимость величины  $t$  от параметра  $kl \cos \alpha_0$ . Видно, что, начиная от  $kl \cos \alpha_0 \approx 3$ , величина  $t$  примерно равна  $kl \cos \alpha_0$  (штри-

ховой линией на графике показана зависимость  $t = kl \cos \alpha_0$ ). Поэтому при  $\frac{2l}{\lambda} \cos \alpha_0 > 1$  коэффициент концентрации  $K = \frac{2H}{\lambda} kl \cos \alpha_0 = \frac{4\pi Hl}{\lambda} \cos \alpha_0$ . С помощью кривых рис. VII можно определить зависимость  $K$  от  $\alpha_0$  для любого значения  $l/\lambda$ .

В качестве примера на рис. VIII представлена эта зависимость, нормированная к величине  $\frac{4\pi Hl}{\lambda}$  для некоторых фиксированных  $l/\lambda$ . Во избежание загромождения графика удвоение величины  $K$  при  $\alpha_0 = 90^\circ$  показано только для случаев  $l/\lambda = 1$  и  $l/\lambda = 3$ . Как и следовало ожидать, при малых отношениях  $l/\lambda$  рассматриваемая зависимость близка к аналогичной зависимости для антенны

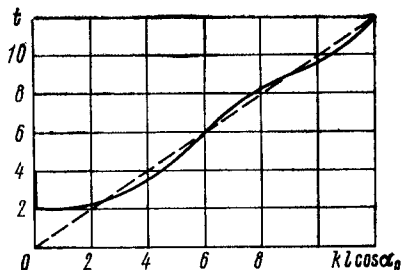


Рис. VII. Зависимость величины  $t$  от параметра  $kl \cos \alpha_0$ .

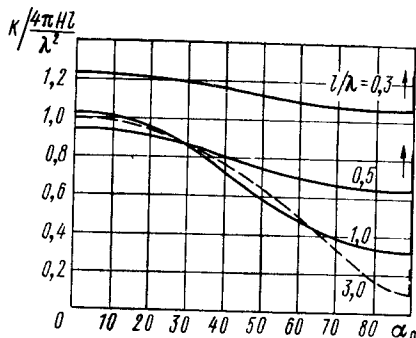


Рис. VIII. Зависимость коэффициента концентрации от угла компенсации  $\alpha_0$ .

в виде отрезка прямой (см. рис. 25); т. е. величина коэффициента концентрации почти не меняется с изменением  $\alpha_0$ . Начиная же с  $l/\lambda = 1$ , коэффициент концентрации, вплоть до углов  $\alpha_0 = 70 \rightarrow 80^\circ$ , меняется по закону косинуса.

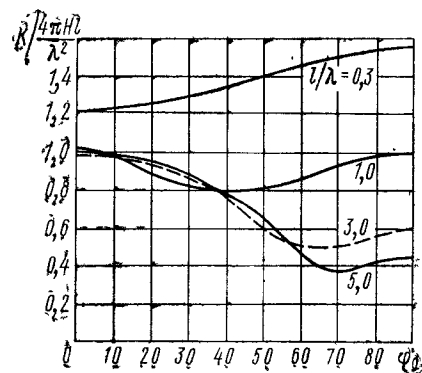


Рис. IX. Зависимость коэффициента концентрации от угла компенсации  $\Phi_0$ .

плоскости  $xOy$  в соответствии с формулой (3.58) может быть записан следующим образом:

Следует отметить, что при конечном отношении  $H/\lambda$  коэффициент концентрации не будет удваиваться скачком при  $\alpha_0 = 90^\circ$ , а начиная с некоторого значения  $\alpha'_0$  (определяемого из условия совпадения нуля характеристики направленности с направлением  $\alpha = \pm 90^\circ$ , т. е.  $\pm \sin \alpha'_0 = 1 - \lambda/H$ ), будет плавно увеличиваться. Из формулы (8) и рис. VII видно, что при  $\alpha_0 = \pi/2$  независимо от  $kl$  величина  $t = 2$  и  $K = 8H/\lambda$ . Этот результат является следствием предположения о том, что  $H \gg \lambda$ , сделанного при выводе формулы (8). Ясно, что при  $H$ , сравнимом с длиной волны, начиная с  $\alpha_0 = \alpha'_0$ , коэффициент концентрации будет больше, чем это следует из графика рис. VIII.

Коэффициент концентрации прямо-

угольного поршня при компенсации и

$$K = \frac{2H}{\lambda} \frac{2\pi}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sin \frac{kl}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)}{\frac{kl}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)} \right]^2 d\varphi} \quad (9)$$

На рис. IX представлена рассчитанная по этой формуле зависимость  $K/\frac{4\pi H l}{\lambda^2}$  от угла компенсации  $\varphi_0$ . Из сравнения с рис. VIII видно, что при компенсации рассматриваемой антенны в плоскости  $xOy$ , зависимость коэффициента концентрации от угла компенсации при больших  $l/\lambda$  приближается к закону косинуса при существенно больших  $l/\lambda$ , чем в случае компенсации в плоскости  $xOz$ .

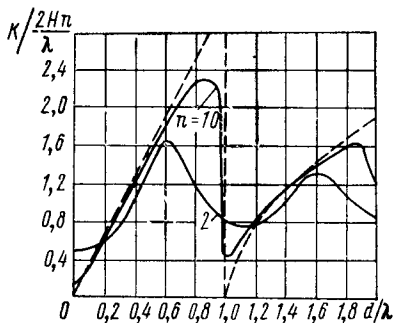


Рис. X. Зависимость  $K/\frac{2Hn}{\lambda}$  от  $d/\lambda$  для плоской антенны, состоящей из параллельных отрезков.

**Пример 4.** Определим коэффициент концентрации плоской антенны, состоящей из  $n$  параллельных отрезков прямой, длина которых  $H \gg \lambda$ .

Выше приводилась формула (6.39) для расчета взаимного сопротивления излучения двух параллельных цилиндров, радиус которых  $r_0 \ll \lambda$ . В соответствии с этой формулой активное сопротивление излучения двух цилиндров  $r_{qg}$  равно  $k\rho c H \pi^2 r_0^2 J_0(kd_{qg})$ , где  $d_{qg}$  — расстояние между ними. Если отрезки расположены на плоскости эквидистантно, амплитудное распределение равномерно, а фазовое обеспечивает компенсацию в некотором направлении, лежащем в плоскости, перпендикулярной отрезкам, и составляющем с перпендикуляром к антенне угол  $\alpha_0$ , то активное сопротивление излучения в соответствии с формулой (1.23) может быть записано следующим образом:

$$r_s = k\rho c H \pi^2 r_0^2 \sum_{q=1}^n \sum_{g=1}^n \cos(kd_{qg} \sin \alpha_0) J_0(kd_{qg}) = k\rho c H \pi^2 r_0^2 \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_s (n-s) \times \\ \times \cos(k ds \sin \alpha_0) J_0(k ds), \quad (10)$$

где

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 1 & \text{при } s=0; \\ 2 & \text{при } s>0. \end{cases}$$

Давление, развиваемое рассматриваемой антенной в направлении компенсации, с помощью выражения (2.45) можно записать так:

$$p(\alpha_0) = - \frac{ik\rho c \omega r_0 n H}{2r},$$

откуда, в соответствии с формулой (1.38),

$$K = \frac{2H}{\lambda} \frac{n^2}{\sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_s (n-s) \cos(k ds \sin \alpha_0) J_0(k ds)} \quad (11)$$

На рис. X представлена зависимость отношения  $K/\frac{2Hn}{\lambda}$  от  $d/\lambda$  ( $d$  — расстояние между соседними отрезками) при  $\alpha_0 = 0$ ,  $n = 2$  и  $n = 10$ . Пунктирной линией на этом же рисунке показан результат расчета по приближенной формуле, которую можно получить из формулы (6.14), принимая во внимание, что характеристика направленности отрезка в перпендикулярной плоскости равна единице и что отсутствие экрана в два раза снижает коэффициент концентрации. При  $\alpha_0 = 0$  эта формула имеет следующий вид:

$$K = \frac{2\pi H dn}{\lambda^2} \frac{1}{\sum_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 - s^2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2}}, \quad (12)$$

где

$$s_1 = -E \left[ \frac{d}{\lambda} \right];$$

$$s_2 = E \left[ \frac{d}{\lambda} \right],$$

В отличие от аналогичной зависимости для двухмерной периодической решетки из ненаправленных элементов (см. рис. 82), для антенны из параллельных отрезков отсутствуют провалы в величине коэффициента концентрации в районе  $d/\lambda \approx 1,4$ .

---

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. А й з е н б е р г Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 1957.
2. Антенные решетки. Методы расчета и проектирования. Обзор зарубежных работ. М., «Советское радио», 1966. Составители: Бененсон Л. С., Журавлев В. А., Попов С. В., Попков Г. А. Под общей редакцией Бененсона Л. С.
3. Б е л я к о в И. И., С м а р ы ш е в М. Д. Импеданс излучения и коэффициент концентрации одномерной системы колец на бесконечном жестком цилиндре «Акустический журнал», вып. 2, т. XVIII, 1972 г.
4. Б р е х о в с к и х Л. М. Волны в слоистых средах. М., АН СССР, 1957, 502 стр.
5. В а н д е р П о л ь Б, Б р е м м е р Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., ИЛ, 1952.
6. В е н д и к О. Г. Антенны с немеханическим движением луча (Введение в теорию). М., «Советское радио», 1965.
7. В о в к И. В., Г а й д а й В. А., М а я ц к и й В. И. К вопросу о влиянии акустического взаимодействия электроакустических преобразователей на направленные свойства приемных многолучевых антенн. «Акустический журнал», 1969, т. XV, вып. 7, стр. 124—126.
8. В о л л е р н е р Н. Ф., К а р н о в с к и й М. И. К расчету коэффициента концентрации некоторых направленных акустических систем. «Акустический журнал», 1959, т. V, вып. 1, стр. 25—30.
9. В о л ь п е р т А. Р. О фазовом центре антенн. «Радиотехника», 1961, т. 16, № 3, стр. 3—12.
10. Г е р ш м а н С. Г. Интерференционный способ измерения коэффициентов корреляции стационарных шумов. В кн.: Труды комиссии по акустике. Сб. № 8, М., АН СССР, 1955, стр. 151—159.
11. Г у т и н Л. Я. К теории приемного рупора. ЖТФ, 1935, т. V, вып. 8.
12. Г у т и н Л. Я. К теории параболического концентратора звука. «Известия электропромышленности слабых токов». 1935, № 9.
13. Г у т и н Л. Я. О звуковом поле поршневых излучателей. ЖТФ. 1937, т. VII, вып. 10, стр. 1096—1106.
14. Д и а н о в Д. Б., П р о х о р о в В. Г. Рефлекторные концентраторы ультразвука. «Акустический журнал», 1965, т. XI, вып. 4, стр. 442—452.
15. Д о б р о в о л ь с к и й Ю. Ю. Взаимное сопротивление излучения малых поршней в выпуклом экране. «Акустический журнал», 1970, т. XVI, вып. 4, стр. 516—520.
16. Д о б р о в о л ь с к и й Ю. Ю. О направленных свойствах акустиче-



- ских многоэлементных антенн. Тезисы докладов VII Всесоюзной акустической конференции, Л., 1971.
17. Дрейзен И. Г. Электроакустика и звуковое вещание. М., Связьиздат, 1961.
18. Зелкин Е. Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
19. Карновский М. И. Линейная теория акустических резонаторов. ЖТФ, 1943, т. 12, вып. 11—12, стр. 119—125.
20. Карновский М. И. К вопросу об интерференции сложных сигналов. В кн.: Труды комиссии по акустике. Сб. № 8, М., АН СССР, 1955, стр. 139—150.
21. Карновский М. И. К расчету сопротивления излучения не-  
которых распределенных систем излучателей. «Акустический журнал», 1956, т. II, вып. 3, стр. 267—278.
22. Карновский М. И. и др. Направленность излучения сферических преобразователей со смешанными граничными условиями. «Акустический журнал», 1970, т. XVI, вып. 3, стр. 398—402.
23. Курьянов Б. Ф. Пространственная корреляция полей, излученных случайными источниками на плоскости. «Акустический журнал», 1963, т. IX, вып. 4, стр. 441—448.
24. Левин Б. Р. Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. М., «Советское радио», 1957.
25. Маяцкий В. И. Синтез дискретных антенн с оптимальными средними диаграммами направленности. «Радиотехника и электроника», 1967, т. XII, № 12, стр. 2118—2122.
26. Минкович Б. М., Яковлев В. П. Теория синтеза антенн. М., «Советское радио», 1969.
27. Морз Ф. Колебания и звук. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
28. Морс Ф. и Фешбах Г. Методы теоретической физики. тт. I—II, пер. с англ. М., ИЛ, 1958.
29. Подводная акустика. Тт. I—II, М., перевод с англ. Ю. Ю. Житковского и Ю. П. Лысанова под редакцией Л. М. Бреховских.
30. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М., МГУ, 1960.
31. Розенберг Л. Д. Звуковые фокусирующие системы. М.—Л., АН СССР, 1949.
32. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций, Л., «Судпромгиз», 1961.
33. Севрюгова Н. В., Смаришев М. Д. Излучение звука плоской бесконечной периодической структурой с прямоугольными канавками. «Акустический журнал», 1971, т. XVII, вып. 2, стр. 419—428.
34. Сканирующие антенные системы СВЧ. Пер. с англ. под редакцией Г. Т. Маркова и А. Ф. Чаплина, т. I—II—III. М., «Советское радио», 1966.
35. Скучик Е. Основы акустики. т. I—II, пер. с нем. М., Ил., 1958.
36. Смаришев М. Д. О приближенном вычислении коэффициента концентрации непрерывных компенсированных систем. «Акустический журнал», 1963, вып. 2, т. IX, стр. 246—247.
37. Смаришев М. Д. Максимизация коэффициента направленного действия антенной решетки. «Радиотехника и электроника», 1964, т. IX, вып. 9.

38. Смарышев М. Д. Коэффициент концентрации объемной непрерывной прозрачной акустической антенны. «Акустический журнал», т. XI, вып. 1, 1965, стр. 124—125.
39. Смарышев М. Д. Определение коэффициента концентрации большой периодической плоской антенны и сопротивления излучения ее элемента. «Акустический журнал», 1968, т. XIV, вып. 2, стр. 268—274.
40. Смарышев М. Д. Сопротивление излучения и коэффициент концентрации протяженных периодических линейных антенн. «Акустический журнал», 1968, т. XIV, вып. 4, стр. 597—603.
41. Смарышев М. Д. Ближнее поле бесконечной плоской периодической антенны. «Акустический журнал», т. XIV, вып. 4, стр. 629—630.
42. Смирнов Н. В., Дунины-Барковский И. В. Краткий курс математической статистики для технических приложений. Физматгиз, М., 1959.
43. Содни Л. Г. Статистика фазированной антенны-решетки. «Радиотехника и электроника», 1964, № 7.
44. Сухаревский Ю. М. О направлении действия экспоненциального рупора. «Электросвязь», 1939, № 4, стр. 63—87.
45. Сухаревский Ю. М. Усиление, резонансы и затухание приемного экспоненциального рупора. ЖТФ, 1943, т. 23, вып. 11—12.
46. Узков А. И. К вопросу об оптимальной конструкции направленных антенн. ДАН СССР, 1946, т. 53, № 1, стр. 35.
47. Уэйт Д. Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем. М., «Советское радио», 1963.
48. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот. М., «Советское радио», 1957.
49. Фурдуев В. В. Электроакустика. М.—Л., ОГИЗ, 1948.
50. Шендеров Е. Л. Волиовые задачи гидроакустики. Л., «Судо-строение», 1972.
51. Шифрин Я. С. Вопросы статистической теории антенн. М., «Советское радио», 1970.
52. Шор Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. М., «Советское радио», 1962.
53. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Изд. второе, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
54. A g a s e E. Mutual radiation impedance of square and rectangular pistons in a rigid infinite baffle. JASA, 1964, vol. 36 № 8, p. 1521—1525.
55. B a u m s w e i g e r B. Graphical determination of the random efficiency of microphones, JASA, 1940, vol. 11, N 3, p. 477—483.
56. E l l i o t R. S. Mechanical and electrical tolerances for two — dimensional scanning antenna arrays. I, R. E. Trans. 1958, AP—6, p. 114—120.
57. F e i k K. Gerichteter Schall, Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 1955, B. 64, N 2, S. 35—62.
58. G i l b e r t E. H., M o r g a n S. P. Optimum design of directive antenna arrays subject to random variations. Bell System Techn. J. 1955, vol. 3, N 34, p. 637.
59. K e n d i g P. M., M u e s e r R. E. A simplified method for determining transducer directivity index. JASA, 1947, vol. 19, N 4, p. 691—694.
60. K i n n e y C. M. and A n d e r s o n C. D. Experimental investiga-

tion of wedge horns used with line hydrophones. *JASA*, 1954, vol. 26, N 6, p. 1040—1047.

61. Leichter M. Beam pointing errors of long line sources. *IRE Trans.* 1960, AP—8, p. 268—275.

62. Leird D T., Cohen H. Directionality patterns for acoustic radiation from a source on a rigid cylinder. *JASA*, 1952, vol. 24, N 1, p. 46—49.

63. Mangulis V. Infinite array of circular pistons in a rigid plane baffle. *JASA*, 1962, vol. 34, N 10, p. 1558—1563.

64. Mangulis V. Near-field pressure for an infinite array of strips. *Trans. IREE son. ultrason.* 1966, su-13, N 2, p. 49—53.

65. Menges K. Über richtcharakteristiken von ebenen strahlerflächen, Strahlerflächen mit angleichmässiger amplitudenverteilung und der halokreislinie. *Akust. Zs.* 1941, B.6, S.90.

66. Pritchard R. L. Maximum directivity index of a linear point array. *JASA*, 1954, vol. 26, N 6, p. 1034—1037.

67. Pritchard R. L. Mutual acoustic impedance between radiations in an infinite rigid plane. *JASA*, 1960, vol. 32, N 6, p. 730—737.

68. Robey D. H. On the radiation impedance of an array of finite cylinders. *JASA*, 1955, vol. 27, N 4, p. 706—710.

69. Rondinelly L A. Effects of random errors on the performance of antenna arrays of many elements. *IRE. Nat. Conv. Record*, 1959, N 1, p. 174—189.

70. Ruse I. The effect of aperture errors on the antenna radiation pattern. *Nuovo Cimento Suppl.*, 1952, vol. 9, N 11, p. 364—380.

71. Schenek H. A. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *JASA*, 1968, vol. 44, N 1, p. 41—58.

72. Stenzel H. Leitfoden zur berechnung von schallvorgängen. Berlin, 1939.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
<b>Глава 1. Основные параметры, характеризующие направленность гидроакустических антенн . . . . .</b>	<b>6</b>
§ 1. Режим излучения . . . . .	6
Звуковое давление и характеристика направленности (6). Мощность и сопротивление излучения (9). Коэффициент концентрации (14). Влияние взаимодействия (16).	
§ 2. Режим приема . . . . .	20
Чувствительность и характеристика направленности (20). Помехоустойчивость (26).	
<b>Глава 2. Общие методы определения полей, создаваемых антеннами, и характеристик направленности . . . . .</b>	<b>29</b>
§ 3. Методы, основанные на применении формулы Грина . . . . .	29
Расчетные формулы для различных граничных условий (31). Соображения об использовании полученных соотношений (37).	
§ 4. Модельные представления антенн и некоторые общие соотношения . . . . .	40
Плоская антенна в бесконечном экране (40). Прозрачная непрерывная антенна (41). Поверхностная непрозрачная антенна (42). Вычисление разности хода лучей (44). Компенсация антенны в заданном направлении (45). Фазовый центр антенны (47). Теорема умножения (49). Теорема смещения (52). Теорема сложения (53).	
§ 5. Характеристики направленности в полосе частот . . . . .	54
Общие расчетные соотношения (54). Определение характеристики направленности через функции корреляции (56). Характеристики направленности некоторых антенн в полосе частот (58). Приближенное определение некоторых параметров характеристики направленности (59).	
<b>Глава 3. Общие методы определения излучаемой мощности, коэффициента концентрации и помехоустойчивости антенн . . . . .</b>	<b>65</b>
§ 6. Определение излучаемой мощности и коэффициента концентрации через сопротивление излучения антенны . . . . .	65
Некоторые замечания о сопротивлении излучения (65). Пренебрежение взаимодействием элементов антенны (66).	
§ 7. Определение сопротивления излучения и коэффициента концентрации антенны через характеристику направленности . . . . .	71
Графическое интегрирование (72). Аппроксимация характеристики направленности (77).	
§ 8. Метод бесконечной решетки . . . . .	81
Одномерная решетка (82). Двухмерная решетка (90).	

§ 9. Определение помехоустойчивости антенны . . . . .	91
Функции пространственно-временной корреляции помех на элементах антенны (91). Некоррелированные источники помех (93).	
<b>Глава 4. Линейные антенны . . . . .</b>	<b>99</b>
§ 10. Приближенный способ определения коэффициента концентрации произвольных непрерывных линейных антенн . . . . .	99
Вывод расчетных формул (99). Определение оптимальных возбуждений (102).	
§ 11. Антенна в виде отрезка прямой . . . . .	104
Приближенное определение ширины характеристики направленности (105). Теоремы о направленности отрезка прямой (106). Характеристика направленности и коэффициент концентрации при равномерном амплитудном распределении (108). Влияние амплитудных и фазовых распределений (114).	
§ 12. Антенна в виде окружности или дуги . . . . .	119
Окружность (119). Дуга окружности (123).	
§ 13. Дискретные линейные антенны . . . . .	140
Направленность эквидистантных решеток (140). Коэффициент концентрации эквидистантных решеток (145). Антенна, состоящая из отрезков, лежащих на одной прямой (152). Антенна, состоящая из ненаправленных элементов на дуге (161).	
<b>Глава 5. Поверхностные непрерывные антенны . . . . .</b>	<b>162</b>
§ 14. Поверхностные произвольные непрерывные антенны . . . . .	162
Вывод расчетных формул (162). Определение оптимальных возбуждений (166).	
§ 15. Непрерывные плоские антенны . . . . .	173
Прямоугольная антенна (173). Круглая антенна (177).	
§ 16. Непрерывные цилиндрические антенны . . . . .	179
Излучение замкнутой цилиндрической поверхностью (179). Излучение частью цилиндрической поверхности (181). Излучение цилиндра с учетом дифракции (183). Компенсированная непрерывная цилиндрическая антенна (189).	
§ 17. Сферические непрерывные антенны . . . . .	191
Приближенная теория (191). Дифракционная теория (193).	
<b>Глава 6. Поверхностные дискретные антенны . . . . .</b>	<b>197</b>
§ 18. Бесконечные плоские периодические антенны . . . . .	197
Одномерные периодические антенны (198). Двухмерные периодические антенны (205).	
§ 19. Конечные плоские антенны . . . . .	211
Решетка ненаправленных элементов (211). Направленные элементы в жестком экране (214).	
§ 20. Цилиндрические антенны . . . . .	221
Расчетные соотношения (221). Некоторые результаты расчетов (225).	
<b>Глава 7. Некоторые другие типы антенн . . . . .</b>	<b>230</b>
§ 21. Фокусирующие и рупорные антенны . . . . .	230
Рефлекторная антенна с параболическим отражателем (231). Рупорные антенны (234).	
§ 22. Объемные антенны . . . . .	237
Антенна, состоящая из параллельных излучающих плоскостей (237). Непрерывная объемная антенна, заключенная внутри отрезка кругового цилиндра (241).	

<b>Глава 8. Параметры антенн при наличии случайных ошибок возбуждения</b> . . . . .	243
§ 23. Влияние случайных ошибок на характеристику направленности антенны . . . . .	243
§ 24. Влияние случайных ошибок на коэффициент концентрации и помехоустойчивость антенны . . . . .	251
§ 25. Учет влияния случайных ошибок возбуждении при синтезе антенн . . . . .	254
<b>Заключение</b> . . . . .	259
<b>Приложение I. Помехоустойчивость линейной антенны при воздействии на нее изотропных помех дальнего поля</b> . . . . .	261
<b>Приложение II. Некоторые примеры расчета параметров гидроакустических антенн</b> . . . . .	264
<b>Указатель литературы</b> . . . . .	272

**МИХАИЛ ДМИТРИЕВИЧ СМАРЫШЕВ**

**НАПРАВЛЕННОСТЬ ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ  
АНТЕНН**

Редактор М. А. Чфас

Технические редакторы П. С. Фрумкин и  
Р. К. Чистякова

Корректор В. М. Хорошкевич

Оформление переплета художника И. М. Сеиского

---

Сдано в набор 23/IX 1972 г. Подписано к печати 21/III 1973 г. М-18720. Формат издания 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 2. Печ. л. 17,5. Уч.-изд. л. 18,6. Тираж 2600 экз. Зак. № 2016. Изд. № 2647-71. Цена 2 руб.

---

Издательство «Судостроение». 191065, Ленинград,  
ул. Гоголя, 8

---

Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 196126, гор. Ленинград, Социалистическая ул., 14.