М. М. СМИРНОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебного пособия для механико-математических
и физико-математических факультетов университетов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1964

517.2
С 50
УДК 517.945/7(075.8)

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является учебным пособием для студентов механико-математического и физико-математического факультетов вечерних и заочных отделений университетов. Она посвящена теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка — тому разделу математики, который находит чрезвычайно широкое и многообразное применение в механике, физике и технике.

В работе дается вывод основных уравнений математической физики и классификация уравнений второго порядка; последовательно излагается теория уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов, а также теория потенциала; рассматриваются следующие методы решения задач, связанных с уравнениями в частных производных второго порядка: метод характеристик, метод Фурье и метод функции Грина. Изложенного материала вполне достаточно для первоначального ознакомления с теорией дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Автор выражает глубокую благодарность за ряд ценных замечаний и советов академику В. И. Смирнову и профессору С. Г. Михлину, прочитавшим книгу в рукописи, а также редактору книги Г. П. Акилову.

М. М. Смирнов

г. Ленинград, 20 января 1964 г.

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$, независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и частные производные от неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением с частными производными*.

Оно имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \ldots \right) = 0, \qquad (1)$$

где F — заданная функция своих аргументов.

Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1), называется *порядком уравнения с частными производными*.

Наиболее общее уравнение с частными производными *первого порядка* с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial u}{\partial x},\ q = \frac{\partial u}{\partial y}\right). \qquad (2)$$

Аналогично наиболее общее уравнение с частными производными второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \quad \left(r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y},\ t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \qquad (3)$$

Уравнение с частными производными называется *квазилинейным*, если оно *линейно* относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$A(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(\ldots)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+C(\ldots)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)=0 \qquad (4)$$

есть квазилинейное уравнение второго порядка.

Уравнение с частными производными называется *линейным*, если оно *линейно* относительно неизвестной функции и ее частных производных. Так, например, уравнение

$$A(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+D(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+G(x,\ y)u=F(x,\ y) \qquad (5)$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u(x,\ y)$.

Решением уравнения с частными производными (1) называется всякая функция $u=u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка, в особенности *волновым* уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (6)$$

уравнением *Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (7)$$

и уравнением *теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (8)$$

Многие задачи физики и техники приводят к уравнениям с частными производными и, в частности, к уравнениям (6), (7) и (8).

ГЛАВА I

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим натянутую струну, закрепленную на концах. *Под струной мы понимаем тонкую нить, которая может свободно изгибаться*, т. е. не оказывает никакого сопротивления изменению ее формы, не связанному с изменением ее длины. Сила натяжения T_0, действующая на струну, предполагается значительной, так что можно пренебречь действием силы тяжести.

Пусть в положении равновесия струна направлена по оси x.

Мы будем рассматривать только *поперечные колебания* струны, предполагая, что движение происходит в одной плоскости и что все точки струны движутся перпендикулярно оси x.

Обозначим через $u(x,\ t)$ смещение точек струны в момент времени t от положения равновесия. При каждом фиксированном значении t график функции $u(x,\ t)$, очевидно, дает форму струны в этот момент времени (рис. 1).

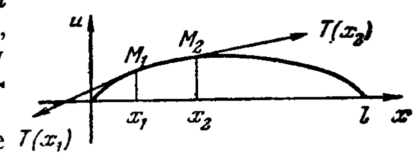

Рис. 1.

Рассматривая далее только *малые* колебания струны, мы будем считать, что смещение $u(x,\ t)$, а также производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (x_1, x_2) струны (см. рис. 1), который при колебании струны деформируется в участок M_1M_2. Длина дуги этого участка в момент времени t равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

вследствие чего можно считать, что в процессе малых колебаний удлинения участков струны не происходит. Отсюда в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке струны не меняется со временем. Таким образом, при наших предположениях изменением величины натяжения струны, возникающим при ее движении, можно пренебречь по сравнению с тем, которому она была уже подвергнута в положении равновесия.

Покажем, что величину натяжения T можно считать не зависящей от x, т. е. $T \approx T_0$. Действительно, на участок M_1M_2 струны действуют силы натяжения, направленные по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций на ось x всех этих сил должна равняться нулю. Так как мы рассматриваем только поперечные колебания, то силы инерции и внешние силы направлены параллельно оси u, тогда

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ — угол между касательной в точке с абсциссой x к струне в момент времени t с положительным направлением оси x.

В силу малости колебаний

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1$$

и, следовательно,

$$T(x_1) \approx T(x_2).$$

Отсюда, ввиду произвольности x_1 и x_2, следует, что величина натяжения T не зависит от x. Таким образом, можно считать, что $T \approx T_0$ для всех значений x и t.

Перейдем к выводу уравнения колебаний струны. Для этого воспользуемся *принципом Даламбера*, на основании которого все силы, действующие на некоторый выделенный участок в струне, включая силы инерции, должны уравновешиваться.

Рассмотрим произвольный участок M_1M_2 струны и составим условие равенства нулю суммы проекций на ось u всех сил, действующих на него: сил натяжения, равных по величине и направленных по касательным к струне в точках M_1 и M_2, внешней силы, направленной параллельно оси u, и силы инерции.

Сумма проекций на ось u сил натяжения, действующих в точках M_1 и M_2, равняется

$$Y = T_0[\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)],$$

но вследствие наших предположений

$$\sin\alpha(x) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

и, следовательно,

$$Y = T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

Замечая теперь, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx,$$

окончательно получим

$$Y = T_0 \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx. \qquad (1.1)$$

Обозначим через $p(x, t)$ внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси u и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось u внешней силы, действующей на участок M_1M_2 струны, будет равна

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x, t)\, dx. \qquad (1.2)$$

Пусть $\rho(x)$ — линейная плотность струны, тогда сила инерции участка M_1M_2 струны будет равна

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx. \qquad (1.3)$$

Сумма проекций (1.1) — (1.3) на ось u всех сил, действующих на участок M_1M_2 струны, должна быть равна нулю, т. е.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p(x, t)\right] dx = 0.$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю для каждой точки струны в любой момент времени t, т. е.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t). \qquad (1.4)$$

Это есть искомое *уравнение колебаний струны.*

Если $\rho = \text{const}$, т. е. в случае однородной струны, уравнение (1.4) обычно записывается в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad (1.5)$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x, t) = \frac{p(x, t)}{\rho}. \qquad (1.6)$$

Если внешняя сила отсутствует, то мы имеем $p(x, t) = 0$ и получаем *уравнение свободных колебаний струны*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.4) имеет бесчисленное множество частных решений. Поэтому одного уравнения (1.4) недостаточно для полного определения движения струны; нужны еще некоторые дополнительные условия, вытекающие из физического смысла задачи. Из динамики точки известно, что для определения движения точки нужно знать ее начальное положение и начальную скорость. Для уравнения колебаний струны естественно задать

в начальный момент времени $t = 0$ положение и скорости всех точек струны

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (1.8)$$

Условия (1.8) называются *начальными условиями.*

Далее, так как струна ограничена, то нужно указать, что происходит на ее концах. Для закрепленной струны на концах мы должны иметь

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \qquad (1.9)$$

при всяком $t \geqslant 0$. Условия (1.9) называются *краевыми* или *граничными условиями.* Возможны и другие граничные условия.

Итак, физическая задача о колебании струны свелась к математической задаче: найти такое решение уравнения (1.4), которое удовлетворяло бы начальным условиям (1.8) и граничным условиям (1.9).

Можно рассматривать колебания *полубесконечной* или *бесконечной* струны, когда один или оба конца находятся бесконечно далеко. Оба эти случая являются идеализацией случая очень длинной струны, причем первый из них соответствует рассмотрению точек, сравнительно близких от одного из концов струны, а второй — рассмотрению точек, расположенных далеко от обоих концов. В первом из этих случаев в качестве граничного условия остается требование $u|_{x=0} = 0$, а во втором случае граничные условия вообще отсутствуют. Начальные функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ должны быть в этих случаях заданы соответственно для всех $0 \leqslant x < \infty$ или для всех $-\infty < x < \infty$.

§ 2. Уравнение колебаний мембраны

Мембраной называют свободно изгибающуюся натянутую пленку

Пусть в положении равновесия мембрана расположена в плоскости xy и занимает некоторую область D, ограниченную замкнутой кривой L. Далее, предположим, что мембрана находится под действием равномерного натяжения T, приложенного к краям мембраны. Это означает, что если провести линию по мембране в любом направлении, то сила взаимодействия между двумя частями, разделенными элементами линии, пропорциональна длине элемента и перпендикулярна его направлению; величина силы, действующей на элемент ds линии, будет равна Tds.

Будем рассматривать только *поперечные колебания* мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости xy параллельно оси u. Тогда смещение u точки (x, y) мембраны будет функцией от x, y и t.

Рассматривая далее только малые колебания мембраны, мы будем считать, что функция $u(x, y, t)$, а также ее частные производные по x и y малы, так что квадратами и произведениями их можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами.

Выделим произвольный участок (σ) мембраны, ограниченный в положении равновесия кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия, этот участок мембраны деформируется в участок σ' поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l'. Площадь участка σ' в момент времени t равна

$$\sigma' = \iint\limits_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy \approx \iint\limits_{\sigma} dx\, dy = \sigma.$$

Таким образом, при наших предположениях можно пренебречь изменением площади произвольно взятого участка мембраны в процессе колебаний и считать, что любой участок σ' мембраны будет находиться под действием первоначального натяжения T.

Перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний мембраны. Рассмотрим произвольный участок σ' мембраны. Со стороны остальной части мембраны на этот участок действует направленное по нормали к контуру l' равномерно распределенное натяжение T, лежащее в касательной плоскости к поверхности мембраны. Найдем проекцию на ось u сил натяжения, приложенных к кривой l', ограничивающей участок σ' мембраны. Обозначим через ds' элемент дуги кривой l'. На этот эле-

мент действует натяжение, равное по величине Tds'. Косинус угла, образованного вектором натяжения T с осью Ou, равен, в силу наших предположений, очевидно, $\frac{\partial u}{\partial n}$, где n — направление внешней нормали к кривой l, ограничивающей участок σ мембраны в положении равновесия (рис. 2). Отсюда следует, что проекция на ось u сил натяжения, приложенных к элементу ds' контура l', равна

$$T \frac{\partial u}{\partial n} ds'$$

и, стало быть, проекция на ось u сил натяжения, приложенных ко всему контуру l', равна

$$T \int\limits_{l'} \frac{\partial u}{\partial n} ds'. \qquad (2.1)$$

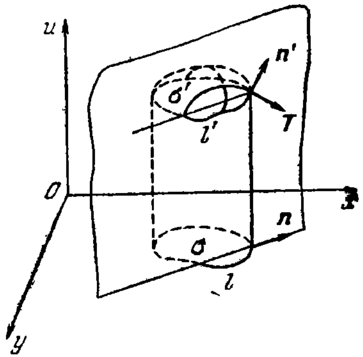

Рис. 2.

Так как при малых колебаниях мембраны можно считать $ds \approx ds'$, то мы можем в интеграле (2.1) путь интегрирования l' заменить на l. Тогда, применяя формулу Грина, получим

$$T \int\limits_{l} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx\, dy. \qquad (2.2)$$

Предположим, далее, что на мембрану параллельно оси u действует внешняя сила $p(x, y, t)$, рассчитанная на единицу площади. Тогда проекция на ось u внешней силы, действующей на участок σ' мембраны, будет равна

$$\iint\limits_{\sigma} p(x, y, t)\, dx\, dy. \qquad (2.3)$$

Силы (2.2) и (2.3) должны в любой момент времени t уравновешиваться силами инерции участка σ'

мембраны

$$-\iint_{\sigma} \rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,dx\,dy,$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны.

Таким образом, мы получаем равенство

$$\iint_{\sigma}\left[\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y, t)\right]dx\,dy = 0.$$

Отсюда в силу произвольности площадки σ следует, что

$$\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + p(x, y, t). \tag{2.4}$$

Это есть дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны.

В случае однородной мембраны $\rho = \text{const}$ уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \tag{2.5}$$

где

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad f(x, y, t) = \frac{p(x, y, t)}{\rho}. \tag{2.6}$$

Если внешняя сила отсутствует, т. е. $p(x, y, t) = 0$, то из (2.5) получаем уравнение *свободных колебаний* однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{2.7}$$

Как и при рассмотрении колебаний струны, одного уравнения (2.4) недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно задать в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость всех точек мембраны:

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \tag{2.8}$$

Далее, так как на контуре L мембрана закреплена, то должно быть

$$u\big|_L = 0 \tag{2.9}$$

при любом $t \geqslant 0$.

§ 3. Уравнения гидродинамики и распространение звуковых волн

1. В гидродинамике жидкость или газ *) рассматриваются как сплошная среда. Это значит, что всякий малый элемент объема жидкости считается все-таки настолько большим, что содержит еще очень большое число молекул. Поэтому, когда мы будем говорить о бесконечно малых элементах объема, то всегда при этом будет подразумеваться объем достаточно малый по сравнению с объемом тела, но большой по сравнению с молекулярными расстояниями. В таком же смысле надо понимать в гидродинамике выражения «жидкая частица», «точка жидкости». Если, например, говорят о смещении некоторой частицы жидкости, то при этом речь идет не о смещении отдельной молекулы, а о смещении целого элемента объема, содержащего много молекул, но рассматриваемого в гидродинамике как точка.

Пусть жидкость движется со скоростью $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$, проекции которой на оси координат обозначим $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$.

Подчеркнем, что $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ есть скорость жидкости в каждой данной точке (x, y, z) пространства в момент времени t, т. е. относится к определенным точкам пространства, а не к определенным частицам жидкости, передвигающимся со временем в пространстве; то же самое относится к термодинамическим величинам.

Если поле вектора скорости $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ известно, то траектории отдельных частиц жидкости будут определяться уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t).$$

*) В дальнейшем будем говорить для краткости только о жидкости имея в виду как жидкости, так и газы.

Отсюда легко можно найти ускорение частицы жидкости

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=$$
$$=\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z,\quad (3.1)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z.$$

В каждый момент и в каждой точке жидкость находится в некотором состоянии термодинамического равновесия, определяемого давлением $p(x, y, z, t)$, плотностью $\rho(x, y, z, t)$, температурой $T(x, y, z, t)$, энтропией $S(x, y, z, t)$ и внутренней энергией $E(x, y, z, t)$. Из термодинамики известно, что для каждой данной среды независимы только два из параметров p, ρ, T, S и E. Величины p, T и E можно рассматривать как функции от ρ и S.

Начнем вывод основных гидродинамических уравнений с вывода уравнения, выражающего собой закон сохранения вещества в гидродинамике. Рассмотрим некоторый объем жидкости V, ограниченный поверхностью S. Если внутри объема V нет источников и стоков, то изменение в единицу времени массы жидкости, заключенной внутри V, равно потоку жидкости через поверхность S:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV=-\iint_S \rho v_n\,dS,$$

где v_n — проекция $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ на внешнюю нормаль n к поверхности S. Преобразуя правую часть по формуле Остроградского и дифференцируя по t под знаком интеграла в левой части, получим

$$\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV=-\iiint_V \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\,dV$$

или

$$\iiint_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}\right)dV=0,$$

где

$$\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}.$$

Так как последнее равенство справедливо для любого объема внутри жидкости, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=0.\quad (3.2)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности*.

Перейдем теперь к выводу уравнений движения идеальной жидкости.

Под идеальной жидкостью будем понимать такую деформируемую сплошную среду, в которой внутренние силы — находится ли среда в состоянии равновесия или движения — приводятся к нормальному давлению, так что если выделить в этой жидкости некоторый объем V, ограниченный поверхностью S, то действие на него остальной части жидкости приводится к силе, направленной в каждой точке поверхности S по внутренней нормали. Обозначим величину этой силы (давление), отнесенную на единицу площади, через $p(x, y, z, t)$.

Таким образом, равнодействующая сил давления, приложенных к поверхности S, равна

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\,dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. На основании формулы Остроградского имеем

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\,dS=-\iiint_V \operatorname{grad}p\,dV.$$

Пусть, далее, на жидкость действует внешняя сила $\boldsymbol{F}(F_x, F_y, F_z)$, рассчитанная на единицу массы, так что равнодействующая этих сил, приложенных к объему V, равна

$$\iiint_V \rho\boldsymbol{F}\,dV.$$

Наконец, равнодействующая сил инерции, действующих на объем V, будет

$$-\iiint_V \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\, dV,$$

где $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ — вектор ускорения частицы жидкости. Здесь производная $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ определяет не изменение скорости жидкости в данной неподвижной точке пространства, а изменение скорости определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Это подчеркивается обозначением $\frac{d}{dt}$ вместо $\frac{\partial}{\partial t}$.

Применяя принцип Даламбера, получим

$$\iiint_V \left(\rho \boldsymbol{F} - \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \operatorname{grad} p\right) dV = 0.$$

Отсюда в силу произвольности объема V следует, что

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{3.3}$$

или, в силу (3.1), в скалярной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{3.3'}$$

Это есть уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера.

Итак, для пяти неизвестных функций v_x, v_y, v_z, ρ и p мы имеем всего четыре уравнения (3.2) и (3.3'). Чтобы получить еще одно уравнение, будем считать, что движение жидкости происходит *адиабатически*. При адиабатическом движении энтропия каждой частицы остается постоянной (хотя может меняться от точки к точке) при перемещении последней в пространстве, т. е. $\frac{dS}{dt} = 0$, где полная производная по времени означает, как и в (3.3), изменение энтропии определенной передвигающейся в пространстве частицы жидкости. Эту производную можно написать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} v_x + \frac{\partial S}{\partial y} v_y + \frac{\partial S}{\partial z} v_z = 0.$$

Это есть уравнение, выражающее собой адиабатичность движения идеальной жидкости. В частном случае может оказаться, что в некоторый начальный момент времени энтропия одинакова во всех точках жидкости, тогда она останется везде одинаковой и неизменной со временем и при дальнейшем движении жидкости. В этом случае уравнение адиабатичности можно писать просто в виде

$$S = S_0 = \text{const}.$$

Такое движение жидкости называют *изэнтропическим*. При этом мы имеем

$$p = f(\rho, S_0) = f(\rho). \tag{3.4}$$

Таким образом, мы имеем пять уравнений: уравнение неразрывности (3.2), три уравнения движения идеальной жидкости (3.3') и уравнение (3.4). Эти уравнения содержат как раз пять неизвестных функций: v_x, v_y, v_z, ρ и p.

2. Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемой жидкости или газе называют *звуковыми волнами*. В каждом месте жидкости в звуковой волне происходят попеременные сжатия и разрежения.

В силу малости колебаний в звуковой волне скорость $\boldsymbol{v}$ в ней мала, так что в уравнении Эйлера (3.3') можно пренебречь членами $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x\right)$, ... и т. д. По той же причине относительные изменения плотности и давления в жидкости тоже малы. Положим

$$p = p_0 + \bar{p}, \quad \rho = \rho_0 + \bar{\rho}, \tag{3.5}$$

где ρ_0, p_0 — постоянные равновесные плотность и давление жидкости, а $\bar{\rho}$ и $\bar{p}$ — их изменения в звуковой волне ($\bar{\rho} \ll \rho_0$, $\bar{p} \ll p_0$); $\bar{p}$ называют звуковым давлением.

Уравнение непрерывности (3.2) при подстановке в него (3.5) и пренебрежении малыми величинами второго порядка $\left(\bar{\rho}, \bar{p}, \boldsymbol{v}, \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \ldots\right.$ и т. д. надо при этом считать малыми величинами первого порядка) принимает вид

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$$

или, полагая

$$s = \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнения Эйлера (3.3′), считая, что внешние силы отсутствуют, в том же приближении сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

или, в векторной форме,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} \bar{p}. \tag{3.7}$$

Уравнения (3.6) и (3.7) содержат неизвестные функции $\boldsymbol{v}$, s и $\bar{p}$. Для исключения одной из них обратимся к уравнению (3.4), которое в том же приближении можно записать в виде

$$\bar{p} = f'(\rho_0)\,\bar{\rho}' = \rho_0 f'(\rho_0)\, s. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в уравнение (3.7), получим

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + a^2 \operatorname{grad} s = 0, \tag{3.9}$$

где положено $a^2 = f'(\rho_0)$, так как для всех жидкостей и газов, встречающихся в природе при постоянной энтропии, давление возрастает при возрастании плотности, т. е. $f'(\rho) > 0$.

Применяя к уравнению (3.9) операцию дивергенции и переставляя дифференцирование по t с операцией дивергенции, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{v} = -a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} s = -a^2 \Delta s, \tag{3.10}$$

где

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}.$$

Принимая во внимание уравнение (3.6), получим

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right). \tag{3.11}$$

Для давления $\bar{p}$ и скорости $\boldsymbol{v}$ также можно получить волновое уравнение вида (3.11).

Предположим теперь, что в начальный момент существует потенциал скоростей $u_0(x, y, z)$, т. е.

$$\boldsymbol{v}|_{t=0} = -\operatorname{grad} u_0(x, y, z). \tag{3.12}$$

Из уравнения (3.10) имеем равенство

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t) = \boldsymbol{v}|_{t=0} - a^2 \operatorname{grad} \int_0^t s\,dt$$

или, в силу (3.12),

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\left[u_0(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\,dt\right] = -\operatorname{grad} u(x, y, z, t), \tag{3.13}$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $u(x, y, z, t)$ в любой момент времени t:

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\,dt. \tag{3.14}$$

Покажем, что потенциал скоростей $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет волновому уравнению. В самом деле, дифференцируя выражение (3.14) два раза по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial s}{\partial t}. \tag{3.15}$$

С другой стороны, подставляя (3.13) в уравнение (3.6), будем иметь

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u. \tag{3.16}$$

Сравнивая (3.15) и (3.16), получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \qquad (3.17)$$

Отметим, что знание потенциала скоростей $u(x, y, z, t)$ достаточно для определения всего процесса движения жидкости или газа, так как

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} u, \quad s = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \bar{p} = \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (3.18)$$

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. Пусть жидкость или газ занимают в пространстве объем V, ограниченный поверхностью Σ. В начальный момент времени $t = 0$ задано относительное изменение газа s и распределение скоростей $\boldsymbol{v}$ в каждой точке объема V. Это дает начальные условия в виде

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = a^2 s = \varphi_1(x, y, z).$$

Если граница Σ представляет собою твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к граничному условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

§ 4. Уравнение распространения тепла в изотропном твердом теле

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t \cdot \Delta S$ и нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$, т. е.

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial n}\Delta s \cdot \Delta t = -k\,\Delta s \cdot \Delta t \operatorname{grad}_n u, \qquad (4.1)$$

где $k > 0$ — коэффициент внутренней теплопроводности, а n — нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении движения тепла. Будем считать, что тело *изотропно* в отношении теплопроводности, т. е. что коэффициент внутренней теплопроводности k зависит только от точки (x, y, z) тела и не зависит от направления нормали поверхности S в этой точке.

Обозначим через q *тепловой поток*, т. е. количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (4.1) можно записать в виде

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial n}. \qquad (4.2)$$

Для вывода уравнения распространения тепла выделим внутри тела произвольный объем V, ограниченный гладкой замкнутой поверхностью S, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объеме за промежуток времени (t_1, t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность S за промежуток времени (t_1, t_2), согласно формуле (4.1), входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}\,dS,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S.

Рассмотрим элемент объема ΔV. На изменение температуры этого объема на Δu за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = [u(x, y, z, t+\Delta t) - u(x, y, z, t)]\,\gamma(x, y, z)\,\rho(x, y, z)\,\Delta V,$$

где $\rho(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ — плотность и теплоемкость вещества. Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объема V на $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$, равно

$$Q_2 = \iiint_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\,\gamma\rho\,dV$$

или

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\,dV,$$

так как

$$u(x, y, z, t_2)-u(x, y, z, t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Предположим, что внутри рассматриваемого тела имеются источники тепла. Обозначим через $F(x, y, z, t)$ *плотность* (количество поглощенного или выделяемого тепла в единицу времени в единице объема тела) *тепловых источников*. Тогда количество тепла, выделяемого или поглощаемого в объеме V за промежуток времени (t_1, t_2), будет равно

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V F(x, y, z, t)\,dV.$$

Составим теперь уравнение баланса тепла для выделенного объема V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, т. е.

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V \gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}dV=$$
$$=-\int_{t_1}^{t_2}dt\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS+\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V F(x, y, z, t)\,dV,$$

или, применяя формулу Остроградского ко второму интегралу, будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2}dt\iiint_V\left[\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-F(x, y, z, t)\right]dV=0.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, объем V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки (x, y, z) рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно быть

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)+F(x, y, z, t) \tag{4.3}$$

или

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)+F(x, y, z, t). \tag{4.3'}$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела*.

Если тело однородно, то γ, ρ и k — постоянные и уравнение (4.3′) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x, y, z, t), \tag{4.4}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{k}{\gamma\rho}},\quad f(x, y, z, t)=\frac{F(x, y, z, t)}{\gamma\rho}.$$

Если в рассматриваемом однородном теле нет источников тепла, т. е. $F(x, y, z, t)\equiv 0$, то получаем *однородное* уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{4.5}$$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y и t, что, например, имеет место при распространении тепла в очень тонкой однородной пластинке, уравнение (4.5) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{4.6}$$

Наконец, для тела линейного размера, например для однородного стержня, уравнение теплопроводности принимает такой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.7}$$

Отметим, что при такой форме уравнений (4.6) и (4.7) не учитывается, конечно, тепловой обмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающим пространством.

Чтобы найти температуру внутри тела в любой момент времени, недостаточно одного уравнения (4.3). Необходимо, как это следует из физических соображений, знать еще распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе S тела (граничное условие).

Граничное условие может быть задано различными способами:

1) В каждой точке поверхности S задается температура

$$u|_S=\Psi_1(P,\ t), \tag{4.8}$$

где $\Psi_1(P,\ t)$ — известная функция точки поверхности S и времени $t\geqslant 0$.

2) На поверхности S задается тепловой поток

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial n},$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\Psi_2(P,\ t), \tag{4.9}$$

где $\Psi_2(P,\ t)$ — известная функция, выражающаяся через заданный тепловой поток по формуле

$$\Psi_2(P,\ t)=-\frac{q(P,t)}{k}.$$

3) На поверхности твердого тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой u_0 известна. Закон теплообмена очень сложен, но для упрощения задачи он может быть принят в виде закона Ньютона.

По закону Ньютона количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q=H(u-u_0),$$

где H — коэффициент теплообмена. Коэффициент теплообмена зависит от разности температур $u-u_0$, от характера поверхности и окружающей среды (он может изменяться вдоль поверхности тела). Мы будем считать коэффициент теплообмена H постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым для всей поверхности тела.

По закону сохранения энергии это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени вследствие внутренней теплопроводности. Это приводит к следующему граничному условию:

$$H(u-u_0)=-k\frac{\partial u}{\partial n}\quad (\text{на } S),$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S, или, положив $h=\frac{H}{k}$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-u_0)\right|_S=0. \tag{4.10}$$

Таким образом, задача о распространении тепла в изотропном твердом теле ставится так:

Найти решение уравнения теплопроводности (4.3), *удовлетворяющее начальному условию*

$$u|_{t=0}=\varphi(x,\ y,\ z) \tag{4.11}$$

и одному из граничных условий (4.8), (4.9) *и* (4.10).

§ 5. Задачи, приводящиеся к уравнению Лапласа

1. Установившаяся температура в однородном твердом теле. В предыдущем параграфе было установлено, что уравнение распространения тепла в изотропном однородном теле, в случае отсутствия источников тепла, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{5.1}$$

Допустим теперь, что температура в каждой точке $(x,\ y,\ z)$ внутри тела установилась, т. е. что она не меняется с течением времени. Тогда $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ и уравнение (5.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \tag{5.2}$$

Таким образом, уравнению Лапласа (5.2) удовлетворяет установившаяся в однородном теле температура

$u(x, y, z)$. Для определения $u(x, y, z)$ теперь не надо уже задавать начальное распределение температуры (начальное условие), а достаточно задать одно граничное условие, не зависящее от времени.

Задача определения решения уравнения (5.2) по его значениям на границе рассматриваемой области называется *задачей Дирихле.*

Задача определения решения уравнения (5.2), удовлетворяющего граничному условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(P)$, называется *задачей Неймана.*

2. Потенциальное движение несжимаемой жидкости. Рассмотрим установившееся движение несжимаемой жидкости. Пусть движение жидкости невихревое или, иначе говоря, потенциальное, т. е. скорость $\boldsymbol{v}(x, y, z)$ есть потенциальный вектор

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{5.3}$$

Для несжимаемой жидкости плотность ρ постоянна и из уравнения неразрывности (3.1) имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{5.4}$$

Подставляя (5.3) в (5.4), получим

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{5.5}$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (5.5).

В предыдущих параграфах мы видели, что задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Такими дополнительными условиями чаще всего являются граничные условия, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления.

Полученные при помощи уравнений математической физики решения тех или иных задач естествознания дают нам математическое описание ожидаемого хода или вида физических явлений, описываемых этими

уравнениями. Поскольку при построении модели физических явлений с помощью уравнений математической физики мы всегда вынуждены абстрагироваться от многих сторон этого явления, отбрасывать многое как не существенное, выделять то, что кажется главным, — результаты, полученные при этом не являются абсолютно истинными.

Поэтому всякая правильно (корректно) поставленная задача математической физики, имеющая своей целью описать действительность, должна удовлетворять следующим трем требованиям: 1) задача должна допускать решение; 2) решение должно быть единственным и 3) решение должно быть устойчивым; это значит, что малые изменения любого из данных задачи должны вызывать соответственно малые изменения решения. Требование существования и единственности означает, что среди данных задачи нет несовместных и их достаточно для выделения единственного решения. Требование устойчивости необходимо по следующей причине: в данных любой конкретной физической задачи, особенно если они получены экспериментально, всегда содержится некоторая погрешность, и нужно, чтобы малая погрешность в данных приводила к малой неточности в решении. Это требование выражает физическую определенность поставленной задачи.

Задачи. 1) Тонкий однородный цилиндрический стержень совершает продольные колебания, при которых его поперечные сечения, оставаясь плоскими, перемещаются вдоль оси x. Доказать, что уравнение малых колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

где $u(x, t)$ есть смещение сечения с абсциссой x в момент времени t, ρ — объемная плотность, а E — модуль Юнга материала стержня.

2) Тяжелая однородная гибкая нить длиной l подвешена за один из своих концов $x = l$ и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Доказать, что уравнение малых колебаний нити, которые она совершает под действием силы тяжести, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{g},$$

где $u(x, t)$ — отклонение точек нити от положения равновесия в момент времени t, g — ускорение силы тяжести.

3) Вывести уравнение распространения тепла в однородном кольце с очень малым поперечным сечением, принимая во внимание, что на боковой поверхности его происходит теплообмен с окружающей средой.

Ответ.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - b(u - u_0), \qquad a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}, \quad b = \frac{hp}{\sigma k},$$

где θ — длина дуги кольца; k, h — коэффициенты внутренней и внешней теплопроводности; c, ρ — теплоемкость и плотность вещества кольца; σ, p — площадь и периметр поперечного сечения; u_0 — температура внешней среды.

ГЛАВА II

КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 6. Типы уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (6.1)$$

Коэффициенты a_{ij} — заданные функции в области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $a_{ij} = a_{ji}$. Все функции и независимые переменные мы считаем вещественными.

В этом параграфе мы дадим классификацию уравнений вида (6.1) в точке. Зафиксируем определенную точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ в области D и составим квадратичную форму

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1^0, \ldots, x_n^0) t_i t_j. \quad (6.2)$$

Уравнение (6.1) принадлежит *эллиптическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (6.2) знакоопределенная.

Уравнение (6.1) принадлежит *гиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (6.2) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент противоположного знака.

Уравнение (6.2) принадлежит *ультрагиперболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (6.2) при приведении ее к сумме квадратов имеет больше одного положительного коэффициента и больше одного отрицательного, причем все коэффициенты отличны от нуля.

Уравнение (6.1) принадлежит *параболическому типу* в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если в этой точке квадратичная форма (6.2) при приведении ее к сумме квадратов имеет только один коэффициент, равный нулю, все же другие коэффициенты имеют одинаковые знаки.

Уравнение (6.1) принадлежит *эллиптическому типу* соответственно *гиперболическому типу* и т. д. *в области* D, если во всех точках этой области оно принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому типу и т. д.

Если коэффициенты a_{ij} постоянные, то принадлежность уравнения к тому или иному типу не зависит от значений независимых переменных. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа; уравнением гиперболического типа является волновое уравнение и, наконец, уравнением параболического типа — уравнение теплопроводности.

§ 7. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \ldots, x_n). \quad (7.1)$$

Введем вместо $(x_1, \ldots, x_n)$ новые независимые переменные $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k = \sum_{l=1}^{n} c_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (7.2)$$

Мы предполагаем, что преобразование (7.2) неособенное, т. е. что определитель $|c_{kl}|$ не равен нулю. Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}. \quad (7.3)$$

Подставляя (7.3) в уравнение (7.1), мы получим

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{l=1}^{n} \bar{b}_l \frac{\partial u}{\partial \xi_l} + cu = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad (7.4)$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} c_{ki} c_{lj}. \quad (7.5)$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (7.5) коэффициентов при вторых производных от функции u при замене независимых переменных по формулам (7.2) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i t_j, \quad (7.6)$$

если в ней произвести линейное преобразование

$$t_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \tau_k, \quad (7.7)$$

приводящее ее к виду

$$\sum_{k,l=1}^{n} \bar{a}_{kl} \tau_k \tau_l. \quad (7.8)$$

В алгебре доказывается, что всегда можно подобрать коэффициенты c_{ik} так, чтобы квадратичная форма (7.6) привелась к сумме квадратов, т. е. *)

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tau_k^2, \quad (7.8')$$

---

*) Согласно закону инерции для квадратичных форм число положительных и отрицательных коэффициентов λ_k инвариантно относ-

или, иначе говоря, $\bar{a}_{kl} = 0$ при $k \neq l$ и $\bar{a}_{kk} = \lambda_k$. Коэффициенты λ_k равны ± 1 или нулю соответственно. Знаки коэффициентов λ_k и определяют тип уравнения (7.1). Преобразованное уравнение (7.4) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{i=1}^{n} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial \xi_i} + cu = f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n). \qquad (7.9)$$

Этот вид уравнения (7.1) называется его *каноническим видом*.

Положим, что все λ_k отличны от нуля, т. е. что уравнение (7.1) не параболического типа, и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции u мы можем освободиться от производных первого порядка. С этой целью введем вместо u новую искомую функцию v по формуле

$$u = ve^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{b}_k}{\lambda_k} \xi_k}.$$

Подставляя в уравнение (7.1), мы получим, как это нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Для эллиптического уравнения все $\lambda_k = 1$ или $\lambda_k = -1$, и умножая, если надо, обе части уравнения на (-1), мы можем считать, что все $\lambda_k = 1$. Таким образом, сохраняя прежние обозначения, мы можем утверждать, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f_2(x_1, \ldots, x_n). \qquad (7.10)$$

сительно линейного преобразования, приводящего квадратичную форму (7.6) к виду (7.8'). (См. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, § 25, Физматгиз, 1962.)

В случае гиперболического типа мы будем считать, что имеется $(n+1)$ независимых переменных, и положим $\xi_{n+1} = t$. Тогда всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f_3(x_1, \ldots, x_n, t). \qquad (7.11)$$

В случае уравнения (6.1) с переменными коэффициентами для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ области D можно указать такое неособое преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (6.1) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется, вообще говоря, свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (6.1) к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в как угодно малой области. В случае же двух независимых переменных такое преобразование независимых переменных существует при весьма общих предположениях о коэффициентах уравнения (6.1), как будет показано в следующем параграфе.

§ 8. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, z, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (8.1)$$

где коэффициенты A, B и C суть функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. Мы будем предполагать, что A, B и C не обращаются одновременно в нуль.

Уравнению (8.1) соответствует квадратичная форма

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2. \tag{8.2}$$

Дифференциальное уравнение (8.1) принадлежит

1) *гиперболическому типу*, если $B^2-AC>0$ (квадратичная форма (8.2) знакопеременная);

2) *параболическому типу*, если $B^2-AC=0$ (квадратичная форма (8.2) знакопостоянная);

3) *эллиптическому типу*, если $B^2-AC<0$ (квадратичная форма (8.2) знакоопределенная).

Введем вместо (x, y) новые независимые переменные (ξ, η). Пусть

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y) \tag{8.3}$$

— дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем якобиан

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x}, & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x}, & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{8.4}$$

в области D.

В новых независимых переменных ξ и η уравнение (8.1) запишется так:

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0, \tag{8.5}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi, \eta)&=A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{C}(\xi, \eta)&=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2, \\ \bar{B}(\xi, \eta)&=A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что

$$\bar{B}^2-\bar{A}\bar{C}=(B^2-AC)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2. \tag{8.7}$$

Отсюда легко видеть, что преобразование независимых переменных не меняет типа уравнения.

В преобразовании (8.3) в нашем распоряжении две функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$. Покажем, что их можно выбрать так, чтобы выполнялось только одно из условий

$$1)\ \bar{A}=0,\ \bar{C}=0;\quad 2)\ \bar{A}=0,\ \bar{B}=0;\quad 3)\ \bar{A}=\bar{C},\ \bar{B}=0.$$

Тогда, очевидно, преобразованное уравнение (8.5) примет наиболее простой вид.

1) $B^2-AC>0$. В рассматриваемой области D уравнение (8.1) принадлежит гиперболическому типу. Мы можем считать, что в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (8.1) к каноническому виду, либо $A\neq 0$, либо $C\neq 0$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0. \tag{8.8}$$

Пусть $A\neq 0$. Так как $B^2-AC>0$, то уравнение (8.8) можно записать в виде

$$\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\times$$
$$\times\left[A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{8.8а}$$

$$A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \tag{8.8б}$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (8.8а) и (8.8б) будут решениями уравнения (8.8).

Для интегрирования уравнений (8.8а) и (8.8б) составим соответствующие им системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B+\sqrt{B^2-AC}}, \quad \frac{dx}{A}=\frac{dy}{B-\sqrt{B^2-AC}}$$

или

$$\begin{aligned} A\,dy-\left(B+\sqrt{B^2-AC}\right)dx&=0, \\ A\,dy-\left(B-\sqrt{B^2-AC}\right)dx&=0. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Заметим, что уравнения (8.9) можно записать в виде одного уравнения

$$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0. \tag{8.9a}$$

Коэффициенты дифференциальных уравнений (8.9) имеют непрерывные частные производные до второго порядка, что следует из предположений о коэффициентах A, B и C. Так как $A(x_0, y_0) \neq 0$, то существуют интегралы

$$\varphi_1(x, y) = \text{const}, \quad \varphi_2(x, y) = \text{const} \tag{8.10}$$

уравнений (8.9) и их левые части имеют непрерывные частные производные до второго порядка в окрестности точки $(x_0, y_0$ *). Левые части интегралов (8.10) будут соответственно решениями уравнений (8.8а) и (8.8б), а следовательно, и уравнения (8.8).

Кривые (8.10) называются *характеристическими кривыми* или просто *характеристиками* уравнения (8.1), а уравнение (8.8) — *уравнением характеристик.*

Для уравнения гиперболического типа $B^2 - AC > 0$ и интегралы (8.10) вещественны и различны. При этом мы имеем два различных семейства вещественных характеристик.

Положим в преобразовании (8.3)

$$\xi = \xi(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) = \varphi_2(x, y),$$

где $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ соответственно суть дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнений (8.8а) и (8.8б). Эти решения можно выбрать так, чтобы якобиан $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)} \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) области D. Так как $A \neq 0$, то из уравнений (8.8а) и (8.8б) мы имеем

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}.$$

Отсюда в силу $B^2 - AC > 0$ и из уравнений (8.8а) и

*) В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, гл. 8, § 3—5, Физматгиз, 1959.

(8.8б) следует, что если якобиан в некоторой точке равен нулю, то в этой точке равны нулю обе частные производные первого порядка от φ_1 или φ_2. Таким образом, надо строить такие решения уравнений (8.8а) и (8.8б), у которых обе частные производные первого порядка одновременно не равны нулю *).

Функции $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ удовлетворяют уравнению (8.8), и, в силу (8.6), в уравнении (8.5) $\overline{A} = \overline{C} = 0$. Коэффициент $\overline{B} \neq 0$ всюду в рассматриваемой области, что следует из (8.4) и (8.7). Разделив на коэффициент $2\overline{B}$ уравнение (8.5), мы приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{8.11}$$

Этот вид уравнения также называется каноническим.

При $A = C = 0$ уравнение (8.1) уже имеет вид (8.11). Положив

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta$$

приведем уравнение (8.11) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi\left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta}\right). \tag{8.12}$$

Это — *канонический вид уравнения гиперболического типа.*

2) $B^2 - AC = 0$. В рассматриваемой области D уравнение (8.1) принадлежит параболическому типу. Так как мы предполагаем, что коэффициенты A, B и C уравнения (8.1) не обращаются одновременно в нуль, то в силу условия $B^2 - AC = 0$ следует, что в каждой точке этой области один из коэффициентов A и C отличен от нуля. Пусть, например, $A \neq 0$ в точке (x_0, y_0), в окрестности которой мы будем приводить уравнение (8.1) к каноническому виду. Тогда оба уравнения (8.8а) и (8.8б) совпадают и обращаются в уравнение

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial x} + B\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{8.13}$$

*) Для этого достаточно для уравнений (8.8а) и (8.8б) решить задачу Коши, задавая при $x = x_0$ соответственно значения $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ так, чтобы $\varphi'_{1y}(x_0, y_0) \neq 0$ и $\varphi'_{2y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Нетрудно видеть, что всякое решение уравнения (8.13), в силу условия $B^2-AC=0$, удовлетворяет также уравнению

$$B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0. \qquad (8.14)$$

Мы можем, как и в предыдущем пункте, найти такое решение $\varphi(x, y)$ уравнения (8.13), что функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка и ее первые производные не обращаются в нуль одновременно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Отметим, что для уравнения параболического типа мы имеем одно семейство вещественных характеристик $\varphi(x, y)=\mathrm{const}$.

Положим в преобразовании (8.3)

$$\xi=\varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — решение уравнения (8.13), а за $\eta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию так, чтобы якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0). Тогда в уравнении (8.5) $\overline{A}\equiv 0$, что следует из (8.6), а коэффициент при $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}$ принимает следующий вид:

$$\overline{B}=\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(B\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}.$$

Согласно (8.13) и (8.14) $\overline{B}\equiv 0$ в окрестности точки (x_0, y_0). Коэффициент $\overline{C}$ в уравнении (8.5) преобразуется к виду

$$\overline{C}=\frac{1}{A}\left(A\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

откуда $\overline{C}\neq 0$, так как в противном случае в силу (8.13) якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=0$. Разделив на $\overline{C}\neq 0$ уравнение (8.5), мы приведем его к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (8.15)$$

Это — *канонический вид уравнения параболического типа.*

3) $B^2-AC<0$. В рассматриваемой области D уравнение (8.1) принадлежит эллиптическому типу. Будем считать, что коэффициенты A, B и C суть аналитические функции от x и y. Тогда коэффициенты уравнений (8.8а) и (8.8б) — также аналитические функции от x и y, и можно утверждать, что уравнение (8.8а) имеет аналитическое решение

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y)+i\varphi_2(x, y)$$

в окрестности точки (x_0, y_0) и $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|+\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|\neq 0$ в этой окрестности *). Положим в преобразовании (8.3)

$$\xi=\varphi_1(x, y), \quad \eta=\varphi_2(x, y).$$

Нетрудно показать, что $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y)}\neq 0$.

Разделяя теперь в тождестве

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

вещественную и мнимую части, получим

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=$$
$$=A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2,$$

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}=0.$$

Отсюда в силу (8.6) следует, что $\overline{A}=\overline{C}$, $\overline{B}=0$.

В силу определенности квадратичной формы

$$At_1^2+2Bt_1t_2+Ct_2^2 \qquad (B^2-AC<0)$$

$\overline{A}=\overline{C}$ могут обратиться в нуль только в том случае, если

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}=0. \qquad (8.16)$$

Но мы выбрали решение $\varphi(x, y)$ таким образом, что равенства (8.16) не выполняются одновременно. Таким

*) Существование такого аналитического решения следует из теоремы Ковалевской [2].

образом, в уравнении (8.5) $\bar{A} = \bar{C} \neq 0$, и после деления на $\bar{A}$ оно приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{8.17}$$

Это — *канонический вид уравнения эллиптического типа.*

Замечание. Может оказаться, что в различных частях области D уравнение (8.1) принадлежит различным типам. Как уже было сказано, точки параболичности уравнения (8.1) характеризуются равенством

$$B^2 - AC = 0. \tag{8.18}$$

Предположим, что множество точек области D, которое описывается уравнением (8.18), является простой гладкой кривой σ. Кривая σ называется *линией параболического вырождения.* Если кривая σ делит область D на две части, в одной из которых уравнение (7.1) принадлежит эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому типу, то мы скажем, что *в области D уравнение* (7.1) *смешанного типа.* Например:

1) Уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси x. При $y > 0$ оно принадлежит эллиптическому типу, при $y < 0$ — гиперболическому типу, $y = 0$ — линия параболичности.

2) Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— уравнение смешанного типа в любой области D, содержащей точки оси x; $y = 0$ — линия параболичности, которая одновременно является характеристикой ($y = 0$ — огибающая семейства характеристик).

Пример; Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0; \tag{8.19}$$

это уравнение гиперболического типа, так как

$$B^2 - AC = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0.$$

Согласно общей теории составляем уравнение (8.9а)

$$dy^2 + 2\sin x\,dx\,dy - \cos^2 x\,dx^2 = 0$$

или

$$dy + (1 + \sin x)\,dx = 0, \quad dy - (1 - \sin x)\,dx = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$x + y - \cos x = C_1, \quad x - y + \cos x = C_2.$$

Вводим новые переменные (ξ, η) по формулам

$$\xi = x + y - \cos x, \quad \eta = x - y + \cos x.$$

Тогда уравнение (8.19) в новых независимых переменных приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0. \tag{8.20}$$

Положив $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, приведем уравнение (8.20) к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = 0.$$

Уравнение (8.19) можно проинтегрировать в замкнутом виде, т. е. найти формулу, дающую все решения этого уравнения. Действительно, перепишем уравнение (8.20) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \theta(\eta),$$

где $\theta(\eta)$ — произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η, считая ξ параметром, найдем, что

$$u = \int \theta(\eta)\,d\eta + \varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ — произвольная функция от ξ. Полагая

$$\int \theta(\eta)\,d\eta = \psi(\eta),$$

получим

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

или, возвращаясь к старым переменным (x, y), получим решение уравнения (8.19) в виде

$$u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x).$$

Задачи. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - (3 + \sin^2 x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,$

3) $(1 + x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Ответы.

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \dfrac{\eta - \xi}{32}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0,\ \xi = 2x + \sin x + y,$ $\eta = 2x - \sin x - y;$

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0,\ \xi = \dfrac{x^2}{2} + y,\ \eta = x;$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,\ \xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ \eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи, связанные с процессами колебаний, например, задача о колебаниях струны, мембраны, газа, электромагнитных колебаниях и т. д. Характерной особенностью процессов, описываемых такими уравнениями, является конечная скорость их распространения.

§ 9. Уравнение колебаний струны. Решение Даламбера

1. Неограниченная струна. Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{9.1}$$

Положим

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \tag{9.2}$$

Нетрудно видеть, что $x - at = c_1$, $x + at = c_2$ — суть характеристики уравнения (9.1). Уравнение (9.1) в новых переменных запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0$$

или, переписав его в виде

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0,$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \omega(\xi),$$

где $\omega(\xi)$ — произвольная функция ξ. Интегрируя полученное уравнение по ξ, рассматривая η как параметр, найдем, что

$$u = \int \omega(\xi)\, d\xi + \theta_2(\eta),$$

где $\theta_2(\eta)$ — произвольная функция от η. Полагая теперь

$$\int \omega(\xi)\, d\xi = \theta_1(\xi),$$

получим

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta).$$

Возвращаясь к старым переменным (x, t), будем иметь

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \qquad (9.3)$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9.3), есть решение уравнения (9.1), если θ_1 и θ_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение (9.3) уравнения (9.1) называется *решением Даламбера*.

Выясним физический смысл решения (9.3).

Рассмотрим сначала частный случай колебания струны, когда $\theta_2 \equiv 0$, т. е. когда смещение струны определяется формулой

$$u_1 = \theta_1(x - at). \qquad (9.4)$$

Положим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = c$ струны, передвигается в положительном направлении оси x со скоростью a, т. е. его абсцисса меняется по закону $x = c + at$ или $x - at = c$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемое формулой (9.4), будет оставаться все время постоянным, равным $\theta_1(c)$. Самое явление, описываемое функцией $u_1 = \theta_1(x - at)$, называется *распространением прямой волны*. Таким образом, решение (9.4) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси x со скоростью a. Точно так же решение $u_2 = \theta_2(x + at)$ представляет *обратную волну*, которая распространяется в отрицательном направлении оси x со скоростью a.

Таким образом, решение (9.3) является суммой прямой и обратной волн.

Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени t. Строим кривые

$$u_1 = \theta_1(x), \quad u_2 = \theta_2(x),$$

изображающие прямую и обратные волны в начальный момент времени $t = 0$, и затем, не изменяя их формы, передвигаем их одновременно со скоростью a в разные стороны: $u_1 = \theta_1(x)$ — вправо, $u_2 = \theta_2(x)$ — влево. Чтобы получить теперь график струны, достаточно построить алгебраические суммы ординат раздвинутых кривых.

Рассмотрим верхнюю полуплоскость xt, в которой ось x соответствует положению струны в начальный момент времени $t = 0$. Всякая точка (x, t) нашей полуплоскости характеризует определенную точку x струны в определенный момент времени t. Нетрудно при этом найти графически те точки струны, начальные возмущения которых дошли в момент времени t_0 до точки x_0. Это будут, согласно предыдущему, точки с абсциссами $x \pm at_0$, так как a есть скорость распространения колебаний. Для нахождения их на оси x достаточно провести через точку (x_0, t_0) две характеристики

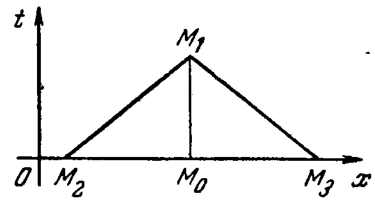

Рис. 3.

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0, \qquad (9.5)$$

и в пересечении их с осью x и получаются искомые точки (рис. 3).

Вдоль первой характеристики $\theta_1(x - at)$ сохраняет постоянное значение, т. е. эта прямая дает те значения (x, t), при которых прямая волна дает то же отклонение, что и при значениях (x_0, t_0). Вторая характеристика из (9.5) играет ту же роль для обратной волны $\theta_2(x + at)$. Можно сказать коротко, что возмущения распространяются по характеристикам.

2. Задача Коши. Найти решение уравнения (9.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{9.6}$$

Ввиду неограниченности струны функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ заданы в $(-\infty, \infty)$.

В решении (9.3) уравнения (9.1) нужно выбрать функции θ_1 и θ_2 так, чтобы удовлетворить начальным условиям (9.6). Из начальных условий (9.6) имеем

$$\varphi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \quad \varphi_1(x) = -a\,[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)],$$

откуда, интегрируя второе равенство, получим

$$\begin{gathered} \theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_0(x), \\ \theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + C, \end{gathered} \tag{9.7}$$

где C — произвольная постоянная.

Из равенств (9.7) находим

$$\begin{gathered} \theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz + \frac{C}{2}, \\ \theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_1(z)\,dz - \frac{C}{2}. \end{gathered} \tag{9.8}$$

Подставляя (9.8) в (9.3), будем иметь

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi_0(x - at) - \frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \varphi_1(z)\,dz + \frac{C}{2} + \frac{1}{2}\varphi_0(x + at) + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \varphi_1(z)\,dz - \frac{C}{2}$$

или окончательно

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\,dz. \tag{9.9}$$

Формула (9.9) дает решение задачи Коши (10.1), (10.6), если $\varphi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, а $\varphi_1(x)$ — до первого.

Задача Коши (9.1), (9.6) поставлена корректно. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы (9.9). Несомненна, далее, непрерывная зависимость решения (9.9) от начальных данных. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если заменить $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на $\bar{\varphi}_0(x)$ и $\bar{\varphi}_1(x)$ так, что

$$|\varphi_0(x) - \bar{\varphi}_0(x)| < \delta, \quad |\varphi_1(x) - \bar{\varphi}_1(x)| < \delta \quad (-\infty < x < \infty),$$

то разность между новым решением $\bar{u}(x, t)$ и первоначальным $u(x, t)$ будет по абсолютной величине меньше ε на любом конечном отрезке времени. Это утверждение легко следует из формулы (9.9).

Рассмотрим два частных случая.

1) Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное смещение имеет место лишь в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$ струны, т. е. $\varphi_0(x) = 0$ вне этого промежутка. Решение (9.9) выражается при этом формулой

$$u(x, t) = \frac{\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)}{2}. \tag{9.10}$$

Решение (9.10) является суммой двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a, причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\varphi_0(x)$, равной половине начального смещения. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$, т. е. $x > \alpha$. При $t < \frac{x-\alpha}{a}$ из вида функции $\varphi_0(x)$ и формулы (9.10) следует, что $u(x, t) = 0$, т. е. до точки x волна еще не дошла. С момента времени $t = \frac{x-\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта прямой волны). При $t > \frac{x+\alpha}{a}$ из формулы (9.10) следует, что $u(x, t) \equiv 0$. Моменту времени $t = \frac{x+\alpha}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта прямой волны через точку x, после чего в этой точке $u(x, t)$ обращается в нуль. Аналогичные рассуждения можно провести для точек струны, лежащих внутри промежутка $(-\alpha, \alpha)$ или левее его. Таким образом, в каждой точке струны после прохождения обеих волн (а для точек, лежащих вне области начального смещения, после прохождения только одной) наступает покой.

2) Начальное смещение равно нулю, а $\varphi_1(x)$ отлична от нуля лишь в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение (9.9) принимает следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(z)\, dz \tag{9.11}$$

или, полагая

$$\frac{1}{2a} \int\limits_0^x \varphi_1(z)\, dz = \psi(x),$$

получим

$$u(x, t) = \psi(x+at) - \psi(x-at),$$

т. е. по струне распространяются две волны — одна прямая и одна обратная. Исследуем решение (9.11) более подробно. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$. При $t=0$ промежуток интегрирования $(x-at, x+at)$ вырождается в точку x, а затем, при увеличении t, он расширяется в обе стороны со скоростью a. При $t < \frac{x-\alpha}{a}$ он не будет иметь общих точек с $(-\alpha, \alpha)$, функция $\varphi_1(z)$ в нем равна нулю, и формула (9.11) даст $u(x, t) = 0$, т. е. покой в точке x. Начиная с момента времени $t = \frac{x-\alpha}{a}$ промежуток $(x-at, x+at)$ будет налегать на $(-\alpha, \alpha)$, в котором $\varphi_1(z)$ отлична от нуля, и точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, при $t > \frac{x+\alpha}{a}$ промежуток $(x-at, x+at)$ будет содержать целиком промежуток $(-\alpha, \alpha)$, интегрирование по $(x-at, x+at)$ будет сводиться к интегрированию по $(-\alpha, \alpha)$, так как вне его $\varphi_1(z) = 0$, т. е. при $t > \frac{x+\alpha}{a}$ мы имеем постоянное значение $u(x, t)$, равное

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \varphi_1(z)\, dz. \tag{9.12}$$

Момент времени $t = \frac{x+\alpha}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x.

Таким образом, действие начального импульса приводится к тому, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, длина которого выражается интегралом (9.12), и остаются без движения в этом новом положении. Волны оставляют после себя как бы след своего прохождения.

3. Ограниченная струна. Рассмотрим теперь струну длины l, закрепленную на концах. Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{9.13}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \tag{9.14}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{9.15}$$

Решение Даламбера

$$u(x, t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at), \tag{9.16}$$

конечно, годится в этом случае, но определение функций θ_1 и θ_2 по формулам

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)\, dz, \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi_0(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \varphi_1(z)\, dz \end{aligned} \tag{9.17}$$

встречает здесь то затруднение, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, а следовательно, $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены лишь в промежутке $(0, l)$ согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $x \pm at$ в формуле (9.16) могут лежать и вне этого промежутка. Стало быть, для возможного применения решения (9.16) нужно продолжить функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ или, что вполне эквивалентно, функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вне промежутка $(0, l)$. С точки зрения физической это продолжение сводится к определению такого начального возмущения бесконечной струны, чтобы движение ее участка $(0, l)$ было то же самое, как если бы он был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Для продолжения функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями (9.14). Подставляя в правую часть (9.16) $x = 0$ и $x = l$ и принимая во внимание граничные условия (9.14), получим

$$\theta_1(-at) + \theta_2(at) = 0, \quad \theta_1(l - at) + \theta_2(l + at) = 0$$

или, обозначая at через x,

$$\theta_1(-x) = -\theta_2(x), \quad \theta_2(l + x) = -\theta_1(l - x). \qquad (9.18)$$

Когда x изменяется в промежутке $(0, l)$, то первая из формул (9.18) определяет функцию $\theta_1(x)$ в промежутке $(-l, 0)$, вторая — функцию $\theta_2(x)$ в промежутке $(l, 2l)$. Стало быть, обе функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ вполне определяются на промежутке длины $2l$. Далее, из равенств (9.18) следует, что

$$\theta_2(2l + x) = -\theta_1(-x) = \theta_2(x), \quad \theta_1(2l + x) = \theta_1(x),$$

т. е. функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ являются функциями периодическими с периодом $2l$. Итак, функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены при всех вещественных x.

Принимая во внимание, что

$$\varphi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x), \quad \varphi_1(x) = a\left[\theta_2'(x) - \theta_1'(x)\right],$$

мы найдем

$$\varphi_0(-x) = \theta_1(-x) + \theta_2(-x) = -\theta_2(x) - \theta_1(x) = -\varphi_0(x),$$

$$\varphi_1(-x) = a\left[\theta_2'(-x) - \theta_2'(-x)\right] = a\left[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)\right] = -\varphi_1(x),$$

$$\varphi_0(x + 2l) = \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x + 2l) = \varphi_1(x).$$

Эти формулы показывают, что функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(-l, 0)$ по закону нечетности, а затем с периодом $2l$.

Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, нужно, помимо условий дифференцируемости функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$, потребовать еще выполнения условий

$$\varphi_0(0) = \varphi_0(l) = 0, \quad \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) = 0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_1(l) = 0.$$

Это есть *условия согласования* начальных и граничных условий.

Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к полуплоскости xt. Ввиду ограниченности струны надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости $t > 0$, заключающуюся между прямыми $x = 0$ и $x = l$ (рис. 4). Проведем через точки 0 и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы, через полученные точки пересечения опять проведем характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т. д. Мы разобьем, таким образом, полосу на области (I), (II), (III), ...

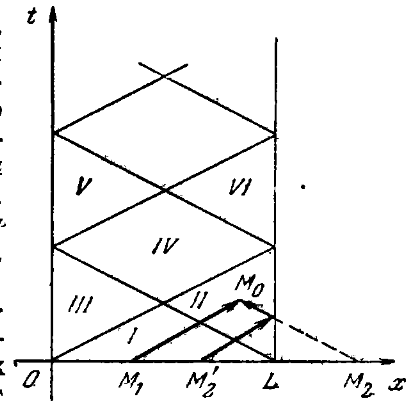

Рис. 4.

Точки области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят прямая и обратная волны, вышедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны еще на процесс колебания не влияют.

Точки вне области (I) соответствуют тем моментам времени t, когда к точкам x струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Возьмем, например, точку $M_0(x_0, t_0)$ в области (II). Так как

$$u(x_0, t_0) = \theta_1(x_0 - at_0) + \theta_2(x_0 + at_0),$$

то в этой точке имеются две волны: одна — прямая, дошедшая от начально возмущенной точки M_1 струны с абсциссой $x = x_0 - at_0$, другая — обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_0 + at_0$, причем в данном случае M_1 есть реальная точка струны, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что в силу (9.18),

$$\theta_2(x_0 + at_0) = \theta_2(l + x_0 + at_0 - l) = -\theta_1(2l - x_0 - at_0)$$

и, таким образом, обратная волна $\theta_2(x_0 + at_0)$ есть не что иное, как прямая волна $-\theta_1(2l - x_0 - at_0)$ от начально возмущенной точки $M_2'(2l - x_0 - at_0)$ (симметричной с M_2 относительно точки L), которая, дойдя до конца струны L в момент

$$t = \frac{l - (2l - x_0 - at_0)}{a} = \frac{x_0 + at_0 - l}{a},$$

изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t_0 дошла в таком виде до точки M_0.

Таким образом, действие закрепленного конца $x = l$ свелось к отражению волны смещения, связанному с переменой знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.

То же явление мы обнаружим и для волн, дошедших до конца $x = 0$; в точках области (III) мы будем иметь две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x = 0$. В точках областей (IV, (V), (VI), ... получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны.

Из предыдущих рассуждений следует, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом $\frac{2l}{a}$.

Задачи. 1) Струна бесконечной длины $x > 0$ находилась в состоянии равновесия. При $t > 0$ точка $x = 0$ совершает малые колебания $A \sin \omega t$. Показать, что смещение точки струны с абсциссой $x > 0$ определяется формулой

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ A \sin \omega\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{при } t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

2) Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени $t = 0$ форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = \frac{l}{2}$. Определить форму струны в моменты времени

$$t = \frac{l}{2a} \quad \text{и} \quad t = \frac{l}{a},$$

предполагая, что начальные скорости отсутствуют

§ 10. Уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)\, u = f(x, y); \quad (10.1)$$

к такому виду, как мы видели в гл. II, § 8, приводится линейное гиперболическое уравнение с двумя независимыми переменными ($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — непрерывные функции).

Уравнение характеристик для уравнения (10.1) имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Эти уравнения имеют соответственно решения y и x. Следовательно, $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ — суть характеристики уравнения (10.1).

1. Задача Коши. Пусть в плоскости xy дана дуга кривой l, которая пересекается не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат.

Уравнение этой дуги может быть записано в виде $y=g(x)$ или $x=h(y)$. Будем считать, что существуют производные $g'(x)$ и $h'(y)$, отличные от нуля.

Пусть вдоль дуги кривой l заданы значения u и $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$u|_{y=g(x)}=\varphi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=g(x)}=\varphi_1(x). \tag{10.2}$$

Данные Коши (10.2) позволяют на кривой $y=g(x)$ найти значения производной $\frac{\partial u}{\partial x}$. Действительно, дифференцируя по x первое из (10.2), получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=g(x)}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=g(x)}g'(x)=\varphi_0'(x),$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=g(x)}=\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)g'(x)=\omega(x). \tag{10.3}$$

Задача Коши ставится так: *требуется найти решение уравнения* (10.1) *в некоторой окрестности кривой l, удовлетворяющее данным Коши* (10.2).

Введем функции

$$v=\frac{\partial u}{\partial x},\quad w=\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10.4}$$

Тогда уравнение (10.1) равносильно системе трех уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial y}=f(x,y)-av-bw-cu,\\&\frac{\partial w}{\partial x}=f(x,y)-av-bw-cu,\\&\frac{\partial u}{\partial y}=w.\end{aligned} \tag{10.5}$$

Возьмем в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 5) произвольную точку $N(x,y)$ и проведем через нее характеристики NP и NQ до пересечения с кривой l. Интегрируя

первое и третье уравнения системы (10.5) по прямой QN, а второе — по PN и принимая во внимание (10.2), (10.3) и (10.4), получим

$$\begin{aligned}&v(x,y)=\omega(x)+\int_{g(x)}^{y}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dy,\\&w(x,y)=\varphi_1(x)+\int_{h(y)}^{x}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dx,\\&u(x,y)=\varphi_0(x)+\int_{g(x)}^{y}w(x,y)\,dy.\end{aligned} \tag{10.6}$$

Очевидно, что если $u(x,y)$ есть решение уравнения (10.1), удовлетворяющее данным Коши (10.2), то функции v, w и u удовлетворяют системе интегральных уравнений (10.6). Обратно, непрерывное решение (u,v,w) системы уравнений (10.6) удовлетворяет, очевидно, системе дифференциальных уравнений (10.5), а функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (10.1) и условиям (10.2). Действительно, из третьего уравнения системы (10.6) имеем $\frac{\partial u}{\partial y}=w$. Кроме того, в силу (10.4), (10.5), (10.3) и первого уравнения (10.6)

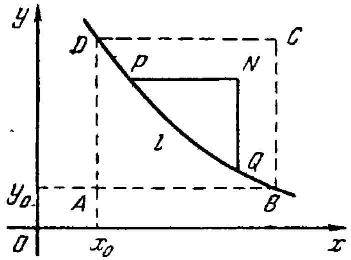

Рис. 5.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi_0'(x)-w(x,y)|_{y=g(x)}g'(x)+\int_{g(x)}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dy=$$

$$=\varphi_0'(x)-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=g(x)}g'(x)+\int_{g(x)}^{y}[f(x,y)-av-bw-cu]\,dy=$$

$$=\varphi_0'(x)-\varphi_1(x)g'(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dy=$$
$$=\omega(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dy=v.$$

Следовательно, оба уравнения (10.4) выполняются. Подставляя теперь (10.4) в первое уравнение системы (10.5), мы убеждаемся, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (10.1). Легко видеть, что $u(x, y)$ удовлетворяет данным Коши (10.2).

Таким образом, задача Коши (10.1) — (10.2) свелась к доказательству существования непрерывного решения системы интегральных уравнений (10.6).

Решение системы (10.6) будем искать методом последовательных приближений. За нулевое приближение берем

$$v_0=\omega(x),\quad w_0=\varphi_1(x),\quad u_0=\varphi_0(x),$$

и следующие приближения вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} v_n(x, y)=\omega(x)+\\ +\int\limits_{g(x)}^{y}[f(x, y)-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]\,dy,\\ w_n(x, y)=\varphi_1(x)+\\ +\int\limits_{h(y)}^{x}[f(x, y)-av_{n-1}-bw_{n-1}-cu_{n-1}]\,dx,\\ u_n(x, y)=\varphi_0(x)+\int\limits_{g(x)}^{y}w_{n-1}(x, y)\,dy\\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \end{gathered} \tag{10.7}$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{v_n, w_n, u_n\}$ в криволинейном треугольнике BCD (см. рис. 5).

Мы имеем

$$\begin{gathered} v_{n+1}-v_n=\\ =-\int\limits_{g(x)}^{y}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]\,dy,\\ w_{n+1}-w_n=\\ =-\int\limits_{h(y)}^{x}[a(v_n-v_{n-1})+b(w_n-w_{n-1})+c(u_n-u_{n-1})]\,dx,\\ u_{n+1}-u_n=\int\limits_{g(x)}^{y}(w_n-w_{n-1})\,dy. \end{gathered} \tag{10.8}$$

Покажем, что разности $|v_n-v_{n-1}|$, $|w_n-w_{n-1}|$, $|u_n-u_{n-1}|$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{gathered} |v_n-v_{n-1}|\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},\\ |w_n-w_{n-1}|\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!},\\ |u_n-u_{n-1}|\leqslant K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}, \end{gathered} \tag{10.9}$$

где $M=\max\limits_{\overline{BCD}}[|a|+|b|+|c|]$, $K=\max(1, M)$ и A — некоторая постоянная.

При $n=1$ справедливость (10.9) очевидна, если выбрать A достаточно большой. Покажем, что эти неравенства останутся справедливыми при замене n на $n+1$. Из равенств (10.8) имеем, например,

$$|v_{n+1}-v_n|\leqslant\int\limits_{g(x)}^{y}(|a|+|b|+|c|)K^{n-1}A\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy\leqslant$$
$$\leqslant K^nA\int\limits_{y_0}^{y}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy=$$
$$=K^nA\left[\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}-\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]\leqslant$$
$$\leqslant K^nA\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}\qquad (x>x_0,\ y_0\leqslant g(x)\leqslant b).$$

Точно так же оцениваются и другие разности $|w_{n+1}-w_n|$ и $|u_{n+1}-u_n|$. Из оценок (10.9) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$v_0+\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-v_{n-1}), \quad w_0+\sum_{n=1}^{\infty}(w_n-w_{n-1}),$$

$$u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1}),$$

члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$A+A\sum_{n=1}^{\infty}K^{n-1}\frac{(x+y-x_0-y_0)^{n-1}}{(n-1)!}=A\left(1+e^{K(x+y-x_0-y_0)}\right).$$

Следовательно, последовательные приближения v_n, w_n и u_n в криволинейном треугольнике BCD равномерно стремятся соответственно к определенным пределам v, w и u. Предельные функции непрерывны, так как все последовательные приближения непрерывны. Переходя к пределу в формулах (10.7), мы получим, что предельные функции $v(x, y)$, $w(x, y)$ и $u(x, y)$ удовлетворяют системе (10.6).

Единственность решения системы (10.6). Допустим, что мы имеем два различных непрерывных решения системы (10.6) v_1, w_1, u_1 и v_2, w_2, u_2. Обозначим $V=v_1-v_2$, $W=w_1-w_2$, $U=u_1-u_2$. Тогда V, W, U удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\begin{aligned} V(x, y)&=-\int_{g(x)}^{y}(aV+bW+cU)\,dy,\\ W(x, y)&=-\int_{h(y)}^{x}(aV+bW+cU)\,dx, \qquad (10.10)\\ U(x, y)&=\int_{g(x)}^{y}W(x, y)\,dy. \end{aligned}$$

Нужно доказать, что $V=W=U=0$. Функции V, W и U непрерывны и ограничены, как разности непрерывных функций в замкнутом криволинейном треугольнике BCD. Значит, существует такая постоянная B, что

$$|V|\leqslant B, \quad |W|\leqslant B, \quad |U|\leqslant B.$$

Из (10.10) имеем

$$|V(x, y)|\leqslant\int_{g(x)}^{y}(|a|+|b|+|c|)\,B\,dy\leqslant$$

$$\leqslant KB(y-y_0)\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

$$|W(x, y)|\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!},$$

$$|U(x, y)|\leqslant KB\frac{(x+y-x_0-y_0)}{1!}.$$

Применяя метод математической индукции, получим следующие оценки

$$|V|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}, \quad |W|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!},$$

$$|U|\leqslant K^nB\frac{(x+y-x_0-y_0)^n}{n!}$$

для любого n. Отсюда следует, что $V=W=U=0$, т. е. $v_1=v_2$, $w_1=w_2$, $u_1=u_2$.

2. Задача Гурса. Требуется найти решение уравнения (10.1), принимающее заданные значения на характеристиках $x=x_0$ и $y=y_0$:

$$\begin{aligned} u|_{x=x_0}&=\varphi_1(y), \quad y_0\leqslant y\leqslant b,\\ u|_{y=y_0}&=\varphi_2(x), \quad x_0\leqslant x\leqslant a. \end{aligned} \qquad (10.11)$$

Будем считать, что $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(x)$ имеют непрерывные производные первого порядка и $\varphi_1(y_0)=\varphi_2(x_0)$.

Введем, как и в случае задачи Коши,

$$v=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad w=\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (10.12)$$

Тогда уравнение (10.1) равносильно системе трех уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial y}=f(x, y)-a(x, y)v-b(x, y)w-c(x, y)u,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=f(x, y)-a(x, y)v-b(x, y)w-c(x, y)u, \qquad (10.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=w.$$

Отсюда, принимая во внимание (11.2) и (11.3), следует, что

$$v(x, y)=\varphi_2'(x)+\int_{y_0}^{y}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dy,$$

$$w(x, y)=\varphi_1'(y)+\int_{x_0}^{x}[f(x, y)-av-bw-cu]\,dx, \qquad (10.14)$$

$$u(x, y)=\varphi_2(x)+\int_{y_0}^{y} w\,dy.$$

Как и в случае задачи Коши, доказывается, что задача Гурса (10.1), (10.11) сводится к доказательству существования непрерывного решения системы интегральных уравнений (10.14). Как и выше, существование и единственность системы (10.14) доказывается методом последовательных приближений.

§ 11. Волновое уравнение

1. Формула Пуассона. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (11.1)$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x, y, z), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y, z). \qquad (11.2)$$

Мы будем предполагать, что $\varphi_0(x, y, z)$ непрерывна вместе со своими производными до третьего порядка, а $\varphi_1(x, y, z)$ до второго порядка включительно во всем пространстве.

Покажем сначала, что интеграл

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\sigma_r, \qquad (11.3)$$

взятый по поверхности сферы S_{at} радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x, y, z)$, является решением волнового уравнения (11.1); здесь $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ — произвольная функция.

Заметим, что координаты точек сферы S_{at} могут быть выражены по формулам

$$\xi=x+\alpha at, \quad \eta=y+\beta at, \quad \zeta=z+\gamma at,$$

где (α, β, γ) — направляющие косинусы радиусов сферы S_{at}. Мы их можем записать в виде

$$\alpha=\sin\theta\cos\psi, \quad \beta=\sin\theta\sin\psi, \quad \gamma=\cos\theta,$$

где угол θ меняется от 0 до π и угол ψ от 0 до 2π. Когда точка (ξ, η, ζ) описывает сферу S_{at}, точка (α, β, γ) описывает сферу S_1 радиуса, равного единице, с центром в начале координат, а между соответствующими элементами площади $d\sigma_r$ и $d\sigma_1$ обеих сфер имеется соотношение

$$d\sigma_r=r^2\,d\sigma_1=a^2t^2\,d\sigma_1=a^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

Тогда интеграл (11.3) приводится к виду

$$u(x, y, z, t)=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\varphi(x+\alpha at, y+\beta at, z+\gamma at)\,d\sigma_1. \qquad (11.4)$$

Отсюда легко заметить, что функция $u(x, y, z, t)$ имеет непрерывные производные до K-го порядка, если функция $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе со своими производными до K-го порядка $(K\geqslant 2)$.

Из формулы (11.4) находим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{t}{4\pi}\iint_{S_1}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_1$$

или, возвращаясь к первоначальной области интегрирования,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \quad (11.5)$$

Дифференцируя теперь выражение (11.4) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\varphi(x+\alpha at,\ y+\beta at,\ z+\gamma at)\,d\sigma_1+$$
$$+\frac{at}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)d\sigma_1. \quad (11.6)$$

Чтобы вычислить $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, перепишем (11.6) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iint\limits_{S_{at}}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)d\sigma_r$$

и, применяя формулу Остроградского, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{1}{4\pi at}\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

где D_{at} — шар радиуса $r=at$ с центром в точке $M(x, y, z)$. Полагая

$$I=\iiint\limits_{D_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}.$$

Дифференцируя это выражение по t, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{u}{t^2}+\frac{1}{t}\left(\frac{u}{t}+\frac{I}{4\pi at}\right)-\frac{I}{4\pi at^2}+\frac{1}{4\pi at}\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{4\pi at}\frac{dI}{dt}. \quad (11.7)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r. \quad (11.8)$$

В самом деле, переходя в интеграле I к сферическим координатам (ρ, θ, ψ) с центром в точке $M(x, y, z)$, имеем

$$I=\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,d\rho.$$

Дифференцируя по t, получим

$$\frac{\partial I}{\partial t}=a\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)_{\rho=at}a^2t^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi=$$
$$=a\iint\limits_{S_{at}}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}\right)d\sigma_r.$$

Сравнивая равенства (11.5), (11.7) и (11.8), мы видим, что функция $u(x, y, z, t)$, определяемая формулой (11.3), удовлетворяет волновому уравнению (11.1), какова бы ни была функция $\varphi(x, y, z)$, имеющая непрерывные производные до второго порядка. Из формул (11.4) и (11.6) непосредственно следует, что функция $u(x, y, z, t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x, y, z). \quad (11.9)$$

Если u есть решение волнового уравнения (11.1) с начальными данными (11.9), то легко видеть, что функция

$$v(x, y, z, t)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

будет также решением уравнения (11.1), удовлетворяющим начальным условиям

$$v|_{t=0}=\varphi(x, y, z),$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{t=0}=a^2\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right|_{t=0}=0. \quad (11.10)$$

Взяв теперь за $\varphi(x, y, z)$ в случае начальных условий (11.9) функцию $\varphi_1(x, y, z)$, а в случае начальных условий (11.10) функцию $\varphi_0(x, y, z)$ и сложив построенные таким образом решения, будем иметь решение уравнения (11.1), удовлетворяющее начальным условиям (11.2).

Таким образом, решение волнового уравнения (11.1), удовлетворяющее начальным условиям (11.2), запишется в виде

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\sigma_r+$$
$$+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}}\frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r}\,d\sigma_r. \quad (11.11)$$

Эта формула называется *формулой Пуассона.*

Чтобы более ясно представить себе физическую картину распространения волн в трехмерном пространстве, описываемую формулой Пуассона (11.11), положим, что начальное возмущение сосредоточено в некоторой ограниченной области V с границей S, т. е. что функции φ_0 и φ_1 равны нулю вне области V. Пусть точка $M(x, y, z)$ находится вне области V. Обозначим через d и D соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от M до точек поверхности S (рис. 6). При $t<\frac{d}{a}$ сфера S_{at} находится вне V, обе функции φ_0 и φ_1 равны нулю на сфере S_{at} и из формулы (11.11) имеем $u(M, t)=0$, т. е. начальные возмущения еще не успели дойти до точки M. В момент $t=\frac{d}{a}$ сфера S_{at} коснется поверхности S и передний фронт волны пройдет через точку M. Начиная с момента времени $t=\frac{d}{a}$ до момента времени $t=\frac{D}{a}$, сфера S_{at} будет пересекать область V и формула (11.11) дает $u(M, t)\neq 0$. Наконец, при $t>\frac{D}{a}$ сфера S_{at} не будет иметь общих точек с поверхностью S (вся область V будет лежать внутри сферы S_{at}) и из формулы (11.11) будем иметь $u(M, t)=0$, т. е. начальные возмущения уже прошли через точку M. Моменту $t=\frac{D}{a}$ соответствует прохождение заднего фронта волны через точку M. Передний фронт волны в заданный момент времени t представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще не начали колебаться, от точек, которые уже колеблются. Из предыдущего вытекает, что все точки этой поверхности имеют кратчайшее расстояние от S, равное at. Передний фронт волны есть огибающая для семейства сфер, имеющих центры на поверхности S и радиус at. Задний фронт волны в заданный момент t представляет собою поверхность, отделяющую точки, которые еще колеблются, от точек, в которых колебание прекратилось. Постоянная a является скоростью распространения фронта волны.

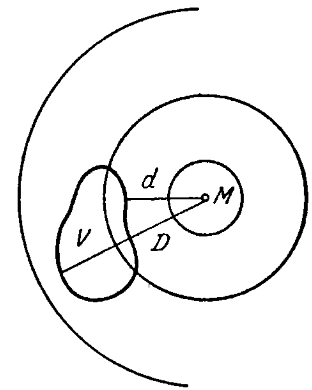

Рис. 6.

Таким образом, начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке M пространства действие, локализованное во времени; при этом имеет место распространение волны с передним и задним фронтами волн (принцип Гюйгенса).

2. Цилиндрические волны. Рассмотрим частный случай, когда функции φ_0 и φ_1 зависят только от x и y, т. е. сохраняют постоянное значение на всякой прямой, параллельной оси z. Если передвигать точку $M(x, y, z)$ параллельно оси z, то, очевидно, правая часть формулы Пуассона (11.11) не будет менять своего значения, т. е. функция u также не будет зависеть от z, и формула (11.11) дает решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (11.12)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y). \quad (11.13)$$

Мы можем рассматривать решение (11.11), оставаясь исключительно на плоскости xy. Для этого надо интегралы формулы (11.11), которые берутся по сферам, преобразовать в интегралы по кругам на плоскости xy. Возьмем точку $M(x, y)$ на плоскости xy. Точки с координатами (ξ, η, ζ), определяемые по формулам

$$\xi = x + \alpha at, \quad \eta = y + \beta at, \quad \zeta = z + \gamma at$$

при $z = 0$, суть переменные точки сферы S_{at} с центром $M(x, y, 0)$ и радиусом at. Части этой сферы, находящиеся над и под плоскостью xy, проектируются на плоскость xy в виде круга C_{at} с центром $M(x, y)$ и радиусом at. Известно, что

$$dC_{at} = \cos(nz)\, d\sigma_{at},$$

где n — направление нормали к S_{at}, т. е. радиуса этой сферы, образующей острый угол с осью Oz. Если N — переменная точка сферы, N_1 — ее проекция на плоскость xy, то

$$\cos(nz) = \frac{|NN_1|}{|MN|} = \frac{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}{at},$$

где (ξ, η) — координаты переменной точки круга C_{at}.

В результате преобразования формулы (11.11) мы получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{at}} \frac{\varphi_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \quad (11.14)$$

Эта формула дает решение волнового уравнения (11.12), удовлетворяющее начальным данным (11.13).

Положим, что начальное возмущение ограничивается некоторой конечной областью B на плоскости xy с контуром l, т. е. $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю вне B. Пусть точка $M(x, y)$ лежит вне области B. Для моментов времени $t < \frac{d}{a}$, где d — наименьшее расстояние от M до контура l, круг C_{at} не имеет общих точек с областью B, функции $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ равны нулю во всем

круге C_{at} и формула (11.14) дает $u(x, y, t) = 0$ — до точки M возмущение еще не дошло. В момент $t = \frac{d}{a}$ в точку M придет передний фронт волны. Для значений $t > \frac{D}{a}$, где D — наибольшее расстояние от M до контура l, круг C_{at} будет содержать внутри себя всю область B и мы получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{B} \frac{\varphi_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{B} \frac{\varphi_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \quad (11.15)$$

В данном случае, после момента времени $t = \frac{D}{a}$ функция $u(x, y, t)$ не обращается в нуль, как в случае трехмерного пространства. Но ввиду присутствия a^2t^2 в знаменателе мы можем утверждать, что $u(x, y, t) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, начальное возмущение, локализованное на плоскости, не локализовано во времени. В этом случае возникает волна, которая имеет передний фронт волны, но не имеет заднего фронта (принцип Гюйгенса не имеет места). В трехмерном пространстве уравнению (11.12) соответствуют так называемые *цилиндрические* волны.

3. Непрерывная зависимость решения от начальных данных. Все выведенные формулы, дающие решение задачи Коши для волнового уравнения, содержат интегралы от начальных функций, умноженных на определенные функции, и производные по времени от таких интегралов. Поэтому если изменить начальные функции φ_0 и φ_1 так, чтобы при этом они сами и их первые производные достаточно мало изменились, то при этом мало изменится и функция u, дающая решение задачи Коши, т. е. имеем *непрерывную зависимость решения от начальных данных*. При этом предполагается, конечно, что рассматриваются только ограниченные значения t, если область, на которой задаются начальные функции, бесконечна.

4. Теорема единственности. Докажем единственность решения задачи Коши для волнового уравнения. Для простоты письма будем считать $a=1$, чего можно достигнуть, заменяя в волновом уравнении t на $\frac{t}{a}$. Для определенности рассмотрим случай трех независимых переменных:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{11.16}$$

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x, y). \tag{11.17}$$

Покажем, что задача Коши (11.16), (11.17) имеет единственное решение в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций. Предположим, что $u_1(x, y, t)$ и $u_2(x, y, t)$ удовлетворяют уравнению (11.16) и начальным данным (11.17). Тогда разность $u(x, y, t)= u_1(x, y, t)-u_2(x, y, t)$ будет удовлетворять волновому уравнению (11.16) и нулевым начальным данным

$$u|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{11.18}$$

Покажем, что $u\equiv 0$ при любых значениях (x, y) и любом $t>0$. Рассмотрим трехмерное пространство (x, y, t) и возьмем произвольную точку $M(x_0, y_0, t_0)$, причем $t_0>0$. Из этой точки, как вершины, проведем конус

$$(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$$

до пересечения с плоскостью $t=0$. Этот конус будем называть характеристическим конусом *). Пусть D — область, ограниченная боковой поверхностью характеристического конуса и частью плоскости $t=0$, находящейся внутри конуса (D — конус).

Нетрудно проверить следующее тождество:

$$2\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

*) Более подробно об этом см. § 12.

Проинтегрируем это тождество по области D. Интеграл от левой части равен нулю, так как u является решением уравнения (11.16):

$$0=\iiint\limits_D\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy\,dt.$$

Преобразуем этот интеграл по поверхности области D, пользуясь формулой Остроградского. Обозначим через Γ боковую поверхность конуса, а через σ_0 — его основание. Так как на σ_0 в силу начальных данных (11.18) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial t}=0$, то остается только один интеграл по Γ:

$$\iint\limits_\Gamma\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]\cos(nt)-\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx)-2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny)\right\}dS=0. \tag{11.19}$$

На боковой поверхности Γ характеристического конуса

$$\cos^2(nt)-\cos^2(nx)-\cos^2(ny)=0.$$

Равенство (11.19) можно теперь переписать в виде

$$\iint\limits_\Gamma\frac{1}{\cos(nt)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nt)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(nx)\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial u}{\partial y}\cos(nt)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(ny)\right]^2\right\}dS=0. \tag{11.20}$$

На поверхности Γ $\cos(nt)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, и так как подынтегральная функция непрерывна и неотрицательна, то из (11.20) следует, что она на поверхности конуса равна нулю, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nt)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(nx)=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\cos(nt)-\frac{\partial u}{\partial t}\cos(ny)=0$$

(на Γ)

или

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\cos(nx)}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\cos(ny)}=\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\cos(nt)}=\lambda. \tag{11.21}$$

Обозначим через l направление какой-нибудь образующей характеристического конуса, тогда, воспользовавшись равенствами (11.21), получим

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(lx)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(ly)+\frac{\partial u}{\partial t}\cos(lt)=$$
$$=\lambda[\cos(nx)\cos(lx)+\cos(ny)\cos(ly)+\cos(nt)\cos(lt)]=$$
$$=\lambda\cos(nl)=0,$$

так как образующая конуса всегда составляет прямой угол с нормалью к его поверхности. Итак, вдоль образующей l $u=\text{const}$. В точке, где образующая конуса пересекает плоскость $t=0$, значение $u=0$. Поэтому $u=0$ вдоль образующей конуса. В частности, это выполняется и в вершине конуса в точке M: $u(M)=0$, что и требовалось доказать. Это утверждение сохраняет свою силу, если однородные начальные условия (11.18) имеют место не на всей плоскости xy, а лишь на основании σ_0 области D. Отсюда можно заключить, что значение решения волнового уравнения (11.16) в точке $M(x_0, y_0, t_0)$ зависит от значений начальных данных только на той части плоскости $t=0$, которая вырезается из плоскости $t=0$ характеристическим конусом с вершиной M (x_0, y_0, t_0).

5. Неоднородное волновое уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x, y, z, t) \tag{11.22}$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям

$$u|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{11.23}$$

Добавляя к этому решению решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (11.2), получим решение уравнения (11.22), удовлетворяющее условиям (11.2).

Для решения задачи (11.22), (11.23) рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{11.24}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$v|_{t=\tau}=0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=\tau}=f(x, y, z, \tau), \tag{11.25}$$

причем за начальный момент времени взято не $t=0$, а $t=\tau$, где τ — некоторый параметр. Решение задачи (11.24), (11.25) будет выражаться формулой Пуассона, но только в этой формуле нужно заменить t на $t-\tau$, поскольку начальным моментом времени является не $t=0$, а $t=\tau$. Итак, мы имеем

$$v(x, y, z, t; \tau)=\frac{t-\tau}{4\pi}\iint_{S_1} f[x+\alpha a(t-\tau),\ y+$$
$$+\beta a(t-\tau),\ z+\gamma a(t-\tau),\ \tau]\,d\sigma_1. \tag{11.26}$$

Покажем, что функция $u(x, y, z, t)$, определенная формулой

$$u(x, y, z, t)=\int_0^t v(x, y, z, t; \tau)\,d\tau, \tag{11.27}$$

является решением неоднородного волнового уравнения (11.22) при нулевых начальных данных (11.23).

Действительно, из формулы (11.27) находим

$$\Delta u=\int_0^t \Delta v(x, y, z, t; \tau)\,d\tau. \tag{11.28}$$

Дифференцируя выражение (11.27) по t, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}\,d\tau+v(x, y, z, t; \tau)\Big|_{\tau=t}. \tag{11.29}$$

Здесь внеинтегральный член равен нулю в силу первого из условий (11.25). Дифференцируя еще раз по t, будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,d\tau+\left.\frac{\partial v(x, y, z, t; \tau)}{\partial t}\right|_{\tau=t},$$

причем внеинтегральный член равен $f(x, y, z, t)$ в силу второго из условий (11.25), т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,dt+f(x, y, z, t). \qquad (11.30)$$

Из формул (11.28), (11.30) и уравнения (11.24) непосредственно вытекает, что функция $u(x, y, z, t)$, определенная формулой (11.27), удовлетворяет неоднородному уравнению (11.22). Начальные условия (11.23) также выполнены, что следует из формул (11.27) и (11.29).

Подставляя теперь в формулу (11.27) вместо функции ее выражение (11.26), получим

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\left\{\iint_{S_1} f[x+\alpha a(t-\tau),\ y+\right.$$
$$\left.+\beta a(t-\tau),\ z+\gamma a(t-\tau);\ \tau]\,d\sigma_1\right\}d\tau.$$

Введем вместо τ новую переменную интегрирования $r=a(t-\tau)$. Тогда будем иметь

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f\left(x+\alpha r, y+\beta r, z+\gamma r, t-\frac{r}{a}\right)}{r}\,r^2\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,dr.$$

Вводя вместо сферических прямоугольные координаты

$$\xi=x+\alpha r,\quad \eta=y+\beta r,\quad \zeta=z+\gamma r$$

и принимая во внимание, что $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, получим

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

и выражение для $u(x, y, z, t)$ окончательно запишется в виде

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{D_{at}}\frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \qquad (11.31)$$

где D_{at} — шар радиуса at с центром в точке (x, y, z).

Выражение (11.31) называется *запаздывающим потенциалом.*

Отметим, что при выполнении интегрирования функция f берется не в рассматриваемый момент времени t, а в момент времени $t-\frac{r}{a}$, предшествующий моменту t на такой промежуток времени, какой потребуется процессу, распространяющемуся со скоростью a, для прохождения пути от точки (ξ, η, ζ) до точки (x, y, z).

Совершенно так же, как и выше, мы можем получить решение неоднородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x, y, t), \qquad (11.32)$$

удовлетворяющее начальным данным

$$u|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \qquad (11.33)$$

Это решение имеет следующий вид:

$$u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^t\left[\iint_{\rho\leqslant a(t-\tau)}\frac{f(\xi, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}}\,d\xi\,d\eta\right]d\tau, \qquad (11.34)$$

где

$$\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2.$$

В случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t), \qquad (11.35)$$

решение, удовлетворяющее нулевым начальным данным, будет

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi\right]d\tau. \qquad (11.36)$$

6. Точечный источник. Если мы положим, что свободный член в уравнении (11.22) отличен от нуля только в небольшой сфере с центром в начале координат, то при стремлении радиуса этой сферы к нулю и при беспредельном возрастании интенсивности внешней силы мы в пределе можем получить решение волнового уравнения при наличии точечного источника, который начинает действовать с момента $t=0$ и закон воздействия которого может быть любым в зависимости от времени. Положим, что

$$f(x, y, z, t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant \varepsilon \qquad (11.37)$$

и

$$\iiint_{D_\varepsilon} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = 4\pi a^2 \omega(t), \qquad (11.38)$$

где D_ε — шар с центром в начале и радиуса ε.

Обратимся к формуле (11.31) и будем считать $at > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В силу (11.37) достаточно произвести интегрирование по шару D_ε. При $\varepsilon \to 0$ величина r будет равна расстоянию от точки (x, y, z) до начала координат, т. е. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, и мы получим, принимая во внимание (11.38),

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{r}\,\omega\left(t-\frac{r}{a}\right) \qquad (at > r). \qquad (11.39)$$

При $r > at$ ясно, что $u(x, y, z, t) = 0$, так как при $r > at$ область интегрирования в интеграле (11.31) не содержит внутри себя шара D_ε при достаточно малых ε. Отметим, что функция (11.39) при любом выборе функции $\omega(t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению (11.1) и представляет собой сферическую волну, расходящуюся радиально со скоростью a от начала координат.

В случае уравнения (11.32) мы должны совершенно так же, как и выше, считать

$$f(x, y, t)=0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2} \geqslant \varepsilon,$$

$$\iint_{C_\varepsilon} f(x, y, t)\, dx\, dy = 2\pi a \omega(t),$$

где C_ε — круг с центром в начале радиуса ε. Обращаясь к формуле (11.34) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим решение для точечного источника в случае цилиндрических волн:

$$u(x, y, t) = \int_0^{t-\frac{\rho}{a}} \frac{\omega(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-\rho^2}} \qquad (at > \rho), \qquad (11.40)$$

$$u(x, y, t)=0 \quad \text{при} \quad at < \rho \quad (\rho=\sqrt{x^2+y^2}).$$

Отметим, что воздействие точечного источника на точку (x, y, z) в момент времени t зависит только от интенсивности источника в момент времени $t-\frac{\rho}{a}$. В случае же формулы (11.40) это воздействие определяется действием точечного источника за промежуток времени от $t=0$ до момента $t-\frac{\rho}{a}$.

§ 12. Задача Коши. Характеристики

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (12.1)$$

причем считаем $a_{ik}=a_{ki}$. Функции a_{ik} вещественны; они определены в некоторой области D пространства $(x_1, \ldots, x_n)$.

Пусть в области D задана достаточно гладкая $(n-1)$-мерная поверхность S и в каждой точке этой поверхности некоторая линия l, не касательная к S и достаточно гладко изменяющаяся при движении вдоль S, например нормаль к поверхности.

На поверхности S задаются значения функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее производные первого порядка по направлению линии l. Эти значения на поверхности S будем называть начальными данными Коши.

Задача Коши для уравнения (12.1) ставится так: *найти решение уравнения* (12.1) *в некоторой окрестности поверхности* S, *удовлетворяющее начальным данным Коши на поверхности* S

Начальные данные Коши определяют функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$ и все ее частные производные первого порядка на поверхности S

Поставим перед собой следующий вопрос: можно ли с помощью дифференциального уравнения (12.1) совместно с начальными данными Коши однозначно определить на поверхности S также производные второго и высших порядков от искомой функции $u(x_1, \ldots, x_n)$*).

Начнем рассмотрение нашего вопроса с того случая, когда начальные данные имеют специальную форму:

$$u\big|_{x_1=x_1^0} = \varphi_0(x_2, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=x_1^0} = \varphi_1(x_2, \ldots, x_n), \tag{12.2}$$

т. е. начальные данные заданы на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$ и за направление l выбрана нормаль. Начальные данные (12.2) дают нам возможность определить на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$ все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$.

Для определения этой последней производной мы должны воспользоваться самим уравнением (12.1), положив в нем $x_1 = x_1^0$. Здесь могут представиться два случая:

I. $a_{11}(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$, II. $a_n(x_1^0, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

В случае I мы однозначно определим производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ на гиперплоскости $x = x_1^0$, а также производные высших порядков.

В случае II мы или придем к невозможному равенству, или получим тождество, т. е. мы придем к несовместности или неопределенности при нахождении вторых производных на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$.

*) Мы предполагаем, что решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (12 1) существует.

Перейдем теперь к общему случаю, когда начальные данные Коши даны на некоторой поверхности S:

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{12.3}$$

В окрестности поверхности S введем новые координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$, полагая

$$\xi_i = \omega_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12.4}$$

причем функции $\omega_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ выбраны так, чтобы якобиан преобразования был отличен от нуля на S Производные по старым переменным выразятся через производные по новым переменным по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{l,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_l \partial \xi_j} \frac{\partial \omega_l}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \omega_l}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Подставляя в уравнение (12.1), получим

$$\bar{a}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \ldots = 0, \tag{12.5}$$

где

$$\bar{a}_{11} = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k}. \tag{12.6}$$

Невыписанные члены не содержат производной $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2}$.

В силу (12.3) и (12.4), начальные данные для преобразованного уравнения (12.5) задаются на гиперплоскости $\xi_1 = 0$, т. е. они имеют указанный выше специальный вид. Таким образом, в данном случае мы можем воспользоваться результатами, полученными в начале этого параграфа, но только в новых независимых переменных. Принимая во внимание (12.6), мы можем, таким образом, утверждать, что для того, чтобы начальные данные Коши на поверхности (12.3) приводили к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго порядка на поверхности S, необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла условию

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} = 0, \qquad (12.7)$$

причем это условие должно быть удовлетворено при $\omega_1 = 0$, т. е., иначе говоря, в силу уравнения (12.3).

Поверхность $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется *характеристической поверхностью* уравнения (12.1) или просто *характеристикой*, если в каждой точке этой поверхности имеет место равенство (12.7).

Подчеркнем, что хотя условие (12.7) имеет внешний вид уравнения в частных производных первого порядка относительно ω_1, оно по своему определению еще не является таковым. В самом деле, условие (12.7) не должно выполняться тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$, а только при $\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$, т. е. в каждой точке характеристической поверхности. Потребуем теперь, чтобы условие (12.7) выполнялось тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$. При этом условие (12.7) будет представлять обычное уравнение в частных производных первого порядка, и всякое его решение, отличное от постоянной, будет давать не одну характеристику, а *целое семейство характеристик*

$$\omega_1(x_1, \ldots, x_n) = C, \qquad (12.8)$$

где C — произвольная постоянная.

Наоборот, для того, чтобы уравнение (12.8) определяло семейство характеристик при произвольном постоянном C, необходимо и достаточно, чтобы функция $\omega_1(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяла уравнению (12.7). Можно показать, что всякую характеристику уравнения (12.1) можно включить в семейство вида (12.8), и что таким образом решения уравнения (12.7) дадут нам все характеристики.

Уравнение (12.7) называется *уравнением характеристик* уравнения (12.1).

Пример. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (12.9)$$

и конус

$$\varkappa = t^2 - x^2 - y^2.$$

Уравнение (12.7) имеет вид

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0. \qquad (12.10)$$

Это уравнение при $\omega = \varkappa = 0$ удовлетворяется, так как

$$4t^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4(t^2 - x^2 - y^2) = 4\varkappa = 0.$$

Отсюда следует, что конус $\varkappa = 0$ является характеристической поверхностью уравнения (12.9), тогда как поверхности $\varkappa = C$ при $C \neq 0$ уже не являются характеристическими поверхностями. Конус $\varkappa = 0$ можно включить в семейство конусов

$$\omega_1 = t - \sqrt{x^2 + y^2} = C,$$

где ω_1 удовлетворяет уравнению (12.10). Все поверхности семейства $\omega_1 = C$ являются характеристическими поверхностями уравнения (12.9).

Если поверхность $S(\omega_1 = 0)$ такова, что равенство (12.7) не выполняется вдоль всей этой поверхности *), то вторые производные от искомой функции u однозначно определяются на поверхности S. В этом случае, исходя из сказанного выше, следует, что, совершая замену переменных (12.4), мы можем переписать уравнение (12.5) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} = \sum_{i, k=2}^{n} b_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + \sum_{i=1}^{n} b_{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_i} + \ldots, \qquad (12.11)$$

причем поверхность S переходит в гиперплоскость $\xi_1 = 0$. Это дает возможность преобразовать задачу Коши при начальных данных на поверхности S в задачу Коши с начальными данными на гиперплоскости $\xi_1 = 0$.

Если поверхность S есть характеристическая, то функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные пер-

*) В силу непрерывности коэффициентов a_{ik} и производных $\frac{\partial \omega_1}{\partial x_i}$ равенство (12.7) будет не выполняться и в некоторой окрестности поверхности S в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$.

вого порядка должны быть связаны на ней некоторым соотношением. Действительно, $u(x_1, \ldots, x_n)$ и ее частные производные на S выражаются через такие же величины на плоскости $\xi_1 = 0$ и наоборот. Пусть

$$u\big|_{\xi_1=0} = \bar{\varphi}_0(\xi_2, \ldots, \xi_n), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_1=0} = \bar{\varphi}_1(\xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Если S есть характеристическая поверхность уравнения (12.1), то в преобразованном уравнении (12.5) $\bar{a}_{11} = 0$ при $\xi_1 = 0$, и мы получим

$$\sum_{i,k=2}^{n} \bar{a}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + 2\sum_{k=2}^{n} \bar{a}_{1k} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_k} + \ldots = 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0,$$

где невыписанные члены не содержат производных первого порядка. Таким образом, получается связь между функциями $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_1$:

$$\sum_{i,k=2}^{n} \bar{a}_{ik} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi_i \partial \xi_k} + 2\sum_{k=2}^{n} \bar{a}_{1k} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_k} + \ldots = 0 \quad \text{при} \quad \xi_1 = 0.$$

Таким образом, на характеристической поверхности S начальные данные Коши нельзя задавать произвольно.

Легко показать, что характеристические поверхности являются единственными поверхностями, при переходе через которые вторые производные решения u уравнения (12.1) могут претерпевать разрыв первого рода с сохранением непрерывности самого решения и его первых производных. Действительно, пусть некоторое решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (12.1) имеет на поверхности

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \qquad (12.12)$$

разрыв первого рода для производных второго порядка, причем само решение и его производные первого порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (12.12). Будем рассматривать это решение u с двух сторон поверхности (12.12) как два различных решения уравнения (12.1). Эти решения имеют на этой поверхности одинаковые данные Коши, но различные значения для производных второго порядка, и мы можем

поэтому утверждать, что поверхность (12.12) должна быть характеристической поверхностью уравнения (12.1). К тому же самому результату мы пришли бы, если бы предположили, что не только само решение u и его частные производные первого порядка, но и частные производные второго порядка остаются непрерывными при переходе через поверхность (12.12), а разрыв имеет место лишь для производных порядка выше второго.

Вообще говорят, что решение уравнения второго порядка (12.1) имеет на поверхности (12.12) *слабый разрыв*, если при переходе через эту поверхность решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ и его первые производные остаются непрерывными, а некоторые производные порядка выше первого имеют на поверхности (12.12) разрыв первого рода.

Из предыдущих рассуждений следует, что *поверхностью слабого разрыва может быть только характеристическая поверхность*.

§ 13. Смешанная задача

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(X, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(X, t) u = f(X, t), \qquad (13.1)$$

где a_{ij}, b_i, c и f — суть заданные функции в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0 < t < T]$, где Ω — конечная область изменения переменных $(x_1, \ldots, x_n) = X$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Пусть в $\bar{Q}_T$ имеет место

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha = \text{const} > 0. \qquad (13.2)$$

Это условие выражает тот факт, что уравнение (13.1) принадлежит в $\bar{Q}_T$ к *гиперболическому типу*.

Рассмотрим следующую задачу.

Определить в цилиндре Q_T решение уравнения (13.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(X), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(X) \tag{13.3}$$

и одному из граничных условий

$$u|_S = \varkappa(P, t) \quad \text{при} \quad t \in [0, T] \tag{13.4}$$

или

$$\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(X, t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(nx_j) + hu\right]_S = g(P, t) \text{ при } t \in [0, T], \tag{13.5}$$

где S — граница области Ω, P — точка поверхности S, n — нормаль к поверхности, $\varkappa(P, t)$ и $g(P, t)$ — заданные функции, h — заданная функция на поверхности S.

Задача нахождения решения уравнения (13.1) в цилиндре Q_T при начальных условиях (13.3) и одном из граничных условий (13.4) или (13.5) называется *смешанной задачей*.

2. Единственность решения смешанной задачи. Для простоты ограничимся уравнением

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = f(x, t), \tag{13.6}$$

где $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant x \leqslant l$, причем $\rho(x) > \rho_0 > 0$, $p(x) > p_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$.

Рассмотрим для уравнения (13.6) смешанную задачу: найти в прямоугольнике $Q[0 < x < l,\ 0 < t < T]$ решение уравнения (13.6), удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{13.7}$$

и граничным условиям

$$u|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad u|_{x=l} = \varkappa_2(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{13.8}$$

причем $\varphi_0(0) = \varkappa_1(0)$, $\varphi_0(l) = \varkappa_2(0)$, $\varphi_1(0) = \varkappa_1'(0)$, $\varphi_1(l) = \varkappa_2'(0)$.

Докажем единственность решения задачи (13.6)—(13.8) в классе дважды непрерывно дифференцируемых

функций в прямоугольнике Q. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ смешанной задачи (13.6)—(13.8). Тогда их разность $\omega(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + q(x)\omega = 0, \tag{13.9}$$

нулевым начальным условиям

$$\omega|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{13.10}$$

и однородным граничным условиям

$$\omega|_{x=0} = 0, \quad \omega|_{x=l} = 0. \tag{13.11}$$

Покажем, что $\omega(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$.

Рассмотрим интеграл энергии

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 + p(x)\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + q(x)\omega^2\right]dx. \tag{13.12}$$

В начальный момент $t = 0$, в силу начальных условий (13.10), будем иметь $E(0) = 0$. Покажем, далее, что $E(t)$ есть величина постоянная на любом решении уравнения (13.9), удовлетворяющем граничным условиям (13.11). Действительно, дифференцируя (13.12), получим

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[\rho(x)\frac{\partial \omega}{\partial t}\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x\, \partial t} + q(x)\omega\frac{\partial \omega}{\partial t}\right]dx.$$

Интегрируя средний член по частям, будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l \left[\rho(x)\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + q(x)\omega\right]\frac{\partial \omega}{\partial t}\,dx + {}$$
$$+ \left. p(x)\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|_{x=0}^{x=l}.$$

Отсюда в силу уравнения (13.9) и граничных условий (13.11) следует, что $\frac{dE(t)}{dt} = 0$, откуда $E(t) = \text{const}$, но $E(0) = 0$, следовательно, $E(t) \equiv 0$. Тогда из (13.12) имеем, что $\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial t}=0$, т. е. $\omega(x, t) = \text{const}$ в $\overline{Q}$. Так как при $t=0$ $\omega(x, t)$ равна нулю в силу (13.10), то $\omega(x, t)\equiv 0$ в $\overline{Q}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Единственность решения смешанной задачи имеет место и в том случае, если граничные условия (13.8) заменить более сложными:

$$\frac{\partial u}{\partial x}-h_1u\Big|_{x=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}+h_2u\Big|_{x=l}=0, \qquad (13.13)$$

где $h_1\geqslant 0$, $h_2\geqslant 0$ — постоянные.

3. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи от начальных данных.

Теорема. *Пусть мы имеем два решения* $u_1(x, t)$ *и* $u_2(x, t)$ уравнения (13.6) *в прямоугольнике* Q, *удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям* (13.8) *и*

$$u_1\big|_{t=0}=\varphi_0^{(1)}(x),\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1^{(1)}(x),$$

$$u_2\big|_{t=0}=\varphi_0^{(2)}(x),\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1^{(2)}(x).$$

Если разности

$$\varphi_0^{(1)}(x)-\varphi_0^{(2)}(x)=\varphi_0(x),\quad \varphi_1^{(1)}(x)-\varphi_1^{(2)}(x)=\varphi_1(x)$$

и первая производная $\varphi_0'(x)$ *всюду на* $[0, l]$ *достаточно малы по абсолютной величине, то разность*

$$u_1(x, t)-u_2(x, t)=u(x, t)$$

сколь угодно мала по абсолютной величине на всем Q.

Доказательство. Функция $u=u_1-u_2$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+q(x)u=0, \qquad (13.14)$$

однородным граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0 \qquad (13.15)$$

и начальным данным

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x). \qquad (13.16)$$

Рассмотрим снова интеграл энергии

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+q(x)u^2\right]dx, \qquad (13.17)$$

который, как мы показали в п. 2 § 13, сохраняет постоянное значение на любом решении уравнения (13.14), удовлетворяющем граничным условиям (13.15). Таким образом, мы имеем $E(t)=E(0)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$ или, в силу начальных условий (13.16),

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+q(x)u^2\right]dx=$$

$$=\int_0^l\left[\rho(x)\varphi_1^2(x)+p(x)\varphi_0'^2(x)+q(x)\varphi_0^2(x)\right]dx.$$

Пусть $M=\max\limits_{[0,l]}\{\rho(x), p(x), q(x)\}$. Тогда

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+q(x)u^2\right]dx\leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^l\left[\varphi_1^2(x)+\varphi_0'^2(x)+\varphi_0^2(x)\right]dx$$

или, в силу малости правой части, найдем, что при любом t между 0 и T

$$\int_0^l\left[\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+q(x)u^2\right]dx<\varepsilon^2.$$

Отсюда

$$\int_0^l p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx<\varepsilon^2.$$

Имеем

$$u(x, t)-u(0, t)=\int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}\,dx,$$

$$|u(x, t)| \leqslant \int_0^x \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \sqrt{p(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^x \frac{dx}{p(x)} \int_0^x p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_0^l \frac{dx}{p(x)} \int_0^l p(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K \varepsilon,$$

где K — постоянная. Таким образом, $u(x, t)$ мало на всем прямоугольнике Q, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Непрерывную зависимость решения от начальных данных можно доказать и при более общих граничных условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}-h_1 u\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}+h_2 u\right|_{x=l}=0,$$

где $h_1 \geqslant 0$, $h_2 \geqslant 0$ — постоянные.

§ 14. Метод Фурье

1. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны. Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Мы изложим этот метод на ряде примеров, начав с простейшей задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14.1}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0 \tag{14.2}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \tag{14.3}$$

Будем сначала искать частные решения уравнения (14.1), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x, t)=X(x)\,T(t), \tag{14.4}$$

удовлетворяющие граничным условиям (14.2). Подставляя (14.4) в уравнение (14.1), получим

$$T''(t)\,X(x)=a^2 T(t)\,X''(x)$$

или

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{14.5}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от t, а правая — только от x, и равенство возможно лишь в том случае, если и левая и правая части не зависят ни от x, ни от t, т. е. представляют собою одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (14.5) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{14.6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{14.7}$$

Чтобы получить нетривиальные, т. е. не равные тождественно нулю решения вида (14.4), удовлетворяющие граничным условиям (14.2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (14.7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(0)=0, \quad X(l)=0. \tag{14.8}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых уравнение (14.7) имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие граничным условиям (14.8).

Эти значения параметра λ называются *собственными значениями*, а соответствующие решения — *собственными функциями* краевой задачи (14.7), (14.8).

Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи (14.7), (14.8). Здесь нужно рассмотреть отдельно три случая, когда $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda > 0$.

1) При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (14.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Удовлетворяя граничным условиям (14.8), получим

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,l} = 0. \qquad (14.9)$$

Как легко заметить, определитель системы (14.9) отличен от нуля; таким образом, $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$.

2) При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (14.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Граничные условия (14.8) дают

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0.$$

Отсюда $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3) При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (14.7) имеет вид

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (14.8), получим

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0.$$

Из первого уравнения следует $C_1 = 0$, а из второго $C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Мы должны считать $C_2 \neq 0$, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l},$$

где k — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (14.7), (14.8) возможны лишь при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l},$$

определяемые с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что положительные и отрицательные значения k, равные по абсолютной величине, дают собственные значения $\lambda_{-k} = \lambda_k$, а собственные функции отличаются лишь постоянным множителем. Поэтому достаточно для k брать только целые положительные значения.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (14.6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l},$$

где a_k и b_k — произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x, t) = X_k(x)\,T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

удовлетворяют уравнению (14.1) и граничным условиям (14.2) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (14.1), любая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (14.10)$$

если он равномерно сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Поскольку каждое слагаемое в ряде (14.10) удовлетворяет граничным условиям (14.2), то этим условиям будет удовлетворять и сумма ряда, т. е. функция $u(x, t)$. Остается определить постоянные a_k и b_k так, чтобы удовлетворялись и начальные условия (14.3).

Продифференцируем ряд (14.10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi at}{l} + b_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (14.11)$$

Полагая в (14.10) и (14.11) $t=0$, получим, в силу начальных условий (14.3),

$$\varphi_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \quad (14.12)$$

Формулы (14.12) представляют собою разложения заданных функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, l)$. Коэффициенты разложений (14.12) вычисляются по известным формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \quad (14.13)$$

Таким образом, решение задачи (14.1) — (14.3) дается рядом (14.10), где a_k и b_k определяются формулами (14.13).

Теорема. *Если $\varphi_0(x)$ на отрезке $[0, l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям*

$$\varphi_0(0)=\varphi_0(l)=0, \quad \varphi_0''(0)=\varphi_0''(l)=0, \quad (14.14)$$

а $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(0)=\varphi_1(l)=0, \quad (14.15)$$

то функция $u(x, t)$, определяемая рядом (14.10), *имеет непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению* (14.1), *граничным условиям* (14.2) *и начальным условиям* (14.3). *При этом возможно почленное дифференцирование ряда* (14.10) *по x и t два раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0\leqslant x\leqslant l$ и любом t.*

Доказательство. Интегрируя по частям (14.13) и принимая во внимание (14.14) и (14.15), получим

$$a_k=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{b_k^{(3)}}{k^3}, \quad b_k=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\frac{a_k^{(2)}}{k^3}, \quad (14.16)$$

где

$$b_k^{(3)}=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0'''(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad a_k^{(2)}=\frac{2}{l}\int_0^l \frac{1}{a}\varphi_1''(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \quad (14.17)$$

Нетрудно видеть, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k^{(2)}|}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k^{(3)}|}{k} \quad (14.18)$$

сходятся, так как $\frac{|a_k^{(2)}|}{k}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+|a_k^{(2)}|^2\right]$, $\frac{|b_k^{(3)}|}{k}\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2}+|b_k^{(3)}|\right]$, а ряды $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k^{(2)}|^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k^{(3)}|^2$ сходятся.

Подставляя (14.16) в ряд (14.10), получим

$$u(x, t)=-\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(b_k^{(3)}\cos\frac{k\pi at}{l}+a_k^{(2)}\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \quad (14.19)$$

Этот ряд мажорируется рядом

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\left(|b_k^{(3)}|+|a_k^{(2)}|\right),$$

который сходится. Следовательно, ряд (14.10) сходится абсолютно и равномерно. Принимая во внимание (14.18), мы легко убеждаемся, что ряд (14.10) можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Этим теорема доказана.

Возвратимся теперь к найденному решению (14.10) задачи (14.1)—(14.3). Если ввести обозначения

$$a_k=A_k\sin\varphi_k, \quad b_k=A_k\cos\varphi_k,$$

то это решение можно записать в виде

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\left(\frac{k\pi at}{l}+\varphi_k\right). \quad (14.20)$$

Каждый член этого ряда представляет собою так называемую *стоячую волну*, при которой точки струны совершают *гармоническое колебательное движение* с одинаковой фазой φ_k, с амплитудой $A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$ и частотой $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$.

Звуки можно классифицировать на музыкальные и не музыкальные — первые называются *нотами*, вторые *шумами*. Музыкальные звуки естественным образом располагаются в определенном порядке соответственно *высоте* — качеству, которое до известной степени может оценивать каждый. Те ноты, которые ухо не может различать, далее называются *тонами*.

При колебании струна будет издавать звук, *высота* которого зависит от частоты колебаний; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. Тона, соответствующие более высоким частотам, чем основная, называются *обертонами*. Обертоны, частоты которых являются кратными основной частоте, называются *гармониками*. Первой гармоникой будем считать основной тон, второй гармоникой — тон с частотой $\omega_2 = 2\omega_1$ и т. д.

Решение (14.20) складывается из отдельных гармоник, амплитуды их, а потому и влияние их на звук, издаваемый струной, обыкновенно быстро убывают при увеличении номера гармоники, и все их действие сводится к созданию *тембра звука*, различного для разных музыкальных инструментов и объясняемого именно наличием этих гармоник.

Существует очень мало колебательных систем с гармоническими обертонами, но эти немногие системы являются основными для построения почти всех музыкальных инструментов. Это является следствием того, что звук с гармоническими обертонами кажется особенно приятным в музыкальном отношении.

В точках

$$x = 0, \quad \frac{l}{n}, \quad \frac{2l}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{(n-1)\,l}{n}, \quad l \tag{14.21}$$

амплитуда колебания n-й гармоники обращается в нуль, так как в этих точках $\sin\frac{n\pi x}{l} = 0$, и точки (14.21) называются *узлами* n-й гармоники.

В точках же

$$x = \frac{l}{2n}, \quad \frac{3l}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)\,l}{2n} \tag{14.22}$$

амплитуда колебаний n-й гармоники достигает наибольшей величины, так как функция $\sin\frac{n\pi x}{l}$ в этих точках имеет максимальное абсолютное значение, и точки (14.22) называются *пучностями* для n-й гармоники.

Если мы прижмем колеблющуюся струну точно в середине, т. е. в пучности ее основного тона, то обратятся в нуль амплитуды не только этого тона, но и всех других, имеющих пучности в этой точке, т. е. нечетных гармоник; напротив, на четные гармоники, которые имеют узел в прижатой точке, это влиять не будет. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет $\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, и струна будет издавать не свой основной звук, а его *октаву*, т. е. звук с числом колебаний в секунду вдвое большим.

2. Общая схема метода Фурье. В настоящем пункте мы дадим изложение метода Фурье для решения смешанной задачи без строгого обоснования полученных результатов.

Рассмотрим гиперболическое уравнение

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x)\,u, \tag{14.23}$$

где $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant x \leqslant l$, причем $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0$, $q(x) \geqslant 0$.

Пусть требуется найти решение уравнения (14.23), удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\begin{gathered} \alpha u(0, t) + \beta\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \gamma u(l, t) + \delta\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0, \end{gathered} \tag{14.24}$$

где постоянные α, β, γ и δ таковы, что $\alpha^2+\beta^2\neq 0$, $\gamma^2+\delta^2\neq 0$, и начальным условиям

$$u|_{t=0}=\varphi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \qquad (14.25)$$

Будем искать сначала нетривиальные решения уравнения (14.23) в виде произведения

$$u(x,t)=X(x)T(t), \qquad (14.26)$$

удовлетворяющие граничным условиям (14.24). Подставляя (14.26) в уравнение (14.23), получим

$$T(t)\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]-q(x)X(x)T(t)=\rho(x)X(x)T''(t)$$

или

$$\frac{\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]-q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)}=\frac{T''(t)}{T(t)}. \qquad (14.27)$$

Левая часть последнего равенства зависит только от x, а правая часть — только от t, и равенство возможно лишь тогда, когда общая величина отношений (14.27) будет постоянной. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из (14.27) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \qquad (14.28)$$

$$\frac{d}{dx}[p(x)X'(x)]+[\lambda\rho(x)-q(x)]X(x)=0. \qquad (14.29)$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (14.23) вида (14.26), удовлетворяющие граничным условиям (14.24), необходимо, чтобы функция $X(x)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\begin{aligned}\alpha X(0)+\beta X'(0)&=0,\\ \gamma X(l)+\delta X'(l)&=0.\end{aligned} \qquad (14.30)$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче о собственных значениях: *найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения* (14.29), *удовлетворяющие граничным условиям* (14.30).

Эта задача не при всяком значении λ имеет отличное от тождественного нуля решение. Те значения параметра λ, при которых задача (14.29), (14.30) имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями*, а сами эти решения — *собственными функциями*, соответствующими данному собственному значению. В силу однородности уравнения (14.29) и граничных условий (14.30), собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя. Нетрудно видеть, что всякому собственному значению может соответствовать только одна линейно независимая собственная функция. Действительно, предположим, что при некотором значении λ существуют два линейно независимых решения уравнения (14.29), удовлетворяющих граничным условиям (14.30). Тогда оказалось бы, что и общее решение уравнения (14.29) удовлетворяет этим условиям. Но этого быть не может, так как всегда можно найти решение уравнения (14.29) при таких начальных данных $X(0)$ и $X'(0)$, которые не удовлетворяют первому из граничных условий (14.30)

Можно доказать, что для нашей задачи существует бесконечное множество в е щ е с т в е н н ы х собственных значений

$$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots<\lambda_n<\ldots,\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty.$$

Каждому собственному значению λ_k соответствует собственная функция $X_k(x)$, определяемая с точностью до постоянного множителя. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_0^l \rho(x)X_k^2(x)\,dx=1. \qquad (14.31)$$

Собственные функции, удовлетворяющие условию (14.31), будем называть *нормированными*

Докажем, что собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, *ортогональны с весом* $\rho(x)$ на отрезке $[0, l]$, т. е. удовлетворяют равенству

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)\,dx=0\qquad (k\neq m). \qquad (14.32)$$

Действительно, пусть λ_k и λ_m — два различных собственных значения, а $X_k(x)$ и $X_m(x)$ — соответственно собственные функции, так что

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_k(x)\right]+\left[\lambda_k\rho(x)-q(x)\right]X_k(x)=0,$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_m(x)\right]+\left[\lambda_m\rho(x)-q(x)\right]X_m(x)=0.$$

Умножая первое равенство на $X_m(x)$, второе на $X_k(x)$ и вычитая почленно, получим равенство

$$X_m(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_k(x)\right]-X_k(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_m(x)\right]+ \\ +(\lambda_k-\lambda_m)\rho(x)X_k(x)X_m(x)=0,$$

которое можно переписать в виде

$$(\lambda_k-\lambda_m)\rho(x)X_k(x)X_m(x)+ \\ +\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[X_m(x)X'_k(x)-X_k(x)X'_m(x)\right]\right\}.$$

Интегрируя это равенство по x в пределах от 0 до l, получим

$$(\lambda_m-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)\,dx= \\ =p(x)\left[X_m(x)X'_k(x)-X_k(x)X'_m(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Принимая во внимание граничные условия (14.30), мы легко убеждаемся, что правая часть равна нулю, т. е.

$$(\lambda_m-\lambda_k)\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)\,dx=0,$$

откуда в силу $\lambda_m\neq\lambda_k$

$$\int_0^l \rho(x)X_k(x)X_m(x)\,dx=0,$$

что и требовалось доказать.

Из свойства ортогональности собственных функций легко следует, что все собственные значения вещественны.

Пусть теперь λ_k — собственные значения, а $X_k(x)$ — собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Мы имеем

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_k(x)\right]-q(x)X_k(x)=-\lambda_k\rho(x)X_k(x).$$

Умножая обе части на $X_k(x)$, интегрируя и принимая во внимание (14.31), получим

$$\lambda_k=-\int_0^l\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)X'_k(x)\right]-q(x)X_k(x)\right\}X_k(x)\,dx,$$

откуда, интегрируя первое слагаемое по частям, будем иметь

$$\lambda_k=\int_0^l\left[p(x)X'^2_k(x)+q(x)X_k^2(x)\right]dx- \\ -\left[p(x)X_k(x)X'_k(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (14.33)$$

Предположим, что внеинтегральный член не положителен, т. е.

$$\left[p(x)X_k(x)X'_k(x)\right]_{x=0}^{x=l}\leqslant 0. \quad (14.34)$$

Так как $p(x)\geqslant p_0>0$, $q(x)\geqslant 0$, то из формулы (14.33) непосредственно следует, что все собственные значения задачи (14.29), (14.30) неотрицательны.

Заметим, что условие (14.34) выполняется как раз при наиболее часто встречающихся в приложениях граничных условиях

$$1)\ X(0)=0,\ X(l)=0;\quad 2)\ X'(0)=0,\ X'(l)=0;$$
$$3)\ X'(0)-h_1X(0)=0,\ X'(l)+h_2X(l)=0,$$

где h_1 и h_2 — положительные числа.

Установив некоторые свойства собственных значений и собственных функций, обратимся теперь к уравнению (14.28). Его общее решение при $\lambda=\lambda_k$ (обозначим через $T_k(t)$) имеет вид

$$T_k(t)=A_k\cos\sqrt{\lambda_k}\,t+B_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, согласно (14.26), каждая функция

$$u_k(x, t)=X_k(x)\,T_k(t)=\left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t+B_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t\right) X_k(x)$$

будет решением уравнения (14.23), удовлетворяющим граничным условиям (14.24).

Чтобы удовлетворить начальным условиям (14.25), составим ряд

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t+B_k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t\right) X_k(x). \qquad (14.35)$$

Если этот ряд сходится равномерно, так же как и ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x и t, то сумма его будет решением уравнения (14.23), удовлетворяющим граничным условиям (14.24).

Для выполнения начальных условий (14.25) необходимо, чтобы

$$u\,|_{t=0}=\varphi_0(x)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \qquad (14.36)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sqrt{\lambda_k}\, X_k(x). \qquad (14.37)$$

Таким образом, мы пришли к задаче о разложении произвольной функции в ряд по собственным функциям $X_k(x)$ граничной задачи (14.29), (14.30). Предполагая, что ряды (14.36) и (14.37) сходятся равномерно, мы можем определить коэффициенты A_k и B_k, умножив обе части равенств (14.36) и (14.37) на $\rho(x) X_k(x)$ и проинтегрировав по x в пределах от 0 до l. Тогда, принимая во внимание (14.31), (14.32), получим

$$A_k=\int_0^l \rho(x)\varphi_0(x) X_k(x)\,dx, \quad B_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x) X_k(x)\,dx.$$

Подставляя эти значения коэффициентов A_k и B_k в ряд (14.35), мы, очевидно, получим решение смешанной задачи (14.23)—(14.25), если ряд (14.35) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, равномерно сходятся.

3. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x, t) \quad \left(f(x, t)=\frac{F(x, t)}{\rho}\right) \qquad (14.38)$$

при граничных условиях

$$u\,|_{x=0}=0, \quad u\,|_{x=l}=0 \qquad (14.39)$$

и начальных условиях

$$u\,|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \qquad (14.40)$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы

$$u=v+w, \qquad (14.41)$$

где v есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x, t), \qquad (14.42)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$v\,|_{x=0}=0, \quad v\,|_{x=l}=0 \qquad (14.43)$$

и начальным условиям

$$v\,|_{t=0}=0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad (14.44)$$

а w есть решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (14.45)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$w\,|_{x=0}=0, \quad w\,|_{x=l}=0 \qquad (14.46)$$

и начальным условиям

$$w\,|_{t=0}=\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x). \qquad (14.47)$$

Решение v представляет *вынужденные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, причем начальные возмущения отсутствуют. Решение v представляет *свободные* колебания струны, т. е. такие колебания, которые происходят без действия внешней силы, а лишь вследствие начального возмущения. Задача о свободных колебаниях струны была решена в п. 1, так что здесь мы остановимся только на нахождении вынужденных колебаний. Как и в случае свободных колебаний, мы будем искать решение v в виде ряда

$$v(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{14.48}$$

так что граничные условия (14.43) удовлетворяются сами собою, предполагая, конечно, что ряд (14.48) сходится равномерно.

Определим теперь функции $T_k(t)$ так, чтобы ряд (14.48) удовлетворял уравнению (14.42) и начальным условиям (14.44).

Подставляя ряд (14.48) в уравнение (14.42), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)\right] \sin \frac{k\pi x}{l}=f(x, t), \tag{14.49}$$

где положено

$$\omega_k=\frac{k\pi a}{l}. \tag{14.50}$$

Разложим функцию $f(x, t)$ в промежутке $(0, l)$ в ряд Фурье по синусам

$$f(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{14.51}$$

где

$$f_k(t)=\frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx. \tag{14.52}$$

Сравнивая разложения (14.49) и (14.51) для одной и той же функции $f(x, t)$, мы получим дифференциальные

уравнения

$$T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)=f_k(t) \quad (k=1, 2, 3, \ldots), \tag{14.53}$$

определяющие функции $T_k(t)$.

Чтобы решение v, определяемое рядом (14.48), удовлетворяло и начальным условиям (14.44), достаточно подчинить функции $T_k(t)$ условиям

$$T_k(0)=0, \quad T_k'(0)=0 \quad (k=1, 2, 3, \ldots) \tag{14.54}$$

Решение уравнения (14.53) при начальных условиях (14.54) имеет вид

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(\tau) \sin \omega_k (t-\tau)\, d\tau$$

или, подставляя вместо $f_k(\tau)$ его выражение (14.52), получим

$$T_k(t)=\frac{2}{l\omega_k} \int_0^t \sin \omega_k (t-\tau)\, d\tau \int_0^l f(x, \tau) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx. \tag{14.55}$$

Подставляя найденные выражения для $T_k(t)$ в ряд (14.48), мы получим решение задачи (14.42)—(14.44), если ряд (14.48) и ряды, полученные из него почленным дифференцированием по x и t до двух раз включительно, равномерно сходятся. Как можно показать, такая сходимость рядов будет обеспечена, если потребовать, чтобы непрерывная функция $f(x, t)$ имела непрерывные частные производные по x до второго порядка и чтобы при всех значениях t выполнялось условие

$$f(0, t)=0, \quad f(l, t)=0.$$

Из вышеизложенного следует, что решение задачи (14.38) — (14.40) выражается в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}+ \\ +\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos \frac{k\pi a t}{l}+b_k \sin \frac{k\pi a t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формулам (14.55), а

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \varphi_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

4. Вынужденные колебания струны с подвижными концами. Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны под действием внешней силы $F(x, t)$, причем концы струны не закреплены, а двигаются по заданному закону. Эта задача приводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \tag{14.56}$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad u|_{x=l} = \varkappa_2(t) \tag{14.57}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{14.58}$$

Задача (14.56)—(14.58) легко сводится к задаче с однородными граничными условиями. Действительно, введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = \varkappa_1(t) + [\varkappa_2(t) - \varkappa_1(t)]\frac{x}{l}. \tag{14.59}$$

Ясно, что

$$w|_{x=0} = \varkappa_1(t), \quad w|_{x=l} = \varkappa_2(t). \tag{14.60}$$

Решение задачи (14.56)—(14.58) ищем в виде суммы

$$u = v + w, \tag{14.61}$$

где w — новая неизвестная функция.

В силу граничных условий (14.57) и (14.60), а также начальных условий (14.58), функция $v(x, t)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0$$

и начальным условиям

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} =$$
$$= \varphi_0(x) - \varkappa_1(0) - [\varkappa_2(0) - \varkappa_1(0)]\frac{x}{l} = \bar\varphi_0(x),$$
$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} =$$
$$= \varphi_1(x) - \varkappa_1'(0) - [\varkappa_2'(0) - \varkappa_1'(0)]\frac{x}{l} = \bar\varphi_1(x).$$

Подставляя теперь (14.61) в уравнение (14.56), получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(x, t)$$

или, в силу (14.59),

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar f(x, t),$$

где

$$\bar f(x, t) = f(x, t) - \varkappa_1''(t) - [\varkappa_2''(t) - \varkappa_1''(t)]\frac{x}{l}.$$

Таким образом, мы пришли к следующей задаче для функции $v(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar f(x, t),$$
$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0,$$
$$v|_{t=0} = \bar\varphi_0(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \bar\varphi_1(x).$$

Метод решения этой задачи изложен в п. 3.

5. Метод Фурье в многомерном случае. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L(u), \tag{14.62}$$

где

$$L(u) = \sum_{i, j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - a(X)u,$$

коэффициенты которого определены в конечной, связной области Ω изменения $X = (x_1, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют в Ω условиям

$$a(X)\geqslant 0,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant \alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \alpha>0. \tag{14.63}$$

Второе из неравенств (14.63) выражает тот факт, что уравнение (14.62) принадлежит к гиперболическому типу.

Для уравнения (14.62) рассмотрим следующую смешанную задачу: определить в цилиндре $Q_T=\Omega\times\times[0<t<T]$ решение уравнения (14.62), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=\varphi_0(X),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(X) \tag{14.64}$$

и граничному условию

$$u\big|_S=0\quad \text{при}\quad t\in[0,\ T], \tag{14.65}$$

где S есть граница области Ω.

Будем искать сначала нетривиальные решения уравнения (14.62) в виде произведения

$$u=v(X)\,T(t), \tag{14.66}$$

удовлетворяющие граничному условию (14.65). Подставляя (14.66) в уравнение (14.62), получим

$$v(X)\,T''(t)=\left[\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)-a(X)v\right]T(t)$$

или

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{L(v)}{v}=-\lambda,$$

откуда

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \tag{14.67}$$

$$L(v)+\lambda v=0. \tag{14.68}$$

Чтобы получить нетривиальные решения уравнения (14.62) вида (14.66), удовлетворяющие граничному условию (14.65), необходимо, чтобы функция $v(X)$ удовлетворяла граничному условию

$$v\big|_S=0. \tag{14.69}$$

Таким образом, мы приходим к следующей задаче о собственных значениях: найти такие значения λ, при которых уравнение (14.68) имеет *нетривиальные* решения, удовлетворяющие граничному условию (14.69).

Эти значения λ называются *собственными значениями*, а соответствующие решения — *собственными функциями* краевой задачи (14.68), (14.69).

Можно доказать, что задача (14.68), (14.69) имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ \dots\ \leqslant\lambda_n\leqslant\ \dots,\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Ввиду однородности уравнения (14.68) и граничного условия (14.69) собственные функции $v_k(X)$ определяются с точностью до произвольного постоянного. Выберем этот множитель так, чтобы

$$\int_{\Omega} v_k^2(X)\,dX=1, \tag{14.70}$$

т. е. будем считать собственные функции нормированными. Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\int_{\Omega} v_k(X)\,v_m(X)\,dX=0,\qquad k\neq m. \tag{14.71}$$

Это доказывается совершенно так же, как и в одномерном случае, причем используется формула интегрирования по частям для многомерных интегралов. Если собственному значению λ_k соответствует несколько линейно независимых собственных функций, то их можно подвергнуть процессу ортогонализации и, следовательно, считать эти функции попарно ортогональными.

Таким образом, мы можем считать, что все собственные функции задачи (14.68), (14.69) образуют ортогональную и нормированную систему.

Пусть λ_k — собственные значения, а $v_k(X)$ — собственные функции, образующие ортогональную и нормированную систему. Мы имеем

$$L(v_k)=-\lambda_k v_k(X).$$

Умножая обе части на $v_k(X)$, интегрируя по области Ω и принимая во внимание (14.70), получим

$$\lambda_k = -\int_\Omega v_k(X) L(v_k)\,dX =$$

$$= -\int_\Omega v_k(X)\left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(X)\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) - a(X) v_k(X)\right] dX$$

или, интегрируя первую сумму по частям, будем иметь

$$\lambda_k = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(X)\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + a(X) v_k^2(X)\right] dX.$$

Интеграл по границе S области Ω равен нулю, так как $v_k(X)|_S = 0$. В силу условия (14.63)

$$\lambda_k \geqslant \int_\Omega \left[\alpha \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2 + a(X) v_k^2(X)\right] dX,$$

откуда следует, что все собственные значения задачи (14.68), (14.69) положительны.

При $\lambda = \lambda_k$ уравнение (14.67) имеет решение в виде

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t,$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные.

Таким образом, согласно (14.66), каждая функция

$$u_k(X, t) = v_k(X) T_k(t) =$$
$$= (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\, v_k(X)$$

будет решением уравнения (14.62), удовлетворяющим граничному условию (14.65).

Составляем ряд

$$u(X, t) = \sum_{k=1}^\infty (A_k \cos\sqrt{\lambda_k}\,t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}\,t)\, v_k(X). \quad (14.72)$$

Удовлетворяя начальным условиям (14.64), получим

$$\varphi_0(X) = \sum_{k=1}^\infty A_k v_k(X), \quad \varphi_1(X) = \sum_{k=1}^\infty B_k \sqrt{\lambda_k}\, v_k(X).$$

Отсюда легко находим

$$A_k = \int_\Omega \varphi_0(X) v_k(X)\,dX, \quad B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_\Omega \varphi_1(X) v_k(X)\,dX.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов A_k и B_k в ряд (14.72), мы, очевидно, получим решение задачи (14.62), (14.64) и (14.65), если ряд (14.72) и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x_i и t, равномерно сходятся.

6. Свободные колебания прямоугольной мембраны. Рассмотрим малые колебания однородной прямоугольной мембраны со сторонами p и q, закрепленной по контуру. Эта задача сводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \quad (14.73)$$

при граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=p} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=q} = 0 \quad (14.74)$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x, y). \quad (14.75)$$

Будем искать частные решения уравнения (14.73) в виде

$$u(x, y, t) = T(t)\, v(x, y), \quad (14.76)$$

удовлетворяющие граничным условиям (14.74). Подставляя (14.76) в уравнение (14.73), получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -k^2.$$

Отсюда, принимая во внимание граничные условия (14.74), будем иметь

$$T''(t) + a^2k^2 T(t) = 0, \quad (14.77)$$

и

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0, \quad (14.78)$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=p} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=q} = 0. \quad (14.79)$$

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (14.78), (14.79). Положим

$$v(x, y) = X(x)\,Y(y). \tag{14.80}$$

Подставляя (14.80) в уравнение (14.78), получим

$$\frac{Y''}{Y} + k^2 = -\frac{X''}{X},$$

откуда получаем два уравнения

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0, \tag{14.81}$$

где

$$-k_2^2 + k^2 = k_1^2 \quad \text{или} \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2. \tag{14.82}$$

Общие решения уравнений (14.81), как известно, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x, \\ Y(y) &= C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y. \end{aligned} \tag{14.83}$$

Из граничных условий (14.79) получаем

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \quad X(p) = 0, \\ Y(0) &= 0, \quad Y(q) = 0, \end{aligned} \tag{14.84}$$

откуда ясно, что $C_1 = C_3 = 0$, и если мы положим $C_2 = C_4 = 1$, то окажется

$$X(x) = \sin k_1 x, \quad Y(y) = \sin k_2 y, \tag{14.85}$$

причем должно быть

$$\sin k_1 p = 0, \quad \sin k_2 q = 0. \tag{14.86}$$

Из уравнений (14.86) вытекает, что k_1 и k_2 имеют бесчисленное множество значений

$$k_{1,m} = \frac{m\pi}{p}, \quad k_{2,n} = \frac{n\pi}{q} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Тогда из равенства (14.82) получим соответствующие значения k^2:

$$k_{m,n}^2 = k_{1,m}^2 + k_{2,n}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right). \tag{14.87}$$

Таким образом, собственным значениям (14.87), в силу (14.80) и (14.85), соответствуют собственные функции

$$v_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \tag{14.88}$$

граничной задачи (14.78) — (14.79).

Обращаясь теперь к уравнению (14.77), мы видим, что для каждого собственного значения $k^2 = k_{mn}^2$ его общее решение имеет вид

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t, \tag{14.89}$$

где A_{mn} и B_{mn} — произвольные постоянные.

Таким образом, в силу (14.76), (14.88) и (14.89) частные решения уравнения (14.73), удовлетворяющие граничным условиям (14.74), имеют вид

$$u_{mn}(x, y, t) = \\ = (A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} \\ (m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (14.75), составим ряд

$$u(x, y, t) = \\ = \sum_{m,n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{\pi n y}{q}. \tag{14.90}$$

Если этот ряд равномерно сходится, так же как и ряды, полученные из него двукратным почленным дифференцированием по x, y и t, то сумма его, очевидно, будет удовлетворять уравнению (14.73) и граничным условиям (14.74). Для выполнения начальных условий (14.75) необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \varphi_0(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= \varphi_1(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} ak_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{\pi n y}{q}. \end{aligned} \tag{14.91}$$

Формулы (14.91) представляют собою разложение заданных функций $\varphi_0(x, y)$ и $\varphi_1(x, y)$ в двойной ряд Фурье по синусам. Коэффициенты разложений определяются по формулам

$$A_{mn} = \frac{4}{pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_0(x, y) \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}\, dx\, dy,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{ak_{mn}pq} \int_0^p \int_0^q \varphi_1(x, y) \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q}\, dx\, dy. \tag{14.92}$$

Подставляя (14.92) в ряд (14.90), мы получим решение нашей задачи.

Положим

$$A_{mn} = M_{mn}\sin\varphi_{mn}, \quad B_{mn} = M_{mn}\cos\varphi_{mn}.$$

Тогда решение (14.90) можно записать в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} M_{mn} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q} \sin(ak_{mn}t + \varphi_{mn}). \tag{14.93}$$

Каждый член этого ряда представляет собою *стоячую* волну, при которой точки мембраны совершают гармоническое колебательное движение с частотой $\omega_{mn} = a\pi \times \times \sqrt{\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}}$. Случай мембраны отличается от случая струны тем, что для последней каждой частоте собственных колебаний соответствует своя форма струны, которая просто разделяется узлами на несколько равных частей. Для мембраны же может оказаться, что одной и той же частоте соответствует несколько фигур мембраны с различными положениями у з л о в ы х л и н и й, т. е. линий, вдоль которых амплитуда колебаний равна нулю. Проще всего это исследовать на примере квадратной мембраны:

$$p = q = \pi.$$

В этом случае частота ω_{mn} будет вычисляться по формуле

$$\omega_{mn} = a\sqrt{m^2 + n^2}.$$

Из этой формулы видно, что основной тон, определяемый выражением

$$u_{11} = M_{11}\sin x \sin y \sin(\omega_{11}t + \varphi_{11}),$$

имеет частоту $\omega_1 = a\sqrt{2}$, причем очевидно, что для этой частоты узловые линии совпадают со сторонами квадрата, образуемого мембраной.

В тех случаях, когда

$$m = 1, \quad n = 2 \quad \text{или} \quad m = 2, \quad n = 1,$$

мы имеем два обертона

$$u_{12} = M_{12}\sin x \sin 2y \sin(\omega_{12}t + \varphi_{12}),$$
$$u_{21} = M_{21}\sin 2x \sin y \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21})$$

с одной и той же частотой $\omega_{12} = \omega_{21} = a\sqrt{5}$. Ясно, что для этой частоты (при $\varphi_{12} = \varphi_{21}$) узловые линии определяются из уравнения

$$\alpha \sin x \sin 2y + \beta \sin 2x \sin y = 0$$

или

$$\alpha\cos y + \beta\cos x = 0.$$

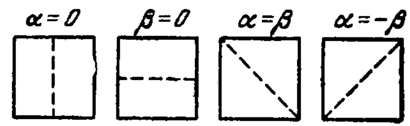

Рис. 7.

Простейшие из них изображены на рис. 7 пунктирными линиями. Более сложные узловые линии при той же частоте получим, когда $\alpha \neq \pm\beta$ и $\alpha, \beta \neq 0$.

7. Свободные колебания круглой мембарны. Рассмотрим свободные колебания однородной круглой мембраны радиуса R с центром в начале координат, закрепленной по контуру. Задача приводится к решению волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14.94}$$

Вводя полярные координаты на плоскости

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

уравнение (14.94) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{14.95}$$

при граничном условии

$$u|_{r=R}=0 \tag{14.96}$$

и начальных условиях

$$u|_{t=0}=\varphi_0(r,\ \theta),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(r,\ \theta). \tag{14.97}$$

Рассмотрим тот случай, когда круглая мембрана совершает радиальные колебания, т. е. такие колебания, при которых смещение u зависит только от r и t. Эти колебания имеют место в том случае, когда начальные условия имеют вид

$$u|_{t=0}=\varphi_0(r),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(r), \tag{14.98}$$

где $\varphi_0(r)$ и $\varphi_1(r)$ — заданные функции в интервале $(0,\ R)$. Так как в рассматриваемом случае u не зависит от угла θ, то уравнение (14.95) принимает более простой вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{14.99}$$

Будем искать решения уравнения (14.99) в виде

$$u(r,\ t)=T(t)\,W(r), \tag{14.100}$$

удовлетворяющие граничному условию (14.96). Подставляя (14.100) в уравнение (14.99) и разделяя переменные, получим

$$\frac{W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)}{W(r)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=-k^2,$$

откуда имеем два уравнения

$$T''(t)+k^2a^2T(t)=0, \tag{14.101}$$

$$W''(r)+\frac{1}{r}W'(r)+k^2W(r)=0. \tag{14.102}$$

Уравнение (14.102) есть уравнение Бесселя. Его общее решение имеет вид

$$W(r)=C_1J_0(kr)+C_2Y_0(kr),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а $J_0(kr)$ и $Y_0(kr)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого

порядка [5]. Из этих функций только $J_0(kr)$ остается конечной при $r=0$, тогда как $Y_0(kr)$ обращается в бесконечность. Поэтому нужно положить $C_2=0$, так как в противном случае смещение $u(r,\ t)$ мембраны при $r=0$ будет бесконечно большим, что невозможно. Удовлетворяя граничному условию (14.96), будем иметь $C_1J_0(kR)=0$ или $J_0(kR)=0$, так как $C_1\neq 0$. Обозначая

$$kR=\mu, \tag{14.103}$$

получим

$$J_0(\mu)=0. \tag{14.104}$$

Уравнение (14.104) имеет бесчисленное множество вещественных положительных корней. Обозначим их через $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ Тогда из (14.103) имеем, что

$$k_n=\frac{\mu_n}{R}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

При $k=k_n$ уравнение (14.101) имеет решение

$$T_n(t)=a_n\cos\frac{a\mu_n t}{R}+b_n\sin\frac{a\mu_n t}{R},$$

где a_n и b_n — произвольные постоянные.

В силу (14.100) функции

$$u_n(r,\ t)=\left(a_n\cos\frac{a\mu_n t}{R}+b_n\sin\frac{a\mu_n t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$$

удовлетворяют уравнению (14.99) и граничному условию (14.96). Составляем ряд

$$u(r,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{a\mu_n t}{R}+b_n\sin\frac{a\mu_n t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \tag{14.105}$$

Удовлетворяя начальным условиям (14.98), получим

$$\varphi_0(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),\quad \varphi_1(r)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\mu_n}{R}b_nJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Коэффициенты разложения определяются по следующим формулам [5]:

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\varphi_0(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr,$$

$$b_n = \frac{2}{a\mu_n R J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r\varphi_1(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов a_n и b_n в ряд (14 105), мы получим решение поставленной задачи.

Решение (14 105) можно переписать в виде

$$u(r,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \sin\left(\frac{a\mu_n}{R} t + \varphi_n\right),$$

откуда видно, что свободные радиальные колебания мембраны складываются из бесчисленного множества гармонических колебаний с частотой

$$\omega_n = \frac{a\mu_n}{R} = \frac{\mu_n}{R}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\,.$$

Узловые линии для круглой мембраны определяются из уравнения

$$J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что n-обертон имеет n узловых линий

$$r_1 = \frac{\mu_1}{\mu_n} R, \quad r_2 = \frac{\mu_2}{\mu_n} R, \ \ldots,\ r_{n-1} = \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} R, \quad r_n = R,$$

представляющих концентрические окружности с центром в начале координат

Задачи. 1) Однородная струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имеет в начальный момент времени форму параболы, симметричной относительно перпендикуляра, проведенного через точку $x = \frac{l}{2}$. Определить смещение точек струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют,

Ответ

$$u(x,\ t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l} \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{l}}{(2k+1)^3},$$

где $h = u\left(\frac{l}{2},\ 0\right)$.

2) Изучить вынужденные поперечные колебания струны, закрепленной на конце $x = 0$ и подверженной на конце $x = l$ действию возмущающей гармонической силы, вызывающей смещение, равное $A \sin \omega t$

Ответ

$$u(x,\ t) = \frac{A \sin\frac{\omega}{a} x \sin \omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}} + \frac{2Aa\omega}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi a t}{l}.$$

3) Стержень подвешен вертикально и защемлен так, что смещение во всех сечениях равно нулю В момент времени $t = 0$ стержень освобождается, оставаясь закрепленным на верхнем конце Изучить вынужденные колебания стержня под действием силы тяжести.

Ответ

$$u(x,\ t) = \frac{gx(2l - x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos\frac{(2n+1)\pi a t}{l}}{(2n+1)^3},$$

где g — ускорение силы тяжести

4) Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса R, закрепленной по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю

Ответ.

$$u(r,\ t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos\frac{a\mu_n t}{R},$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$ и $A = u(0, 0)$.

5) Однородная квадратная мембрана, имеющая в начальный момент времени $t=0$ форму $Axy(b-x)(b-y)$, где A — постоянная, начала колебаться без начальной скорости. Исследовать свободные колебания мембраны, закрепленной по контуру.

Ответ.

$$u(x, y, t)=\frac{64Ab^4}{\pi^6}\sum_{n, m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{b}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3(2m+1)^3}\times$$

$$\times\cos\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\,\frac{a\pi t}{b}.$$

ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

§ 15. Первая краевая задача. Теорема о максимуме и минимуме

1. Постановка задачи. Пусть Ω — конечная область пространства (x, y, z). Обозначим через Q в пространстве (x, y, z, t) цилиндр, основание которого есть область Ω и образующие которого параллельны оси Ot. Пусть Q_T — часть этого цилиндра, ограниченная снизу плоскостью $t=0$ и сверху плоскостью $t=T\,(T>0)$. Часть границы цилиндра Q_T, состоящую из его нижнего основания $(t=0)$ и боковой поверхности, обозначим через Γ.

Рассмотрим следующую задачу: найти в цилиндре Q_T решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{15.1}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x, y, z) \quad ((x, y, z)\in\overline{\Omega}) \tag{15.2}$$

и граничному условию

$$u|_S=\Psi(P, t) \quad (t\in[0, T]), \tag{15.3}$$

где S — граница области Ω, P — точка поверхности S. Функции φ и Ψ непрерывны, причем значения Ψ при $t=0$ совпадают со значениями φ на границе S.

Задача нахождения решения уравнения (15.1) при условиях (15.2), (15.3) называется *первой краевой задачей* для уравнения теплопроводности.

Теорема. *Функция $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющая однородному уравнению теплопроводности* (15.1) *внутри цилиндра Q_T и непрерывная вплоть до его границы, принимает наибольшее и наименьшее значения на Γ, т. е. или при $t = 0$, или на боковой поверхности цилиндра Q_T.*

Так как теорема о минимуме сводится к теореме о максимуме переменой знака у $u(x, y, z, t)$, то мы ограничимся доказательством теоремы о максимуме.

Обозначим через M наибольшее значение функции $u(x, y, z, t)$ в цилиндре $\bar{D}_T$, а через m — наибольшее значение $u(x, y, z, t)$ на Γ. Допустим, что существует такое решение $u(x, y, z, t)$, для которого $M > m$, т. е. для которого теорема о максимуме не верна. Пусть эта функция принимает значение M в точке (x_0, y_0, z_0, t_0), где (x_0, y_0, z_0) принадлежит Ω и $0 < t_0 \leqslant T$.

Рассмотрим функцию

$$v(x, y, z, t) = u(x, y, z, t) + \frac{M-m}{6d^2}[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2],$$

где d — диаметр области Ω. На боковой поверхности цилиндра D_T и на его нижнем основании

$$v(x, y, z, t) \leqslant m + \frac{M-m}{6} = \frac{M}{6} + \frac{5m}{6} < M,$$

а

$$v(x_0, y_0, z_0, t_0) = M.$$

Следовательно, $v(x, y, z, t)$, так же как и $u(x, y, z, t)$, не принимает наибольшего значения ни на боковой поверхности D_T, ни на его нижнем основании. Пусть $v(x, y, z, t)$ принимает наибольшее значение в точке (x_1, y_1, z_1, t_1), где (x_1, y_1, z_1) лежит внутри Ω и $0 < t_1 \leqslant T$. Тогда в этой точке вторые производные $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ неположительны и $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0$ $\Big($если $t_1 < T$, то $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, если же $t_1 = T$, то $\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0\Big)$, откуда следует, что в точке (x_1, y_1, z_1, t_1) должно быть

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \geqslant 0. \qquad (*)$$

С другой сторны,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - a^2\frac{M-m}{d^2} = -a^2\frac{M-m}{d^2} < 0,$$

что противоречит (*), и теорема доказана.

Из доказанной теоремы непосредственно вытекает, что:

1) *Решение первой краевой задачи* (15.1) — (15.2) *в цилиндре D_T единственно.* В самом деле, если бы имели два каких-либо решения u_1 и u_2 задачи, то их разность $w = u_1 - u_2$, удовлетворяя однородному уравнению (15.1), обращалась бы в нуль как при $t = 0$, так и на поверхности S области Ω. Но тогда, в силу теоремы о максимуме и минимуме, следует, что w равна тождественно нулю в области Ω при $0 \leqslant t \leqslant T$, т. е. $u_1 = u_2$.

2) *Решение первой граничной задачи* (15.1) — (15.2) *непрерывно зависит от правых частей начального и граничного условий.* Действительно, если разность функций, входящих соответственно в начальное и граничное условия, по абсолютной величине не превосходит некоторого положительного числа ε, то и разность $w = u_1 - u_2$ соответствующих решений, как решение однородного уравнения теплопроводности с малыми начальным и граничным значениями, во всем цилиндре D_T будет по абсолютной величине также не превосходить ε.

2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Для прямоугольника $\bar{Q} : [0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ первую краевую задачу можно сформулировать так: *найти непрерывную в прямоугольнике $\bar{Q}$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую в Q уравнению теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \qquad (15.4)$$

начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{15.5}$$

и краевым условиям

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{15.5'}$$

При этом предполагается, что функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ непрерывны и $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(l) = \mu_2(0)$.

Изучение общей первой краевой задачи (I) начнем с решения следующей простейшей задачи (I′): найти в прямоугольнике решение однородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{15.6}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \tag{15.7}$$

и однородным краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \tag{15.8}$$

где $\varphi(x)$ имеет кусочно-непрерывную первую производную и обращается в нуль при $x = 0$ и $x = l$.

Докажем существование решения краевой задачи (I′) для прямоугольника Q методом Фурье.

Будем искать частные решения уравнения (15.6) в виде

$$u(x, t) = T(t)\,X(x). \tag{15.9}$$

Подставляя это в (15.6), имеем

$$X(x)\,T'(t) = a^2 T(t)\,X''(x) \quad \text{или} \quad \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получаем два уравнения

$$T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \tag{15.10}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{15.11}$$

Чтобы получить нетривиальные решения $u(x, t)$ вида (15.9), удовлетворяющие краевым условиям (15.8), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (15.11), удовлетворяющие краевым условиям

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы приходим к задаче о собственных значениях:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{15.12}$$

исследованной в задаче о колебании ограниченной однородной струны. Там было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{15.13}$$

существуют нетривиальные решения задачи (15.12):

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{15.14}$$

Значениям параметра $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения уравнения (15.10):

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \tag{15.15}$$

где a_n — произвольные постоянные.

Итак, все функции

$$u_n(x, t) = T_n(t)\,X_n(x) = a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{15.16}$$

удовлетворяют уравнению (15.6) и граничным условиям (15.8).

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{15.17}$$

Требуя выполнения начального условия (15.7), получим

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{15.18}$$

Написанный ряд представляет собою разложение заданной функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0, l)$. Коэффициенты a_n определяются по известной формуле

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{15.19}$$

Так как мы предположили, что функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную первую производную и обращется в нуль при $x=0$ и $x=l$, то ряд (15.18) с коэффициентами a_n, определяемыми по формулам (15.19), равномерно и абсолютно сходится к $\varphi(x)$, что известно из теории тригонометрических рядов. Так как при $t \geqslant 0$

$$0 < e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \leqslant 1,$$

то ряд (15 17) при $t \geqslant 0$ также сходится абсолютно и равномерно. Поэтому функция $u(x, t)$, определяемая рядом (15.17), непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ и удовлетворяет начальному и граничному условиям. Остается показать, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (15 6) в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$. Для этого достаточно показать, что ряды, полученные из (15.17) почленным дифференцированием по t один раз и почленным дифференцированием по x два раза, также абсолютно и равномерно сходятся в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$. А это последнее утверждение следует из того, что при любом $t > 0$

$$0 < \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1, \quad 0 < \frac{n^2\pi^2}{l^2} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} < 1,$$

если n достаточно велико.

Совершенно так же можно показать существование у функции $u(x, t)$ непрерывных производных любого порядка по x и t в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$

Единственность решения задачи (I′) и непрерывная зависимость от начальной функции $\varphi(x)$ была установлена как следствие теоремы о максимуме и минимуме. Таким образом, задача (I′) *поставлена корректно для* $t > 0$, если начальное условие относить к $t = 0$

Замечание Допустим, что задача (I′) имеет решение при отрицательных t. Тогда это решение можно было бы как угодно сильно изменить при как угодно малых отрицательных t, изменяя как угодно мало функцию $\varphi(x)$ и ее производные до произвольного фиксированного порядка k Для этого достаточно к решению прибавить какой-нибудь член с достаточно большим номером из ряда (15.17) с произвольно малым постоянным множителем. Отсюда следует, что задача (I′) поставлена *некорректно для отрицательных* t, если начальное условие относить к $t = 0$.

Задача I″. Найти в прямоугольнике Q решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{15.20}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0} = 0 \tag{15.21}$$

и однородным краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \tag{15.22}$$

При этом предполагается, что непрерывная функция $f(x, t)$ имеет кусочно-непрерывную первую производную и что при всех $t > 0$ выполнялись условия $f(0, t) = f(l, t) = 0$.

Будем искать решение $u(x, t)$ задачи (I″) в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{15.23}$$

по собственным функциям задачи (15.12). Разлагая функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по синусам, будем иметь

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \tag{15.24}$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \tag{15.25}$$

Подставляя ряд (15.23) в уравнение (15.20) и принимая во внимание (15 24), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Отсюда

$$T_n'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)=f_n(t) \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (15.26)$$

Пользуясь начальным условием для $u(x,\ t)$

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

получаем начальное условие для $T_n(t)$:

$$T_n(0)=0 \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (15.27)$$

Решение уравнения (15.26) при начальном условии (15.27) имеет вид

$$T_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau. \qquad (15.28)$$

Подставляя выражение (15.28) для $T_n(t)$ в ряд (15.23), получим решение задачи (I″) в виде

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (15.29)$$

Замечание. Если начальные условия неоднородны, то к решению (15.29) следует прибавить решение однородного уравнения теплопроводности с заданным начальным условием $u(x,\ 0)=\varphi(x)$ и однородными граничными условиями $u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0$.

Вернемся теперь к общей первой краевой задаче (I). Введем новую неизвестную функцию $v(x,\ t)$, положив

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)+w(x,\ t),$$

где

$$w(x,\ t)=\mu_1(t)+[\mu_2(t)-\mu_1(t)]\,\frac{x}{l}.$$

Функция $v(x,\ t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\bar f(x,\ t), \qquad (15.30)$$

где

$$\bar f(x,\ t)=f(x,\ t)-w_t(x,\ t),$$

с начальным условием

$$v(x,\ 0)=\varphi(x)-w(x,\ 0) \qquad (15.31)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} v(0,\ t)&=u(0,\ t)-w(0,\ t)=0,\\ v(l,\ t)&=u(l,\ t)-w(l,\ t)=0. \end{aligned} \qquad (15.32)$$

Таким образом, решение задачи (I) сведено к решению задачи (15.30)—(15.32), которая нами решена выше.

Задачи. 1) Дан однородный шар радиуса R, центр которого расположен в начале координат. Известно, что начальная температура любой точки шара зависит только от расстояния r этой точки до центра шара. Во все время наблюдения внешняя поверхность шара поддерживается при температуре, равной нулю. Определить температуру любой точки внутри сферы в момент времени $t>0$.

Ответ.

$$u(r,\ t)=\frac{2}{Rr}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{R}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi r}{R}\int_0^R \rho\varphi(\rho)\sin\frac{n\pi\rho}{R}\,d\rho,$$

где $\varphi(r)$ — начальная температура шара.

2) Дан тонкий однородный стержень длиной l, боковая поверхность которого теплоизолирована. Начальная температура известна. Конец стержня $x=0$ поддерживается при температуре, равной нулю, а на конце $x=l$ происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой считается равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени $t>0$.

Ответ.

$$u(x,\ t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}\,e^{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\mu_n x}{R}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\mu_n\xi}{l}\,d\xi,$$

где $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{p}, \quad p=Hl>0.$$

3) Найти распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса R при условии, что начальная температура равна

$$u|_{t=0}=u_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

а на его боковой поверхности поддерживается температура, равная нулю.

Ответ.

$$u(r, t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t}.$$

§ 16. Задача Коши

1. Постановка задачи Коши. Найти функцию $u(x, t)$ $(t > 0, -\infty < x < \infty)$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16.1}$$

и начальному условию

$$u|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{16.2}$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

2. Единственность решения. Докажем единственность решения задачи Коши, предполагая, что решение $u(x, t)$ ограничено во всей области, т. е. существует такое число M, что $|u(x, t)| < M$ для всех $-\infty < x < \infty$ и любом $t \geqslant 0$.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения уравнения (16.1), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию (16.2). Тогда разность $\omega(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ будет удовлетворять уравнению (16.1) и начальному условию

$$\omega|_{t=0} = 0.$$

Кроме того, $\omega(x, t)$ ограничена во всей области

$$|\omega(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leqslant 2M.$$

Теорему о максимуме и минимуме для неограниченной области непосредственно применить нельзя, так как функция $\omega(x, t)$ может нигде не достигать наибольшего и наименьшего значений. Чтобы воспользоваться этой теоремой, рассмотрим конечную область

$$|x| \leqslant L, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{16.3}$$

Возьмем функцию

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right),$$

которая является решением уравнения теплопроводности (16.1). Легко видеть, что

$$v(x, 0) \geqslant \omega(x, 0) = 0,$$
$$v(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant |\omega(\pm L, t)|.$$

Применяя теорему о максимуме и минимуме к разности между функциями $v(x, t)$ и $\pm\omega(x, t)$ в области (16.3), будем иметь

$$v(x, t) - \omega(x, t) \geqslant 0, \quad v(x, t) + \omega(x, t) \geqslant 0,$$

откуда

$$-v(x, t) \leqslant \omega(x, t) \leqslant v(x, t)$$

или

$$|\omega(x, t)| \leqslant v(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируя некоторое значение (x_0, t_0) и выбирая L достаточно большим, получим

$$|\omega(x_0, t_0)| < \varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности ε и точки (x_0, t_0) следует, что

$$\omega(x, t) \equiv 0.$$

3. Существование решения задачи Коши. Найдем сначала частные решения уравнения (16.1) вида

$$u(x, t) = T(t) X(x). \tag{16.4}$$

Подставляя (16.4) в уравнение (16.1) и разделяя переменные, получим

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — постоянная. Мы получаем, таким образом,

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

откуда, полагая постоянный множитель в выражении $T(t)$ равным единице,

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x;$$

постоянные A и B могут зависеть от λ. Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается совершенно произвольным.

Согласно (16.4) получим, что

$$u_\lambda(x, t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{16.5}$$

есть частное решение уравнения (16.1) при любых $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$. Интегрируя (16.5) по параметру λ, получим также решение уравнения (16.1)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{16.6}$$

если этот интеграл равномерно сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла один раз по t и дважды по x.

Выберем функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось и начальное условие (16.2). Полагая в (16.6) $t = 0$, получим, в силу (16.2),

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{16.7}$$

Сравнивая интеграл в правой части с интегралом Фурье для функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\cos\lambda x \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi\right]d\lambda,$$

мы видим, что можно удовлетворить равенству (16.7), положив

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi,\\ B(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

Подставляя (16.8) в (16.6), получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\,e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi.$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

легко находим, что

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\,d\xi. \tag{16.9}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$F(x, t; \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}, \tag{16.10}$$

рассматриваемая как функция от (x, t), является решением уравнения (16.1). Функцию (16.10) называют *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности (16.1).

Докажем, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ функция (16.9) удовлетворяет уравнению теплопроводности (16.1). Для этого нам достаточно показать, что интеграл (16.9), а также интегралы, полученные его формальным дифференцированием под знаком интеграла по x и t сколько угодно раз, равномерно сходятся в любом прямоугольнике $[-l \leqslant x \leqslant l,\ t_0 \leqslant t \leqslant T]$, где $t_0 > 0$. Действительно, дифференцируя (16.9) несколько раз по x и t, мы получим сумму интегралов, и нужно показать, что каждый интеграл равномерно сходится. После дифференцирования под знаком интеграла выделяется множитель $\xi - x$ в положительной степени, который остается под знаком интеграла, и множитель t в некоторой степени, который можно вынести из-под знака интеграла. Таким образом, мы получим сумму интегралов вида

$$I=\frac{1}{t^k}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\xi-x)^m e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi. \qquad (16.11)$$

Производя замену переменных

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}} \qquad (t>0),$$

преобразуем интеграл (16.11) к виду

$$I=(2a)^{m+1}t^{\frac{m+1}{2}-k}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})\,\alpha^m e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Отсюда легко видеть, что этот интеграл равномерно сходится при $t\geqslant t_0>0$, так как подынтегральная функция мажорируется функцией

$$M|\alpha|^m e^{-\alpha^2}, \quad \text{где} \quad |\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})|<M,$$

которая интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Таким образом, функция $u(x, t)$, определяемая формулой (16.9), непрерывна и имеет производные любого порядка по x и t при $t>0$. Так как подынтегральная функция удовлетворяет уравнению (16.1) при $t>0$, то отсюда следует, что и функция $u(x, t)$ удовлетворяет этому уравнению при $t>0$.

Докажем теперь, что функция (16.9) удовлетворяет начальному условию (16.2), т. е. что

$$\lim_{t\to 0}u(x, t)=\varphi(x)$$

при любом x из $(-\infty, \infty)$. Введем вместо ξ новую переменную α по формуле

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}} \qquad (t>0).$$

Тогда интеграл (16.9) примет следующий вид:

$$u(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (16.12)$$

Отсюда легко вытекает ограниченность решения $u(x, t)$ при $-\infty<x<\infty$ и $t>0$, если $|\varphi(x)|<M$ для всех x. Действительно,

$$|u(x, t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})|\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=M,$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=1. \qquad (16.13)$$

Умножая (16.13) на $\varphi(x)$ и вычитая из (16.12), получим

$$u(x, t)-\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)]\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

откуда

$$|u(x, t)-\varphi(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)|\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha. \qquad (16.14)$$

В силу ограниченности функции $\varphi(x)$, при любых x, t и α имеем

$$|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)|\leqslant 2M. \qquad (16.15)$$

Пусть $\varepsilon>0$ — сколь угодно малое число. Так как интеграл (16.13) сходится, то можно фиксировать столь большое положительное число N, что

$$\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-N}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{2M}{\sqrt{\pi}}\int_{N}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\leqslant\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16.16)$$

Разбивая промежуток интегрирования на три:

$$(-\infty, -N), \quad (-N, N), \quad (N, \infty)$$

и принимая во внимание (16.15) и (16.16), из (16 14) будем иметь

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N}|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$, при всех t, достаточно близких к нулю, и при $|\alpha| \leqslant N$ имеем

$$|\varphi(x+2a\alpha\sqrt{t})-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

и последнее неравенство дает

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-N}^{N} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

и тем более

$$|u(x, t)-\varphi(x)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

т. е., в силу (16 13), мы имеем $|u(x, t)-\varphi(x)|<\varepsilon$ при всех t, достаточно близких к нулю, и при всех x, откуда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ и следует

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)=\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

4. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальной функции. Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения (16.1), удовлетворяющее начальному условию (16.2), а $\bar{u}(x, t)$ — решение того же уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$\left.\bar{u}\right|_{t=0}=\bar{\varphi}(x). \qquad (16.17)$$

Тогда, если $|\bar{\varphi}(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ для всех x из $(-\infty, \infty)$, то $|\bar{u}(x, t)-u(x, t)|<\varepsilon$ при любых x и $t>0$. Действительно, решения уравнения (16.1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям (16 2) и (16.17), вы-

ражаются формулой (16 9). Беря их разность, будем иметь

$$\bar{u}(x, t)-u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\bar{\varphi}(\xi)-\varphi(\xi)] \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi,$$

откуда

$$|\bar{u}(x, t)-u(x, t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

или, полагая $\alpha=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, получим

$$|\bar{u}(x, t)-u(x, t)| \leqslant \varepsilon \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из формулы (16.9) следует, что тепло распространяется вдоль стержня не с какой-либо конечной скоростью, а мгновенно. Действительно, пусть начальная температура $\varphi(x)$ положительна для $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ и равна нулю вне этого отрезка. Тогда для последующего распределения температур получаем

$$u(x, t)=\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi,$$

откуда видно, что при сколь угодно малых $t>0$ и сколь угодно больших x, $u(x, t)$ больше нуля. Это объясняется неточностью теоретических предпосылок, лежащих в основе теории теплопроводности.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Решение задачи (16.1) — (16 2) (задачи Коши) есть функция, непрерывно дифференцируемая сколь угодно раз по x и t, вне зависимости от того, будет ли иметь производные функция $\varphi(x)$ или нет. Эта гладкость решений существенно отличает однородное уравнение теплопроводности, например, от уравнения колебания струны.

Выясним теперь *физический* смысл фундаментального решения (16.10) однородного уравнения теплопроводности (16.1).

Выделим малый элемент стержня $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ около точки и будем считать, что функция $\varphi(x)$, дающая начальное распределение температуры, равна нулю вне промежутка $(x_0 - h,\ x_0 + h)$ и имеет постоянное значение U_0 внутри него. Физически можно представить себе дело так, что мы в начальный момент времени сообщили этому элементу количество тепла $Q = 2hc\rho U_0$, которое вызвало повышение температуры на U_0 в этом участке стержня. В последующие моменты времени распределение температуры в стержне дается формулой (16.9), которая в нашем случае принимает вид

$$u(x,\ t) = \int_{x_0-h}^{x_0+h} U_0 \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi =$$

$$= \frac{Q}{c\rho\, 2a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi.$$

Если мы будем теперь уменьшать h до нуля, т. е будем считать, что то же количество тепла Q распределяется на все меньшем участке и в пределе сообщается стержню в точке $x = x_0$, то мы приходим к понятию *мгновенного точечного источника тепла напряжения Q, помещенного в момент времени $t = 0$ в точке $x = x_0$*. От действия такого мгновенного точечного источника тепла в стержне получается распределение температур по формуле

$$\lim_{h \to 0} \frac{Q}{c\rho\, 2a\sqrt{\pi t}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi. \qquad (16.18)$$

Применяя теорему о среднем, будем иметь

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = e^{-\frac{(\xi_0 - x)^2}{4a^2 t}},$$

где $x_0 - h < \xi_0 < x_0 + h$, и так как $\xi_0 \to x_0$ при $h \to 0$, то выражение (16.18) принимает следующий вид:

$$\frac{Q}{c\rho} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x_0 - x)^2}{4a^2 t}}.$$

Таким образом, *фундаментальное решение* (16 10) *дает распределение температуры, которое вызывается мгновенным точечным источником тепла напряжения $Q = c\rho$, помещенным в начальный момент $t = 0$ в точке $x = \xi$ стержня*

Графики фундаментального решения

$$F(x,\ t;\ \xi) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \qquad (16.10)$$

при фиксированном ξ как функция от x в отдельные моменты времени $0 < t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ представлены на

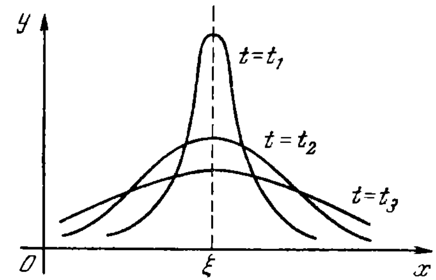

Рис. 8

рис. 8 Площадь под каждой из этих кривых равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = 1.$$

Это означает, что количество тепла $Q = c\rho$ в стержне остается неизменным с течением времени Из чертежа видно, что почти вся площадь, ограниченная кривой (16 10) и осью абсцисс, находится над промежутком $(\xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое число, если только $t > 0$ — достаточно малое число Величина этой площади, умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, помещенному в начальный момент Таким образом, для малых значений $t > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки $x = \xi$ Из сказанного выше следует, что в момент времени $t = 0$ все количество тепла помещается в точке $x=\xi$, т. е. мы имеем мгновенный точечный источник тепла.

Теперь нетрудно дать физическое толкование и решению (16.9) Действительно, для того чтобы придать сечению $x=\xi$ стержня температуру $\varphi(\xi)$ в начальный момент, мы должны распределить на малом элементе $d\xi$ около этой точки количество тепла $dQ=c\rho\varphi(\xi)\,d\xi$ или, что то же самое, поместить в точке ξ мгновенный точечный источник тепла напряжения dQ; распределение температуры, вызываемое этим мгновенным точечным источником, согласно формуле (16.10), будет

$$\varphi(\xi)\,d\xi\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}.$$

Общее же действие от начальной температуры $\varphi(\xi)$ во всех точках стержня суммируется из этих отдельных элементов, что и дает нам полученное выше решение (16.9)

$$u(x,\,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi.$$

Совершенно аналогично рассматривается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{16.19}$$

Решение уравнения (16.19), удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=0}=\varphi(x,\,y,\,z),$$

дается формулой

$$u(x,\,y,\,z,\,t)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\,\eta,\,\zeta)\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Задача. Доказать, что неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\,t)$$

при нулевом начальном условии

$$u|_{t=0}=0$$

имеет решение вида

$$u(x,\,t)=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi\,d\tau.$$

Указание. Применить метод, изложенный в § 11, для неоднородного волнового уравнения.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 17. Уравнение Лапласа

К уравнениям эллиптического типа приводит изучение стационарных, т. е. не меняющихся во времени процессов различной физической природы. Простейшим уравнением эллиптического типа является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \qquad (17.1)$$

В § 5 мы видели, что уравнению Лапласа удовлетворяет установившаяся в однородном изотропном теле температура $u(x, y, z)$. Потенциалы поля тяготения и стационарного электрического поля также удовлетворяют уравнению Лапласа в точках, в которых отсутствуют массы, соответственно электрические заряды.

Функция $u(x, y, z)$ называется *гармонической в конечной области* D, если она в этой области имеет непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках D.

Функция $u(x, y, z)$ называется *гармонической в бесконечной области* D, если она в этой области имеет непрерывные производные до второго порядка, удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках D и равномерно стремится к нулю при стремлении точки $M(x, y, z)$ в бесконечность (функция $u(M)\to 0$ при $M\to\infty$, если для любого заданного положительного ε можно указать такое положительное число A, что $|u(M)|<\varepsilon$ при $r\geqslant A$, где r — расстояние точки M от начала координат).

Мы всегда будем предполагать, что граница области D состоит из конечного числа замкнутых поверхностей.

Лемма 1. *Функция* $\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0^2)}}$ *есть гармоническая в любой области, не содержащей точки* (x_0, y_0, z_0).

Лемма доказывается непосредственной проверкой. Функцию $u=\frac{1}{r}$ называют *фундаментальным решением* уравнения Лапласа (17.1).

Аналогично функцию

$$u=\ln\frac{1}{r}=\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

называют фундаментальным решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Прежде чем переходить к изучению свойств гармонических функций, мы приведем вывод некоторых формул, необходимых нам в дальнейшем.

§ 18. Формулы Грина. Интегральное представление произвольной функции

Пусть D — конечная область трехмерного пространства, ограниченная кусочно-гладкой ориентируемой поверхностью S, и пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеют внутри D непрерывные и ограниченные производные первого порядка. Тогда имеет место формула Остроградского

$$\iiint\limits_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=$$
$$=\iint\limits_S[P\cos(nx)+Q\cos(ny)+R\cos(nz)]\,dS, \qquad (18.1)$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

Перейдем теперь к выводу формул Грина.

Пусть функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны в D вплоть до S, частные производные второго порядка внутри D непрерывны и ограничены. Полагая

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (18.1), приходим к первой формуле Грина

$$\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau = \iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \iiint_D u\,\Delta v\,d\tau. \quad (18.2)$$

Меняя местами u и v в формуле (18.2), будем иметь

$$\iiint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau = \iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \iiint_D v\,\Delta u\,d\tau. \quad (18.3)$$

Вычитая (18.2) из (18.3), получим вторую формулу Грина

$$\iiint_D (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) dS. \quad (18.4)$$

Замечание. Область D может быть ограничена несколькими замкнутыми поверхностями. Формулы Грина применимы и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область D. Заметим, что при этом нормаль n, внешняя по отношению к области D, будет на поверхностях, ограничивающих эту область изнутри, направлена внутрь поверхностей.

Лемма 2. *Если функция $u(x, y, z)$ непрерывна, имеет непрерывные производные первого и второго порядков везде в области D, причем первые производные непрерывны вплоть до границы S, а вторые производные*

непрерывны внутри области, то имеет место формула

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS - \frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\Delta u}{r}\,d\tau, \quad (18.5)$$

где $r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ — расстояние от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей внутри D, до переменной точки $M(x, y, z)$, n — внешняя нормаль к поверхности S.

Доказательство. Будем сначала предполагать, что функция u имеет непрерывные производные второго порядка вплоть до поверхности S. Рассмотрим функцию $v = \frac{1}{r}$. Поскольку эта функция обращается в бесконечность, если точка M совпадает с точкой M_0, то мы не можем применить формулу Грина ко всей области D. Вырежем из области D шар с центром в точке M_0 и малым радиусом ρ и обозначим через D_ρ оставшуюся часть области D, а через σ_ρ — поверхность шара. В области D_ρ функции u и $v = \frac{1}{r}$ обладают требуемым свойством непрерывности, и формулу Грина (18.4) можно применить для этой области. Так как $v = \frac{1}{r}$ в области D_ρ — гармоническая функция, то имеем

$$\iiint_{D_\rho} \frac{\Delta u}{r}\,d\tau = \iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS + \iint_{\sigma_\rho} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS. \quad (18.6)$$

Будем теперь стремить радиус ρ к нулю. Тогда слева в написанной формуле получим интеграл по всей области D. Интеграл справа по поверхности S от ρ не зависит. Покажем, что второе слагаемое справа стремится к пределу $-4\pi u(x_0, y_0, z_0)$. На поверхности шара σ_ρ

величина r имеет постоянное значение ρ, и принимая во внимание, что нормаль n направлена прямо противоположно направлению радиуса шара, будем иметь

$$\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{\sigma_\rho} = -\left.\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\right|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}$$

и, следовательно,

$$\int_{\sigma_\rho}\int u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho^2} \int_{\sigma_\rho}\int u\, dS = \frac{1}{\rho^2} u(M_\rho) 4\pi\rho^2 =$$

$$= 4\pi u(M_\rho) \to 4\pi u(M_0) \quad \text{при} \quad \rho \to 0,$$

так как функция $u(x, y, z)$ непрерывна в области D. M_ρ — некоторая точка на поверхности σ_ρ.

Производные первого порядка функции $u(x, y, z)$ ограничены в $\bar{D}$, так как по предположению функция $u(x, y, z)$ имеет непрерывные производные первого порядка в замкнутой области $\bar{D}$. Следовательно, существует такое K, что $\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| < K$. Тогда

$$\left|\int_{\sigma_\rho}\int \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} dS\right| \leqslant \frac{K}{\rho} \int_{\sigma_\rho}\int dS =$$

$$= \frac{K}{\rho} 4\pi\rho^2 = 4\pi K\rho \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Таким образом, после предельного перехода при $\rho \to 0$ в формуле (18.6), мы получим

$$\int_D\int\int \frac{\Delta u}{r} d\tau = \int_S\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS - 4\pi u(x_0, y_0, z_0),$$

откуда и следует формула (18.5).

Для того чтобы избавиться от предположения о том, что вторые производные от u непрерывны вплоть до границы S, заменим область D областью $D^{(n)}$, лежащей вместе с границей внутри D. Применяя сначала формулу (18.5) к области $D^{(n)}$ и переходя затем к пределу при $D^{(n)} \to D$, получим требуемый результат.

Совершенно аналогичные формулы имеют место и для плоскости:

$$\int_B\int (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\sigma = \int_l \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) dS, \tag{18.7}$$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_l \left(\ln\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_B\int \ln\frac{1}{r} \Delta u\, d\sigma, \tag{18.8}$$

где B — конечная область, ограниченная замкнутой кривой l, n — внешняя нормаль к кривой l.

§ 19. Основные свойства гармонических функций

Пусть $u(x, y, z)$ — гармоническая функция в конечной области D с границей S. Будем считать, что u непрерывна вместе с производными второго порядка вплоть до границы S. Полагая в первой формуле Грина (18.2) $v = u$ и принимая во внимание, что u — гармоническая функция, получим

$$\int_S\int u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_D\int\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Так как объемный интеграл неотрицателен, то

$$\int_S\int u \frac{\partial u}{\partial n} dS \geqslant 0. \tag{19.1}$$

Применяя формулу Грина (18.4) к гармоническим функциям $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z) = 1$, получим

$$\int_S\int \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0, \tag{19.2}$$

т. е. интеграл от нормальной производной гармонической функции по границе области равен нулю. Применяя теперь формулу (18.5) к гармонической функции $u(x, y, z)$, в силу $\Delta u = 0$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS, \quad (19.3)$$

т. е. значение гармонической функции в любой точке внутри конечной области выражается через значения этой функции и ее нормальной производной на границе области формулой (19.3).

Замечание. Интегралы в формулах (19.1), (19.2) и (19.3) не содержат производных второго порядка функции $u(x, y, z)$, и для применимости этих формул достаточно предположить, что гармоническая функция непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до границы S. Чтобы убедиться в этом, достаточно заменить область D областью $D^{(n)}$, лежащей вместе с границей внутри D, написать формулы (19.1), (19.2) и (19.3) для области $D^{(n)}$, в которой имеется непрерывность и производных второго порядка вплоть до границы $S^{(n)}$, и затем перейти к пределу при $D^{(n)} \to D$.

Функция $u(x, y, z)$, гармоническая в области D, имеет производные всех порядков внутри этой области. Действительно, возьмем внутри области произвольную точку (x_0, y_0, z_0). Окружим ее поверхностью S', целиком лежащей внутри области D. Так как функция $u(x, y, z)$ гармонична в области D, то она будет гармонической и в области, ограниченной поверхностью S', причем функция $u(x, y, z)$ будет иметь непрерывные производные второго порядка вплоть до поверхности S'. Применяя теперь формулу (19.3), мы получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S'} \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS. \quad (19.3')$$

Так как точка (x_0, y_0, z_0) не лежит на поверхности S', то $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$ — функция непрерывная, имеющая непрерывные производные любого порядка по переменным x_0, y_0, z_0. Следовательно, правую

часть формулы (19.3') можно дифференцировать и притом сколько угодно раз по x_0, y_0, z_0 под знаком интеграла. Отсюда и следует наше утверждение.

Теорема 1 (о среднем арифметическом). *Значение гармонической функции в центре шара равно среднему арифметическому ее значений на поверхности этого шара.*

Пусть $u(x, y, z)$ — гармоническая функция внутри шара и непрерывна вместе с первыми производными вплоть до поверхности шара. Обозначим через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ центр шара, R — его радиус, S_R — поверхность шара.

Применяя формулу (19.3) к этому шару для точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, получим

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_R} \int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) dS. \quad (19.4)$$

На поверхности S_R шара величина r имеет постоянное значение, равное R; принимая во внимание, что направление внешней нормали к поверхности S_R совпадает с направлением радиуса шара, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=R} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\Big|_{r=R} = -\frac{1}{R^2},$$

и формула (18.12) дает

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R} \int \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R} \int u \, dS$$

или, в силу (19.2), будем иметь окончательно

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_S \int u \, dS = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(R, \theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (19.5)$$

Теорема 2 (о максимуме и минимуме). *Функция, гармоническая внутри ограниченной области D и* *непрерывная в замкнутой области $\bar{D}$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений только на границе области, кроме того случая, когда эта функция есть постоянная.*

Доказательство. Пусть $u(M)$ достигает наибольшего значения в некоторой внутренней точке $M_0(x, y, z)$ области D. Проведем сферу S_ρ с центром в точке M_0 и радиусом ρ, принадлежащую целиком области D, применим теорему о среднем арифметическом и заменим подынтегральную функцию $u(M)$ ее наибольшим значением $u_\rho^{(\max)}$ на сфере S_ρ. Таким образом, получим

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} u\,dS \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint\limits_{S_\rho} u_\rho^{(\max)}\,dS = u_\rho^{(\max)},$$

причем знак равенства имеет место только в том случае, когда u на сфере S_ρ есть постоянная, равная $u(M_0)$. Поскольку по предположению $u(M_0)$ есть наибольшее значение $u(M)$ в области D, мы можем утверждать, что имеет место знак равенства и что, следовательно, $u(M)$ равна постоянной внутри и на поверхности всякой сферы с центром M_0, целиком принадлежащей области D. Покажем, что отсюда следует, что $u(M)$ есть постоянная и во всей области D.

Пусть N — любая точка, лежащая внутри D. Нам надо показать, что $u(N) = u(M_0)$. Соединим M_0 с N линией l конечной длины, например ломаной линией, лежащей внутри D, и пусть d — кратчайшее расстояние l от границы S области D. В силу доказанного выше, $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ в шаре в центром M_0 и радиусом $\frac{d}{2}$. Пусть M_1 — последняя точка пересечения линии l с поверхностью упомянутого шара, если считать от M_0. Мы имеем $u(M_1) = u(M_0)$, и по доказанному выше $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ и в шаре с центром M_1 и радиусом $\frac{d}{2}$. Пусть M_2 — последняя точка пересечения l с поверхностью этого шара. Как и выше, функция $u(M)$ равна постоянной $u(M_0)$ и в шаре с центром M_2 и радиусом $\frac{d}{2}$ и т. д. Путем построения конечного числа таких шаров вся линия l будет покрыта шарами. Точка N окажется внутри некоторого шара, откуда будет следовать, что $u(N) = u(M_0)$. Аналогично доказывается, что гармоническая функция не может достигать наименьшего значения внутри области D. Согласно теореме Вейерштрасса функция $u(M)$ в замкнутой ограниченной области достигает своего наибольшего и наименьшего значения, и она достигает их на границе области D, ибо, по доказанному, внутри области D гармоническая функция $u(M)$ не может достигать наибольшего и наименьшего значений. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что гармоническая функция $u(M)$ не может иметь внутри области D ни максимумов, ни минимумов.

§ 20. Постановка основных задач для уравнения Лапласа

Пусть S — замкнутая поверхность. Обозначим через D_i конечную область, ограниченную этой поверхностью, а через D_e — бесконечную область, внешнюю к D_i, также ограниченную поверхностью S. Пусть на поверхности S заданы непрерывные функции $f_1(P)$, $f_2(P)$ и $f_3(P)$.

1. Внутренняя задача Дирихле. Найти функцию $u(M)$, гармоническую в области D_i, непрерывную в замкнутой области $\bar{D}_i$ и принимающую на поверхности S заданные значения

$$u|_S = f_1(P). \tag{20.1}$$

Аналогично внешняя задача Дирихле состоит в определении функции, гармонической в D_e, непрерывной в $\bar{D}_e$ и удовлетворяющей условию (20.1).

2. Внутренняя задача Неймана. Найти функцию $u(M)$, гармоническую в области D_i, такую, чтобы ее производная $\frac{\partial u}{\partial n}$ по направлению внешней нормали в каждой точке поверхности S равнялась значению в

этой точке заданной функции $f_2(P)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2(P). \tag{20.2}$$

Аналогично внешняя задача Неймана состоит в определении гармонической в D_e функции $u(M)$, нормальная производная которой на поверхности S удовлетворяет условию (20.2).

3. Третья краевая задача. Найти функцию $u(M)$, гармоническую в области D_i, непрерывную в $\overline{D}_i$ и такую, что $\frac{\partial u}{\partial n} + a(P)u$ в каждой точке поверхности S равно значению в этой точке заданной функции $f_3(P)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n} + a(P)u\right|_S = f_3(P),$$

где $a(P) > 0$ — заданная непрерывная функция на поверхности S.

Аналогично формулируется третья внешняя краевая задача.

Теорема 3. *Решение задачи Дирихле, внутренней или внешней, единственно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Дирихле. Предположим, что существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ одной и той же задачи Дирихле. Тогда их разность $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$ будет гармонической функцией, равной нулю на S. Отсюда, в силу теоремы 2, непосредственно следует, что $u(M) \equiv 0$, т. е. $u_1(M) = u_2(M)$ во всей области D, так как в противном случае она должна была бы достигать внутри области D положительного наибольшего значения или отрицательного наименьшего значения, что невозможно.

Рассмотрим теперь внешнюю задачу Дирихле. Как и ранее, предположим, что существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда их разность $u(M) = u_1(M) - u_2(M)$ будет гармонической функцией, равной нулю на S и $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое R, что $|u(M)| < \varepsilon$, если $r \geqslant R$, r — расстояние точки M от начала координат. Пусть $P(x, y, z)$ — произвольная точка бесконечной области D_e. Проведем сферу S_r с центром в начале и радиусом $r \geqslant R$ столь большим, чтобы точка P и поверхность S лежали

внутри этой сферы. Тогда $|u(P)| < \varepsilon$, что следует из теоремы о максимуме и минимуме, примененной к конечной области D_1, заключенной между S и S_r. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $u(P) = 0$, а так как P — любая точка области D, то $u \equiv 0$ в D, т. е. $u_1 = u_2$.

§ 21. Функция Грина оператора Лапласа

1. Функция Грина задачи Дирихле. Пусть $u(M)$ — гармоническая функция внутри конечной области D — непрерывна вместе с производными первого порядка вплоть до границы S области D. Тогда, как было показано в § 19, имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right) dS, \tag{21.1}$$

где r — расстояние от точки M_0, лежащей внутри D, до переменной точки M поверхности S.

Пусть известна функция $g(M, M_0)$, обладающая следующими двумя свойствами: 1) как функция переменной точки M она является гармонической внутри области D и имеет непрерывные первые производные вплоть до поверхности S; 2) на поверхности S функция $g(M, M_0)$ принимает граничные значения $-\frac{1}{4\pi r}$. Применяя формулу Грина (18.4) к гармоническим функциям $u(M)$ и $g(M, M_0)$, получим

$$\iint\limits_S \left[u(M)\frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n} - g(M, M_0)\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right] dS = 0$$

или, в силу граничных значений для функции $g(M, M_0)$,

$$\iint\limits_S \left[u(M)\frac{\partial g(M, M_0)}{\partial n} + \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right] dS = 0.$$

Вычитая это равенство из (21.1), мы найдем

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0)\right] dS. \tag{21.2}$$

Положим

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M, M_0).$$

Эта функция называется *функцией Грина* задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Определение *Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа называется функция* $G(M, M_0)$, *удовлетворяющая следующим условиям:* 1) $G(M, M_0)$ *как функция точки* M *есть гармоническая внутри области* D, *исключая точку* M_0, *где она обращается в бесконечность;* 2) *она удовлетворяет граничному условию*

$$G(M, M_0)|_S=0; \tag{21.3}$$

3) *в области* D *функция* $G(M, M_0)$ *допускает представление*

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(M, M_0), \tag{21.4}$$

где $r=|M_0, M|$ *и* $g(M, M_0)$ — *гармоническая функция везде внутри* D.

Построение функции Грина сводится к нахождению ее регулярной части $g(M, M_0)$, которая определяется из решения задачи Дирихле:

$$\Delta g(M, M_0)=0, \quad g(M, M_0)|_S=-\frac{1}{4\pi r} \quad (M_0\in D). \tag{21.5}$$

С помощью функции Грина решение внутренней задачи Дирихле (если оно существует) дается формулой

$$u(M_0)=-\iint_S f(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}\,dS, \quad u(M)|_S=f(M). \tag{21.6}$$

При выводе формулы (21.6) мы предполагали существование функции $u(M)$ — решения внутренней задачи Дирихле с граничными значениями $f(M)$, непрерывного вместе с первыми производными вплоть до границы S. Искомая же функция в задаче Дирихле должна быть гармонической внутри области D и непрерывной в замкнутой области $\bar D$. Таким образом, не давая доказательства существования решения, формула (21.6) дает интегральное представление существующих достаточно гладких решений задачи Дирихле. Подробное исследование формулы (21.6), проведенное А. М. Ляпуновым, показало, что для поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова (см. § 30), она представляет решение задачи Дирихле при любом выборе непрерывной функции $f(M)$, входящей в граничное условие.

Совершенно аналогично вводится функция Грина для внешней задачи Дирихле.

2. Некоторые свойства функции Грина. а) *Функция Грина* $G(M, M_0)$ *всюду положительна внутри области* D. В самом деле, функция $G(M, M_0)$ обращается в нуль на границе S и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной из точки M_0 (так как при $M\to M_0$ $G(M, M_0)\to+\infty$). Отсюда в силу теоремы 2 § 19 следует ее положительность во всей области D.

Выведем еще одно простое неравенство для $G(M, M_0)$. Функция $g(M, M_0)$ на поверхности S принимает отрицательные граничные значения $-\frac{1}{4\pi r}$, тем самым $g(M, M_0)<0$ в замкнутой области $\bar D$, и, следовательно,

$$0<G(M, M_0)<\frac{1}{4\pi r} \quad (\text{внутри } D). \tag{21.7}$$

б) *Функция Грина симметрична*, т. е.

$$G(M, M_0)=G(M_0, M). \tag{21.8}$$

Для доказательства применим формулу Грина (18.4) к функциям $u=G(M, M_1)$ и $v=G(M, M_2)$, выбирая за область интегрирования D_2, которая получается из области D исключением двух сфер с центрами в точках M_1 и M_2 и с малым радиусом ε. Тройной интеграл по этой области обратится в нуль, так как u и v — гармонические функции вне точек M_1 и M_2. Интеграл по поверхности S равен нулю в силу граничного условия (21.3). Таким образом, мы приходим к равенству

$$\iint_{S_1}\left[G(M, M_1)\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n}-G(M, M_2)\frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n}\right]dS+$$
$$+\iint_{S_2}\left[G(M, M_1)\frac{\partial G(M, M_2)}{\partial n}-\right.$$
$$\left.-G(M, M_2)\frac{\partial G(M, M_1)}{\partial n}\right]dS=0,$$

где S_1 и S_2 — поверхности упомянутых выше сфер. Предел интеграла по сфере S_1 с центром в точке M_1 при $\varepsilon \to 0$ будет, очевидно, равен $-G(M_1, M_2)$, а предел интеграла по сфере S_2 с центром в точке M_2 равен $G(M_2, M_1)$. Следовательно, $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$, что и доказывает симметричность функции Грина.

Замечание. В случае плоскости функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + g(M, M_0), \quad r = |M_0M|.$$

Решение внутренней задачи Дирихле выражается формулой (21.6), где только под S нужно понимать кривую, ограничивающую плоскую область B.

§ 22. Решение внутренней задачи Дирихле для шара

Пусть требуется найти функцию $u(M)$, гармоническую внутри шара, непрерывную в замкнутом шаре и принимающую на поверхности S этого шара наперед

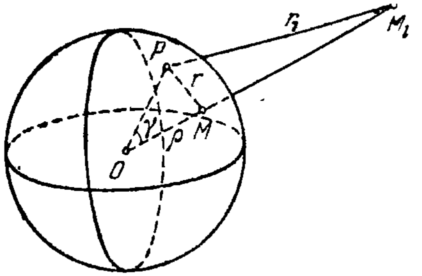

Рис. 9.

заданные непрерывные значения $f(P)$. Построим сначала функцию Грина для шара. Пусть R — радиус шара с центром в точке O; возьмем внутри его произвольную точку $M(x, y, z)$ и обозначим через ρ расстояние этой точки от центра шара (рис. 9). Подвергнем точку M преобразованию инверсии относительно сферы S. Преобразованная точка (обозначим ее через $M_1(x_1, y_1, z_1)$) будет лежать на прямой OM вне шара на расстоянии ρ_1 от центра шара, причем

$$\rho\rho_1 = R^2. \tag{22.1}$$

Возьмем теперь какую-нибудь точку $P(\xi, \eta, \zeta)$ и обозначим через r и r_1 расстояния от этой точки соответственно до точек M и M_1. Найдем соотношение между r и r_1, когда точка P находится на поверхности шара. Треугольники OMP и OM_1P подобны, так как они имеют общий угол при вершине O и стороны, образующие эти углы, пропорциональны в силу (22.1). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}$$

или

$$\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1} = 0 \quad (\text{точка } P \text{ на } S). \tag{22.2}$$

Это и есть искомое соотношение между r и r_1.

Покажем теперь, что функция Грина для шара будет иметь следующий вид:

$$G(P, M) = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi} \frac{R}{\rho} \frac{1}{r_1}. \tag{22.3}$$

Действительно, функция $G(P, M)$ как функция точки P является гармонической внутри шара, за исключением точки M, где она обращается в бесконечность. На поверхности S шара она обращается в нуль, что следует из (22.2). Таким образом, построенная функция удовлетворяет всем условиям, налагаемым на функцию Грина задачи Дирихле. Подставляя найденную функцию Грина в формулу (21.6), получим

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S f(P) \frac{\partial\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n} dS. \tag{22.4}$$

Преобразуем полученную формулу. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \cos(n\xi) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \cos(n\eta) + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \cos(n\zeta) =$$
$$= -\frac{1}{r^2}\left[\frac{\xi - x}{r} \cos(n\xi) + \frac{\eta - y}{r} \cos(n\eta) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(n\zeta)\right] =$$
$$= -\frac{1}{r^2}[\cos(r\xi)\cos(n\xi) + \cos(r\eta)\cos(n\eta) +$$
$$+ \cos(r\zeta)\cos(n\zeta)] = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n).$$

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\cos(r_1, n).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\cos(r, n)+\frac{R}{\rho}\frac{\cos(r_1, n)}{r_1^2} \quad (\text{на } S). \tag{22.5}$$

Из треугольников OMP и OM_1P имеем

$$\rho^2=R^2+r^2-2Rr\cos(r, n),$$

$$\rho_1^2=R^2+r_1^2-2Rr_1\cos(r_1, n) \quad (\text{точка } P \text{ на } S).$$

Определяя отсюда $\cos(r, n)$ и $\cos(r_1, n)$ и подставляя их в (22.5), получим

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)}{\partial n}=\frac{\rho^2-R^2-r^2}{2Rr^3}+\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2\rho r_1^3}$$

или, в силу (22.1) и (22.2),

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho}\frac{1}{r_1}\right)=\frac{\rho^2-R^2}{Rr^3} \quad (\text{на } S).$$

Подставляя в формулу (22.4), окончательно получим

$$u(M)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S f(P)\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \tag{22.6}$$

Формула (22.6) называется *формулой Пуассона.*

Таким образом, если решение внутренней задачи Дирихле для шара существует и если оно непрерывно в замкнутом шаре вместе с первыми производными, то это решение представимо по формуле Пуассона (22.6).

Докажем, что если функция $f(P)$ непрерывна, то формула Пуассона (22.6) дает решение внутренней задачи Дирихле для шара. Для этого нужно показать, что интеграл, входящий в формулу (22.6), есть гармоническая функция внутри шара и что функция $u(M)$, определенная формулой (22.6), непрерывна в замкнутом шаре и принимает заданные непрерывные значения $f(P)$ на поверхности шара, т. е. что $u(M)$ при стремлении точки M к произвольно взятой точке P на поверхности шара стремится к значению f в этой точке. При этом $u(M)$ становится непрерывной функцией в замкнутом шаре, если ее соответствующим образом определить на поверхности шара.

Гармоничность функции $u(M)$ следует из того, что при $\rho<R$

$$\Delta\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\Delta\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}-\Delta\frac{1}{r}=$$

$$=-2R\Delta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}=-2R\frac{\partial}{\partial n}\Delta\frac{1}{r}=0 \quad (P \text{ на } S).$$

Возьмем на поверхности шара произвольную точку N и докажем, что если $M\to N$, то $u(M)\to f(N)$. Для доказательства нашего утверждения отметим, что формула (22.6), как это следует из самого способа ее получения, справедлива в частном случае, когда $f(P)\equiv 1$ и когда решение задачи Дирихле, очевидно, существует (оно тождественно равно единице). Таким образом, имеет место равенство

$$1=\frac{1}{4\pi R}\iint_S \frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \tag{22.7}$$

Умножим обе части равенства (22.7) на $f(N)$ и вычтем из формулы Пуассона (22.6). Мы получим

$$u(M)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\iint_S [f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \tag{22.8}$$

Окружим точку N малым шаром радиуса 2δ, причем выберем δ столь малым, чтобы во всех точках поверхности сферы S, которые попадут внутрь этого шара, в силу непрерывности функции $f(P)$ имело место неравенство

$$|f(P)-f(N)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{22.9}$$

где $\varepsilon>0$ — произвольно заданное малое число.

Обозначим через σ часть поверхности S, находящейся внутри шара радиуса 2δ с центром в точке N, оставшуюся часть обозначим через $S-\sigma$. Тогда разность (22.8) можно записать в виде

$$u(M)-f(N)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}[f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS+$$

$$+\frac{1}{4\pi R}\iint_{S-\sigma}[f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS. \quad (22.10)$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части равенства (22.10). Мы имеем, в силу (22.9) и (22.7),

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}[f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{4\pi R}\iint_{\sigma}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS<\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{4\pi R}\iint_{S}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS=\frac{\varepsilon}{2}. \quad (22.11)$$

Это неравенство имеет место при любом положении точки M внутри шара.

Оценим второй интеграл в равенстве (22.10). Для этого проведем новый шар радиуса δ с центром в точке N. Допустим, что при своем приближении к точке N точка M находится уже внутри этого шара. Тогда при таком положении точки M имеем $r=|MP|>\delta$, если точка P находится на $S-\sigma$. Функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S шара, следовательно, она ограничена, т. е. $|f(P)|\leqslant K$. Тогда второй интеграл оценивается так:

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{S-\sigma}[f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS\right|\leqslant\frac{2KR(R^2-\rho^2)}{\delta^3}.$$

Когда $M\to N$, то разность $R^2-\rho^2\to 0$ и, следовательно,

$$\left|\frac{1}{4\pi R}\iint_{S-\sigma}[f(P)-f(N)]\frac{R^2-\rho^2}{r^3}dS\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (22.12)$$

Из равенства (22.10), в силу (22.11) и (22.12), имеем

$$|u(M)-f(N)|<\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности $\varepsilon>0$ следует $\lim\limits_{M\to N}u(M)=f(N)$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Введем сферические координаты с центром в точке O. Пусть (θ', φ') — угловые координаты точки P, (ρ, θ, φ) — сферические координаты точки M. Обозначим через γ угол между векторами $\overline{OP}$ и $\overline{OM}$. Тогда формулу Пуассона (22.6) можно записать в виде

$$u(\rho, \theta, \varphi)=$$

$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta', \varphi')\frac{R^2-\rho^2}{(R^2-2R\rho\cos\gamma+\rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'. \quad (22.13)$$

Замечание 2. Решение внутренней задачи Дирихле для круга дается интегралом Пуассона

$$u(r, \theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(t-\theta)+r^2}dt. \quad (22.14)$$

Следствие из формулы Пуассона. Рассмотрим нигде не отрицательную в области D гармоническую функцию $u(M)$. Опишем из какой-нибудь точки M_0 области D сферу S радиуса R, лежащую внутри D, и обозначим через M какую-нибудь другую точку, лежащую внутри сферы S (рис. 10). Легко видеть, что ядро $\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}$ формулы Пуассона при $\rho<R$ удовлетворяет неравенствам

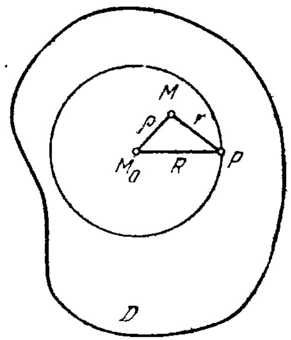

Рис. 10.

$$\frac{1}{4\pi R}\frac{R-\rho}{(R+\rho)^2}\leqslant\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi R}\frac{R+\rho}{(R-\rho)^2} \quad (\rho=|M_0M|),$$

и из формулы Пуассона (22.6) непосредственно следует

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(P)\,dS\leqslant u(M)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}\iint_S u(P)\,dS$$

или, применяя теорему о среднем значении,

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}\,u(M_0) \leqslant u(M) \leqslant \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\,u(M_0). \qquad (22.15)$$

Эта оценка значений положительной гармонической функции в произвольной точке сферы через ее значения в центре сферы называется *неравенством Гарнака.*

Теорема 4. *Функция, гармоническая во всем пространстве, тождественно равна нулю*

Доказательство. Пусть $u(M)$ — гармоническая функция во всем пространстве. Опишем из начала координат как из центра сферу S произвольного радиуса. Гармоническая функция $u(M)$ внутри этой сферы может быть представлена через свои значения на поверхности сферы с помощью формулы Пуассона (22.6):

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int u(P)\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS. \qquad (22.16)$$

Выберем теперь R столь большим, чтобы на поверхности сферы S имело место неравенство $|u(P)| < \varepsilon$, что возможно, так как $u(P) \to 0$ при $P \to \infty$. Тогда из (22.16) имеем

$$|u(M)| \leqslant \frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int |u(P)|\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS \leqslant \leqslant \varepsilon\frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int \frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS$$

или, в силу (22.7), $|u(M)| < \varepsilon$, откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что $u(M) = 0$, а так как M — любая точка пространства, то $u \equiv 0$ во всем пространстве.

§ 23. Теоремы о последовательности гармонических функций

Теорема 5. *Если последовательность функций $u_n(M)$ ($n = 1, 2, 3\ldots$), гармонических внутри ограниченной области D и непрерывных в $\bar{D}$, сходится равномерно на границе S области D, то она равномерно сходится и*

внутри D. Предельная функция будет гармонической внутри области D

Доказательство. В силу равномерной сходимости последовательности функций $u_n(M)$ на границе S, по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N > 0$, что

$$|u_{n_1} - u_{n_2}| < \varepsilon \quad (\text{на } S), \qquad (23.1)$$

как только $n_1 \geqslant N$, $n_2 \geqslant N$.

На основании теоремы о максимуме и минимуме неравенство (23 1) будет иметь место и подавно внутри области D Тогда, согласно признаку Коши, имеем, что последовательность гармонических функций $u_n(M)$ сходится равномерно внутри области D к предельной функции $u(M)$, непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$. Докажем, что она будет гармонической внутри области D. Пусть M — любая точка внутри D Опишем сферу S с центром в точке M и таким радиусом R, чтобы вся эта сфера лежала внутри области D. Так как $u_n(M)$ — гармонические функции в области D, то каждую из этих функций внутри сферы можно представить с помощью интеграла Пуассона:

$$u_n(M) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int u_n(P)\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS \quad (r = |PM|). \qquad (23.2)$$

В силу доказанной равномерной сходимости последовательности функций $u_n(M)$ внутри области D, в равенстве (23 2) можно перейти к пределу в обеих частях, и мы получим

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int u(P)\,\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\,dS.$$

Отсюда следует, что $u(M)$ есть гармоническая функция внутри сферы S

Теорема 6. *Если возрастающая последовательность функций $u_n(M)$, гармонических внутри области D, сходится в некоторой внутренней точке M_0 этой области, то она всюду в области D сходится к некоторой гармонической функции $u(M)$, и притом равномерно во всякой замкнутой области D_1, которая вместе со своей границей лежит внутри D.*

Доказательство. По условию теоремы мы имеем внутри D $u_{n+1}(M) \geqslant u_n(M)$. В силу сходимости последовательности в точке M_0 при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$0 \leqslant u_{n+p}(M_0) - u_n(M_0) \leqslant \varepsilon$$

при $n > N$ и любом положительном p. Опишем из точки M_0 сферу S радиуса R, целиком лежащую внутри области D. Так как $u_{n+p}(M) - u_n(M) \geqslant 0$ внутри D, то, применяя неравенство Гарнака (22.15), получим

$$0 \leqslant u_{n+p}(M) - u_n(M) \leqslant \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\varepsilon,$$

где M — произвольная точка внутри сферы S и ρ — расстояние от M до M_0. Взяв сферу S' с центром M_0 и радиуса $R-a$, где a — малое положительное число, мы получаем в сфере S' оценку

$$0 \leqslant u_{n+p}(M) - u_n(M) \leqslant \frac{2R^2}{a^2}\varepsilon,$$

откуда вытекает равномерная сходимость последовательности $u_n(M)$ в шаре S'. Взяв некоторую точку M_1 внутри сферы S' и повторив предыдущие рассуждения, учитывая при этом сходимость последовательности в точке M_1, мы получим равномерную сходимость внутри шара, лежащего внутри D, с центром в этой точке. Продолжая так и дальше, мы докажем равномерную сходимость последовательности во всяком замкнутом шаре, лежащем внутри D. По лемме Бореля всякую замкнутую область D_1, которая вместе со своей границей лежит внутри D, мы можем покрыть конечным числом шаров, лежащих внутри D, и это дает нам равномерную сходимость последовательности $u_n(M)$ в области D_1. Из равномерной сходимости последовательности $u_n(M)$, в силу теоремы 5, следует, что предельная функция $u(M)$ будет гармонической внутри D.

§ 24. Внешняя задача Дирихле для шара

Пусть R — радиус шара с центром в точке O и пусть на поверхности S этого шара задана произвольная непрерывная функция $f(P)$. Решение внешней задачи Дирихле для шара дается формулой Пуассона

$$u(M) = \frac{1}{4\pi R}\int_S\int f(P)\,\frac{\rho^2 - R^2}{r^3}\,dS, \qquad (24.1)$$

где $\rho = |OM|$, $r = |MP|$, причем $\rho > R$.

Действительно, как и в § 23, докажем, что при $\rho > R$, т. е. вне шара, функция $u(M)$, определяемая интегралом (24.1), удовлетворяет уравнению Лапласа (17.1). Нужно еще показать, что $u(M)$ стремится к нулю равномерно при $M \to \infty$. Очевидно, $r > \rho - R$. Возьмем точку M настолько удаленную от начала координат, что $\rho > 2R$, т. е. $R < \frac{\rho}{2}$, а тогда $r > \frac{\rho}{2}$. Отсюда

$$\frac{1}{r^3} < \frac{8}{\rho^3} \quad \text{и} \quad \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} < \frac{8(\rho^2 - R^2)}{\rho^3} < \frac{8}{\rho}$$

и, следовательно,

$$|u(M)| \leqslant \frac{1}{\rho}\,\frac{2}{\pi R}\int_S\int |f(P)|\,dS = \frac{C}{\rho},$$

где

$$C = \frac{2}{\pi R}\int_S\int |f(P)|\,dS.$$

Отсюда видно, что при $\rho \to \infty$ функция $u(M)$ стремится к нулю. Чтобы убедиться, что $u(M) \to f(N)$, когда $M \to N$, запишем интеграл (24.1) в сферических координатах:

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\,\frac{\rho^2 - R^2}{(R^2 - 2R\rho\cos\gamma + \rho^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \qquad (24.2)$$

где (ρ, θ, φ) — сферические координаты точки M, (θ', φ') — угловые сферические координаты точки P, $\gamma = \angle MOP$. Подвергнем точку $M(\rho, \theta, \varphi)$ преобразованию инверсии относительно сферы S. Преобразованная точка $M_1(\rho_1, \theta, \varphi)$ будет лежать на прямой OM внутри шара на расстоянии ρ_1 от центра, причем $\rho_1\rho = R^2$. Интеграл (24.2) можно записать в виде

$$u(\rho,\ \theta,\ \varphi)=\frac{\rho_1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta',\varphi')\frac{R^2-\rho_1^2}{(R^2-2R\rho_1\cos\gamma+\rho_1^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi', \tag{24.3}$$

при этом $\rho_1<R$, и когда точка $M(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ будет стремиться к произвольной точке $N(R,\ \theta,\ \varphi)$, лежащей на сфере S, то точка $M_1(\rho_1,\ \theta,\ \varphi)$ будет изнутри шара стремиться также к точке $N(R,\ \theta,\ \varphi)$. В силу результата, полученного для внутренней задачи Дирихле для шара, имеем

$$\frac{R}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta',\ \varphi')\frac{R^2-\rho_1^2}{(R^2-2R\rho_1\cos\gamma+\rho_1^2)^{3/2}}\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'\to f(N),$$

когда $M_1\to N$, и, принимая во внимание, что $\rho_1\to R$ (при $M\to N$), можем утверждать, что и правая часть формулы (24.3) стремится к $f(N)$, что и требовалось доказать.

§ 25. Поведение производных гармонической функции на бесконечности

Пусть $u(M)$ — гармоническая функция в бесконечной области D_e, внешней к D_i, ограниченной замкнутой поверхностью Σ. Начало координат поместим внутри области D_i и опишем сферу S с центром в начале координат и достаточно большого радиуса R, чтобы поверхность Σ целиком лежала внутри этой сферы. Функция $u(M)$ — гармоническая в D_e, тем более она будет гармонической вне сферы S и на самой поверхности этой сферы. Следовательно, вне сферы S функцию $u(M)$ можно представить формулой Пуассона

$$u(M)=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int u(P)\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\,dS \qquad (\rho>R), \tag{25.1}$$

где

$$\rho=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$r=|MP|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

В § 24 для функции $u(M)$ при достаточно большом ρ мы имели оценку

$$|u(M)|\leqslant\frac{C}{\rho}, \quad \text{где} \quad C=\frac{2}{\pi R}\int\limits_S\int|u(P)|\,dS.$$

Дифференцируя (25.1) по x, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{4\pi R}\int\limits_S\int u(P)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\right)dS \qquad (r\neq 0), \tag{25.2}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\right)=\frac{2x}{r^3}-\frac{3(\rho^2-R^2)}{r^4}\,\frac{x-\xi}{r}.$$

Оценим производную $\frac{\partial u}{\partial x}$. Пусть точка M настолько удалена от начала координат, что $\rho>2R$, т. е. $R<\frac{\rho}{2}$. Тогда $r\geqslant\rho-R>\frac{\rho}{2}$ и $\frac{1}{2}<\frac{2}{\rho}$. Заметим, что $|x|\leqslant\rho$, $\frac{|x-\xi|}{r}\leqslant 1$. Принимая во внимание все эти оценки, получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho^2-R^2}{r^3}\right)\right|\leqslant\frac{64}{\rho^2},$$

и из (25.2) имеем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|<\frac{1}{\rho^2}\,\frac{16}{\pi R}\int\limits_S\int|u(P)|\,dS=\frac{A}{\rho^2},$$

где

$$A=\frac{16}{\pi R}\int\limits_S\int|u(P)|\,dS.$$

Аналогично

$$\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\leqslant\frac{A}{\rho^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|<\frac{A}{\rho^2}.$$

Таким образом, для гармонической функции $u(M)$ в бесконечной области D' для точек области, достаточно удаленных от начала координат, имеют место неравенства

$$|u(M)| < \frac{A}{\rho}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{\rho^2}, \tag{25.3}$$

где $A = \text{const}$, ρ — расстояние точки M от начала координат.

§ 26. Теорема единственности задачи Неймана

Решение внешней задачи Неймана, имеющее непрерывные вплоть до границы производные первого порядка, единственно, решение внутренней задачи Неймана определено с точностью до произвольной постоянной.

Рассмотрим сначала внутреннюю задачу Неймана. Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — два решения задачи Неймана в области D с границей S, удовлетворяющие одному и тому же граничному условию

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_S = f(N), \quad \left.\frac{\partial u_2}{\partial n}\right|_S = f(N).$$

Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ будет гармонической функцией внутри области D, для которой $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$.

Воспользуемся первой формулой Грина для гармонических функций

$$\int_S\int u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\int_D\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Левая часть равна нулю, значит, и правая часть равна нулю. Тогда в силу непрерывности функции $u(M)$ и ее первых производных следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

т. е. $u(M) = u_1(M) - u_2(M) = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что внутренняя задача Неймана не всегда разрешима. Для ее разрешимости необходимо, чтобы

$$\int_S\int \frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_S\int f(N)\,dS = 0.$$

Необходимость вытекает из свойства гармонических функций.

Перейдем теперь к внешней задаче Неймана. Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — два решения внешней задачи Неймана, удовлетворяющие одному и тому же граничному условию. Тогда их разность есть гармоническая функция в бесконечной области, для которой

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0, \quad |u(M)| < \frac{A}{\rho}. \tag{26.1}$$

Возьмем сферу S_R с центром в начале координат достаточно большого радиуса R, так чтобы граница S целиком лежала внутри сферы. Обозначим через D_1 область, ограниченную поверхностями S и S_R. Применяя формулу Грина для гармонических функций к области D_1, получим

$$\int_S\int u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS + \int_{S_R}\int u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int\int_{D_1}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau$$

или, в силу (26.1),

$$\int\int_{D_1}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = \int_{S_R}\int u\frac{\partial u}{\partial n}\,dS. \tag{26.2}$$

Так как $u(M)$ — гармоническая функция в бесконечной области, то для нее справедливы оценки (25.3). Мы имеем

$$\left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(nz)\right| \leqslant \frac{3A}{R^2} \quad (\text{на } S_R)$$

и

$$\left| \iint\limits_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \right| < \frac{3A}{R^3} \iint\limits_{S_R} dS = \frac{12\pi A}{R}.$$

Тогда из (26.2) при достаточно большом R имеем

$$\iiint\limits_{D_1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau < \varepsilon$$

при любом $\varepsilon > 0$, что возможно лишь при условии

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Значит, $u = \text{const}$; так как $u(M) \to 0$ при $M \to \infty$, то $u(M) = 0$, т. е. $u_1(M) = u_2(M)$.

ГЛАВА VI
ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

§ 27. Потенциалы объема, простого и двойного слоев

Пусть в некоторой точке $A(a, b, c)$ пространства помещен точечный электрический заряд q. Тогда по известному закону физики этот заряд создает электростатическое поле, напряженность которого $\boldsymbol{E}$ в любой точке $M(x, y, z)$, отличной от A, равна

$$\boldsymbol{E} = kq \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

или, в проекциях,

$$E_x = kq \frac{x-a}{r^3}, \quad E_y = kq \frac{y-b}{r^3}, \quad E_z = kq \frac{z-c}{r^3}, \tag{27.1}$$

где $\boldsymbol{r} = \overline{AM}$, $r = |\overline{AM}|$, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбранной системы единиц. В дальнейшем для простоты будем считать $k = 1$.

Нетрудно видеть, что правые части равенств (27.1) равны с противоположным знаком частным производным от функции

$$u(M) = \frac{q}{r} + \text{const} \tag{27.2}$$

соответственно по x, y и z. Эта функция называется *потенциалом* электростатического поля. Обычно принято считать произвольную постоянную, стоящую в правой части (27.2), равной нулю, чтобы $u(M) \to 0$ при удалении M в бесконечность. Таким образом, точечный заряд величины q создает потенциал

$$u(M)=\frac{q}{r}=\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}. \quad (27.3)$$

Так как при наличии нескольких точечных зарядов потенциалы, создаваемые ими, складываются, то потенциалы, создаваемые непрерывно распределенными зарядами, находятся в виде предела суммы, т. е. в виде интеграла.

Пусть заряд распределен по объему D с объемной плотностью $\rho(N)$, тогда потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

$$v(M)=\iiint\limits_D \frac{\rho(N)}{r}\,d\tau \qquad (r=|\overline{MN}|). \quad (27.4)$$

Правая часть (27.4) называется *объемным потенциалом*. Если заряд распределен по поверхности S с поверхностной плотностью $\rho(N)$, то потенциал, создаваемый этим зарядом, равен

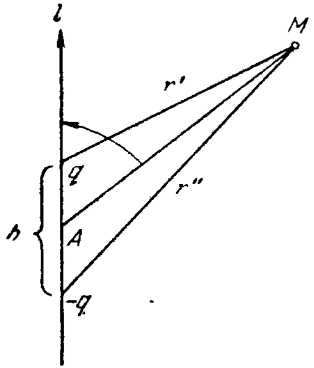

Рис. 11.

$$u(M)=\iint\limits_S \frac{\rho(N)}{r}\,dS, \quad (27.5)$$

где r есть расстояние от точки M до переменной точки поверхности S.

Правая часть (27.5) называется *потенциалом простого слоя*.

Представим теперь, что два точечных заряда q и $-q$, находясь на оси l на расстоянии h (рис. 11), стремятся к точке A, причем направление от $-q$ к q все время совпадает с положительным направлением оси l. Тогда потенциал в любой точке, кроме A, является разностью двух величин, стремящихся стать равными друг другу; поэтому этот потенциал стремится к нулю. Если же в процессе движения q меняется так, что

$$qh=p=\text{const},$$

то предел потенциала равен

$$u(M)=\lim_{h\to 0} q\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right)=$$

$$=\lim_{h\to 0} p\,\frac{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}}{h}=p\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial l}=p\,\frac{\cos(\overline{AM},\,l)}{r^2}. \quad (27.6)$$

Предельное расположение зарядов в физике называют *диполем*, величину p — *моментом*, а ось l — *осью* этого *диполя*. При помощи точечных зарядов диполь может быть осуществлен лишь приближенно (два больших заряда на малом расстоянии друг от друга).

Пусть теперь дана ориентированная поверхность S, т. е. такая, на которой указаны внешняя и внутренняя стороны. Пусть на S распределен диполь с плотностью момента $\mu(N)$, причем в каждой точке N направление оси диполя совпадает с направлением внутренней нормали к S в точке N. Тогда потенциал, создаваемый этим диполем, равен

$$w(M)=\iint\limits_S \mu(N)\,\frac{\cos(\overline{NM},\,n_i)}{r^2}\,dS, \quad (27.7)$$

где вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от N к M, $\boldsymbol{n}_i$ — внутренняя нормаль к S.

Этот интеграл называется *потенциалом двойного слоя*, так как рассматриваемое распределение диполя может быть приближенно осуществлено как два наложенных на поверхность S распределения зарядов с плотностью $\frac{1}{h}\mu(N)$ и $-\frac{1}{h}\mu(N)$ на расстоянии h (по нормали к S) друг от друга, если только h достаточно мало. В дальнейшем будем считать, что вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от точки M к N, и нормаль к поверхности S будем брать внешнюю. Тогда потенциал двойного слоя (27.7) можно записать

$$w(M)=-\iint\limits_S \mu(N)\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=\iint\limits_S \mu(N)\,\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS, \quad (27.8)$$

где $\varphi=(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ — угол между вектором $\boldsymbol{n}$ внешней нормали и вектором $\boldsymbol{r}$, направленным от M к N.

§ 28. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Во всем дальнейшем изложении теории потенциала мы будем часто встречаться с несобственными интегралами, зависящими от параметра. Поэтому напомним основные положения теории таких интегралов.

1. Рассмотрим интеграл

$$v(M)=\iiint_D f(P, M)\, d\tau_P, \tag{28.1}$$

где $f(P, M)$ — всюду непрерывная функция в конечной области D, за исключением точки M, в окрестности которой она становится неограниченной. Если функция $f(P, M)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(P, M)| < \frac{C}{r^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 3),$$

где r — расстояние между точками P и M, то несобственный интеграл (28.1) *сходится абсолютно.*

Определение. *Интеграл* (28.1) *называется равномерно сходящимся в точке M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что имеет место неравенство*

$$\left|\iiint_{D_\delta} f(P, M)\, d\tau_P\right| < \varepsilon$$

для любой точки M, расстояние которой от M_0 меньше $\delta(\varepsilon)$, и для любой области D_δ, содержащей точку M_0 и имеющей диаметр $d \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Теорема. *Равномерно сходящийся в точке M_0 интеграл* (28.1) *есть функция от M, непрерывная в точке M_0.*

Доказательство. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и выделим область D_δ, содержащую точку M_0, согласно определению равномерной сходимости интеграла (28.1) в точке. Интеграл (28.1) разобьем на два

слагаемых:

$$v(M)=\iiint_{D_\delta} f(P, M)\, d\tau_P + \iiint_{D-D_\delta} f(P, M)\, d\tau_P = v_1(M)+v_2(M).$$

Тогда

$$|v(M)-v(M_0)| \leqslant |v_1(M)|+|v_1(M_0)|+|v_2(M)-v_2(M_0)|.$$

Пусть точка M находится внутри области D_δ. Тогда, в силу равномерной сходимости интеграла (28.1) в точке M_0, имеем

$$|v_1(M)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad |v_1(M_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

и, следовательно,

$$|v(M)-v(M_0)| < \frac{\varepsilon}{2}+|v_2(M)-v_2(M_0)|. \tag{28.2}$$

В интеграле $v_2(M)$ интегрирование совершается по области $D - D_\delta$, а точка M_0 лежит внутри D_δ, и потому функция $v_2(M)$ в точке M_0 и ее некоторой окрестности непрерывна. Таким образом, для всех M, достаточно близких к M_0, имеем $|v_2(M)-v_2(M_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и, в силу (28.2),

$$|v(M)-v(M_0)| < \varepsilon,$$

откуда и следует, в силу произвольности ε, непрерывность интеграла (28.1) в точке M_0, что и требовалось доказать.

2. Пусть S — замкнутая поверхность и пусть функция $F(P, M)$ непрерывна, когда P принадлежит поверхности S, а M как угодно меняется в пространстве, не совпадая с точкой P, и обращается в бесконечность при совпадении точек M и P. Тогда интеграл

$$u(M)=\iint_S F(P, M)\, dS_P \tag{28.3}$$

является непрерывной функцией точки M, когда M не принадлежит поверхности S.

Если точка M совпадает с некоторой точкой P_0, лежащей на S, то $F(P, P_0)$ как функция точки P непрерывна на поверхности S, за исключением точки P_0, в окрестности которой $F(P, P_0)$ становится неограниченной. Исключим точку P_0 некоторой малой областью σ_n диаметра ρ_n. В оставшейся области $S-\sigma_n$ функция $F(P, P_0)$ непрерывна и ограничена, и поэтому существует интеграл

$$\iint\limits_{S-\sigma_n} F(P, P_0)\, dS_P. \tag{28.4}$$

Если при произвольном стягивании области σ_n к точке P_0 интеграл (28.4) стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от выбора областей σ_n, то этот предел и называют *несобственным интегралом* от функции $F(P, P_0)$ по поверхности S:

$$\iint\limits_{S} F(P, P_0)\, dS_P = \lim_{\rho_n \to 0} \iint\limits_{S-\sigma_n} F(P, P_0)\, dS_P. \tag{28.5}$$

Интеграл (28.5) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\iint\limits_{S} |F(P, P_0)|\, dS_P. \tag{28.6}$$

Отметим, что значение абсолютно сходящегося интеграла не зависит от способа стягивания σ_n к точке P_0. Если интеграл (28.6) сходится, то сходится и интеграл (28.5).

Определение. Интеграл (28.3) называется *равномерно сходящимся в точке* $P_0 \in S$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $V(\varepsilon)$ точки P_0 и такая часть $\sigma(\varepsilon)$ поверхности S, содержащая точку P_0 строго внутри себя, что для любой точки $M \in V(\varepsilon)$ интеграл

$$\iint\limits_{S} F(P, M)\, dS_P$$

по абсолютной величине меньше ε.

Теорема. *Равномерно сходящийся в точке* $P_0 \in S$ *интеграл* (28.3) *есть функция от* M, *непрерывная в точке* P_0.

Доказательство является повторением рассуждений предыдущей теоремы.

§ 29. Потенциал объема

Рассмотрим потенциал объема

$$v(M) = \iiint\limits_{D} \frac{\rho(N)}{r}\, d\tau \qquad (r = |MN|), \tag{29.1}$$

где D — конечная область. Положим, что плотность $\rho(N)$ ограничена и интегрируема в D. Интеграл (29.1) является собственным интегралом, если точка M лежит вне $D (r \neq 0)$. В этом случае функция $v(M)$ непрерывна и имеет частные производные всех порядков. Эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла, и $v(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta v = 0$ вне области D. Покажем, что при стремлении точки M в бесконечность по любому направлению функция $v(M)$ стремится к нулю, так что

$$|v(M)| < \frac{A}{R}, \quad A = \text{const},$$

где R — расстояние точки M от начала координат.

Поместим начало координат внутри области D. Тогда

$$MN \geqslant OM - ON$$

или

$$r \geqslant R - ON.$$

Обозначим через d диаметр области D. Тогда

$$r \geqslant R - d.$$

Будем считать, что точка M настолько удалена от начала координат, что $R > 2d$, т. е. $d < \frac{R}{2}$, тогда $r > \frac{R}{2}$

или $\frac{1}{r} < \frac{2}{R}$. Теперь

$$|v(M)| \leqslant \iiint\limits_D |\rho(N)| \frac{d\tau}{r} < \frac{2}{R} \iiint\limits_D |\rho(N)| \, d\tau = \frac{A}{R},$$

где

$$A = 2 \iiint\limits_D |\rho(N)| \, d\tau.$$

Таким образом, потенциал объема $v(M)$ есть гармоническая функция вне области D.

Пусть теперь точка M лежит внутри области D. Тогда интеграл (29.1) будет несобственным. В силу ограниченности плотности $\rho(N)$ интеграл (29.1) сходится, так как

$$\frac{|\rho(N)|}{r} < \frac{C}{r}.$$

Теорема 1. *Если $\rho(N)$ ограничена и интегрируема в области D, то потенциал $v(M)$ и его частные производные первого порядка непрерывны во всем пространстве и эти производные могут быть получены дифференцированием под знаком интеграла.*

Доказательство. Покажем сначала, что интеграл (29.1) и интегралы

$$X(M) = -\iiint\limits_D \rho(N) \frac{x-\xi}{r^3} \, d\tau, \quad Y(M), \quad Z(M), \tag{29.2}$$

полученные дифференцированием интеграла (29.1) соответственно по x, y и z под знаком интеграла, равномерно сходятся в любой точке M_0. Пусть M_0 — любая точка внутри D Возьмем внутри D область D_δ, содержащую точку M_0, и вычислим модуль интеграла

$$\left| \iiint\limits_{D_\delta} \frac{\rho(N)}{r} \, d\tau \right| < C \iiint\limits_{K_\delta} \frac{d\tau}{r} \qquad (r = |MN|),$$

где K_δ — шар радиуса δ с центром в точке M_0, содержащий область D_δ. Для вычисления последнего интеграла введем сферические координаты с центром в точке M. Очевидно, что

$$C \iiint\limits_{K_\delta} \frac{d\tau}{r} < C \iiint\limits_{K_{2\delta}} \frac{d\tau}{r} = C \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} r \sin\theta \, dr d\theta \, d\varphi = C \cdot 8\pi\delta^2,$$

где $K_{2\delta}$ — шар радиуса 2δ с центром в точке M. Итак,

$$\left| \iiint\limits_{D_\delta} \frac{\rho(N)}{r} \, d\tau \right| < 8\pi C\delta^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

независимо от точки M_0, т. е. если задано $\varepsilon > 0$, то, выбирая $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}}$ (не зависящее от выбора точки M_0), мы убеждаемся в равномерной сходимости интеграла (29.1) в любой точке M_0 области D.

Повторяя аналогичные рассуждения для интеграла $X(M)$, мы получим

$$\left| \iiint\limits_{D_\delta} \rho(N) \frac{x-\xi}{r^3} \, d\tau \right| < C \iiint\limits_{K_\delta} \frac{d\tau}{r^2} < C \iiint\limits_{K_{2\delta}} \frac{d\tau}{r^2} = 8\pi C\delta < \varepsilon,$$

если $\delta < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}$. Отсюда и следует равномерная сходимость интеграла $X(M)$. Так как равномерная сходимость интегралов (29.1) и (29.2) доказана в предположении ограниченности плотности $|\rho(N)| < C$, то эти интегралы непрерывны также и в точках разрыва функции $\rho(N)$. Точки границы области можно рассматривать как точки разрыва плотности $\rho(N)$, равной нулю вне области D. Таким образом, потенциал $v(M)$ и интегралы $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ непрерывны во всем пространстве.

Остается еще показать, что функции $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются частными производными от функции $v(M)$ и для точек $M(x, y, z)$, принадлежащих области D:

$$X = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{29.3}$$

Пусть $(x+\Delta x,\ y,\ z)$ суть координаты точки M_1, а r_1 — расстояние точки M_1 до точки $N(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ интегрирования.

Рассмотрим разность

$$\frac{v(x+\Delta x,\ y,\ z)-v(x,\ y,\ z)}{\Delta x}-X=$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_D \rho(N)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)d\tau-\iiint\limits_D \rho(N)\frac{\xi-x}{r^3}\,d\tau \tag{29.4}$$

и покажем, что она бесконечно мала вместе с Δx.

Пусть K_{δ_1} — шар радиуса δ_1 с центром M, лежащий внутри D, и D_2 — часть области D, лежащая вне K_{δ_1}. Разобьем потенциал $v(M)$ и $X(M)$ на два слагаемых:

$$v(M)=\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\frac{\rho(N)}{r}\,d\tau+\iiint\limits_{D_2}\frac{\rho(N)}{r}\,d\tau=v_1(M)+v_2(M),$$

$$X(M)=-\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\rho(N)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau-$$
$$-\iiint\limits_{D_2}\rho(N)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau=X_1(M)+X_2(M).$$

Тогда разность (29.4) можно записать в виде

$$I=\frac{v_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}-X_1+$$
$$+\left[\frac{v_2(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x}-X_2\right]. \tag{29.5}$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое в правой части этого равенства, считая, что точка $M_1(x+\Delta x,\ y,\ z)$ находится внутри шара K_{δ_1}. Мы имеем

$$\frac{v_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\rho(N)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)d\tau;$$

отметим теперь, что $|r-r_1|\leqslant\Delta x$. С помощью этого неравенства мы получаем

$$\left|\frac{v_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|\leqslant\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\frac{|\rho(N)|}{|\Delta x|}\,\frac{|r-r_1|}{r\cdot r_1}\,d\tau<$$
$$<C\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\frac{d\tau}{rr_1}\leqslant\frac{C}{2}\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}\right)d\tau. \tag{29.6}$$

Производя простые вычисления, имеем

$$\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\frac{d\tau}{r^2}=4\pi\delta_1,\quad \iiint\limits_{K_{\delta_1}}\frac{d\tau}{r_1^2}<\iiint\limits_{K_{2\delta_1}}\frac{d\tau}{r_1^2}=8\pi\delta_1, \tag{29.7}$$

где $K_{2\delta_1}$ — шар радиуса $2\delta_1$ с центром в точке M_1.

Из неравенства (29.6), в силу (29.7), получаем

$$\left|\frac{v_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}\right|<6\pi\delta_1. \tag{29.8}$$

Оценивая $X_1(M)$, будем иметь

$$|X_1|=\left|\iiint\limits_{K_{\delta_1}}\rho(N)\frac{x-\xi}{r^3}\,d\tau\right|<$$
$$<C\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr=4\pi C\delta_1. \tag{29.9}$$

Зададим теперь малое положительное число ε и возьмем радиус δ_1 шара K_{δ_1} столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$6\pi C\delta_1<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{29.10}$$

Тогда будем иметь

$$\left|\frac{v_1(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_1(x,\ y,\ z)}{\Delta x}-X_1\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3} \tag{29.11}$$

для всех точек M_1, лежащих внутри шара K_{δ_1}.

Для третьего слагаемого в равенстве (29.5) мы имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v_2(x+\Delta x,\ y,\ z)-v_2(x,\ y,\ z)}{\Delta x}=X_2,$$

так как точки M_1 и M лежат вне области D_2. Следовательно, для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое δ_2, что

$$\left| \frac{v_2(x+\Delta x, y, z) - v_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (29.12)$$

как только $|\Delta x| < \delta_2$. Выбирая, наконец, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, мы из равенства (29.5), в силу (29.11) и (29.12), получим

$$\left| \frac{v(x+\Delta x, y, z) - v(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Тем самым доказано, что $\frac{\partial v}{\partial x} = X$. Аналогично доказываются и остальные равенства $\frac{\partial v}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial v}{\partial z} = Z$.

Теорема 2. *Если плотность $\rho(N)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и имеет непрерывные производные первого порядка внутри D, то потенциал объема* (29.1) *имеет непрерывные производные второго порядка внутри D и удовлетворяет внутри D уравнению Пуассона*

$$\Delta v(M) = -4\pi\rho(M). \quad (29.13)$$

Доказательство. Возьмем внутри области D произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть K_δ — шар радиуса δ с центром M_0, лежащий целиком внутри D, и пусть D_1 — часть области D, лежащая вне K_δ, так что $D = D_1 + K_\delta$. Разобьем потенциал объема (29.1) на два слагаемых:

$$v(M) = \iiint\limits_{D_1} \frac{\rho(N)}{r}\, d\tau + \iiint\limits_{K_\delta} \frac{\rho(N)}{r}\, d\tau = v_1(M) + v_0(M). \quad (29.14)$$

В силу теоремы 1 имеем

$$\frac{\partial v(M)}{\partial x} = \iiint\limits_{D_1} \rho(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau + \iiint\limits_{K_\delta} \rho(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right).$$

Тогда

$$\frac{\partial v(M)}{\partial x} = \iiint\limits_{D_1} \rho(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau - \iiint\limits_{K_\delta} \rho(N) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, получим

$$\frac{\partial v(M)}{\partial x} = \iiint\limits_{D_1} \rho(N) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau + \iiint\limits_{K_\delta} \frac{\partial \rho(N)}{\partial \xi} \frac{1}{r}\, d\tau - \iint\limits_{S_\delta} \frac{\rho(N)\cos(n\xi)}{r}\, dS, \quad (29.15)$$

где S_δ есть поверхность шара K_δ, n — направление внешней нормали к S_δ в точке N. Первое слагаемое справа в (29.15) есть собственный интеграл для точек M, лежащих внутри K_δ, и он имеет внутри K_δ производные всех порядков. То же можно утверждать относительно третьего слагаемого, так как точка N лежит на поверхности S_δ, а точка M внутри K_δ. Второе слагаемое есть потенциал объема с непрерывной плотностью $\frac{\partial \rho(N)}{\partial \xi}$, и в силу теоремы 1 он имеет непрерывные производные первого порядка во всем пространстве. Таким образом, можно утверждать, что $\frac{\partial v(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка внутри K_δ. В силу произвола выбора точки M_0 внутри D, можно утверждать, что $\frac{\partial v(M)}{\partial x}$ имеет непрерывные производные первого порядка везде внутри области D. Применяя те же рассуждения к $\frac{\partial v(M)}{\partial y}$ и $\frac{\partial v(M)}{\partial z}$, можно утверждать, что $v(M)$ имеет внутри D непрерывные производные второго порядка.

Покажем теперь, что объемный потенциал $v(M)$ удовлетворяет внутри области D уравнению Пуассона. Обратимся снова к формулам (29.14) и (29.15). Потенциал

$v_1(M)$ объемных масс по области D_1 есть гармоническая функция внутри шара K_δ, так как K_δ лежит вне D_1, т. е. $\Delta v_1(M)=0$ внутри K_δ и, следовательно, $\Delta v(M)=$ $=\Delta v_0(M)$ внутри шара K_δ. Таким образом, для составления $\Delta v(M)$ достаточно продифференцировать по x под знаком интеграла те члены в (29.15), в которых интегрирование совершается по K_δ и S; составить аналогичные выражения для производных второго порядка по y и z и сложить все три производные. Составив таким образом $\Delta v(M)$ внутри K_δ, возьмем его значение в центре $M_0(x_0, y_0, z_0)$ шара K. Мы получим

$$\Delta v(M_0)=\iiint\limits_{K_\delta}\left[\frac{\partial\rho(N)}{\partial\xi}\frac{\xi-x_0}{r_0^3}+\frac{\partial\rho(N)}{\partial\eta}\frac{\eta-y_0}{r_0^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\rho(N)}{\partial\zeta}\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\right]d\tau-\iint\limits_{S_\delta}\rho(N)\left[\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n\xi)+\right.$$
$$\left.+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n\eta)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n\zeta)\right]dS, \qquad (29.16)$$

где

$$r_0=\sqrt{(x_0+\xi)^2+(y_0-\eta)^2+(z_0-\zeta)^2}.$$

Формула (29.16) справедлива при любом выборе радиуса δ, лишь бы шар K_δ лежал внутри D, и величина $\Delta v(M_0)$ не зависит, очевидно, от выбора δ. Будем стремить δ к нулю. Докажем, что при этом тройной интеграл будет стремиться к нулю. Действительно, пусть $m=\max\left|\frac{\partial\rho(N)}{\partial\xi}\right|$ в некотором фиксированном достаточно малом шаре K_{δ_0}, тогда при $\delta\leqslant\delta_0$ и принимая во внимание, что $\frac{|\xi-x_0|}{r_0}\leqslant 1$, получим

$$\left|\iiint\limits_{K_\delta}\frac{\partial\rho(N)}{\partial\xi}\frac{\xi-x_0}{r_0^3}d\tau\right|\leqslant m\iiint\limits_{K_\delta}\frac{d\tau}{r_0^2}.$$

Вводя сферические координаты с центром в точке M_0, будем иметь

$$\left|\iiint\limits_{K_\delta}\frac{\partial\rho(N)}{\partial\xi}\frac{\xi-x_0}{r_0^3}d\tau\right|\leqslant\int\limits_0^\delta\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=4\pi m\delta.$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые в тройном интеграле. Следовательно, тройной интеграл в формуле (29.16) стремится к нулю при $\delta\to 0$.

Рассмотрим теперь интеграл по сфере S_δ в формуле (29.16). Так как внешняя нормаль n направлена по радиусу сферы S_δ, то

$$\frac{\xi-x_0}{r_0^3}\cos(n\xi)+\frac{\eta-y_0}{r_0^3}\cos(n\eta)+\frac{\zeta-z_0}{r_0^3}\cos(n\zeta)=$$
$$=\frac{1}{r_0^2}\left[\cos^2(n\xi)+\cos^2(n\eta)+\cos^2(n\zeta)\right]=\frac{1}{r_0^2}$$

и, следовательно, интеграл по сфере S_δ может быть записан в виде

$$\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_\delta}\rho(N)\,dS$$

или, применяя теорему о среднем,

$$\frac{1}{\delta^2}\iint\limits_{S_\delta}\rho(N)\,dS=4\pi\rho(N_\delta),$$

где N_δ — некоторая точка на сфере S_δ. При $\delta\to 0$ точка N_δ стремится к точке M_0 и интеграл по сфере S_δ стремится к $4\pi\rho(M_0)$. Таким образом, формула (29.16) в пределе при $\delta\to 0$ дает

$$\Delta v(M_0)=-4\pi\rho(M_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $f(M)$ непрерывна в замкнутой области D и имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри D, то уравнение Пуассона

$$\Delta v(M)=-f(M)$$

имеет частное решение

$$v(M)=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\frac{f(N)}{r}d\tau \qquad (r=|MN|).$$

§ 30. Поверхности Ляпунова

Для возможности строгого установления свойств потенциалов простого и двойного слоя необходимо подчинить ряду требований те поверхности, на которых расположены эти слои.

Будем называть замкнутую поверхность S *поверхностью Ляпунова*, если выполнены следующие три условия:

1) В каждой точке поверхности S существует касательная плоскость.

2) Существует такое $d > 0$ одно и то же для всех точек поверхности, что если N_0 — любая точка S, то всякая сфера с центром N_0 радиуса d или меньшего делит S на две части, из которых одна заключается внутри, а другая вне сферы, и прямые, параллельные нормали к S в точке N_0, пересекают часть S, находящуюся внутри сферы, не более чем в одной точке.

3) Если θ — острый угол, образованный нормалями к S в двух ее точках N_1 и N_2, и r_{12} — расстояние между этими двумя точками, то существуют два положительных числа a и $\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$, не зависящих от выбора точек N_1 и N_2 таких, что имеет место неравенство

$$\theta \leqslant a r_{12}^{\alpha} \tag{30.1}$$

при любых положениях N_1 и N_2 на S.

Условие 1) дает возможность в каждой точке N_0 поверхности Ляпунова построить местную прямоугольную систему координат XYZ, беря точку N_0 за начало координат, касательную плоскость в точке N_0 за плоскость XY и нормаль к поверхности в точке N_0 за ось OZ. Условие 2) показывает, что в этой местной системе координат уравнение части поверхности S, заключенной внутри сферы C_0 с центром в точке N_0 и радиусом d, может быть представлено в виде, разрешенном относительно ζ:

$$\zeta = f(\xi, \eta). \tag{30.2}$$

Через (ξ, η, ζ) мы будем обозначать всегда координаты переменной точки N поверхности S, а через (x, y, z) — координаты любой точки M пространства. Из условия

3) следует, что частные производные f'_ξ, f'_η, существование которых обеспечено условием 1), являются непрерывными функциями ξ и η. В дальнейшем будем считать, что d взято достаточно малым. Например, можно принять условие

$$a d^{\alpha} \leqslant 1, \tag{30.3}$$

так что угол θ_0 между нормалью в N_0 и нормалью в любой точке N куска поверхности S, находящегося внутри сферы C_0, не достигает $\frac{\pi}{2}$. Обозначая через r_0 расстояние $|\overline{N_0N}|$ $(r_0 \leqslant d)$, будем иметь

$$\cos\theta_0 \geqslant 1 - \frac{1}{2}\theta_0^2 \geqslant 1 - \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha}, \tag{30.4}$$

откуда

$$\frac{1}{\cos\theta_0} = \sqrt{1 + f_\xi^2 + f_\eta^2} \leqslant 1 + a^2 r_0^{2\alpha} \leqslant 2 \tag{30.5}$$

и, следовательно, в силу (30.3)

$$f_\xi^2 + f_\eta^2 \leqslant 2a^2 r_0^{2\alpha} + a^4 r_0^{4\alpha} \leqslant 3a^2 r_0^{2\alpha} \tag{30.6}$$

и

$$|f_\xi| \leqslant \sqrt{3} a r_0^{\alpha}, \quad |f_\eta| \leqslant \sqrt{3} a r_0^{\alpha}. \tag{30.7}$$

Вводим полярные координаты

$$\xi = \rho_0 \cos\vartheta, \quad \eta = \rho_0 \sin\vartheta \quad \left(\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right).$$

Мы имеем

$$\zeta_{\rho_0}^2 = (f_\xi \cos\vartheta + f_\eta \sin\vartheta)^2 \leqslant f_\xi^2 + f_\eta^2,$$

откуда, в силу (30.6),

$$|\zeta_{\rho_0}| \leqslant \sqrt{3}\, a r_0^{\alpha}, \tag{30.8}$$

или имеем грубую оценку

$$|\zeta_{\rho_0}| \leqslant \sqrt{3} \qquad (a r_0^{\alpha} \leqslant 1),$$

откуда

$$|\zeta| \leqslant \sqrt{3}\, \rho_0, \tag{30.9}$$

но

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 + \zeta^2} \leqslant 2\rho_0. \tag{30.10}$$

Из неравенства (30.8) имеем

$$|\zeta_{\rho_0}| \leqslant \sqrt{3}\, a 2^{\alpha} \rho_0^{\alpha},$$

откуда

$$|\zeta| \leqslant \frac{\sqrt{3}\cdot 2^{\alpha}}{\alpha+1}\, a\rho_0^{\alpha+1},$$

или, тем более,

$$|\zeta| \leqslant 2a\rho_0^{\alpha+1},$$

так как $2^{\alpha} \leqslant \alpha+1$ при $\alpha \leqslant 1$. Из (30.4) и (30.10) имеем

$$1-\cos\theta_0 \leqslant \frac{1}{2}a^2 r_0^{2\alpha} \leqslant 2^{2\alpha-1}a^2\rho_0^{2\alpha}.$$

Дадим оценку для $\cos(\boldsymbol{n}X)$, $\cos(\boldsymbol{n}Y)$, $\cos(\boldsymbol{n}Z)$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке N.

На основании (30.7) и (30.10) имеем

$$|\cos(\boldsymbol{n}X)| = \frac{|f_{\xi}|}{\sqrt{1+f_{\xi}^2+f_{\eta}^2}} < |f_{\xi}| \leqslant \sqrt{3}\, a r_0^{\alpha} \leqslant \sqrt{3}\cdot 2^{\alpha} a\rho_0^{\alpha}.$$

Аналогично

$$|\cos(\boldsymbol{n}Y)| < \sqrt{3}\cdot 2^{\alpha} a\rho_0^{\alpha}.$$

Мы имеем, далее,

$$\cos(\boldsymbol{n}Z) = \cos\theta_0$$

и, в силу (30.5),

$$|\cos(\boldsymbol{n}Z)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Выпишем вместе все оценки, которые мы получили выше:

$$|\zeta| \leqslant C\rho_0^{\alpha+1}, \quad |\cos(\boldsymbol{n}X)| \leqslant C\rho^{\alpha}, \quad |\cos(\boldsymbol{n}Y)| \leqslant C\rho^{\alpha},$$
$$1-\cos(\boldsymbol{n}Z) \leqslant C\rho_0^{2\alpha}, \quad |\cos(\boldsymbol{n}Z)| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{30.11}$$

где C — постоянная, равная наибольшей из постоянных, входящих в соответствующие оценки. Указанные оценки, очевидно, сохраняются, если в правых частях заменить ρ_0 на r_0.

§ 31. Потенциал двойного слоя

Рассмотрим потенциал двойного слоя непрерывной плотности $\mu(N)$, распределенной на поверхности Ляпунова,

$$w(M) = -\int_S\int \mu(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS, \tag{31.1}$$

где производная берется по направлению внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к поверхности S в точке $N(\xi, \eta, \zeta)$, вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от точки $M(x, y, z)$ к точке $N(\xi, \eta, \zeta)$, $\varphi = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$.

Потенциал двойного слоя имеет везде вне S производные всех порядков и удовлетворяет уравнению Лапласа. Покажем, что потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности. Возьмем начало координат внутри конечной области D, ограниченной поверхностью S. Тогда

$$MN \geqslant OM - ON$$

или

$$r \geqslant R - ON.$$

Обозначим через L наибольшее расстояние точек поверхности от начала координат. Тогда

$$r \geqslant R - L.$$

Будем считать, что точка M настолько удалена от начала координат, что $R > 2L$, т. е. $L < \frac{R}{2}$, тогда $r > \frac{R}{2}$ или $\frac{1}{r} < \frac{2}{R}$. Теперь

$$|w(M)| \leqslant \int_S\int |\mu(N)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS <$$
$$< \frac{4}{R^2}\int_S\int |\mu(N)|\,dS = \frac{A}{R^2},$$

где

$$A = 4\int_S\int |\mu(N)|\,dS.$$

Следовательно, потенциал двойного слоя стремится к нулю на бесконечности как $\frac{1}{R^2}$.

Пусть теперь точка M совпадает с некоторой точкой N_0, лежащей на поверхности S. Тогда $r_0 = |\overline{N_0N}|$ обращается в нуль при совпадении точек N и N_0, и интеграл (31.1) есть в этом случае несобственный интеграл. Покажем, что он сходится. Для сходимости интеграла (31.1) достаточно исследовать подынтегральную функцию на куске σ_0 поверхности S, находящемся внутри сферы C_0 с центром в точке N_0 радиуса d. По оставшейся части поверхности интеграл имеет конечное значение (точка N_0 лежит вне области интегрирования). В точке N_0 построим местную систему координат. Тогда уравнение куска σ_0 поверхности S можно представить в виде

$$\zeta = f(\xi, \eta).$$

В местной системе координат точка N_0 имеет координаты (0, 0, 0), а точка N координаты (ξ, η, ζ) и $r_0 = |\overline{N_0N}| = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

Найдем выражение для $\cos\varphi_0 = \cos(\boldsymbol{r}_0\boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{r}_0$ есть направление $\overline{N_0N}$:

$$\cos\varphi_0 = \cos(\boldsymbol{r}_0X)\cos(\boldsymbol{n}X) + \cos(\boldsymbol{r}_0Y)\cos(\boldsymbol{n}Y) + \\ + \cos(\boldsymbol{r}_0Z)\cos(\boldsymbol{n}Z),$$

но

$$\cos(\boldsymbol{r}_0X) = \frac{\xi}{r_0}, \quad \cos(\boldsymbol{r}_0Y) = \frac{\eta}{r_0}, \quad \cos(\boldsymbol{r}_0Z) = \frac{\zeta}{r_0}.$$

Следовательно,

$$\cos\varphi_0 = \frac{\xi}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}X) + \frac{\eta}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}Y) + \frac{\zeta}{r_0}\cos(\boldsymbol{n}Z).$$

Принимая во внимание оценки (30.11), а также очевидные неравенства $|\xi| \leqslant \rho_0$, $|\eta| \leqslant \rho_0$, $\rho_0 \leqslant r_0$ $(\rho_0 = \sqrt{\xi^2+\eta^2})$, получим

$$\left|\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\right| \leqslant \frac{3C\rho_0^\alpha}{\rho_0^2} = \frac{b}{\rho_0^{2-\alpha}}, \tag{31.2}$$

где b — постоянная. Кроме того, для непрерывной функции имеем оценку

$$|\mu(N)| \leqslant A \qquad (N \in S). \tag{31.3}$$

Заменяя интеграл по σ_0 интегралом по проекции σ_0' куска σ_0 на плоскость XY местной системы координат, получим

$$\int\limits_{\sigma}\int \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\,dS = \int\limits_{\sigma_0'}\int \mu(\xi, \eta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\,\frac{d\xi\,d\eta}{\cos\theta_0}.$$

В силу оценок (30.11), (31.2) и (31.3), имеем следующую оценку подынтегральной функции:

$$\left|\mu(\xi, \eta)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2}\,\frac{1}{\cos\theta_0}\right| \leqslant \frac{2Ab}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

откуда и следует сходимость интеграла (31.1), если точка M лежит на поверхности S. Таким образом, *потенциал двойного слоя* (31.1) *определен во всем пространстве.*

Если точка M лежит на поверхности S, например, совпадает с точкой N_0 поверхности S, то значение интеграла (31.1) в этой точке называют *прямым значением* потенциала двойного слоя. Пусть теперь точка $M(x, y, z)$ находится вне поверхности S и пусть точка M приближается к точке $N_0 \in S$. Если при этом приближении окажется, что потенциал двойного слоя $w(M)$ стремится к некоторому конечному пределу, то мы будем говорить, что потенциал двойного слоя принимает в точке N_0 *предельное значение.* Предельные и прямые значения потенциала двойного слоя, вообще говоря, не совпадают. Далее мы покажем, что предельные значения потенциала двойного слоя $w(M)$, вообще говоря, различны в зависимости от того, извне или изнутри стремится точка M к поверхности S, и эти предельные значения не совпадают с прямыми значениями, т. е. мы покажем, что потенциал двойного слоя (31.1) терпит разрыв при переходе через поверхность S.

Рассмотрим сначала потенциал двойного слоя (31.1), когда $\mu(N)\equiv 1$. Тогда

$$w_1(M)=-\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=\int_S\int\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS. \tag{31.4}$$

Пусть точка M находится вне замкнутой поверхности S *). При этом $\frac{1}{r}$ есть гармоническая функция внутри S с непрерывными производными всех порядков вплоть до S, и, в силу (19.2), мы имеем

$$w_1(M)=-\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=0 \qquad (M \text{ вне } S).$$

Пусть точка M находится внутри S *). Выделим ее малой сферой C_ρ с центром M и радиусом ρ. В части пространства D' между C_ρ и S функция $\frac{1}{r}$ гармоническая, и мы имеем

$$\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS+\int_{C_\rho}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=0.$$

В точках сферы C_ρ внешняя нормаль по отношению к области направлена противоположно радиусу сферы и, следовательно,

$$\left.\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{C_\rho}=-\left.\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\right|_{C_\rho}=\frac{1}{\rho^2},$$

так что предыдущая формула перепишется в виде

$$\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS+\frac{1}{\rho^2}\int_{C_\rho}\int dS=0$$

*) Мы будем говорить, что точка M находится внутри (вне) замкнутой поверхности S, если она принадлежит конечной области D_i (бесконечной области D_e), ограниченной этой поверхностью.

или

$$\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS+4\pi=0,$$

откуда

$$w_1(M)=-\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=4\pi \qquad (M \text{ внутри } S).$$

Положим, наконец, что точка M находится на поверхности S. Найдем прямое значение потенциала (31.4). Проведем малую сферу C_ρ с центром в точке M и радиусом $\rho\leqslant d$. Эта сфера вырезает часть σ поверхности S. Оставшуюся часть поверхности обозначим через $S-\sigma$. Согласно определению несобственных интегралов, имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S-\sigma}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS. \tag{31.5}$$

Пусть C'_ρ — часть поверхности сферы C_ρ, лежащей внутри поверхности S. Рассмотрим область, ограниченную поверхностями $S-\sigma$ и C'_ρ. Так как точка M находится вне этой области, то в этой области $\frac{1}{r}$ функция гармоническая и, следовательно,

$$\int_{S-\sigma}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS+\int_{C'_\rho}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS_\rho=0$$

или, принимая во внимание (31.5), будем иметь

$$\int_S\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS=-\lim_{\rho\to 0}\int_{C'_\rho}\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS_\rho. \tag{31.6}$$

Введем сферические координаты с центром в точке M. По-прежнему имеем $\left.\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right|_{C'_\rho}=\frac{1}{\rho^2}$ и $dS_\rho=\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

Тогда

$$\int\limits_{C'_\rho}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS_\rho = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\theta(\varphi)}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} [1+\cos\theta(\varphi)]\, d\varphi = 2\pi + \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi)\, d\varphi. \quad (31.7)$$

Покажем, что

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_0^{2\pi} \cos\theta(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Введем местную систему координат с началом в точке M, направив ось Z по нормали к S в точке M, а за плоскость XY возьмем касательную плоскость к поверхности S в точке M. Тогда

$$\cos\theta(\varphi) = \frac{\zeta}{\rho}.$$

Отметим, что точки $(\rho, \varphi, \theta(\varphi))$ лежат на линии пересечения сферы C_ρ с поверхностью Ляпунова S, а тогда для координат ζ точек этой линии имеет место оценка $|\zeta| \leqslant C\rho^{1+\alpha}$. Следовательно,

$$|\cos\theta(\varphi)| \leqslant C\rho^\alpha,$$

откуда следует, что $\cos\theta(\varphi)\to 0$ при $\rho\to 0$ равномерно, т. е. независимо от точки M, и $\int\limits_0^{2\pi}\cos\theta(\varphi)\,d\varphi\to 0$ при $\rho\to 0$. Таким образом, из формулы (31.7) имеем

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C'_\rho}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS_\rho = 2\pi$$

и, окончательно, из (31.6) получаем

$$\int\limits_S\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = -2\pi \quad (M \text{ лежит на } S).$$

Мы имеем, таким образом,

$$w_1(M) = -\int\limits_S\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS = \begin{cases} 0 & (M \text{ вне } S), \\ 2\pi & (M \text{ на } S), \\ 4\pi & (M \text{ внутри } S). \end{cases} \quad (31.8)$$

Интеграл $w_1(M)$ называется *интегралом Гаусса*. Интеграл Гаусса представляет собой разрывную функцию.

Мы в дальнейшем будем предполагать поверхность S такой, что при любом положении точки M выполняется неравенство

$$\int\limits_S\int \frac{|\cos\varphi|}{r^2} dS \leqslant K, \quad (31.9)$$

где K — определенное положительное число.

Формулы (31.8) показывают, что при $\mu(N)\equiv 1$ потенциал двойного слоя испытывает разрыв непрерывности, когда точка пересекает поверхность S. Покажем, что это имеет место и для произвольной непрерывности плотности $\mu(N)$.

Теорема. *Потенциал двойного слоя $w(M)$ имеет пределы при стремлении точки M к точке N_0 поверхности S извне или изнутри. Если предел значений $w(M)$ извне обозначать через $w_e(N_0)$, а предел изнутри — через $w_i(N_0)$, то имеют место формулы*

$$w_e(N_0) = \int\limits_S\int \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS - 2\pi\mu(N_0) =$$
$$= w(N_0) - 2\pi\mu(N_0),$$
$$w_i(N_0) = \int\limits_S\int \mu(N)\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} dS + 2\pi\mu(N_0) = \quad (31.10)$$
$$= w(N_0) + 2\pi\mu(N_0),$$

где φ_0 есть угол, образованный направлением $r_0 = \overline{N_0N}$ с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$ к поверхности S в переменной точке N.

Доказательство. Пусть N_0 — фиксированная точка поверхности S. Потенциал двойного слоя $w(M)$ представим в виде

$$w(M)=\int_S\int [\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}dS+\mu(N_0)\int_S\int \frac{\cos\varphi}{r^2}dS=$$
$$=w_0(M)+\mu(N_0)w_1(M). \quad (31.11)$$

Пусть $M\to N_0$ извне или изнутри поверхности S. Поведение потенциала $w_1(M)$ известно — это интеграл Гаусса. Рассмотрим потенциал двойного слоя $w_0(M)$. Докажем, что $w_0(M)$ сохраняет непрерывность, когда точка M пересекает поверхность S в точке N_0. Пусть $\varepsilon>0$ — заданное число. В силу непрерывности функции $\mu(N)$ можно выделить такой участок σ_0 поверхности S, содержащей точку N_0 внутри себя, на которой выполняется неравенство

$$|\mu(N)-\mu(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4K}, \quad (31.12)$$

где K — постоянная, входящая в условие (31.9).

Разбивая S на два куска σ_0 и $S-\sigma_0$, можем написать

$$w_0(M)=w_0^{(1)}(M)+w_0^{(2)}(M), \quad (31.13)$$

где

$$\left.\begin{aligned} w_0^{(1)}(M)&=\int_{\sigma_0}\int[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS,\\ w_0^{(2)}(M)&=\int_{S-\sigma_0}\int[\mu(N)-\mu(N_0)]\frac{\cos\varphi}{r^2}\,dS.\end{aligned}\right\} \quad (31.14)$$

При любом положении точки M мы имеем

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\int_{\sigma_0}\int|\mu(N)-\mu(N_0)|\frac{|\cos\varphi|}{r^2}\,dS,$$

откуда, в силу (31.9) и (31.12), имеем

$$|w_0^{(1)}(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}. \quad (31.15)$$

Из (31.13) следует

$$w_0(M)-w_0(N_0)=w_0^{(1)}(M)-w_0^{(1)}(N_0)+w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0),$$

откуда

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant|w_0^{(1)}(M)|+$$
$$+|w_0^{(1)}(N_0)|+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|$$

или, в силу (31.15),

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|. \quad (31.16)$$

В потенциале двойного слоя $w_0^{(2)}(M)$ интегрирование совершается по $S-\sigma_0$, а точка N_0 лежит внутри σ_0, и потому функция $w_0^{(2)}(M)$ в точке N_0 и ее некоторой окрестности непрерывна.

Таким образом, для всех M, достаточно близких к N_0, мы имеем

$$|w_0^{(2)}(M)-w_0^{(2)}(N_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и, в силу (31.16),

$$|w_0(M)-w_0(N_0)|<\varepsilon,$$

откуда и следует, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, непрерывность функции $w_0(M)$ в точке N_0. Итак,

$$\lim_{M\to N_0}w_0(M)=w_0(N_0). \quad (31.17)$$

Пусть $M\to N_0$ изнутри поверхности S. Тогда, принимая во внимание (31.8) и (31.17), из (31.11) получим

$$\lim_{M\to N_0}w(M)=w_0(N_0)+4\pi\mu(N_0). \quad (31.18)$$

Пусть в формуле (31.11) точка M совпадает с точкой N_0, лежащей на S. Тогда, в силу (31.8), будем иметь

$$w(N_0)=w_0(N_0)+2\pi\mu(N_0). \qquad (31.19)$$

Сравнивая (31.18) и (31.19), получим

$$w_i(N_0)=w(N_0)+2\pi\mu(N_0). \qquad (31.20)$$

Пусть теперь $M \to N_0$ извне поверхности S. Точно так же получим

$$\lim_{M\to N_0} w(M)=w_e(N_0)=w_0(N_0),$$

откуда, в силу (31.19), имеем

$$w_e(N_0)=w(N_0)-2\pi\mu(N_0). \qquad (31.21)$$

Из формул (31.20) и (31.21) непосредственно получается величина скачка потенциала двойного слоя в любой точке N_0 поверхности S:

$$w_i(N_0)-w_e(N_0)=4\pi\mu(N_0). \qquad (31.22)$$

Замечание. Пусть точка M находится на S. Обозначим ее через N. Тогда из (31.11), в силу (31.8), имеем

$$w(N)=w_0(N)+2\pi\mu(N_0).$$

Будем теперь точку N вдоль поверхности S стремить к точке N_0. В силу доказанной непрерывности функции $w_0(N)$ будем иметь

$$\lim_{N\to N_0} w(N)=w_0(N_0)+2\pi\mu(N_0).$$

Сравнивая это с (31.19), получим

$$\lim_{N\to N_0} w(N)=w(N_0),$$

откуда следует, что потенциал двойного слоя $w(M)$ есть непрерывная на поверхности S функция. Принимая во внимание формулы (31.10) и непрерывность функции $w(N_0)$ при перемещении N_0 на S, мы можем утверждать, что потенциал двойного слоя $w(M)$ есть непрерывная функция внутри S и вплоть до S. Точно так же она непрерывна вне S и вплоть до S.

§ 32. Потенциал простого слоя

Рассмотрим потенциал простого слоя непрерывной плотности $\mu(N)$, распределенной по поверхности Ляпунова:

$$u(M)=\iint_S \frac{\mu(N)}{r}\,dS \qquad (r=|\overline{MN}|). \qquad (32.1)$$

Во всех точках $M(x, y, z)$ пространства, не принадлежащих поверхности S, потенциал простого слоя имеет производные любого порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа. Совершенно так же, как и в § 31, можно показать, что потенциал простого слоя стремится к нулю на бесконечности, как $\frac{1}{R}$, где $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Теорема. *Потенциал простого слоя с непрерывной плотностью есть функция, непрерывная во всем пространстве.*

Доказательство. Потенциал простого слоя $u(M)$ непрерывен в точках M, не принадлежащих поверхности S. Покажем, что $u(M)$ непрерывна и в точках поверхности S. Для этого нужно доказать, что интеграл (32.1) сходится равномерно в точках поверхности S. Пусть N_0 — произвольная точка поверхности S. В точке N_0 построим местную систему координат, как указано выше. Пусть $\varepsilon>0$ — заданное число и σ_1 — часть поверхности S, определенная условием $\xi^2+\eta^2\leqslant d_1^2$ $\left(d_1\leqslant\frac{d}{4}\right)$. Покажем, что можно выбрать d_1 настолько малым, чтобы при любом положении M в некоторой окрестности точки N_0 выполнялось неравенство

$$\left|\iint_{\sigma_1} \frac{\mu(N)}{r}\,dS\right|\leqslant\varepsilon. \qquad (32.2)$$

Мы имеем

$$\left|\iint_{\sigma_1} \frac{\mu(N)\,dS}{r}\right|\leqslant 2A\iint_{\sigma_1'} \frac{d\xi\,d\eta}{\rho_1}, \qquad (32.3)$$

где σ_1' — круг радиуса d_1 с центром в N_0, ρ_1 — длина проекции M_1N_1 отрезка MN на касательную плоскость к

S в точке N_0; $|\mu(N)| \leqslant A$. Положим, что точка M находится внутри сферы радиуса d_1 с центром в N_0. При этом точка M_1 принадлежит кругу σ_1', и если мы на плоскости (ξ, η) возьмем круг σ_1'' радиуса $2d_1$ с центром в M_1, то он будет содержать весь круг σ_1', так что в силу (32.3)

$$\left|\int_{\sigma_1}\int \frac{\mu(N)}{r}\,dS\right| \leqslant 2A \int_{\rho_1 \leqslant 2d_1}\int \frac{d\xi\,d\eta}{\rho_1} = 2A\int_0^{2\pi}\int_0^{2d_1} \frac{\rho_1\,d\rho_1\,d\varphi}{\rho_1} = 8\pi A d_1.$$

Эта оценка не зависит от положения точки N_0 на поверхности S. Фиксируя теперь d_1 так, чтобы $8\pi A d_1 < \varepsilon$, мы получаем оценку (32.2) при любом положении точки M в шаре радиуса d_1 с центром в N_0. Это и означает, что интеграл (32.1) сходится равномерно в точке N_0, а следовательно, $u(M)$ непрерывна в точке N_0, лежащей на поверхности S, что и требовалось доказать.

Нормальная производная потенциала простого слоя. Пусть $\boldsymbol{n}_0$ — направление внешней нормали в некоторой точке N_0 поверхности S. Считая, что M лежит не на S, составим производную от потенциала простого слоя (32.1) по направлению $\boldsymbol{n}_0$. От M зависит только множитель $\frac{1}{r}$, и мы можем дифференцировать под знаком интеграла

$$\frac{\partial u(M)}{\partial n_0} = \int_S\int \mu(N)\frac{\partial}{\partial n_0}\left(\frac{1}{r}\right)dS = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos\psi}{r^2}\,dS. \tag{32.4}$$

Отметим разницу между последним интегралом и потенциалом двойного слоя (31.1). В интеграле (31.1) $\varphi = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$, где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали в точке N, которая является переменной точкой интегрирования, а в интеграле (32.4) $\psi = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}_0)$, где $\boldsymbol{n}_0$ — единичный вектор внешней нормали в фиксированной точке N_0. В обоих случаях $\boldsymbol{r} = \overline{MN}$.

Покажем, что интеграл (32.4) существует и в том случае, когда M совпадает с точкой N_0, упомянутой выше. В этом последнем случае мы будем записывать интеграл (32.4) в виде

$$\int_S\int \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\,dS = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0)}{r_0^2}\,dS, \tag{32.5}$$

где $r_0 = |\overline{N_0N}|$, а угол $\psi_0 = (\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}_0)$ есть угол между направлениями $\overline{N_0N}$ и $\boldsymbol{n}_0$. Для этого достаточно рассмотреть его на участке σ_0 поверхности S, содержащем N_0 внутри себя. В точке N_0 построим местную систему координат. Через (x, y, z) обозначим координаты точки M, а через (ξ, η, ζ) — координаты точки N в местной системе координат. Тогда

$$\int_{\sigma_0}\int \mu(N)\frac{\zeta - z}{r^3}\,dS.$$

Если M совпадает с N_0, то $z = 0$, и интеграл принимает вид

$$\int_{\sigma_0}\int \mu(N)\frac{\zeta}{r_0^3}\,dS = \int_{\sigma_0'}\int \mu(\xi, \eta)\frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3\cos(nz)}\,d\xi\,d\eta,$$

где σ_0' — проекция σ_0 на касательную плоскость к поверхности S в точке N_0, а $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ — уравнение участка σ_0 поверхности S в местной системе координат. В силу оценок

$$|\zeta| \leqslant c\rho_0^{1+\alpha}, \quad |\cos(nz)| \geqslant \frac{1}{2},$$
$$r_0 \geqslant \rho_0, \quad |\mu(N)| \leqslant A,$$

имеем следующую оценку подынтегральной функции:

$$\left|\mu(\xi, \eta)\frac{\zeta(\xi, \eta)}{r_0^3\cos(nz)}\right| \leqslant \frac{2CA}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

откуда и следует сходимость интеграла (32.4), если точка M совпадает с точкой N_0, лежащей на поверхности S.

Перейдем теперь к выяснению поведения нормальной производной потенциала простого слоя (32.4) при приближении M к N_0 по нормали изнутри или извне поверхности S. Мы покажем, что нормальная производная потенциала простого слоя имеет определенные пределы, и для этих пределов имеют место формулы

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\,dS + 2\pi\mu(N_0),$$
$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\,dS - 2\pi\mu(N_0). \tag{32.6}$$

Для доказательства формул (32.6) составим разность $F(M)$ интеграла (32.4) и потенциала двойного слоя с той же плотностью $\mu(N)$:

$$F(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial n_0} - w(M) = \int_S\int \mu(N)\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\,dS. \tag{32.7}$$

Написанный интеграл имеет смысл, если M находится не на S или если M совпадает с N_0, лежащей на S. Покажем, что интеграл $F(M)$ имеет предел, когда точка $M \to N_0$ по нормали n_0, и что этот предел равен значению интеграла $F(M)$ при $M = N_0$. В точке N_0 построим местную систему координат. Пусть σ_1 — часть поверхности S, определяемая условием $\xi^2 + \eta^2 \leqslant d_1^2\ \left(d_1 \leqslant \frac{d}{2}\right)$. Точка M находится на нормали к S в точке N_0, т. е. в местной системе координат $x = 0$, $y = 0$; (ξ, η, ζ) — координаты точки N в местной системе координат. При этом мы имеем

$$\cos\varphi = \frac{\xi}{r}\cos(nX) + \frac{\eta}{r}\cos(nY) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(nz),$$
$$\cos\psi = \frac{\zeta - z}{r},$$

и, следовательно,

$$\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2} = -\frac{\xi}{r^3}\cos(nX) - \frac{\eta}{r^3}\cos(nY) - \frac{\zeta - z}{r}(\cos(nZ) - 1).$$

Принимая во внимание оценки

$$|\cos(nX)| \leqslant C\rho_0^\alpha, \quad |\cos(nY)| \leqslant C\rho_0^\alpha,$$
$$1 - \cos(nZ) \leqslant C\rho_0^{2\alpha},$$
$$|\xi| \leqslant \rho_0, \quad |\eta| \leqslant \rho_0, \quad r \geqslant \rho_0, \quad |\zeta - z| \leqslant r,$$

где $\rho_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — длина проекции $\overline{MN}$ на плоскость XY, получим

$$\frac{|\cos\psi - \cos\varphi|}{r^2} \leqslant \frac{b_1}{\rho_0^{2-\alpha}},$$

где b_1 — постоянная. Принимая во внимание, что $|\mu(N)| \leqslant A$, будем иметь

$$\left|\int_{\sigma_1}\int \mu(N)\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\,dS\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\rho_0 \leqslant d_1}\int \frac{2Ab_1}{\rho_0^{2-\alpha}}\,d\xi\,d\eta = 2Ab_1\int_0^{2\pi}\int_0^{d_1}\frac{d\rho_0\,d\varphi}{\rho_0^{1-\alpha}} = b_2 d_1^\alpha,$$

где b_2 — постоянная. Эта оценка имеет место при любом положении точки M на нормали к S в точке N_0, причем M может и совпадать с N_0. Отсюда следует, что если $\varepsilon > 0$ задано, то, фиксируя d_1 таким, чтобы $b_2 d^\alpha < \frac{\varepsilon}{4}$, будем иметь

$$\left|\int_{\sigma_1}\int \mu(N)\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{r^2}\,dS\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{32.8}$$

Разбивая теперь S на две части σ_1 и $S - \sigma_1$, можем написать

$$F(M) = F^{(1)}(M) + F^{(2)}(M), \tag{32.9}$$

где

$$F^{(1)}(M)=\iint\limits_{\sigma_1}\mu(N)\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\,dS,$$

$$F^{(2)}(M)=\iint\limits_{S-\sigma_1}\mu(N)\frac{\cos\psi-\cos\varphi}{r^2}\,dS.$$

Из (32.9) следует

$$F(M)-F(N_0)=F^{(1)}(M)-F^{(1)}(N_0)+F^{(2)}(M)-F^{(2)}(N_0),$$

откуда

$$|F(M)-F(N_0)|\leqslant$$
$$\leqslant|F^{(1)}(M)|+|F^{(1)}(N_0)|+|F^{(2)}(M)-F^{(2)}(N_0)|$$

или, в силу (32.8),

$$|F(M)-F(N_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+|F^{(2)}(M)-F^{(2)}(N_0)|, \qquad (32.10)$$

если считать, что точка M лежит на нормали к S в точке N_0. В интеграле $F^{(2)}(M)$ интегрирование совершается по $S-\sigma_1$, а точка N_0 лежит внутри σ_1, и потому функция $F^{(2)}(M)$ в точке N_0 и ее некоторой окрестности непрерывна. Таким образом, для всех M, достаточно близких к N_0, имеем

$$|F^{(2)}(M)-F^{(2)}(N_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

и, в силу (32.10),

$$|F(M)-F(N_0)|<\varepsilon,$$

откуда и следует, в силу произвольности $\varepsilon>0$, что

$$\lim_{M\to N_0}F(M)=F(N_0), \qquad (32.11)$$

причем точка $M\to N_0$ по нормали к S в точке N_0 извне или изнутри. Ранее было показано, что потенциал двойного слоя $w(M)$ имеет предел при стремлении M к N_0 изнутри или извне поверхности S. А тогда из (32.7), в силу (32.11), следует, что нормальная производная

потенциала простого слоя (32.4) имеет пределы при стремлении M к N_0 по нормали изнутри или извне поверхности S. Используя (32.11), получим

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i-w_i(N_0)=\iint\limits_{S}\mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\,dS-w(N_0),$$

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e-w_e(N_0)=\iint\limits_{S}\mu(N)\frac{\cos\psi_0}{r_0^2}\,dS-w(N_0),$$

и принимая во внимание формулы (31.10), мы получим формулы (32.6). Из формул (32.6) непосредственно следует величина скачка нормальной производной потенциала простого слоя

$$\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_i-\left(\frac{\partial u(N_0)}{\partial n_0}\right)_e=4\pi\mu(N_0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II—IV, Физматгиз, 1958—1962.
2. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.
3. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
4. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I и II, Гостехиздат, 1951.
5. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1953.
7. Трикоми Ф., Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
8. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1956.
9. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С., Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1955.
10. Смирнов М. М., Задачи по уравнениям математической физики, Физматгиз, 1961.