УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

М. М. СМИРНОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

517.2
С 50
УДК 517.9

Уравнения смешанного типа. Смирнов М. М., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1970

Книга посвящена теории дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа. Автор вводит читателя в современное состояние математических задач, тесно связанных с задачами трансзвуковой газовой динамики.

В книге рассмотрены основные краевые задачи: задача Трикоми, обобщенная задача Трикоми для уравнения Чаплыгина, задача Франкля и видоизмененная задача Трикоми.

Рисунков 10. Библ. 167 назв.

$\frac{2-2-3}{34-70}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Краткий обзор результатов

Уравнениями смешанного типа называются уравнения, которые в одной части рассматриваемой области принадлежат эллиптическому типу, а в другой — гиперболическому; эти части разделены линией (или поверхностью) перехода, на которой уравнение либо вырождается в параболическое, либо не определено. Теория уравнений смешанного типа имеет сравнительно недолгую историю.

Первыми глубокими исследованиями в этой области явились работы Ф. Трикоми, опубликованные в двадцатых годах нашего столетия. Для уравнения

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1.1}$$

которое сейчас называют *уравнением Трикоми*, он изучил следующую основную краевую задачу (задачу Трикоми). Пусть область D ограничена гладкой кривой Γ с концами в точках A и B оси x, расположенной в верхней полуплоскости, и характеристиками l_1 и l_2 уравнения (1.1), выходящими из этих точек и пересекающимися в точке C нижней полуплоскости. Требуется найти решение уравнения (1.1), регулярное *) в D и удовлетворяющее граничному условию: $u = \varphi$ на Γ, $u = \psi$ на l_1. Трикоми [59а] доказал существование и единственность

*) Функция $u(x, y)$ называется *регулярным решением* уравнения (1.1), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $u(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, 2) первые ее производные непрерывны в $\overline{D}$, кроме, быть может, точек A и B, где они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, 3) вторые производные непрерывны в D, кроме, быть может, точек параболической линии, где они могут не существовать, 4) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1) во всех точках $D \setminus AB$.

решения этой задачи в предположении, что кривая Γ оканчивается двумя сколь угодно малой длины дужками AA' и BB' нормальной кривой $(x-x_0)^2+\frac{4}{9}y^3=c^2$, а в остальной части отклоняется от этой кривой наружу. При этом он свел задачу к нахождению функции $\nu(x)=\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial y}$, удовлетворяющей сингулярному уравнению

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt+\\+\int_0^1 K(x,\ t)\,\nu(t)\,dt=F(x), \qquad (1.2)$$

где ядро $K(x,\ t)$ фредгольмовского типа.

Геллерстедт в докторской диссертации [18а] решает задачу Трикоми для уравнения

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-cu=F(x,\ y) \qquad (1.3)$$

при тех же ограничениях на кривую Γ, что и у Трикоми.

В последующей работе [18в] для уравнения

$$y^m\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1.4)$$

(m — натуральное нечетное число) Геллерстедт исследовал краевые задачи, при постановке которых в гиперболической части области D значения искомого решения задаются на двух кусках характеристик PC_1 и PC_2, исходящих из некоторой внутренней точки P отрезка AB, или на кусках характеристик AC_1 и BC_2 (рис. 1). При этом в эллиптической полуплоскости граничные значения задаются на кривой $x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{(m+2)}=1$ $(y>0)$. Следуя идее Трикоми, Геллерстедт сводит решение упомянутых задач к сингулярному интегральному уравнению, а затем, применяя метод Карлемана *), к уравнению Фредгольма.

*) T. Carleman, Sur la resolution de certaines, équations intégrales, Arkiv f. M. A. O. F., Bd. 16, № 26, 1922.

Началом нового этапа в развитии теории уравнений смешанного типа явилась работа Ф. И. Франкля [64а]. В этой работе Ф. И. Франкль показал, что задача истечения сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками (внутри сосуда скорость дозвуковая) сводится к задаче Трикоми для уравнения Чаплыгина

$$K(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (K(0)=0,\ K'(y)>0). \qquad (1.5)$$

В другой работе «К теории сопел Лаваля» он пришел к важному обобщению задачи Трикоми, когда граничные значения искомой функции задаются на кривой Г и на некоторой нехарактеристической дуге AE, расположенной внутри характеристического треугольника и пересекающей каждую характеристику второго семейства не более одного раза. Точка E лежит на характеристике BC уравнения (1.5). В дальнейшем эту задачу будем называть *обобщенной задачей Трикоми.*

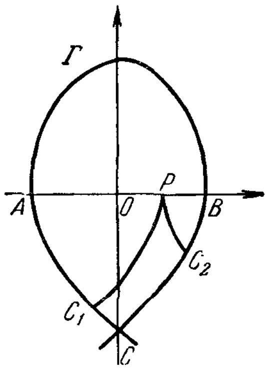

Рис 1.

И. Н. Векуа [14] указал на важность проблемы уравнений смешанного типа в связи с задачами в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

Уравнения, описывающие магнитогидродинамические течения с переходом через скорость звука и скорость Альфена [34], уравнения движения воды в открытом русле, когда скорость течения становится больше скорости распространения поверхностных волн [64г], также принадлежат к смешанному типу.

М. А. Лаврентьев [37] для упрощения исследования краевых задач для уравнения смешанного типа предложил исследовать модельное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\operatorname{sgn} y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \qquad (1.6)$$

Подробное исследование задачи Трикоми и ее различных обобщений для уравнения (1.6) провел А. В. Бицадзе

[10а — г, и] при самых общих предположениях относительно кривой Г, ограничивающей D в верхней полуплоскости. А. В. Бицадзе решил также для уравнения (1.6) задачу Трикоми в многосвязной области и задачу, в которой на Г задано $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Два газодинамических приложения краевых задач для уравнения (1.6) приведены в работе Ф. И. Франкля [64б].

Л. И. Чибрикова [76б], используя свойства простых автоморфных функций, получила в явном виде решение задачи Трикоми для уравнения (1.6), минуя конформное отображение, в случае, когда Г есть половина границы одной из фундаментальных областей некоторой элементарной или фуксовой группы G дробно-линейных подстановок.

Для задачи Трикоми имеет место принцип экстремума: *решение задачи Трикоми, обращающееся в нуль на характеристике AC, не может достигать на открытом отрезке AB линии вырождения типа ни положительного максимума, ни отрицательного минимума.* Этот принцип впервые был сформулирован А. В. Бицадзе [10а] в случае уравнения (1.6). Несколько позднее он был установлен для уравнения Трикоми (1.1) в работе Жермена и Баде [24б]. К. И. Бабенко [4а] доказал справедливость принципа экстремума для задачи Трикоми в случае уравнения вида

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u=0 \qquad (1.7)$$

в предположении, что $a(x, 0)=b(x, 0)=0$ и линия перехода достаточно мала.

Принцип экстремума имеет важное значение, во-первых, потому, что из него сразу следует единственность решения задачи Трикоми, во-вторых, он дает возможность применить альтернирующий метод Шварца для решения задачи Трикоми при довольно общих предположениях на кривую Г.

Упомянем еще об одном интересном принципе максимума (Агмон, Ниренберг и Проттер [3]) для уравнения

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=0, \qquad (1.8)$$

$K(y)>0$ при $y>0$, $K(y)<0$ при $y<0$ и $K(0)=0$.

Предположим, что в характеристическом треугольнике ABC определено дважды непрерывно дифференцируемое решение $u(x, y)$ уравнения (1.8), являющееся неубывающей функцией y вдоль одной из характеристик. Допустим, далее, что в этом характеристическом треугольнике выполнены следующие условия:

$$\delta(\sqrt{-K}) + a + b\sqrt{-K} \leqslant 0,$$

$$\delta\left(\frac{\delta(\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} + \frac{a+b\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{1}{2K}[\delta(\sqrt{-K}) + a + b\sqrt{-K}] \times$$
$$\times [\delta(\sqrt{-K}) + a - b\sqrt{-K}] - 2c \leqslant 0, \qquad c \leqslant 0,$$

где

$$\delta \equiv \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{-K}\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

Тогда максимум $u(x, y)$, если он положителен, достигается на отрезке AB линии параболичности. Из принципа максимума легко следует теорема единственности задачи Трикоми для уравнения (1.8). С. П. Пулькин [54в] показал, что для обобщенных решений *) этот принцип максимума имеет место в случае уравнения Чаплыгина. Дальнейшее обобщение этого результата для уравнения (1.7) принадлежит В. Ф. Волкодавову [16а].

Для уравнения Чаплыгина (1.5) первое доказательство единственности решения задачи Трикоми было дано Ф. И. Франклем [64а] при условии, что функция

$$F(y) = 2\left(\frac{K}{K'}\right)' + 1 \tag{1.9}$$

неотрицательна при $y < 0$. Заметим, что это условие выполнено всюду для уравнения Трикоми (1.1).

Проттер [53б] обобщил теорему единственности, включив случаи, когда $F(y)$ может принимать отрицательные значения при $y < 0$. В другой работе [53в] Проттер доказал теорему единственности, предполагая, что $K(y)$ имеет непрерывную производную третьего порядка, которая в полуплоскости $y < 0$ удовлетворяет условию $K''' < 0$ всякий раз, когда $F(y) < 0$ при $y < 0$. Для доказательства единственности решения задачи

*) Определение обобщенного решения см. на стр. 45.

Трикоми Проттер применил так называемый метод abc, идея которого принадлежит Фридрихсу. Суть метода abc состоит в следующем. Пусть $u(x, y)$ есть квазирегулярное решение *) уравнения (1.5), определенное в области D и удовлетворяющее однородным граничным условиям задачи. Рассмотрим интеграл

$$\iint\limits_D (au + bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})\,dx\,dy,$$

где a, b и c — достаточно гладкие функции от (x, y). Этот интеграл, в силу уравнения (1.5), равен нулю. Подбираются функции a, b и c так, чтобы после преобразования этого интеграла с помощью формулы Грина получилось положительно определенное выражение, которое может быть равно нулю, только если $u(x, y) \equiv 0$. Метод abc применялся также в работах У Син-мо, Дин Ся-си [60] и Ван Гуан-инь [12] для доказательства единственности решения задачи Трикоми в случае уравнения Чаплыгина.

К. И. Бабенко [4а] подробно исследовал задачу Трикоми для уравнения Чаплыгина (1.5). Он доказал единственность и существование обобщенного решения задачи Трикоми для этого уравнения при предположении, что в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $\left|\frac{dx}{ds}\right| < Cy^2(s)$, где C — постоянная, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ. В случае уравнения Трикоми (1.1) К. И. Бабенко удалось освободиться от ограничения, наложенного на подход линии Γ к оси $y = 0$.

С. П. Пулькин [54б] исследовал задачу Трикоми для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0. \tag{1.10}$$

При некоторых ограничениях на коэффициенты a, b и c в предположении, что касательная к гладкой кривой Γ в точках A и B параллельна оси Oy, им доказана един-

*) Определение квазирегулярного решения см. на стр. 56.

ственность и существование обобщенного решения задачи Трикоми. Для уравнения (1.10) Л. Е. Вострова [17б] доказала единственность и существование решения краевой задачи, в которой на Г задана $\frac{\partial u}{\partial n}$, а на отрезке характеристики $x-y=0$ — значение искомой функции. Ю. М. Крикунов [36] рассмотрел задачу с производными в краевом условии на Г для уравнения (1.10) в предположении, что его коэффициенты аналитичны в верхней полуплоскости. М. М. Смирнов [56д] исследовал краевую задачу для уравнения (1.4), в котором на Г задается $y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}$, а на характеристике l_1 — значения искомой функции.

Г. Каратопраклиев [29] обобщил задачу Трикоми для уравнения (1.1) на случай, когда при переходе через линию параболического вырождения решение $u(x, y)$ и его производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ могут иметь разрыв первого рода и на этой линии удовлетворяют условиям «склеивания»

$$u(x, -0) = \alpha(x)\, u(x, +0) + \gamma(x), \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\frac{\partial u(x, -0)}{\partial y} = \beta(x)\frac{\partial u(x, +0)}{\partial y} + \delta(x), \qquad -1 < x < 1.$$

Он доказал единственность решения этой задачи, а также существование решения, предполагая, что кривая Г совпадает с нормальной кривой $x^2 + \frac{4}{9}y^3 = 1$, $y > 0$.

И. Л. Кароль [31а] для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y\, |y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (0 < m < 1) \tag{1.11}$$

доказал существование и единственность решения задачи Трикоми в случае, когда контур Г совпадает с нормальной кривой, определяемой уравнением

$$y^{2-m} = \left(\frac{2-m}{2}\right)^2 x(1-x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Новый подход к задаче Трикоми в случае уравнения Трикоми был дан Жерменом и Баде [24г, д]. Они использовали полученные ими фундаментальные решения $H_k(P, M)$ уравнения Трикоми, зависящие от вещественного параметра k. $M(x, y)$ — переменная точка, а $P(x_0, y_0)$ — фиксированная. Эти решения симметричны относительно точек M и P. Наиболее важным свойством фундаментальных решений Жермена — Баде является то, что они определены на всей плоскости. Если точка P находится в эллиптической полуплоскости, то решение $H_k(P, M)$ регулярно на всей плоскости, кроме точки P, где оно имеет логарифмическую особенность. Если точка P лежит на параболической линии $y = 0$, то это решение имеет вид $\gamma r_P^{-1/3}$, где постоянная γ имеет различные значения в областях $r_P^2 > 0$ и $r_P^2 < 0$, $r_P^2 = (x - x_0)^2 + \frac{4}{9} y^3$. Если точка P находится в гиперболической полуплоскости, то $H_k(P, M)$ является аналитическим решением во всей плоскости, за исключением характеристик, проходящих через P, и отраженных характеристик. Вдоль этих кривых особенность складывается из логарифмической с одним и тем же коэффициентом на обеих сторонах и из разрыва первого рода. Используя решения, имеющие те же особенности, что и $H_k(P, M)$, но равные нулю на нормальной кривой, Жермен и Баде получили решение задачи Трикоми в явном виде в случае, когда Γ совпадает с нормальной кривой, через данные задачи и значения искомой функции $u(x, y)$ вдоль характеристики, не несущей граничных условий. Эти значения определяются из некоторого сингулярного интегрального уравнения, которое имеет единственное решение. Жермен и Баде также построили функцию Грина для задачи Трикоми.

Другой метод решения задачи Трикоми, также основанный на интегральных уравнениях, был применен Агмоном [2б]. Используя фундаментальные решения $H_k(P, M)$ уравнения (1.1), он ищет решение задачи Трикоми в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя. Для неизвестных плотностей из краевых условий получается система интегральных уравнений, разрешимость которой доказывается. Таким образом, устанавливается теорема существования сильного решения в предположении, что кривая Γ перпендикулярна к оси x в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$ и заданные граничные значения $u|_\Gamma = \varphi$, $u|_{l_2} = \psi(x)$ непрерывны, причем существует $\psi''(x)$, удовлетворяющая условию Гёльдера на $[0, 1]$. Этот метод применен также и в том случае, когда на кривой Γ задается конормальная производная. Далее, Агмон показал, что для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c(x, y)\,u = F(x, y)$$

решение задачи Трикоми сводится к решению уравнения Риса — Шаудера.

Ф. И. Франкль [64в] доказал единственность и существование решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (1.1), предполагая, что нехарактеристическая кривая γ в некоторой произвольно малой окрестности точки A совпадает с характеристикой l_1 и близка к ней, а Γ — «нормальная» кривая. А. В. Бицадзе [10г] для уравнения (1.6) при некоторых ограничениях на кривые Γ и γ доказал единственность и существование решения обобщенной задачи Трикоми. А. В. Бицадзе изучил также обобщенную задачу Трикоми, когда обе характеристики заменены нехарактеристическими кривыми, расположенными внутри характеристического треугольника. Проттер [53г], применяя метод Геллерстедта, установил существование решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина (1.5), сохраняя ограничения Трикоми на кривую Γ и предполагая также, что кривая γ в некоторой малой окрестности точки A совпадает с характеристикой. К. И. Бабенко [4а] доказал существование обобщенного решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (1.5) при предположении, что на нехарактеристической кривой γ выполняются строгие неравенства

$$-(-K(y))^{-1/2} < \frac{dy}{dx} < 0,$$

не требуя, чтобы кривая γ в окрестности точки A совпадала с характеристикой.

В. П. Михайлов [45] для уравнения

$$K(y)\,u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)\,u_x + \\ + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u - \lambda u = f(x, y), \quad (1.12)$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ непрерывно дифференцируемы, а $c(x, y)$ — непрерывная в $\bar{D}_\gamma$ функция, λ — вещественный параметр, доказал, что для любой функции $f(x, y) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}$ существует единственное обобщенное решение обобщенной задачи Трикоми с нулевыми граничными условиями, если только $\lambda \geqslant \lambda_0$, где λ_0 — некоторое вещественное число. Далее, им показано, что эта задача при произвольном λ является фредгольмовой.

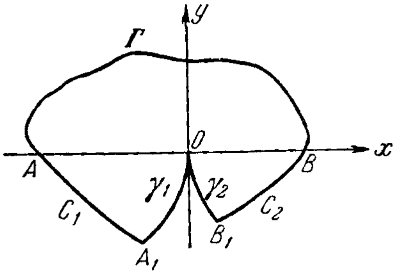

Рис 2.

Метод abc с успехом использовался для доказательства теоремы единственности обобщенной задачи Трикоми (Моравец [46а], Тонг [58]). Моравец доказала теорему единственности в случае уравнения (1.5) для области D, показанной на рис. 2, предполагая, что вдоль кривых C_1 и C_2 имеют место неравенства

$$0 \geqslant \frac{dy}{dx} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad (\text{на } C_1), \quad 0 \leqslant \frac{dy}{dx} \leqslant \frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad (\text{на } C_2) \tag{1.13}$$

и что кривая Г звездна относительно точки O; аналитически это условие означает, что при движении вдоль Г против часовой стрелки

$$x\,dy - y\,dx \geqslant 0.$$

Другой подход к доказательствам теорем единственности (Моравец [46б]) заключается в сопоставлении каждому решению уравнения (1.5) функции

$$\Psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (Ku_x^2 - u_y^2)\,dy - 2u_x u_y\,dx.$$

Этот криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. Дополнительно будем требовать, чтобы производные от функции $u(x, y)$ удовлетворяли условию, обеспечивающему непрерывность $\Psi(x, y)$ в замкнутой области $\overline{D}$ (рис. 2). Функция $\Psi(x, y)$ удовлетворяет в полуплоскости $y>0$ эллиптическому уравнению

$$K\Psi_{xx}+\Psi_{yy}-\alpha\Psi_x-\beta\Psi_y=0,$$

где

$$\alpha=\frac{K'\Psi_x}{2\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}},\qquad \beta=\frac{K'}{2K}\left[1+\frac{\Psi_y}{\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}}\right].$$

Это означает, что $\Psi(x, y)\not\equiv\text{const}$ удовлетворяет принципу максимума в эллиптической части области D. Кроме того, вдоль характеристик

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}$$

мы имеем

$$\frac{d\Psi}{dy}=-\left(\frac{du}{dy}\right)^2<0.$$

Следовательно, функция $\Psi(x, y)$ принимает максимальное значение на $\Gamma+C_1+C_2$. Используя метод вспомогательных функций, Моравец доказала теорему единственности решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения (1.5), предполагая, что кроме неравенств (1.13) выполнено условие

$$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{1.14}$$

где α — угол между положительными направлениями оси Ox и направлением касательной к Γ, проведенной в сторону возрастания дуги при обходе контура Γ против часовой стрелки.

Метод вспомогательных функций при определенных условиях дает возможность также доказать теорему единственности для аналога задачи Неймана для уравнения (1.5). Эти условия относятся к кривой Γ и формулируются следующим образом [46в]. Пусть

$$\cos\tilde{\alpha}=\frac{dx}{d\tilde{s}},\qquad \sin\tilde{\alpha}=\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{s}},$$

где $\tilde{s}$ — длина дуги кривой $\tilde{\Gamma}$ на плоскости

$$\left(x,\ \tilde{y}=\int\limits_0^y \sqrt{K(y)}\,dy\right).$$

Предположим, что угол $\tilde{\alpha}$ удовлетворяет условиям:

$$\tilde{\alpha}<\pi \text{ в } B,\quad \tilde{\alpha}>\pi \text{ в } A,\quad -\pi<\tilde{\alpha}<3\pi \text{ на } \tilde{\Gamma}. \tag{1.15}$$

Геометрическое условие, наложенное на кривую Γ, является существенным; Моравец построила пример, в котором условия (1.15) в точках A и B нарушаются, а задача Неймана с нулевыми данными обладает нетривиальным решением.

Ф. И. Франкль [64а] в упомянутой выше статье показал, что задача набегания сверхзвуковой достаточно широкой струи на клин в случае, когда перед клином образуется зона дозвуковых скоростей, сводится к краевой задаче для уравнения Чаплыгина (1.5), в которой на части кривой Γ, примыкающей к точке A, и на характеристике AC задано значение $u=0$, а на остальной части кривой Γ имеет место однородное соотношение вида

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{1.16}$$

где P и Q — заданные функции. Эта задача однородная и поэтому определяет решение с точностью до постоянного множителя. Ф. И. Франклем была получена теорема единственности для этой задачи при выполнении условия (1.9). Б. В. Мелентьев [44а] доказал единственность решения задачи Франкля для уравнений (1.1) и (1.6), а также для более общей задачи, заменив соотношение (1.16) на $P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+Ru=0$ при условии, что $[P\cos(nx)+Q\cos(ny)]\,R<0$. Теорема существования задачи Франкля им была получена для уравнения (1.6) в области D, когда кривая Γ имеет специальный вид. Б. В. Мелентьев [44в] изучил также задачу Гильберта — Пуанкаре для уравнения Трикоми (1.1).

Ф. И. Франкль [64д] поставил новую краевую задачу для уравнения Чаплыгина (1.5) (задача Франкля).

Эта задача формулируется следующим образом: *найти регулярное решение уравнения* (1.5) *в области* D, *ограниченной отрезком* $A'A$ *оси* $x=0$, $-a \leqslant y \leqslant a$, *характеристикой* $A'C$ *уравнения* (1.5), $C=C(a_1, 0)$, $a_1>0$, *отрезком* CB *оси* $y=0$, $a_1 \leqslant x \leqslant b$, *и кривой* Γ *с концами в точках* A *и* B, *лежащей в верхней полуплоскости, удовлетворяющее граничным условиям*:

$$u|_\Gamma = \varphi_1, \quad u|_{CB} = \varphi_2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{A'A} = 0,$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant a.$$

А. В. Бицадзе [10д, ж] доказал единственность решения задачи Франкля для уравнений (1.5) и (1.6) при дополнительном требовании, чтобы вдоль кривой Γ имело место неравенство

$$\frac{dy}{ds} \geqslant 0,$$

где $x=x(s)$, $y=y(s)$ — параметрические уравнения, а s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемой от точки $B(b, 0)$, а также существование решения этой задачи для уравнения (1.6). Метод вспомогательных функций, а также метод abc с успехом был применен для доказательства теорем единственности задачи Франкля в случае уравнения Чаплыгина (Ю. В. Девингталь [20б], Линь Цзянь-бин [42]). Ю. В. Девингталь доказал теорему существования задачи Франкля, когда $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m>1$.

Л. В. Овсянников [50] исследовал обобщенные решения уравнения (1.1). Им изучены функциональные свойства некоторых операторов, играющих важную роль в теории задачи Трикоми. На этой основе Л. В. Овсянников указал схему применения метода наименьших квадратов для приближенного решения задачи Трикоми.

Впервые функциональная методика доказательства существования слабых решений краевых задач была применена к уравнениям смешанного типа Моравец [46д], которая рассматривала систему первого порядка, эквивалентную уравнению Чаплыгина. К. Фридрихс изучал более общие системы. Моравец доказала существование слабого решения обобщенной задачи Трикоми при некоторых дополнительных предположениях о границе области. Фридрихс [65], Лакс и Филлипс [39] показали, что слабое решение, полученное Моравец, является также и сильным (в смысле Фридрихса) решением обобщенной задачи Трикоми. Техника К. Моравец получения энергетических неравенств применялась в случае других уравнений и граничных условий Ф. И. Франклем [64ж], А. В. Бицадзе [10к] и Линь Цзянь-бином [42]. Для задачи Трикоми (обычной и обобщенной) функциональная методика доказательства существования слабых решений была разработана Ю. М. Березанским [8а—в], который получил энергетические неравенства, дающие оценки в других нормах и для уравнений более общих, чем уравнение Чаплыгина. Эти результаты были распространены им также и для областей, эллиптическая часть которых не ограничена. Н. Г. Сорокина [57] доказала единственность слабого решения задачи Трикоми и его совпадение с сильным.

И. Л. Кароль [31б, в, д] исследовал уравнение смешанного типа

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \qquad (\alpha = \mathrm{const}) \tag{1.17}$$

в области D, ограниченной сверху кривой (или несколькими кривыми) Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и опирающейся концами на ось x, а снизу двумя (или большим числом) характеристических дуг. При $\alpha < 0$ и при определенных условиях на гладкость решения u и его производных на линии перехода им доказаны существование и единственность решения задачи, в которой граничное условие ставится на всей границе области. При этом на Γ можно задавать граничные условия различных типов. И. Л. Кароль [31г] обобщил эту краевую задачу, заменив характеристики гладкой кривой, целиком лежащей в характеристическом треугольнике. Им решены краевые задачи в случае $\alpha > 0$, в которых граничные условия задаются лишь на Γ. И. Л. Кароль изучил также задачу Трикоми для уравнения (1.17). Так как производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ решения это краевой задачи и при гладких краевых значениях может, вообще говоря, обращаться в бесконечность на параболической линии, то вводится следующее условие «склеивания» этих производных решений из областей D^+ и D^- на оси $y=0$:

$$\lim_{y\to +0} y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to -0} (-y)^\alpha \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ф. И. Франкль [64ж] свел задачу определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямую задачу теории сопла Лаваля) к новой краевой задаче для уравнения (1.11) с показателем $m={}^1/_2$. Он показал, что для существования и единственности решения уравнения (1.11) при $0<m<1$ уже недостаточно функцию $u(x, y)$ задать на кривой Γ и на одной из характеристик этого уравнения, а следует, сверх того, на линии перехода вместо обычного требования непрерывности $u_y(x, +0)=u_y(x, -0)$ ввести предположение (условие разрывности Франкля)

$$\frac{\partial u(x, +0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x, -0)}{\partial y}.$$

В. Г. Карманов [30а, б] с помощью метода сеток доказал существование решения задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе (1.6) при весьма слабых ограничениях на кривую Г. В предположении существования решения задачи Трикоми для уравнения (1.6) Е. А. Волков [15], О. А. Ладыженская [38] и З. И. Халилов [67] указали разностные схемы, сходящиеся к точному решению; для уравнения Трикоми (1.1) это сделал А. Ф. Филиппов [62], а затем Огава [51] для общего уравнения Трикоми [1.7]. Л. И. Коваленко [33а, б] уточнила и обобщила оценки, полученные в работах [62], [51]. Л. И. Коваленко с помощью метода сеток доказала единственность обобщенного решения задачи Трикоми для уравнения

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+c(x, y)u=f(x, y),$$

где

$$K(y)=\operatorname{sgn} y\,|y|^m q(y), \quad m>0, \quad q(y)>0,$$

при дополнительных ограничениях на кривую Г в окрестности точек A и B и на коэффициенты a, b, c и K.

М. М. Смирнов [56а—в] изучал уравнение четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \operatorname{sgn} y \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \tag{1.18}$$

в области D, ограниченной гладкой кривой Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости, и характеристиками AC: $y = -x$ и BC: $y = x - 1$ уравнения (1.18). Он доказал единственность и существование решения уравнения (1.18), удовлетворяющего краевым условиям

$$u\,|_{\Gamma} = \varphi_1(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi_2(s), \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=-x} &= \psi_1(x) \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x-1} &= \psi_2(x) \qquad \left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Им также доказаны теоремы единственности для краевых задач, когда наряду с (1.19) искомая функция $u(x, y)$ задается одновременно на обеих характеристиках или на одной из характеристик задается искомая функция, а на другой характеристике — нормальная производная $\frac{\partial u}{\partial n}$.

В. И. Жегалов [23а—в] рассмотрел ряд краевых задач для уравнения

$$\Lambda^n u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \operatorname{sgn} y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n u = 0. \tag{1.21}$$

Он доказал единственность и существование решения уравнения (1.21) в области D, удовлетворяющего краевым условиям

$$\Lambda^k u = \begin{cases} \varphi_k(s) & \text{на } \Gamma, \\ \psi_k(x) & \text{на } AC \end{cases} \tag{1.22}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В. И. Жегалов также исследовал краевые задачи для уравнения (1.21), когда вместо значений $\Lambda^k u$ на одной из характеристик задаются их линейные комбинации с переменными коэффициентами на обеих характеристиках. При этом при переходе через линию вырождения типа искомая функция и ее производная могут иметь разрыв первого рода и удовлетворяют на этой линии условиям «склеивания» решений:

$$\alpha_{0k}(x)\,\Lambda_{+}^{k}u^{+}+\beta_{0k}(x)\,\Lambda_{-}^{k}u^{-}=\gamma_{0k}(x),$$

$$\alpha_{1k}\frac{\partial\Lambda_{+}^{k}u^{+}}{\partial y}+\beta_{1k}\frac{\partial\Lambda_{-}^{k}u^{-}}{\partial y}=\gamma_{1k}(x)$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

где $\alpha_{0k}(x)$, $\beta_{0k}(x)$ — заданные функции, α_{1k}, β_{1k} — постоянные.

А. В. Бицадзе [10е] для уравнения

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}+\operatorname{sgn} z\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

в области D, ограниченной полусферой σ: $r^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$, и характеристическими конусами

$$K_1:\quad z=-1+r,\qquad -1\leqslant z\leqslant 0$$

и

$$K_2:\quad z+r=0,\quad -\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 0,\quad r=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2},$$

рассмотрел краевую задачу, в которой функция u принимает заданные значения на σ и на K_1. В случае, когда вершина конуса K_2 смещена от начала координат в области $r\leqslant 1$, $z=0$, задача может оказаться некорректной (переопределенной). Единственность поставленной задачи следует из принципа экстремума. Существование им доказано в одном частном случае, когда заданные значения на K_1 зависят только от r, а на σ $u=0$.

Уравнения смешанного типа исследовали также Ф. Б. Абуталиев [1а, б], Н. И. Бакиевич [5а—д], М. Б. Капилевич [27а—в], О. М. Лемешинская [41], А. М. Нахушев [47], И. М. Петрушко [52], Н. М. Флайшер [64], Б. В. Шабат [77] и др.

§ 2. Канонические формы уравнений второго порядка смешанного типа

Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0, \quad (2.1)$$

коэффициенты которого A, B, C суть вещественные функции от x и y в некоторой области D. Мы будем предполагать, что A, B и C нигде в рассматриваемой области не обращаются одновременно в нуль.

Уравнение (2.1) принадлежит эллиптическому типу, соответственно гиперболическому, параболическому типу, в области D, если в этой области $B^2-AC<0$, соответственно $B^2-AC>0$, $B^2-AC=0$. Однако эти три типа не исчерпывают всего класса уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, потому что выражение B^2-AC в общем случае может не сохранять знак во всей области D. Итак, если выражение $\Delta=B^2-AC$ меняет знак в области D, то уравнение (2.1) будем называть *уравнением смешанного типа.* Кривая γ, определяемая уравнением $\Delta=B^2-AC=0$, называется *параболической линией* уравнения (2.1) или *линией вырождения* типа этого уравнения. При этом мы ограничимся двумя случаями расположения параболической линии γ на границе поля характеристических направлений уравнения (2.1):

1) Параболическая линия γ нигде не касается характеристических направлений уравнения (2.1), т. е.

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2\neq 0$$

всюду вдоль γ.

2) В каждой точке параболической линии γ касательная совпадает с характеристическим направлением уравнения (2.1). Это означает, что вдоль γ имеет место

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2=0,$$

т. е. линия γ является одновременно характеристикой уравнения (2.1) (огибающей семейства характеристик уравнения (2.1)).

В первом случае мы будем говорить, что уравнение (2.1) является уравнением смешанного типа *первого рода*, а во втором случае — уравнением смешанного типа *второго рода*. Простейшими примерами таких уравнений служат уравнения вида

$$yu_{xx}+u_{yy}=0, \qquad u_{xx}+yu_{yy}=0, \tag{2.2}$$

для которых $y=0$ есть линия параболического вырождения, причем для второго уравнения $y=0$ является одновременно характеристикой. При $y>0$ уравнения (2.2) принадлежат эллиптическому типу, а при $y<0$ — гиперболическому типу.

Рассмотрим наиболее простой и вместе с тем важный случай степенного вырождения, когда в некоторой окрестности σ линии γ функция $\Delta(x, y)$ представима в виде

$$\Delta(x, y)=H^n(x, y)\,M(x, y), \tag{2.3}$$

где $M(x, y)$ — функция, конечная и отличная от нуля всюду в σ, $H(x, y)=0$ — уравнение кривой γ, причем H_x и H_y не обращаются одновременно в нуль на γ, а n — нечетное целое положительное число*). Так как по предположению функция $\Delta(x, y)$ меняет знак при переходе через линию γ, то при $n=2m+1$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ уравнение (2.1) будет эллиптическим по одну сторону от линии γ и гиперболическим по другую сторону, т. е. уравнением смешанного типа. Трикоми [59а] и Чибрарио [75а] показали, что при некоторых условиях гладкости коэффициентов A, B и C путем неособенного вещественного преобразования независимых переменных уравнение (2.1) в окрестности линии γ может быть приведено (оставляем старые обозначения для независимых переменных) к канонической форме

$$y^n u_{xx}+u_{yy}=\varphi_1(x, y, u, u_x, u_y), \tag{2.4}$$

---

*) Случай, когда $n=2m$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$, приводит к вырождающимся уравнениям эллиптико-параболического или гиперболо-параболического типа.

если уравнение (2.1) является уравнением смешанного типа первого рода, и к виду

$$u_{xx}+y^n u_{yy}=\varphi_2(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y), \tag{2.5}$$

когда уравнение (2.1) принадлежит ко второму роду. Особого внимания заслуживают линейные уравнения

$$\begin{gathered}
y^n u_{xx}+u_{yy}+a_1(x,\ y)\,u_x+\\
+b_1(x,\ y)\,u_y+c_1(x,\ y)\,u=f_1(x,\ y),\\
u_{xx}+y^n u_{yy}+a_2(x,\ y)\,u_x+\\
+b_2(x,\ y)\,u_y+c_2(x,\ y)\,u=f_2(x,\ y).
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Наряду с перечисленными выше представляют интерес также уравнения (2.1) со степенным вырождением произвольного порядка $\alpha>0$, для которых $\Delta(x,\ y)=$ $=\operatorname{sgn} H(x,\ y)|H(x,\ y)|^\alpha M(x,\ y)$. Простейшими примерами таких уравнений служат уравнения

$$\begin{gathered}
\operatorname{sgn} y|y|^\alpha u_{xx}+u_{yy}=0,\\
u_{xx}+\operatorname{sgn} y|y|^\alpha u_{yy}=0.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

В частности, при $\alpha=0$ из (2.7) получаем более простое уравнение:

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y\, u_{yy}=0. \tag{2.8}$$

Следует особо отметить уравнение Чаплыгина, играющее первостепенную роль в газовой динамике околозвуковых течений. Это уравнение для функции тока имеет вид

$$K(\sigma)\,\psi_{00}+\psi_{\sigma\sigma}=0, \tag{2.9}$$

где $K(\sigma)$ — монотонно возрастающая функция от σ и $K(0)=0$.

С помощью замены переменных

$$x=\theta, \qquad y=\left[\frac{3}{2}\int\limits_0^\sigma \sqrt{K(t)}\,dt\right]^{2/3}$$

уравнение (2.9) приводится к каноническому виду

$$y\psi_{xx} + \psi_{yy} + b(y)\psi_y = 0. \tag{2.10}$$

где

$$b(y) = \frac{d^2y}{d\sigma^2} : \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2.$$

Полагая

$$\psi = ue^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\,dy},$$

приводим уравнение (2.10) к виду

$$yu_{xx} + u_{yy} + c(y)u = 0, \tag{2.11}$$

где

$$c(y) = -\frac{1}{4}[b^2(y) + 2b'(y)].$$

ЗАДАЧА ТРИКОМИ

§ 1. Постановка задачи Трикоми

Рассмотрим уравнение

$$K(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+c(x,\ y)u=f(x,\ y), \qquad (1.1)$$

где $K(y)$ — монотонно возрастающая непрерывная функция от y и $K(0)=0$. При $y>0$ уравнение (1.1) является эллиптическим, а при $y<0$ — гиперболическим; $y=0$ — параболическая линия уравнения (1.1).

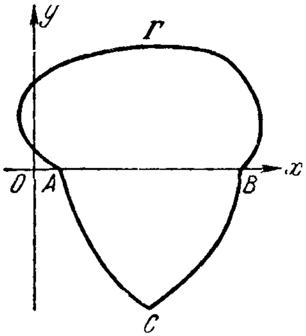

Рис 3.

Пусть Г — спрямляемая жорданова кривая с концами в точках $A(a,\ 0)$ и $B(b,\ 0)$, лежащая в верхней полуплоскости. Уравнение (1.1) при $y<0$ имеет два различных семейства вещественных характеристик, которые определяются уравнениями

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, \qquad (1.2а)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}. \qquad (1.2б)$$

Обозначим через D область, ограниченную кривой Г и характеристиками AC и BC, принадлежащими соответственно к семействам (1.2а) и (1.2б) (рис. 3). Часть области D, лежащую в полуплоскости $y>0$ ($y<0$), обозначим через D^+ (D^-).

Задача Трикоми. *Найти в области D решение уравнения* (1.1), *непрерывное в $\overline{D}$, принимающее на кривой* Г *и на одной из характеристик, например на* AC, *заданные непрерывные значения* $u|_\Gamma=\varphi(s)$, $u|_{AC}=\psi(x)$, $\varphi(l)=\psi(0)$, *где l — длина кривой* Г.

На линии $y=0$ параболического вырождения уравнения (1.1) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} u(x, y) = \lim_{y\to-0} u(x, y) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (a < x < b).$$

Задачу Трикоми можно рассматривать и для более сложной области. Возьмем на оси x точку E, лежащую

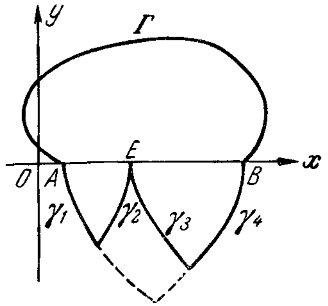

Рис 4

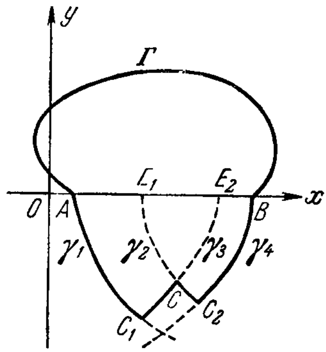

Рис 5

между точками A и B. Пусть γ_1 и γ_3 — характеристики семейства (1.2а), выходящие соответственно из точек A и E, а γ_2 и γ_4 — характеристики семейства (1.2б), выходящие соответственно из точек E и B. Обозначим через D_1 область, ограниченную кривыми Г, γ_1, γ_2, γ_3 и γ_4 (рис. 4).

В этом случае задача T_1 состоит в нахождении решения уравнения (1.1) в области D_1, принимающего заданные значения на Г и на характеристиках γ_1 и γ_3 или на Г и на характеристиках γ_2 и γ_3.

Задачу Трикоми можно обобщить и дальше. Например, возьмем на оси x две точки E_1 и E_2, лежащие между A и B, и пусть γ_1 и γ_2 — характеристики семейства (1.2а), выходящие соответственно из точек A и E_1, а γ_3 и γ_4 — характеристики семейства (1.2б), выходящие соответственно из точек E_2 и B. Характеристики γ_2 и γ_3

пересекаются в точке C, γ_1 и γ_3 — в точке C_1, а γ_2 и γ_4 — в точке C_2 (рис. 5). Обозначим через D_2 область, ограниченную кривой Γ и дугами AC_1, C_1C, CC_2 и C_2B.

Задача T_2 состоит в нахождении решения уравнения (1.1) в области D_2, принимающего заданные значения на Γ и на характеристических дугах AC_1 и CC_2.

§ 2. Принцип экстремума и единственность решения задачи Трикоми

1. Вспомогательные предложения. Рассмотрим уравнение

$$L(u)\equiv yu_{xx}+u_{yy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+c(x,\ y)u=0, \tag{2.1}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции, причем $c(x, y)\leqslant 0$ при $y>0$. Сначала рассмотрим задачуКоши для уравнения (1.2) в полуплоскости $y<0$, т. е. задачу *об определении функции* $u(x, y)\in C^{(2)}$ $(y<0)$, *удовлетворяющей в полуплоскости* $y<0$ *уравнению* (2.1) *и начальным данным*

$$u|_{y=0}=\tau(x),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\nu(x). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) в характеристических координатах

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2},\qquad \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+A(\xi,\ \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+B(\xi,\ \eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+C(\xi,\ \eta)u=0, \tag{2.3}$$

где

$$A(\xi,\ \eta)=\frac{1}{6(\eta-\xi)}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\eta-\xi)^{2/3}}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\eta-\xi)^{1/3}}=$$
$$=\frac{1}{6(\eta-\xi)}+A_1(\xi,\ \eta),$$

$$B(\xi,\ \eta)=-\frac{1}{6(\eta-\xi)}-\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{a}{(\eta-\xi)^{2/3}}+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{b}{(\eta-\xi)^{1/3}}=$$
$$=-\frac{1}{6(\eta-\xi)}+B_1(\xi,\ \eta)$$

и

$$C(\xi, \eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{c}{(\eta-\xi)^{2/3}}.$$

Начальные данные (2.2) принимают вид

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} u(\xi, \eta) = \tau(\xi),$$
$$\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \nu(\xi). \tag{2.4}$$

Решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условиям (2.4), дается (см. [4а]) формулой

$$u(\xi, \eta) = \int_\xi^\eta g(\xi, \eta;\ t)\,\tau(t)\,dt - \int_\xi^\eta h(\xi, \eta;\ t)\,\nu(t)\,dt. \tag{2.5}$$

Здесь

$$h(\xi, \eta;\ t) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma^2(5/6)}\Bigg\{(t-\xi)^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6} +$$
$$+\int_\xi^t (t-\xi')^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6} B_1(\xi', \eta)\,\widetilde{B}_1(\xi';\ \xi, \eta)\,d\xi' +$$
$$+\int_\eta^t (\eta'-t)^{-1/6}(t-\xi)^{-1/6} A_1(\xi, \eta')\,\widetilde{A}_1(\eta';\ \xi, \eta)\,d\eta' +$$
$$+\int_\xi^t\int_\eta^t (\eta'-t)^{-1/6}(t-\xi')^{-1/6} D[v(\xi', \eta';\ \xi, \eta)]\,d\xi'\,d\eta'\Bigg\}, \tag{2.6}$$

$$g(\xi, \eta;\ t) = -b(t, 0)\,h(\xi, \eta;\ t) + \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma^2(1/6)}\Bigg\{\frac{(\eta-\xi)^{2/3}}{(t-\xi)^{5/6}(\eta-t)^{5/6}} +$$
$$+\int_\xi^t \frac{(\eta-\xi')^{2/3}}{(t-\xi')^{5/6}(\eta-t)^{5/6}} B_1(\xi', \eta)\,\widetilde{B}_1(\xi';\ \xi, \eta)\,d\xi' +$$
$$+\int_\eta^t \frac{(\eta'-\xi)^{2/3}}{(t-\xi)^{5/6}(\eta'-t)^{5/6}} A_1(\xi, \eta')\,\widetilde{A}_1(\eta';\ \xi, \eta)\,d\eta' +$$
$$+\int_\xi^t\int_\eta^t \frac{(\eta'-\xi')^{2/3}}{(t-\xi')^{5/6}(\eta'-t)^{5/6}} D[v(\xi', \eta';\ \xi, \eta)]\,d\xi'\,d\eta'\Bigg\}, \tag{2.7}$$

где для краткости положено

$$\tilde{A}_{1}(\eta';\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{\eta'-\xi}{\eta-\xi}\right)^{1/6}e^{\int\limits_{\eta}^{\eta'}A_1(\xi,\ t)\,dt},$$

$$\tilde{B}_{1}(\xi';\ \xi,\ \eta)=\left(\frac{\eta-\xi'}{\eta-\xi}\right)^{1/6}e^{\int\limits_{\xi}^{\xi'}B_1(t,\ \eta)\,dt},$$

$$D[v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)]=\frac{\partial(A_1v)}{\partial\xi'}+\frac{\partial(B_1v)}{\partial\eta'}-Cv,$$

а $v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)$ — функция Римана уравнения (2.3). Как функция от $(\xi',\ \eta')$, она удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi'\,\partial\eta'}-\frac{\partial(Av)}{\partial\xi'}-\frac{\partial(Bv)}{\partial\eta'}+Cv=0 \tag{2.8}$$

и условиям

$$\begin{aligned} v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)\big|_{\xi'=\xi}&=\tilde{A}_1(\eta';\ \xi,\ \eta),\\ v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)\big|_{\eta'=\eta}&=\tilde{B}_1(\xi';\ \xi,\ \eta). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Функция Римана уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0$$

известна и равна

$$v_0(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)=\frac{(\eta'-\xi')^{1/3}}{(\eta-\xi')^{1/6}(\eta'-\xi)^{1/6}}F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ 1;\ \sigma\right), \tag{2.10}$$

где $F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ 1;\ \sigma\right)$ — гипергеометрическая функция, а

$$\sigma=\frac{(\xi'-\xi)(\eta'-\eta)}{(\xi'-\eta)(\eta'-\xi)}.$$

Функция Римана уравнения (2.8) представима в виде ряда

$$v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta), \tag{2.11}$$

где

$$v_1(\xi', \eta'; \xi, \eta) =$$

$$= \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta}^{\eta'} v_0(\xi', \eta'; \xi_1, \eta_1) D[v_0(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)] d\xi_1 d\eta_1 +$$

$$+ \int_{\xi}^{\xi'} v_0(\xi', \eta'; t, \eta) B(t, \eta) \tilde{B}(\xi, \eta, t) dt +$$

$$+ \int_{\eta}^{\eta'} v_0(\xi', \eta'; \xi, t) A(\xi, t) \tilde{A}(\xi, \eta, t) dt,$$

$$v_{n+1}(\xi', \eta'; \xi, \eta) =$$

$$= \int_{\xi}^{\xi'} \int_{\eta}^{\eta'} v_0(\xi', \eta'; \xi_1, \eta_1) D[v_n(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)] d\xi_1 d\eta_1$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Ряд* (2.11) *абсолютно и равномерно сходится при* $\xi < \xi' \leqslant \eta' < \eta$ *для* $0 < \eta - \xi < \infty$. *Его можно почленно дифференцировать, и сумма ряда* (2.11) *удовлетворяет уравнению* (2.8) *и условиям* (2.9). *Кроме того,*

$$|v(\xi', \eta'; \xi, \eta)| \leqslant \frac{(\eta' - \xi')^{1/3}}{(\eta' - \xi)^{1/6} (\eta - \xi)^{1/6}} C(\xi', \eta'; \xi, \eta), \quad (2.12)$$

где $C(\xi', \eta'; \xi, \eta)$ — *ограниченная функция.*

Ф. И. Франкль [64л] доказал лемму 1 при условии, что $0 < \eta - \xi < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. К. И. Бабенко [4а] показал, что эта лемма справедлива без всяких ограничений на величину $\eta - \xi$.

Можно показать [64л], что если $\tau(t)$ и $\nu(t)$ имеют непрерывные производные до второго порядка при $x_1 < t < x_2$, то функция $u(\xi, \eta)$, определенная формулой (2.5), будет иметь непрерывные частные производные второго порядка по x и y в области, ограниченной характеристиками $\xi = x_1$, $y = x_2$ и линией вырождения $\eta = \xi$. В этом случае мы имеем классическое решение задачи Коши (2.1) — (2.2).

Выражение (2.5) будем называть *обобщенным решением* уравнения (2.3), если $\tau(t)$ и $\nu(t)$ непрерывны при $x_1 < t < x_2$.

Чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(t)$ и $\nu(t)$ имели определенную гладкость. В дальнейшем мы будем обобщенное решение рассматривать в $\triangle ABC$, ограниченном отрезком AC характеристики $\xi = 0$, отрезком CB характеристики $\eta = l$ и частью линии вырождения $\eta = \xi$ ($\triangle ABC = \{\xi, \eta \in [0, l], \eta > \xi\}$).

Рассмотрим следующий класс обобщенных решений задачи Коши, введенный К. И. Бабенко [4а].

Класс R_1. *Обобщенное решение* (2.5) *уравнения* (2.3) *принадлежит классу* R_1, *если функция* $\tau(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha_1 > 5/6$ *при* $0 \leqslant t < l$, *а функция* $\nu(t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha_2 > 1/6$ *при* $0 \leqslant t < l$.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться выражением вида

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где $f(t)$ интегрируема в (a, b), которое называется *интегралом дробного порядка* α.

Лемма 2 [4а]. *Если обобщенное решение u принадлежит классу R_1, то производные u_x и u_y непрерывны в $\triangle ABC$, а u_y непрерывна вплоть до линии вырождения и*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x) \qquad (0 < x < l).$$

Доказательство. Положим

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}$$

и рассмотрим функцию

$$u_0(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_\xi^\eta \frac{(\eta-\xi)^{2/3}\tau(t)\, dt}{(\eta-t)^{5/6}(t-\xi)^{5/6}} - \gamma_2 \int_\xi^\eta \frac{\nu(t)\, dt}{(\eta-t)^{1/6}(t-\xi)^{1/6}}. \quad (2.13)$$

Заметим, что $u_0(\xi, \eta)$ есть обобщенное решение класса R_1 уравнения (2.3) при $a = b = c = 0$.

Известно [68], что если $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α на (0, 1), то ее можно представить в виде

$$f(x) = f(0) + \int_0^x (x-t)^{\beta-1} g(t)\, dt,$$

где функция $g(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha - \beta > 0$. Следовательно, функции $\tau(t)$ и $\nu(t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(0) + \int_0^t (t-s)^{-1/6+\varepsilon} \varphi(s)\, ds, \\ \nu(t) &= \nu(0) + \int_0^t (t-s)^{-5/6+\varepsilon} \psi(s)\, ds, \end{aligned} \qquad (2.14)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant s < 1$.

Подставляя (2.14) в (2.13), меняя порядок интегрирования и используя интегральное представление гипергеометрической функции *), получим

$$\begin{aligned} u_0(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} \varphi_1(s)(\eta - s)^{-1/6+\varepsilon} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} - \varepsilon, \frac{1}{3}; \frac{\eta-\xi}{\eta-s}\right) ds &+ \\ + \int_{\xi}^{\eta} \varphi_2(s)(\eta-\xi)^{-1/6}(\eta-s)^{\varepsilon} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\varepsilon, \frac{\eta-s}{\eta-\xi}\right) ds &+ \\ + \int_0^{\xi} \varphi_3(s)(\eta-s)^{-1/6}(\xi-s)^{\varepsilon} F\left(\frac{1}{6}+\varepsilon, \frac{1}{6}, 1+\varepsilon; \frac{\xi-s}{\eta-s}\right) ds &+ \\ + \tau(0) - \left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\eta-\xi)^{2/3}\nu(0), & \qquad (2.15) \end{aligned}$$

---

*) $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\, dt = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z)$

$(0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c)$.

где

$$\varphi_1(s)=\varphi(s)-\sqrt{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}+\varepsilon\right)}\,\gamma_2\psi(s),$$

$$\varphi_2(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}+\varepsilon\right)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\,\gamma_1\varphi(s)-\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\,\gamma_2\psi(s), \tag{2.16}$$

$$\varphi_3(s)=\sqrt{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}{\Gamma(1+\varepsilon)}\,\gamma_2\psi(s).$$

Из формулы (2.15) следует, что производные $\frac{\partial u_0}{\partial\xi}$ и $\frac{\partial u_0}{\partial\eta}$ существуют и непрерывны в $\triangle\,ABC$.

Пусть

$$M_1(a)=\max_{0\leqslant s\leqslant a}|\varphi(s)|,\qquad M_2(a)=\max_{0\leqslant s\leqslant a}|\psi(s)|.$$

Легко видеть, что

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial\xi}\right|\\[2ex]\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial\eta}\right|\end{array}\right\}\leqslant C\left(M_1(\eta)+M_2(\eta)\right)(\eta-\xi)^{-1/3}, \tag{2.17}$$

где C — постоянная.

Первые производные от первых двух интегралов в (2.15) ограничены величиной $C_1(\eta-\xi)^{-1/6+\varepsilon}$. Учитывая это, мы будем иметь

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\xi}-\frac{\partial u_0}{\partial\eta}\right)=$$

$$=\nu(0)+\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}+\varepsilon\right)}{1+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon}\varphi_3(s)(\eta-s)^{-5/6}(\xi-s)^{\varepsilon}\left(\frac{\xi-s}{\eta-s}+1\right)\times$$

$$\times F\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6}+\varepsilon,\ 2+\varepsilon,\ \frac{\xi-s}{\eta-s}\right)ds+O\left((\eta-\xi)^{1/6+\varepsilon}\right).$$

И, следовательно, в силу (2.16) и (2.14)

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u_0}{\partial y}=\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\xi}-\frac{\partial u_0}{\partial\eta}\right)=$$

$$=\nu(0)+\int_0^{\xi}(\xi-s)^{-5/6+\varepsilon}\psi(s)\,ds=\nu(\xi)\quad(2.18)$$

равномерно при $0\leqslant\xi\leqslant\theta<1$.

Перейдем теперь к обобщенному решению, которое дается формулой (2.5). С помощью функции $u_0(\xi,\eta)$ формулу (2.5) можно записать в виде

$$u(\xi,\eta)=u_0(\xi,\eta)-\int_{\xi}^{\eta}\tau(t)\,b(t,0)\,h(\xi,\eta,t)\,dt+$$
$$+\int_{\xi}^{\eta}u_0(\xi',\eta)\tilde{B}_1(\xi',\eta)\tilde{B}_1(\xi';\xi,\eta)\,d\xi'-$$
$$-\int_{\xi}^{\eta}u_0(\xi,\eta')A_1(\xi,\eta')\tilde{A}_1(\eta';\xi,\eta)\,d\eta'-$$
$$-\int_{\xi}^{\eta}d\xi'\int_{\xi'}^{\eta}u_0(\xi',\eta')\,D[v(\xi',\eta';\xi,\eta)]\,d\eta'.\quad(2.19)$$

Интегрируя по частям двойной интеграл в (2.19), получим

$$\int_{\xi}^{\eta}d\xi'\int_{\xi'}^{\eta}u_0(\xi',\eta')\,D[v(\xi',\eta';\xi,\eta)]\,d\eta'=$$
$$=-\int_{\xi}^{\eta}\tau(t)\,b(t,0)\,h(\xi,\eta,t)\,dt+$$
$$+\int_{\xi}^{\eta}u_0(\xi',\eta)B_1(\xi',\eta)\tilde{B}_1(\xi';\xi,\eta)\,d\xi'-$$
$$-\int_{\xi}^{\eta}u_0(\xi,\eta')A_1(\xi,\eta')\tilde{A}_1(\eta';\xi,\eta)\,d\eta'-$$
$$-\int_{\xi}^{\eta}d\xi'\int_{\xi'}^{\eta}\left(A_1\frac{\partial u_0}{\partial\xi'}+B_1\frac{\partial u_0}{\partial\eta'}+Cu_0\right)v(\xi',\eta';\xi,\eta)\,d\eta'.\quad(2.20)$$

При этом мы воспользовались тем, что

$$\lim_{\eta'-\xi'\to 0} A_1(\xi', \eta')\, v(\xi', \eta'; \xi, \eta) = -\frac{1}{2} b(\xi', 0) \lim_{\eta'-\xi'\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{1} \frac{v(\xi', \eta'; \xi, \eta)}{(\eta'-\xi')^{1/6}} = -\frac{1}{2} b(\xi', 0)\, h(\xi, \eta; \xi'),$$

и, кроме того, условием $a(x, 0) = 0$.

Подставив (2.20) в (2.19), найдем

$$u(\xi, \eta) = u_0(\xi, \eta) + \int_{\xi}^{\eta} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \left(A_1 \frac{\partial u_0}{\partial \xi'} + B_1 \frac{\partial u_0}{\partial \eta'} + Cu_0\right) v(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, d\eta'. \quad (2.21)$$

Для производных $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial v}{\partial \eta}$ имеют место неравенства, которые доказываются с помощью громоздких вычислений [4а],

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \xi}\right| \leqslant \frac{(\eta'-\xi')^{1/3}}{(\eta'-\xi)^{7/6}(\eta-\xi')^{1/6}} C_1(\xi, \eta; \xi', \eta'),$$
$$\left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{(\eta'-\xi')^{1/3}}{(\eta'-\xi)^{1/6}(\eta-\xi')^{7/6}} C_2(\xi, \eta; \xi', \eta'), \quad (2.22)$$

где C_1 и C_2 — ограниченные функции при $\xi \leqslant \xi' \leqslant \eta' \leqslant \eta$, $0 < \eta - \xi < \infty$.

В силу (2.17) и (2.22) можно дифференцировать под знаком двойного интеграла в (2.21); обозначая его через I, будем иметь

$$\frac{\partial I}{\partial \xi} = O\left((\eta-\xi)^{1/3}\right), \qquad \frac{\partial I}{\partial \eta} = O\left((\eta-\xi)^{1/3}\right). \quad (2.23)$$

Теперь, принимая во внимание (2.17) и (2.23), из формулы (2.21) получим, что производные $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ существуют и непрерывны в $\triangle ABC$. Легко видеть, что

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial u}{\partial \xi}\right| \\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right| \end{array}\right\} \leqslant C\left(M_1(\eta) + M_2(\eta)\right)(\eta-\xi)^{-1/3}, \quad (2.24)$$

и, следовательно, в силу (2.18) и (2.23)

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\nu(\xi)$$

равномерно при $0\leqslant\xi\leqslant\theta<1$.

Лемма 3 [4a]. *Для любого обобщенного решения $u\in R_1$ можно найти такую последовательность $\{u_n\}$ дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения* (2.3) *таких, что в любом замкнутом $\triangle A'B'C$, содержащемся в $\triangle ABC$, будем иметь*

$$\lim_{n\to\infty}u_n(\xi,\eta)=u(\xi,\eta) \tag{2.25}$$

и для любого $\varepsilon>0$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|<\varepsilon(\eta-\xi)^{-1/3},\quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|<\varepsilon(\eta-\xi)^{-1/3}. \tag{2.26}$$

Доказательство. Так как $\tau(x)$ и $\nu(x)$ представимы в виде (2.14), где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — непрерывные функции при $0\leqslant s<1$, то можно найти последовательности $\{\varphi_n(s)\}$ и $\{\psi_n(s)\}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций при $0\leqslant s<1$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(s)=\varphi(s)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(s)=\psi(s)$ равномерно в любом интервале $0\leqslant s\leqslant\theta<1$. Соответствующие функции $\tau_n(x)$ и $\nu_n(x)$ будут дважды непрерывно дифференцируемы при $0\leqslant x<1$, и, следовательно, решение $u_n(\xi,\eta)$ будет дважды непрерывно дифференцируемо в $\triangle ABC$. Далее, принимая во внимание неравенства (2.24), мы убеждаемся в справедливости неравенств (2.26). Очевидно, что и (2.25) имеет место. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь задачу Гурса для уравнения (2.3) в $\triangle ABC$, т. е. задачу *об определении дважды непрерывно дифференцируемого решения $u(\xi,\eta)$ уравнения* (2.3), *непрерывного в замкнутом $\triangle ABC$ и удовлетворяющего условиям*

$$u|_{\eta=\xi}=\tau(\xi),\qquad u|_{\xi=0}=0. \tag{2.27}$$

Для решения задачи Гурса воспользуемся функцией

Римана — Адамара $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$, которая определяется следующими условиями:

1) как функция (ξ_0, η_0), она удовлетворяет уравнению

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0;$$

2) как функция (ξ, η), она удовлетворяет сопряженному уравнению $E^*(u) = 0$;

3) $v(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1$;

4) $\dfrac{\partial[v]}{\partial\xi} + \dfrac{1}{6}\dfrac{[v]}{\eta-\xi} = 0$ при $\eta = \xi_0$,

где

$$[v] = \lim_{\varepsilon\to 0}[v(\xi, \xi_0+\varepsilon; \xi_0, \eta_0) - v(\xi, \xi_0-\varepsilon; \xi_0, \eta_0)].$$

Функция Римана — Адамара $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ была построена Геллерстедтом [18а]. Она имеет вид

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) =$$

$$= \begin{cases} v_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left(\dfrac{\eta-\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{1/6} F\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}, 1; s\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad \eta > \xi_0, \\ v_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = k\dfrac{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)^{2/3}}{(\eta_0-\eta)^{5/6}(\xi_0-\xi)^{5/6}} F\left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{3}; \dfrac{1}{s}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad \eta < \xi_0, \end{cases} \tag{2.28}$$

где

$$s = \frac{(\xi_0-\xi)(\eta_0-\eta)}{(\eta-\xi)(\eta_0-\xi_0)}, \qquad k = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}.$$

Пусть $u(\xi, \eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (2.3) в $\triangle ABC$, удовлетворяющее краевым условиям (2.27).

Уравнение (2.3) можно записать в виде

$$E(u) = -A_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi} - B_1(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\eta} - C(\xi, \eta)u.$$

Интегрируя тождество

$$vE(u) - uE^*(v) = -\left(A_1\frac{\partial u}{\partial\xi} + B_1\frac{\partial u}{\partial\eta} + Cu\right)v$$

по $\triangle A'B'C'$, ограниченному отрезком $A'C'$ характеристики $\xi=0$, отрезком $C'B'$ характеристики $\eta=\xi_0-\varepsilon$ и отрезком $A'B'$ прямой $\eta-\xi=\varepsilon$, и по прямоугольнику $C''B''D''D'$, ограниченному отрезками $C''B''$ и $D'D''$ характеристик $\eta=\xi_0+\varepsilon$, $\eta=\eta_0$ и отрезками $B''D''$ и $C''D'$ характеристик $\xi=\xi_0-2\varepsilon$ и $\xi=0$ (рис. 6), и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$u(\xi,\eta)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\int_0^{\xi}\frac{(\eta-\xi)^{2/3}}{(\eta-t)^{5/6}(\xi-t)^{5/6}}\tau(t)\,dt-$$

$$-\int_0^{\xi}d\xi'\int_{\xi'}^{\eta}\left(A_1\frac{\partial u}{\partial\xi'}+B_1\frac{\partial u}{\partial\eta'}+Cu\right)v(\xi',\eta';\xi,\eta)\,d\eta'. \qquad (2.29)$$

При получении этой формулы мы воспользовались условиями 1)—4), а также краевыми условиями (2.27).

Пусть $u(\xi,\eta)\in R_1$ — обобщенное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее краевым условиям (2.27). В силу леммы 3 можно найти последовательность $\{u_n(\xi,\eta)\}$ дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (2.3) таких, что

$$\lim_{n\to\infty}u_n(\xi,\eta)=u(\xi,\eta)$$

равномерно в любом замкнутом $\triangle A'B'C'$, причем имеют место неравенства (2.26). Поэтому в (2.29) (где u заменено на u_n) можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Таким образом, любое обобщенное решение уравнения (2.3) из класса R_1, обращающееся в нуль на характеристике $\xi=0$, можно представить в виде (2.29).

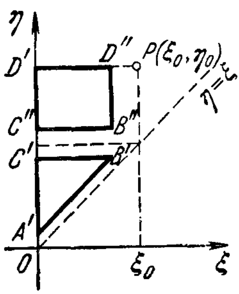

Рис 6.

Нетрудно проверить, что

$$\left|\frac{\partial v}{\partial\xi'}\right|<\frac{(\eta-\xi)^{2/3}}{(\eta-\xi')^{5/6}\,|\xi-\eta'|^{5/6}}. \qquad (2.30)$$

Поэтому в двойном интеграле в (2.29), содержащем член $A_1\frac{\partial u}{\partial\xi'}v(\xi',\eta',\xi,\eta)$, можно проинтегрировать по частям по ξ'. Полагая

$$K_0(\xi, \eta, t) = k' \frac{(\eta-\xi)^{2/3}}{(\eta-t)^{5/6}(\xi-t)^{5/6}}, \qquad k' = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

и производя указанное интегрирование по частям в двойном интеграле, представим (2.29) в виде

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi K_0(\xi, \eta, t)\,\tau(t)\,dt - \\ - \int_\xi^\eta \left(\frac{\eta'-\xi}{\eta-\xi}\right)^{1/6} A_1(\xi, \eta')\,u(\xi, \eta')\,d\eta' - \\ - \int_0^\xi d\xi' \int_{\xi'}^\eta \left(B_1 v \frac{\partial u}{\partial \eta'} + uw\right) d\eta', \tag{2.31}$$

где

$$w(\xi', \eta'; \xi, \eta) = Cv - \frac{\partial (A_1 v)}{\partial \xi'}.$$

Решение уравнения (2.31) будем искать в виде

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi K(\xi, \eta, t)\,\tau(t)\,dt, \tag{2.32}$$

где $K(\xi, \eta, t)$ — неизвестная функция.

Подставляя (2.32) в (2.31), получим

$$K(\xi, \eta, t) = K_0(\xi, \eta, t) - \int_\xi^\eta \left(\frac{\eta'-\xi}{\eta-\xi}\right)^{1/6} A_1(\xi, \eta')\,K(\xi, \eta', t)\,d\eta' - \\ - \int_t^\xi d\xi' \int_{\xi'}^\eta \left(B_1 v \frac{\partial K}{\partial \eta'} + wK\right) d\eta'. \tag{2.33}$$

Функцию $K(\xi, \eta, t)$ ищем в виде ряда

$$K(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_n(\xi, \eta, t). \tag{2.34}$$

Тогда из (2.33) имеем следующие соотношения:

$$K_{n+1}(\xi, \eta, t) = \int_{\xi}^{\eta} \left(\frac{\eta' - \xi}{\eta - \xi}\right)^{1/6} A_1(\xi, \eta') K_n(\xi, \eta', t)\, d\eta' + \\ + \int_{t}^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \left(B_1 v \frac{\partial K_n}{\partial \eta'} + w K_n\right) d\eta' \quad \textbf{(2.35)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Докажем сходимость ряда (2.34). Легко видеть, что

$$v(\xi', \eta'; \xi, \eta) < \frac{(\eta' - \xi')(\eta - \xi)^{2/3}}{(\eta - \xi')^{5/6} \,|\, \xi - \eta' \,|^{5/6}}. \tag{2.36}$$

Далее, так как

$$w = -\left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{c(\xi', \eta')}{(\eta' - \xi')^{2/3}} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi'}\right] v - A_1 \frac{\partial v}{\partial \xi'}, \tag{2.37}$$

то

$$|\, w \,| < M_3 \frac{v}{\eta' - \xi'} + \left|\frac{\partial v}{\partial \xi'}\right| M_1$$

или, в силу (2.30) и (2.36),

$$|\, w \,| < (M_1 + M_3) \frac{(\eta - \xi)^{2/3}}{(\eta - \xi')^{5/6} \,|\, \xi - \eta' \,|^{5/6}}, \quad \textbf{(2.38)}$$

где

$$M_1(l) = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \eta \leqslant l} |\, A_1(\xi, \eta) \,|,$$

$$M_3(l) = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \eta \leqslant l} \left| \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} c(\xi, \eta)(\eta - \xi)^{1/3} + (\eta - \xi) \frac{\partial A_1}{\partial \xi} \right|.$$

Принимая во внимание (2.36) и (2.38), из (2.35) получим

$$|\, K_{n+1} \,| \leqslant \mathfrak{M} \left[\int_{\xi}^{\eta} \left(\frac{\eta' - \xi}{\eta - \xi}\right)^{1/6} |\, K_n(\xi, \eta', t) \,|\, d\eta' + \right. \\ \left. + \int_{t}^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \frac{(\eta - \xi)^{2/3}}{(\eta - \xi')^{5/6} \,|\, \xi - \eta' \,|^{5/6}} \left\{ (\eta' - \xi') \left| \frac{\partial K_n}{\partial \eta'} \right| + |\, K_n \,| \right\} d\eta' \right], \tag{2.39}$$

где

$$\mathfrak{M}(l) = \max(M_2, M_1 + M_3), \qquad M_2(l) = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant \eta \leqslant l} |\, B_1(\xi, \eta) \,|.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\left|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right| < (\eta' - \xi')(\eta - \xi)^{-1/3}(\eta - \xi')^{-5/6}|\xi - \eta'|^{-5/6},$$
$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial \xi' \partial \eta}\right| < 4(\eta - \xi)^{-1/6}(\eta - \xi')^{-5/6}|\xi - \eta'|^{-5/6}. \tag{2.40}$$

Тогда из (2.37) имеем

$$\left|\frac{\partial w}{\partial \eta}\right| < (M_3 + 4M_1)(\eta - \xi)^{-1/3}(\eta - \xi')^{-5/6}|\xi - \eta'|^{-5/6}. \tag{2.41}$$

Дифференцируя (2.35) по η и используя оценки (2.40), (2.41), получим

$$\left|\frac{\partial K_{n+1}}{\partial \eta}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathfrak{M}\left\{|K_n(\xi, \eta, t)| + \frac{1}{6}\int_\xi^\eta \frac{(\eta' - \xi)^{1/6}}{(\eta - \xi)^{7/6}}|K_n(\xi, \eta', t)|\,d\eta' + \right.$$
$$+ \int_t^\xi (\eta - \xi')^{-5/6}(\eta - \xi)^{-1/6}\left[(\eta - \xi')\left|\frac{\partial K_n(\xi', \eta, t)}{\partial \eta}\right| + \right.$$
$$\left. + |K_n(\xi', \eta, t)|\right] d\xi' +$$
$$+ 4\int_t^\xi d\xi' \int_{\xi'}^\eta (\eta - \xi)^{-1/6}(\eta - \xi')^{-5/6}|\xi - \eta'|^{-5/6} \times$$
$$\left. \times \left[(\eta' - \xi')\left|\frac{\partial K_n}{\partial \eta'}\right| + |K_n|\right] d\eta' \right\}. \tag{2.42}$$

Обозначим правую часть (2.39) через $L_{n+1}(\xi, \eta, t)$ и положим $N_n(\xi, \eta, t) = (\eta - \xi)\left|\frac{\partial K_n}{\partial \eta}\right| + |K_n|$. Тогда из неравенств (2.39) и (2.42) находим

$$N_n(\xi, \eta, t) <$$
$$< \mathfrak{M}\left\{|K_n| + \int_t^\xi (\eta - \xi')^{-5/6}(\eta - \xi)^{-1/6} N_n(\xi', \eta, t)\,d\xi'\right\} \times$$
$$\times (\eta - \xi) + 5L_{n+1}(\xi, \eta, t) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.43}$$

Пользуясь неравенствами (2.39) и (2.43), **получим** следующие оценки·

$$
\begin{aligned}
|K_1(\xi, \eta, t)| &< \pi^2\mathfrak{M}\left[\left(\frac{\eta-\xi}{\xi-t}\right)^{2/3}+\left(\frac{\eta-\xi}{\xi-t}\right)^{5/6}\right] < \\
&< 2\pi^2\mathfrak{M}\frac{(\eta-\xi)^{2/3}(\eta-t)^{1/6}}{(\xi-t)^{5/6}}, \\
|N_1(\xi, \eta, t)| &< 6\pi^2\mathfrak{M}\left[\left(\frac{\eta-\xi}{\xi-t}\right)^{2/3}+\left(\frac{\eta-\xi}{\xi-t}\right)^{5/6}\right] < \\
&< 12\pi^2\mathfrak{M}\frac{(\eta-\xi)^{2/3}(\eta-t)^{1/6}}{(\xi-t)^{5/6}},
\end{aligned}
\qquad \textbf{(2.44)}
$$

Применяя метод индукции, будем иметь

$$
\begin{aligned}
|K_n(\xi, \eta, t)| &< \mathfrak{M}^n C^n \frac{(\eta-\xi)^{2/3}(\eta-t)^{1/6+n-1}}{(\xi-t)^{5/6}}, \\
|N_n(\xi, \eta, t)| &< \mathfrak{M}^n C^n \frac{(\eta-\xi)^{2/3}(\eta-t)^{1/6+n-1}}{(\xi-t)^{5/6}},
\end{aligned}
\qquad (2.45)
$$

где C — некоторая абсолютная постоянная, причем нетрудно убедиться в том, что $C < 124\pi$.

Из оценок (2.45) следует, что ряд (2.34) сходится абсолютно при $t < \xi$ и $\eta < \frac{1}{\mathfrak{M}C} = l_0$. Очевидно, что (2.32) является единственным решением уравнения (2.3) при краевых условиях (2.27) в классе функций таких, что

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = O\left((\eta-\xi)^{-1/3}\right).$$

Итак, доказана следующая

Лемма 4. *При $y < 0$ любое решение уравнения (2.1), принадлежащее классу R_1 и обращающееся в нуль на характеристике $\xi = 0$, можно представить в виде*

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} K(\xi, \eta, t)\,\tau(t)\,dt, \qquad (2.46)$$

при $\eta < l_0 = \dfrac{1}{\mathfrak{M}(l_0)\,C}$.

Замечание. В случае уравнения Трикоми, т. е. когда $a \equiv 0$, $b \equiv 0$ и $c \equiv 0$, решение (2.46) принимает более простой вид:

$$u(\xi, \eta) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \int_0^\xi \frac{(\eta-\xi)^{2/3}}{(\eta-t)^{5/6}(\xi-t)^{5/6}} \tau(t)\,dt.$$

Лемма 5 [4а]. *Пусть в области* D^+ *функция* $u(x, y) \in C^{(2)}(D^+) \cap C(\overline{D}^+)$ *удовлетворяет неравенству* $L(u) \geqslant 0$ $(L(u) \leqslant 0)$ *и в некоторой точке* x_0, $0 < x_0 < l$, *отрезка* $[0, l]$ *оси* x *принимает наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение. Если значения* $u(x, y)$ *на* Γ *меньше (больше), чем* $u(x_0, 0)$, *то*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} < 0 \qquad (>0)$$

при условии, что этот предел существует *).

Доказательство. Очевидно, что не может быть

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} > 0.$$

Допустим, что

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} = 0.$$

Пусть $\beta = \max\limits_D |b(x, y)|$. Обозначим через d диаметр области D и, не нарушая общности, положим $u(x_0, 0) = 1$. В силу условия леммы $\max\limits_\Gamma u(x, y) \leqslant 1 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \frac{\varepsilon u(x, y)}{e^{\beta d} - \varepsilon e^{\beta y}}.$$

На кривой Γ

$$v(x, y) \leqslant \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{e^{\beta d} - \varepsilon e^{\beta d}} = \varepsilon e^{-\beta d} < \frac{\varepsilon}{e^{\beta d} - \varepsilon},$$

*) См. также Р. Курант, Уравнения с частными производными ИЛ, 1964.

а на $[0,\ l]$

$$v(x,\ 0)<\frac{\varepsilon}{e^{\beta d}-\varepsilon},\qquad v(x_0,\ 0)=\frac{\varepsilon}{e^{\beta d}-\varepsilon}.$$

В силу $L(u)\geqslant 0$ функция $v(x,\ y)$ удовлетворяет неравенству

$$yv_{xx}+v_{yy}+a(x,\ y)v_x+\bar b(x,\ y)v_y+\bar c(x,\ y)v\geqslant 0$$
$$(\bar c(x,\ y)<0), \qquad (*)$$

и, кроме того, в силу нашего допущения

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial v(x_0,\ y)}{\partial y}=\frac{\varepsilon\beta}{(e^{\beta d}-\varepsilon)^2}>0.$$

Следовательно, функция $v(x,\ y)$ принимает наибольшее значение внутри области D, что невозможно ввиду $(*)$. Случай минимума рассматривается аналогично. Лемма доказана.

2. Принцип экстремума. Теорема единственности. Уравнение

$$yu_{xx}+u_{yy}+a(x,\ y)u_x+b(x,\ y)u_y+c(x,\ y)u=0 \quad (2.1)$$

будем рассматривать в области D, ограниченной простой дугой Жордана Γ, которая лежит в полуплоскости $y>0$ и опирается на отрезок $[0,\ l]$ оси ox, и двумя характеристиками

$$AC:\ \xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=0 \quad \text{и} \quad BC:\ \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=l$$

уравнения (2.1). Через D^+ и D^- будем обозначать части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$.

Определение. *Обобщенным решением из класса $\mathscr{R}_1$ уравнения (2.1) в области D назовем функцию $u(x,\ y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *$u(x,\ y)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$,*

2) *$u(x,\ y)$ дважды непрерывно дифференцируема в D^+ и удовлетворяет уравнению (2.1);*

3) *для любого x, $0<x<l$, существует*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y}=\nu(x);$$

4) *$u(x,\ y)\in R_1$ в области D^-.*

Теорема 2.1 [4а]. *Пусть*

1) *коэффициенты* a, b *и* c *уравнения* (2.1) *дважды непрерывно дифференцируемы в области* D, $c \leqslant 0$, $y \geqslant 0$;

2) $a(x, 0) = 0$, $b(x, 0) = 0$;

3) $l\mathfrak{M}(l) < \vartheta$, *где* ϑ — *некоторая абсолютная постоянная.*

Тогда решение $u(x, y) \in \mathscr{R}_1$ *задачи Трикоми для уравнения* (2.1), *равное нулю на характеристике* $\xi = 0$ (*или* $\eta = l$), *положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\overline{D}^+$ *принимает на линии* Γ.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (2.1) из класса $\mathscr{R}_1$, обращающееся в нуль на характеристике $\xi = 0$. Будем считать $l < l_0$. Внутри области D^+ функция $u(x, y)$, очевидно, не может достигать экстремума. Предположим, что положительный максимум в замкнутой области $\overline{D}^+$ достигается во внутренней точке $P(x_0, 0)$ интервала $(0, l)$. Пусть $u(x_0, 0) = M'$. Согласно лемме 4

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi K(\xi, \eta, t)\tau(t)\,dt =$$
$$= \int_0^\xi K_0(\xi, \eta, t)\tau(t)\,dt + \int_0^\xi \tau(t)\sum_{n=1}^\infty (-1)^n K_n(\xi, \eta, t)\,dt.$$

В силу оценок (2.45) имеем

$$u(\xi, \eta) < M' \int_0^\xi K_0(\xi, \eta, t)\,dt +$$
$$+ M'(\eta - \xi)^{2/3} \int_0^\xi \sum_{n=1}^\infty C^n \mathfrak{M}^n \frac{(\eta - t)^{1/6 + n - 1}}{(\xi - t)^{5/6}}\,dt =$$
$$= M' \left\{ 1 - k' \int_{\frac{\xi}{\eta - \xi}}^\infty \zeta^{5/6}(1 + \zeta)^{-5/6}\,d\zeta + \right.$$
$$\left. + (\eta - \xi)^{2/3} \int_0^\xi \frac{C\mathfrak{M}(\eta - t)^{1/6}\,dt}{(\xi - t)^{5/6}[1 - C\mathfrak{M}(\eta - t)]} \right\}.$$

Отсюда

$$u(\xi, \eta) < M'\left\{1 - k' \int\limits_{\frac{\xi}{\eta-\xi}}^{\infty} (1+\zeta)^{-5/3}\, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \frac{C\mathfrak{M}(\eta-\xi)^{2/3}}{1 - C\mathfrak{M}\eta} \int\limits_0^{\xi} \frac{(\eta-t)^{1/6}}{(\xi-t)^{5/6}}\, dt \right\}$$

или

$$u(\xi, \eta) <$$

$$< M'\left\{1 - (\eta-\xi)^{2/3}\left[\frac{3k'}{2}\eta^{-2/3} - \frac{C\mathfrak{M}}{1 - C\mathfrak{M}\eta}\int\limits_0^{\xi} \frac{(\eta-t)^{1/6}}{(\xi-t)^{5/6}}\, dt\right]\right\}.$$

При достаточно малой величине $\eta - \xi$

$$\frac{3k'}{2}\eta^{-2/3} - \frac{C\mathfrak{M}}{1 - C\mathfrak{M}\eta}\int\limits_0^{\xi} \frac{(\eta-t)^{1/6}}{(\xi-t)^{5/6}}\, dt \geqslant 0,$$

так как при $\eta = \xi$ левая часть последнего неравенства будет

$$\xi^{-2/3}\left(\frac{3}{2}k' - \frac{3C\mathfrak{M}\xi}{1 - C\mathfrak{M}\xi}\right) > 0,$$

если только

$$\xi < \frac{k'}{C\mathfrak{M}(k'+2)} = \frac{\vartheta}{\mathfrak{M}}.$$

Следовательно, если

$$l\mathfrak{M}(l) < \vartheta, \tag{2.47}$$

то

$$u(\xi, \eta) < M' \qquad (\text{в } D^-). \tag{2.48}$$

С другой стороны, рассматривая решение $u(x, y)$ в области D^+, мы в силу леммы 5 имеем

$$\lim_{y \to +0} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial y} < 0$$

и, следовательно, при достаточно малом $|y|$, $y < 0$,

$$u(x_0, y) > u(x_0, 0) = M' \qquad (\text{в } D^-). \tag{2.49}$$

Неравенства (2.48) и (2.49) противоречивы, что и доказывает теорему 2.1.

В качестве следствия, получается

Теорема 2.2. *В классе* $\mathcal{R}_1$ *решение задачи* T *для уравнения* (2.1) *единственно, если имеет место* (2.47) *и* $a(x, 0)=0$, $b(x, 0)=0$.

Доказательство очевидно.

Наиболее сильным ограничением, наложенным на коэффициенты a и b уравнения (2.1), является их обращение в нуль при $y=0$. Можно несколько ослабить эти ограничения. Достаточно потребовать, чтобы $b(x, 0)= =\mathrm{const}<0$. Этот случай простой подстановкой сводится к ранее разобранному.

Отметим, что для уравнения Трикоми

$$yu_{xx}+u_{yy}=0$$

принцип экстремума и теорема единственности справедливы без всякого ограничения на длину линии перехода.

При изложении настоящего пункта мы в основном следовали работе К. И. Бабенко [4а].

3. Принцип экстремума для гиперболических уравнений *). Рассмотрим уравнение

$$L_1(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}+\alpha(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta(\xi, \eta)\frac{\partial u}{\partial\eta}+\gamma(\xi, \eta)u=0 \tag{2.50}$$

в области D_1, ограниченной отрезками AC и CB характеристик $\xi=0$ и $\eta=1$ уравнения (2.50) и отрезком AB прямой $\eta=\xi$.

Пусть 1) $\alpha(\xi, \eta)$ имеет непрерывную производную первого порядке по ξ в D_1+AC, 2) коэффициенты α, β и γ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}_1$ и 3) удовлетворяют условиям:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\alpha\geqslant 0, & (2.51)\\ \alpha_\xi+\alpha\beta-\gamma\geqslant 0, & (2.52)\\ \gamma\geqslant 0 & (2.53)\end{cases}$$

в области D_1.

*) См. [3].

Условия (I) могут быть выражены в несколько иной форме. Дифференциальный оператор, полученный от умножения оператора $L_1(u)$ на $\beta_1 = e^{\int \beta \, d\xi}$, может быть записан в виде

$$\beta_1 L_1(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\beta_1 \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}(\alpha_1 u) + \gamma_1 u,$$

где

$$\alpha_1 = \beta_1 \alpha, \qquad \gamma_1 = \beta_1 \gamma - \alpha_{1\xi}.$$

Условия (I) тогда примут вид

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1 \geqslant 0, & (2.51') \\ \gamma_1 \leqslant 0. & (2.52') \end{array}\right.$$

Будем считать, что $u(\xi, \eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в D_1, непрерывная вместе с производными первого порядка в $\bar{D}_1$.

Теорема 2.3 [3] (Принцип максимума). *Пусть* 1) $u_\eta(0, \eta) \leqslant 0$, 2) *коэффициенты оператора* $L_1(u)$ *удовлетворяют* (I) *и* 3) $L_1(u) \leqslant 0$ *в* $D_1 + AC + CB$. *Тогда, если максимум u в $\bar{D}_1$ положителен, то он достигается на* $\overline{AB}$.

Заметим, что если $\gamma \equiv 0$, то теорема 2.3 справедлива без требования, чтобы $\max u > 0$ в $\bar{D}_1$.

Мы докажем вначале более слабую форму принципа максимума. Будем говорить, что коэффициенты α, β и γ уравнения (2.50) удовлетворяют условиям (I′), если 1) условия (I) выполняются и 2) либо (2.51) имеет вид точного неравенства, либо на каждом отрезке $\eta = \text{const}$ множество точек, в которых (2.52) и (2.53) имеют вид равенств, имеет меру нуль.

Теорема 2.3′. *Пусть $u(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.3, *и предположим, что условия* (I′) *выполнены. Тогда верно заключение теоремы* 2.3.

Теорема 2.3′ является следствием следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть $[P, Q]$ — характеристический отрезок, параллельный оси ξ, целиком лежащий в $D_1 + AC + CB$, и пусть коэффициенты оператора $L_1(u)$ удовлетворяют условиям* (I′) *и $L_1(u) \leqslant 0$ на $[P, Q]$. Тогда, если* $\max u$

на $[P, Q]$ достигается в точке Q и неотрицателен, то выполняется неравенство

$$(\beta_1 u_\eta)_Q \leqslant (\beta_1 u_\eta)_P \text{ *)}.$$

Если к тому же $u(Q) > 0$ и $u(Q) > u(P)$, то

$$(\beta_1 u_\eta)_Q < (\beta_1 u_\eta)_P.$$

Доказательство. Так как $L_1(u) \leqslant 0$ на $[P, Q]$ по условию, то

$$\beta_1 L_1(u) = (\beta_1 u_\eta)_\xi + (\alpha_1 u)_\xi + \gamma_1 u \leqslant 0 \quad \text{на} \quad [P, Q].$$

Интегрируя вдоль PQ, получим

$$\int_P^Q [(\beta_1 u_\eta)_\xi + (\alpha_1 u)_\xi + \gamma_1 u]\, d\xi \leqslant 0,$$

откуда

$$(\beta_1 u_\eta)_Q - (\beta_1 u_\eta)_P \leqslant -\int_P^Q \gamma_1 u\, d\xi + (\alpha_1 u)_P - (\alpha_1 u)_Q. \quad (2.54)$$

В правой части (2.54) прибавим и вычтем выражение

$$u(Q) \int_P^Q \gamma_1 d\xi = u(Q) \int_P^Q \beta_1 \gamma\, d\xi - u(Q)[\alpha_1(Q) - \alpha_1(P)],$$

после чего получим

$$(\beta_1 u_\eta)_Q - (\beta_1 u_\eta)_P \leqslant \int_P^Q [u(Q) - u]\, \gamma_1\, d\xi -$$
$$- u(Q) \int_P^Q \beta_1 \gamma\, d\xi - [u(Q) - u(P)]\, \alpha_1(P). \quad (2.55)$$

Отсюда в силу условий (I) и $u(Q) \geqslant u(P)$ имеем

$$(\beta_1 u_\eta)_Q \leqslant (\beta_1 u_\eta)_P.$$

---

*) Здесь $(\beta_1 u_\eta)$ обозначает значение произведения $\beta_1 u_\eta$ в точке Q.

Далее, если $u(Q)>0$ и $u(Q)>u(P)$, то по крайней мере один из членов справа в (2.55) отрицателен согласно условиям (I′). Следовательно,

$$(\beta_1 u_\eta)_Q<(\beta_1 u_\eta)_P.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.3′ просто следует из леммы 6.

Действительно, предположим, что максимум $u(\xi, \eta)$ в $\bar{D}_1$ не достигается на $\overline{AB}$. Он не может достигаться и на $AC\,(\xi=0)$, так как $\max u$ на AC достигается в точке A (в силу $u_\eta(0, \eta)\leqslant 0$), которая принадлежит $\overline{AB}$. Таким образом, точка максимума Q лежит в $D+CB$. Из точки Q проведен отрезок $\eta=\text{const}$, кончающийся в точке P на AC. Максимум u на $[P, Q]$ достигается в точке Q, и $u(Q)>0$, $u(Q)>u(P)$. В силу леммы 6

$$(\beta_1 u_\eta)_Q<(\beta_1 u_\eta)_P,$$

и из $u_\eta(P)\leqslant 0$ следует, что $u_\eta(Q)<0$. Но тогда Q не может быть точкой максимума функции u в $\bar{D}_1$. Теорема 2.3′ доказана.

С помощью теоремы 2.3′ докажем теперь теорему 2.3.

Пусть $g(\xi, \eta)$ — функция, удовлетворяющая условиям:

$$M_1(g)\equiv g_{\xi\eta}+\alpha g_\xi+\beta g_\eta>0 \quad \text{в} \quad \bar{D}_1, \tag{2.56}$$

$$g_\eta\geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_1, \quad g_\eta=0 \quad \text{при} \quad \xi=0. \tag{2.57}$$

Такая функция легко строится, например, $g(\xi, \eta)=\operatorname{sh} k\xi \operatorname{ch} k\eta$ для достаточно больших k. Если функция u удовлетворяет условиям теоремы 2.3, то рассмотрим множество функций

$$u_\varepsilon=e^{-\varepsilon g}u \qquad (\varepsilon>0).$$

Нетрудно видеть, что

$$L_{1\varepsilon}(u_\varepsilon)=\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial\xi\,\partial\eta}+\alpha_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\xi}+\beta_\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\eta}+\gamma_\varepsilon u_\varepsilon\leqslant 0 \quad \text{в} \quad \bar{D}_1,$$

где

$$\alpha_\varepsilon=\alpha+\varepsilon g_\eta, \quad \beta_\varepsilon=\beta+\varepsilon g_\xi, \quad \gamma_\varepsilon=\gamma+\varepsilon\,[\varepsilon g_\xi g_\eta+M_1(g)]. \tag{2.58}$$

Покажем, что для достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция u_ε и коэффициенты оператора $L_{1\varepsilon}(u)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2.3. Отметим сначала, что в силу предположений, наложенных на u, и так как $e^{-\varepsilon g} > 0$, u_ε имеет положительный максимум в $\overline{D}_1$. В силу (2.57) следует, что $u_{\varepsilon\eta} \leqslant 0$ при $\xi = 0$. Из (2.51) и (2.57) имеем

$$\alpha_\varepsilon = \alpha + \varepsilon g_\eta \geqslant 0.$$

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial \alpha_\varepsilon}{\partial \xi} + \alpha_\varepsilon \beta_\varepsilon - \gamma_\varepsilon = \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \alpha\beta - \gamma \geqslant 0.$$

Далее, из (2.58) и (2.53) имеем

$$\gamma_\varepsilon \geqslant \varepsilon\,[\varepsilon g_\xi g_\eta + M_1(g)].$$

В силу (2.56) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $\gamma_\varepsilon > 0$ в $\overline{D}_1$. Отсюда следует, что условия (I′) выполняются. Применяя теорему 2.3′, мы заключаем, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция u_ε достигает положительного максимума на $\overline{AB}$. Так как при $\varepsilon \to 0$ $u_\varepsilon \to u$, то и u также принимает положительный максимум на $\overline{AB}$. Теорема доказана.

4. Принцип экстремума для вырождающихся гиперболических уравнений. Теорема единственности. Рассмотрим уравнение

$$K(y)\,u_{xx} + u_{yy} + a(x, y)\,u_x + b(x, y)\,u_y + c(x, y)\,u = 0, \tag{2.59}$$

где $K(y)$ — монотонно возрастающая функция, имеющая непрерывную вторую производную, и $K(0) = 0$.

Обозначим через D_1^- область, ограниченную характеристиками

$$AC\colon x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = 0 \quad \text{и} \quad BC\colon x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt = 1$$

и отрезком AB оси x. Предположим, что коэффициенты уравнения (2.59) непрерывны в замкнутой области $\overline{D}_1^-$ и что $a(x, y)$ и $b(x, y)$ имеют непрерывные производные первого порядка в $D_1^- + AC + BC$.

Результаты п. 2 можно распространить на уравнение (2.59). Чтобы получить аналогичные условия на коэффициенты уравнения (2.59), введем характеристические координаты

$$\xi = x + \int_0^k \sqrt{-K(t)}\,dt, \qquad \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt.$$

Уравнение (2.59) в характеристических координатах приводится к виду (2.50). Область D_1^- $(y<0)$ преобразуется в область Λ: $0<\xi<\eta<1$. Условия (I) в области D_1^- для уравнения (2.59) запишутся в виде

$$(\mathrm{I}'')\quad \begin{cases} a + b\sqrt{-K} - \dfrac{K'}{2\sqrt{-K}} \leqslant 0, \\ \delta\left(\dfrac{a + b\sqrt{-K}}{\sqrt{-K}} + \dfrac{K'}{2K}\right) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2K}\left(a + b\sqrt{-K} - \dfrac{K'}{2\sqrt{-K}}\right) \times \\ \quad \times \left(a - b\sqrt{-K} - \dfrac{K'}{2\sqrt{-K}}\right) - 2c \leqslant 0, \\ c(x, y) \leqslant 0, \end{cases}$$

где $\delta \equiv \dfrac{\partial}{\partial y} + \sqrt{-K}\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Теорема 2.4. *Пусть* 1) $u(\xi, \eta)$ — *обобщенное решение уравнения* (2.50) *класса* R_1, *непрерывное в* $\bar{\Delta}^-$, *обращающееся в нуль на характеристике* $\xi = 0$: 2) *коэффициенты* α, β *и* γ *удовлетворяют условиям* (I'). *Тогда, если максимум* $u(\xi, \eta)$ *в* $\bar{\Delta}^-$ *положителен, то он достигается на* $\overline{AB}$.

Доказательство. Предположим, что $\max u = M > 0$ в $\bar{\Delta}^-$ не достигается на AB. Он не достигается и на AC, так как $u = 0$ при $\xi = 0$. Тогда, очевидно, существует замкнутое множество F, не имеющее общих точек с $\overline{AB}$, в каждой точке которого $u(\xi, \eta) = M$. Так как F и $\overline{AB}$ — замкнутые ограниченные множества, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому можно выбрать такое $\varepsilon>0$, что отрезок $A'B'$ прямой $\eta=\xi+\varepsilon$ не будет иметь общих точек с F и при этом замкнутый $\triangle A'B'C$ будет содержать множество F. В силу леммы 3 п. 1 обобщенное решение $u(\xi, \eta)\in R_1$ можно представить как предел последовательности $\{u_n(\xi, \eta)\}$ дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (2.50) в $\triangle A'B'C$ таких, что $u_n(0, \eta)=0$. Так как в замкнутом $\triangle A'B'C$ выполнены все условия теоремы 2.3, то $u_n(\xi, \eta)$ имеет положительный максимум на $A'B'$. Обозначим через M_1 наибольшее значение $u(\xi, \eta)$ на $A'B'$. Ясно, что $M_1<M$. Положим $\varepsilon_1=\frac{M-M_1}{2}$. Так как последовательность $\{u_n(\xi, \eta)\}$ сходится равномерно в замкнутом $\triangle A'B'C$, то для взятого $\varepsilon_1>0$ найдется такое N, что для всех $n>N$

$$u-\varepsilon_1<u_n(\xi, \eta)<u+\varepsilon_1.$$

На множестве F

$$u_n(\xi, \eta)>\frac{M+M_1}{2},$$

а на $A'B'$

$$u_n(\xi, \eta)<\frac{M+M_1}{2} \quad \text{при} \quad n>N.$$

Отсюда следует, что $u_n(\xi, \eta)$ не достигает максимума на $A'B'$, что противоречит теореме 2.3. Таким образом, $u(\xi, \eta)$ принимает значение M на $\overline{AB}$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Если коэффициенты уравнения* (2.59) *удовлетворяют условиям* (1″), *то в классе* $\mathscr{R}_1$ *решение задачи T единственно.*

Доказательство. Пусть $v(x, y)$ — решение уравнения (2.59) из класса $\mathscr{R}_1$, удовлетворяющее условиям

$$v|_{\Gamma}=0, \qquad v|_{\xi=0}=0.$$

Покажем, что $v(x, y)\equiv 0$ в $\bar{D}$. Допустим, что $v(x, y)\not\equiv 0$ в $\bar{D}$, и пусть $v(x, y)$ имеет в $\bar{D}$ положительный максимум, равный M. Согласно теореме 2.4 $\max v(x, y)$ в $\bar{D}$ достигается на AB в D^+ или на Γ. Внутри области D^+ функция $v(x, y)$ не может принимать экстремума, что следует из принципа максимума для эллиптических уравнений. Так как $v=0$ на Γ, то $\max v(x, y)$ достигается внутри AB. Пусть $v(x_0, 0)=M$, $0<x_0<1$. По лемме 5

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} < 0 \qquad (y>0),$$

тогда как согласно теореме 2.4

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial v(x_0, y)}{\partial y} \geqslant 0 \qquad (y<0),$$

что невозможно в силу непрерывности $\frac{\partial v}{\partial y}$ на линии параболичности. Таким образом, $v \equiv 0$ в $\bar{D}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Для уравнения Чаплыгина

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad K(0)=0, \qquad K'(y)>0.$$

Условие (I″) запишется в виде

$$\frac{d^2}{dy^2} |K|^{-1/4} \geqslant 0 \quad \text{для} \quad y<0.$$

§ 3. Теоремы единственности задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина

Рассмотрим уравнение Чаплыгина

$$K(y) u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{3.1}$$

где $K(y)$ — монотонно возрастающая функция, имеющая непрерывную вторую производную, и $K(0)=0$.

Пусть D — область, ограниченная простой дугой Жордана Γ с концами в точках $O(0, 0)$ и $A(a, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y>0$, и дугами характеристик

$$\gamma_1\colon x = -\int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt, \qquad \gamma_2\colon x-a = \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt \tag{3.2}$$

уравнения (3.1).

Задача Трикоми, как известно, состоит в нахождении решения уравнения (3.1) в области D, принимающего заданные значения на Γ и на характеристике γ_1.

Ф. И. Франкль [64а] доказал единственность решения задачи Трикоми для уравнения (3.1) при условии, что функция

$$F(y)=2\left(\frac{K}{K'}\right)'+1 \tag{3.3}$$

неотрицательна при $y<0$. Проттер [53б] обобщил теорему единственности, включив случаи, когда $F(y)$ может принимать отрицательные значения при $y<0$.

Единственность решения задачи Трикоми докажем для двух типов областей D. В первом случае кривая Γ, лежащая в эллиптической полуплоскости, произвольна, но часть области, лежащей в гиперболической полуплоскости, ограничивается тем, что $F(y)>d$, где $d<0$. Во втором случае гиперболическая часть области произвольна и функция $F(y)$ может принимать любые значения при $y<0$, но зато кривая Γ не должна простираться слишком далеко в направлении оси Oy.

Определение. *Квазирегулярным решением уравнения* (3.1) *в области D назовем функцию $u(x, y)$, если она принадлежит классу $C^{(2)}(D)\cap C(\bar{D})$, удовлетворяет уравнению* (3.1) *в D, а также если интегралы*

$$\int_0^a u(x, 0)\, u_y(x, 0)\, dx, \qquad \iint_{D^+} (Ku_x^2+u_y^2)\, dx\, dy$$

существуют и к интегралам

$$\iint_D uL(u)\, dx\, dy, \qquad \iint_D u_x L(u)\, dx\, dy, \qquad \iint_D u_y L(u)\, dx\, dy$$

можно применить формулу Грина.

Контурный интеграл, входящий в формулу Грина, существует как предел интегралов, взятых по кривым, стремящимся изнутри к контуру области D.

Теорема 2.6 [53б]. *Пусть* 1) *$K(y)$ — монотонно возрастающая функция, имеющая непрерывную вторую производную, $K(0)=0$, $K'(y)\neq 0$ при $y<0$, $F(0)>0$;* 2) *существует постоянная $d_1<0$ такая, что $F(y)\geqslant d_1$ в области D, и* 3) *$u(x, y)$ — квазирегулярное решение уравнения* (3.1), *обращающееся в нуль на Γ и γ_1. Тогда $u(x, y)\equiv 0$ в D.*

Теорема 2.7 [53б]. *Пусть* 1) $K(y)$ *удовлетворяет условию* 1) *теоремы* 2.6; 2) *существует постоянная* $d_2>0$ *такая, что* $y_m<d_2$, *где* y_m — *максимум ординат точек кривой* Γ, *и* 3) $u(x, y)$ — *квазирегулярное решение уравнения* (3.1), *обращающееся в нуль на* Γ *и* γ_1. *Тогда* $u(x, y)\equiv 0$ *в* D.

Теоремы 2.6 и 2.7 будем доказывать одновременно. Рассмотрим интеграл

$$\iint_D (au+bu_x+cu_y)(Ku_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy, \tag{3.4}$$

где $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — достаточно гладкие функции, а $u(x, y)$ — квазирегулярное решение уравнения (3.1).

Применяя формулу Грина к интегралу (3.4), получим

$$0=\iint_D\Big[\frac{1}{2}(Ka_{xx}+a_{yy})u^2-a(Ku_x^2+u_y^2)-\frac{1}{2}b_x(Ku_x^2-u_y^2)-$$
$$-b_yu_xu_y-\frac{1}{2}(cK)_yu_x^2-c_xKu_xu_y-\frac{1}{2}c_yu_y^2\Big]dx\,dy+$$
$$+\int_{\Gamma+\gamma_1+\gamma}\Big[-auu_y+\frac{1}{2}a_yu^2-bu_xu_y+\frac{1}{2}c(Ku_x^2-u_y^2)\Big]dx+$$
$$+\Big[aKuu_x-\frac{1}{2}a_xKu^2+\frac{1}{2}b(Ku_x^2-u_y^2)+cKu_xu_y\Big]dy=$$
$$=J_1+J_2.$$

Пусть решение $u(x, y)$ обращается в нуль на Γ и γ_1. Выберем $b=c\equiv 0$ в D^+. Тогда J_2 можно записать в виде

$$J_2=\int_{\gamma_1}\Big[-bu_xu_y+\frac{1}{2}c(Ku_x^2-u_y^2)\Big]dx+$$
$$+\Big[\frac{1}{2}b(Ku_x^2-u_y^2)+cKu_xu_y\Big]dy+$$
$$+\int_{\gamma_2}\Big[-auu_y+\frac{1}{2}a_yu^2-bu_xu_y+\frac{1}{2}c(Ku_x^2-u_y^2)\Big]dx+$$
$$+\Big[aKuu_x-\frac{1}{2}a_xKu^2+\frac{1}{2}b(Ku_x^2-u_y^2)+cKu_xu_y\Big]dy$$

или, в силу равенств

$$dx = -\sqrt{-K}\,dy \quad (\text{на } \gamma_1), \qquad dx = \sqrt{-K}\,dy \quad (\text{на } \gamma_2),$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} (b - c\sqrt{-K})(\sqrt{-K}\,u_x - u_y)(u_x\,dx + u_y\,dy) -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} (b + c\sqrt{-K})\left(\sqrt{-K}\,u_x^2 + 2u_x u_y + \frac{1}{\sqrt{-K}}\,u_y^2\right) dx -$$

$$-\int_{\gamma_2} a\sqrt{-K}\,u\,du - \frac{1}{2}\sqrt{-K}\,u^2(a_x\,dx + a_y\,dy) =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3. \qquad (3.5)$$

Так как $u \equiv 0$ на γ_1, то $u_x\,dx + u_y\,dy = 0$ вдоль γ_1, и, следовательно, $I_1 = 0$.

Интеграл J_1 разобьем на три интеграла следующим образом:

$$J_1 = -\iint_{D^+} a(Ku_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{D^-} \{[2aK + Kb_x - (cK)_y]\,u_x^2 + 2(Kc_x + b_y)\,u_x u_y +$$

$$+ (2a - b_x + c_y)\,u_y^2\}\,dx\,dy + \iint_D (Ka_{xx} + a_{yy})\,u^2\,dx\,dy =$$

$$= I_4 + I_5 + I_6. \qquad (3.6)$$

Покажем, что можно выбрать функции a, b и c так, что все интегралы $I_2, I_3, \ldots, I_6$ будут неположительны. Тогда каждый из них в отдельности должен равняться нулю, поскольку их сумма равна нулю. А тогда из $I_4 = 0$ (если $a > 0$) следует, что $u(x, y) \equiv c$ в D^+, а так как $u \equiv 0$ на Γ, то $u(x, y) \equiv 0$ в D^+. В частности, $u(x, 0) = 0$ и $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0$, а тогда $u(x, y) \equiv 0$ в D^- в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (3.1). Таким образом, $u(x, y) \equiv 0$ всюду в области D.

Для $y < 0$ положим

$$c = \frac{4aK}{K'}, \qquad b = -c\sqrt{-K}. \qquad (3.7)$$

Очевидно, $I_2 = 0$ при таком выборе $b(x, y)$. Интегрируя I_3 по частям, получим

$$I_3 = \int\limits_{\gamma_2} \left(\sqrt{-K}\, a_x + a_y + \frac{aK'}{4K} \right) u^2\, dx.$$

Этот интеграл будет неположительным, если

$$\sqrt{-K}\, a_x + a_y + \frac{aK'}{4K} \leqslant 0 \qquad \text{при} \quad y < 0$$

или если выполнены два условия:

$$a(x, y) \geqslant 0 \qquad \text{при} \quad y \leqslant 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{\sqrt{-K}\, a_x + a_y}{a} \leqslant 0 \qquad \text{при} \quad y \leqslant 0. \tag{3.9}$$

Интеграл I_5 будет неположителен, если

$$(Kc_x + b_y)^2 \leqslant (2a - b_x + c_y)(2aK + Kb_x - (cK)_y) \quad \text{при} \quad y \leqslant 0 \tag{3.10}$$

и

$$2a - b_x + c_y \geqslant 0 \qquad \text{при} \quad y \leqslant 0. \tag{3.11}$$

В силу (3.7) неравенство (3.10) выполняется при любой функции $a(x, y)$, а неравенство (3.11) принимает следующий вид:

$$\sqrt{-K}\, a_x + a_y + a \frac{K'}{2K} F(y) \leqslant 0. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь два различных случая.

Случай 1. $F(y) > 0$ при всех $y < 0$. Тогда за $a(x, y)$ можно взять любую положительную постоянную для всех (x, y) в области D. Неравенства (3.8) и (3.9) выполняются, и интеграл $I_3 \leqslant 0$. Ясно, что $I_4 \leqslant 0$, $I_5 \leqslant 0$, а $I_6 = 0$. Так как $I_1 + I_2 + \ldots + I_6 = 0$, отсюда заключаем, что каждый интеграл равен нулю, а следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ в D.

Случай 2. $F(y)$ принимает отрицательные значения при $y < 0$. В этом случае положим

$$a(x, y) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & y \leqslant 0, \\ e^{-\beta x} \cos \gamma y, & y \geqslant 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

где β и γ — постоянные.

При доказательстве теоремы 2.6 положим $\gamma = \frac{\pi}{2y_m}$ и $\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{K(y_m)}}$. Неравенство (3.12) будет выполняться, если

$$F(y) \geqslant \frac{2K\sqrt{-K}\beta}{K'}. \tag{3.14}$$

Пусть $d_1 = \min\limits_{y \in D^-} \frac{2K\sqrt{-K}\beta}{K'}$, тогда при $F(y) > d_1$ в силу (3.14) $I_5 \leqslant 0$. Нетрудно видеть, что все остальные интегралы неположительны. Отсюда, как и выше, следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

При доказательстве теоремы 2.7 положим

$$\beta = \max_{y<0} \frac{K'}{2K\sqrt{-K}} F(y).$$

Тогда, если $y_m < \frac{\pi}{2\beta\sqrt{K(y_m)}}$ $(= d_2)$, мы выберем $\gamma = \beta\sqrt{K(y_m)}$ и, производя простые вычисления, убедимся, что все интегралы положительны, отсюда будет следовать, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

Рассмотрим еще одну теорему, также принадлежащую Проттеру [53б].

Теорема 2.8. *Пусть* 1) $K(y)$ *имеет непрерывную производную третьего порядка, удовлетворяющую условию* $K'''(y) \leqslant 0$ *всякий раз, когда* $F(y) < 0$ *при* $y < 0$, 2) $u(x, y)$ — *квазирегулярное решение уравнения* (3.1), *обращающееся в нуль на* Γ *и* γ_1. *Тогда* $u(x, y) \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теорем 2.6 и 2.7, мы снова придем к выражению (3.5) и (3.6). Покажем, что можно выбрать функции a, b и c так, что все интегралы $I_2, \ldots, I_6$ будут неположительны. Отсюда, как и выше, легко следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

Для $y < 0$ снова положим

$$c = \frac{4aK}{K'}, \qquad b = -c\sqrt{-K}. \tag{3.7}$$

Напомним, что при $y \geqslant 0$ мы положили $b = c \equiv 0$. Очевидно, $I_2 = 0$ при таком выборе функции $b(x, y)$.

Для простоты предположим, что $F(y)$ неотрицательна при $y_0 \leqslant y \leqslant 0$ и принимает отрицательные значения при $y < y_0$.

В силу выбора функций b и c интеграл I_5 можно записать в виде

$$I_5 = -\iint\limits_{D^-} \left[aF(y) + \frac{2K}{K'}\left(a_y + \sqrt{-K}\, a_x\right)\right] \times$$
$$\times \left(\sqrt{-K}\, u_x + u_y\right)^2 dx\, dy.$$

Этот интеграл будет положительным, если

$$aF(y) + \frac{2K}{K'}\left(a_y + \sqrt{-K}\, a_x\right) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad y < 0.$$

Пусть x_1 — наибольшая абсцисса всех точек кривой Γ. Функцию $a(x, y)$ определим следующим образом:

$$a(x, y) = \begin{cases} [-K(y)]^{-3/2} K'(y) \left[(x_1 - x) + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\, dt\right], & y \leqslant y_0, \\ [-K(y_0)]^{-3/2} K'(y_0) \left[(x_1 - x) + \int\limits_0^y \sqrt{-K(t)}\, dt\right], & y_0 \leqslant y \leqslant 0, \\ [-K(y_0)]^{-3/2} K'(y_0)(x_1 - x), & y \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Легко видеть, что $a(x, y)$ имеет непрерывные производные первого порядка и кусочно-непрерывные производные второго порядка в D. В самом деле, при $y = 0$ имеем

$$a_y(x, 0+) = 0$$

и

$$a_y(x, 0-) = [-K(y_0)]^{-3/2} K'(y_0) \sqrt{-K(0)} = 0.$$

На линии $y = y_0$ имеем

$$a_y(x, y_0 + 0) = [-K(y_0)]^{-3/2} K'(y_0) \sqrt{-K(y_0)}$$

и

$$a_y(x, y_0-0) = [-K(y_0)]^{-1/2} K'(y_0)\sqrt{-K(y_0)} + \\ +\frac{1}{2}[-K(y_0)]^{-5/2}[3K'^2(y_0) - 2K(y_0)K''(y_0)] \times \\ \times\left[(x_1 - x) + \int_0^{y_0}\sqrt{-K(t)}\,dt\right].$$

Отсюда в силу $F(y_0) = 0$ следует, что

$$a_y(x, y_0+0) = a_y(x, y_0-0).$$

Очевидно, что $a(x, y) \geqslant 0$ в области D. Действительно, при $y \geqslant 0$ это следует из выбора x_1. Для отрицательных значений y заметим, что величина $-x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt$ остается постоянной вдоль одного из семейств характеристик уравнения (3.1). Так как величина $x_1 - x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}\,dt$ положительна при $y=0$, то она будет оставаться положительной всюду в области D^-.

В силу (3.15) и (3.3) имеем

$$aF(y) + \frac{2K}{K'}\left(a_y + \sqrt{-K}\,a_x\right) = 0 \qquad \text{при} \quad y \leqslant y_0,$$

$$aF(y) + \frac{2K}{K'}\left(a_y + \sqrt{-K}\,a_x\right) = aF(y) \quad \text{при} \quad y_0 \leqslant y \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что $I_5 \leqslant 0$, так как $F(y) \geqslant 0$ при $y_0 \leqslant y \leqslant 0$.

Интегрируя I_3 по частям, а затем разбивая его на два, получим

$$I_3 = \int_{\gamma_2'}\left(\sqrt{-K}\,a_x + a_y + \frac{aK'}{4K}\right)u^2\,dx + \\ + \int_{\gamma_2''}\left(\sqrt{-K}\,a_x + a_y + \frac{aK'}{4K}\right)u^2\,dx,$$

где γ_2' — часть характеристики γ_2, лежащая выше $y=y_0$, γ_2'' — часть γ_2, лежащая ниже $y=y_0$. Подставляя значения $a(x, y)$ из (3.15), будем иметь

$$I_3=\int\limits_{\gamma_2'}[-K(y_0)]^{-3/2}K'(y_0)\left[(x_1-x)+\int\limits_0^y\sqrt{-K(t)}\,dt\right]\times$$
$$\times\frac{K'}{4K}u^2\,dx+\int\limits_{\gamma_2''}\left[-\frac{K'(y)}{2K(y)}aF(y)+a\frac{K'}{4K}\right]u^2\,dx.$$

Первый интеграл, очевидно, неположителен. Второй интеграл также неположителен, так как $F(y)\leqslant 0$ при $y\leqslant y_0<0$. Таким образом, $I_3\leqslant 0$. Ясно, что $I_4\leqslant 0$. Рассмотрим последний интеграл I_6, который, учитывая (3.15), можно записать в виде

$$I_6=\frac{1}{2}\iint\limits_{D^-}a_{yy}u^2\,dx\,dy.$$

Обозначим через D_1^- часть области D^-, лежащую выше прямой $y=y_0$, а через D_2^- часть D^-, лежащую ниже $y=y_0$. Тогда интеграл I_6 разбивается на два:

$$I_6=-\frac{1}{2}\iint\limits_{D_1^-}[-K(y_0)]^{-3/2}K'(y_0)\frac{K'(y)}{\sqrt{-K(y)}}u^2\,dx\,dy+$$
$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{D_2^-}a_{yy}u^2\,dx\,dy. \qquad (3.16)$$

Для $y\leqslant y_0$ имеем

$$a_{yy}=\frac{1}{2}[-K(y)]^{-2}[5K'^2(y)-4K(y)K''(y)]+$$
$$+\left[(x_1-x)+\int\limits_0^y\sqrt{-K(t)}\,dt\right][-K(y)]^{-7/2}\times$$
$$\times\left[K^2K'''+\frac{3}{4}K'\left(5K'^2-6KK''\right)\right]. \qquad (3.17)$$

По предположению $3K'^2 \leqslant 2KK''$ при $y \leqslant y_0$. Следовательно, $5K'^2 \leqslant 4KK''$ и первый член справа в равенстве (3.17) отрицателен. Ясно, что $5K'^2 \leqslant 6KK''$ при $y \leqslant y_0$ и второй член в (3.17) будет отрицательным, если $K''' < 0$ при $y \leqslant y_0$. Можно указать и более точное достаточное условие:

$$K''' \leqslant \frac{3K'}{4K^2}(6KK'' - 5K'^2), \qquad y \leqslant y_0.$$

Итак, из (3.16) следует, что $I_6 \leqslant 0$. Теорема доказана.

§ 4. Теорема существования решения задачи Трикоми *)

Рассмотрим уравнение

$$yu_{xx} + u_{yy} + c(x, y)u = 0. \tag{4.1}$$

Пусть D — область, ограниченная простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками

$$AC\colon\ \xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 0$$

и

$$BC\colon\ \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = 1$$

уравнения (4.1). Через D^+ и D^- будем обозначать части D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$.

Параметрическое уравнение кривой Γ пусть будет $x = x(s)$, $y = y(s)$, где s — длина дуги, отсчитываемая от точки B. Относительно кривой Γ будем предполагать, что

1) функции $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$ на отрезке $[0, l]$, не обращающиеся одновременно в нуль; производные $x''(s)$ и $y''(s)$ удовлетворяют условию Гёльдера на $[0, l]$, где l — длина кривой Γ;

*) В §§ 4, 5 изложены результаты К. И. Бабенко.

2) в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant C^2 y^2(s),$$

где C — постоянная.

Задача Трикоми. *Найти решение уравнения* (4.1) *в области D, принимающее заданные значения на Γ и на характеристике AC:*

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad u|_{\xi=0} = \psi(\eta),$$

где $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α, а $\psi(\eta)$ имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем β.

Решение $u(x, y)$ задачи T будем искать в классе $\mathscr{R}_1$.

Прежде всего укажем основную идею (предложенную еще Трикоми [59a]) доказательства разрешимости задачи Трикоми для уравнения (4.1). Эта идея состоит в том, что сначала решают отдельно задачу N в области D^+ и задачу Коши — Гурса в области D^-, считая как бы известной функцию $\nu(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$. Затем оба полученных решения вместе с их первыми производными непрерывно «склеивают» на отрезке AB параболической линии. Таким путем доказательство существования решения задачи Трикоми сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно $\nu(x)$, разрешимость которого следует из теоремы единственности.

1. Задача N. *В области D^+ найти регулярное решение уравнения* (4.1), *непрерывное в замкнутой области $\overline{D}^+$, имеющее непрерывные производные u_x и u_y в $D + \Gamma$ (причем в точках A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже ${}^2/_3$ *)) и удовлетворяющее*

---

*) $u_x = O\left(r^{-2/3+\varepsilon}\right)$, $u_y = O\left(r^{-2/3+\varepsilon}\right)$, где r — расстояние до точки A или B.

краевым условиям

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad \lim_{y\to+0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \tag{4.2}$$

где $\nu(x)$ непрерывна при $0<x<1$, при $x\to 0$ и $x\to 1$ может обращаться в бесконечность порядка меньшего, чем ${}^2/_3$ (относительно x и $(1-x)$).

Единственность решения задачи N следует из леммы 5 п. 1 § 2.

Решение задачи N для уравнения

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{$*$}$$

дается формулой *)

$$u_0(x, y) = -\int_0^1 \nu(t)\, G(t, 0;\ x, y)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\rho(s;\ x, y)\, ds. \tag{4.3}$$

Здесь

$$G(x, y;\ x_0, y_0) = q(x, y;\ x_0, y_0) + p(x, y;\ x_0, y_0)$$

— функция Грина задачи N для уравнения $(*)$,

$$q(x, y;\ x_0, y_0) = kr_1^{-1/3}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3};\ 1-\sigma\right) \tag{4.4}$$

— фундаментальное решение уравнения $(*)$, где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-x_0)^2 + \frac{4}{9}\left(y^{3/2} \mp y_0^{3/2}\right)^2, \quad \sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad k = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)};$$

$p(x, y;\ x_0, y_0)$ — регулярное решение уравнения $(*)$ везде внутри D^+, $\rho(s;\ x, y)$ есть решение интегрального уравнения

$$\rho(s;\ x, y) - 2\int_0^l K(t, s)\rho(t;\ x, y)\, dt = 2A(s;\ x, y), \tag{4.5}$$

где

$$A(s;\ x;\ y) \equiv \eta \frac{d\eta}{ds}\frac{\partial q(\xi, \eta;\ x, y)}{\partial \xi} - \frac{d\xi}{ds}\frac{dq(\xi, \eta;\ x, y)}{\partial \eta}, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma,$$

$$K(t, s) = A(s;\ x(t), y(t)), \qquad (x(t), y(t)) \in \Gamma. \tag{4.6}$$

---

*) См. [4а] или [56ж].

В случае нормальной области D_0, ограниченной отрезком $[0, 1]$ оси x и нормальной кривой $C_{1/2}$: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}$, $y \geqslant 0$, функция Грина задачи N для уравнения (*) выписывается в явном виде:

$$G_0(x, y;\ x_0, y_0) = \\ = q(x, y;\ x_0, y_0) - (2r_0)^{-1/3} q\left(x - \frac{1}{2}, y;\ \bar{x}_0, \bar{y}_0\right), \qquad (4.7)$$

где

$$r_0^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y_0^3, \quad \bar{x}_0 = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4r_0^2}, \quad \bar{y}_0^{3/2} = \frac{y_0^{3/2}}{4r_0^2}.$$

Тогда

$$G(x, y;\ x_0, y_0) - G_0(x, y;\ x_0, y_0) = \\ = \int_0^l \rho(s;\ x, y)\, G_0(\xi, \eta;\ x_0, y_0)\, ds. \qquad (4.8)$$

Полагая в формуле (4.3) $y = 0$ и принимая во внимание (4.8), получим

$$u_0(x, 0) = -\int_0^1 \nu(t)\, G_0(t, 0;\ x, 0)\, dt - \\ - \int_0^1 \nu(t)\, H(t, x)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, \rho(s;\ x, 0)\, ds$$

или, в силу (4.4) и (4.7),

$$\tau(x) = -k \int_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}}\right] \nu(t)\, dt - \\ - \int_0^1 H(t, x)\, \nu(t)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, \rho(s;\ x, 0)\, ds, \qquad (4.9)$$

где

$$H(t, x) = G(t, 0;\ x, 0) - G_0(t, 0;\ x, 0) = \int_0^t \rho(s;\ t, 0)\, G_0(\xi, \eta;\ x, 0)\, ds. \qquad (4.10)$$

Лемма 1 [4а]. *При* $0<x<1$, $0<t<1$ *имеет место неравенство*

$$\left|\frac{\partial H(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{C}{(x+t-2xt)^{1/3}}, \qquad (4.11)$$

где C — *постоянная, зависящая только от области* D^+.

Доказательство. Положив $\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{9}\eta^3=R^2$, из (4.7) и (4.4) получим

$$G_0(\xi, \eta;\ x, 0) = k\left[R^2-2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1/6} - k\left[4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2R^2-2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]^{-1/6}$$

или

$$G_0(\xi, \eta;\ x, 0) = k\left(R_1^{-1/3}-R_2^{-1/3}\right),$$

где положено

$$R_1^2 = R^2-2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$R_2^2 = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2R^2-2\left(\xi-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}.$$

Далее в силу условий, наложенных на кривую Г, имеем для малых η

$$R^2 = \frac{1}{4}+O(\eta^3).$$

Тогда

$$\frac{3}{k}\frac{\partial G_0}{\partial x} = (x-\xi)\left(R_2^{-7/3}-R_1^{-7/3}\right)+\left(x-\frac{1}{2}\right)R_2^{-7/3}O(\eta^3).$$

Заметим, что

$$\left|R_2^{-7/3}-R_1^{-7/3}\right| \leqslant \left|R_2^2-R_1^2\right|\left(\frac{1}{R_1^2R_2^{7/3}}+\frac{1}{R_2^2R_1^{7/3}}\right) \leqslant Cx(1-x)\left(\frac{1}{R_1^2R_2^{7/3}}+\frac{1}{R_2^2R_1^{7/3}}\right)\eta^3.$$

При $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{R_1^2} \leqslant \frac{C_2}{x^2+\frac{4}{9}\eta^3}, \qquad \frac{1}{R_2^2} \leqslant \frac{C_3}{x^2+\frac{4}{9}\eta^3},$$

где постоянные C_2 и C_3 не зависят от x, ξ и η. Отсюда

$$\left|\frac{\partial G_0}{\partial x}\right| \leqslant C_4 \frac{|x-\xi|\, x(1-x)\,\eta^3}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{13/6}} + C_5 \frac{\eta^3}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{7/6}} < \frac{C_6}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}}.$$

Аналогично при $^3/_4 \leqslant x \leqslant 1$

$$\left|\frac{\partial G_0}{\partial x}\right| \leqslant \frac{C_7}{\left((x-1)^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}}.$$

Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant 1/4$ из (4.10) и (4.5) имеем

$$\left|\frac{\partial H(t,\ x)}{\partial x}\right| \leqslant \int_0^t |\rho(s;\ t,\ 0)| \left|\frac{\partial G_0(\xi,\ \eta;\ x,\ 0)}{\partial x}\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant 2C_6 \int_0^t \frac{|A(s;t,0)|\,ds}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}} + 4C_6 \int_0^t |A(t_1;t,0)|\,dt_1 \int_0^t \frac{|R(s,t_1,2)|\,ds}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_6 \int_{t-\varepsilon}^t \frac{|A(s;\ t,\ 0)|\,ds}{\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}} + C_7.$$

Далее,

$$A(s;\ t,\ 0) = \frac{k}{3} \frac{(t-\xi)\,\eta \frac{d\eta}{ds} - \frac{2}{3}\eta^2 \frac{d\xi}{ds}}{\left[(t-\xi)^2+\frac{4}{9}\eta^3\right]^{7/6}},$$

и, следовательно,

$$|A(s;\ t,\ 0)| \leqslant C_8 \frac{\eta^{1/2}\left|\frac{d\eta}{ds}\right|}{\left[(t-\xi)^2+\frac{4}{9}\eta^3\right]^{1/2}} + C_9.$$

Отсюда

$$\left|\frac{\partial H(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant C_{10} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\eta^{1/2}\left|\frac{d\eta}{ds}\right| ds}{\left[(t-\xi)^2+\frac{4}{9}\eta^3\right]^{1/2}\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^2\right)^{1/6}} + C_{11} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12} \int\limits_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\eta^{1/2}\left|\frac{d\eta}{ds}\right| ds}{\left(t^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/2}\left(x^2+\frac{4}{9}\eta^3\right)^{1/6}} + C_{11} =$$

$$= C_{12} \int\limits_{0}^{\delta} \frac{d\tilde{\eta}}{(t^2+\tilde{\eta}^2)^{1/2}(x^2+\tilde{\eta}^2)^{1/6}} + C_{11}.$$

Если $\tilde{x} = \max(x, t)$, то легко видеть, что

$$\left|\frac{\partial H(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{C_{13}}{\tilde{x}^{1/3}} \leqslant \frac{2C_{13}}{(x+t)^{1/3}} < \frac{C}{(x+t-2xt)^{1/3}} \quad \text{для } 0 < x \leqslant \frac{1}{4}.$$

Очевидно, что эта оценка справедлива и для $3/4 \leqslant x < 1$.

Лемма 2. *Пусть $\mu(x, y)$ — ограниченная функция в D^+. Тогда функция*

$$v(x, y) = \iint\limits_{D^+} \mu(\xi, \eta)\, q(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

и ее частные производные первого порядка непрерывны в полуплоскости $y \geqslant 0$. Если $\mu(x, y)$ непрерывна в $\overline{D}^+$ и имеет непрерывные частные производные первого порядка внутри D^+, то $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в D^+ и удовлетворяет уравнению

$$yv_{xx} + v_{yy} = -\mu(x, y).$$

Эта лемма доказывается совершенно так же, как аналогичная теорема в теории потенциала.

Лемма 3 *) [4a]. *Пусть $\mu(x, y)$ — ограниченная функция в $\overline{D}^+$. Тогда функция*

$$\Psi(x, y) = \iint\limits_{D^+} \mu(\xi, \eta)\, p(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \qquad (4.12)$$

обладает следующими свойствами:

*) См. [4a], а также [56ж], гл. II, § 8.

1) *она непрерывна в* $\bar{D}^+$;

2) *внутри* D^+ *существуют и непрерывны* Ψ_x, Ψ_y, Ψ_{xx}, Ψ_{yy};

3) *если* $x_1(\delta)$ *и* $x_2(\delta)$ — *абсциссы точек пересечения линии* Γ *с прямой* $y=\delta>0$ (δ *мало*), *а* $\hat{x}=\min\{x-x_1(\delta),\ x_2(\delta)-x_2\}$, *то*

$$|\Psi_x(x,\ \delta)|\leqslant B\ln\frac{1}{\hat{x}},\qquad |\Psi_y(x,\ \delta)|\leqslant B\delta^{1/2}\ln\frac{1}{\hat{x}};\quad (4.13)$$

4) *при* $0<x<1$ $\Psi_x(x,\ 0)$ и $\Psi_{xx}(x,\ 0)$ *существуют и непрерывны и, кроме того,* $|\Psi_x(x,\ 0)|\leqslant B_1$.

Переходим к построению решения $u(x,\ y)$ задачи N для уравнения (4.1). Пусть $u_0(x,\ y)$ — решение задачи N для уравнения (*) с теми же граничными данными на границе области D^+. Тогда решение задачи N для уравнения (4.1) сводится к решению интегрального уравнения

$$u(x,\ y)-\iint\limits_{D^+} c(\xi,\ \eta)\,G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\,u(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta=u_0(x,\ y),\tag{4.14}$$

к которому применима теория Фредгольма.

Допустим, что уравнение (4.14) имеет ограниченное решение $u(x,\ y)$. Тогда в силу лемм 2 и 3 $u(x,\ y)$ будет непрерывна в $\bar{D}^+$, дважды непрерывно дифференцируема в D^+ и удовлетворять уравнению (4.1). Из определения функции Грина $G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ следует, что

$$u(x,\ y)=u_0(x,\ y)\quad \text{на}\quad \Gamma$$

и

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}=\lim_{y\to 0}\frac{\partial u_0(x,\ y)}{\partial y},$$

т. е. $u(x,\ y)$ есть решение задачи N для уравнения (4.1).

Интегральное уравнение (4.14) всегда разрешимо, так как соответствующее однородное уравнение имеет только тривиальное решение, что следует из теоремы единственности задачи N.

Пусть $R(x, y; \xi, \eta; \lambda)$ — резольвента ядра $c(\xi, \eta) \times G(x, y; \xi, \eta)$; тогда решение уравнения (4.14) запишется в виде

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \iint\limits_{D^+} R(x, y; \xi, \eta; 1)\, u_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{4.15}$$

или, в силу (4.3),

$$u(x, y) = -\int_0^1 \nu(t)\, \tilde{G}(t, 0; x, y)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, \tilde{\rho}(s; x, y)\, ds, \tag{4.16}$$

где

$$\tilde{G}(t, 0; x, y) = \\ = G(t, 0; x, y) + \iint\limits_{D^+} R(x, y; \xi, \eta; 1)\, G(t, 0; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \\ = G(t, 0; x, y) + \tilde{H}(t, x, y), \tag{4.17}$$

$$\tilde{\rho}(s; x, y) = \\ = \rho(s; x, y) + \iint\limits_{D^+} R(x, y; \xi, \eta; 1)\, \rho(s; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{4.18}$$

Можно показать, что

$$|\tilde{H}(t, x, y)| < C \tag{4.19}$$

для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $(x, y) \in \bar{D}^+$.

Полагая в формуле (4.16) $y = 0$ и учитывая (4.17) и (4.10), получим

$$\tau(x) = -k \int_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}} \right] \nu(t)\, dt - \\ - \int_0^1 \chi(t, x)\, \nu(t)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, \tilde{\rho}(s, x, 0)\, ds, \tag{4.20}$$

где

$$\chi(t, x) = H(t, x) + \tilde{H}(t, x, 0). \tag{4.21}$$

Формула (4.20) дает *первое функциональное уравнение* между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (4.1) в области D^+ должно принимать заданные значения $\varphi(s)$ на кривой Γ.

Лемма 4 [4a]. *Найдутся такие постоянные H_1 и H_2, что*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\tilde{H}(t,\ x,\ 0)\right| \leqslant H_1 \ln\frac{1}{t-x} + H_2(t+x-2xt)^{-1/3}. \quad (4.22)$$

Доказательство довольно громоздкое и поэтому не приводится.

2. Задача Коши—Гурса. *Требуется найти в области D^- решение уравнения* (4.1), *непрерывное в $\bar{D}^-$ и удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \nu(x). \quad (4.23)$$

В характеристических координатах уравнение (4.1) имеет вид

$$F(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) + C(\xi,\ \eta)\,u = 0, \quad (4.24)$$

где

$$C(\xi,\ \eta) = -\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\frac{c}{(\eta-\xi)^{2/3}}. \quad (4.25)$$

Область D^- преобразуется в $\triangle\, ABC$, ограниченный характеристиками $\xi = 0$, $\eta = 1$ и прямой $\eta = \xi$. Краевые условия (4.23) принимают вид

$$\begin{gathered} u|_{\xi=0} = \psi(\eta), \\ \lim_{\eta-\xi\to 0}\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = \nu(\xi). \end{gathered} \quad (4.26)$$

Существенную роль при решении задачи Коши — Гурса играет функция Римана — Адамара *).

Для уравнения

$$E(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{6(\eta-\xi)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \quad (4.27)$$

---

*) Ранее, на стр. 38, была построена функция Римана—Адамара для задачи Гурса.

функция Римана — Адамара $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ определяется следующими условиями:

1) как функция от (ξ, η), она удовлетворяет сопряженному уравнению $E^*(u) = 0$;

2) как функция (ξ_0, η_0), она удовлетворяет уравнению $E(u) = 0$;

3) $v(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = 1$;

4) $v(\xi, \xi; \xi_0, \eta_0) = 0$;

5) $\dfrac{\partial [v]}{\partial \xi} + \dfrac{1}{6} \dfrac{[v]}{\eta - \xi} = 0$ при $\eta = \xi_0$,

где

$$[v] = \lim_{\varepsilon \to 0} [v(\xi, \xi_0 + \varepsilon; \xi_0, \eta_0) - v(\xi, \xi_0 - \varepsilon; \xi_0, \eta_0)].$$

Функция Римана — Адамара $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ была построена Геллерстедтом [18a]. Она имеет вид

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) =$$
$$= \begin{cases} v_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left(\dfrac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0}\right)^{1/6} F\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{5}{6}, 1; s\right) & \text{при } \eta \geqslant \xi_0, \\ v_2(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = k' \dfrac{(\eta - \xi)^{1/3}}{(\xi_0 - \xi)^{1/6} (\eta_0 - \eta)^{1/6}} F\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{s}\right) & \\ & \text{при } \eta \leqslant \xi_0, \end{cases} \tag{4.28}$$

где

$$s = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)}, \qquad k' = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Заметим, что условие 5) можно записать в виде

$$\frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{v_1 - v_2}{\eta - \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \xi_0.$$

Пусть $u(\xi, \eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (4.24) в $\triangle ABC$, удовлетворяющее краевым условиям (4.26). Так как

$$vE(u) - uE^*(v) = H_\xi + L_\eta,$$

где

$$H=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta}-u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\frac{uv}{6(\eta-\xi)},$$

$$L=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)-\frac{uv}{6(\eta-\xi)},$$

то, интегрируя тождество

$$H_\xi+L_\eta=-C(\xi,\eta)uv$$

по $\triangle A'B'C'$ (см. рис. 6 на стр. 39), ограниченному отрезком $A'B'$ прямой $\eta-\xi=\varepsilon$, отрезком $B'C'$ характеристики $\eta=\xi_0-\varepsilon$ и отрезком $C'A'$ характеристики $\xi=0$, и по прямоугольнику $C''B''D''D'$, ограниченному отрезками $C''B''$ и $D'D''$ характеристик $\eta=\xi_0+\varepsilon$ и $\eta=\eta_0$ и отрезками $C''D'$ и $B''D''$ характеристик $\xi=0$ и $\xi=\xi_0-2\varepsilon$, мы получим при $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}u(\xi_0,\eta_0)=k\int\limits_0^{\xi_0}\frac{\nu(t)\,dt}{(\xi_0-t)^{1/6}(\eta_0-t)^{1/6}}+\\+\int\limits_0^{\eta_0}\left[\psi'(\eta)+\frac{\psi(\eta)}{6\eta}\right]v(0,\eta;\xi_0,\eta_0)\,d\eta-\\-\int\limits_0^{\xi_0}d\xi\int\limits_\xi^{\eta_0}C(\xi,\eta)v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)u(\xi,\eta)\,d\eta,\end{aligned}\tag{4.29}$$

$$k=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

При получении этой формулы мы воспользовались условиями 1) – 5), а также краевыми условиями (4.26).

Согласно лемме 3 § 2 гл. II формула (4.29) справедлива и для обобщенного решения уравнения (4.24), принадлежащего классу $\mathscr{R}_1$.

Рассмотрим случай, когда обобщенное решение $u(\xi,\eta)\in\mathscr{R}_1$ обращается в нуль на характеристике $\xi=0$.

Тогда из формулы (4.29) получим интегральное уравнение для $u(\xi, \eta)$:

$$u(\xi, \eta)+\int_0^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} C(\xi', \eta') v(\xi', \eta'; \xi, \eta) u(\xi', \eta') d\eta' = \\ = k\int_0^{\xi} (\xi-t)^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6} \nu(t)\, dt. \quad (4.30)$$

Будем искать решение уравнения (4.30) в виде

$$u(\xi, \eta)=\int_0^{\xi} K(\xi, \eta, t)\nu(t)\, dt. \quad (4.31)$$

Функция $K(\xi, \eta, t)$ определяется из уравнения

$$K(\xi, \eta, t)+\int_t^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} C(\xi', \eta') v(\xi', \eta'; \xi, \eta) K(\xi', \eta', t) d\eta' = \\ = K_0(\xi, \eta, t), \quad (4.32)$$

где

$$K_0(\xi, \eta, t)=k(\xi-t)^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6}.$$

Принимая во внимание (4.25) и полагая $\lambda=\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}$, будем искать решение уравнения (4.32) в виде ряда

$$K(\xi, \eta, t)=\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_n(\xi, \eta, t). \quad (4.33)$$

Подставив (4.33) в уравнение (4.32), найдем

$$K_{n+1}(\xi, \eta, t)= \\ = \int_t^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \frac{\overline{C}(\xi', \eta')}{(\eta'-\xi')^{2/3}} v(\xi', \eta'; \xi, \eta) K_n(\xi', \eta', t) d\eta', \quad (4.34)$$

где

$$\overline{C}(\xi, \eta)=c\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \ -\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}(\eta-\xi)^{2/3}\right).$$

Докажем сходимость ряда (4.33). Если в (4.34) положить

$$\xi = t + (x-t)z, \qquad \eta = t + (x-t)\zeta,$$

а ξ' и η' заменить такими же выражениями, в которых вместо z и ζ будут стоять z' и ζ', и обозначить

$$K_n(t+(x-t)z,\ t+(x-t)\zeta,\ t) = K_n(z,\ \zeta,\ x,\ t),$$
$$\bar{C}(\xi,\ \eta) = C(z,\ \zeta,\ x,\ t),$$
$$v(\xi',\ \eta';\ \xi,\ \eta) = v(z,\ \zeta;\ z',\ \zeta'),$$

то получим

$$K_{n+1}(z,\ \zeta,\ x,\ t) = \\ = (x-t)^{4/3}\int_0^z dz' \int_{z'}^{\zeta} \frac{C(z',\zeta',x,t)}{(z'-\zeta')^{2/3}} v(z,\zeta;\ z',\zeta')\, K_n(z',\zeta',x,t)\, d\zeta'.$$

Отсюда нетрудно получить оценки для $K_n(z,\ \zeta,\ x,\ t)$. Действительно, используя неравенства

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{s}\right) &< C_1\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-1/6}, \\ F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1;\ s\right) &< C_1(1-s)^{-1/6} \end{aligned}\right\} \qquad (4.35)$$

($C_1 = \text{const}$), при оценке функции Римана — Адамара получим

$$|K_{n+1}(z,\ \zeta,\ x,\ t)| \leqslant \\ \leqslant C_2(x-t)^{4/3}\int_0^z \frac{dz'}{(\zeta-z')^{1/6}} \int_{z'}^{\zeta} \frac{|K_n(z',\ \zeta',\ x,\ t)|}{(\zeta'-z')^{1/3}\,|\zeta'-z|^{1/6}}\, d\zeta'. \qquad (4.36)$$

Далее, так как

$$|K_1(z,\ \zeta,\ x,\ t)| \leqslant C_3(x-t)\,\zeta^{1/3},$$

то из (4.36) находим по индукции, что

$$|K_{n+1}(z,\ \zeta,\ x,\ t)| < C_3^{n+1}(x-t)^{\frac{4n}{3}+1}\,\frac{z^n \zeta^{\frac{n+1}{3}}}{n!} \qquad \mathbf{(4.37)}$$
$$(n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда следует, что ряд (4.33) сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant \zeta < \infty$, $0 < x - t < \infty$.

Положив в (4.31) $\eta = \xi = x$, получим

$$u(x, x) = k \int_0^x (x-t)^{-1/3} \nu(t)\, dt + \int_0^x K(x, t) \nu(t)\, dt, \quad (4.38)$$

где

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x, x, t) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_t^x d\xi \int_\xi^x \frac{\bar{C}(\xi, \eta) K_{n-1}(\xi, \eta, t)\, d\eta}{(\eta-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{1/6}(x-\eta)^{1/6}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_t^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^{1/6}} \int_\xi^x \frac{\bar{C}(\xi, \eta) K(\xi, \eta, t)}{(\eta-\xi)^{1/3}(x-\eta)^{1/6}}\, d\eta. \quad (4.39)$$

Лемма 5. *Существует постоянная C, зависящая от* $\max\limits_{D^-}\{|c(x, y)|, |c'_x(x, y)|, |c'_y(x, y)|\}$, *такая, что*

$$\left|\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\right| < C. \quad (4.40)$$

Доказательство. В интеграле (4.39) введем новые переменные интегрирования (z, ζ), положив

$$\xi = t + (x-t) z, \qquad \eta = t + (x-t)\zeta.$$

Тогда (4.39) примет вид

$$K(x, t) = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)(x-t)^{4/3}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-z)^{-1/6} dz \int_z^1 \frac{\bar{C}(z, \zeta, x, t) K(z, \zeta, x, t)}{(z-\zeta)^{1/3}(1-\zeta)^{1/6}}\, d\zeta. \quad (4.41)$$

Если выражение для $K_{n+1}(z, \zeta, x, t)$ продифференцировать по x, то точно так же получим для $\frac{\partial K_{n+1}}{\partial x}$ оценки, аналогичные (4.37). Отсюда следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\partial K_n(z, \zeta, x, t)}{\partial x}$$

сходится абсолютно и равномерно при $0 \leqslant z < \infty$, $0 \leqslant \zeta < \infty$, $0 \leqslant x - t < \infty$.

Далее, так как

$$K(z, \zeta, x, t) = k(x-t)^{-1/3} z^{-1/6} \zeta^{-1/6} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(z, \zeta, x, t),$$

то

$$\left| \frac{\partial K(z, \zeta, x, t)}{\partial x} \right| \leqslant \frac{C_4}{(x-t)^{4/3}} z^{-1/6} \zeta^{-1/6}.$$

Тогда из (4.41) имеем

$$\left| \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \right| < C.$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда обобщенное решение $u(\xi, \eta)$ обращается в заданную функцию $\psi(\eta)$ на характеристике $\xi = 0$. Положим, что $\psi(0) = 0$ и $\nu(x) \equiv 0$. Тогда, если $\psi'(\eta)$ существует и ограничена, то из (4.29) будем иметь

$$u(\xi, \eta) - \lambda \int_0^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \frac{\bar{C}(\xi', \eta') v(\xi', \eta'; \xi, \eta)}{(\eta' - \xi')^{2/3}} u(\xi', \eta') d\eta' =$$

$$= \int_0^{\eta} \psi_1(t) v(0, t; \xi, \eta) dt, \qquad (4.42)$$

где

$$\psi_1(t) = \psi'(t) + \frac{\psi(t)}{6t}.$$

Будем искать решение уравнения (4.42) в виде

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} \psi_1(t) L(\xi, \eta, t) dt. \qquad \mathbf{(4.43)}$$

Тогда функция $L(\xi, \eta, t)$ определяется из уравнения

$$L(\xi, \eta, t) - \\ -\lambda \int_0^{\xi} d\xi' \int_{\max(t, \xi')}^{\eta} \frac{\overline{C}(\xi', \eta')}{(\eta'-\xi')^{2/3}} v(\xi', \eta'; \xi, \eta) L(\xi', \eta', t)\, d\eta' = \\ = L_0(\xi, \eta, t), \qquad (4.44)$$

где

$$L_0(\xi, \eta, t) = v(0, t; \xi, \eta).$$

Решение уравнения (4.44) ищем в виде ряда

$$L(\xi, \eta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k L_k(\xi, \eta, t). \qquad (4.45)$$

Подставив (4.45) в (4.44), найдем

$$L_{k+1}(\xi, \eta, t) = \\ = \int_0^{\xi} d\xi' \int_{\max(t, \xi')}^{\eta} \frac{\overline{C}(\xi', \eta')}{(\eta'-\xi')^{2/3}} v(\xi', \eta'; \xi, \eta) L_k(\xi', \eta', t)\, d\eta' \qquad (4.46)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как в силу (4.35)

$$|v(\xi', \eta'; \xi, \eta)| < C_1 \frac{(\eta'-\xi')^{1/6}}{|\eta'-\xi|^{1/6}}, \qquad (4.47)$$

то

$$|L_{k+1}(\xi, \eta, t)| \leqslant C_2 \int_0^{\xi} d\xi' \int_{\xi'}^{\eta} \frac{|L_k(\xi', \eta', t)|\, d\eta'}{(\eta'-\xi')^{1/2}\, |\eta'-\xi|^{1/6}}. \qquad (4.48)$$

Отсюда

$$|L_{k+1}(\xi, \eta, t)| < C_3^{k+1} \frac{\xi^k \eta^{k/3}}{k!} t^{1/6} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.49)$$

и, следовательно,

$$|L(\xi, \eta, t)| < C_4 \frac{t^{1/6}}{|\xi - t|^{1/6}}. \qquad (4.50)$$

Пусть

$$\tilde{L}(\xi, \eta, t) = \int_0^\xi d\xi' \int_{\max(t, \xi')}^{\eta} \frac{\overline{C}(\xi', \eta')}{(\eta'-\xi')^{2/3}} v(\xi', \eta'; \xi, \eta) L(\xi', \eta', t)\, d\eta'. \quad (4.51)$$

Дифференцируя по η, получим

$$\frac{\partial \tilde{L}(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} = \int_0^\xi \frac{\overline{C}(\xi', \eta) v(\xi', \eta; \xi, \eta)}{(\eta-\xi')^{2/3}} L(\xi', \eta, t)\, d\xi' + \int_0^\xi d\xi' \int_{\max(t, \xi')}^{\eta} \frac{\overline{C}(\xi', \eta') L(\xi', \eta', t)}{(\eta'-\xi')^{2/3}} \frac{\partial v}{\partial \eta} d\eta'.$$

Отсюда, учитывая неравенства

$$\left| \frac{\partial v(\xi', \eta'; \xi, \eta)}{\partial \eta} \right| < \begin{cases} C_5 \dfrac{v}{\eta-\xi} & \text{при} \quad \eta' > \xi, \\ C_6 \dfrac{v}{\eta-\eta'} & \text{при} \quad \eta' < \xi, \end{cases} \quad (4.52)$$

путем несложных вычислений получим

$$\left| \frac{\partial \tilde{L}(\xi, \eta, t)}{\partial \eta} \right| < C_7 \frac{t^{1/6}}{(\eta-\xi)^{1/6}}. \quad (4.53)$$

Используя (4.47), (4.52) и (4.53), из (4.44) имеем

$$\left| \frac{\partial L}{\partial \eta} \right| < C_8 \frac{t^{1/6}}{(\eta-\xi)\,|\xi-t|^{1/6}}. \quad (4.54)$$

Положив в (4.43) $\eta = \xi = x$ и принимая во внимание (4.44) и (4.51), получим

$$u(x, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \int_0^x \psi_1(t) \frac{t^{1/3}\, dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \lambda \int_0^x \psi_1(t) \tilde{L}(x, x, t)\, dt.$$

Лемма 6. *Функция $\tilde{L}(x, x, t)$ имеет ограниченную частную производную по x, при этом*

$$\left| \frac{\partial \tilde{L}(x, x, t)}{\partial x} \right| < C x^{1/6} t^{1/6}. \quad (4.55)$$

Доказательство. Полагая в **(4.51)** $\eta=\xi=x$ и учитывая (4.28), находим

$$\tilde{L}(x, x, t)=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\int\limits_0^x (x-\xi)^{-1/6}\,d\xi \int\limits_{\max(\xi, t)}^x \frac{\overline{C}(\xi, \eta)\,L(\xi, \eta, t)}{(x-\eta)^{1/6}(\eta-\xi)^{1/3}}\,d\eta=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\,I(x, t). \qquad (4.56)$$

В силу (4.54) во внутреннем интеграле можно интегрировать по частям. Тогда

$$I(x, t)=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int\limits_0^x (x-\xi)^{1/3}\,\overline{C}(\xi, x)\,L(\xi, x, t)\,d\xi-$$
$$-\int\limits_0^x (x-\xi)^{1/3}\,d\xi \int\limits_{\max(\xi, t)}^x \frac{\partial(\overline{C}L)}{\partial\eta}\,d\eta \int\limits_0^{\frac{\eta-\xi}{x-\xi}} \frac{dz}{z^{1/3}(1-z)^{1/6}}.$$

Дифференцируя по x, получим

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x}=\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\int\limits_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,\overline{C}(\xi, x)\,L(\xi, x, t)\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{3}\int\limits_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,d\xi \int\limits_{\max(\xi, t)}^x \frac{\partial(\overline{C}L)}{\partial\eta}\,d\eta \int\limits_0^{\frac{\eta-\xi}{x-\xi}} \frac{dz}{z^{1/3}(1-z)^{1/6}}+$$
$$+\int\limits_0^x (x-\xi)^{-7/6}\,d\xi \int\limits_{\max(\xi, t)}^x (\eta-\xi)^{2/3}(x-\eta)^{-1/6}\,\frac{\partial(\overline{C}L)}{\partial\eta}\,d\eta.$$

Отсюда, учитывая (4.54), имеем

$$\left|\frac{\partial I(x, t)}{\partial x}\right|<C_9 x^{1/6} t^{1/6}.$$

Лемма доказана.

В силу изложенного выше решение задачи Коши — Гурса можно представить в виде суммы (4.31) и (4.43):

$$u(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} K(\xi, \eta, t)\, \nu(t)\, dt + \int_0^{\eta} \psi_1(t)\, L(\xi, \eta, t)\, dt.$$

Положив $\eta = \xi = x$, получим

$$\tau(x) = k \int_0^x (x-t)^{-1/3} \nu(t)\, dt + \int_0^x K(x, t)\, \nu(t)\, dt +$$
$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^x \frac{t^{1/3}\psi_1(t)\, dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \int_0^x \psi_1(t)\, l(x, t)\, dt, \tag{4.57}$$

где $K(x, t)$ определяется формулой (4.39), $l(x, t) = \lambda \tilde{L}(x, x, t)$, а $\tilde{L}(x, x, t)$ — равенством (4.56).

Формула (4.57) дает *второе функциональное уравнение* между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (4.1) в области D^- должно принимать заданное значение $\psi(\eta)$ на характеристике $\xi = 0$.

3. Сведение задачи Трикоми к сингулярному уравнению. В силу результатов пп. 1 и 2 вопрос о существовании решения задачи T для уравнения (4.1) эквивалентен вопросу о разрешимости уравнений (4.20) и (4.57). В результате исключения $\tau(x)$ из этих уравнений получим

$$k \int_0^x (x-t)^{-1/3} \nu(t)\, dt + k \int_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}}\right] \nu(t)\, dt +$$
$$+ \int_0^x K(x, t)\, \nu(t)\, dt + \int_0^1 \chi(t, x)\, \nu(t)\, dt = f(x), \tag{4.58}$$

где

$$f(x) = -\int_0^l \varphi(s)\tilde{\rho}(s, x, 0)\,ds - \\ - k'\int_0^x \frac{t^{1/3}\psi_1(t)\,dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} - \int_0^x \psi_1(t)\,l(x, t)\,dt. \qquad (4.59)$$

Таким образом, если уравнение (4.58) имеет решение, то имеет решение и система уравнений (4.20), (4.57), т. е. задача T разрешима.

Ниже мы будем рассматривать только такие решения $\nu(x)$ уравнения (4.58), которые непрерывны в $0<x<1$ и $\nu(x) \in L_p(0, 1)$, $p > 3/2$.

Применяя формулу обращения

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\Phi(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

интегрального уравнения Абеля

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\varphi(t)\,dt = \Phi(x), \qquad 0<\alpha<1,$$

перепишем уравнение (4.58) в виде

$$\nu(x) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^1 \nu(t)\,dt\left\{\int_0^x \frac{d\xi}{|\xi-t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} - \right. \\ \left. - \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi+t-2\xi t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} + \frac{1}{k}\int_0^x \frac{\chi(t, \xi)}{(x-\xi)^{2/3}}\,d\xi\right\} + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\frac{d}{dx}\int_0^x \nu(t)\,dt\int_t^x (x-\xi)^{-2/3}K(\xi, t)\,d\xi = \frac{3}{2}F(x), \qquad (4.60)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\pi k\sqrt{3}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \qquad (4.61)$$

Когда x лежит внутри отрезка $[0, 1]$, второй интегральный член в левой части (4.60) в результате замены переменных

$$\frac{x-\xi}{\xi - \frac{t}{2t-1}} = z^3 \quad \text{и} \quad \frac{x-\xi}{\frac{t}{2t-1} - \xi} = z_1^3$$

можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \nu(t)\,dt \int_0^x \frac{d\xi}{(\xi + t - 2t\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} =$$

$$= 3\frac{d}{dx}\left[\int_0^{1/2} \frac{\nu(t)\,dt}{(1-2t)^{1/3}} \int_0^{\left[\frac{x(1-2t)}{t}\right]^{1/3}} \frac{dz}{1+z^3} + \right.$$

$$\left. + \int_{1/2}^1 \frac{\nu(t)\,dt}{(2t-1)^{1/3}} \int_0^{\left[\frac{x(2t-1)}{t}\right]^{1/3}} \frac{dz_1}{1-z_1^3}\right] = \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \frac{\nu(t)\,dt}{x+t-2xt}. \quad (4.62)$$

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^1 \nu(t)\,dt \int_0^x \frac{d\xi}{|\xi - t|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_0^{x-\varepsilon} \nu(t)\,dt \left[\int_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} + \int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right] + \right.$$

$$\left. + \int_{x+\varepsilon}^1 \nu(t)\,dt \int_0^x \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right\}. \quad (4.63)$$

Заменой переменной интегрирования $\xi = t + (x-t)z$ легко вычисляется интеграл

$$\int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = \int_0^1 z^{-1/3}(1-z)^{-2/3}\,dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad (x > t). \quad (4.64)$$

Далее, применяя подстановку $z^3=\frac{x-\xi}{t-\xi}$, получим

$$\int_0^t \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = -3\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{\infty} \frac{dz}{1-z^3} =$$
$$= -\ln(\zeta-1)+\ln\sqrt{1+\zeta+\zeta^2}+$$
$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}-\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}, \qquad x>t,$$

$$\int_0^x \frac{d\xi}{(t-\xi)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} = -3\int_{\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}}^{0} \frac{dz}{1-z^3} = \tag{4.65}$$
$$= -\ln(1-\zeta)+\ln\sqrt{1+\zeta+\zeta^2}+$$
$$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, \qquad x<t,$$

где положено

$$\zeta=\left(\frac{x}{t}\right)^{1/3}.$$

Подставив (4.64) и (4.65) в (4.63), найдем

$$I_\varepsilon(x)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\int_0^{x-\varepsilon}\nu(t)\,dt-\int_{x+\varepsilon}^{1}\nu(t)\,dt\right]+$$
$$+\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\right)\left[-\ln|1-\zeta|+\ln\sqrt{1+\zeta+\zeta^2}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}\right]\nu(t)\,dt.$$

Дифференцируя по x, получим

$$\frac{dI_\varepsilon(x)}{dx}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\nu(x-\varepsilon)+\nu(x+\varepsilon)\right]+\left(\int_0^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{1}\right)\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\frac{\nu(t)}{t-x}\,dt+$$
$$+\nu(x-\varepsilon)\left[-\ln(\zeta-1)+\ln\sqrt{1+\zeta+\zeta^2}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_{\zeta=\left(\frac{x}{x-}\right)^{1/3}}+$$
$$+\nu(x+\varepsilon)\left[\ln(1-\zeta)-\ln\sqrt{1+\zeta+\zeta^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}}\right.\Bigg|_{\zeta=\left(\frac{x}{x+\varepsilon}\right)^{1/3}}.$$

В пределе при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\frac{dI(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{dI_\varepsilon(x)}{dx} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \nu(x) + \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \frac{\nu(t)\,dt}{t-x}. \quad \textbf{(4.66)}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\chi_1(x, t) = \int_0^x \frac{\chi(t, \xi)\,d\xi}{(x-\xi)^{2/3}} =$$

$$= 3x^{1/3}\chi(t, 0) + 3\int_0^x (x-\xi)^{1/3} \frac{\partial\chi(t, \xi)}{\partial\xi}\,d\xi. \quad (4.67)$$

Существование производной $\frac{\partial\chi(t, \xi)}{\partial\xi}$ следует из лемм 1 и 4. Учитывая, что $\chi(t, 0) = 0$, можно написать

$$\chi_1(x, t) = 3\int_0^x (x-\xi)^{1/3} \frac{\partial\chi(t, \xi)}{\partial\xi}\,d\xi.$$

Дифференцируя по x, находим

$$\frac{\partial\chi_1(x, t)}{\partial x} = \int_0^x (x-\xi)^{-2/3} \frac{\partial\chi(t, \xi)}{\partial\xi}\,d\xi$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \chi_1(x, t)\,\nu(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial\chi_1(x, t)}{\partial x}\,\nu(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \nu(t)\,dt \int_0^x (x-\xi)^{-2/3} \frac{\partial\chi(t, \xi)}{\partial\xi}\,d\xi. \quad (4.68)$$

Наконец, в силу леммы 5

$$\int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x (x-\xi)^{-2/3} K(\xi, t)\,d\xi =$$

$$= \int_0^x \nu(t)\,dt \left[3(x-t)^{1/3} K(t, t) + 3\int_t^x (x-\xi)^{1/3} \frac{\partial K}{\partial\xi}\,d\xi\right].$$

Но из формулы (4.39) имеем $K(t, t) = 0$. Следовательно,

$$\int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x (x-\xi)^{-2/3} K(\xi, t)\,d\xi = 3\int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x (x-\xi)^{1/3} \frac{\partial K(\xi, t)}{\partial \xi}\,d\xi.$$

Дифференцируя по x, получим

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x (x-\xi)^{-2/3} K(\xi, t)\,d\xi = \int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x (x-\xi)^{-2/3} \frac{\partial K(\xi, t)}{\partial \xi}\,d\xi. \qquad (4.69)$$

На основании (4.62), (4.66) — (4.69) уравнение (4.60) можно записать в виде

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt + \int_0^1 L(x, t)\,\nu(t)\,dt = F(x), \qquad (4.70)$$

где

$$L(x, t) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\left[\int_t^x (x-\xi)^{-2/3}\frac{\partial K(\xi, t)}{\partial \xi}\,d\xi + \int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\frac{\partial \chi(t, \xi)}{\partial \xi}\,d\xi\right], \quad 0 < t \leqslant x, \qquad (4.71)$$

$$L(x, t) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\frac{\partial \chi(t, \xi)}{\partial \xi}\,d\xi, \quad x \leqslant t < 1.$$

4. Исследование функции $F(x)$. Выясним поведение функции $F(x)$ при $x \to 0$ и $x \to 1$.

Положим

$$f_1(x) = \int_0^l \varphi(s)\,\tilde{\rho}(s,\ x,\ 0)\,ds, \tag{4.72}$$

$$f_2(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \int_0^x \frac{t^{1/3}\psi_1(t)\,dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \int_0^x l(x,\ t)\,\psi_1(t)\,dt. \tag{4.73}$$

Тогда

$$f(x) = -f_1(x) - f_2(x).$$

Лемма 7. *Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α и*

$$\varphi(s) = \varphi(l) + \varphi_1(s), \qquad \varphi(s) = \varphi(0) + \varphi_2(s), \tag{4.74}$$

где

$$|\varphi_1(s)| < C(l-s)^{4/3}, \qquad |\varphi_2(s)| < C's, \tag{4.75}$$

то

$$|f_1'(x)| \leqslant C_1\left(x^{-1/9} + (1-x)^{-1/3}\right). \tag{4.76}$$

Доказательство. Принимая во внимание (4.18), из (4.72) имеем

$$f_1(x) = \int_0^l \varphi(s)\,\rho(s,\ x,\ 0)\,ds + $$

$$+ \iint_{D^+} R(x,\ 0;\ \xi,\ \eta;\ 1)\,d\xi\,d\eta \int_0^l \varphi(s)\,\rho(s,\ \xi,\ \eta)\,ds =$$

$$= f_{11}(x) + f_{12}(x). \tag{4.77}$$

Пусть $\bar{u}(x,\ y)$ — ограниченное решение уравнения (4.1) такое, что

$$\bar{u}|_\Gamma = \varphi(s), \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1.$$

Тогда оно представимо в виде

$$\bar{u}(x,\ y) = -\int_0^l \varphi(s)\,\rho(s,\ x,\ y)\,ds +$$

$$+ \iint_{D^+} c(\xi,\ \eta)\,G(x;\ y;\ \xi,\ \eta)\,\bar{u}(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Отсюда

$$\bar{u}(x, 0) = -f_1(x),$$

$$f_{12}(x) = -\iint\limits_{D^+} c(\xi, \eta)\, G(x, 0; \xi, \eta)\, \bar{u}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Следовательно, в силу лемм 2 и 3 п. 1

$$|f'_{12}(x)| < C_2 \max|\varphi|, \qquad 0 < x < 1. \tag{4.78}$$

Рассмотрим $f_{11}(x)$. В силу (4.74) и (4.5) имеем

$$f_{11}(x) = \int_0^l \varphi(s)\, \rho(s, x, 0)\, ds = -\varphi(l) + \int_0^l \varphi_1(s)\, \rho(s, x, 0)\, ds =$$

$$= -\varphi(l) + \int_0^l \bar{\varphi}_1(s)\, A(s, x, 0)\, ds,$$

где

$$\bar{\varphi}_1(s) = 2\varphi_1(s) + 4\int_0^l R(s, t; 2)\, \varphi_1(t)\, dt,$$

т. е. функция $\bar{\varphi}_1(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{\varphi}_1(s) - 2\int_0^l K(s, t)\, \bar{\varphi}_1(t)\, dt = 2\varphi_1(s).$$

Итак,

$$f_{11}(x) = -\varphi(l) - \bar{\varphi}_1(l) + \int_0^l [\bar{\varphi}_1(s) - \bar{\varphi}_1(l)]\, A(s; x, 0)\, ds.$$

Можно показать (см., например, [56ж]), что

$$\int_0^{\tilde{l}} K(\tilde{s}, \tilde{t})\, \bar{\varphi}_1(\tilde{t})\, dt$$

удовлетворяет условию Липшица, где $\tilde{s}$ — длина дуги кривой $\tilde{\Gamma}$, $\tilde{l}$ — ее длина в плоскости $\left(x,\ \tilde{y} = \frac{2}{3} y^{3/2}\right)$. Поэтому в силу (4.75)

$$|\bar{\varphi}_1(l) - \bar{\varphi}_1(s)| < C_3 (l - s)^{1/3}.$$

Таким образом, для достаточно малых x

$$|f'_{11}(x)| < C_3 \int_{l-\varepsilon}^{l} (l-s)^{4/3} |A'_x(s, x, 0)| \, ds + O(1)$$

или, заменяя $A'_x(s, x, 0)$ его выражением, имеем

$$|f'_{11}(x)| < C_4 \int_{l-\varepsilon}^{l} (l-s)^{1/3} \frac{\eta \left| \frac{d\eta}{ds} \right| ds}{\left[(\xi - x)^2 + \frac{4}{9}\eta^3\right]^{7/6}} + O(1).$$

Но при достаточном малом ε

$$\frac{1}{(\xi - x)^2 + \frac{4}{9}\eta^3} < C_5 \frac{1}{x^2 + \frac{4}{9}\eta^3}.$$

Поэтому

$$|f'_{11}(x)| < C_6 \int_{l-\varepsilon}^{l} \frac{(l-s)^{4/3} \eta \left| \frac{d\eta}{ds} \right| ds}{\left(x^2 + \frac{4}{9}\eta^3\right)^{7/6}} + O(1) < C_7 x^{-1/9}. \quad (4.79)$$

Таким образом, в силу (4.77), (4.78) и (4.79) имеем

$$|f'_1(x)| < C_8 x^{-1/9}.$$

Если $(1-x)$ мало, то, используя второе неравенство (4.75), аналогично найдем

$$|f'_1(x)| < C_9 (1-x)^{-1/3}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 7, а $\psi'(\eta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β, то $F(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ при $0 \leqslant x < 1$.*

Доказательство. В самом деле,

$$F(x) = -\frac{1}{\pi k \sqrt{3}} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-2/3} [f_1(t) + f_2(t)] \, dt.$$

Далее,

$$f_2(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\int_0^x\left[\psi'(t)+\frac{\psi(t)-\psi(0)}{6t}\right]\frac{t^{1/3}\,dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}}+$$

$$+\int_0^x\psi_1(t)\,l(x,\,t)\,dt+\psi(0)=\psi_{11}(x)+\psi_{12}(x)+\psi(0).$$

Можно показать, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-2/3}\psi_{11}(t)\,dt=$$

$$=\int_0^x\left[\psi'(t)+\frac{\psi(t)-\psi(0)}{6t}\right]\frac{t\,dt}{x^{5/6}(x-t)^{5/6}}=$$

$$=\int_0^x x^{1/6}(x-t)^{-5/6}\psi'(t)\,dt. \qquad (4.80)$$

Так как $\psi'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β на $[0,\,1)$, то интеграл (4.80) будет удовлетворять условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6}+\delta<1$, $\delta<\beta$.

В силу леммы 6

$$|\psi_{12}'(x)|<C_{10}.$$

Таким образом,

$$F(x)=-\frac{1}{\pi k\sqrt{3}}\left\{\int_0^x(x-t)^{-2/3}f_1'(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-2/3}\psi_{11}(t)\,dt+\int_0^x(x-t)^{-2/3}\psi_{12}'(t)\,dt\right\}. \qquad (4.81)$$

В силу леммы 7 первый интеграл в (4.81) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\delta<{}^2/_9$ при $0\leqslant x<1$, а третий интеграл удовлетворяет условию

Гёльдера с показателем $1/3$. Итак, $F(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6}+\varepsilon<\frac{2}{9}$ при $0\leqslant x<1$. Лемма доказана.

5. Регуляризация сингулярного уравнения. Сингулярное интегральное уравнение (4.70) можно регуляризовать, пользуясь следующей леммой.

Лемма 9 (Трикоми). *Если $g(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $0<x<1$ и $g(x)\in L_p(0, 1)$, $p>1$, то решение уравнения*

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt=g(x) \tag{4.82}$$

в классе функций $\nu(x)$ таких, что $x^{2/3}\nu(x)\in L_p(0, 1)$, дается формулой

$$\nu(x)=\frac{3}{4}\left\{g(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)g(t)\,dt\right\}+Ax^{-4/3}(1-x)^{-1/3}, \tag{4.83}$$

где A — произвольная постоянная.

Доказательство *). Полагая $x^{2/3}\nu(x)=\varphi(x)$, $x^{2/3}g(x)=f(x)$, приведем уравнение (4.82) к виду

$$\varphi(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{x+t-2xt}\right)\varphi(t)\,dt=f(x). \tag{4.84}$$

Пусть z — произвольная точка комплексного переменного. Следуя идее Карлемана, положим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2tz}\right)\varphi(t)\,dt. \tag{4.85}$$

*) См. С. Г. Михлин, Об интегральном уравнении **F. Tricomi**, ДАН СССР **59**, 1948, 1053–1056.

Очевидно, что $\Phi(z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости и при $0 < x < 1$

$$\Phi^{+}(x) - \Phi^{-}(x) = \varphi(x),$$

$$\Phi^{+}(x) + \Phi^{-}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right)\varphi(t)\,dt.$$

Это позволяет уравнение (4.84) свести к следующему:

$$\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\Phi^{+}(x) - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\Phi^{-}(x) = f(x) \qquad (0 < x < 1). \tag{4.86}$$

Из (4.85) легко видеть, что

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = (2z-1)\,\Phi(z). \tag{4.87}$$

Дробно-линейное преобразование $\zeta = \frac{z}{2z-1}$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот; отрезок $(0, 1)$ переходит при этом в два луча: $(0, \infty)$ и $(\infty, 1)$. Заменив в (4.86) x через $\frac{x}{2x-1}$ и пользуясь (4.87), получим

$$\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\Phi^{-}(x) - \left(1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\Phi^{+}(x) = \frac{1}{2x-1} f\left(\frac{x}{2x-1}\right) \tag{4.88}$$

$$(-\infty < x < 0,\ 1 < x < \infty).$$

Введем две функции:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}, & 0 < x < 1, \\[2mm] \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}, & -\infty < x < 0, \quad 1 < x < \infty, \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} f(x), \quad 0 < x < 1, \\[2mm] -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}\,\dfrac{1}{2x-1} f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right), \\[2mm] -\infty < x < 0,\ 1 < x < \infty. \end{cases}$$

Тогда уравнения (4.86) и (4.88) можно объединить в одно:

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = h(x), \tag{4.89}$$
$$-\infty < x < \infty, \quad x \neq 0, \quad x \neq 1.$$

Таким образом, решение интегрального уравнения (4.84) приведено к следующей задаче теории функций комплексного переменного: *найти функцию* $\Phi(z)$, *голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскости, удовлетворяющую граничному условию* (4.89).

Решение этой задачи можно получить в явном виде. В самом деле, нетрудно видеть, что функция

$$X(z) = \exp\left[-\frac{1}{6}\int_0^1\left(\frac{1}{t-z} - \frac{2z-1}{t+z-2tz}\right)dt\right] \tag{4.90}$$

является частным решением соответствующей однородной задачи

$$X^+(x) = G(x)X^-(x)$$

и удовлетворяет условию

$$X\left(\frac{z}{2z-1}\right) = X(z). \tag{4.91}$$

Из (4.90) имеем

$$X^+(x) = e^{-\pi i/6}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}, \quad X^-(x) = e^{\pi i/6}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}, \tag{4.92}$$
$$0 < x < 1,$$

а в силу (4.91) и (4.92)

$$X^+(x) = e^{\pi i/6}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}, \quad X^-(x) = e^{-\pi i/6}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3} \tag{4.93}$$
$$(-\infty < x < 0, \ 1 < x < \infty).$$

Заменим теперь в (4.89) $G(x)$ через $X^+(x)/X^-(x)$ и разделим все уравнение на $X^+(x)$. Тогда получим

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{h(x)}{X^+(x)}. \tag{4.94}$$

Одно из решений этого уравнения есть

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)}{X^+(x)}\,\frac{dt}{t-z}. \qquad (4.95)$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=0.$$

Это уравнение показывает, что функция $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z=0$, $z=1$, которые могут быть только полюсами. На бесконечности $F(z)$ равна нулю. Допуская, что $\Phi(z)$ может иметь особенности порядка ниже единицы при $z\to 0$ или $z\to 1$, мы найдем, что $F(z)=a/z$, где a — произвольная постоянная. Таким образом, общее решение задачи (4.89) есть

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{t-z}+a\,\frac{X(z)}{z}. \qquad (4.96)$$

Интеграл в (4.96) разобьем на три по промежуткам $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ и $(0, 1)$ и в первых двух интегралах заменим t на $\dfrac{t}{2t-1}$. Тогда, учитывая (4.91), найдем

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\,\frac{f(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t+z-2zt}\right)dt+a\frac{X(z)}{z}.$$

Далее, $\varphi(x)$ определяем по формуле

$$\varphi(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x),\qquad 0<x<1.$$

Выполнив указанные вычисления, получим

$$\varphi(x)=\frac{3}{4}\Bigg[f(x)-$$
$$-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/3}\int_0^1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f(t)\,dt\Bigg]+$$
$$+Ax^{-2/3}(1-x)^{-1/3},$$

где A — произвольная постоянная. Отсюда, возвращаясь к прежним функциям, получим формулу (4.83). Лемма доказана.

Вернемся теперь к сингулярному интегральному уравнению (4.70) и запишем его в виде

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \nu(t)\,dt =$$
$$= F(x) - \int_0^1 L(x, t)\,\nu(t)\,dt.$$

Тогда в силу леммы 9 получим

$$\nu(x) + \int_0^1 K_1(x, t)\,\nu(t)\,dt = g_1(x) + Ax^{-1/3}(1-x)^{-1/3}, \quad (4.97)$$

где

$$K_1(x, t) = \frac{3}{4}\left[L(x, t) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{1/3} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{y-x} - \frac{1}{y+x-2xy}\right) L(y, t)\,dy\right], \quad (4.98)$$

$$g_1(x) =$$
$$= \frac{3}{4}\left[F(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) F(t)\,dt\right]. \quad (4.99)$$

Рассмотрим ядро $K_1(x, t)$. Так как в силу лемм 4 и 5

$$\left|\frac{\partial\chi(t, y)}{\partial y}\right| < C_1\left[\ln\frac{1}{|t-y|} + (t+y-2yt)^{-1/3}\right], \quad \left|\frac{\partial K(y, t)}{\partial y}\right| < C_2, \quad (4.100)$$

то из (4.71) имеем

$$\left|t^\varepsilon(1-t)^\varepsilon L(x, t)\right| < C_3,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Тогда из (4.98) легко следует, что

$$\left|t^\varepsilon(1-t)^\varepsilon K_1(x, t)\right| < C_4(1-x)^{-\frac{1}{3}-\delta}, \quad (4.101)$$

где $\delta > 0$ произвольно мало.

Исследуем теперь функцию $g_1(x)$. На основании леммы 8 $g_1(x)$ непрерывна при $0 \leqslant x < 1$, а так как в силу леммы 7

$$|F(x)| < C_5 + C_6 \ln \frac{1}{1-x},$$

то из (4.99) следует, что $x^{1/3}(1-x)^{1/3} g_1(x) \in L_p(0, 1)$ при $p > 1$, т. е.

$$g_1(x) \in L_r(0, 1),$$
$$r < 3.$$

Так как мы ищем те решения $\nu(x)$ уравнения (4.70), которые будут интегрируемы с некоторой степенью $p > 3/2$, то в (4.97) необходимо положить $A = 0$.

Итак, мы получили уравнение

$$\nu(x) + \int_0^1 K_1(x, t)\, \nu(t)\, dt = g_1(x), \tag{4.102}$$

к которому применима теория Фредгольма.

Докажем, что однородное уравнение

$$\nu(x) + \int_0^1 K_1(x, t)\, \nu(t)\, dt = 0 \tag{4.103}$$

не имеет отличных от нуля решений $\nu(x)$ таких, что $\nu(x) \in L_p(0, 1)$, $p > 3/2$. Допустим обратное. В силу оценки (4.101) из (4.103) следует, что $\nu(x) \in L_2(0, 1)$. Принимая во внимание (4.98), уравнение (4.103) можно переписать следующим образом:

$$\nu(x) = \frac{3}{4}\left\{\varkappa(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \varkappa(t)\, dt\right\}, \tag{4.104}$$

где

$$\varkappa(x) = -\int_0^1 L(x, t)\,\nu(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi k\sqrt{3}}\int_0^x (x-y)^{-2/3}\,dy\left[\int_0^y \frac{\partial K(y, t)}{\partial y}\,\nu(t)\,dt + \int_0^1 \frac{\partial \chi(y, t)}{\partial y}\,\nu(t)\,dt\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\int_0^x (x-y)^{-2/3}\varkappa_1(y)\,dy.$$

Из неравенства Буняковского в силу оценок (4.100) следует, что $|\varkappa_1(y)| < C_7$. Тогда по теореме Харди—Литтлвуда *) $\varkappa(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем 1/3 при $0 \leqslant x < 1$.

Чтобы закончить доказательство, нам нужна следующая

Лемма 10. *Если $\varkappa(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α при $0 \leqslant x < 1$, то*

$$\theta(x) = \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\varkappa(t)\,dt$$

удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при $0 \leqslant x < 1$.

Доказательство. Действительно,

$$\theta(x) = \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\frac{2x(1-t)}{t+x-2xt}\,\frac{\varkappa(t)-\varkappa(x)}{t-x}\,dt +$$

$$+\varkappa(x)\int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)dt = \theta_1(x) + \theta_2(x).$$

*) См. ниже, стр. 109.

Используя вычисления Трикоми [59а] (см. дополнение 1 в конце этого параграфа), имеем

$$\theta_2(x) =$$

$$= \varkappa(x)\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} x^{2/3} F\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, x\right)\right] +$$

$$+ \varkappa(x)\frac{2\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{5\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}(1-x)^{-5/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}; \frac{1-2x}{1-x}\right).$$

Отсюда видно, что $\theta_2(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α при $0 \leqslant x < 1$. Что касается $\theta_1(x)$, то обычным приемом легко убедиться, что $\theta_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ при $0 \leqslant x < 1$. Лемма доказана.

Из леммы 10 следует, что $\nu(x)$ — решение уравнения (4.103) — удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{3} - \varepsilon$ при $0 \leqslant x < 1$. Подставляя $\nu(x)$, например, в уравнение (4.57), где положено $\psi_1(t) \equiv 0$, мы найдем функцию $\tau(x)$; при этом легко видеть, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - \varepsilon$ при $0 \leqslant x < 1$ *). Таким образом, функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ определяют решение $u(x, y)$ уравнения (4.1), принадлежащее классу $\mathscr{R}_1$ и обращающееся в нуль на Γ и на характеристике $\xi = 0$. Но если выполнены условия либо теоремы 2.2, либо теоремы 2.5, то $u(x, y) \equiv 0$ и, следовательно, $\nu(x) \equiv 0$. Итак, уравнение (4.102) разрешимо при любой правой части и $\nu(x) \in L_2(0, 1)$.

Из (4.99), в силу лемм 8 и 10, следует, что $g_1(x)$ в уравнении (4.102) удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6} + \varepsilon_1$ $(\varepsilon_1 > 0)$ при $0 \leqslant x < 1$. Применяя лемму 10 к интегралу

$$\int_0^1 K_1(x, t)\,\nu(t)\,dt,$$

*) См. ниже, дополнение 2, стр. 109.

мы находим, что $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6}+\varepsilon_1$ при $0 \leqslant x < 1$. Из формулы (4.57) следует, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > \frac{5}{6}$ при $0 \leqslant x < 1$. Итак, имеет место следующая

Теорема 2.9. *Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 7, а $\psi(\eta)$ — условиям леммы 8 и если выполнены условия либо теоремы 2.2, либо теоремы 2.5, а кривая Γ удовлетворяет условиям, сформулированным в начале § 4, то в области D существует решение уравнения (2.1), принадлежащее классу $\mathscr{R}_1$, такое, что*

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad u|_{\xi=0} = \psi(\eta).$$

6. Частный случай. Решение задачи Трикоми для уравнения

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{$*$}$$

когда кривая Γ совпадает с «нормальной» кривой Γ_0:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{9}y^3 = \frac{1}{4}, \qquad y \geqslant 0,$$

можно представить в замкнутом виде. Действительно, функция Грина $G_0(\xi, \eta; x, y)$ задачи N для уравнения $(*)$ в случае нормальной области D_0^+ выписывается в явном виде (см. (4.7)) и решение задачи N имеет вид (см. [56ж])

$$u(x, y) = \\ = -\int_0^1 \nu(t)\, G_0(t, 0; x, y)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, A_s[G_0(\xi, \eta; x, y)]\, ds. \tag{4.105}$$

Полагая здесь $y = 0$ и принимая во внимание (4.4) и (4.7), получим

$$\tau(x) + k\int_0^1 \left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}}\right]\nu(t)\, dt = \Phi(x), \tag{4.106}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} x(1-x)\int_0^1 \varphi(\xi)\,\xi^{-1/3}(1-\xi)^{-1/3}\left[x^2-(2x-1)\,\xi\right]^{-7/6}d\xi. \tag{4.107}$$

Решение уравнения (*) в гиперболической полуплоскости, удовлетворяющее данным Коши

$$u(x,\ 0)=\tau(x), \qquad \lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),$$

дается формулой

$$u(x,\ y)=\gamma_1\int_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right]t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}\,dt+ \\ +\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\gamma_2 y\int_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}(2t-1)\right]t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}\,dt, \tag{4.108}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \qquad \gamma_2=\left(\frac{3}{4}\right)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

Приравнивая выражение (4.108) на характеристике AC к функции $\psi(x)$, будем иметь

$$\gamma_1\int_0^1 \tau(2tx)\,t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}\,dt- \\ -\gamma_2(2x)^{2/3}\int_0^1 \nu(2tx)\,t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}\,dt=\psi(x) \\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

или

$$\int_0^x (x-\xi)^{-5/6}\xi^{-5/6}\tau(\xi)\,d\xi-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}x^{-2/3}\int_0^x \xi^{-1/6}(x-\xi)^{-1/6}\nu(\xi)\,d\xi= \\ =\frac{1}{\gamma_1}x^{-2/3}\psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Отсюда, применяя известную формулу обращения для интегрального уравнения Абеля (см. стр. 84), получим

$$\tau(x) = \psi_1(x) + k\int_0^x (x-t)^{-1/3}\nu(t)\,dt, \tag{4.109}$$

где

$$\begin{gathered}\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi\gamma_1}x^{5/6}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\bar\psi(t)\,dt}{t^{2/3}(x-t)^{1/6}}, \qquad \bar\psi(t) = \psi\left(\frac{t}{2}\right),\\ k = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/3}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{4\pi\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.\end{gathered} \tag{4.110}$$

Исключая теперь $\tau(x)$ из уравнений (4.106) и **(4.109)**, будем иметь

$$\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/3}} + \int_0^1\left[\frac{1}{|x-t|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}}\right]\nu(t)\,dt = \frac{1}{k}f(x), \tag{4.111}$$

где

$$f(x) = \Phi(x) - \psi_1(x). \tag{4.112}$$

Производя те же преобразования, что в начале п. 3 § 4, мы приведем уравнение (4.111) к виду

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right)\nu(t)\,dt = F(x), \tag{4.113}$$

где

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{2/3}}. \tag{4.114}$$

Исследуем поведение свободного члена $F(x)$ в уравнении (4.113) при $x \to 0$ и $x \to 1$, предполагая, что $\varphi(s)$ — непрерывная функция, а $\psi(x)$ имеет ограниченную первую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем β. Нетрудно видеть, что функция

$\Phi(x)$ одинаково ведет себя при $x \to 0$ и $x \to 1$. Поэтому мы ограничимся выяснением ее поведения при $x \to 0$. Применив первую теорему о среднем к интегралу (4.107), получим

$$\Phi(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \varphi(\xi) \times \\ \times x(1-x)\int_0^1 \xi^{-1/3}(1-\xi)^{-1/3}[x^2-(2x-1)\xi]^{-7/6}d\xi$$

или

$$\Phi(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \varphi(\xi) \times \\ \times x^{-4/3}(1-x)\int_0^1 \xi^{-1/3}(1-\xi)^{-1/3}\left[1-\frac{2x-1}{x^2}\xi\right]^{-7/6}d\xi.$$

Но интеграл, входящий в последнюю формулу, выражается через гипергеометрическую функцию. Пользуясь известной формулой *), получим

$$\Phi(x) = \frac{k}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \varphi(\xi)\, x^{-4/3}(1-x)\frac{\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} F\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{4}{3}; \frac{2x-1}{x^2}\right).$$

Отсюда, применяя функциональное соотношение, связывающее гипергеометрические функции с аргументами z и $\frac{1}{1-z}$ **), имеем

$$\Phi(x) = -3k\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\varphi(\xi)(1-x)^{-1/3} \times \\ \times F\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right) + k\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \times \\ \times \varphi(\xi)\, x(1-x)^{-4/3} F\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}; \left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right).$$

---

*) См. сноску на стр. 33.

**) См. Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963, стр. 299.

Эта формула показывает, что при $x \to 0$ функция $\Phi(x)$ стремится к конечному пределу. Аналогичным рассуждением легко убеждаемся в том, что $\Phi'(x)$ при $x \to 0$ также стремится к конечному пределу. То же самое можно сказать о поведении $\Phi(x)$ и $\Phi'(x)$ при $x \to 1$.

Далее, из формулы (4.110) имеем

$$\psi_1(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \int_0^x \left[\bar{\psi}'(t) + \frac{\bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(0)}{6t}\right] \frac{t^{1/3}\,dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \bar{\psi}(0) = \psi_{11}(x) + \bar{\psi}(0).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\psi_{11}(t)\,dt = \int_0^x \left[\bar{\psi}'(t) + \frac{\bar{\psi}(t) - \bar{\psi}(0)}{6t}\right]\frac{t\,dt}{x^{5/6}(x-t)^{5/6}} = \int_0^x x^{1/6}(x-t)^{-5/6}\bar{\psi}'(t)\,dt.$$

Таким образом,

$$F(x) = \frac{1}{k\pi\sqrt{3}}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\Phi'(t)\,dt - \frac{x^{1/6}}{k\pi\sqrt{3}}\int_0^x (x-t)^{-5/6}\bar{\psi}'(t)\,dt.$$

В силу $|\Phi'(x)| < C$ первый интеграл удовлетворяет условию Гёльдера с показателями $^1/_3$, а второй интеграл удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6} + \beta \leqslant 1$, так как $\bar{\psi}'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем β на $(0, 1)$. Итак, $F(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6} + \beta\right)$ при $0 \leqslant x < 1$.

Решение уравнения (4.113), согласно лемме 9 § 4, дается формулой (4.83), в которой нужно положить

$A=0$, так как при $x\to 0$ $\nu(x)$ можно обращаться в бесконечность порядка меньше $^2/_3$. Таким образом,

$$\nu(x)=\frac{3}{4}\left\{F(x)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)F(t)\,dt\right\}. \quad \mathbf{(4.115)}$$

В силу леммы 10 § 4 $\nu(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\frac{1}{6}+\varepsilon_1$ $(\varepsilon_1>0)$ при $0\leqslant x<1$. Из формулы (4.109) следует, что $\tau(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha>{}^5/_6$ при $0\leqslant x<1$.

Подставляя (4.115) в (4.109), находим $\tau(x)$. Зная $\tau(x)$ и $\nu(x)$, по формулам (4.105) и (4.108) получим решение $u(x, y)$ соответственно в областях D^+ и D^-. Это решение принадлежит классу $\mathscr{R}_1$.

7. Дополнение 1 [59а]. Пусть функция $A(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывную первую производную в $[a, b]$, которая на концах этого промежутка может обращаться в бесконечность порядка меньше чем единица, и пусть c — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Тогда справедлива следующая формула:

$$\int_a^b\frac{A(t)\,dt}{t-c}=A(b)\ln(b-c)-$$

$$-A(a)\ln(c-a)-\int_a^b A'(t)\ln|t-c|\,dt. \quad \mathbf{(4.116)}$$

При тех же условиях имеем

$$\int_a^b\frac{A(t)\,dt}{t-c}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_a^c\frac{A(t)\,dt}{(c-t)^{1-\varepsilon}}+\int_c^b\frac{A(t)\,dt}{(t-c)^{1-\varepsilon}}\right], \quad (4.117)$$

что можно легко проверить, принимая во внимание (4.116) и вспоминая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{\varepsilon}-1}{\varepsilon}=\ln x.$$

Перейдем к вычислению следующих двух интегралов:

$$\begin{aligned} T_1(\alpha, \beta; x) &= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{[x+(1-x)t]^\beta (1-t)}, \\ T_2(\alpha, \beta; x) &= \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{[x+(1-x)t]^\beta (1+t)}, \end{aligned} \tag{4.118}$$

где α и β — постоянные, удовлетворяющие условию

$$0<\alpha<\beta+1, \qquad \alpha>\beta.$$

Для вычисления интеграла T_1 применим формулу (4.117). Тогда

$$T_1(\alpha, \beta; x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[x^{-\beta}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\varepsilon-1}\left(1-\frac{x-1}{x}t\right)^{-\beta} dt - \right.$$
$$\left. -(1-x)^{-\beta}\int_1^\infty t^{\alpha-1}(t-1)^{\varepsilon-1}\left(t-\frac{x}{x-1}\right)^{-\beta} dt\right].$$

Положив во втором интеграле $t=1/z$ (после чего он преобразуется в гипергеометрический интеграл), получим

$$T_1(\alpha, \beta; x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\varepsilon)} F\left(\alpha, \beta, \alpha+\varepsilon; \frac{x-1}{x}\right)x^{-\beta} - \right.$$
$$-(1-x)^{-\beta}\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1-\varepsilon)\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \times$$
$$\left.\times F\left(\beta, \beta-\alpha+1-\varepsilon, \quad \beta-\alpha+1; \frac{x}{x-1}\right)\right]$$

или, выражая гипергеометрические функции через те же функции аргумента x по известным формулам *),

$$T_1(\alpha, \beta; x) =$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\Gamma(\varepsilon)\left[\frac{\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta-\varepsilon)}-\frac{\Gamma(\beta-\alpha+1-\varepsilon)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\right]F(\beta, \varepsilon, \beta-\alpha-1; x)+\right.$$
$$\left.+x^{\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)}F(\alpha, \alpha-\beta-\varepsilon, \alpha-\beta+1; x)\right\}.$$

*) См., например, Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963, стр. 296—299.

Отсюда, переходя к пределу, найдем

$$T_1(\alpha, \beta: x) = \pi \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)\pi + \\ + x^{\alpha-\beta} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)} F(\alpha, \alpha-\beta, \alpha-\beta+1; x). \quad (4.119)$$

Интеграл T_2 вычисляется более просто; в самом деле, положив $\frac{1}{1+t} = z$, получим

$$T_2(\alpha, \beta; x) = \int_0^1 z^{\beta-\alpha}(1-z)^{\alpha-1}[(1-x)-(1-2x)z]^{-\beta}\, dz,$$

откуда имеем

$$T_2(\alpha, \beta; x) = \\ = (1-x)\frac{-\beta\,\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(1+\beta)} F\left(1-\alpha+\beta, \beta, 1+\beta; \frac{1-2x}{1-x}\right). \quad (4.120)$$

После этого вычислим интеграл

$$I(x) = \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{x+t-2xt}\right) dt.$$

Преобразуем этот интеграл, вводя вместо t новую переменную интегрирования $\xi = \frac{x(1-t)}{(1-x)t}$:

$$I(x) = \int_0^\infty \frac{2\xi^{4/3}\, d\xi}{[x+(1-x)\xi]^{5/3}(1-\xi^2)} = \int_0^\infty \frac{\xi^{4/3}\, d\xi}{[x+(1-x)\xi]^{5/3}(1-\xi)} + \\ + \int_0^\infty \frac{\xi^{4/3}\, d\xi}{[x+(1-x)\xi]^{5/3}(1+\xi)} = T_1\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}; x\right) + T_2\left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}; x\right).$$

Отсюда в силу (4.119) и (4.120) имеем

$$I(x) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} F\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}; x\right) + \\ + \frac{2}{5}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}; \frac{1-2x}{1-x}\right)(1-x)^{-5/3}.$$

8. Дополнение 2. Рассмотрим интеграл дробного порядка α:

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Имеют место следующие теоремы (см. [68], [69]).

Теорема 1. *Если* $f(x)\in L_p(a, b)$, $p>1$, $-\infty<a<$ $<b\leqslant\infty$, *и если*

$$0<\alpha<\frac{1}{p}, \qquad q=\frac{p}{1-p\alpha},$$

то $f_\alpha(x)\in L_q(a, b)$ *и*

$$\left(\int\limits_a^b |f_\alpha(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\leqslant K\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right),$$

где $K=K(p, \alpha)$ *зависит только от* p *и* α.

Следствие. *Если* $p>1$ *и* $\alpha=1/p$, *то* $f_\alpha(x)$ *ограничена.*

Теорема 2. *Если*

$$p>1, \qquad \frac{1}{p}<\alpha<\frac{1}{p}+1$$

или

$$p=1, \qquad 1\leqslant\alpha<2$$

и если $f(x)\in L_p(a, b)$, *то* $f_\alpha(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha-\frac{1}{p}$ *в* (a, b).

Теорема 3. *Пусть* $k\geqslant 0$, $\alpha>0$, $k+\alpha<1$. *Если* $f(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* k *в* (a, b) *и*

$$f(x)=O\left((x-a)^k\right)$$

для малых $(x-a)$, *то* $f_\alpha(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $k+\alpha$ *в* (a, b) *и*

$$f_\alpha(x)=O\left((x-a)^{k+\alpha}\right)$$

для малых $(x-a)$.

§ 5. Дальнейшее исследование уравнения Чаплыгина

1. Определение обобщенного решения класса $\mathfrak{R}$. Рассмотрим уравнение

$$K(u) \equiv K(\sigma)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} = 0, \quad K(0) = 0, \quad K'(\sigma) > 0, \quad (5.1)$$

в области D_σ, ограниченной кривой Γ_σ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости, и двумя дугами характеристик

$$\theta = -\int_0^\sigma \sqrt{-K(t)}\,dt, \qquad \theta - 1 = \int_0^\sigma \sqrt{-K(t)}\,dt.$$

Введем новые переменные

$$x = 0, \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2}\int_0^\sigma \sqrt{K(t)}\,dt. \qquad (5.2)$$

Тогда уравнение (5.1) принимает вид

$$yu_{xx} + u_{yy} + b(y)\,u_y = 0, \qquad (5.3)$$

где

$$b(y) = \frac{d^2 y}{d\sigma^2} : \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2.$$

Полагая

$$u = ze^{-\frac{1}{2}\int_0^y b(y)\,dy}, \qquad (5.4)$$

приведем уравнение (5.3) к виду

$$F(z) \equiv yz_{xx} + z_{yy} + c(y)\,z = 0, \qquad (5.5)$$

где

$$c(y) = -\frac{b^2}{4} - \frac{b'}{2}.$$

Область D_σ преобразуется в область D плоскости (x, y), а кривая Γ_σ — в кривую Γ. Будем предполагать, что кривая Γ удовлетворяет условиям § 4 гл. II.

Рассмотрим следующий класс $\mathscr{R}$ обобщенных решений уравнения (5.5), а следовательно и уравнения (5.1), введенный К. И. Бабенко [4а].

Решение $z(x, y)$ уравнения (5.5) *принадлежит классу $\mathscr{R}$, если в D^+ оно представлено в виде* (см. (4.16))

$$z(x, y) = -\int_0^1 \nu(t)\, \tilde{G}(t, 0; x, y)\, dt - \int_0^l \varphi(s)\, \tilde{\rho}(s, x, y)\, ds, \tag{5.6}$$

а в D^- — в виде (см. (2.5))

$$z(\xi, \eta) = \int_\xi^\eta \tau(t)\, g(\xi, \eta, t)\, dt - \int_\xi^\eta \nu(t)\, h(\xi, \eta, t)\, dt \tag{5.7}$$

***и функция** $\nu(x)$ такова, что*

$$\nu(x) = x^{1/6} \int_0^x (x-t)^{-5/6}\, t^{-1/6} \mu(t)\, dt, \qquad \int_0^1 (1-t)\, \mu^2(t)\, dt < \infty. \tag{5.8}$$

От функции

$$\varphi(s) = z|_\Gamma$$

будем требовать, чтобы она была непрерывна при $0 \leqslant s \leqslant l$ и удовлетворяла условию Гёльдера при $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$, $l - \varepsilon \leqslant s \leqslant l$.

Таким образом, решение $z \in \mathscr{R}$ в области D^+ дважды непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (5.5). Оно может неограниченно возрастать при приближении точки (x, y) к точке $(1, 0)$.

Можно показать, что функция $\nu(x)$ является интегралом дробного порядка $1/6$ от функции, интегрируемой с квадратом на любом интервале $(0, \theta)$, $\theta < 1$, т. е.

$$\nu(x) = \int_0^x (x-t)^{-5/6}\, \psi(t)\, dt.$$

В дальнейшем нам потребуется следующая

Теорема Харди [26]. *Пусть* $p>1$, $n<p-1$, $f(x)\geqslant 0$, $0<x<\infty$, $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$. *Если* $f^p(x)\,x^n$ *интегрируема по интервалу* $(0, \infty)$, *то то же имеет место и для* $\left\{\frac{F(x)}{x}\right\}^p x^n$ *и*

$$\int\limits_0^\infty \left\{\frac{F(x)}{x}\right\}^p x^n\,dx \leqslant \left(\frac{p}{p-n-1}\right)^p \int\limits_0^\infty f^p(x)\,x^n\,dx.$$

Лемма 1. *Если функция* $\nu(x)$ *представима в виде* (5.8), *то*

$$\left(\int\limits_0^1 (1-x)^{3/2}\,|\,\nu(x)\,|^3\,dx\right)^{1/3} \leqslant A\left(\int\limits_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Положив $g(x)=(1-x)^{1/2}\,|\,\mu(x)\,|$, получим

$$\begin{aligned}(1-x)^{1/2}\,|\,\nu(x)\,| &\leqslant x^{1/6}\int\limits_0^x (x-t)^{-5/6}\,t^{-1/6}g(t)\,dt \leqslant \\ &\leqslant 2^{5/6}x^{-2/3}\int\limits_0^{x/2} t^{-1/6}\,g(t)\,dt + 2^{1/6}\int\limits_{x/2}^x (x-t)^{-5/6}\,g(t)\,dt \leqslant \\ &\leqslant 2^{5/6}x^{-2/3}\int\limits_0^x t^{-1/6}g(t)\,dt + 2^{1/6}\int\limits_0^x (x-t)^{-5/6}\,g(t)\,dt = \\ &= 2^{5/6}f_1(x) + 2^{1/6}f_2(x).\end{aligned} \tag{5.10}$$

По теореме Харди — Литтлвуда (см. п. 8 § 4 гл. II)

$$\left(\int\limits_0^1 f_2^3(x)\,dx\right)^{1/3} \leqslant B\left(\int\limits_0^1 g^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Далее, пусть

$$G(x)=\int\limits_0^x t^{-1/6}g(t)\,dt.$$

Тогда в силу неравенства Буняковского

$$G(x) \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} x^{1/3} \left(\int_0^1 g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 f_1^3(x)\,dx = \int_0^1 x^{-2} G^3(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \int_0^1 x^{-2}(x^{1/6} G(x))^2\,dx \left(\int_0^1 g^2(x)\,dx\right)^{1/2},$$

или

$$\int_0^1 f_1^3(x)\,dx \leqslant B\left(\int_0^1 g^2(x)\,dx\right)^{3/2}.$$

Применяя теперь неравенство Минковского к выражению (5.10), получим (5.9). Лемма доказана.

Следствие. *При* $p < 6/5$ $\int_0^1 |\nu(x)|^p\,dx < \infty$.

2. Функциональное соотношение между $\lambda(x)$ и $\mu(x)$. Рассмотрим решение $z(x, y)$ уравнения (5.5) из класса $\mathscr{R}$, обращающееся в нуль на Γ. Тогда из (5.6) в D^+ имеем

$$z(x, y) = -\int_0^1 \nu(t)\,\tilde{G}(t, 0;\ x, y)\,dt =$$

$$= -\int_0^1 \nu(t)\,G(t, 0;\ x, y)\,dt - \int_0^1 \nu(t)\,\tilde{H}(t;\ x, y)\,dt.$$

Отсюда при $0 < x < 1$

$$\lim_{y \to 0} z(x, y) = \tau(x) =$$

$$= -\int_0^1 \nu(t)\,G(t, 0;\ x, 0)\,dt - \int_0^1 \nu(t)\,\tilde{H}(t;\ x, 0)\,dt, \quad (5.11)$$

и, принимая во внимание (4.21), получим

$$\tau(x) = -\int_0^1 \nu(t)\, G_0(t, 0;\ x, 0)\, dt - \int_0^1 \nu(t)\, \chi(t, x)\, dt, \tag{5.12}$$

где

$$\begin{gathered} \chi(t, x) = H(t, x) + \tilde{H}(t;\ x, 0), \\ G_0(t, 0;\ x, 0) = k\left[\frac{1}{|t-x|^{1/3}} - \frac{1}{(x+t-2xt)^{1/3}}\right]. \end{gathered} \tag{5.13}$$

Заменим в (5.12) x на ξ, умножим на $(x-\xi)^{-2/3}$, проинтегрируем по ξ в пределах от 0 до x. Затем, дифференцируя по x, получим

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,\tau(\xi)\, d\xi = -k\frac{d}{dx}\int_0^1 \nu(t)\, dt \times \\ \times\left[\int_0^x \frac{d\xi}{|t-\xi|^{1/3}(x-\xi)^{2/3}} - \int_0^x \frac{d\xi}{(t+\xi-2\xi t)^{1/3}(x-\xi)^{2/3}}\right] - \\ - \frac{d}{dx}\int_0^1 \nu(t)\, dt \int_0^x \chi(t, \xi)(x-\xi)^{-2/3}\, d\xi. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Производя в правой части равенства (5.14) те же самые вычисления, что и в п. 3 § 4 гл. II, получим

$$\begin{gathered} \frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,\tau(\xi)\, d\xi = \\ = -\frac{1}{2}\nu(x) - \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\, dt - \\ - \frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\int_0^1 \nu(t)\, dt\, \frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,\chi(t, \xi)\, d\xi \end{gathered}$$

или, полагая

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-\xi)^{-2/3}\,\tau(\xi)\, d\xi = \varphi_1(x), \tag{5.15}$$

будем иметь

$$\frac{1}{k}\varphi_1(x)=$$
$$=-\frac{1}{2}\nu(x)-\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt-$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\int_0^1\nu(t)\,dt\frac{d}{dx}\int_0^x(x-\xi)^{-2/3}\chi(t,\xi)\,d\xi.$$

Для удобства вычислений положим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{k}\varphi_1(x)-\nu(x)=\tilde{\varphi}(x),\\&\frac{1}{\pi\sqrt{3}k}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-\xi)^{-2/3}\chi(t,\xi)\,d\xi=\chi_1(x,t).\end{aligned}\right\}\tag{5.16}$$

Тогда

$$\frac{2}{3}\tilde{\varphi}(x)+\nu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt+$$
$$+\int_0^1\chi_1(x,t)\,\nu(t)\,dt=0.\tag{5.17}$$

Умножим (5.17) на $(\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до ζ. Принимая пока без доказательства возможность перемены порядка интегрирования, получим

$$\frac{2}{3}\int_0^\zeta(\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\tilde{\varphi}(x)\,dx+\int_0^\zeta(\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\nu(x)\,dx+$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1t^{2/3}\nu(t)\,dt\int_0^\zeta(\zeta-x)^{-1/6}x^{-5/6}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)dx+$$
$$+\int_0^1\nu(t)\,dt\int_0^\zeta(\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\chi_1(x,t)\,dx=0.$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-5/6} \frac{dx}{t-x} = \begin{cases} 2\pi t^{-5/6}(t-\zeta)^{-1/6} & \text{при} \quad t>\zeta, \\ \pi\sqrt{3}\, t^{-5/6}(\zeta - t)^{-1/6} & \text{при} \quad t<\zeta \end{cases}$$

и

$$\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-5/6} (x + t - 2xt)^{-1}\, dx = 2\pi t^{-5/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6}.$$

Поэтому

$$\frac{2}{3}\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \tilde{\varphi}(x)\, dx + 2\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \nu(x)\, dx +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{3}} \int_\zeta^1 (t-\zeta)^{-1/6} t^{-1/6} \nu(t)\, dt -$$
$$- \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^1 t^{-1/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6} \nu(t)\, dt +$$
$$+ \int_0^1 \nu(t)\, dt \int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \chi_1(x, t)\, dx = 0. \qquad (5.18)$$

Рассмотрим более подробно отдельные слагаемые в выражении (5.18). В силу (5.8) имеем

$$\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \nu(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6}\, dx \int_0^x (x-t)^{-5/6} t^{-1/6} \mu(t)\, dt =$$
$$= \int_0^\zeta t^{-1/6} \mu(t)\, dt \int_t^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} (x-t)^{-5/6}\, dx =$$
$$= \int_0^\zeta t^{-1/6} \mu(t)\, dt \int_0^1 v^{-5/6}(1-v)^{-1/6} dv = 2\pi \int_0^\zeta t^{-1/6} \mu(t)\, dt.$$

Дифференцируя по ζ, находим

$$\frac{d}{d\zeta}\int_0^{\zeta}(\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\nu(x)\,dx=2\pi\zeta^{-1/6}\mu(\zeta). \tag{5.19}$$

Принимая во внимание (5.8), имеем

$$\begin{aligned}\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}t^{-1/6}\nu(t)\,dt=&\\
=\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}\,dt\int_0^t(t-x)^{-5/6}x^{-1/6}\mu(x)\,dx=&\\
=\int_0^{\zeta}x^{-1/6}\mu(x)\,dx\int_{\zeta}^{1}(1-\zeta)^{-1/6}(t-x)^{-5/6}\,dt+&\\
+\int_{\zeta}^{1}x^{-1/6}\mu(x)\,dx\int_x^1(t-\zeta)^{-1/6}(t-x)^{-5/6}\,dt.&\end{aligned}$$

Положим

$$K_1(x,\zeta)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}(t-x)^{-5/6}\,dt & \text{при}\quad x<\zeta,\\[2ex] \displaystyle\int_{x}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}(t-x)^{-5/6}\,dt & \text{при}\quad x>\zeta\end{cases}$$

или, производя замену переменных,

$$K_1(x,\zeta)=\begin{cases}\displaystyle 6\int_0^{\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6}}\frac{dv}{1-v^6} & \text{при}\quad x>\zeta,\\[2ex] \displaystyle 6\int_{\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6}}^{\infty}\frac{dv}{v^6-1} & \text{при}\quad x<\zeta.\end{cases} \tag{5.20}$$

Тогда

$$\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}\,t^{-1/6}\nu(t)\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\zeta}x^{-1/6}\mu(x)\,K_1(x,\zeta)\,dx+\int_{\zeta}^{1}x^{-1/6}K_1(x,\zeta)\,\mu(x)\,dx. \qquad (5.21)$$

Вычисляя интегралы (5.20) и подставляя в (5.21), получим

$$\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}\,t^{-1/6}\nu(t)\,dt=$$

$$=-\sqrt{3}\,\pi\int_{0}^{\zeta}t^{-1/6}\mu(t)\,dt+\int_{0}^{1}\ln\left|\frac{1+w}{1-w}\right|t^{-1/6}\mu(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\ln\frac{w^2-w+1}{w^2+w+1}\,t^{-1/6}\mu(t)\,dt+$$

$$+\sqrt{3}\int_{0}^{1}t^{-1/6}\left[\operatorname{arctg}\frac{2w-1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2w+1}{\sqrt{3}}\right]\mu(t)\,dt$$

$$\left(w=\left(\frac{1-t}{1-\zeta}\right)^{1/6}\right).$$

Отсюда, дифференцируя по ζ, почти всюду по ζ $(0<\zeta<1)$ будем иметь

$$\frac{d}{d\zeta}\int_{\zeta}^{1}(t-\zeta)^{-1/6}\,t^{-1/6}\nu(t)\,dt=$$

$$=-\pi\sqrt{3}\,\zeta^{-1/6}\mu(\zeta)+\int_{0}^{1}\left(\frac{1-t}{1-\zeta}\right)^{1/6}t^{-1/6}\,\frac{\mu(t)\,dt}{t-\zeta}. \qquad (5.22)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{1}t^{-1/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6}\,\nu(t)\,dt.$$

Воспользовавшись (5.8), получим

$$\int_0^1 t^{-1/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6}\nu(t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 x^{-1/6}\mu(x)\,dx \int_x^1 (t-x)^{-5/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6}\,dt =$$
$$= \int_0^1 x^{-1/6}K_2(x,\zeta)\mu(x)\,dx, \qquad (5.23)$$

где

$$K_2(x,\zeta) = \int_x^1 (t-x)^{-5/6}(t+\zeta-2t\zeta)^{-1/6}\,dt =$$
$$= \int_0^{\frac{1-x}{x+\zeta-2x\zeta}} v^{-5/6}[1+(1-2\zeta)v]^{-1/6}\,dv.$$

Дифференцируя по ζ, находим

$$\frac{\partial K_2(x,\zeta)}{\partial\zeta} = -\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/3}\frac{1-2x}{x+\zeta-2x\zeta} -$$
$$-\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6}\frac{2}{1-2\zeta}\left\{1-F\left(1,\ \frac{1}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{(1-x)(1-2\zeta)}{1-\zeta}\right)\right\} =$$
$$= -\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/3}\frac{1-2x}{x+\zeta-2x\zeta} - \left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6}\frac{\sqrt{3}}{2}K_3(x,\zeta). \qquad (5.24)$$

Легко видеть, что

$$|K_3(x,\zeta)| \leqslant C\left(\ln\left|\frac{1}{x+\zeta-2x\zeta}\right|+1\right). \qquad (5.25)$$

В силу лемм 1 и 2 § 4 из (5.16) имеем

$$\chi_1(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}\,k}\int_0^x (x-y)^{-2/3}\frac{\partial\chi(t,y)}{\partial y}\,dy.$$

Тогда получим следующее равенство:

$$\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \chi_1(x, t)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}k} \int_0^\zeta \frac{\partial\chi(t, y)}{\partial y} dy \int_y^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} (x - y)^{-2/3} x^{-1/6} dx. \quad (5.26)$$

С помощью подстановки $x = \zeta - (\zeta - y)\xi$ внутренний интеграл в (5.26) преобразуется в гипергеометрический интеграл, и мы имеем

$$\int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \chi_1(x, t)\, dx = \frac{1}{\pi\sqrt{3}k} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)} \times$$
$$\times \int_0^\zeta \left(\frac{\zeta - y}{\zeta}\right)^{1/6} F\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}; \frac{\zeta - y}{\zeta}\right) \frac{\partial\chi(t, y)}{\partial y} dy.$$

Дифференцируя по ζ, получим

$$\frac{\partial}{\partial\zeta} \int_0^\zeta (\zeta - x)^{-1/6} x^{-1/6} \chi_1(x, t)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}k} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^\zeta \frac{y^{1/6}}{\zeta^{1/3}(\zeta - y)^{5/6}} \frac{\partial\chi(t, y)}{\partial y} dy = \chi_2(t, \zeta). \quad (5.27)$$

Оценим функцию $\chi_2(t, \zeta)$. Из формулы (5.13) в силу лемм I и 2 § 4 гл. II имеем

$$\left|\frac{\partial\chi(t, y)}{\partial y}\right| < C_1 \ln\frac{1}{|t - y|} + C_2 \frac{1}{(t + y - 2ty)^{1/3}}. \quad (5.28)$$

Далее,

$$I_1 = \int_0^{\zeta} \frac{y^{1/6}}{\zeta^{1/3}(\zeta - y)^{5/6}} \ln \frac{1}{|t-y|}\, dy =$$

$$= \int_0^1 v^{1/6}(1-v)^{-5/6} \ln \frac{1}{|\zeta v - t|}\, dv < C_\varepsilon \zeta^{-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$I_2 = \int_0^{\zeta} \frac{y^{1/6}(t + y - 2ty)^{-1/3}\, dy}{\zeta^{1/3}(\zeta - y)^{5/6}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}(t + \zeta - 2t\zeta)^{-1/3} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{\zeta(1-2t)}{t+\zeta-2t\zeta}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} t^{-1/6}(t + \zeta - 2t\zeta)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, 1, \frac{4}{3}; \frac{(2t-1)\zeta}{t}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$I_2 < \begin{cases} C_3 t^{-1/6}\zeta^{-1/6} & \text{при} \quad t < 1/2, \\ C_4 t^{-1/6}(1-\zeta)^{-1/6} & \text{при} \quad t > 1/2. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|\chi_2(t, \zeta)| < C_5 \zeta^{-\varepsilon} + C_6 t^{-1/6} \{\min(\zeta, 1-\zeta)\}^{-1/6}. \qquad (5.29)$$

Полагая

$$\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6} \chi_3(x, \zeta) = \int_x^1 t^{-1/6}(t-x)^{-5/6} \chi_2(t, \zeta)\, dt$$

и принимая во внимание (5.27) и (5.8), находим

$$\frac{d}{d\zeta}\int_0^1 \nu(t)\,dt\int_0^\zeta (\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\chi_1(x,\ t)\,dx =$$
$$= \int_0^1 x^{-1/6}\left(\frac{1-x}{1-\zeta}\right)^{1/6}\chi_3(x,\ \zeta)\,\mu(x)\,dx. \quad (5.30)$$

Если в (5.29) положить $\varepsilon = 1/6$, то

$$|\chi_3(x,\ \zeta)| < C_7\zeta^{-1/6}. \quad (5.31)$$

Дифференцируя (5.18) по ζ и учитывая (5.19), (5.22)–(5.24) и (5.30), получим

$$\frac{2}{3}\frac{d}{d\zeta}\int_0^\zeta (\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\tilde{\varphi}(x)\,dx + 2\pi\zeta^{-1/6}\mu(\zeta) +$$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 t^{-1/6}\left(\frac{1-t}{1-\zeta}\right)^{1/6}\left(\frac{1}{t-\zeta}+\frac{1-2t}{t+\zeta-2t\zeta}\right)\mu(t)\,dt +$$
$$+2\pi\int_0^1 t^{-1/6}\left(\frac{1-t}{1-\zeta}\right)^{1/6}K_4(t,\ \zeta)\,\mu(t)\,dt = 0,$$

где

$$2\pi K_4(t,\ \zeta) = K_3(t,\ \zeta) + \chi_3(t,\ \zeta).$$

Разделив на 2π и обозначив

$$\frac{\zeta^{1/6}}{2\pi}\frac{d}{d\zeta}\int_0^\zeta (\zeta-x)^{-1/6}x^{-1/6}\tilde{\varphi}(x)\,dx = \lambda(\zeta), \quad (5.32)$$

можем написать

$$\frac{2}{3}\lambda(\zeta) + \mu(\zeta) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{\zeta(1-t)}{t(1-\zeta)}\right]^{1/6}\left(\frac{1}{t-\zeta}+\frac{1-2t}{t+\zeta-2t\zeta}\right)\mu(t)\,dt +$$
$$+\int_0^1\left[\frac{\zeta(1-t)}{t(1-\zeta)}\right]^{1/6}K_4(t,\ \zeta)\,\mu(t)\,dt = 0. \quad (5.33)$$

где функция $K_4(t, \zeta)$ имеет оценку

$$|K_4(t, \zeta)| < C\left(\ln \frac{1}{t+\zeta-2t\zeta} + \zeta^{-1/6}\right), \tag{5.34}$$

что следует из (5.25) и (5.31).

Таким образом, мы получили функциональное соотношение между $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, которое в дальнейшем будет играть большую роль.

Лемма 2 [4а]. *Имеет место неравенство*

$$\int_0^1 (1-x)\lambda^2(x)\,dx \leqslant A^2 \int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\,dx, \tag{5.35}$$

где A — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство леммы опирается на следующий результат.

Теорема (К. И. Бабенко). *Если при* $p>1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} |f(x)|^p\,dx < \infty, \qquad -1<\alpha<p-1,$$

и

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\,dt,$$

то этот интеграл существует почти всюду по x $(-\infty < x < \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} |g(x)|^p\,dx \leqslant B^p \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} |f(x)|^p\,dx, \tag{*}$$

где B зависит только от α и p.

Пусть

$$t^{-1/6}(1-t)^{1/6}\mu(t) = f(t)$$

и

$$G(x) = x^{1/6}(1-x)^{1/3} \int_0^1 \frac{f(t)\,dt}{t-x} =$$

$$= x^{1/6}(1-x)^{1/3}\left\{\int_0^{1/2} \frac{f(t)\,dt}{t-x} + \int_{1/2}^1 \frac{f(t)\,dt}{t-x}\right\} =$$

$$= x^{1/6}(1-x)^{1/3}[G_1(x)+G_2(x)].$$

Тогда, полагая в (*) $\alpha = {}^1/_3$, имеем

$$\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{2/3} G_1^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 x^{1/3} G_1^2(x)\,dx \leqslant B^2 \int_0^1 (1-x)^{1/3}\mu^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant B_1^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx.$$

Аналогично, полагая $\alpha = {}^2/_3$, получим

$$\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{2/3} G_2^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 (1-x)^{2/3} G_2^2(x)\,dx \leqslant B^2 \int_{1/2}^1 (1-x)\,x^{-1/3}\mu^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant B_2^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 G^2(x)\,dx \leqslant B_3^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx.$$

Рассмотрим интеграл

$$I = x^{1/6}(1-x)^{1/3} \int_0^1 \frac{(1-2t)\,f(t)\,dt}{t+x-2xt} = I_1 + I_2 + I_3,$$

где интегралы I_1, I_2 и I_3 берутся соответственно в пределах $(0, {}^1/_4)$, $({}^1/_4, {}^3/_4)$ и $({}^3/_4, 1)$,

$$|I_1| \leqslant x^{1/6}(1-x)^{1/3} \int_0^{1/4} \frac{|f(t)|\,dt}{t+x},$$

и, применяя (*) с $\alpha = {}^1/_3$, получим

$$\int_0^1 |I_1|^2\,dx \leqslant B_4^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx.$$

Далее,

$$|I_2| < Cx^{1/6}(1-x)^{1/3} \int_{1/4}^{3/4} |f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 x^{1/6}(1-x)^{1/3}\left\{\int_{1/4}^{3/4}\left(\frac{1-x}{x}\right)^{1/3}\mu^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 x^{1/6}(1-x)^{1/3}\left\{\int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx\right\}^{1/2}.$$

Отсюда

$$\int_0^1 |I_2|^2\,dx \leqslant C_2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx.$$

Интеграл I_3 оценивается так же, как и I_1. Таким образом,

$$\int_0^1 |I|^2\,dx \leqslant B_5^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx.$$

Для последнего интеграла в (5.33) имеем

$$\left|\int_0^1 \left[\frac{\zeta(1-t)}{t(1-\zeta)}\right]^{1/3} K_4(t,\ \zeta)\,\mu(t)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant (1-\zeta)^{-1/6}\left(\int_0^1 \frac{\zeta^{1/3}K_4^2(t,\ \zeta)\,dt}{t^{1/3}(1-t)^{2/3}}\right)^{1/2}\left(\int_0^1 (1-t)\,\mu^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_3(1-\zeta)^{-1/6}\left(\int_0^1 (1-t)\,\mu^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Применяя неравенство Минковского к (5.33) и учитывая полученные оценки, получим (5.35). Лемма доказана.

Выше мы положили (см. (5.15) и (5.16))

$$\varphi_1(x)=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\tau(t)\,dt,$$

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{1}{k}\varphi_1(x)-\nu(x).$$

Пусть

$$\lambda_1(x)=\frac{x^{1/6}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-1/6}\,t^{-1/6}\varphi_1(t)\,dt. \tag{5.36}$$

Тогда из (5.32) имеем

$$\lambda(x)=\frac{1}{k}\lambda_1(x)-\mu(x).$$

Следствие. *Для функции* (5.36) *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 (1-x)\lambda_1^2(x)\,dx\leqslant A_1^2\int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\,dx. \tag{5.37}$$

Замечание. При выводе соотношения (5.18) мы приняли без доказательства возможность перемены порядка интегрирования. Эта возможность основывается на следующей лемме, которая представляет самостоятельный интерес, а также будет использована нами в дальнейшем.

Лемма 3 [4а]. *Если* $f(x)\in L_2(0,\ 1)$, *то интеграл*

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f(t)\,dt$$

существует почти всюду на $(0,\ 1)$ *и*

$$\int_0^1 g^2(x)\,dx\leqslant\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Следствие. *Если* $h(x) \in L_2(0, 1)$ *и* $f(x) \in L_2(0, 1)$, *то*

$$\int_0^1 g(x)\, h(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 f(t)\, dt \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) h(x)\, dx.$$

3. Вывод одного неравенства в гиперболической части области D. Пусть решение $z(x, y)$ уравнения (5.5) принадлежит классу $\mathscr{R}$ и обращается в нуль на Γ. В области D^- оно представимо формулой (5.7):

$$z(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_\xi^\eta \frac{(\eta-\xi)^{2/3}\, \tau(t)\, dt}{(\eta-t)^{5/6}(t-\xi)^{5/6}} - \gamma_2 \int_\xi^\eta \frac{\nu(t)\, dt}{(\eta-t)^{1/6}(t-\xi)^{1/6}} +$$

$$+ \int_\xi^\eta g_0(\xi, \eta, t)\, \tau(t)\, dt - \int_\xi^\eta h_0(\xi, \eta, t)\, \nu(t)\, dt, \quad (5.38)$$

где

$$g_0(\xi, \eta, t) = \gamma_1 \int_\xi^t \int_t^\eta \frac{(\eta'-\xi')^{2/3}\, C(\xi', \eta')}{(\eta'-t)^{5/6}(t-\xi')^{5/6}}\, v(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, d\xi'\, d\eta', \quad (5.39)$$

$$h_0(\xi, \eta, t) = \gamma_2 \int_\xi^t \int_t^\eta \frac{C(\xi', \eta')}{(\eta'-t)^{1/6}(t-\xi')^{1/6}}\, v(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, d\xi'\, d\eta', \quad (5.40)$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}, \qquad \gamma_2 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{5}{6}\right)}.$$

Положив в формуле (5.38) $\xi = 0$, получим

$$z(0, \eta) = \gamma_1 \int_0^\eta \frac{\eta^{2/3}\, \tau(t)\, dt}{(\eta-t)^{5/6}\, t^{5/6}} - \gamma_2 \int_0^\eta t^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6}\, \nu(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^\eta g_0(0, \eta, t)\, \tau(t)\, dt - \int_0^\eta h_0(0, \eta, t)\, \nu(t)\, dt. \quad (5.41)$$

Подставляя в (5.41) значение $\tau(t)$ из формулы (5.15), после несложных преобразований будем иметь

$$z(0,\ \eta)=\int_0^\eta t^{-1/6}(\eta-t)^{-1/6}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_1(t)-\gamma_2\nu(t)\right]dt+$$

$$+\int_0^\eta g_1(\eta,\ t)\varphi_1(t)\,dt-\int_0^\eta h_0(0,\ \eta,\ t)\nu(t)\,dt, \quad (5.42)$$

где

$$g_1(\eta,\ t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_t^\eta d\eta'\int_0^t \frac{C(\xi',\ \eta')\,v(0,\ \eta;\ \xi',\ \eta')}{(\eta'-t)^{1/6}(1-\xi')^{1/6}}\,d\xi'+$$

$$+\int_t^\eta d\eta'\int_t^{\eta'} \frac{C(\xi',\ \eta')\,v(0,\ \eta';\ \xi',\ \eta')}{(\eta'-t)^{1/6}(\xi'-t)^{1/6}}\,d\xi'. \quad (5.43)$$

Далее, заменив в (5.42) $\nu(x)$ и $\varphi_1(x)$ их выражениями из формул (5.8) и (5.36) соответственно, найдем

$$z(0,\ \eta)=2\pi\int_0^\eta x^{-1/6}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_1(x)-\gamma_2\mu(x)\right]dx+$$

$$+\int_0^\eta x^{-1/6}g_2(\eta,\ x)\lambda_1(x)\,dx-\int_0^\eta x^{-1/6}h_1(\eta,\ x)\mu(x)\,dx, \quad (5.44)$$

где

$$g_2(\eta,\ x)=\int_x^\eta t^{1/6}(t-x)^{-5/6}g_1(\eta,\ t)\,dt,$$

$$h_1(\eta,\ x)=\int_x^\eta t^{1/6}(t-x)^{-5/6}h_0(0,\ \eta,\ t)\,dt.$$

Подставив вместо $g_1(\eta, t)$ и $h_0(0, \eta, t)$ их значения из формул (5.43) и (5.40), получим

$$g_2(\eta, x) = \int_x^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} C(\xi', \eta') v(0, \eta; \xi', \eta') I_2(\xi', \eta', x)\, d\xi',$$

$$h_1(\eta, x) = \int_x^{\eta} d\eta' \int_0^{\eta'} C(\xi', \eta') v(0, \eta; \xi', \eta') I_1(\xi', \eta', x)\, d\xi',$$

где

$$I_1(\xi', \eta', x) = \int_{\max(\xi', x)}^{\eta'} \frac{t^{1/6}\, dt}{(\eta' - t)^{1/6} (t - \xi')^{1/6} (t - x)^{5/6}};$$

$$I_2(\xi', \eta', x) = \int_0^{\eta'} \frac{t^{1/6}\, dt}{(\eta' - t)^{1/6} |t - \xi'|^{1/6} (t - x)^{5/6}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|I_1| \leqslant C_1 \eta'^{1/6} |\xi' - x|^{-1/6}, \qquad |I_2| \leqslant C_1 \eta'^{1/6} |\xi' - x|^{-1/6}.$$

Используя оценки для производных функции Римана [4a]

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial v(\xi', \eta'; \xi, \eta)}{\partial \xi} \right| &\leqslant \frac{(\eta' - \xi')^{1/3}}{(\eta' - \xi)^{7/6} (\eta - \xi')^{1/6}} C_1(\xi', \eta'; \xi, \eta), \\ \left| \frac{\partial v(\xi', \eta'; \xi, \eta)}{\partial \eta} \right| &\leqslant \frac{(\eta' - \xi')^{1/3}}{(\eta' - \xi)^{1/6} (\eta - \xi')^{7/6}} C_2(\xi', \eta'; \xi, \eta), \end{aligned} \tag{5.45}$$

где $C_1 < \infty$ и $C_2 < \infty$ при $\xi \leqslant \xi' \leqslant \eta' \leqslant \eta$, $0 < \eta - \xi < \infty$, а также оценки для интегралов I_1 и I_2, найдем

$$\left| \frac{\partial g_2}{\partial \eta} \right| < C_2 \eta^{1/3}, \qquad \left| \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right| < C_2 \eta^{1/3}.$$

Дифференцируя (5.44) по η, получим

$$\frac{\partial z(0, \eta)}{\partial \eta} = 2\pi \eta^{-1/6} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_1(\eta) - \gamma_2 \mu(\eta) \right] + \\ + \int_0^{\eta} x^{-1/6} \frac{\partial g_2(\eta, x)}{\partial \eta} \lambda_1(x)\, dx - \int_0^{\eta} x^{-1/6} \frac{\partial h_1(\eta, x)}{\partial \eta} \mu(x)\, dx. \tag{5.46}$$

Отсюда следует важное неравенство

$$\int\limits_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left[\frac{\partial z(0,\eta)}{\partial \eta}\right]^2 d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_3^2\left[\int\limits_0^1 (1-\eta)\lambda_1^2(\eta)\,d\eta + \int\limits_0^1 (1-\eta)\mu^2(\eta)\,d\eta\right]. \qquad (5.47)$$

4. Свойства обобщенного решения из класса $\mathfrak{R}$. Пусть решение $z(x, y)$ уравнения (5.5) принадлежит классу $\mathscr{R}$ и обращается в нуль на Γ.

Возьмем последовательность функций $\{\mu_n(x)\}$, $0 \leqslant \leqslant x < 1$, удовлетворяющих условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (1-x)[\mu(x)-\mu_n(x)]^2 dx = 0$;

2) $\mu_n(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, $\mu_n(x)$ и $\mu_n'(x)$ обращаются в нуль в достаточно малой окрестности точки $x=0$.

Соответствующие функции $\nu_n(x)$, определенные формулой (5.8), также дважды непрерывно дифференцируемы, и $\nu_n(x)$, $\nu_n'(x)$ обращаются в нуль в достаточно малой окрестности точки $x=0$. По функциям $\nu_n(x)$ строим последовательность решений $\{z_n(x, y)\}$, которые обращаются в нуль на Γ, и, кроме того, $z_n(x, y)$ непрерывны в $\overline{D}$. В силу леммы 1

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = z(x, y), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

равномерно при $y \geqslant \delta > 0$.

Лемма 4. *Если $z(x, y)$ — решение уравнения* (5.5), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial z}{\partial y} = \nu(x), \qquad z|_\Gamma = 0,$$

где $\nu(x)$ дважды непрерывно дифференцируема при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $\nu(0)=0$, $\nu'(0)=0$, то

1) *$\tau'(x)$ ограничена при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\tau''(x)$ непрерывна при $0 < x < 1$;*

2) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\partial z}{\partial x}=\tau'(x)$ *равномерно в каждом интервале* $(\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ *и при малых* $y>0$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|<C_1[\hat{x}(y)]^{-\frac{1}{3}-\delta}+C_2 q(1,\ 0;\ x,\ y),$$

где $\hat{x}(y)=\min(x-x_1,\ x_2-x)$, *а* x_1 *и* x_2 — *абсциссы точек линии* Γ *с ординатой* y; $\delta>0$ — *малое произвольное число*;

3) $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\partial z}{\partial y}=\nu(x)$ *равномерно в каждом интервале* $(\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ *и при малых* $y>0$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|<C_3\left|\ln\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\frac{4}{9}y^3}\right)\right|+C_4\frac{\sqrt{y}}{[\hat{x}(y)]^{1/3+\delta}}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства п. 2). Решение $z(x,\ y)$ уравнения (5.5), обращающееся в нуль на Γ, представимо в виде (см. (4.14) и (4.3))

$$z(x,\ y)=z_0(x,\ y)+\iint\limits_{D^+}C(\xi,\ \eta)\,G(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\,z(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{5.48}$$

а

$$z_0(x,\ y)=\int_0^1\nu(t)\,G(t,\ 0;\ x,\ y)\,dt=$$

$$=\int_0^1\nu(t)[q(t,\ 0;\ x,\ y)+p(t,\ 0;\ x,\ y)]\,dt=I_1+I_2,$$

так как $z_0(x,\ y)$ обращается в нуль на Γ.

Рассмотрим $z_0(x,\ y)$. Из (4.4) имеем

$$\left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|<\frac{C}{rr_1^{1/3}},\qquad \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|<\frac{C\sqrt{y}}{rr_1^{1/3}},$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\nu(t)\,q(t,\ 0;\ x,\ y)\,dt=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\int_0^1\nu'(t)\,dt\int_t^1 q(\zeta,\ 0;\ x,\ y)\,d\zeta=$$

$$=-\nu(1)\,q(1,\ 0;\ x,\ y)+\int_0^1\nu'(t)\,q(t,\ 0;\ x,\ y)\,dt.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial I_1}{\partial x}\right| < Cq(1,\ 0;\ x,\ y)$$

и

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial I_1(x,\ y)}{\partial x} = \frac{\partial I_1(x,\ 0)}{\partial x}$$

равномерно при $0 \leqslant x < 1-\varepsilon$. Очевидно, что производная $\frac{\partial^2 I_1(x,\ 0)}{\partial x^2}$ непрерывна при $0 < x < 1$.

Функцию $p(t,\ 0;\ x,\ y)$ можно представить в виде [56ж]

$$p(t,\ 0;\ x,\ y) = \int_0^l \rho(s,\ t,\ 0)\,q(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\,ds, \qquad (\xi,\ \eta)\in\Gamma,$$

и

$$I_2 = \int_0^1 \nu(t)\,p(t,\ 0;\ x,\ y)\,dt =$$

$$= \int_0^l q(\xi,\ \eta;\ x,\ y)\,ds \int_0^1 \nu(t)\,\rho(s,\ t,\ 0)\,dt.$$

Положим

$$\varphi(s) = \int_0^1 \nu(t)\,\rho(s,\ t,\ 0)\,dt, \qquad \psi(s) = \int_0^1 \nu(t)\,A(s,\ t,\ 0)\,dt.$$

Тогда в силу (4.5)

$$\varphi(s) - 2\int_0^l K(t,\ s)\,\varphi(t)\,dt = 2\psi(s). \tag{5.49}$$

Имеем

$$\psi(s) = \int_0^1 \nu(t)\,A(s,\ t,\ 0)\,dt = \int_0^1 \nu'(t)\,dt \int_t^1 A(s,\ x,\ 0)\,dx,$$

откуда

$$|\psi(s)| \leqslant \frac{k}{3}\int\limits_0^1 |\nu'(t)|\,dt \int\limits_t^1 \frac{\left|\eta\frac{d\eta}{ds}(\xi - x) - \frac{2}{3}\eta^2\frac{d\xi}{ds}\right|}{\left[(\xi - x)^2 + \frac{4}{9}\eta^3\right]^{7/6}}\,dx <$$

$$< C_5\eta^{1/2}\int\limits_0^1 dt \int\limits_t^1 \frac{dx}{\left[(\xi - x)^2 + \frac{4}{9}\eta^3\right]^{1/2}} < C_6\eta^{\frac{1}{2}-\delta_1},$$

где $\delta_1 > 0$ — малое произвольное число. Принимая во внимание, что

$$|K(t, s)| < C\frac{\eta^{1/2}}{r_1^{1/3}}\left(\ln\frac{1}{\sigma} + 1\right),$$

из (5.49) получим

$$|\varphi(s)| < C_7\eta^{\frac{1}{2}-\delta_1}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\partial I_2(x, y)}{\partial x}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^l \varphi(s)\frac{\partial q(\xi, \eta; x, y)}{\partial x}\,ds\right| < C_8\int\limits_0^l \frac{\eta^{\frac{1}{2}-\delta_1}\,ds}{rr_1^{1/3}} < C_9\int\limits_0^l \frac{\eta^{1/2}\,ds}{r^{\frac{4}{3}+\frac{2\delta_1}{3}}}.$$

Положим $\frac{2\delta_1}{3} = \delta$. Пусть для определенности $\hat{x}(y) = x_2 - x$.

Тогда

$$\int\limits_0^l \frac{\eta^{1/2}\,ds}{r^{\frac{4}{3}+\delta}} = \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{\eta^{1/2}\,ds}{r^{\frac{4}{3}+\delta}} + O(1).$$

Но при малых y и ε

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{\left[\hat{x}^2 + \frac{4}{9}\left(\eta^{3/2}(s) - y^{3/2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

и, следовательно,

$$\int_0^l \frac{\eta^{1/2}\,ds}{r^{\frac{4}{3}+\delta}} < O(1) + C_{10} \int_{-\frac{2}{3}y^{3/2}}^{\varepsilon_1} \frac{dv}{(\hat{x}^2+v^2)^{\frac{2}{3}+\frac{\delta}{2}}} < O(1) + C_{11}\hat{x}^{-\frac{1}{3}-\delta} < \frac{C_{12}}{\hat{x}^{\frac{1}{3}+\delta}}.$$

Ясно, что

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial I_2(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial I_2(x, 0)}{\partial x}$$

равномерно при $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$ и что $\frac{\partial^2 I_2(x, 0)}{\partial x^2}$ непрерывна при $0 < x < 1$. Таким образом, п. 2) доказан для $z_0(x, y)$.

Далее,

$$\left|\frac{\partial I_1}{\partial y}\right| = \left|\int_0^1 \nu'(t)\,dt \int_t^1 \frac{\partial q(\zeta, 0; x, y)}{\partial y}\,d\zeta\right| =$$

$$= \left|\frac{2k}{9}\int_0^1 \nu'(t)\,dt \int_t^1 \frac{y^2\,d\zeta}{\left[(\zeta-x)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{7/6}}\right| <$$

$$< \frac{2k}{9}\int_0^1 |\nu'(t)|\,dt \int_t^1 \frac{d\zeta}{\left[(\zeta-x)^2+\frac{4}{9}y^3\right]^{1/2}} <$$

$$< C_{13}\left|\ln\left(1-x+\sqrt{(1-x)^2+\frac{4}{9}y^3}\right)\right|.$$

Оценка для $\frac{\partial I_2}{\partial y}$ получается так же, как и для $\frac{\partial I_1}{\partial y}$. Очевидно, что $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial z_0(x, y)}{\partial y} = \nu(x)$ равномерно при $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$. Итак, п. 3) доказан для $z_0(x, y)$.

В силу лемм 2 и 3 § 2 утверждения пунктов 2 и 3 справедливы и для $z(x, y)$. Так как мы установили, что производная $\frac{\partial^2 z_0(x, 0)}{\partial x^2}$ непрерывна при $0 < x < 1$, то в силу тех же лемм $\frac{\partial^2 z(x, 0)}{\partial x^2}$ также непрерывна при $0 < x < 1$.

Остается рассмотреть $\tau'(x)$. Имеем (см. (5.12))

$$\tau(x) = -\int_0^1 \nu(t) G_0(t, 0; x, 0)\,dt - \int_0^1 \chi(t, x)\nu(t)\,dt.$$

Легко видеть, что производная первого интеграла ограничена при $0 \leqslant x \leqslant 1$, а ограниченность производной второго интеграла следует из оценки (5.28). Лемма доказана.

Очевидно, все решения $z_n(x, y)$, построенные выше, в области D^+ будут удовлетворять свойствам, доказанным в лемме 4.

Свойства решений $z_n(x, y)$ в D^- даются следующей леммой.

Лемма 5. *В области D^- решение $z_n(x, y)$ имеет непрерывные производные $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}$;*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \tau_n'(x)$$

равномерно в любом интервале $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, и $\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y}$ непрерывна вплоть до линии перехода; $\left.\frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right|_{\xi=0}$ и $\left.\frac{\partial z_n}{\partial \xi}\right|_{\eta=1}$ непрерывны.

Доказательство. В силу результатов леммы 4 из формулы (5.38) следует непрерывность $\frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2}$ в области D^-. Так как $z_n(x, y)$ принадлежит классу $\mathscr{R}_1$, то в силу леммы 2 § 2 этой главы производная $\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y}$ непрерывна вплоть до линии перехода, а $\left.\frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right|_{\xi=0}$ и $\left.\frac{\partial z_n}{\partial \xi}\right|_{\eta=1}$ непрерывны. Формулу (5.38) можно записать в виде [56ж]

$$z_n(\xi, \eta) =$$
$$= z_{n0}(\xi, \eta) + \int_\xi^\eta d\xi' \int_{\xi'}^\eta C(\xi', \eta') z_{n0}(\xi', \eta')\, v(\xi', \eta'; \xi, \eta)\,d\eta' =$$
$$= z_{n0}(\xi, \eta) + I_{n0}(\xi, \eta), \qquad (5.50)$$

где

$$z_{n0}(\xi, \eta) = \gamma_1 \int_0^1 \tau_n[\xi + (\eta - \xi)t]\, t^{-5/6}(1-t)^{-5/6} dt -$$

$$- \gamma_2 (\eta - \xi)^{2/3} \int_0^1 \nu_n[\xi + (\eta - \xi)t]\, t^{-1/6}(1-t)^{-1/6} dt. \quad (5.50')$$

Используя оценки (5.46) первых производных функций Римана $v(\xi', \eta'; \xi, \eta)$, нетрудно получить оценки первых производных $I_{n0}(\xi, \eta)$:

$$\left| \frac{\partial I_{n0}}{\partial \xi} \right| < C_1 (\eta - \xi)^{1/3}, \qquad \left| \frac{\partial I_{n0}}{\partial \eta} \right| < C_2 (\eta - \xi)^{1/3}. \quad (5.51)$$

Дифференцируя (5.50′) по x, получим

$$\frac{\partial z_{n0}}{\partial x} = \gamma_1 \int_0^1 \tau_n'[\xi + (\eta - \xi)t]\, t^{-5/6}(1-t)^{-5/6} dt -$$

$$- \gamma_2 (\eta - \xi)^{2/3} \int_0^1 \nu_n'[\xi + (\eta - \xi)t]\, t^{-1/6}(1-t)^{-1/6} dt.$$

Отсюда $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\partial z_{n0}}{\partial x} = \tau_n'(x)$ равномерно при $\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$.

Кроме того, заметим, что $\left| \frac{\partial z_{n0}}{\partial x} \right| < C_n$.

Таким образом, используя (5.51), будем иметь

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \tau_n'(x)$$

равномерно при $\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$. Кроме того,

$$\left| \frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} \right| < \tilde{C}_n. \quad (5.52)$$

Лемма доказана.

5. Условие на кривую Г. Теорема единственности. Пусть решение $z(x, y)$ уравнения (5.5) принадлежит классу $\mathscr{R}$ и обращается в нуль на Г. Пусть $\{z_n(x, y)\}$ — последовательность решений, построенная в п. 4. Каждому решению $z_n(x, y)$ соответствует дважды непрерывно дифференцируемое в D решение $u_n(\theta, \sigma)$

уравнения Чаплыгина (5.1):

$$u_n(\theta, \sigma) = z_n e^{-\frac{1}{2}\int_0^y b(y)\,dy}.$$

Ясно, что $u_n = 0$ на Γ. Опуская индекс n, рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемое в D решение уравнения (5.1) такое, что $z = u \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^y b(y)\,dy\right)$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3 леммы 4. Так как $z = 0$ на Γ, то $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial u}{d\sigma}$ непрерывны вплоть до границы Γ при $\sigma > 0$.

Пусть $p(\theta, \sigma)$ и $q(\theta, \sigma)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого порядка в $\bar{D}^+$.

Рассмотрим тождества

$$2p\frac{\partial u}{\partial \theta}K(u) = \\ = \left[p\left(ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right)\right]_\theta + \left(2pu_\theta u_\sigma\right)_\sigma - p_\theta\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) - 2pu_\theta u_\sigma = 0, \tag{5.53}$$

$$2q\frac{\partial u}{\partial \sigma}K(u) = \left[q\left(u_\sigma^2 - Ku_\theta^2\right)\right]_\sigma + \left(2qKu_\theta u_\sigma\right)_\theta - q_\sigma u_\sigma^2 + \\ + (qK)_\sigma u_\theta^2 - 2q_\theta K u_\theta u_\sigma = 0. \tag{5.54}$$

Пусть D_ε^+ и Γ_ε — части области D^+ и линии Γ, лежащие в полуплоскости $y \geqslant \varepsilon$, а $\theta_1(\varepsilon)$ и $\theta_2(\varepsilon)$ — абсциссы точек пересечения линии Γ с прямой $\sigma = \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ мало).

Интегрируя тождества (5.53) и (5.54) по области D_ε^+ и пользуясь формулой Грина, получим

$$-2\int_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} p(\theta, \varepsilon)\,u_\theta(\theta, \varepsilon)\,u_\sigma(\theta, \varepsilon)\,d\theta + \\ + \int_{\Gamma_\varepsilon} -2pu_\theta u_\sigma\,d\theta + p\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right)d\sigma - \\ - \iint_{D_\varepsilon^+}\left[2p_\sigma u_\theta u_\sigma + p_\theta\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right)\right]d\theta\,d\sigma = 0, \tag{5.55}$$

$$\int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} q\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\theta + \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} q\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\theta + 2qKu_\theta u_\sigma\, d\sigma -$$
$$- \iint\limits_{D_\varepsilon^+} \left[2Kq_\theta u_\theta u_\sigma + q_\sigma u_\sigma^2 - (qK)_\sigma u_\theta^2\right] d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.56)$$

Так как $u|_\Gamma = 0$, то $u_\theta\, d\theta + u_\sigma\, d\sigma = 0$ на Γ. Используя это соотношение и вычитая (5.55) из (5.56), находим

$$2\int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} p u_\theta u_\sigma\, d\theta + \int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} q\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\theta -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(Ku_\theta^2 + u_\sigma^2\right)(p\, d\sigma + q\, d\theta) - \iint\limits_{D_\varepsilon^+} \left\{2\left(Kq_\theta - p_\sigma\right) u_\theta u_\sigma +\right.$$
$$\left. + \left(q_\sigma + p_\theta\right)\left(u_\sigma^2 - Ku_\theta^2\right) - qK_\sigma u_\theta^2\right\} d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.57)$$

Функции p и q подчиним следующим условиям:

$$Kq_\theta - p_\sigma = 0, \qquad q_\sigma + p_\theta = 0, \qquad (5.58)$$
$$q \geqslant 0, \quad \lim_{\sigma \to 0} q(\theta, \sigma) = 0. \qquad (5.59)$$

Тогда равенство (5.57) примет вид

$$2\int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} p u_\theta u_\sigma\, d\theta + \int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} q\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\theta -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \left(Ku_\theta^2 + u_\sigma^2\right)(p\, d\sigma + q\, d\theta) + \iint\limits_{D_\varepsilon^+} qK_\sigma u_\theta^2\, d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.60)$$

Потребуем, далее, чтобы вдоль Γ выполнялось условие

$$p\, d\sigma + q\, d\theta \leqslant 0. \qquad (5.61)$$

В силу того, что $K_\sigma \geqslant 0$ и функция $z = ue^{\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\, dy}$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 леммы 4, в равенстве

(5.60) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда, принимая во внимание (5.59), получим

$$2\int_0^1 p u_\theta u_\sigma d\theta - \int_\Gamma \left(K u_\theta^2 + u_\sigma^2\right)(p\,d\sigma + q\,d\theta) + \\ + \iint_{D^+} q K_\sigma u_\theta^2\, d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.62)$$

Положив

$$\omega_\theta = q, \qquad \omega_\sigma = -p,$$

условие (5.58) можно записать так:

$$K\omega_{\theta\theta} + \omega_{\sigma\sigma} = 0.$$

Перейдем теперь к гиперболической полуплоскости. Пусть

$$p(\theta, 0) = p(\theta)$$

и

$$\xi = \theta - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_1, \qquad \eta = \theta + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_2$$

— два семейства характеристик уравнения (5.1).

В области D^- имеем следующее тождество:

$$2p(\eta)\, u_\theta K(u) = \left[p\left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right)\right]_\theta + \\ + (2pu_\theta u_\sigma)_\sigma + p'(\eta)\left(\sqrt{-K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 = 0. \qquad (5.63)$$

Рассмотрим область D_γ^-, лежащую в D^- и ограниченную отрезком $[0, 1]$ оси θ, гладкой кривой γ, выходящей из точки $A(0, 0)$ и пересекающей характеристику $\eta = 1$ в точке C_γ, и отрезком $C_\gamma B$ характеристики $\eta = 1$. Пусть $D_{\gamma\varepsilon}^- = D_\gamma^- \cap (\sigma \leqslant -\varepsilon)$, $\gamma_\varepsilon = \gamma \cap (\sigma \leqslant -\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, а $\theta_1(\varepsilon)$ и $\theta_2(\varepsilon)$ — абсциссы точек пересечения γ и $\eta = 1$ с прямой $\sigma = -\varepsilon$; B_ε — точка пересечения $\eta = 1$ с прямой $\sigma = -\varepsilon$.

Интегрируя тождество (5.63) по области $D_{\gamma\varepsilon}^{-}$, получим

$$2\int\limits_{\theta_1(\varepsilon)}^{\theta_2(\varepsilon)} pu_\theta(\theta, -\varepsilon)\, u_\sigma(\theta, -\varepsilon)\, d\theta + \int\limits_{\gamma_\varepsilon} p\left[-2u_\theta u_\sigma\, d\theta + \left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\sigma\right] - \int\limits_{C_\gamma}^{B_\varepsilon} p(1)\left(\sqrt{-K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 d\sigma + \iint\limits_{D_{\gamma\varepsilon}^{-}} p'(\eta)\left(\sqrt{-K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.64)$$

Так как в силу (5.59) $\lim\limits_{\sigma\to 0} q_\sigma \geqslant 0$, то из (5.58) следует, что $p'(\theta, 0) = p'(\theta) \leqslant 0$.

Положим

$$p(1) = 0. \qquad (5.65)$$

Согласно лемме 5 в (5.64) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$, и мы получим

$$2\int\limits_0^1 pu_\theta u_\sigma d\theta + \int\limits_\gamma p\left[-2u_\theta u_\sigma\, d\theta + \left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\sigma\right] + \iint\limits_{D_\gamma^{-}} p'(\eta)\left(\sqrt{-K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 d\theta\, d\sigma = 0. \qquad (5.66)$$

Вычитая (5.62) из (5.66), найдем

$$\int\limits_\gamma p\left[-2u_\theta u_\sigma\, d\theta + \left(Ku_\theta^2 - u_\sigma^2\right) d\sigma\right] = -\iint\limits_{D_\gamma^{-}} p'(\eta)\left(\sqrt{-K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 d\theta\, d\sigma + \iint\limits_{D^{+}} qK_\sigma u_\theta^2 d\theta\, d\sigma - \int\limits_\Gamma \left(Ku_\theta^2 + u_\sigma^2\right)(p\, d\sigma + q\, d\theta). \qquad (5.67)$$

Это равенство в дальнейшем будет играть большую роль.

Пусть γ совпадает с характеристикой $\xi=0$. Вдоль этой характеристики имеем

$$d\theta+\sqrt{-K}\,d\sigma=0, \qquad d\eta=-2\sqrt{-K}\,d\sigma,$$

$$-2u_\theta u_\sigma\,d\theta+\left(Ku_\theta^2-u_\sigma^2\right)d\sigma=-\frac{(du)^2}{d\sigma}=2u_\eta^2\sqrt{-K}\,d\eta.$$

Тогда из (5.67) находим

$$2\int_0^1 p(\eta)\,u_\eta^2\sqrt{-K}\,d\eta=-\iint_{D^-}p'(\eta)\left(\sqrt{-K}\,u_\theta+u_\sigma\right)^2 d\theta\,d\sigma+$$

$$+\iint_{D^+}qK_\sigma u_\theta^2\,d\theta\,d\sigma-\int_\Gamma\left(Ku_\theta^2+u_\sigma^2\right)(p\,d\sigma+q\,d\theta). \qquad (5.68)$$

Отсюда

$$2\int_0^1 p(\eta)\,u_\eta^2\sqrt{-K}\,d\eta\geqslant\iint_{D^+}qK_\sigma u_\theta^2\,d\theta\,d\sigma. \qquad (5.69)$$

Можно найти бесконечное множество пар функций p и q, удовлетворяющих условиям (5.58), (5.59) и (5.65). Тогда условие (5.61) дает нам соответствующий класс линий Γ, на которых выполнено это условие. В частности, мы подробно рассмотрим пару функций

$$p=1-\theta, \qquad q=\sigma.$$

Условие (5.61) запишется в виде

$$(1-\theta)\frac{d\sigma}{ds}+\sigma\frac{d\theta}{ds}\leqslant 0, \qquad (5.70)$$

где s — длина дуги линии Γ ($\theta(0)=1$, $\sigma(0)=0$).

В частности, условию (5.70) удовлетворяют все линии Γ такие, что линия, образованная Γ и линией, симметричной относительно оси σ, выпукла.

В этом параграфе мы будем рассматривать линии Γ, удовлетворяющие условию (5.70), не оговаривая это каждый раз.

Возвращаясь к решениям u_n, имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\sqrt{-K}\left(\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \geqslant \frac{1}{2}\iint_{D^+} \sigma K_\sigma \left(\frac{\partial u_n}{\partial \theta}\right)^2 d\theta\, d\sigma.$$

Учитывая связь между функциями u_n и z_n, получим

$$\frac{\partial u_n}{\partial \eta} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^y b(y)\,dy}\left(\frac{\partial z_n}{\partial \eta} - \frac{b(y)}{2\cdot 6^{1/3}}\eta^{-1/3} z_n\right).$$

Так как

$$\sqrt{-K} < C\eta^{1/3}, \qquad e^{-\frac{1}{2}\int_0^y b(y)\,dy} < C_1,$$

то

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{\partial z_n}{\partial \eta} - \frac{b(y)}{2\cdot 6^{1/3}}\eta^{-1/3} z_n\right)^2 d\eta \geqslant$$
$$\geqslant C_2 \iint_{D^+} \sigma K_\sigma \left(\frac{\partial u_n}{\partial \theta}\right)^2 d\theta\, d\sigma. \qquad (5.71)$$

Из неравенства (5.47) в силу (5.37) имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{\partial z_n}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C_3^2\left[\int_0^1 (1-\eta)\lambda_{1n}^2(\eta)\,d\eta + \int_0^1 (1-\eta)\mu_n^2(\eta)\,d\eta\right] \leqslant$$
$$\leqslant C_4^2 \int_0^1 (1-\eta)\mu_n^2(\eta)\,d\eta.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{\partial z_n}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 d\eta \leqslant C_4^2 \int_0^1 (1-\eta)[\mu_n(\eta)-\mu(\eta)]^2\,d\eta.$$

Согласно неравенству Харди (см. стр. 112)

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{-1/3}(z_n - z)^2\,d\eta \leqslant C_3^2 \int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\left(\frac{\partial z_n}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 d\eta.$$

В силу последних двух неравенств в (5.71) можно перейти к пределу при $n \to \infty$, и мы получим следующее утверждение.

Лемма 6. *Если решение z уравнения* (5.5) *принадлежит классу $\mathscr{R}$ и обращается в нуль на Γ, то*

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\left[\frac{\partial z(0,\eta)}{\partial \eta} - \frac{b(y)}{2\cdot 6^{1/3}}\,\eta^{-1/3} z(0,\eta)\right]^2 d\eta \geqslant$$

$$\geqslant C_2 \iint_{D^+} \sigma K_\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 d\theta\, d\sigma. \qquad \textbf{(5.72)}$$

Теорема 2.10. *Если вдоль Γ выполняется условие* (5.70), *то в классе $\mathscr{R}$ решение задачи T для уравнения* (5.1) *единственно.*

Доказательство. Предположим, что существуют два решения $z_1 \in \mathscr{R}$ и $z_2 \in \mathscr{R}$. Тогда разность $z = z_1 - z_2 \in \mathscr{R}$ и обращается в нуль на Γ и на характеристике $\xi = 0$. Из леммы 6 следует, что $u = u(\sigma)$, т. е. $u = A\sigma + B$, и, следовательно, $u \equiv 0$ в D^+. Но тогда $u \equiv z \equiv 0$ в D.

6. Решение задачи Трикоми в классе $\mathfrak{R}$. Пусть решение $z(x, y)$ задачи Трикоми для уравнения (5.5) принадлежит классу $\mathscr{R}$. Тогда функция $\nu(x)$ представима по формуле (5.8), и искомой функцией теперь будет $\mu(x)$.

При выводе формулы (5.18) мы положили

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\,\tau(t)\,dt.$$

Пусть

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{k}\,\varphi_1(x) - \nu(x) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi k}\,\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-2/3} f_1(t)\,dt, \qquad \textbf{(5.73)}$$

где

$$f_1(x) = \int_0^l \varphi(s)\, \tilde{\rho}(s, x, 0)\, ds,$$

и

$$\lambda(x) = \frac{x^{1/6}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-1/6} t^{-1/6} \tilde{\varphi}(t)\, dt. \qquad (5.74)$$

Рассмотрим второе функциональное уравнение (см. (4.57))

$$\tau(x) = k \int_0^x (x-t)^{-1/3} \nu(t)\, dt + \int_0^x K(x, t)\, \nu(t)\, dt +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^x \psi_1(t) \frac{t^{1/3}\, dt}{x^{1/6}(x-t)^{1/6}} + \int_0^x l(x, t)\, \psi_1(t)\, dt. \qquad (5.75)$$

Применяя к (5.75) оператор

$$\frac{d}{dy} \int_0^y (y-x)^{-2/3} \ldots dx$$

и учитывая (5.73), получим (см. п. 3 § 4 гл. II)

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi k} \left\{ \int_0^x \nu(t)\, dt \int_t^x (x-y)^{-2/3} \frac{\partial K(y, t)}{\partial y}\, dy + \right.$$

$$+ x^{1/6} \int_0^x (x-t)^{-5/6} \psi'(t)\, dt + \int_0^x \psi_1(t)\, dt \int_t^x (x-y)^{-2/3} \frac{\partial l(y, t)}{\partial y}\, dy +$$

$$\left. + \int_0^x (x-t)^{-2/3} f_1'(t)\, dt \right\}.$$

Подставив это в (5.74), найдем

$$\lambda(x) = \frac{\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2\pi k \Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \left\{ \int_0^x \nu(t)\,dt \int_t^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6} \frac{\partial K(y,t)}{\partial y}\,dy + \right.$$

$$+ \int_0^x \psi_1(t)\,dt \int_t^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6} \frac{\partial l(y,t)}{\partial y}\,dy +$$

$$\left. + \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6} f_1'(y)\,dy \right\} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi k} x^{1/6} \psi'(x). \qquad (5.76)$$

Наконец, подставив (5.76) в (5.33), получим

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}\right) \mu(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} K_4(t,x)\,\mu(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^x K_5(x,t)\,\mu(t)\,dt = g(x), \qquad \mathbf{(5.77)}$$

где

$$K_5(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi\sqrt{3}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \int_t^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6}\,dy \times$$

$$\times \int_t^y \left(\frac{v}{t}\right)^{1/6} (v-t)^{-5/6} \frac{\partial K(y,v)}{\partial y}\,dv,$$

$$g(x) = -\frac{1}{\pi\sqrt{3}k} x^{1/6}\psi'(x) -$$

$$- \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\pi\sqrt{3}\,k\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)} \left\{ \int_0^x \psi_1(t)\,dt \int_t^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6} \frac{\partial l(y,t)}{\partial y}\,dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^x \left(\frac{y}{x}\right)^{1/6} (x-y)^{-5/6} f_1'(y)\,dy \right\}. \qquad (5.78)$$

Заметим, что в силу леммы 5 п. 2 § 4

$$|K_5(x,\ t)| < K_5 x^{1/3} t^{-1/6}. \tag{5.79}$$

Обозначим через $\mathscr{L}_2(0,\ 1)$ пространство функций $f(x)$, $0 < x < 1$, таких, что

$$\int_0^1 (1-x) f^2(x)\,dx < \infty.$$

Лемма 7. *Если $f(x)$ и $h(x) \in \mathscr{L}_2(0,\ 1)$, то формулы*

$$h(x) = f(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}\right) f(t)\,dt, \tag{5.80}$$

$$f(x) = \frac{3}{4}\left\{h(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) h(t)\,dt\right\} \tag{5.81}$$

взаимно обратны и

$$m^2 \int_0^1 (1-x) h^2(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 (1-x) f^2(x)\,dx \leqslant M^2 \int_0^1 (1-x) h^2(x)\,dx. \tag{5.82}$$

Доказательство. Если $f(x) \in \mathscr{L}_2(0,\ 1)$, то в силу леммы 2

$$\int_0^1 (1-x) h^2(x)\,dx \leqslant B_1^2 \int_0^1 (1-x) f^2(x)\,dx. \tag{5.83}$$

Далее, по лемме 3, если $h(x) \in \mathscr{L}_2(0,\ 1)$, то из (5.81) следует, что

$$\int_0^1 (1-x) f^2(x)\,dx \leqslant B_2^2 \int_0^1 (1-x) h^2(x)\,dx. \tag{5.84}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2xt}=\frac{t}{x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right),$$

формулу (5.80) можно переписать в виде

$$h(x)=f(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{t^{5/6}(1-t)^{1/6}}{x^{5/6}(1-x)^{1/6}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f(t)\,dt.$$

Поэтому, если $h(x)$ удовлетворяет условию Гельдера при $0<x<1$, то в силу леммы 9 § 4 этой главы

$$f(x)=\frac{3}{4}\left\{h(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)h(t)\,dt\right\}+Ax^{-1/2}(1-x)^{-1/2}.$$

Но если $f(x)\in\mathscr{L}_2(0, 1)$, то $A=0$ и, следовательно, имеет место (5.81). Так как множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера, плотно в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, то из (5.80) следует (5.81). Объединяя неравенства (5.83) и (5.84), получим неравенства (5.82). Лемма доказана.

Применяя эту лемму к уравнению (5.77), находим

$$\mu(x)+\int_0^1 M(x, t)\,\mu(t)\,dt=h(x). \tag{5.85}$$

Здесь

$$M(x, t)=\frac{3}{4}\left\{\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6}K_4(t, x)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{y+x-2xy}\right)\left[\frac{y(1-t)}{t(1-y)}\right]^{1/6}K_4(t, y)\,dy\right\}+$$
$$+\frac{3}{4}\left\{\delta K_5(x, t)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_t^1\left[\frac{y(1-y)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{y+x-2xy}\right)K_5(y, t)\,dy\right\}=M_1(x, t)+M_2(x, t), \tag{5.86}$$

где $\delta = 1$, если $t < x$, и $\delta = 0$, если $t > x$,

$$h(x) = \frac{3}{4}\left\{ g(x) - \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \times \right.$$
$$\left. \times \int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) g(t)\,dt \right\}. \tag{5.87}$$

Исследуем ядро $M(x, t)$. В силу неравенства (5.82) и оценки (5.34)

$$\int_0^1 (1-x) M_1^2(x, t)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1^2 \int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{2/3}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/3} K_4^2(t, x)\,dx < M_2^2\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/3}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 dt \int_0^1 \frac{1-x}{1-t} M_1^2(x, t)\,dx < C_1^2 < \infty.$$

Аналогично в силу неравенства (5.82) и оценки (5.79)

$$\int_0^1 (1-x) M_2^2(x, t)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant M_3^2 \int_t^1 (1-x) K_5^2(x, t)\,dx < M_4^2 t^{-1/3}(1-t)^2$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 dt \int_0^1 \frac{1-x}{1-t} M_2^2(x, t)\,dx < C_2^2 < \infty.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 dt \int_0^1 \frac{1-x}{1-t} M^2(x, t)\,dx < C^2 < \infty. \tag{5.88}$$

Рассмотрим функцию $h(x)$. Из (5.78) нетрудно вывести, что если функция

$$z|_\Gamma = \varphi(s)$$

удовлетворяет условиям леммы 7 п. 4 § 4, то

$$\int_0^1 (1-x)\,g^2(x)\,dx \leqslant C_1 \int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\psi'^2(x)\,dx + C_2,$$

где постоянная C_2 зависит от $\varphi(s)$ и $C_2 = 0$, если $\varphi \equiv 0$. Из (5.87) в силу леммы 7 и последнего неравенства имеем

$$\int_0^1 (1-x)\,h^2(x)\,dx \leqslant C_3 \int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\psi'^2(x)\,dx + C_4, \tag{5.89}$$

где $C_4 = 0$, если $\varphi(s) \equiv 0$.

Положим

$$\tilde{\mu}(x) = (1-x)^{1/2}\mu(x), \quad \tilde{h}(x) = (1-x)^{1/2}h(x),$$
$$\tilde{M}(x, t) = \left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/2} M(x, t).$$

Тогда уравнение (5.85) запишется в виде

$$\tilde{\mu}(x) + \int_0^1 \tilde{M}(x, t)\,\tilde{\mu}(t)\,dt = \tilde{h}(x). \tag{5.90}$$

К уравнению (5.90) применима теория Фредгольма, что следует из (5.88).

Докажем, что однородное уравнение

$$\tilde{\mu}(x) + \int_0^1 \tilde{M}(x, t)\,\tilde{\mu}(t)\,dt = 0$$

не имеет отличных от нуля решений в $L_2(0, 1)$. Допустим обратное. Тогда функция

$$\nu(x) = x^{1/6} \int_0^x (x-t)^{-5/6}\,t^{-1/6}\mu(t)\,dt$$

удовлетворяет однородному уравнению (см. (4.70) п. 3 § 4)

$$\nu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left(\frac{t}{x}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \nu(t)\,dt + \int_0^1 L(x, t)\,\nu(t)\,dt = 0.$$

По лемме 1

$$\int_0^1 (1-x)^{3/2} |\nu(x)|^3\,dx < \infty.$$

Отсюда следует, что $\int\limits_0^1 |\nu(x)|^p\,dx < \infty$, если $1 < p < 6/5$. Тогда по доказанному в п. 5 § 4 $\nu(x) \equiv 0$, т. е. $\mu(x) \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (5.90) имеет единственное решение $\tilde{\mu}(x)$ и

$$\int_0^1 \tilde{\mu}^2(x)\,dx \leqslant A^2 \int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\psi'^2(x)\,dx + B,$$

что следует из (5.89). Если $\varphi \equiv 0$, то $B = 0$.

Итак, доказана следующая

Теорема 2.11. *Если $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 7 п. 4 § 4, а $\psi(\eta)$ такова, что*

$$\int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\psi'^2(x)\,dx < \infty,$$

причем $\varphi(l) = \psi(0)$, и если Γ удовлетворяет условию (5.70), то в D существует решение уравнения (5.5), принадлежащее классу $\mathscr{R}$, такое, что

$$z|_\Gamma = \varphi(s), \qquad z|_{\xi=0} = \psi(\eta).$$

Кроме того, имеет место неравенство

$$\int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx \leqslant A^2 \int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\psi'^2(x)\,dx + B. \tag{5.91}$$

§ 6. Задача Неймана — Трикоми *)

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (m > 0). \tag{6.1}$$

Пусть D — область, ограниченная простой дугой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$, и характеристиками AC: $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0$ и BC: $\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$ уравнения (6.1).

Задача T_N. *Найти в области D решение уравнения* (6.1), *непрерывное в замкнутой области $\bar{D}$, имеющее непрерывные частные производные u_x и u_y в $D + \Gamma$ и удовлетворяющее краевым условиям*

$$A_s[u] \equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_\Gamma = \varphi(s) \qquad (0 < s < l), \tag{6.2}$$

$$u|_{AC} = \psi(x) \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right), \tag{6.3}$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

По условиям задачи T_N функция $u(x, 0) = \tau(x)$ должна быть непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Функции $\nu(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$ и $\tau'(x)$ должны быть непрерывными и дифференцируемыми при $0 < x < 1$. Наряду с этим допускается, что при $x \to 0$ и $x \to 1$ $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше чем $\frac{2}{m+2}$ (относительно x и $(1 - x)$).

1. Принцип экстремума и единственность решения задачи T_N. Решение уравнения (6.1) в гиперболической полуплоскости $y < 0$, удовлетворяющее данным Коши

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x), \tag{6.4}$$

*) См. [56д] и [56ж].

дается формулой

$$u(x, y)=\gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} dt+$$

$$+\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\frac{2}{m+2}} \gamma_2 y \int_0^1 \nu\left[x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] \times$$

$$\times t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt, \qquad (6.5)$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2=\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \beta=\frac{m}{2(m+2)}.$$

Полученное решение задачи Коши для уравнения (6.1) единственно.

Определение. *Обобщенное решение* (6.5) *уравнения* (6.1) *принадлежит классу* R_1, *если функция* $\tau(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha_1>1-\beta$ *при* $0 \leqslant x<1$, *а функция* $\nu(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha_2>\beta$ *при* $0 \leqslant x<1$.

Имеет место следующая

Лемма. *Если обобщенное решение* $u \in R_1$, *то производные* u_x *и* u_y *непрерывны в* $\triangle ABC$, *а* u_y *непрерывна вплоть до линии перехода и*

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x) \qquad (0<x<1).$$

Удовлетворяя краевому условию (6.3), из формулы (6.5) получаем

$$\psi(x)=\gamma_1 \int_0^1 \tau(2xt) t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1} dt-$$

$$-\gamma_2(2x)^{\frac{2}{m+2}} \int_0^1 \nu(2xt) t^{-\beta}(1-t)^{-\beta} dt$$

или, заменяя x на $x/2$ и полагая $\zeta = xt$,

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) = \gamma_1 x^{1-2\beta} \int_0^x \tau(\zeta)\,\zeta^{\beta-1}(x-\zeta)^{\beta-1}\,d\zeta - \\ - \gamma_2 \int_0^x \nu(\zeta)\,\zeta^{-\beta}(x-\zeta)^{-\beta}\,d\zeta \qquad (6.6)$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Уравнение (6.6) разрешим относительно $\tau(x)$. Для этого воспользуемся формулой обращения интегрального уравнения Абеля. Получим

$$\tau(x) = \psi_1(x) + \gamma \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\,\nu(t)\,dt, \qquad (6.7)$$

где

$$\psi_1(x) = \frac{\sin\beta\pi}{\pi\gamma_1}\, x^{1-\beta} \frac{d}{dx} \int_0^x t^{2\beta-1}(x-t)^{-\beta}\,\psi\left(\frac{t}{2}\right)dt,$$

$$\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\,\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-2\beta)}. \qquad (6.8)$$

Формула (6.7) дает первое функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (6.1) в области D^- должно принимать заданное значение $\psi(x)$ на характеристике $\xi = 0$.

В предположении, что $\psi(x) \equiv 0$, формула (6.7) принимает вид

$$\tau(x) = \gamma \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\,\nu(t)\,dt. \qquad (6.9)$$

Применяя опять формулу обращения уравнения Абеля, перепишем (6.9) в виде

$$\nu(x) = \frac{\sin 2\beta\pi}{\gamma\pi}\,\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}}. \qquad (6.10)$$

Из формулы (6.10) легко следует принцип экстремума для задачи T_N: *решение* $u(x, y)$ *задачи* T_N, *равное нулю на характеристике* AC, *положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\overline{D}^+$ *принимает на кривой* Γ.

В самом деле, внутри области D^+ функция $u(x, y)$, очевидно, не может достигнуть экстремума. Предположим, что положительный максимум в замкнутой области $\overline{D}^+$ достигается во внутренней точке $P(\xi, 0)$ интервала $0 < x < 1$. В точке ξ, $0 < \xi < 1$, имеет место равенство

$$\tau'(\xi) = 0, \qquad (6.11)$$

и, следовательно, равенство (6.10) можно переписать в виде

$$\frac{\gamma\pi}{\sin 2\beta\pi}\nu(\xi) = (1-2\beta)\int_0^\xi \frac{\tau(\xi)-\tau(t)}{(\xi-t)^{2-2\beta}}\,dt + \tau(\xi)\,\xi^{2\beta-1}.$$

Отсюда ввиду того, что $\tau(\xi) > 0$, $\tau(\xi)-\tau(t) > 0$, получим

$$\nu(\xi) > 0.$$

Это неравенство противоречит лемме 5 § 2 гл. II.

Из принципа экстремума непосредственно следует единственность решения задачи T_N.

2. Задача T_N^+. *В области* D^+ *найти регулярное решение* $u(x, y)$ *уравнения* (6.1), *непрерывное в замкнутой области* $\overline{D}^+$, *имеющее непрерывные производные* u_x *и* u_y *в* $D^+ \cup \Gamma$, *причем в точках* A *и* B *эти производные могут обращаться в бесконечность порядка ниже* $2/(m+2)$, *и удовлетворяющее краевым условиям*

$$A_s[u] \equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_\Gamma = \varphi(s) \qquad (0 < s < l), \qquad (6.12)$$

$$u|_{y=0} = \tau(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (6.13)$$

Относительно кривой Γ будем предполагать, что 1) она удовлетворяет условию 1 § 4 и 2) в окрестности точек A и B на кривой Γ выполняется условие $\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant C^2 y^{m+1}(s)$, где C — постоянная.

Из формулы

$$\iint\limits_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma+AB} u A_s[u]\,ds, \tag{6.14}$$

где u — решение уравнения (6.1), легко следует единственность решения задачи T_N^+.

В эллиптической полуплоскости уравнение (6.1) имеет фундаментальное решение

$$q_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0) = \\ = k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2}\left(r_1^2\right)^{-\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta}F(1-\beta,\ 1-\beta,\ 2-2\beta;\ 1-\sigma), \tag{6.15}$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2, \tag{6.15'}$$

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \qquad k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Обозначая координаты переменной точки на кривой Γ через $(\xi,\ \eta)$, рассмотрим функцию

$$A(s,\ x,\ y) = \eta^m\frac{d\eta}{ds}\,\frac{\partial q_2(\xi,\eta,x,y)}{\partial\xi} - \frac{d\xi}{ds}\,\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x,y)}{\partial\eta}. \tag{6.16}$$

В дальнейшем нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1 (Геллерстедт).

$$\int\limits_0^l A(s,\ x,\ y)\,ds = \begin{cases} i(x,\ y) - 1, & \textit{если } (x,\ y) \textit{ внутри } D \textit{ или на оси } x, \textit{ когда } 0 < x < 1, \\ i(x,\ y) - \frac{1}{2}, & \textit{если } (x,\ y) \in \Gamma, \\ i(x,\ y), & \textit{если } (x,\ y) \textit{ лежит вне } D, \end{cases}$$

где

$$i(x,\ y) = \int\limits_0^1 \frac{\partial q_2(\xi,\ 0;\ x,\ y)}{\partial\eta}\,d\xi.$$

Лемма 2. *При любом положении точки $(x,\ y)$ в верхней полуплоскости имеет место неравенство*

$$\int\limits_0^l |A(s,\ x,\ y)|\,ds \leqslant A, \tag{6.17}$$

где A — постоянная.

Лемма 3. *Если точка (x, y) лежит на Γ, то*

$$|A(s, x, y)| \leqslant A_1 \frac{\eta^{m/2}}{(r_1^2)^\beta}\left(\ln\frac{1}{\sigma}+1\right). \tag{6.18}$$

Рассмотрим потенциал простого слоя с плотностью $\mu(s)$:

$$v(x, y) = \int_0^l \mu(t)\, q_2(\xi, \eta;\; x, y)\, dt. \tag{6.19}$$

Возьмем на кривой Γ произвольную точку $N(s)$ и проведем в этой точке конормаль*). Рассмотрим на этой конормали какую-нибудь точку $M(x, y)$, не лежащую на кривой Γ, и найдем конормальную производную от потенциала простого слоя (6.19):

$$A_s[v(x, y)] = \int_0^l \mu(t)\, A_s[q_2(\xi, \eta;\; x, y)]\, dt. \tag{6.20}$$

Интеграл (6.20) существует и в том случае, когда точка $M(x, y)$ совпадает с точкой $N(s)$.

Имеет место следующая

Теорема 2.12. *Для непрерывной плотности $\mu(t)$ имеют место следующие формулы:*

$$\begin{aligned} A_s[v(x, y)]_i &= \frac{1}{2}\mu(s) + A_s[v(x, y)]_0, \\ A_s[v(x, y)]_e &= -\frac{1}{2}\mu(s) + A_s[v(x, y]_0, \end{aligned} \tag{6.21}$$

где

$$A_s[v(x, y)]_0 = \int_0^l \mu(t)\, A_s[q_2(\xi(t), \eta(t);\; x(s), y(s))]\, dt = \int_0^l K_2(t, s)\, \mu(t)\, dt. \tag{6.22}$$

---

*) Направляющие косинусы конормали суть

$$\frac{y^m\cos(nx)}{\sqrt{y^{2m}\cos^2(nx)+\cos^2(ny)}}, \quad \frac{\cos(ny)}{\sqrt{y^{2m}\cos^2(nx)+\cos^2(ny)}},$$

где n — внешняя нормаль к кривой Γ.

Доказательство теоремы 2.12 следует из лемм 1 и 2.

Очевидно, что потенциал простого слоя $v(x, y)$ является регулярным решением уравнения (6.1) в любой области, лежащей в верхней полуплоскости, не имеющей общих точек ни с кривой Γ, ни с осью x.

Нетрудно видеть, что при беспредельном удалении точки (x, y) $v(x, y)$ стремится к нулю. Действительно, пусть точка (x, y) находится на «нормальной» кривой C_R:

$$x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}=R^2.$$

Тогда в силу (6.15) имеем

$$|v(x, y)|\leqslant\int_0^l|\mu(t)||q_2(\xi,\ \eta;\ x,\ y)|\,dt\leqslant\frac{M}{R}\qquad(R\geqslant R_0). \tag{6.23}$$

Аналогично

$$|A_s[v(x,\ y)]\leqslant MR^{2(\beta-1)}\qquad(R\geqslant R_0), \tag{6.24}$$

где M — постоянная.

Как и в случае теории потенциала для уравнения Лапласа, можно показать, что к потенциалу простого слоя $v(x, y)$ применима формула (6.14) в области D^+. Мы имеем

$$\iint\limits_{D^+}\left(y^m v_x^2+v_y^2\right)dx\,dy=\int_0^l vA_s[v]_i\,ds. \tag{6.25}$$

Применим теперь формулу (6.14) к области D', ограниченной кривой Γ, частью оси x и «нормальной» кривой C_R, содержащей область D^+. Переходя затем к пределу при $R\to\infty$ и учитывая (6.23), (6.24), получим

$$\iint\limits_{D_e^+}\left(y^m v_x^2+v_y^2\right)dx\,dy=-\int_0^l vA_s[v]_e\,ds. \tag{6.26}$$

Определение. *Функцией Грина задачи T_N^+ назовем функцию $G_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *внутри области D^+, кроме точки (x_0, y_0), эта функция является решением уравнения* (6.1);

2) *она удовлетворяет краевым условиям*

$$\begin{aligned} &A_s[G_2(\xi, \eta; x_0\ y_0)]|_\Gamma = 0, \qquad (x_0, y_0) \in D^+, \\ &G_2(x, 0; x_0, y_0) = 0 \qquad (y_0 > 0); \end{aligned} \tag{6.27}$$

3) *она может быть представлена в виде*

$$G_2(x, y; x_0, y_0) = q_2(x, y; x_0, y_0) + v(x, y; x_0, y_0), \tag{6.28}$$

***где** $v(x, y; x_0, y_0)$ — **регулярное решение уравнения** (6.1) **везде внутри** D^+.*

Функция $v(x, y; x_0, y_0)$ в силу (6.27) удовлетворяет краевым условиям

$$A_s[v(\xi, \eta; x_0, y_0)]|_\Gamma = -A(s; x_0, y_0), \tag{6.29}$$

$$v(x, 0; x_0, y_0) = 0 \qquad (y_0 > 0). \tag{6.30}$$

Будем искать функцию $v(x, y; x_0, y_0)$ в виде потенциала простого слоя

$$v(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l \mu(t; x_0, y_0)\, q_2(\xi, \eta; x, y)\, dt. \tag{6.31}$$

Условие (6.30) выполнено. Удовлетворяя краевому условию (6.29) и принимая во внимание первое равенство (6.21), получим интегральное уравнение для плотности $\mu(s; x_0, y_0)$:

$$\mu(s; x_0, y_0) + 2\int_0^l K_2(t, s)\, \mu(t; x_0, y_0)\, dt = -2A(s, x_0, y_0). \tag{6.32}$$

Ядро $K_2(t, s)$ имеет слабую особенность, что следует из оценки (6.18). Покажем, что $\lambda = -2$ не является собственным числом ядра $K_2(t, s)$. Это утверждение эквивалентно тому, что однородное уравнение

$$\mu(s) + 2\int_0^l K_2(t, s)\, \mu(t)\, dt = 0 \tag{6.33}$$

не имеет нетривиальных решений.

Предположим обратное. Пусть $\mu_0(t)$ — ограниченное решение уравнения (6.33). Тогда потенциал простого слоя с плотностью $\mu_0(t)$ дает нам функцию $v_0(x, y)$, являющуюся решением уравнения (6.1) в облатях D^+ и D_e^+, непрерывную во всей полуплоскости $y > 0$. Так как согласно предположению $\mu_0(t)$ удовлетворяет однородному уравнению (6.33), то $A_s[v_0]_i = 0$ на кривой Г. Тогда из формулы (6.25) следует, что $v_0(x, y) \equiv 0$ в D^+ и, в частности, на кривой Г. А тогда в силу (6.26) получаем, что $v_0(x, y) \equiv 0$ в D_e^+, т. е. $v_0(x, y) \equiv 0$ в полуплоскости $y > 0$, и, следовательно, $A_s[v_0]_i = A_s[v_0]_e = 0$ на кривой Г. Отсюда в силу (6.21) имеем $\mu_0(t) \equiv 0$.

Таким образом, можно утверждать, что $\lambda = -2$ не является собственным значением ядра $K_2(t, s)$.

Пусть $R_2(t, s; \lambda)$ — резольвента ядра $K_2(t, s)$. Тогда решение уравнения (6.32) запишется в виде

$$\mu(s; x_0, y_0) = \\ = -2A(s; x_0, y_0) + 4\int_0^l A(t; x_0, y_0) R_2(t, s; -2)\, dt. \quad (6.34)$$

Подставляя (6.34) в (6.31), получаем

$$v(x, y; x_0, y_0) = -2\int_0^l A(s; x_0, y_0) q_2(\xi, \eta; x, y)\, ds + \\ + 4\int_0^l \int_0^l R_2(t, s; -2) A(t; x_0, y_0) q_2(\xi(s), \eta(s); x, y)\, dt\, ds. \quad (6.35)$$

Пусть $\lambda(s; x, y)$ — решение интегрального уравнения

$$\lambda(s; x, y) + 2\int_0^l K_2(s, t)\lambda(t; x, y)\, dt = \\ = -2q_2(\xi(s), \eta(s); x, y). \quad (6.36)$$

Тогда

$$\lambda(s; x, y) = -2q_2(\xi(s), \eta(s); x, y) + \\ + 4\int_0^l R_2(s, t; -2) q_2(\xi(t), \eta(t); x, y)\, dt. \quad (6.37)$$

Умножая (6.37) на $A(s;\ x_0,\ y_0)$ и интегрируя по s от 0 до l, получаем

$$\int_0^l \lambda(s;\ x,\ y)\,A(s;\ x_0,\ y_0)\,ds=$$

$$=-2\int_0^l q_2(\xi(s),\ \eta(s);\ x,\ y)\,A(s;\ x_0,\ y_0)\,ds+$$

$$+4\int_0^l\int_0^l R_2(s,\ t;\ -2)\,A(s;\ x_0,\ y_0)\,q_2(\xi(t),\ \eta(t);\ x,\ y)\,dt\,ds$$

или, в силу (6.35),

$$v(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=\int_0^l \lambda(s;\ x,\ y)\,A(s;\ x_0,\ y_0)\,ds. \qquad (6.38)$$

Как и для уравнения Лапласа, имеет место

Лемма 4. *Функция Грина $G_2(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ симметрична относительно точек $(x,\ y)$ и $(x_0,\ y_0)$, если они находятся внутри области D^+.*

Из леммы в силу (6.28) следует, что функция $v(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$ симметрична относительно точек $(x,\ y)$ и $(x_0,\ y_0)$, и формулу (6.38) можно переписать в виде

$$v(x,\ y;\ x_0,\ y_0)=\int_0^l \lambda(t;\ x_0,\ y_0)\,A(t;\ x,\ y)\,dt. \qquad (6.39)$$

Отсюда видно, что $v(x,\ y;\ x_0,\ y_0)$, как функция от $(x,\ y)$, является потенциалом двойного слоя с плотностью $\lambda(t;\ x_0,\ y_0)$. Поэтому

$$v_i(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)=$$

$$=-\frac{1}{2}\lambda(s;\ x_0,\ y_0)+\int_0^l K_2(s,\ t)\,\lambda(t;\ x_0,\ y_0)\,dt$$

или, в силу (6.36),

$$v_i(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)=-\lambda(s;\ x_0,\ y_0)-q_2(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0).$$

Отсюда имеем

$$G_2(\xi,\ \eta;\ x_0,\ y_0)=-\lambda(s;\ x_0,\ y_0), \qquad (\xi,\ \eta)\in\Gamma. \qquad (6.40)$$

Легко проверить, что

$$G_{02}(x, y; x_0, y_0) = q_2(x, y; x_0, y_0) - v_0(x, y; x_0, y_0), \quad (6.41)$$

где

$$v_0(x, y; x_0, y_0) = (4R^2)^{-\beta} q_2\left(x - \frac{1}{2}, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0\right), \quad (6.42)$$

$$R^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}; \qquad \bar{x}_0 = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4R^2}, \quad (6.43)$$

$$\bar{y}_0^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y_0^{\frac{m+2}{2}}}{4R^2},$$

являются функцией Грина задачи Дирихле для нормальной области D_0^+, ограниченной отрезком [0, 1] оси x и нормальной кривой Γ_0:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}.$$

Покажем, что функция $v_0(x, y; x_0, y_0)$ представима в виде

$$v_0(x, y; x_0, y_0) = -\int_0^l \lambda(s; x, y) A_s[v_0(\xi, \eta; x_0, y_0)]\, ds. \quad (6.44)$$

Рассмотрим для этого функцию

$$u(x, y; x_0, y_0) = -\int_0^l \lambda(s; x, y) A_s[v_0(\xi, \eta; x_0, y_0)]\, ds. \quad (6.45)$$

Она, как функция от (x, y), удовлетворяет уравнению (6.1), так как этому уравнению удовлетворяет функция $\lambda(s; x, y)$.

Подставив в (6.45) вместо $\lambda(s; x, y)$ ее выражение из (6.37), получим

$$u(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l q_2(\xi(s), \eta(s); x, y) \left\{ 2A_s[v_0(\xi(s), \eta(s); x_0, y_0)] - \right.$$

$$\left. - 4\int_0^l R(t, s, -2) A_t[v_0(\xi(t), \eta(t); x_0, y_0)]\, dt \right\} ds$$

или

$$u(x, y; x_0, y_0) = -\int_0^l \chi(s; x_0, y_0) q_2(\xi, \eta; x, y)\, ds, \tag{6.46}$$

где

$$\chi(s; x_0, y_0) = -2A_s[v_0(\xi, \eta; x_0, y_0)] + \\ + 4\int_0^l R_2(t, s; -2) A_t[v_0(\xi(t), \eta(t); x_0, y_0)]\, dt,$$

т. е. $\chi(s; x_0, y_0)$ есть решение интегрального уравнения

$$\chi(s; x_0, y_0) + 2\int_0^l K_2(t, s)\chi(t; x_0, y_0)\, dt = \\ = -2A_s[v_0(\xi(s), \eta(s); x_0, y_0)]. \tag{6.47}$$

Пользуясь первой формулой (6.21), из (6.46) получаем

$$A_s[u(x, y; x_0, y_0)]_l = \\ = -\frac{1}{2}\chi(s; x_0, y_0) - \int_0^l K_2(t, s)\chi(t; x_0, y_0)\, dt.$$

Отсюда в силу (6.47) имеем

$$A_s[u(x, y; x_0, y_0)]_l = A_s[v_0(\xi(s), \eta(s); x_0, y_0)].$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$u(x, 0; x_0, y_0) = 0, \qquad v_0(x, 0; x_0, y_0) = 0.$$

Следовательно, функции $u(x, y; x_0, y_0)$ и $v_0(x, y; x_0, y_0)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (6.1) и одинаковым краевым условиям (6.10), (6.11) и, в силу единственности решения задачи T_N^+,

$$u(x, y; x_0, y_0) \equiv v_0(x, y; x_0, y_0).$$

Вычитая (6.41) из (6.28), находим

$$H(x, y; x_0, y_0) = G_2(x, y; x_0, y_0) - G_{02}(x, y; x_0, y_0) = \\ = v(x, y; x_0, y_0) + v_0(x, y; x_0, y_0)$$

или, в силу (6.38), (6.44) и (6.41),

$$H(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l \lambda(s; x, y) A_s[G_{02}(\xi, \eta; x_0, y_0)]\, ds. \quad (6.48)$$

Таким образом,

$$G_2(x, y; x_0, y_0) = G_{02}(x, y; x_0, y_0) + H(x, y; x_0, y_0). \quad (6.49)$$

Такое представление функции Грина более удобно для дальнейших исследований.

Теорема 2.13. *Функция*

$$u(x_0, y_0) = \int_0^1 \tau(x) \frac{\partial G_2(x, 0; x_0, y_0)}{\partial y}\, dx + \\ + \int_0^l \varphi(s)\, G_2(\xi, \eta; x_0, y_0)\, ds, \quad (6.50)$$

где $\tau(x)$ — *непрерывная функция на* $[0, 1]$, *а* $\varphi(s)$ *непрерывна на* $[0, l]$, *является решением задачи* T_N^+ *в области* D^+.

Доказательство. Первый интеграл $I_1(x_0, y_0)$ в формуле (6.50) есть непрерывное в $\overline{D}^+$ решение уравнения (6.1). Интеграл $I_1(x_0, y_0)$ в силу (6.28) и (6.39) можно записать в виде

$$I_1(x_0, y_0) = \int_0^1 \tau(x) \frac{\partial q_2(x, 0; x_0, y_0)}{\partial y}\, dx + \\ + \int_0^1 \int_0^l \tau(x) \lambda(t; x_0, y_0) \frac{\partial A(t; x, 0)}{\partial y}\, dx\, dt. \quad (6.51)$$

Покажем, что

$$\lim_{y_0 \to 0} I_1(x_0, y_0) = \tau(x_0) \quad (0 < x_0 < 1). \quad (6.52)$$

Нетрудно видеть, что второй интеграл в формуле (6.51) равен нулю при $y_0 = 0$, $0 < x_0 < 1$. Следовательно, нужно показать, что первый интеграл $i_1(x_0, y_0)$ стремится к $\tau(x_0)$ при $y_0 \to 0$ $(0 < x_0 < 1)$.

Имеем

$$i_1(x_0, y_0) = \int_0^1 \tau(x) \frac{\partial q_2(x, 0; x_0, y_0)}{\partial y} dx =$$

$$= k_2 y_0 \int_0^1 \left[(x - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}\right]^{\beta-1} \tau(x)\, dx.$$

Полагая

$$x - x_0 = \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} t,$$

получаем

$$i_1(x_0, y_0) =$$

$$= k_2(1 - 2\beta)\left[\frac{4}{(m+2)^2}\right]^{\beta-1} \int_{A_1}^{B_1} \tau\left(x_0 + \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}} t\right)(1 + t^2)^{\beta-1} dt,$$

где

$$A_1 = -\frac{(m+2)\, x_0}{2y_0^{\frac{m+2}{2}}}, \qquad B_1 = \frac{(m+2)(1 - x_0)}{2y_0^{\frac{m+2}{2}}}.$$

Переходя к пределу при $y_0 \to 0$ $(0 < x_0 < 1)$, будем иметь

$$\lim_{y_0 \to 0} i_1(x_0, y_0) =$$

$$= k_2(1 - 2\beta)\left[\frac{4}{(m+2)^2}\right]^{\beta-1} \tau(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{\beta-1} dt. \qquad (6.53)$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)^{\beta-1} dt = 2^{2\beta}\pi \frac{\Gamma(1 - 2\beta)}{\Gamma^2(1 - \beta)}.$$

Поэтому из (6.53) в силу (6.15) следует, что $\lim\limits_{y_0 \to 0} i_1(x_0, y_0) = \tau(x_0)$, $0 < x_0 < 1$.

Если $(x_0, y_0) \in \Gamma$ и не совпадает с A или B, то

$$\frac{\partial}{\partial y} A_s[G_2(x, 0; x_0(s), y_0(s))] = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$A_s[I_1(x_0, y_0)]_\Gamma = 0. \tag{6.54}$$

Рассмотрим второй интеграл $I_2(x_0, y_0)$ в формуле (6.50), который в силу (6.40) и (6.37) можно записать в виде

$$I_2(x_0, y_0) = -\int_0^l \varphi(s)\lambda(s; x_0, y_0)\,ds =$$

$$= \int_0^l \varkappa(s)\, q_2(\xi, \eta; x_0, y_0)\,ds, \tag{6.55}$$

где

$$\varkappa(s) = 2\varphi(s) - 4\int_0^l R_2(t, s; -2)\,\varphi(t)\,dt,$$

т. е. $\varkappa(s)$ есть решение интегрального уравнения

$$\varkappa(s) + 2\int_0^l K_2(t, s)\,\varkappa(t)\,dt = 2\varphi(s). \tag{6.56}$$

Так как $\varkappa(s)$ — непрерывная функция, то, очевидно, $I_2(x_0, y_0)$ есть непрерывное в $\overline{D}^+$ решение уравнения (6.1), которое в силу (6.21) и (6.56) удовлетворяет условию

$$A_s[I_2(x_0, y_0)]_\Gamma = \varphi(s) \qquad (0 < s < l).$$

Нетрудно видеть, что

$$I_2(x_0, 0) = 0 \qquad (0 \leqslant x_0 \leqslant 1). \tag{6.57}$$

Теорема доказана.

Решение (6.50) задачи T_N^+ в силу (6.49) и (6.55) можно записать в виде

$$u(x_0, y_0) = \int_0^1 \tau(x)\left[\frac{\partial G_{02}(x, 0; x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial H(x, 0; x_0, y_0)}{\partial y}\right] dx +$$

$$+ \int_0^l \varkappa(s)\, q_2(\xi, \eta; x_0, y_0)\,ds. \tag{6.58}$$

В дальнейшем будем считать $\tau(0)=0$, что не нарушает общности. Из формулы (6.58) получаем

$$\nu(x_0)=\frac{k_2}{1-2\beta}\int_0^1\frac{(x-x_0)\tau'(x)\,dx}{|x-x_0|^{2-2\beta}}-k\int_0^1\frac{\tau(x)\,dx}{(x+x_0-2xx_0)^{2-2\beta}}-$$
$$-\frac{k_2\tau(1)}{(1-2\beta)(1-x_0)^{1-2\beta}}+\int_0^1\frac{\partial^2 H(x,0;x_0,0)}{\partial y\,\partial y_0}\tau(x)\,dx+$$
$$+\int_0^l\varkappa(s)\frac{\partial q_2(\xi,\eta;x_0,0)}{\partial y_0}\,ds. \qquad (6.59)$$

Это — второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется тем, что решение $u(x, y)$ уравнения (6.1) в области D^+ должно удовлетворять условию (6.2) на кривой Г.

3. Сведение задачи T_N к сингулярному уравнению. В силу результатов пп. 1 и 2 вопрос о существовании решения задачи T_N для уравнения (6.1) эквивалентен вопросу о разрешимости уравнений (6.7) и (6.59). В результате исключения $\nu(x_0)$ из этих уравнений получим

$$\tau(x)=\frac{k_2\gamma}{1-2\beta}\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,d\zeta\int_0^1\frac{(t-\zeta)\tau'(t)}{|t-\zeta|^{2-2\beta}}\,dt-$$
$$-k_2\gamma\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,d\zeta\int_0^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t+\zeta-2t\zeta)^{2-2\beta}}-$$
$$-\frac{k_2\tau(1)}{1-2\beta}\int_0^x\frac{d\zeta}{(x-\zeta)^{2\beta}(1-\zeta)^{1-2\beta}}+$$
$$+\gamma\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,d\zeta\int_0^1\frac{\partial^2 H(t,0;\zeta,0)}{\partial y\,\partial y_0}\tau(t)\,dt+$$
$$+\gamma\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,d\zeta\int_0^l\varkappa(s)\frac{\partial q_2(\xi(s),\eta(s);\zeta,0)}{\partial y_0}\,ds+\psi_1(s).$$

Произведя необходимые вычисления, получим **сингулярное** интегральное уравнение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)-\lambda\int_0^1\left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\tau(t)\,dt-$$

$$-\lambda\int_0^1 H_1(x,t)\,\tau(t)\,dt=F(x), \qquad (6.60)$$

где

$$\lambda=\frac{\cos\beta\pi}{\pi(1+\sin\beta\pi)}, \qquad (6.61)$$

$$H_1(x,t)=\frac{1-2\beta}{k_2}\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,\frac{\partial^2 H(t,0;\zeta,0)}{\partial y\,\partial y_0}\,d\zeta, \qquad (6.62)$$

$$F(x)=\frac{\gamma}{1+\sin\beta\pi}\Bigg[\psi_1(x)+$$

$$+\int_0^x(x-\zeta)^{-2\beta}\,d\zeta\int_0^l\varkappa(s)\,\frac{\partial q_2(\xi,\eta;\zeta,0)}{\partial y_0}\,ds\Bigg]. \qquad (6.63)$$

Можно показать, что функция $H_1(x,t)$ непрерывна, исключая точки $(1,1)$, где она может обращаться в бесконечность порядка ниже единицы.

Наложим следующие ограничения на $\varphi(s)$ и $\psi(x)$: функция $\varphi(s)$ имеет непрерывную производную первого порядка в $(0,l)$, а $\psi(x)$ имеет непрерывную первую производную при $0\leqslant x\leqslant 1/2$, обращающуюся в нуль порядка 2β в точке $x=0$, и имеет непрерывную вторую производную при $0<x<1/2$, которая может обращаться в бесконечность порядка не выше $(1-2\beta)$ в точке $x=0$. Тогда функция $F(x)$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant 1$, имеет непрерывную первую производную **при** $0<x<1$, которая может обращаться в бесконечность порядка не выше 2β в точке $x=0$.

4. Регуляризация сингулярного уравнения (6.60). Рассмотрим уравнение

$$\rho(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \rho(t)\, dt = f(x), \qquad (6.64)$$

где $f(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Неизвестную функцию будем искать в классе функций, удовлетворяющих условию Гёльдера внутри интервала (0, 1) и непрерывных на концах этого интервала.

Решение уравнения (6.64) имеет вид (см. [56а])

$$\rho(x) = \frac{1+\sin\beta\pi}{2} \times \\ \times \left\{ f(x) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{x(1-x)}{t(1-t)}\right]^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) f(t)\, dt \right\}. \qquad (6.65)$$

Перепишем уравнение (6.60) в виде

$$\tau(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{x}{t}\right)^{1-2\beta} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) \tau(t)\, dt = \\ = F(x) + \lambda \int_0^1 H_1(x, t)\, \tau(t)\, dt.$$

Считая правую часть известной, на основании (6.64) и (6.65) получаем

$$\tau(x) - \frac{\cos\beta\pi}{2\pi} \int_0^1 K(x, t)\, \tau(t)\, dt = g(x), \qquad (6.66)$$

где

$$K(x, t) = H_1(x, t) +$$
$$+ \lambda \int_0^1 \left[\frac{x(1-x)}{\xi(1-\xi)} \right]^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi + x - 2x\xi} \right) H_1(\xi, t)\, d\xi,$$

$$g(x) = \frac{1 + \sin \beta\pi}{2} \times$$
$$\times \left\{ F(x) + \lambda \int_0^1 \left[\frac{x(1-x)}{t(1-t)} \right]^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{1}{t - x} - \frac{1}{t + x - 2xt} \right) F(t)\, dt \right\}.$$

Уравнение (6.66) есть уравнение Фредгольма. Его разрешимость следует из теоремы единственности для задачи T_N. Определив $\tau(x)$ из уравнения (6.66), мы найдем $\nu(x)$ из (6.7), а затем по формулам (6.5) и (6.50) получим решение $u(x, y)$ соответственно в областях D^- и D^+. Таким образом, существование решения задачи T_N доказано.

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ

§ 1. Постановка обобщенной задачи Трикоми

Рассмотрим уравнение

$$K(y)u_{xx}+u_{yy}+a(x, y)u_x+b(x, y)u_y+ \\ +c(x, y)u=f(x, y), \quad (1.1)$$

где $K(y)>0$ при $y>0$, $K(y)<0$ при $y<0$ и $K(0)=0$.

Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая с концами в точках $A(a, 0)$ и $B(b, 0)$, лежащая в верхней полуплоскости. В полуплоскости $y<0$ уравнение (1.1) имеет два различных семейства вещественных характеристик, которые определяются уравнениями

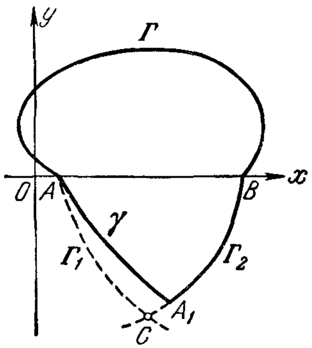

Рис 7.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, \quad (1.2а)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}. \quad (1.2б)$$

Пусть Γ_1 и Γ_2 — соответственно характеристики семейств (1.2а) и (1.2б), выходящие из точек A и B и пересекающиеся в точке C. Обозначим через D область, ограниченную кривой Γ и характеристиками AC и BC уравнения (1.1). Часть области D, лежащую в полуплоскости $y>0$ $(y<0)$, обозначим через D^+ (D^-).

Пусть γ — гладкая кривая, расположенная внутри D^-, выходящая из точки A и пересекающая характеристику Γ_2 в точке A_1 (рис. 7), причем вдоль γ должно быть

$$0\geqslant\frac{dy}{dx}\geqslant-\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}, \quad (1.3)$$

т. е. наклон кривой γ должен быть не больше наклона характеристик, проходящих через соответствующую точку этой кривой.

Обозначим через D_γ область, ограниченную кривой Γ, дугой AA_1 и характеристикой A_1B уравнения (1.1).

Обобщенная задача Трикоми заключается в *нахождении решения уравнения* (1.1) *в области* D_γ, *принимающего на линиях* Γ *и* γ *заданные значения*:

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad u|_\gamma = \psi(x), \tag{1.4}$$

причем $\varphi(l) = \psi(a)$.

На линии $y = 0$ параболического вырождения уравнения (1.1) выполняется условие «склеивания»

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{y\to+0} u(x, y) = \lim_{y\to-0} u(x, y) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \\ &\lim_{y\to+0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \lim_{y\to-0} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \qquad (a < x < b). \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Обобщенную задачу Трикоми можно рассматривать и для более сложной области. Пусть 1) γ_1 и γ_2 — характеристики уравнения (1.1), выходящие из точки $O(0, 0)$, 2) C_1 — гладкая кривая, выходящая из точки A и пересекающая характеристику γ_1 в точке A_1, 3) C_2 — гладкая кривая, выходящая из точки B и пересекающая характеристику γ_2 в точке B_1 (см. рис. 2 на стр. 14). Относительно кривых C_1 и C_2 предположим, что имеют место неравенства

$$0 \geqslant \frac{dy}{dx} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad (\text{на } C_1), \qquad 0 \leqslant \frac{dy}{dx} \leqslant \frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad (\text{на } C_2).$$

Обозначим через D_1 область, ограниченную кривыми Γ, C_1, γ_1, γ_2 и C_2.

Обобщенная задача Трикоми состоит в нахождении решения уравнения (1.1) в области D_1, принимающего на линиях Γ, C_1 и C_2 заданные значения:

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \quad u|_{C_1} = \psi_1(x), \quad u|_{C_2} = \psi_2(x),$$

при этом на линии $y = 0$ выполняется условие «склеивания» (1.5).

§ 2. Единственность решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина

1. Слабый принцип экстремума *). Рассмотрим уравнение Чаплыгина

$$K(y)\,u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{2.1}$$

где $K(y)>0$ и $y>0$, $K(y)<0$ при $y<0$, $K(0)=0$ и $K(y)$ имеет ограниченную производную.

Пусть $u(x, y)$ есть решение уравнения (2.1) в односвязной области D с границей S. Рассмотрим в области D функцию

$$\Psi(x, y)=\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -2u_x u_y\,dx+\left(Ku_x^2-u_y^2\right)dy, \tag{2.2}$$

где (x_0, y_0) — точка области D. В силу уравнения (2.1) величина интеграла (2.2) не зависит от пути интегрирования. Дополнительно будем требовать, чтобы производные от функции $u(x, y)$ удовлетворяли условиям, обеспечивающим непрерывность $\Psi(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$. Эти условия выполняются, например, если u_x и u_y непрерывны в $\bar{D}$, исключая изолированные точки границы S, вблизи которых они имеют оценку $O\left(r^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$, где r — расстояние от границы, $\varepsilon>0$.

Лемма 1. *В замкнутой области $\bar{D}$ функция $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение на границе S.*

Пусть D^+ — часть области D, где $y>0$, а D^- — часть области D, где $y<0$. Из (2.1) и (2.2) следует, что $\Psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$K\Psi_{xx}+\Psi_{yy}=K'u_x^2. \tag{2.3}$$

Так как $K(y)>0$ в D^+, то u_x^2 выразим через Ψ_x и Ψ_y из (2.2):

$$u_x^2=\frac{1}{2K}\left(\Psi_y+\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2K}\left[\frac{K\Psi_x}{\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}}\,\Psi_x+\left(1+\frac{\Psi_y}{\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}}\right)\Psi_y\right]. \tag{2.4}$$

---

*) См. [46б].

Подставляя (2.4) в уравнение (2.3), получим

$$K(y)\Psi_{xx}+\Psi_{yy}=\alpha\Psi_x+\beta\Psi_y, \tag{2.5}$$

где

$$\alpha=\frac{K'\Psi_x}{2\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}}, \qquad \beta=\frac{K'}{2K}\left(1+\frac{\Psi_y}{\sqrt{K\Psi_x^2+\Psi_y^2}}\right).$$

Коэффициенты α и β ограничены в любой замкнутой подобласти D^+, и уравнение (2.5) эллиптического типа в D^+. Следовательно, функция $\Psi(x, y)$ удовлетворяет принципу максимума в области D^+.

В области D^- функция $\Psi(x, y)$ не возрастает по y, так как

$$\Psi_y=Ku_x^2-u_y^2\leqslant 0 \quad \text{при} \quad y\leqslant 0,$$

и, следовательно, если $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение при $y\leqslant 0$, то принимает его в точках границы S при $y\leqslant 0$. Лемма доказана.

2. **Теорема единственности.** Пусть граница S области D состоит из пяти дуг Γ, C_1, γ_1, γ_2 и C_2 с непрерывными касательными. Кривая Γ с концами в точках $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $a<0<b$, лежит в верхней полуплоскости. Кривые C_1 и C_2 лежат в нижней полуплоскости. Они выходят соответственно из точек A и B и пересекаются с выходящими из начала координат характеристиками γ_1 и γ_2 уравнения (2.1) (см. рис. 2 на стр. 14), причем вдоль C_1 и C_2 должно быть

$$\begin{aligned} 0\geqslant\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha\geqslant-\frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad &\text{на} \quad C_1,\\ 0\leqslant\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{-K(y)}} \quad &\text{на} \quad C_2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь α — угол между положительным направлением оси Ox и направлением касательной к S, проведенной в сторону возрастания s — длины дуги границы S, отсчитываемой против часовой стрелки.

Будем считать, что

$$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.7}$$

Теорема 3.1. *Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в области D, непрерывна в $\overline{D}$ и ее частные* *производные* u_x *и* u_y *такие, что функция* $\Psi(x, y)$, *определенная формулой* (2.2), *непрерывна в замкнутой области* $\overline{D}$. *Пусть на* C_1 *и* C_2 *выполнены условия* (2.6), *а на* Γ — *условие* (2.7). *Тогда, если*

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma + C_1 + C_2, \tag{2.8}$$

то $u(x, y) \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. Предположим, что $u(x, y) \not\equiv 0$ в D. Тогда согласно лемме 1 функция $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение на границе S области D. В силу (2.8) $u_x dx + u_y dy = 0$ на $\Gamma + C_1 + C_2$ и

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} = \left(Ku_x^2 + u_y^2\right)\frac{dy}{ds} = \left(K + \operatorname{ctg}^2\alpha\right)u_x^2 \sin\alpha. \tag{2.9}$$

Вдоль характеристик γ_1 и γ_2 $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}$, и из (2.2) имеем

$$\frac{\partial\Psi}{\partial s} = -\left(\sqrt{-K}\,u_x \pm u_y\right)^2 \frac{dy}{ds}. \tag{2.10}$$

Предположим, что $\Psi(x, y)$ достигает наибольшего значения на γ_1. Тогда в силу (2.10) она достигает наибольшего значения в точке пересечения γ_1 и C_1, т. е. на C_1. То же самое имеет место для γ_2. Следовательно, по лемме 1 функция $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение на $\Gamma + C_1 + C_2$. Но из (2.9) и (2.6) следует, что функция $\Psi(x, y)$ не убывает на C_1 и C_2 при возрастании y. Поэтому, если она принимает наибольшее значение на C_1 или C_2, то это значение достигается в точке A или B.

Пусть $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение в точке B. В силу (2.7) $\sin\alpha$ принимает положительные значения, когда s и y возрастают. Тогда из (2.9) следует, что $\Psi(x, y)$ не убывает, когда s возрастает вблизи точки B. Аналогично $\Psi(x, y)$ не убывает, когда s убывает вблизи точки A. Таким образом, $\Psi(x, y)$ принимает наибольшее значение в какой-нибудь точке кривой Γ, где $y > 0$. В силу (2.9) $\Psi(x, y)$ — монотонная функция относительно s на каждой части кривой Γ, для которой $\sin\alpha$ не меняет знака. Следовательно, $\Psi(x, y)$ должна принимать максимум в точке P_1, где $\sin\alpha = 0$

и $\sin\alpha(P)<0$ для $s(P)>s(P_1)$, $|P-P_1|<\delta$. В точке P_1 мы имеем $\alpha=(2n+1)\pi$ или, в силу (2.7), $\alpha=\pi$. Таким образом, в точке P_1

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\sin\alpha=-\Psi_y,$$

где n — направление внутренней нормали. Но из (2.2), учитывая (2.8), $\Psi_y=-u_y^2$ в точке P_1, а тогда $\frac{\partial\Psi}{\partial n}\geqslant 0$. С другой стороны, $\Psi(x, y)$ удовлетворяет эллиптическому уравнению (2.5) и по известной теореме Жиро $\frac{\partial\Psi}{\partial n}<0$ в точке границы, где Ψ принимает максимум. Это противоречие приводит к заключению, что $\Psi=\mathrm{const}$ в D^+, а тогда из (2.2) следует, что $u_x=u_y=0$ в D^+. Так как $u=0$ на Γ, то $u(x, y)\equiv 0$ в D^+. В частности, $\Psi(x, y)=0$ на отрезке AB. Докажем, что $u(x, y)\equiv 0$ в D^-. Пусть Q — любая точка AB, для которой $x(P)<0$, и пусть Q_1 — точка пересечения характеристики $\left(\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{-K(y)}}\right)$, выходящей из точки Q, с кривой C_1. Тогда в силу (2.10), если $\sqrt{-K}\,u_x+u_y\not\equiv 0$ на QQ_1, $\Psi(Q)<\Psi(Q_1)$. Но $\Psi(Q_1)<\Psi(A)$, что следует из (2.6) и (2.9). Итак, $\Psi(Q)<\Psi(A)$. С другой стороны, $\Psi(Q)=\Psi(A)$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $\sqrt{-K}\,u_x+u_y\equiv 0$ на QQ_1, а тогда $u(x, y)\equiv 0$ в D^- для $x\leqslant 0$. Рассуждая аналогично, получим, что $u\equiv 0$ в D^- для $x\geqslant 0$. Таким образом, $u(x, y)\equiv 0$ в D. Теорема доказана.

3. Метод *abc* *). Применяя так называемый метод *abc* при доказательстве теоремы единственности, можно ослабить ограничения на решение $u(x, y)$ уравнения (2.1), но на кривую Γ приходится накладывать более сильные ограничения, а именно Γ должна быть звездной кривой относительно точки O; аналитически это требование означает, что при движении вдоль Γ против часовой стрелки должно быть

$$x\,dy-y\,dx>0. \tag{2.11}$$

*) См. [46а].

Предположим, что решение $u(x, y)$ уравнения (2.1) непрерывно в $\bar{D}$, имеет непрерывные производные u_x и u_y в $\bar{D}$ всюду, кроме, быть может, точек $A(a, 0)$, $O(0, 0)$, $B(b, 0)$, в которых они могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы:

$$u_x = O(|OP|^{-\omega}), \quad u_y = O(|OP|^{-\omega}) \quad (0 \leqslant \omega < 1), \tag{2.12}$$

$$u_x = O(|AP|^{-\alpha}), \quad u_y = O(|AP|^{-\alpha}) \quad (0 \leqslant \alpha < 1), \tag{2.13}$$

$$u_x = O(|BP|^{-\beta}), \quad u_y = O(|BP|^{-\beta}) \quad (0 \leqslant \beta < 1). \tag{2.14}$$

Точка P принадлежит области D.

Если $1/2 \leqslant \alpha < 1$, то будем требовать дополнительно, чтобы

$$u_{xx} = O(|AP|^{-\alpha-1}), \quad u_{xy} = O(|AP|^{-\alpha-1}) \tag{2.15}$$

и

$$x(A) - x = O(y^{2\alpha_1}) \tag{2.16}$$

на кривой Γ вблизи точки A, $y > 0$, где $\alpha_1 > \alpha$.

Если $1/2 \leqslant \beta < 1$, то будем требовать, чтобы

$$u_{xx} = O(|BP|^{-\beta-1}), \quad u_{xy} = O(|BP|^{-\beta-1}) \tag{2.17}$$

и

$$x - x(B) = O(y^{2\beta_1}) \tag{2.18}$$

на кривой Γ вблизи точки B, $y \geqslant 0$, где $\beta_1 > \beta$.

Условия (2.16) и (2.18) означают, что в точках A и B кривая Γ подходит к оси x в перпендикулярном направлении.

Теорема 3.2. *Решение* $u(x, y)$ *уравнения* (3.1) *в области* D *тождественно равно нулю, если*

1) $u(x, y) = 0$ *на* $\Gamma + C_1 + C_2$;

2) $u(x, y)$ *непрерывна в* $\bar{D}$, *имеет непрерывные производные* u_x *и* u_y *в* $\bar{D}$ *всюду, кроме, быть может, точек* A, O, B, *в окрестности которых имеют место оценки* (2.12) – (2.15) *и* (2.17);

3) *граница* $S = \Gamma + C_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + C_2$ *удовлетворяет условиям* (2.6), (2.11), (2.16) *и* (2.18);

4) $K(y)$ — *непрерывно дифференцируемая функция*, $K(0) = 0$, $K'(y) \geqslant 0$ *при* $y \geqslant 0$.

При $0 \leqslant \alpha < 1/2$, $0 \leqslant \beta < 1/2$ *условия* (2.15) – (2.18) *отпадают.*

Доказательство. Для определенности докажем единственность для случая, когда в окрестности точки O имеют место условия (2.12), в точке A — условия (2.13) ($0 \leqslant \alpha < 1/2$), а в окрестности точки B — (2.14), (2.17) и (2.18). Пусть D_δ — подобласть области D, ограниченная в окрестности точки O дугой $\gamma_{O\delta}$ окружности с центром в O и малым радиусом δ, в окрестности точки A — дугой $C_{A\delta}$ окружности с центром в A и радиусом δ и в окрестности точки B — отрезком $C_{B\delta}$ прямой

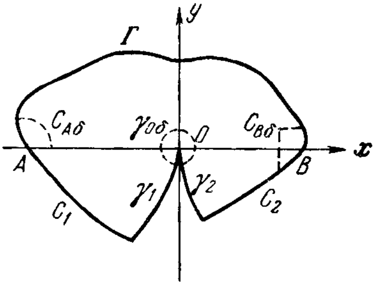

Рис 8

$$x = x(B) - \delta, \quad (2.19)$$

если $x < x(B)$ на Г вблизи B. Если $x \geqslant x(B)$ на Г вблизи B, то $C_{B\delta}$ состоит из двух отрезков прямой (2.19) и прямой

$$y = \delta^{1/2}, \qquad (2.20)$$

в остальном граница S_δ области D_δ совпадает с границей области D (рис. 8).

Рассмотрим тождество

$$2\iint\limits_{D_\delta} (bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D_\delta} \Big[\frac{\partial}{\partial x}\big(Kbu_x^2 - bu_y^2 + 2Kcu_xu_y\big) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\big(Kcu_x^2 - cu_y^2 - 2bu_xu_y\big)\Big]\,dx\,dy + \iint\limits_{D_\delta} \big[u_x^2\big(-Kb_x + (Kc)_y\big) +$$

$$+ u_y^2\big(b_x - c_y\big) - 2u_xu_y\big(Kc_x + b_y\big)\big]\,dx\,dy, \qquad (2.21)$$

где $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — непрерывные функции, имеющие кусочно-непрерывные первые производные, а $u(x, y)$ — решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $u = 0$ на $\Gamma + C_1 + C_2$.

Применяя формулу Грина к интегралу (2.21), получим

$$\int_{S_\delta} (Kcu_x^2 - cu_y^2 - 2bu_xu_y)\,dx + (Kbu_x^2 - bu_y^2 + 2Kcu_xu_y)\,dy +$$
$$+ \iint_{D_\delta} \left[u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + \right.$$
$$\left. + u_y^2(b_x - c_y)\right] dx\,dy = 0. \qquad (2.22)$$

В силу 1) имеем $u_x\,dx + u_y\,dy = 0$ на $\Gamma + C_1 + C_2$. Вдоль характеристик γ_1 и γ_2 $dx = \sqrt{-K}\,dy$, $dx = -\sqrt{-K}\,dy$.

Тогда равенство (2.22) можно записать в виде

$$\int_{\Gamma_\delta + C_{1\delta} + C_{2\delta}} \left(K + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right) u_x^2(b\,dy - c\,dx) +$$
$$+ \int_{\gamma_{1\delta}+\gamma_{2\delta}} \left(\frac{du}{dy}\right)^2 (-b\,dy - c\,dx) + \iint_{D_\delta} \left[u_x^2(-Kb_x + (Kc)_y) - \right.$$
$$\left. - 2u_xu_y(Kc_x + b_y) + u_y^2(b_x - c_y)\right] dx\,dy +$$
$$+ \int_{\gamma_{O\delta} + C_{A\delta} + C_{B\delta}} (Kcu_x^2 - cu_y^2 - 2bu_xu_y)\,dx +$$
$$+ (Kbu_x^2 - bu_y^2 + 2Kcu_xu_y)\,dy = 0. \qquad (2.23)$$

Подчиним теперь функции b и c таким условиям, чтобы первые три интеграла в (2.23) были неотрицательными. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$b\,dy - c\,dx \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma + C_1 + C_2, \qquad (2.24)$$
$$-b\,dy - c\,dx \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \gamma_1 + \gamma_2, \qquad (2.25)$$
$$-Kb_x + (Kc)_y \geqslant 0, \qquad (2.26)$$
$$b_x - c_y \geqslant 0, \qquad (2.27)$$
$$(Kc_x + b_y)^2 \leqslant (b_x - c_y)(-Kb_x + (Kc)_y). \qquad (2.28)$$

Положим, например, при $y \geqslant 0$

$$b = x, \qquad c = y, \qquad (2.29)$$

а при $y \leqslant 0$

$$b = x, \qquad c = 0. \qquad (2.30)$$

Тогда условия (2.25)—(2.28) выполняются. Условие (2.24) при $y \leqslant 0$ выполняется в силу (2.6), а при $y \geqslant 0$ оно переходит в условие (2.11).

При таком выборе b и c двойной интеграл в (2.23) можно записать в виде

$$\iint\limits_{D_\delta^+} yK' u_x^2\,dx\,dy + \iint\limits_{D_\delta^-} (-Ku_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy. \tag{2.31}$$

Покажем, далее, что интегралы, взятые по $\gamma_{O\delta}$, $C_{A\delta}$ и $C_{B\delta}$, или неотрицательны, или стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Действительно, в силу (2.12), (2.29) и (2.30) подинтегральная функция в интеграле по дуге $\gamma_{O\delta}$ имеет порядок $O(r^{1-2\omega})$, где $r^2 = x^2 + y^2$, и, следовательно, этот интеграл стремится к нулю при $\delta \to 0$. То же самое имеет место для интеграла по дуге $C_{A\delta}$, если $0 \leqslant \alpha < 1/2$. Интеграл по дуге $C_{B\delta}$ перепишем в виде

$$\int\limits_{C_{B\delta}} c(Ku_x^2 - u_y^2)\,dx + Ku_x(bu_x + 2cu_y)\,dy -$$
$$- \int\limits_{C_{B\delta}} b(2u_xu_y\,dx + u_y^2)\,dy = \int\limits_{C_{B\delta}} c(Ku_x^2 - u_y^2)\,dx +$$
$$+ Ku_x(bu_x + 2cu_y)\,dy + x(B)\int\limits_{C_{B\delta}} u_y^2\,dy - x(B)\int\limits_{C_{B\delta}} u_y\,du -$$
$$- \int\limits_{C_{B\delta}} (x - x(B))(u_y^2\,dy + 2u_xu_y\,dx). \tag{2.32}$$

Первый и последний члены в правой части стремятся к нулю при $\delta \to 0$, второй — неотрицателен. Так как $u(x, y)$ в конечных точках $C_{B\delta}$ обращается в нуль, то, интегрируя по частям третий член в (2.32), получим

$$x(B)\int\limits_{C_{B\delta}} u\,du_y = x(B)\left[\int\limits_{y_1}^{\delta^{1/2}} uu_{yy}\,dy + \int\limits_{x(B)-\delta}^{x_1} uu_{xy}\,dx\right]$$

или, в силу уравнения (2.1),

$$x(B)\int\limits_{C_{B\delta}} u\,du_y = x(B)\left[-\int\limits_{y_1}^{\delta^{1/2}} K(y)\,uu_{xx}\,dy + \int\limits_{x(B)-\delta}^{x_1} uu_{xy}\,dx\right],$$

где точки $(x(B)-\delta, y_1)$ и $(x_1, \delta^{1/2})$ лежат соответственно на кривых C_2 и Γ.

Из (2.16) имеем $u = O(|BP|^{1-\beta})$ и, учитывая оценки (2.17), получим

$$x(B)\left|\int_{C_{B\delta}} u\,du_y\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\left\{\int_{y_1}^{\delta^{1/2}} y^{1-2\beta}\,dy + \int_{x(B)-\delta}^{x_1} [\delta + (x - x(B))^2]^{-\beta}\,dx\right\} <$$
$$< M_1\left\{\frac{y^{2-2\beta}}{2-2\beta}\Bigg|_{y_1}^{\delta^{1/2}} + \delta^{\frac{1}{2}-\beta}\operatorname{arctg}\frac{x - x(B)}{\delta^{1/2}}\Bigg|_{x(B)-\delta}^{x_1}\right\}$$

или, в силу (2.18),

$$x(B)\left|\int_{C_{B\delta}} u\,du_y\right| < M_1\left[\frac{1}{2-2\beta}\left(\delta^{1-\beta} + y_1^{2-2\beta}\right) + \delta^{1-\beta} + B_1\delta^{\beta_1-\beta}\right].$$

Отсюда при $\delta \to 0$, $y_1 \to 0$ и $\beta_1 - \beta > 0$ будем иметь

$$\lim_{\delta\to 0} x(B)\int_{C_{B\delta}} u\,du_y = 0.$$

Таким образом, в равенстве (2.23) первые три интеграла неотрицательны в силу выбора функций $b(x, y)$ и $c(x, y)$, а интегралы, взятые по $\gamma_{0\delta}$, $C_{A\delta}$ и $C_{B\delta}$, или неотрицательны, или стремятся к нулю при $\delta \to 0$. Поскольку сумма всех этих интегралов равна нулю, то каждый из них также равен нулю. Но тогда из (2.31) следует, что $u_x = u_y = 0$ в D_δ, а так как $u(x, y) = 0$ на $\Gamma + C_1 + C_2$, то $u(x, y) \equiv 0$ в D, что и требовалось доказать.

§ 3. Теорема существования обобщенной задачи Трикоми*)

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании решения обобщенной задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина

$$K(u) \equiv K(\sigma)\,u_{\theta\theta} + u_{\sigma\sigma} = 0. \qquad (3.1)$$

*) В § 3 изложены результаты К. И. Бабенко (см. [4а]).

1. Вспомогательное неравенство. Пусть D_γ — область, ограниченная 1) линией Γ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, расположенной в верхней полуплоскости $y>0$, 2) гладкой кривой γ, выходящей из точки $A(0, 0)$ и пересекающей характеристику $\eta=1$ в точке C_1, и 3) отрезком C_1B характеристики $\eta=1$.

Предположим, что линия Γ удовлетворяет условиям § 4 гл. II, а также условию (5.70) гл. II. Относительно кривой γ предположим, что вдоль γ имеют место неравенства

$$0 \geqslant \frac{d\sigma}{d\theta} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{-K(\sigma)}}, \tag{3.2}$$

т. е. наклон кривой γ должен быть не больше наклона характеристик, проходящих через соответствующую точку этой кривой.

Пусть непрерывное в $\overline{D}_\gamma$ решение $u(\theta, \sigma)$ уравнения (3.1) принадлежит классу $\mathscr{R}$, обращается в нуль на Γ и

$$u|_\gamma = F(s), \tag{3.3}$$

где s — длина дуги кривой γ, отсчитываемая от начала координат.

Положив в (5.67) гл. II $p=1-\theta$, $q=\sigma$ и учитывая (3.3), получим

$$\int\limits_\gamma (1-\eta)\, u_\theta^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} + K\frac{d\sigma}{d\theta}\right) d\theta \geqslant \int\limits_\gamma (1-\eta)\, F'^2(s) \frac{ds}{d\sigma}\, ds +$$

$$+ \iint\limits_{D_\gamma^+} \sigma K_\sigma u_\theta^2\, d\theta\, d\sigma + \iint\limits_{D_\gamma^-} \left(-\sqrt{K}\, u_\theta + u_\sigma\right)^2 d\theta\, d\sigma. \tag{3.4}$$

Условие (3.2) можно переписать в виде

$$K(\sigma)\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{d\theta}{d\sigma} \leqslant 0. \tag{3.2$'$}$$

Рассмотрим тот случай, когда вдоль γ выполняется строгое неравенство (3.2′). Тогда из (3.4) имеем

$$-\int\limits_\gamma (1-\eta)\, u_\theta^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} + K\frac{d\sigma}{d\theta}\right) d\theta \leqslant -\int\limits_\gamma (1-\eta)\, F'^2(s) \frac{ds}{d\sigma}\, ds.$$

От переменных (θ, σ) перейдем к переменным (x, y):

$$\theta = x, \qquad y^{3/2} = \frac{3}{2}\int_0^{\sigma} \sqrt{K(t)}\,dt.$$

Тогда последнее неравенство преобразуется к виду

$$-\int_{\gamma} (1-\eta)\sqrt{\frac{K}{y}}\left(\frac{dx}{dy} + y\frac{dy}{dx}\right)u_x^2\,dx \leqslant$$
$$\leqslant -\int_{\gamma} (1-\eta)\,F'^2(s)\frac{ds}{dy}\sqrt{\frac{K}{y}}\,ds. \tag{3.5}$$

В силу условия (3.2) на кривой γ можно ввести в качестве параметра характеристическую координату η, и тогда неравенство (3.5) запишется в виде

$$-\int_{\gamma} (1-\eta)\sqrt{\frac{K}{y}}\left(1 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)u_x^2\,\frac{dx}{dy}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant -\int_{\gamma} (1-\eta)\,F'^2(\eta)\frac{d\eta}{dy}\sqrt{\frac{K}{y}}\,d\eta. \tag{3.6}$$

В силу условий, наложенных на $K(\sigma)$, найдутся такие две постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что в D

$$\alpha < \sqrt{\frac{K}{y}} < \beta.$$

Далее, $\frac{d\eta}{dx} = 1 - \sqrt{-y}\,\frac{dy}{dx}$, и, следовательно, $1 < \frac{d\eta}{dx} \leqslant 2$, а $\frac{d\eta}{dy} = \frac{dx}{dy} - \sqrt{-y}$, т. е. $\left|\frac{d\eta}{dy}\right| > 2\sqrt{-y}$.

Потребуем, чтобы

$$-\frac{dx}{dy} \leqslant C\sqrt{-y}, \qquad 1 < C < \infty. \tag{3.7}$$

Тогда

$$2\sqrt{-y} < \left|\frac{d\eta}{dy}\right| < (C+1)\sqrt{-y}.$$

Используя последние неравенства, из (3.6) получим

$$\frac{\alpha}{2}\int\limits_{\gamma}(1-\eta)\left(1+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)u_x^2\sqrt{-y}\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant\beta(C+1)\int\limits_0^1(1-\eta)\,F'^2(\eta)\sqrt{-y}\,d\eta. \qquad (3.8)$$

Положим

$$\varepsilon=1+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \qquad (3.9)$$

В силу (3.7) имеем

$$\frac{d\xi}{d\eta}\leqslant\frac{C-1}{C+1}<1.$$

Тогда из равенства

$$\sqrt{-y}=\left(\frac{3}{4}\right)^{1/3}(\eta-\xi)^{1/3}$$

следует, что

$$C_1\eta^{1/3}<\sqrt{-y}<C_2\eta^{1/3}. \qquad (3.10)$$

Учитывая (3.9) и (3.10), из (3.8) имеем

$$\int\limits_{\gamma}\varepsilon(1-\eta)\,\eta^{1/3}u_x^2\,d\eta\leqslant C_3^2\int\limits_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}F'^2(\eta)\,d\eta. \quad (3.11)$$

Преобразуя уравнение (3.1) к виду (см. § 5 гл. II)

$$F(z)\equiv yz_{xx}+z_{yy}+c(y)z=0, \qquad (3.12)$$

мы положили

$$u=ze^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\,dy} \qquad (3.13)$$

Пусть

$$z|_{\gamma}=\Phi(\eta).$$

Тогда

$$F'(\eta)=\Phi'(\eta)\,e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\,dy}-\frac{1}{2}\Phi(\eta)\,b(y)\,e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\,dy}\,\frac{dy}{d\eta}. \qquad (3.14)$$

Подставив (3.13) и (3.14) в (3.11) и применив неравенство Минковского, получим

$$\left(\int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,\eta^{1/3} z_x^2\,d\eta\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_4\left[\left(\int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{-1/3}\,\Phi^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2}\right].$$

Так как $\Phi(0)=0$, то

$$\int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{-1/3}\,\Phi^2(\eta)\,d\eta \leqslant \frac{9}{4}\int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\,\Phi'^2(\eta)\,d\eta$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,\eta^{1/3} z_x^2\,d\eta \leqslant C_5^2 \int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\,\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \qquad (3.15)$$

Далее, так как на γ

$$z_y^2\,dy = -z_x z_y\,dx + z_y \Phi'(\eta)\,d\eta,$$

то

$$\int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,z_y^2 \left|\frac{dy}{d\eta}\right| d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,|z_x z_y|\,\frac{dx}{d\eta}\,d\eta + \int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,|z_y \Phi'(\eta)|\,d\eta. \qquad (3.16)$$

Применяя к правой части (3.16) неравенство Буняковского и учитывая (3.15), находим

$$\int\limits_{\gamma} \varepsilon(1-\eta)\,\eta^{-1/3} z_y^2\,d\eta \leqslant C_5^2 \int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\,\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \qquad (3.17)$$

Сложив (3.15) и (3.17), получим

$$\int_0^1 \varepsilon(1-\eta)\eta^{1/3}(z_x^2+\eta^{-2/3}z_y^2)\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_6^2\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \qquad (3.18)$$

Подставив в (3.18) вместо производных z_x и z_y их значения

$$z_x = z_\xi + z_\eta, \qquad z_y = \sqrt{-y}\,(z_\xi - z_\eta)$$

и принимая во внимание (3.10), окончательно будем иметь

$$\int_\gamma \varepsilon(1-\eta)\eta^{1/3}(z_\xi^2+z_\eta^2)\,d\eta < A^2\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \qquad (3.19)$$

2. **Вывод основного неравенства.** Пусть $z(x, y)\in C^2(D)$ — решение уравнения (3.12), обращающееся в нуль на Г. Рассмотрим область G, ограниченную линией γ и характеристиками $\xi=0$ и $\eta=1$.

Пусть

$$\xi=\gamma(\eta)$$

— уравнение линии γ в характеристических координатах. Положим

$$\xi_0=\gamma(\tilde\eta), \qquad \xi=\gamma(\eta_0).$$

Пусть $v(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ — функция Римана уравнения (3.12). Она удовлетворяет уравнению

$$v(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0) = v_0(\xi, \eta;\ \xi_0, \eta_0) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{2/3}\int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta}\frac{C(\xi', \eta')}{(\eta'-\xi')^{2/3}}\,v_0(\xi, \eta;\ \xi', \eta')\,v(\xi', \eta';\ \xi_0, \eta_0)\,d\xi'\,d\eta', \qquad (3.20)$$

где

$$v_0(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{(\eta-\xi)^{1/3}}{(\eta_0-\xi)^{1/6}(\eta-\xi_0)^{1/6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \sigma\right),$$
$$\sigma = \frac{(\xi-\xi_0)(\eta_0-\eta)}{(\eta_0-\xi)(\eta-\xi_0)}. \tag{3.21}$$

Применяя формулу Римана к криволинейному треугольнику, ограниченному характеристиками $\xi=\xi_0$, $\eta=\eta_0$ и линией γ, получим

$$z(\xi_0, \eta_0) = \frac{z(\xi_0, \bar\eta)}{2}\left(\frac{\bar\eta-\xi_0}{\eta_0-\xi_0}\right)^{1/6} + \frac{z(\bar\xi, \eta_0)}{2}\left(\frac{\eta-\bar\xi}{\eta_0-\xi_0}\right)^{1/6} +$$
$$+\int_{\bar\eta}^{\eta_0}\left[\frac{zv}{6(\eta-\xi)}\left(1+\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\frac{1}{2}v\left(z_\eta - z_\xi\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{z}{2}\left(v_\xi\frac{d\xi}{d\eta}-v_\eta\right)\right]d\eta.$$

Полагая $\xi_0=0$, мы найдем, учитывая, что $z|_\gamma=\Phi(\eta)$, $\Phi(0)=0$,

$$z(0, \eta_0) =$$
$$=\frac{\Phi(\eta_0)}{2}\left(\frac{\eta_0-\xi}{\eta_0}\right)^{1/6}+\int_0^{\eta_0}\left[\frac{\Phi(\eta)}{6(\eta-\xi)}v(\xi, \eta; 0, \eta_0)\left(1+\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}v\left(z_\eta-z_\xi\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\frac{\Phi(\eta)}{2}\left(v_\xi\frac{d\xi}{d\eta}-v_\eta\right)\right]d\eta.$$

На линии γ имеем

$$z_\eta = \Phi'(\eta) - z_\xi\frac{d\xi}{d\eta}.$$

Следовательно,

$$z(0, \eta_0) = \frac{\Phi(\eta_0)}{2}\left(\frac{\eta_0-\xi}{\eta_0}\right)^{1/6}+$$
$$+\int_0^{\eta_0}\left\{v(\xi, \eta; 0, \eta_0)\left[\frac{\Phi(\eta)}{6(\eta-\xi)}\left(1+\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\frac{\Phi'(\eta)}{2}-z_\xi\frac{d\xi}{d\eta}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\Phi(\eta)}{2}\left(v_\xi\frac{d\xi}{d\eta}-v_\eta\right)\right\}d\eta. \tag{3.22}$$

Положим

$$I_1=\int_0^{\eta_0} v(\xi,\eta;0,\eta_0)\left[\frac{\Phi(\eta)}{6(\eta-\xi)}\left(1+\frac{d\xi}{d\eta}\right)+\frac{\Phi'(\eta)}{2}-z_\xi\frac{d\xi}{d\eta}\right]d\eta=$$

$$=\int_0^{\eta_0} v(\xi,\eta;0,\eta_0)\,f(\eta)\,d\eta,$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{\eta_0}\Phi(\eta)\left(v_\xi\frac{d\xi}{d\eta}-v_\eta\right)d\eta.$$

В силу оценки (5.45) гл. II имеем

$$\left|\frac{\partial v(\xi,\eta;0,\eta_0)}{\partial\eta_0}\right|\leqslant C_1\frac{(\eta-\xi)^{1/3}}{(\eta_0-\xi)^{7/6}\,\eta^{1/6}}.$$

Поэтому

$$\left|\frac{dI_1}{d\eta_0}\right|\leqslant\left(\frac{\eta_0-\xi}{\eta_0}\right)^{1/6}|f(\eta_0)|+$$

$$+C_1\int_0^{\eta_0}\frac{(\eta-\xi)^{1/3}|f(\eta)|}{(\eta_0-\xi)^{7/6}\,\eta^{1/3}}\,d\eta\leqslant|f(\eta_0)|+\frac{C_2}{\eta}\int_0^{\eta_0}|f(\eta)|\,d\eta. \quad (3.23)$$

Применяя неравенство Минковского, получим

$$\left(\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}\left(\frac{dI_1}{d\eta}\right)^2d\eta\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}f^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}\left(\frac{C_2}{\eta}\int_0^{\eta}|f(t)|\,dt\right)^2d\eta\right)^{1/2}.$$

Но в силу неравенства Харди (см. [26])

$$\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}\left(\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}|f(t)|\,dt\right)^2d\eta\leqslant C_3^2\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}f^2(\eta)\,d\eta.$$

Поэтому

$$\left(\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}\left(\frac{dI_1}{d\eta}\right)^2d\eta\right)^{1/2}\leqslant C_4\left(\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}f^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2}.$$

Подставляя значение $f(\eta)$ и пользуясь неравенством Минковского, получим

$$\left(\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{dI_1}{d\eta}\right)^2 d\eta\right)^{1/2} \leqslant C_5\left\{\left(\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\frac{\Phi^2(\eta)}{(\eta-\xi)^2}d\eta\right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 z_\xi^2\,d\eta\right)^{1/2}\right\}.$$

Согласно неравенству Харди имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\frac{\Phi^2(\eta)}{(\eta-\xi)^2}d\eta \leqslant C_6\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{1}{\eta}\int_0^\eta |\Phi'(t)|\,dt\right)^2 d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C_7\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta.$$

Далее,

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 z_\xi^2\,d\eta \leqslant \int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\frac{d\xi}{d\eta}z_\xi^2\,d\eta =$$

$$= \int_0^1 \varepsilon\frac{(1-\eta)\eta^{1/3}}{\left(1-\sqrt{-y}\,\frac{dy}{dx}\right)^2} z_\xi^2\,d\eta \leqslant \int_0^1 \varepsilon(1-\eta)\eta^{1/3} z_\xi^2\,d\eta,$$

так как $\frac{dy}{dx}<0$.

Таким образом, используя неравенство (3.19), найдем

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{dI_1}{d\eta}\right)^2 d\eta \leqslant A_1^2\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \quad (3.24)$$

Рассмотрим $\frac{dI_2}{d\eta_0}$. Для производных функции Римана $v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$ имеем следующие оценки (см. [56ж]):

$$\left|\frac{\partial v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\partial\xi_0}\right| \leqslant \frac{(\eta-\xi)^{1/3}}{(\eta-\xi_0)^{7/6}(\eta_0-\xi)^{1/6}}C_1(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0),$$

$$\left|\frac{\partial v(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)}{\partial\eta_0}\right| \leqslant \frac{(\eta-\xi)^{1/3}}{(\eta-\xi_0)^{1/6}(\eta_0-\xi)^{7/6}}C_2(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0),$$

где C_1 и C_2 — ограниченные функции. В силу этих оценок

$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta_0}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\eta}-\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right|<C_8(\eta-\xi)^{-2/3}(\eta_0-\xi)^{-7/6}\eta^{-1/6},$$

$$\left|\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\eta}-\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_0}\right|<C_9\eta_0^{1/6}(\eta_0-\xi)^{-7/6}.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{dI_2}{d\eta_0}\right|\leqslant\frac{C_9}{2}\frac{\eta_0^{1/6}}{(\eta_0-\xi)^{7/6}}|\Phi(\eta_0)|+$$

$$+\frac{C_8}{2}\int_0^{\eta_0}(\eta-\xi)^{-2/3}(\eta_0-\xi)^{-7/6}\eta^{-1/6}|\Phi(\eta)|\,d\eta\leqslant$$

$$\leqslant C_{10}\left\{\frac{|\Phi(\eta_0)|}{\eta_0}+\frac{1}{\eta_0}\int_0^{\eta_0}\frac{|\Phi(\eta)|}{\eta}\,d\eta\right\}.$$

Как и выше, найдем

$$\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\left(\frac{dI_2}{d\eta}\right)^2d\eta\leqslant A_2^2\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \tag{3.25}$$

Легко видеть, что

$$\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\left\{\frac{d}{d\eta}\left[\left(\frac{\eta-\xi}{\eta}\right)^{1/6}\Phi(\eta)\right]\right\}^2d\eta\leqslant$$

$$\leqslant A_3^2\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \tag{3.26}$$

В силу оценок (3.24), (3.25) и (3.26) из (3.22) получим

$$\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\left[\frac{\partial z(0,\eta)}{\partial\eta}\right]^2d\eta\leqslant A_4^2\int_0^1(1-\eta)\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta. \tag{3.27}$$

Воспользуемся неравенством (5.91) гл. II, в котором нужно положить $B=0$, так как $z|_\Gamma=0$. Сравнивая неравенства (5.91) и (3.27), будем иметь

$$\int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\,dx \leqslant \Lambda_5^2 \int_0^1 (1-x)\,x^{1/3}\Phi'^2(x)\,dx. \tag{3.28}$$

Установим теперь неравенство, обратное (3.28).

Решение $z(x, y)$ уравнения (3.12) в области D^- выражается с помощью формулы (см. (2.5) гл. II)

$$z(\xi, \eta) = \\ = z_0(\xi, \eta) + \int_\xi^\eta d\xi' \int_{\xi'}^\eta C(\xi', \eta')\, v(\xi', \eta'; \xi, \eta)\, z_0(\xi', \eta')\, d\eta' = \\ = z_0(\xi, \eta) + I(\xi, \eta), \tag{3.29}$$

где

$$z_0(\xi, \eta) - \gamma_1 \int_\xi^\eta \frac{(\eta-\xi)^{2/3}\,\tau(t)\,dt}{(\eta-t)^{5/6}(t-\xi)^{5/6}} - \gamma_2 \int_\xi^\eta \frac{\nu(t)\,dt}{(t-\xi)^{1/6}(\eta-t)^{1/6}}. \tag{3.30}$$

Производные интегралы I непрерывны и удовлетворяют неравенствам (см. (5.51) гл. II)

$$\left|\frac{\partial I}{\partial \xi}\right| < C(\eta-\xi)^{1/3}, \qquad \left|\frac{\partial I}{\partial \eta}\right| < C(\eta-\xi)^{1/3}.$$

Перейдем к изучению $z_0(\xi, \eta)$ на линии γ.

Пусть

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \int_0^x (x-t)^{-1/6}\varphi(t)\,dt, \\ \nu(x) &= \int_0^x (x-t)^{-5/6}\psi(t)\,dt, \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ранее мы имели (см. § 5 гл. II)

$$\tau(x) = \int_0^x (x-t)^{-1/3} \varphi_1(t)\,dt,$$

$$\varphi_1(x) = x^{1/6} \int_0^x (x-t)^{-5/6} t^{-1/6} \lambda_1(t)\,dt, \tag{3.32}$$

$$\nu(x) = x^{1/6} \int_0^x (x-t)^{-5/6} t^{-1/6} \mu(t)\,dt,$$

откуда

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \left\{ \lambda_1(x) + \frac{x^{-5/6}}{36} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^x \frac{\lambda_1(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; 1 - \frac{t}{x}\right) dt \right\}, \tag{3.33}$$

$$\psi(x) = \mu(x) + \frac{x^{-5/6}}{36} \int_0^x \frac{\mu(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; 1 - \frac{t}{x}\right) dt. \tag{3.34}$$

Ради удобства будем пока оперировать с функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а затем, пользуясь формулами (3.33) и (3.34), перейдем к функциям $\lambda_1(x)$ и $\mu(x)$.

Положим

$$\Phi_0(\eta) = z_0|_\gamma = z_0(\gamma(\eta), \eta).$$

Подставляя (3.31) в (3.30), меняя порядок интегрирования и пользуясь интегральным представлением гипергеометрических функций, получим

$$z_0(\xi, \eta) = \int_0^\xi \psi_1(x)(\eta - x)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; \frac{\eta-\xi}{\eta-x}\right) dx +$$

$$+ \int_\xi^\eta \psi_2(x)(\eta-\xi)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; \frac{\eta-x}{\eta-\xi}\right) dx +$$

$$+ \int_0^\xi \psi_3(x)(\eta-x)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right) dx, \tag{3.35}$$

где

$$\psi_1(x) = \varphi(x) - \sqrt{3}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\,\gamma_2\psi(x),$$

$$\psi_2(x) = 2\pi\left[\gamma_1\varphi(x) - \gamma_2\psi(x)\right], \tag{3.36}$$

$$\psi_3(x) = 2\pi\sqrt{3}\,\gamma_2\psi(x).$$

Сумму первых двух интегралов в (3.35) обозначим через $z_1(\xi, \eta)$, а последний интеграл — через $z_2(\xi, \eta)$. Тогда

$$z_0(\xi, \eta) = z_1(\xi, \eta) + z_2(\xi, \eta).$$

Воспользовавшись известной формулой

$$F(a, b, a+b, t) = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(a, b, 1; 1-t)\ln(1-t) + \\ + \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma^2(a)\Gamma^2(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{(k!)^2}\times \\ \times\left[2\frac{\Gamma'(1+k)}{\Gamma(1+k)} - \frac{\Gamma'(a+k)}{\Gamma(a+k)} - \frac{\Gamma'(b+k)}{\Gamma(b+k)}\right](1-t)^k, \tag{3.37}$$

найдем

$$\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}; t\right) = \ln\frac{1}{1-t} + \theta_1(t),$$

$$2\pi F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; t\right) = \ln\frac{1}{1-t} + \theta_2(t), \tag{3.38}$$

где $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ — дифференцируемые функции и

$$|\theta_1'(t)| < C\left(\ln\frac{1}{1-t} + 1\right), \qquad |\theta_2'(t)| < C\left(\ln\frac{1}{1-t} + 1\right).$$

Кроме того, из (3.37) имеем

$$\theta_1(1) = 2\Gamma'(1) - 2\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)},$$

$$\theta_2(1) = 2\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}, \qquad \theta_2(0) = 2\pi.$$

Положив $\frac{\eta-\xi}{\eta-x}=\zeta$, $\gamma_1\varphi(x)-\gamma_2\psi(x)=f(x)$, получим

$$(\eta-\xi)^{1/6}z_1(\xi,\eta)=$$
$$=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\int_0^\xi(\zeta^{1/6}-1)F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3};\ \zeta\right)f(x)\,dx+$$
$$+\int_0^\xi[\ln(\eta-x)+\theta_1(\zeta)]\,f(x)\,dx-\int_0^\eta f(x)\ln|x-\xi|\,dx+$$
$$+\int_\xi^\eta\left[\ln(\eta-\xi)+\theta_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]f(x)\,dx. \quad (3.39)$$

Дифференцируя (3.39) по η, будем иметь

$$(\eta-\xi)^{1/6}\frac{\partial z_1}{\partial\eta}=$$
$$=2\pi f(\eta)+\int_0^\xi\theta_3(\zeta)f(x)\frac{dx}{\eta-x}+\frac{1}{\eta-\xi}\int_0^\eta\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)f(x)\,dx, \quad (3.40)$$

где

$$\theta_3(\zeta)=\theta_1'(\zeta)(1-\zeta)+$$
$$+1+\frac{\Gamma^2\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{4}{3};\ \zeta\right)(\zeta^{1/6}-1)-\frac{1}{6}\zeta^{1/6}F_1(\zeta),$$

$$\left.\begin{aligned}\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=\theta_2'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left(1-\frac{1}{\zeta}\right)+1-\frac{1}{6}F_2\left(\frac{1}{\zeta}\right),\\ F_1(\zeta)&=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3};\ \zeta\right),\\ F_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=2\pi F\left(\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ 1;\ \frac{1}{\zeta}\right).\end{aligned}\right\} \quad (3.41)$$

Аналогично, дифференцируя (3.39) по ξ, получим

$$(\eta-\xi)^{1/6}\frac{\partial z_1}{\partial \xi}=\pi\sqrt{3}f(\xi)+\int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi}+$$

$$+\int_0^\xi \theta_5(\zeta)f(x)\frac{dx}{\eta-x}+\frac{1}{\eta-\xi}\int_\xi^\eta \theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)f(x)\,dx, \tag{3.42}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\theta_5(\zeta)&=\theta_1'(\zeta)+\frac{\Gamma^2\left(\frac{7}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\frac{\zeta^{1/6}-1}{1-\zeta}F\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{4}{3};\ \zeta\right),\\ \theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)&=\frac{1}{\zeta}\theta_2'\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\frac{1}{6}F_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)-1.\end{aligned}\right\} \tag{3.43}$$

Умножив (3.42) на $\frac{d\xi}{d\eta}$ и сложив с (3.40), получим

$$(\eta-\xi)^{1/6}\Phi_1'(\eta)=2\pi f(\eta)+\pi\sqrt{3}f(\xi)\frac{d\xi}{d\eta}+$$

$$+\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi}+\int_0^\xi\left[\theta_3(\zeta)+\theta_5(\zeta)\frac{d\xi}{d\eta}\right]\frac{f(x)\,dx}{\eta-x}+$$

$$+\frac{1}{\eta-\xi}\int_\xi^\eta\left[\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right)+\theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right]f(x)\,dx, \tag{3.44}$$

где

$$\Phi_1'(\eta)=z_1\big|_\gamma=z_1(\gamma(\eta),\ \eta).$$

В силу (3.33) и (3.34) имеем

$$f(x)=\gamma_2\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\varphi(x)-\psi(x)\right)=$$

$$=\gamma_2\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\lambda_1(x)-\mu(x)+\right.$$

$$+\frac{x^{-5/6}}{36}\int_0^x t^{-1/6}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\lambda_1(t)-\mu(t)\right]\times$$

$$\left.\times F\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6},\ 2;\ 1-\frac{t}{x}\right)dt\right\},$$

но

$$k=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\frac{\gamma_2}{\gamma_1},\qquad \frac{1}{k}\lambda_1(x)-\mu(x)=\lambda(x). \quad (3.45)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\gamma_2}f(x)=\lambda(x)+\frac{x^{-5/6}}{36}\int_0^x\frac{\lambda(t)}{t^{1/6}}F\left(\frac{5}{6},\ \frac{5}{6},\ 2;\ 1-\frac{t}{x}\right)dt. \quad (3.46)$$

Приступим к оценке интеграла

$$\int_0^1 \eta^{1/3}(1-\eta)\Phi_1'^2(\eta)\,d\eta.$$

Из (3.41) и (3.43) в силу (3.38) будем иметь

$$\begin{aligned} &|\theta_i(\zeta)|<C_1\left(\ln\frac{1}{1-\zeta}+1\right) && (i=3,\ 5),\\ &\left|\theta_i\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right|<C_1\left(\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}}+1\right) && (i=4,\ 6). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Здесь $\zeta=\frac{\eta-\xi}{\eta-x}$. Обозначим через J_1 сумму двух последних интегралов в (3.44). Замечая, что

$$\frac{d\xi}{d\eta}\leqslant\frac{c-1}{c+1}=1-\delta,\qquad \xi\leqslant(1-\delta)\eta,$$

и принимая во внимание (3.47), получим

$$\begin{aligned} |J_1|<\frac{2C_1}{\delta}\Bigg\{\frac{1}{\eta}\int_0^{\xi}|f(x)|\left(\ln\frac{1}{1-\zeta}+1\right)dx+\\ +\frac{1}{\eta}\int_{\xi}^{\eta}|f(x)|\left(\ln\frac{1}{1-\frac{1}{\zeta}}+1\right)dx\Bigg\}=\\ =\frac{2C_1}{\eta\delta}\Bigg\{\int_0^{\xi}|f(x)|\ln\frac{\eta-x}{\xi-x}\,dx+\\ +\int_{\xi}^{\eta}|f(x)|\ln\frac{\eta-\xi}{x-\xi}\,dx+\int_0^{\eta}|f(x)|\,dx\Bigg\}. \end{aligned}$$

Положим

$$f_1(x) = (1-x)^{1/2} |f(x)|.$$

Тогда

$$(1-\eta)^{1/2} |J_1| \leqslant \frac{2C_1}{\eta\delta} \left\{ \int_0^{\xi} f_1(x) \ln \frac{\eta - x}{\xi - x}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{\eta} f_1(x) \ln \frac{\eta - \xi}{x - \xi}\, dx + \int_0^{\eta} f_1(x)\, dx \right\}.$$

Преобразуем интеграл

$$\int_{\xi}^{\eta} (t-\xi)^{-1/3}\, dt \int_0^t (t-x)^{-2/3} f_1(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\xi} f_1(x)\, dx \int_{\xi}^{\eta} (t-\xi)^{-1/3} (t-x)^{-2/3}\, dt +$$

$$+ \int_{\xi}^{\eta} f_1(x)\, dx \int_{x}^{\eta} (t-\xi)^{-1/3} (t-x)^{-2/3}\, dt =$$

$$= 3 \int_0^{\xi} f_1(x)\, dx \int_0^{\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-x}\right)^{1/3}} \frac{z\, dz}{1-z^3} + 3 \int_{\xi}^{\eta} f_1(x)\, dx \int_0^{\left(\frac{\eta-x}{\eta-\xi}\right)^{1/3}} \frac{dz}{1-z^3}. \tag{3.48}$$

Производя элементарные выкладки, получим

$$3 \int_0^{\left(\frac{\eta-\xi}{\eta-x}\right)^{1/3}} \frac{z\, dz}{1-z^3} = -\ln \frac{\xi - x}{\eta - x} + O(1), \qquad 0 < x < \xi,$$

$$3 \int_0^{\left(\frac{\eta-x}{\eta-\xi}\right)^{1/3}} \frac{dz}{1-z^3} = -\ln \frac{x - \xi}{\eta - \xi} + O(1), \qquad \xi < x < \eta.$$

Подставляя это в (3.48), будем иметь

$$\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{-1/3}dt\int_{0}^{t}(t-x)^{-2/3}f_1(x)\,dx=\int_{0}^{\xi}f_1(x)\ln\frac{\eta-x}{\xi-x}\,dx+$$
$$+\int_{\xi}^{\eta}f_1(x)\ln\frac{\eta-\xi}{x-\xi}\,dx+\int_{0}^{\eta}f_1(x)\,O(1)\,dx.$$

Таким образом,

$$(1-\eta)^{1/2}|J_1|\leqslant\frac{2C_1}{\eta\delta}\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{-1/3}dt\int_{0}^{t}(t-x)^{-2/3}f_1(x)\,dx+$$
$$+\frac{C_2}{\delta\eta}\int_{0}^{\eta}f_1(x)\,dx, \qquad (3.49)$$

где C_2 не зависит от $\xi=\gamma(\eta)$.

Лемма 1. *Выражение*

$$\frac{1}{\eta}\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{-1/3}dt\int_{0}^{t}(t-x)^{-2/3}f_1(x)\,dx$$

мажорируется некоторой функцией, квадратично суммируемой в (0, 1).

В самом деле,

$$\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{-1/3}dt\int_{0}^{t}(t-x)^{-2/3}f_1(x)\,dx=$$
$$=\int_{0}^{\eta-\xi}y^{-1/3}dy\int_{0}^{\xi+y}z^{-2/3}f_1(\xi+y-z)\,dz=$$
$$=\int_{0}^{\eta-\xi}y^{-1/3}dy\int_{0}^{\xi}z^{-2/3}f_1(\xi+y-z)\,dz+$$
$$+\int_{0}^{\eta-\xi}y^{-1/3}dy\int_{\xi}^{\xi+y}z^{-2/3}f_1(\xi+y-z)\,dz=$$

$$= \int\limits_0^{\xi} z^{-2/3}\,dz \int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} f_1(\xi - z + y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\xi}^{\eta} z^{-2/3}\,dz \int\limits_{z-\xi}^{\eta-\xi} y^{-1/3} f_1(\xi + y - z)\,dy = I_1 + I_2.$$

Далее,

$$I_2 = \int\limits_{\xi}^{\eta} z^{-2/3}\,dz \int\limits_0^{\eta-z} (u + z - \xi)^{-1/3} f_1(u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\xi}^{\eta} z^{-2/3}\,dz \int\limits_0^{\eta-z} u^{-1/3} f_1(u)\,du \leqslant 3\eta^{1/3} \int\limits_0^{\eta} x^{-1/3} f_1(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь I_1. Если $g_{\xi-z}(y)$ — невозрастающая функция, равноизмеримая *) с $f_1(\xi - z + y)$, $0 \leqslant y \leqslant 1 - \xi + z$, то

$$\int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} f_1(\xi - z + y)\,dy \leqslant \int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} g_{\xi-z}(y)\,dy$$

(см. [26], стр. 207). Пусть $g(x)$ — невозрастающая функция, равноизмеримая с $f_1(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Очевидно, что

$$g_{\xi-z}(x) \leqslant g(x)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} g_{\xi-z}(y)\,dy \leqslant \int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} g(y)\,dy,$$

а

$$I_1 \leqslant \int\limits_0^{\xi} z^{-2/3}\,dz \int\limits_0^{\eta-\xi} y^{-1/3} g(y)\,dy < 3\eta^{1/3} \int\limits_0^{\eta} x^{-1/3} g(x)\,dx.$$

---

*) Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, называются ***равноизмеримыми***, если $mE(f > y) = mE(\varphi > y)$ для всех y.

Итак,

$$\int_{\xi}^{\eta}(t-\xi)^{-1/3}\,dt\int_{0}^{t}(t-x)^{-2/3}f_1(x)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 3\eta^{1/3}\int_{0}^{\eta}x^{-1/3}\left[f_1(x)+g(x)\right]dx. \qquad (3.50)$$

Лемма доказана.

Возвратимся теперь к неравенству (3.49). В силу (3.50) из (3.49) получим

$$(1-\eta)^{1/2}\,|J_1|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{6C_1}{\delta}\left(\eta^{-2/3}\int_{0}^{\eta}x^{-1/3}f_1(x)\,dx+\eta^{-2/3}\int_{0}^{\eta}x^{-1/3}g(x)\,dx\right)+$$
$$+\frac{C_2}{\delta\eta}\int_{0}^{\eta}f_1(x)\,dx.$$

Применяя неравенство Минковского, а затем неравенство Харди (см. [26]), найдем

$$\left(\int_{0}^{1}(1-\eta)J_1^2\,d\eta\right)^{1/2}\leqslant C_3\left(\int_{0}^{1}f_1^2(x)\,dx\right)^{1/2}+$$
$$+C_3\left(\int_{0}^{1}g^2(x)\,dx\right)^{1/2}=2C_3\left(\int_{0}^{1}f_1^2(x)\,dx\right)^{1/2}=$$
$$=2C_3\left(\int_{0}^{1}(1-\eta)f^2(\eta)\,d\eta\right)^{1/2} \qquad (3.51)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2=\frac{d\xi}{d\eta}\int_{0}^{\eta}\frac{f(x)\,dx}{x-\xi}.$$

Пусть $\xi_1=\gamma(1)$ и $\eta\leqslant\xi_1$. Тогда

$$J_2=\frac{d\xi}{d\eta}\int_{0}^{\xi_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\xi}-\frac{d\xi}{d\eta}\int_{\eta}^{\xi_1}\frac{f(x)\,dx}{x-\xi}.$$

Отсюда, полагая

$$\varphi(t)=\int_0^{\xi_1}\frac{f(x)\,dx}{x-t},$$

имеем

$$|J_2|\leqslant\frac{d\xi}{d\eta}\,|\varphi(\xi(\eta))|+\frac{d\xi}{d\eta}\int_\eta^{\xi}\frac{|f(x)|}{x-\xi}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d\xi}{d\eta}\,|\varphi(\xi(\eta))|+\frac{1}{\delta}\int_\eta^{\xi_1}\frac{|f(x)|}{x}\,dx,$$

так как $x-\xi(\eta)>\delta x$. Применив неравенство Минковского, получим

$$\left(\int_0^{\xi_1}(1-\eta)\,J_2^2\,d\eta\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_0^{\xi_1}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\varphi^2(\xi(\eta))\,d\eta\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{\delta}\left(\int_0^{\xi_1}\left(\int_\eta^{\xi_1}\frac{|f(x)|\,dx}{x}\right)^2d\eta\right)^{1/2}. \quad (3.52)$$

Но

$$\int_0^{\xi_1}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\varphi^2(\xi(\eta))\,d\eta\leqslant\int_0^{\xi_1}\varphi^2(t)\frac{d\xi}{d\eta}\,dt\leqslant\int_0^{\xi_1}\varphi^2(t)\,dt$$

или, в силу теоремы об ограниченности оператора с ядрами Коши *),

$$\int_0^{\xi_1}\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2\varphi^2(\xi(\eta))\,d\eta\leqslant\pi^2\int_0^{\xi_1}f^2(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{1-\xi_1}\int_0^{\xi_1}(1-x)\,f^2(x)\,dx\leqslant\frac{\pi^2}{1-\xi_1}\int_0^{1}(1-x)\,f^2(x)\,dx. \quad (3.53)$$

---

*) См., например, С. Г. Михлин, Сингулярные интегральные уравнения, УМН 3, 3 (25), 1948, стр. 38.

Докажем неравенство

$$\int_0^{\xi_1}\left(\int_\eta^{\xi_1}\frac{|f(x)|}{x}\,dx\right)^2 d\eta \leqslant 4\int_0^{\xi_1} f^2(x)\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{1-\xi_1}\int_0^1 (1-x)\,f^2(x)\,dx. \qquad (3.54)$$

Для этого достаточно заметить, что для произвольной функции $g(x)\in L_2(0,\ \xi_1)$

$$\left|\int_0^{\xi_1} g(\eta)\left(\int_\eta^{\xi_1}\frac{|f(x)|}{x}\,dx\right)d\eta\right| = \left|\int_0^{\xi_1}\frac{|f(x)|}{x}\,dx\int_0^x g(\eta)\,d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^{\xi_1} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\xi_1}\left(\frac{1}{x}\int_0^x g(\eta)\,d\eta\right)^2 dx\right)^{1/2}.$$

Применив неравенство Харди, получим

$$\left|\int_0^{\xi_1} g(\eta)\left(\int_\eta^{\xi_1}\frac{|f(x)|}{x}\,dx\right)d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_0^{\xi_1} f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{\xi_1} g^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Итак, из (3.52) в силу (3.53) и (3.54) имеем

$$\left(\int_0^{\xi_1}(1-\eta)\,J_2^2\,d\eta\right)^{1/2} \leqslant \frac{\pi+2}{\delta\,(1-\xi_1)^{1/2}}\left(\int_0^1 (1-x)\,f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \qquad (3.55)$$

Если $\eta>\xi_1$, то

$$J_2 = \frac{d\xi}{d\eta}\,\varphi(\xi(\eta)) + \frac{d\xi}{d\eta}\int_{\xi_1}^{\eta}\frac{f(x)}{x-\xi(\eta)}\,dx.$$

Отсюда

$$(1-\eta)^{1/2}\,|J_2| < \frac{d\xi}{d\eta}(1-\eta)^{1/2}|\varphi(\xi(\eta))| + \\ + \frac{d\xi}{d\eta}\int_{\xi_1}^{\eta}\frac{(1-x)^{1/2}|f(x)|\,dx}{x-\xi(\eta)} < \frac{d\xi}{d\eta}(1-\eta)^{1/2}|\varphi(\xi(\eta))| + \\ + \frac{d\xi}{d\eta}\int_{\xi_1}^{1}\frac{(1-x)^{1/2}|f(x)|\,dx}{x-\xi(\eta)} = \frac{d\xi}{d\eta}(1-\eta)^{1/2}|\varphi(\xi,\eta)| + \frac{d\xi}{d\eta}|\varphi_1(\xi(\eta))|,$$

где

$$\varphi_1(t) = \int_{\xi_1}^{1}\frac{(1-x)^{1/2}|f(x)|}{x-t}\,dx.$$

Таким образом,

$$\left(\int_{\xi_1}^{1}(1-\eta)J_2^2\,d\eta\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{\xi_1}^{1}(1-\eta)\varphi^2(\xi(\eta))\frac{d\xi}{d\eta}d\eta\right)^{1/2} + \\ + \left(\int_{\xi_1}^{1}\varphi_1^2(\xi(\eta))\,d\eta\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^{\xi_1}\varphi^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^{\xi_1}\varphi_1^2(t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \pi\left(\int_0^{\xi_1}f^2(x)\,dx\right)^{1/2} + \pi\left(\int_0^{\xi_1}(1-x)f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \pi\left[(1-\xi_1)^{-1/2}+1\right]\left(\int_0^{1}(1-x)f^2(x)\,dx\right)^{1/2}. \qquad (3.56)$$

Суммируя теперь неравенства (3.55) и (3.56), окончательно имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)J_2^2\,d\eta \leqslant \frac{8\pi^2}{\delta^2(1-\xi_1)}\int_0^1(1-x)f^2(x)\,dx. \qquad (3.57)$$

Так как на кривой γ

$$\left(\frac{\eta-\xi}{\eta}\right)^{1/6} > \delta^{1/6} \quad \text{и} \quad 1-\xi_1 > \delta,$$

то из (3.44), используя неравенства (3.51) и (3.57) и производя очевидные преобразования, получим

$$\int_0^1 \eta^{1/3}(1-\eta)\,\Phi_1'^2(\eta)\,d\eta \leqslant \frac{C_4^2}{\delta^{10/3}} \int_0^1 (1-x) f^2(x)\,dx. \tag{3.58}$$

Ранее мы положили

$$z_2(\xi, \eta) = \int_0^\xi \psi_3(x)(\eta - x)^{-1/6} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \frac{\xi - x}{\eta - x}\right) dx. \tag{3.59}$$

Отсюда

$$(\eta-\xi)^{1/6}\frac{\partial z_2}{\partial \xi} =$$

$$= \psi_3(\xi) + \frac{1}{36}\int_0^\xi \psi_3(x)\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{(\eta-x)^{7/6}} F\left(\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, 2; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)dx =$$

$$= \psi_3(\xi) + \frac{1}{36}\int_0^\xi \psi_3(x)\frac{(\eta-\xi)^{-1/6}}{(\eta-x)^{5/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)dx,$$

$$(\eta-\xi)^{1/6}\frac{\partial z_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{6}\int_0^\xi \psi_3(x)\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{(\eta-\xi)^{7/6}} F\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6}, 1; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)dx =$$

$$= -\frac{(\eta-\xi)^{-1/6}}{6}\int_0^\xi \frac{\psi_3(x)}{(\eta-x)^{5/6}} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)dx.$$

Умножив первое равенство на $\frac{d\xi}{d\eta}$ и сложив со вторым, получим

$$(\eta-\xi)^{1/6}\Phi_2'(\eta) =$$

$$= \psi_3(\xi)\frac{d\xi}{d\eta} - \frac{1}{6}\int_0^\xi \frac{\psi_3(x)}{(\eta-\xi)^{1/6}(\eta-x)^{5/6}}\left[F\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{6}\frac{d\xi}{d\eta} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)\right]dx, \tag{3.60}$$

где положено

$$\Phi_2(\eta) = z_2(\gamma(\eta), \eta).$$

Оценивая (3.60), получим

$$(\eta-\xi)^{1/6}\left|\Phi_2'(\eta)\right| \leqslant \left|\psi_3(\xi)\right| \frac{d\xi}{d\eta}+\frac{C_5}{\eta}\int_0^\eta \left|\psi_3(x)\right| dx.$$

Отсюда, как и выше, имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi_2'^2(\eta)\,d\eta \leqslant \frac{C_6^2}{\delta^{1/3}}\int_0^1 (1-x)\,\psi_3^2(x)\,dx =$$

$$= \frac{C_7^2}{\delta^{1/3}}\int_0^1 (1-x)\,\psi^2(x)\,dx. \qquad (3.61)$$

Итак, неравенства (3.58) и (3.61) дают нам

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi_0'^2(\eta)\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_8^2}{\delta^{10/3}}\left[\int_0^1 (1-x)\,f^2(x)\,dx+\int_0^1 (1-x)\,\psi^2(x)\,dx\right],$$

но

$$\int_0^1 (1-x)\,f^2(x)\,dx \leqslant C_9^2\int_0^1 (1-x)\,\lambda^2(x)\,dx, \qquad (3.62)$$

$$\int_0^1 (1-x)\,\psi^2(x)\,dx \leqslant C_{10}^2\int_0^1 (1-x)\,\mu^2(x)\,dx,$$

что легко получить из (3.46) и (3.34).

Таким образом,

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi_0'^2(\eta)\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{10}^2}{\delta^{10/3}}\int_0^1 (1-x)\left[\lambda^2(x)+\mu^2(x)\right]dx. \qquad (3.63)$$

Вернемся к формуле (3.29). В силу оценок (5.46) гл. II имеем

$$\left|\frac{d}{d\eta} I(\gamma(\eta), \eta)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_{11}^2 \max_{\xi \leqslant \xi' \leqslant \eta' \leqslant \eta} \left| z_0(\xi', \eta')(\eta' - \xi')^{1/6} \right| (\eta - \xi)^{1/6}. \qquad (3.64)$$

Но из формулы (3.35), учитывая (3.39), получим

$$(1-\eta')^{1/2} \left| (\eta' - \xi')^{1/6} z_0(\xi', \eta') \right| \leqslant C_{12}^2 \left(\int_0^{\eta'} (1-x) f^2(x)\, dx \right)^{1/2} +$$
$$+ C_{13}^2 \left(\int_0^{\eta'} (1-x) \psi^2(x)\, dx \right)^{1/2}. \qquad (3.65)$$

Отсюда

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3} \left| \frac{dI}{d\eta} \right|^2 d\eta \leqslant C_{14}^2 \int_0^1 (1-x)\left[\lambda^2(x) + \mu^2(x)\right] dx. \qquad (3.66)$$

Теперь из (3.63) и (3.66) имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3} \Phi'^2(\eta)\, d\eta \leqslant \frac{C_{15}^2}{\delta^{10/3}} \int_0^1 (1-x)\left[\lambda^2(x) + \mu^2(x)\right] dx.$$

Применяя к правой части этого неравенства лемму 2 § 5 гл. II, получим окончательное неравенство

$$\int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3} \Phi'^2(\eta)\, d\eta \leqslant M^2 \int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\, dx.$$

Соединяя с неравенством (3.28), имеем

$$m^2 \int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^1 (1-\eta)\eta^{1/3} \Phi'^2(\eta)\, d\eta \leqslant M^2 \int_0^1 (1-x)\mu^2(x)\, dx. \qquad (3.67)$$

Левое неравенство (3.67) установлено для дважды непрерывно дифференцируемых решений уравнения (3.12), причем $z|_\Gamma = 0$. Если $z \in \mathscr{R}$ и $z|_\Gamma = 0$, то в силу лемм 4 и 5 § 5 гл. II найдется последовательность решений $\{z_n(\xi, \eta)\}$, $z_n|_\Gamma = 0$, для которой будут иметь место неравенства (3.67) и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1-x)\,|\mu(x)-\mu_n(x)|^2\,dx = 0.$$

Тогда из правого неравенства (3.67) следует, что

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\,|\Phi'(\eta)-\Phi'_n(\eta)|^2\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \int_0^1 (1-x)\,|\mu(x)-\mu_n(x)|^2\,dx \leqslant M^2\varepsilon_n$$

$$(\varepsilon_n \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty),$$

и, следовательно, в неравенстве

$$m^2 \int_0^1 (1-x)\,\mu_n^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi_n'^2(\eta)\,d\eta$$

можно перейти к пределу, и мы получим левое неравенство (3.67).

Итак, мы имеем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть линия* Γ *удовлетворяет условию* (5.70) *гл.* II, *а вдоль линии* γ *выполнены неравенства* (3.2). *Если* $z(x, y) \in \mathscr{R}$ — *решение уравнения* (3.12), *обращающееся в нуль на* Γ, *то имеют место неравенства* (3.67).

3. Теорема существования обобщенной задачи Трикоми в случае, когда линия γ в некоторой малой окрестности точки A совпадает с характеристикой $\xi = 0$. Прежде всего необходимо из формулы (5.33) гл. II найти выражение $\mu(x)$ через $\lambda(x)$. Формулу (5.33) можно переписать так:

$$\mu(x) + \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} \left(\frac{1}{t-x} + \frac{1-2t}{t+x-2xt}\right) \mu(t)\,dt =$$

$$= -\frac{2}{3}\lambda(x) - \int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} K(t, x)\,\mu(t)\,dt \equiv -f(x). \quad (3.68)$$

По лемме 7 § 5 гл. II

$$\mu(x)=$$
$$=-\frac{3}{4}\left\{f(x)-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f(t)\,dt\right\}$$

или, если заменить функцию $f(x)$ ее выражением,

$$\mu(x)+\int_0^1 K_1(x,\ t)\mu(t)\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\lambda(x)+\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\lambda(t)\,dt, \tag{3.69}$$

где

$$K_1(x,\ t)=\frac{3}{4}\left\{\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6}K(t,\ x)-\right.$$
$$-\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/6}\int_0^1\left[\frac{\zeta(1-\zeta)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{1/6}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{\zeta-x}-\frac{1}{\zeta+x-2x\zeta}\right)K(t,\ \zeta)\,d\zeta\right\}. \tag{3.70}$$

Оценка

$$|K(t,\ \zeta)|\leqslant K\left(\left|\ln\frac{1}{t+\zeta-2t\zeta}\right|+\zeta^{-1/6}\right)$$

(см. (5.34) гл. II) и лемма 3 § 5 гл. II дают нам следующее неравенство:

$$\left(\int_0^1(1-x)K_1^2(x,\ t)\,dx\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/6}\left(\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{2/3}K^2(t,\ x)\,dx\right)^{1/2}\leqslant C_1\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/6}.$$

Отсюда

$$\int_0^1 dt\int_0^1\frac{1-x}{1-t}K_1^2(x,\ t)\,dx<C_2.$$

Таким образом, к уравнению

$$(1-x)^{1/2}\mu(x)+\int_0^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/2}K_1(x,\ t)(1-t)^{1/2}\mu(t)\,dt=\chi(x)\tag{3.71}$$

применима теория Фредгольма. Докажем, что однородное уравнение

$$h(x)+\int_0^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1/2}K_1(x,\ t)\,h(t)\,dt=0\tag{3.72}$$

не имеет в $L_2(0,\ 1)$ решений, отличных от нуля. Допустим обратное. Пусть $h(x)$ — нетривиальное решение уравнения (3.72), тогда функция

$$\mu(x)=(1-x)^{-1/2}h(x)\tag{3.73}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mu(x)+\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6}\left(\frac{1}{t-x}+\frac{1-2t}{t+x-2xt}\right)\mu(t)\,dt+$$
$$+\int_0^1\left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6}K(t,\ x)\,\mu(t)\,dt=0,\tag{3.74}$$

при этом $\lambda(x)\equiv 0$. Вспоминая выражение для $\lambda(x)$ (см. (5.32) гл. II), а также формулы (5.15) и (5.16) гл. II, найдем

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)^{-2/3}\tau(t)\,dt=k\nu(x).$$

Отсюда

$$\tau(x)=k\int_0^x(x-t)^{-1/3}\nu(t)\,dt.\tag{3.75}$$

Таким образом, существует решение $z(x,\ y)\in\mathscr{R}$ уравнения (3.12), обращающееся в нуль на Γ, для которого выполнено равенство (3.75).

Положим

$$g(x) = -\int_0^1 \left[\frac{x(1-t)}{t(1-x)}\right]^{1/6} K(t, x)\mu(t)\,dt.$$

Из оценки для $K(t, x)$ следует, что

$$|g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant K(1-x)^{-1/6}\int_0^1 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/6}\left(\left|\ln\frac{1}{x+t-2xt}\right| + 1\right)|\mu(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant K(1-x)^{-1/6}\left(\int_0^1 (1-t)\mu^2(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 t^{-1/3}(1-t)^{-2/3}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left|\ln\frac{1}{x+t-2xt}\right| + 1\right)^2 dt\right)^{1/2} \leqslant K(1-x)^{-1/6}.$$

Таким образом, $g(x) \in L_p(0, 1)$ при $p < 6$.

Применив лемму 7 § 5 гл. II к уравнению (3.74), получим

$$\mu(x) = \frac{3}{4}\left\{g(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right) g(t)\,dt\right\}.$$

В силу теоремы п. 2 § 5 гл. II функция $x^{\varepsilon/2}(1-x)^{\varepsilon/2}\mu(x)$ квадратично суммируема на (0, 1). А так как с другой стороны,

$$(1-x)^{1/2}\mu(x) \in L_2(0, 1), \quad \text{то} \quad (1-x)^{\varepsilon/2}\mu(x) \in L_2(0, 1),$$

где ε — произвольно малое число. Но тогда

$$\nu(x) = x^{1/6}\int_0^x (x-t)^{-5/6} t^{-1/6}\mu(t)\,dt$$

квадратично суммируема на (0, 1).

Возьмем последовательность $\{\mu_n(x)\}$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности точек $x=0$ и $x=1$, такую, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (1-x)^{\varepsilon}|\mu-\mu_n|^2\,dx=0.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |\nu-\nu_n|^2\,dx=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(x)=\tau(x)$$

равномерно при $0\leqslant x\leqslant 1$, где $\tau_n(x)$ и $\tau(x)$ определены формулой (3.75).

По функциям $\nu_n(x)$ построим последовательность $\{z_n(x, y)\}$ решений уравнения (3.12) таких, что $z_n|_\Gamma=0$.

От функций $z_n(x, y)$ перейдем к функциям

$$u_n(\theta, \sigma)=z_n e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(y)\,dy}.$$

Так как

$$K(\sigma)\frac{\partial^2 u_n}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_n}{\partial\sigma^2}=0,$$

то в области D^+ имеем

$$\left(Ku_n\frac{\partial u_n}{\partial\theta}\right)_\theta+\left(u_n\frac{\partial u_n}{\partial\sigma}\right)_\sigma-K\left(\frac{\partial u_n}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{\partial u_n}{\partial\sigma}\right)^2=0.$$

Интегрируя последнее тождество по D^+ и применяя формулу Грина, в силу того, что $u_n|_\Gamma=0$, придем к равенству

$$\int_0^1 u_n(\theta, 0)\frac{\partial u_n(0, 0)}{\partial\sigma}\,d\theta+$$
$$+\iint\limits_{D^+}\left[K(\sigma)\left(\frac{\partial u_n}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u_n}{\partial\sigma}\right)^2\right]d\sigma\,d\theta=0$$

Отсюда

$$\int_0^1 u_n(\theta,\ 0)\frac{\partial u_n(\theta,0)}{\partial\sigma}\,d\theta<0.$$

Но

$$u_n(\theta,\ 0)=z_n(x,\ 0)=\tau_n(x),$$

$$\frac{\partial u_n(\theta,0)}{\partial\sigma}=\left[\nu_n(x)-\frac{1}{2}b(0)\,\tau_n(x)\right]\frac{dy}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}.$$

Так как $\left.\dfrac{dy}{d\sigma}\right|_{\sigma=0}>0$, то

$$\int_0^1 \tau_n(x)\left[\nu_n(x)-\frac{b(0)}{2}\tau_n(x)\right]dx<0$$

или

$$\int_0^1 \tau_n(x)\,\nu_n(x)\,dx<\frac{b(0)}{2}\int_0^1 \tau_n^2(x)\,dx\leqslant 0\quad (b(0)\leqslant 0).$$

Переходя к пределу, получим

$$\int_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx<0. \tag{3.76}$$

С другой стороны, как показал Трикоми (см. [59a]) из (3.75) следует, что

$$\int_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx\geqslant 0,$$

что противоречит (3.76). Таким образом, $\mu(x)\equiv 0$. Итак, $\lambda=-1$ не является собственным значением ядра $\left(\dfrac{1-x}{1-t}\right)^{1/2}K_1(x,\ t)$. Пусть $R(x,\ t;\ \lambda)$ — его резольвента.

Положим $R(x, t; -1) = R(x, t)$. Тогда решение уравнения (3.69) можно записать в виде

$$\mu(x) = \\ = -\frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \left[\frac{t(1-t)}{x(1-x)}\right]^{1/2}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x-2xt}\right)\lambda(t)\,dt + \\ + \int_0^1 \left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1/2} K_2(x, t)\,\lambda(t)\,dt, \qquad (3.77)$$

где

$$K_2(x, t) = \\ = \frac{R(x, t)}{2} - \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\int_0^1 \left(\frac{t}{\zeta}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{1}{t+\zeta-2\zeta t}\right) R(x, \zeta)\,d\zeta.$$

Заметим, что функция

$$g_1(x) = \int_0^1 \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{x-\zeta} - \frac{1}{x+\zeta-2x\zeta}\right) f(\zeta)\,d\zeta$$

квадратично суммируема, если $f(\zeta) \in L_2(0, 1)$. Действительно, пусть $h(x)$ — произвольная гладкая функция на $(0, 1)$. Тогда

$$\int_0^1 g_1(x)\,h(x)\,dx = \\ = \int_0^1 f(\zeta)\,d\zeta \int_0^1 \left(\frac{\zeta}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\zeta-x} - \frac{1}{x+\zeta-2x\zeta}\right) h(x)\,dx.$$

Следовательно, в силу леммы 3 § 5 гл. II

$$\left|\int_0^1 g_1(x)\,h(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 h^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\int_0^1 g_1^2(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\left(\int_0^1 K_2^2(x, t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 R^2(x, t)\,dt\right)^{1/2} +$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\left(\int_0^1 R^2(x, t)\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 R^2(x, t)\,dt\right)^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 dx \int_0^1 K_2^2(x, t)\,dt \leqslant \int_0^1 dx \int_0^1 R^2(x, t)\,dt < \infty. \quad (3.78)$$

Возвратимся теперь к соотношениям на кривой γ. Пусть γ — гладкая линия, удовлетворяющая условиям (3.2). Кроме того, предположим, что при $0 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon$ линия γ совпадает с характеристикой $\xi = 0$.

При $0 \leqslant \eta \leqslant \varepsilon$ имеет место формула (5.46) гл. II:

$$\eta^{1/6}\Phi'(\eta) = 2\pi\gamma_2\left[\frac{1}{k}\lambda_1(\eta) - \mu(\eta)\right] +$$
$$+\int_0^\eta \left(\frac{\eta}{x}\right)^{1/6} \frac{\partial g_2(\eta, x)}{\partial\eta}\lambda_1(x)\,dx - \int_0^\eta \left(\frac{\eta}{x}\right)^{1/6} \frac{\partial h_1(\eta, x)}{\partial\eta}\mu(x)\,dx$$

или, в силу (3.45),

$$\frac{1}{2\pi\gamma_2}\eta^{1/6}\Phi'(\eta) =$$
$$= \lambda(\eta) + \int_0^\eta g_3(\eta, x)\lambda(x)\,dx + \int_0^\eta h_2(\eta, x)\mu(x)\,dx,$$

где

$$g_3(\eta, x) = \frac{k}{2\pi\gamma_2}\left(\frac{\eta}{x}\right)^{1/6} \frac{\partial g_2(\eta, x)}{\partial\eta},$$
$$h_2(\eta, x) = \frac{1}{2\pi\gamma_2}\left(\frac{\eta}{x}\right)^{1/6}\left(k\frac{\partial g_2}{\partial\eta} - \frac{\partial h_1}{\partial\eta}\right).$$

В силу оценок (см. п. 3 § 5 гл. II)

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial\eta}\right| < C_2\eta^{1/3}, \quad \left|\frac{\partial h_1}{\partial\eta}\right| < C_2\eta^{1/3}$$

имеем

$$|g_3| < C_3 \eta^{1/2} x^{-1/6}, \qquad |h_2| < C_3 \eta^{1/2} x^{-1/6}.$$

Положим

$$(1-\eta)^{1/2} \lambda(\eta) = \theta(\eta). \tag{3.79}$$

Тогда

$$\frac{(1-\eta)^{1/2}\eta^{1/6}}{2\pi\gamma_2} \Phi'(\eta) = \theta(\eta) + \int_0^\eta \left(\frac{1-\eta}{1-x}\right)^{1/2} g_3(\eta, x)\,\theta(x)\,dx + \\ + \int_0^\eta (1-\eta)^{1/2} h_2(\eta, x)\,\mu(x)\,dx.$$

Подставив из (3.77) значение $(1-x)^{1/2}\mu(x)$, получим

$$\frac{(1-\eta)^{1/2}\eta^{1/6}}{2\pi\gamma_2} \Phi'(\eta) = \theta(\eta) + \int_0^1 K_4(\eta, x)\,\theta(x)\,dx. \tag{3.80}$$

Здесь

$$K_4(\eta, x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\eta}{1-x}\right)^{1/2} \left[g_3(\eta, x) - \dfrac{1}{2} h_2(\eta, x)\right] + K_3(\eta, x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad x < \eta, \\ K_3(\eta, x) \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{при} \quad x > \eta, \end{cases}$$

где

$$K_3(\eta, x) = \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \int_0^\eta \left(\frac{1-\eta}{1-t}\right)^{1/2} \left(\frac{x}{t}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{x-t} - \frac{1}{x+t-2xt}\right) h_2(\eta, t)\,dt + \\ + \int_0^\eta \left(\frac{1-\eta}{1-t}\right)^{1/2} h_2(\eta, t)\,K_2(t, x)\,dt.$$

Можно показать, что

$$\int_0^\varepsilon d\eta \int_0^1 K_4^2(\eta, x)\,dx < \infty.$$

Пусть теперь $\varepsilon < \eta < 1$. Выражения (3.44) и (3.60) дают

$$(\eta - \xi)^{1/6}\Phi_0'(\eta) =$$
$$= 2\pi f(\eta) + \pi\sqrt{3} f(\xi)\frac{d\xi}{d\eta} + \psi_3(\xi)\frac{d\xi}{d\eta} + \frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi} +$$
$$+ \int_0^\xi \left[\theta_3(\zeta) + \theta_5(\zeta)\frac{d\xi}{d\eta}\right]\frac{f(x)\,dx}{\eta - x} +$$
$$+ \frac{1}{\eta - \xi}\int_\xi^\eta \left[\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right] f(x)\,dx -$$
$$-\frac{1}{6}\int_0^\xi \left[F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \frac{\xi - x}{\eta - x}\right) - \frac{1}{6}F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; \frac{\xi - x}{\eta - x}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right]\times$$
$$\times \frac{\psi_3(x)\,dx}{(\eta-\xi)^{1/6}(\eta - x)^{5/6}}; \qquad (3.81)$$

или, заменив $f(x)$ и $\psi_3(x)$ их выражениями соответственно по формулам (3.46), (3.36), (3.34), получим

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}\Phi_0'(\eta) = \lambda(\eta) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d\xi}{d\eta}\lambda(\xi) + \sqrt{3}\frac{d\xi}{d\eta}\mu(\xi) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta \frac{\lambda(x)\,dx}{x-\xi} + I_1 + I_2,$$

где через I_1 и I_2 обозначены суммы интегралов, зависящих соответственно от λ и μ. Отсюда, учитывая (3.79), имеем

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi_0'(\eta) = \theta(\eta) + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{d\xi}{d\eta}\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\theta(\xi) +$$
$$+ \sqrt{3}\frac{d\xi}{d\eta}\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}(1-\xi)^{1/2}\mu(\xi) +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta \left(\frac{1-\eta}{1-x}\right)^{1/2}\frac{\theta(x)\,dx}{x-\xi} + (1-\eta)^{1/2}I_1 + (1-\eta)^{1/2}I_2. \quad (3.82)$$

Имеем

$$(1-\eta)^{1/2} I_1 = \left\{ \frac{\eta^{-5/6}}{36} \int_0^{\eta} \frac{\lambda(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{\eta}\right) dt + \right.$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\xi^{-5/6}}{36} \frac{d\xi}{d\eta} \int_0^{\xi} \frac{\lambda(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{\xi}\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{72\pi} \frac{d\xi}{d\eta} \int_0^{\eta} \frac{x^{-5/6}\,dx}{x-\xi} \int_0^{x} \frac{\lambda(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{x}\right) dt +$$

$$+ \int_0^{\xi} \left[\theta_3(\zeta) + \theta_5(\zeta)\frac{d\xi}{d\eta}\right] \frac{f(x)\,dx}{\eta-\xi} +$$

$$\left. + \frac{1}{\eta-\xi} \int_{\xi}^{\eta} \left[\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right] f(x)\,dx \right\} (1-\eta)^{1/2} =$$

$$= \int_0^{\eta} \Psi_1(\eta, t)\,\theta(t)\,dt. \tag{3.83}$$

Покажем, что при выполнении некоторых условий

$$\int_{\varepsilon}^{1} d\eta \int_0^{1} \Psi_1^2(\eta, t)\,dt < \infty. \tag{3.84}$$

Рассмотрим последовательно все интегралы, входящие в выражение (3.83). Для первого интеграла это очевидно. Для второго

$$\int_{\varepsilon}^{1} d\eta \int_0^{\xi} \xi^{-5/3} \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 F^2\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{\xi}\right) \frac{1-\eta}{1-t}\, t^{-1/3}\,dt <$$

$$< \frac{3}{2} F^2\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1\right) \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}{\xi}\,d\eta.$$

Потребуем, чтобы при некотором достаточно малом $\delta > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}{\xi^{1+\delta}} d\eta < \infty. \tag{3.85}$$

Далее,

$$(1-\eta)^{1/2} \frac{d\xi}{d\eta} \int_0^{\eta} x^{-5/6} \frac{dx}{x-\xi} \int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{x}\right) dt =$$

$$= (1-\eta)^{1/2} \frac{d\xi}{d\eta} \left[\int_0^{\xi} t^{-1/6}\lambda(t)\, dt \int_t^{\eta} \frac{F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2,\ 1-\frac{t}{x}\right) dx}{x^{5/6}(x-\xi)} + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{\eta} t^{-1/6}\lambda(t)\, dt \int_t^{\eta} \frac{F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{x}\right) dx}{x^{5/6}(x-\xi)} \right].$$

Но при $t < \xi$

$$\int_t^{\eta} \frac{F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2;\ 1-\frac{t}{x}\right)}{x^{5/6}(x-\xi)} dx < C\xi^{-5/6} |\ln(\xi - t)|,$$

а при $t > \xi$

$$\int_t^{\eta} \frac{F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2,\ 1-\frac{t}{x}\right)}{x^{5/6}(x-\xi)} dx < Ct^{-5/6} |\ln(t - \xi)|.$$

Таким образом, в силу (3.85)

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{(1-\eta)\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2}{\xi^{5/3}} d\eta \int_0^{\xi} \frac{|\ln(\xi - t)|^2}{t^{1/3}(1-t)} dt +$$

$$+ \int_{\varepsilon}^{1} (1-\eta)\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 d\eta \int_{\xi}^{\eta} \frac{|\ln(t-\xi)|^2}{t^2(1-t)} dt < \infty.$$

Аналогично исследуются и два последних интеграла в (3.83).

Рассмотрим теперь $(1-\eta)^{1/2} I_2$:

$$
\begin{aligned}
&(1-\eta)^{1/2} I_2 = \\
&\quad = (1-\eta)^{1/2}\left[\frac{\sqrt{3}}{36}\,\xi^{-5/6}\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^{\xi}\frac{\mu(t)}{t^{1/6}}F\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},2;\ 1-\frac{t}{\xi}\right)dt + \right. \\
&\quad + \sqrt{3}\int_0^{\xi}\Psi(\xi,\eta,t)\mu(t)\,dt + \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{36}\int_0^{\xi}\frac{\mu(t)}{t^{1/6}}\,dt\int_t^{\xi}\frac{F\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},2;\ 1-\frac{t}{x}\right)}{x^{5/6}}\Psi(\xi,\eta,x)\,dx\right] = \\
&\qquad = \int_0^{\xi}(1-t)^{1/2}\Psi_2(\eta,t)\mu(t)\,dt,
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Psi(\xi,\eta,x) = -\frac{1}{6}(\eta-\xi)^{-1/6}(\eta-x)^{-5/6}\left[F\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6},1;\ \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)-\right. \\
\left. -\frac{1}{6}F\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6},2;\ \frac{\xi-x}{\eta-x}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right].
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что

$$
\int_{\varepsilon}^{1}d\eta\int_0^{1}\Psi_2^2(\eta,t)\,dt<\infty.
$$

Формула (3.82) в силу (3.83) и (3.86) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi_0'(\eta) = \\
&\quad = \theta(\eta) + \sqrt{3}\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{d\eta}\left[\frac{1}{2}\theta(\xi)+(1-\xi)^{1/2}\mu(\xi)+\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\left(\frac{1-\xi}{1-x}\right)^{1/2}\frac{\theta(x)\,dx}{x-\xi}\right] + \int_0^{\eta}\Psi_1(\eta,t)\theta(t)\,dt + \\
&\qquad + \int_0^{\xi}(1-t)^{1/2}\Psi_2(\eta,t)\mu(t)\,dt
\end{aligned}
$$

или, после замены $\mu(x)$ по формуле (3.77),

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi_0'(\eta)=\theta(\eta)+$$
$$+\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{d\eta}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\xi}-\frac{1}{t+\xi-2\xi t}\right)\theta(t)\,dt+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi}\int_0^\eta\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{1/2}\frac{\theta(t)\,dt}{t-\xi}\right]+\int_0^\eta\Psi_1(\eta,t)\,\theta(t)\,dt+$$
$$+\int_0^1\Psi_3(\eta,t)\,\theta(t)\,dt. \qquad (3.87)$$

Как и выше, можно показать, что

$$\int_\varepsilon^1 d\eta\int_0^1\Psi_3^2(\eta,t)\,dt<\infty. \qquad (3.88)$$

Далее,

$$\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{1/2}\frac{\theta(t)\,dt}{t-\xi}=$$
$$=\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\frac{\theta(t)\,dt}{t-\xi}+\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta\left[\left(\frac{1-\xi}{1-t}\right)^{1/2}-\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\right]\frac{\theta(t)\,dt}{t-\xi}=$$
$$=\frac{d\xi}{d\eta}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\xi}-\frac{1}{t+\xi-2t\xi}\right)\theta(t)\,dt+$$
$$+\int_0^1\Psi_4(\eta,t)\,\theta(t)\,dt. \qquad (3.89)$$

Нетрудно показать, что при выполнении (3.85)

$$\int_\varepsilon^1 d\eta\int_0^1\Psi_4^2(\eta,x)\,dx<\infty,$$

Подставив (3.89) в (3.87), получим

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi_0'(\eta)=$$

$$=\theta(\eta)+\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{d\eta}\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\xi}-\frac{1}{t+\xi-2\xi t}\right)\theta(t)\,dt+$$

$$+\int_0^1 K_1(\eta, t)\,\theta(t)\,dt, \tag{3.90}$$

причем

$$\int_\varepsilon^1 d\eta\int_0^1 K_1^2(\eta, t)\,dt<\infty. \tag{3.91}$$

Чтобы получить окончательное выражение для $\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi'(\eta)$ $(\varepsilon<\eta<1)$, необходимо еще рассмотреть двойной интеграл в формуле (3.29):

$$z=z_0+I,$$

где I имеет вид (см. (5.38) гл. II)

$$I(\xi, \eta)=\int_\xi^\eta g_0(\xi, \eta, t)\,\tau(t)\,dt-\int_\xi^\eta h_0(\xi, \eta, t)\,\nu(t)\,dt.$$

Дифференцируя по η, находим

$$\frac{dI(\gamma(\eta), \eta)}{d\eta}=$$

$$=\int_\xi^\eta\left(\frac{\partial g_0}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\eta}+\frac{\partial g_0}{\partial\eta}\right)\tau(t)\,dt-\int_\xi^\eta\left(\frac{\partial h_0}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\eta}+\frac{\partial h_0}{\partial\eta}\right)\nu(t)\,dt.$$

Из формул (5.39) и (5.40) гл. II и неравенств (5.45) гл. II легко следует, что

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial g_0}{\partial\eta}\right|<C(\eta-t)^{-5/6}, &&\left|\frac{\partial g_0}{\partial\xi}\right|<C(t-\xi)^{-5/6},\\ &\left|\frac{\partial h_0}{\partial\eta}\right|<C(\eta-t)^{-1/6}, &&\left|\frac{\partial h_0}{\partial\xi}\right|<C(t-\xi)^{-1/6}.\end{aligned} \tag{3.92}$$

Поэтому

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\frac{dI(\gamma(\eta),\eta)}{d\eta}=\int_0^1 \Psi_5(\eta, t)\,\theta(t)\,dt$$

и

$$\int_0^1 d\eta\int_0^1 \Psi_5^2(\eta, t)\,dt<\infty.$$

Итак, суммируя все вышеизложенное, мы **получим** для $0<\eta<1$

$$\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi'(\eta)=\theta(\eta)+\int_0^1 K(\eta, t)\,\theta(t)\,dt+$$
$$+\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{d\eta}\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\xi}-\frac{1}{t+\xi-2t\xi}\right)\theta(t)\,dt, \qquad (3.93)$$

где

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(\eta, t)\,d\eta\,dt<\infty.$$

Предположим, что

$$\int_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta<\infty.$$

Уравнение (3.93) запишем в виде

$$A\theta=\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi'(\eta), \qquad (3.93')$$

где A — линейный оператор в $L_2(0, 1)$. Этот оператор ограничен сверху и снизу в силу неравенств (3.67). Покажем, что оператор A допускает регуляризацию.

В пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор D:

$$D\theta=\theta(\eta)+$$
$$+\left(\frac{1-\eta}{1-\xi}\right)^{1/2}\frac{d\xi}{d\eta}\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-\xi}-\frac{1}{t+\xi-2t\xi}\right)\theta(t)\,dt=$$
$$=\theta(\eta)+\vartheta(\eta). \qquad (3.94)$$

Покажем, что он имеет обратный. Действительно, пусть

$$\hat{\theta}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\theta(t)\,dt.$$

Тогда

$$\int_0^1 \vartheta^2(\eta)\,d\eta<\int_0^1 \hat{\theta}^2(\xi(\eta))\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\max\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|\int_0^{\xi(1)}\hat{\theta}^2(x)\,dx<\max\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|\int_0^1\hat{\theta}^2(x)\,dx$$

или, в силу леммы 3 § 5 гл. II,

$$\int_0^1 \vartheta^2(\eta)\,d\eta<\max\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|\int_0^1\theta^2(x)\,dx.$$

Далее, так как $\max\left|\frac{d\xi}{d\eta}\right|\leqslant 1-\delta$, то из (3.94) имеем

$$\|(D-E)\,\theta\|<(1-\delta)^{1/2}\|\theta\|,$$

т. е. норма оператора $D-E$ меньше единицы. Следовательно, существует ограниченный обратный оператор D^{-1}.

Применив оператор D^{-1} к обеим частям уравнения (3.93′) и учитывая (3.93) и (3.94), получим

$$\theta(\eta)+D^{-1}\int_0^1 K(\eta,\,t)\,\theta(t)\,dt=D^{-1}\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi'(\eta),$$

или

$$\theta(\eta)+B\theta=\varphi(\eta). \tag{3.95}$$

Оператор B — вполне непрерывный в $L_2(0,\,1)$, как произведение оператора ограниченного на вполне непрерывный. Следовательно, оператор D^{-1} есть регуляризатор оператора A. Так как оператор D^{-1} не имеет нулей, кроме тривиального $x=0$, то уравнения (3.93′) и (3.95) эквивалентны при любом свободном члене $f(\eta)=$ $=\frac{(\eta-\xi)^{1/6}}{2\pi\gamma_2}(1-\eta)^{1/2}\Phi'(\eta)$. В силу теоремы единственности решения обобщенной задачи Трикоми уравнение (3.95) разрешимо при любом $\varphi\in L_2(0,1)$. А тогда уравнение (3.93) имеет решение при любом $f\in L_2(0,1)$ и в силу неравенства (3.67) существует обратный ограниченный оператор A^{-1}. Таким образом, мы приходим к следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть линия γ при $0\leqslant\eta\leqslant\varepsilon$ совпадает с характеристикой $\xi=0$ и удовлетворяет условиям* (3.2), (3.85). *Тогда в D существует единственное решение $z\in\mathscr{R}$ уравнения* (3.12), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$z|_\Gamma=0,\qquad z|_\gamma=\Phi(\eta),$$

если

$$\int_0^1(1-\eta)\,\eta^{1/3}\Phi'^2(\eta)\,d\eta<\infty.$$

4. Общий случай. Перейдем теперь к общему случаю обобщенной задачи Трикоми. Пусть γ — произвольная линия, удовлетворяющая условию (3.2). Построим последовательность $\{\gamma_n\}$ линий по следующему правилу. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — монотонно убывающая последовательность чисел, стремящихся к нулю:

$$\varepsilon_1>\varepsilon_2>\ldots\varepsilon_n>\ldots,\qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0.$$

Определим δ_n из равенства

$$2\varepsilon_n=\gamma(\delta_n).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$.

Положим

$$\gamma_n(\eta)=\gamma(\eta)-\varepsilon_n\quad\text{при}\quad\delta_n\leqslant\eta\leqslant1.$$

На отрезке $[0,\delta_n]$ $\gamma_n(\eta)$ определим так, чтобы **1)** $\gamma_n(\eta)$ совпадала с характеристикой $\xi=0$ в достаточно малой окрестности точки (0, 0), 2) выполнялось условие (3.85) и 3) $0 \leqslant \gamma_n'(\eta) \leqslant 1 - \delta$.

Линии γ_n отвечает оператор A_n в $L_2(0, 1)$. Введем последовательность операторов B_n, $\mathscr{L}_2(0, 1) \to \mathscr{L}_2(0, 1)$, равенством $B_n\lambda = (1-\eta)^{-1/2} A_n\theta$ или, в силу (3.79), $B_n\lambda = (1-\eta)^{-1/2} A_n (1-\eta)^{1/2}\lambda$. Докажем, что последовательность операторов B_n сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Оператор B_n представим в виде суммы двух операторов B_{0n} и I_n:

$$B_{0n}\lambda = \frac{[\eta - \gamma_n(\eta)]^{1/6}}{2\pi\gamma_2} \Phi_{0n}'(\eta), \qquad I_n\lambda = \frac{[\eta - \gamma_n(\eta)]^{1/6}}{2\pi\gamma_2} \frac{dI_n}{d\eta}.$$

Пусть $\lambda(\eta)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль в достаточно малой окрестности точки $\eta = 0$. Тогда функция $f(\eta)$, определенная формулой (3.46), также обладает этим свойством.

Выше мы имели (см. (3.81))

$$\begin{aligned}
(\eta - \xi_n)^{1/6} \Phi_{0n}'(\eta) = {} & \\
= 2\pi f(\eta) + \pi\sqrt{3}\, f(\xi_n) \frac{d\xi_n}{d\eta} + {} & \frac{d\xi_n}{d\eta} \int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x - \xi_n} + \\
+ \int_0^{\xi_n} \left[\theta_3(\zeta) + \theta_5(\zeta)\frac{d\xi_n}{d\eta}\right] & \frac{f(x)\,dx}{\eta - x} + \\
+ \frac{1}{\eta - \xi_n} \int_{\xi_n}^{\eta} \left[\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \theta_6\left(\frac{1}{\xi}\right)\frac{d\xi_n}{d\eta}\right] & f(x)\,dx + \\
+ \psi_3(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta} + \int_0^{\xi_n} \Psi(\xi_n, \eta, x)\, & \psi_3(x)\,dx,
\end{aligned} \tag{3.96}$$

где $\xi_n = \gamma_n(\eta)$ и $\Psi(\xi_n, \eta, x)$ — линейная комбинация гипергеометрических функций. Отсюда ясно, что все слагаемые, зависящие от $f(x)$, сходятся равномерно при $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ к выражению

$$2\pi f(\eta) + \pi\sqrt{3}\, f(\xi)\frac{d\xi}{d\eta} + \\ + \frac{d\xi}{d\eta}\int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi} + \int_0^\xi \left[\theta_3(\zeta) + \theta_5(\xi)\frac{d\xi}{d\eta}\right]\frac{f(x)\,dx}{\eta - x} + \\ + \frac{1}{\eta-\xi}\int_\xi^\eta \left[\theta_4\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \theta_6\left(\frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\xi}{d\eta}\right] f(x)\,dx.$$

Рассмотрим два последних слагаемых в (3.96). Заметим, что в силу (3.36), (3.62) $\psi_3(x) \in \mathscr{L}_2(0, 1)$. Пусть

$$S = \int_0^1 (1-\eta)\left|\psi_3(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta} - \psi_3(\xi_m)\frac{d\xi_m}{d\eta}\right|^2 d\eta = \\ = \left(\int_0^h + \int_h^1\right)(1-\eta)\left|\psi_3(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta} - \psi_3(\xi_m)\frac{d\xi_m}{d\eta}\right|^2 d\eta.$$

Так как при достаточно больших n и m $\delta_n < h$ и $\delta_m < h$, то

$$S < 2\int_0^h (1-\eta)\psi_3^2(\xi_n)\left(\frac{d\xi_n}{d\eta}\right)^2 d\eta + \\ + 2\int_0^h (1-\eta)\psi_3^2(\xi_m)\left(\frac{d\xi_m}{d\eta}\right)^2 d\eta + \int_h^1 (1-\eta)|\psi_3(\xi-\varepsilon_n) - \\ - \psi_3(\xi-\varepsilon_m)|^2\left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)^2 d\eta < 2\int_0^{\xi_n(h)} (1-\eta)\psi_3^2(\eta)\,d\eta + \\ + 2\int_0^{\xi_m(h)} (1-\eta)\psi_3^2(\eta)\,d\eta + \int_{\xi(h)}^1 (1-\eta)\,|\psi_3(\eta-\varepsilon_n) - \\ - \psi_3(\eta-\varepsilon_m)|^2\,d\eta \leqslant \delta_1,$$

где δ_1 можно сделать сколь угодно малым при малом h и достаточно больших n и m.

В последнем интеграле, входящем в (3.96), ядро $\Psi(\xi, \eta, x)$ — непрерывная функция от ξ, η, x при $\eta > 0$. Следовательно, при $\eta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\xi_n} \Psi(\xi_n, \eta, x)\, \psi_3(x)\, dx = \int_0^{\xi} \Psi(\xi, \eta, x)\, \psi_3(x)\, dx.$$

Так как

$$\left| \int_0^{\xi_n} \Psi(\xi_n, \eta, x)\, \psi_3(x)\, dx \right| \leqslant \frac{c}{\eta} \int_0^{\eta} |\psi_3(x)|\, dx,$$

а

$$\frac{1}{\eta} \int_0^{\eta} |\psi_3(x)|\, dx \in \mathscr{L}_2(0, 1),$$

то последовательность $\left\{ \int_0^{\xi} \Psi(\xi_n, \eta, x)\, \psi_3(x)\, dx \right\}$ сходится в $\mathscr{L}_2(0,1)$.

Таким образом, последовательность $B_{0n}\lambda$ сходится на множестве функций $\lambda(\eta)$, непрерывно дифференцируемых на (0, 1) и обращающихся в нуль в окрестности точки $\eta = 0$. Множество таких функций плотно в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, а нормы операторов B_{0n} равномерно ограничены. Следовательно, последовательность операторов B_{0n} сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Рассмотрим $I_n\lambda$ (см. (3.91)):

$$2\pi\gamma_2 I_n\lambda = [\eta - \gamma_n(\eta)]^{1/6} \frac{dI_n}{d\eta} =$$
$$= (\eta - \xi_n)^{1/6} \left[\int_{\xi_n}^{\eta} \tilde{g}(\xi_n, \eta, t)\, \tau(t)\, dt - \int_{\xi_n}^{\eta} \tilde{h}(\xi_n, \eta, t)\, \nu(t)\, dt \right],$$

где

$$\tilde{g}(\xi_n, \eta, t) = \frac{\partial g_0}{\partial \xi_n} \frac{d\xi_n}{d\eta} + \frac{\partial g_0}{\partial \eta}, \qquad \tilde{h}(\xi_n, \eta, t) = \frac{\partial h_0}{\partial \xi_n} \frac{d\xi_n}{d\eta} + \frac{\partial h_0}{\partial \eta}.$$

Имеем при $m > n$

$$2\pi\gamma_2 | I_n\lambda - I_m\lambda | \leqslant \int_{\xi_n}^{\xi_m} | \tilde{g}(\xi_n, \eta, t) | | \tau(t) | dt + \int_{\xi_m}^{\eta} | \tilde{g}(\xi_n, \eta, t) - \tilde{g}(\xi_m, \eta, t) | | \tau(t) | dt + \int_{\xi_n}^{\xi_m} | \tilde{h}(\xi_n, \eta, t) | | \nu(t) | dt + \int_{\xi_m}^{\eta} | \tilde{h}(\xi_n, \eta, t) - \tilde{h}(\xi_m, \eta, t) | | \nu(t) | dt.$$

Отсюда после очевидных преобразований получаем

$$2\pi\gamma_2 | I_n\lambda - I_m\lambda | \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant \eta} | \tau(t) | \left[\int_{\xi_n}^{\xi_m} | \tilde{g}(\xi_n, \eta, t) | dt + \int_{\xi_m}^{\eta} | \tilde{g}(\xi_n, \eta, t) - \tilde{g}(\xi_m, \eta, t) | dt \right] + \left(\int_0^{\eta} \nu^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left[\left(\int_{\xi_n}^{\xi_m} \tilde{h}^2(\xi_n, \eta, t)\, dt \right)^{1/2} + \left(\int_{\xi_m}^{\eta} | \tilde{h}(\xi_n, \eta, t) - \tilde{h}(\xi_m, \eta, t) |^2 dt \right)^{1/2} \right].$$

Интегралы, зависящие от $\tilde{g}$ и $\tilde{h}$, в силу непрерывности подынтегральных функций от ξ, η и t при $\xi < t < \eta$ и оценок (3.92) можно сделать при достаточно большом n сколь угодно малыми. Итак,

$$2\pi\gamma_2 | I_n\lambda - I_m\lambda | \leqslant \omega_n \left[\max_{0 \leqslant t \leqslant \eta} | \tau(t) | + \left(\int_0^{\eta} \nu^2(t)\, dt \right)^{1/2} \right].$$

Отсюда

$$2\pi\gamma_2(1-\eta)^{1/2}|I_n\lambda - I_m\lambda| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_n\left[\max_{0\leqslant t\leqslant\eta}|(1-t)^{1/2}\tau(t)| + \left(\int_0^\eta (1-t)\nu^2(t)\,dt\right)^{1/2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant C\omega_n\left[\left(\int_0^1 (1-t)\lambda^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int_0^1 (1-t)\mu^2(t)\,dt\right)^{1/2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant C_1\omega_n\left(\int_0^1 (1-t)\lambda^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Следовательно, последовательность операторов I_n сходится по норме в $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Выше мы показали, что последовательность операторов B_{0n} сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Таким образом, последовательность операторов $B_n = B_{0n} + I_n$ сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$ к оператору B.

Чтобы закончить доказательство теоремы существования, покажем, что последовательность сопряженных операторов B_n^* сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Сопряженный оператор определяется, как обычно:

$$\int_0^1 (1-\eta)A\lambda\cdot g(\eta)\,d\eta = \int_0^1 (1-\eta)\lambda(\eta)A^*g\,d\eta.$$

Имеем

$$B_n = B_{0n} + I_n, \qquad B_n^* = B_{0n}^* + I_n^*.$$

Поскольку последовательность операторов I_n сходится равномерно, то и последовательность сопряженных операторов I_n^* сходится равномерно. Таким образом, нужно доказать, что последовательность операторов B_{0n}^* сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0. 1)$.

Воспользовавшись (3.96), мы по отношению к каждому слагаемому определим ему сопряженный оператор и докажем сходимость. Все эти вычисления носят элементарный характер, и поэтому проведем их лишь для некоторых слагаемых.

Рассмотрим слагаемое $f(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta}$. Введем операторы C_n и H:

$$C_n\varphi = \varphi(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta},$$

$$H\lambda = \gamma_2\left[\lambda(x) + \frac{x^{-5/6}}{36}\int_0^x \frac{\lambda(t)}{t^{1/6}} F\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, 2; 1-\frac{t}{x}\right)dt\right] = f(x).$$

Тогда

$$f(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta} = C_n H\lambda, \qquad (C_n H)^* = H^* C_n^*.$$

Так как H^* — ограниченный оператор, то достаточно рассмотреть вопрос о сходимости последовательности операторов C_n^*. Имеем

$$\int_0^1 (1-\eta)\varphi(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta} g(\eta)\,d\eta =$$

$$= \int_0^{\xi_n(1)} (1-\xi_n)\varphi(\xi_n)\frac{1-\zeta_n(\xi_n)}{1-\xi_n} g(\zeta_n(\xi_n))\,d\xi_n,$$

где $\eta = \zeta_n(\xi_n)$ — обратная функция к функции $\gamma_n(\eta) = \xi_n$. Из последнего выражения видно, что последовательность $C_n^* g$ сходится, если g непрерывна. А так как нормы операторов C_n ограничены в совокупности и множество непрерывных функций плотно в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, то сильная сходимость операторов C_n^* имеет место в $\mathscr{L}_2(0, 1)$. Следовательно, последовательность операторов $(C_n H)^*$ сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Аналогично рассматривается и $\psi_3(\xi_n)\frac{d\xi_n}{d\eta}$.

Изучим оператор $\frac{d\xi_n}{d\eta}\int_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi_n}$. Пусть

$$F_n\varphi = \frac{d\xi_n}{d\eta}\int_0^\eta \frac{\varphi(x)\,dx}{x-\xi_n}.$$

Тогда

$$\frac{d\xi_n}{d\eta}\int\limits_0^\eta \frac{f(x)\,dx}{x-\xi_n} = F_n H\lambda.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть вопрос о сходимости операторов F_n^*. Но

$$F_n^* g = \frac{1}{1-x}\int\limits_x^1 \frac{(1-\eta)\,g(\eta)}{x-\xi_n(\eta)}\frac{d\xi_n}{d\eta}\,d\eta = g(x)\ln|x-\xi_n(x)| +$$

$$+\frac{1}{1-x}\int\limits_x^1 \ln|x-\xi_n(\eta)|\frac{d}{d\eta}[(1-\eta)\,g]\,d\eta$$

и последовательность $F_n^* g$ сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, если $g(\eta)$ — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вместе со своей производной в малой окрестности $\eta = 0$. Множество таких функций плотно в $\mathscr{L}_2(0, 1)$, а нормы операторов F_n^* ограничены в совокупности, и, следовательно, последовательность операторов F_n^* сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$.

Аналогично рассматриваются и остальные слагаемые в (3.96).

Таким образом, мы установили, что последовательность сопряженных операторов B_n^* сильно сходится в $\mathscr{L}_2(0, 1)$ к оператору B^*.

Докажем разрешимость уравнения

$$B\lambda = f \tag{3.97}$$

при любом $f \in \mathscr{L}_2(0, 1)$.

Пусть B_n — построенная выше последовательность операторов. В силу результата, полученного в предыдущем пункте, уравнение

$$B_n\lambda = f$$

разрешимо при любом $f \in \mathscr{L}_2$ (0, 1) и существует ограниченный обратный оператор B_n^{-1}. Норма его удовлетворяет неравенству

$$\| B_n^{-1} \| \leqslant m_n^{-1},$$

где m_n определяется из левого неравенства (3.67). Последовательность $\{\gamma_n(\eta)\}$ построена так, что

$$\frac{d\gamma_n}{d\eta} \leqslant 1 - \delta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поскольку постоянная m_n в неравенстве (3.67) зависит только от δ, то постоянные m_n ограничены снизу:

$$m_n \geqslant m' > 0.$$

Но

$$(B_n^*)^{-1} = (B_n^{-1})^*, \qquad \| (B_n^{-1})^* \| = \| B_n^{-1} \| \leqslant m_n^{-1}$$

и, следовательно,

$$\| B_n^* \lambda \| \geqslant m_n \| \lambda \| \geqslant m' \| \lambda \|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\| B^* \lambda \| \geqslant m' \| \lambda \|.$$

Таким образом, уравнение $B^* \lambda = 0$ не имеет в $\mathscr{L}_2(0, 1)$ отличных от нуля решений. А тогда в силу известной теоремы функционального анализа уравнение (3.97) разрешимо при любом $f \in \mathscr{L}_2(0, 1)$.

Итак, мы пришли к следующей лемме.

Лемма 4 [4а]. *Пусть* Γ *удовлетворяет условию*

$$(1 - \theta) \frac{d\sigma}{ds} + \sigma \frac{d\theta}{ds} \leqslant 0, \tag{3.98}$$

а вдоль γ *выполнены условия* (3.2). *Тогда в области* D *существует решение* $z \in \mathscr{R}$ *уравнения* (3.12)

$$y z_{xx} + z_{xy} + c(y) z = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$z|_\Gamma = 0, \qquad z|_\gamma = \Phi(\eta),$$

если

$$\int_0^1 (1 - \eta) \eta^{1/3} \Phi'^2(\eta) \, d\eta < \infty. \tag{3.99}$$

Освободимся теперь от ограничения

$$z|_\Gamma = 0.$$

Пусть

$$z|_\Gamma = \varphi(s) \qquad (0 \leqslant s \leqslant l),$$

где $\varphi(s)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha > 0$. Не нарушая общности, можно считать

$$\varphi(0) = 0.$$

Функция (см. (4.16) гл. II)

$$z_1(x, y) = -\int_0^l \varphi(s)\,\tilde{\rho}(s, x, y)\,ds \tag{3.100}$$

есть непрерывное в $\overline{D}^+$ решение уравнения (3.12), удовлетворяющее условиям

$$z_1|_\Gamma = \varphi(s), \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0 \qquad (0 < x < 1).$$

На линии перехода имеем

$$z_1(x, 0) = -\int_0^l \varphi(s)\,\tilde{\rho}(s, x, 0)\,ds.$$

Решая задачу Коши для уравнения (3.12) с начальными данными

$$z_1(x, 0) = \tau_1(x), \qquad \lim_{y \to 0} \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0,$$

мы построим по формуле (5.38) гл. II решение $z_1(x, y)$ уравнения (3.12) в области D^-. Нужно еще показать, что значения $z_1(x, y)$ на линии γ удовлетворяют неравенству (3.99). Производя те же самые вычисления, что и при выводе правого неравенства (3.67), и принимая во внимание, что $\nu_1(x) \equiv 0$, получим

$$\int_0^1 \eta^{1/3}(1-\eta)\,\Phi_1'^2(\eta)\,d\eta < C \int_0^1 (1-x)\,\lambda_1^2(x)\,dx,$$

где

$$\Phi_1(\eta) = z_1|_\gamma.$$

Далее, из формулы (3.32) находим

$$x^{-1/6}\lambda_1(x)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-1/6}t^{-1/6}\varphi_1(t)\,dt. \qquad (3.101)$$

Ранее мы имели (см. (5.15) гл. II)

$$\varphi_1(x)=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\tau_1(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\int_0^x (x-t)^{-2/3}\tau_1'(t)\,dt.$$

Подставив это в (3.101), получим

$$\lambda_1(x)=x^{1/6}\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{-1/6}t^{-1/6}\,dt\int_0^t (t-y)^{-2/3}\tau_1'(y)\,dy=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}\int_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{1/6}(x-y)^{-5/6}\tau_1'(y)\,dy,$$

но из (3.100), в силу леммы 7 § 4 гл. II, имеем

$$|\tau_1'(x)|<C_1\left(x^{-1/9}+(1-x)^{-1/3}\right).$$

Таким образом, $\lambda_1(x)\in\mathscr{L}_2(0,\ 1)$ и, следовательно,

$$\int_0^1 \eta^{1/3}(1-\eta)\Phi_1'^2(\eta)\,d\eta<\infty.$$

Из наших рассуждений следует, что решение обобщенной задачи Трикоми для уравнения (3.12) существует и дается следующей формулой:

$$z=z_1+z_2,$$

где $z_2(x,\ y)$ — решение обобщенной задачи Трикоми при краевых условиях

$$z_2|_\Gamma=0,\qquad z_2|_\gamma=\Phi(\eta)-\Phi_1(\eta),$$

а $z_1(x,\ y)$ — построенное выше решение уравнения (3.12).

Теорема 3.3 [4а]. *Пусть*

1) *вдоль линии* Γ *имеет место условие* (3.98), *а вдоль* γ *выполнены условия* (3.2);

2) *функция* $\varphi(s)$ *удовлетворяет условиям леммы* 7 § 4 *гл.* II;

3) $\int\limits_0^1 (1-\eta)\,\eta^{1/3}\psi'^2(\eta)\,d\eta < \infty$.

Тогда в области D_γ *существует решение* $z \in \mathscr{R}$ *уравнения* (3.12), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$z|_\Gamma = \varphi(s), \qquad z|_\gamma = \psi(\eta).$$

ЗАДАЧА ФРАНКЛЯ

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Чаплыгина

$$K(y)\,u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{1.1}$$

где $K(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, при этом $K(y)>0$ при $y>0$ и $K(y)<0$ при $y<0$, $K(-y)=-K(y)$.

Пусть D — область, ограниченная отрезком $A'A$ оси $x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, гладкой кривой Г, лежащей в верхней полуплоскости, с концами в точках $A(0,1)$ и $B(a,0)$, характеристикой $A'C$ уравнения (1.1), $A'(0,-1)$, $C(a_1,0)$, где $a_1\leqslant a$, и отрезком CB оси x, $a_1\leqslant x\leqslant a$ (рис. 9).

В 1956 г. Ф. И. Франкль [64д] поставил следующую задачу:

Найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения (1,1), *непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее граничным условиям*

$$u|_{\Gamma}=\psi_1(s),\quad 0\leqslant s\leqslant l, \tag{1.2}$$

$$u|_{CB}=\psi_2(x),\quad a_1\leqslant x\leqslant a, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{A'A}=0, \tag{1.4}$$

$$u(0,y)-u(0,-y)=f(y),\quad -1\leqslant y\leqslant 1, \tag{1.5}$$

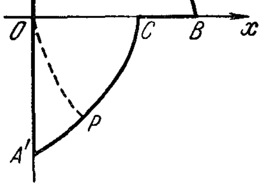

Рис 9.

где ψ_1 и ψ_2 — заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, $\psi_1(0)=\psi_2(a)$, а $f(y)$ имеет первую производную, удовлетворяющую условию Гёльдера на $(-1,\ +1)$.

§ 2. Единственность решения задачи Франкля

1. Метод вспомогательных функций *). Предположим, что кривая Γ, кроме обычного условия гладкости (условия Ляпунова), удовлетворяет следующим условиям:

а) в окрестности точки $A(0, 1)$ имеет место неравенство

$$\frac{dy}{dx} \geqslant 0, \tag{2.1}$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, а s — длина дуги, отсчитываемая от точки $B(a, 0)$;

б) угол θ между положительным направлением оси Ox и направлением касательной, проведенной в сторону возрастания s — длины дуги Γ, заключен в пределах от 0 до 2π:

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{*}$$

Докажем, что однородная задача Франкля ($\psi_1 = \psi_2 = f \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

Обозначим через $v(x, y)$ функцию, которая вместе с решением $u(x, y)$ задачи Франкля удовлетворяет системе уравнений

$$K(y)u_x - v_y = 0, \qquad u_y + v_x = 0. \tag{2.2}$$

При условии $v(0, 0) = 0$ функция $v(x, y)$ однозначно определяется с помощью $u(x, y)$ из уравнений (2.2). В силу (1.4)

$$v(0, y) = 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant y \leqslant 1. \tag{2.3}$$

Дополнительно будем требовать, чтобы $u(x, y)$ удовлетворяла условиям, обеспечивающим непрерывность $v(x, y)$ в замкнутой области $\bar{D}$.

Следуя идее К. Моравец [46б], рассмотрим в области D функцию

$$F(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2uv\,dx + (Ku^2 - v^2)\,dy. \tag{2.4}$$

Из (2.2) очевидно, что величина интеграла (2.4) не зависит от пути интегрирования, лишь бы он лежал целиком в области D.

---

*) См [20б].

Пусть D^+ — часть области D, где $y>0$, а D^- — часть области D, где $y<0$. В области D^+ функция $F(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$K(y)F_{xx} + F_{yy} = K'(y)u^2.$$

Выражая u^2 через производные от $F(x, y)$ из (2.4), получим

$$K(y)F_{xx} + F_{yy} = \alpha F_x + \beta F_y, \tag{2.5}$$

где

$$\alpha = \frac{K'(y)F_x}{2\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}}, \qquad \beta = \frac{K'(y)}{2K}\left(1 + \frac{F_y}{\sqrt{KF_x^2 + F_y^2}}\right).$$

Коэффициенты α и β ограничены в любой замкнутой подобласти области D^+, и уравнение (2.5) — эллиптического типа в D^+. Следовательно, функция $F(x, y)$ удовлетворяет принципу максимума в области D^+, т. е. достигает наибольшего значения на границе области D^+, причем в точке, где достигается это наибольшее значение,

$$\frac{\partial F}{\partial n} < 0\ ^{*)}, \tag{2.6}$$

где n — внутренняя нормаль к границе области D^+.

В области D^- функция $F(x, y)$ не возрастает по y, так как

$$F_y = Ku^2 - v^2 \leqslant 0, \tag{2.7}$$

и, следовательно, наибольшее значение этой функцией достигается на границе области D.

На участке CB границы области D функция $F(x, y)$ постоянная, так как $F_x = 2uv = 0$ в силу (1.3) ($\psi_2 \equiv 0$). На дуге характеристики $A'C$ выполняется соотношение $\frac{dx}{ds} = \sqrt{-K}\,\frac{dy}{ds}$, поэтому

$$\left.\frac{\partial F}{\partial s}\right|_{A'C} = -\left(\sqrt{-K}\,u - v\right)^2 \frac{dy}{ds}, \tag{2.8}$$

---

*) Последнее утверждение остается справедливым и в том случае, когда уравнение на границе области вырождается, если направление границы области не является характеристическим.

а на OA'
$$F_y = Ku^2 \leqslant 0.$$

Следовательно, функция $F(x, y)$ может принимать наибольшее значение в гиперболической части области в точке A' $(0, -1)$. Но $F(0, -1) = F(0, 1)$. В самом деле, учитывая свойства $K(y)$ и условия (1.4), (1.5) ($f \equiv 0$), получим

$$F(0, -1) = \int_0^{-1} K(y)\, u^2(0, y)\, dy =$$

$$= -\int_0^{-1} K(-y)\, u^2(0, -y)\, dy = \int_0^1 K(y)\, u^2(0, y)\, dy = F(0, 1).$$

На кривой Γ имеем
$$\frac{\partial F}{\partial s} = -v^2 \frac{dy}{ds},$$

так как $u|_\Gamma = 0$. В силу условия (2.1) в окрестности точки A функция $F(x, y)$ на Γ не убывает с убыванием дуги s, и, следовательно, наибольшее значение $F(x, y)$ должна принять во внутренней точке кривой Γ. В точке наибольшего значения $F(x, y)$ должно быть
$$v^2 \frac{dy}{ds} = 0.$$

Если $v = 0$, то в этой точке $\frac{dF}{dn} = -v^2 \cos(ny) = 0$, что противоречит (2.6). Если же $\frac{dy}{ds} = 0$, то в силу (*) $\frac{dF}{dn} = v^2 > 0$, что также противоречит (2.6). Таким образом, $F(x, y)$ не может быть отлична от постоянной в D^+, а так как $F(0, 0) = 0$, то $F(x,y) \equiv 0$ в D^+. В области D^- в силу (2.7) и (2.8) имеем
$$F(x, 0) \leqslant F(x, y) \leqslant F(0, -1), \qquad 0 \leqslant x \leqslant a_1,$$
но
$$F(x, 0) = 0, \qquad F(0, -1) = F(0, 1) = 0,$$

откуда $F(x, y) \equiv 0$ и в области D^-. Следовательно, $F(x, y) \equiv 0$ в области D, а тогда из (2.4) имеем $u = v \equiv 0$

в D, и единственность решения задачи Франкля (1.1)—(1.5) доказана.

2. Метод *abc**). Применим метод abc для доказательства теоремы единственности квазирегулярного решения задачи Франкля для случая, когда $K(y)+K(-y)\leqslant 0$. Заметим, что для задачи Франкля производные u_x и u_y могут быть разрывны на характеристике OP (см. рис. 9). От u_x и u_y достаточно требовать непрерывности слева и справа на OP. Тогда из непрерывности $u(x, y)$ на OP, следует, что производная $\left(-u_x\sqrt{-K}+u_y\right)$ непрерывна на OP.

Определим функцию $v(x, y)$, сопряженную с $u(x, y)$, следующим образом:

$$v(x,\ y)=\int\limits_{(0,\ 0)}^{(x,\ y)} u_y\,dx-Ku_x\,dy. \tag{2.9}$$

Сначала определим этот интеграл отдельно в областях $A'OPA'$ и $OPCBAO$. Из (1.1) очевидно, что интегралы в этих двух областях не зависят от пути интегрирования. На характеристике OP $dx=\sqrt{-K}\,dy$ и, следовательно,

$$dv=u_y\,dx-Ku_x\,dy=\sqrt{-K}\,(u_y\,dy+u_x\,dx)=\sqrt{-K}\,du.$$

В силу непрерывности $u(x, y)$ на OP следует, что

$$d(v^+-v^-)=\sqrt{-K}\,d(u^+-u^-)=0.$$

Отсюда $v^+-v^-=\text{const}=0$, так как $v^+=v^-$ в точке $(0, 0)$. Таким образом, функция $v(x, y)$ тоже непрерывна в $\bar{D}$.

Для функций u и v имеем систему уравнений

$$K(y)\,u_x+v_y=0,\qquad v_x-u_y=0. \tag{2.10}$$

Пусть $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — две произвольные кусочно-гладкие функции в $\bar{D}$. Очевидно, что

$$\iint\limits_D [(cKu-bv)(v_x-u_y)+(bu+cv)(Ku_x+v_y)]\,dx\,dy=0.$$

---

*) См. [42].

Применяя формулу Грина, получим

$$\iint\limits_D [((cK)_y - Kb_x)u^2 - 2(Kc_x + b_y)uv + \\ + (b_x - c_y)v^2]\,dx\,dy + \int\limits_S (bKu^2 + 2cKuv - bv^2)\,dy + \\ + (cKu^2 - 2buv - cv^2)\,dx = 0, \qquad (2.11)$$

где S — граница области D.

Из (1.4), (2.10) и (2.9) следует, что $v_y|_{AA'} = 0$, и поэтому

$$v(0, y) = 0.$$

Далее, из граничных условий (1.2) (1.3) и (1.5) (где $\psi_1 = \psi_2 = f \equiv 0$) имеем

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{CB} = 0, \quad u(0, y) = u(0, -y).$$

Тогда равенство (2.11) можно записать в виде

$$\iint\limits_D [((cK)_y - Kb_x)u^2 - 2(Kc_x + b_y)uv + (b_x - c_y)v^2]\,dx\,dy + \\ + \int\limits_\Gamma -v^2(c\,dx + b\,dy) + \int\limits_{AA'} bKu^2\,dy - \\ - \int\limits_{A'C} (\sqrt{-K}\,u + v)^2 (c\,dx + b\,dy) + \int\limits_{CB} -cv^2\,dx = 0. \qquad (2.12)$$

Подчиним теперь функции b и c таким условиям, чтобы все интегралы в (2.12) были неотрицательными. Для этого достаточно потребовать, чтобы

$$\left.\begin{array}{c} (cK)_y - Kb_x \geqslant 0, \\ b_x - c_y \geqslant 0, \quad \text{в } D \\ (Kc_x + b_y)^2 \leqslant (b_x - c_y)(-Kb_x + (cK)_y), \end{array}\right\} \qquad (2.13)$$

$$c\frac{dx}{ds} + b\frac{dy}{ds} \leqslant 0 \quad \text{на } \Gamma, \qquad (2.14)$$

$$\int\limits_0^1 [b(0, y)K(y) + b(0, -y)K(-y)]\,u^2(0, y)\,dy \leqslant 0 \qquad (2.15)$$

или

$$b(0, y)K(y) + b(0, -y)K(-y) \leqslant 0, \tag{2.15'}$$

$$b + c\sqrt{-K} \leqslant 0 \quad \text{на} \quad A'C, \tag{2.16}$$

$$c(x, 0) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad CB. \tag{2.17}$$

Пусть, например, при $y \geqslant 0$

$$b = x - m, \qquad c = y,$$

где m — постоянная и $m > \max\limits_D x$, а при $y \leqslant 0$

$$b = x - m, \qquad c = 0.$$

Тогда, очевидно, условия (2.13), (2.16) и (2.17) выполняются, а условия (2.14) и (2.15) переходят в следующие неравенства:

$$(x - m)\frac{dy}{ds} + y\frac{dx}{ds} \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{2.14'}$$

и

$$K(y) + K(-y) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1. \tag{2.15*}$$

Из неотрицательности интегралов, входящих в равенство (2.12), следует, что каждый из них равняется нулю, поскольку их сумма равна нулю. Тогда из первого интеграла следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в D.

Итак, мы доказали единственность квазирегулярного решения задачи Франкля при условиях (2.14) и (2.15).

§ 3. Существование решения задачи Франкля

Приведем доказательство существования решения задачи Франкля для случая $K(y) = \operatorname{sgn} y |y|^m$ (см. [20б]).

Уравнение (1.1) принимает вид

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{3.1}$$

В этом случае $A'C$ совпадает с отрезком характеристики

$$x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = \frac{2}{m+2}.$$

Докажем, что существует функция $u(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

1) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (3.1) в области D;

2) она непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$;

3) частные производные u_x и u_y непрерывны в $\overline{D}$ всюду, кроме, быть может, точек $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $A'(0, -1)$, $C\left(\frac{2}{m+2}, 0\right)$, $B(a, 0)$, где они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1.2)—(1.5).

Обозначим через D^* область, симметричную области D относительно оси y, и пусть $D_1 = D + D^* + A'A$. Область D_1^* ограничена кривой $\Gamma + \Gamma^*$ и отрезком $[-a, a]$ оси x, где Γ^* — контур, симметричный Γ относительно оси y.

Обозначим через $\psi_1^*(s)$ функцию, заданную на Γ^* равенством

$$\psi_1^*(s) = \psi_1(l - s),$$

где l — длина кривой $\Gamma + \Gamma^*$.

Найдем в области D_1 решение уравнения (3.1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_\Gamma = \psi_1(s), \qquad u|_{\Gamma^*} = \psi_1^*(s), \tag{3.2}$$

$$u(x, 0) = \psi_2(x), \qquad \frac{2}{m+2} < x < a,$$

$$u(x, 0) = \psi_2(-x), \qquad -a < x < -\frac{2}{m+2} \tag{3.3}$$

и условию (1.5), причем функции $\tau(x) = u(x, 0)$, $\nu(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y}$ при $-\frac{2}{m+2} < x < \frac{2}{m+2}$ будем считать четными. Тогда условие (1.4) будет выполнено. Очевидно, решение этой вспомогательной задачи при $x \geqslant 0$ будет решением задачи Франкля.

Относительно кривой $\Gamma + \Gamma^*$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям теоремы единственности и координаты ее точек, как функции дуги s, имеют непрерывные вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера на $[0, l]$. Предположим, что в окрестности точки B на кривой Γ выполняется условие

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant C y^{m+1}(s).$$

Не ограничивая общности, можно считать $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$. Действительно, пусть $w(x, y)$ — решение уравнения (3.1) при $y > 0$ — удовлетворяет краевым условиям

$$w|_\Gamma = \psi_1(s), \qquad w|_{\Gamma^*} = \psi_1^*(s),$$

$$w(x, 0) = 0, \qquad -\frac{2}{m+2} < x < \frac{2}{m+2},$$

$$w(x, 0) = \psi_2(x), \qquad \frac{2}{m+2} < x < a, \qquad w(x, 0) = \psi_2(-x),$$

$$-a < x < -\frac{2}{m+2},$$

$$\psi_2\left(\frac{2}{m+2}\right) = 0, \qquad \psi_1(0) = \psi_2(a).$$

В гиперболической части области D_1 по известным значениям $w(x, 0)$, $\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$ определим функцию $w(x, y)$ как решение задачи Коши для уравнения (3.1). При таком определении функции $w(x, y)$ условие $w_x(0, y) = 0$ будет выполнено на $A'A$. Очевидно, разность $w(0, y) - w(0, -y) = f_1(y)$ нечетна. Таким образом, функция $u(x, y) - w(x, y)$ будет решением задачи Франкля, удовлетворяющим условиям (1.2) — (1.5), где $\psi_1 = \psi_2 \equiv 0$, а вместо $f(y)$ написана разность $f(y) - f_1(y)$.

Решение уравнения (3.1) в гиперболической части области D_1, удовлетворяющее условиям $u(x, 0) = \tau(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \nu(x)$, дается формулой (см. [56ж])

$$u(x, y) =$$

$$= \gamma_1 \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt +$$

$$+ \gamma_2 y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt, \quad (3.4)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

В формуле (3.4) положим $x=0$, затем воспользуемся условием (1.5) и разрешим полученное уравнение относительно $\tau(x)$. Для этого заменим $(-y)$ на $\left(\frac{y}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}$, умножим обе части полученного равенства на $\frac{y^{2\beta}}{(x^2-y^2)^\beta}$, проинтегрируем по y в пределах от 0 до x, а затем продифференцируем по x. Тогда, произведя необходимые вычисления, получим

$$2^{1-2\beta}\gamma_1 \frac{\pi}{\sin\beta\pi}\tau(x) = (1-2\beta)^{2\beta}\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{2\beta}} + \\ + \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{y^{2\beta}\varphi\left[\left(\frac{y}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}\right]dy}{(x^2-y^2)^\beta} - \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{y^{2\beta}f\left[\left(\frac{y}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}\right]}{(x^2-y^2)^\beta}dy, \tag{3.5}$$

где

$$\varphi(y) = u(0, y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Решение задачи Дирихле для уравнения (3.1) в области D_1^+ с краевыми условиями (3.2), (3.3) ($\psi_1 = \psi_2 = 0$) и

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad -\frac{2}{m+2} < x < \frac{2}{m+2}, \tag{3.6}$$

выражается формулой (см. [56ж])

$$u(x, y) = \int_{-(1-2\beta)}^{1-2\beta} \tau(\xi)\left[\frac{\partial G_0(\xi, 0; x, y)}{\partial\eta} + \frac{\partial H(\xi, 0; x, y)}{\partial\eta}\right]d\xi. \tag{3.7}$$

Здесь $G_0(\xi, \eta; x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле для нормальной области D_0. Она имеет вид

$$G_0(\xi, \eta; x, y) = q_2(\xi, \eta; x, y) - \left(\frac{a}{R}\right)^{2\beta} q_2(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}), \tag{3.8}$$

где

$$q_2(\xi, \eta; x, y) =$$
$$= k_2\left(\frac{4}{m+2}\right)^{4\beta-2} r_1^{-2\beta}(1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma) \tag{3.9}$$

— фундаментальное решение уравнения (3.1). Здесь использованы обозначения

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp \eta^{\frac{m+2}{2}}\right)^2, \quad \sigma = \frac{r^2}{r_1^2},$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}, \qquad R^2 = x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2},$$

$$\bar{x} = \frac{a^2}{R^2} x, \qquad \bar{y} = \left(\frac{a^2}{R^2}\right)^{\frac{2}{m+2}} y.$$

Функция $H(\xi, \eta; x, y)$ определена равенством

$$H(\xi, \eta; x, y) = \int_0^l \rho(s; \xi, \eta) G_0(x(s), y(s); x, y)\, ds, \tag{3.10}$$

где $\rho(s; \xi, \eta)$ есть решение интегрального уравнения

$$\rho(s; \xi, \eta) - 2\int_0^l K_2(t, s)\rho(t; \xi, \eta)\, dt = 2A_s[q_2(x(s), y(s); \xi, \eta)],$$

$$A_s[q_2] \equiv y^m \frac{dy}{ds}\frac{\partial q_2}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial q_2}{\partial y},$$

$$K_2(t, s) = A_s[q_2(\xi(t), \eta(t); x(s), y(s))].$$

Из формулы (3.7), пользуясь четностью $\tau(x)$, находим $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \nu_0(x) + \int_0^{1-2\beta} \tau(\xi)\left[\frac{\partial^2 H(-\xi, 0; x, 0)}{\partial\eta\, \partial y} + \frac{\partial^2 H(\xi, 0; x, 0)}{\partial\eta\, \partial y}\right] d\xi, \tag{3.11}$$

где

$$\nu_0(x) = \left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-(1-2\beta)}^{1-2\beta}\tau(\xi)\,\frac{\partial G_0(\xi, 0; x, y)}{\partial\eta}\,d\xi\right]_{y=0} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-(1-2\beta)}^{1-2\beta} k_2 y\left\{\left[(x-\xi)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\,y^{m+2}\right]^{\beta-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left.- \left[\left(a - \frac{\xi x}{a}\right)^2 + \frac{4\xi^2 y^{m+2}}{(m+2)^2 a^2}\right]^{\beta-1}\right\}\tau(\xi)\,d\xi\right]_{y=0} =$$

$$= \frac{k_2}{1-2\beta}\int\limits_0^{1-2\beta}\frac{\tau'(\xi)\,d\xi}{(x+\xi)^{1-2\beta}} - \frac{k_2}{1-2\beta}\int\limits_0^{1-2\beta}\frac{(x-\xi)\,\tau'(\xi)\,d\xi}{|x-\xi|^{2-2\beta}} -$$

$$- k_2\int\limits_0^1 \tau(\xi)\left[\frac{1}{\left(a - \dfrac{x\xi}{a}\right)^{2-2\beta}} + \frac{1}{\left(a + \dfrac{x\xi}{a}\right)^{2-2\beta}}\right]d\xi.$$

Значения $\nu(x)$ и $\varphi(y) = u(0, y)$ подставим в (3.5). Тогда, учитывая, что

$$\int\limits_0^x \frac{\nu_0(t)\,dt}{(x-t)^{2\beta}} =$$

$$= \frac{k_2}{1-2\beta}\left[-\pi\,\mathrm{tg}\,\beta\pi\,\tau(x) + \int\limits_0^{1-2\beta}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{1-2\beta}\frac{2\xi\tau(\xi)\,d\xi}{\xi^2 - x^2} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{1-2\beta}\tau(\xi)\left(\frac{x}{a}\right)^{1-2\beta}\frac{2a\,d\xi}{a^2 - \dfrac{x^2\xi^2}{a^2}}\right],$$

и производя вычисления, получим

$$\tau(x) - 4\lambda\int\limits_0^{1-2\beta} x^{1-2\beta}\left(\frac{\xi^{2+2\beta}}{\xi^4 - x^4} - \frac{a^{2+2\beta}}{a^4 - \dfrac{x^4\xi^4}{a^4}}\right)\tau(\xi)\,d\xi -$$

$$- 2\lambda\int\limits_0^{1-2\beta} H_1(\xi, x)\,\tau(\xi)\,d\xi = F(x), \qquad (3.12)$$

где

$$\lambda = \frac{\cos \beta\pi}{\pi (1 + \sin \beta\pi)}, \tag{3.13}$$

$$H_1(\xi, x) = \frac{(1-2\beta)^{1-2\beta}}{2k_2} \int_0^l \left[\frac{\partial \rho(s;\ \xi, 0)}{\partial \eta} + \frac{\partial \rho(s;\ -\xi, 0)}{\partial \eta} \right] \times$$

$$\times \left[\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\beta} G_0\left(x(s), y(s);\ 0, \left(\frac{y}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}\right)}{(x^2 - y^2)^\beta} dy + \right.$$

$$\left. + (1-2\beta)^{2\beta} \int_0^x \frac{\partial G_0(x(s), y(s);\ t, 0)}{\partial y} \frac{dt}{(x-t)^{2\beta}} \right] ds, \tag{3.14}$$

$$F(x) = -\frac{\lambda(1-2\beta)}{2k_2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y^{2\beta} f\left[\left(\frac{y}{1-2\beta}\right)^{1-2\beta}\right] dy}{(x^2 - y^2)^\beta}. \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что функция $H_1(\xi, x)$ непрерывна и ограничена, а $F(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера на $(-1, 1)$.

В уравнении (3.12) заменим x на $4\alpha \sqrt[4]{x}$, а ξ на $4\alpha \sqrt[4]{\xi}$ и, полагая $\tau_1(x) = \tau\left(4\alpha \sqrt[4]{x}\right)$, окончательно получим

$$x^{-\alpha}\tau_1(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{b}{b^2 - \xi x} \right) \xi^{-\alpha} \tau_1(\xi)\, d\xi =$$

$$= x^{-\alpha} F\left(4\alpha \sqrt[4]{x}\right) + \lambda \int_0^1 b \frac{1 - \left(\frac{b}{\xi}\right)^{\frac{1+\beta}{2}}}{b^2 - x\xi} \xi^{-\alpha} \tau_1(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \lambda \int_0^1 2\alpha \xi^{-3/4} \left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha H_1\left(4\alpha \sqrt[4]{\xi}, 4\alpha \sqrt[4]{x}\right) \xi^{-\alpha} \tau_1(\xi)\, d\xi, \tag{3.16}$$

где

$$b = \left(\frac{a}{1-2\beta}\right)^4, \qquad \alpha = \frac{1-2\beta}{4}.$$

Таким образом, вопрос о существовании решения задачи Франкля эквивалентен вопросу о разрешимости сингулярного уравнения (3.16).

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{b}{b^2 - x\xi} \right) \varphi(\xi)\, d\xi = \psi(x). \tag{3.17}$$

Будем считать, что $\psi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на отрезке $[0, 1]$. Решение $\varphi(x)$ уравнения (3.17) будем искать в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) на всяком отрезке $[a, b]$, где $0 < a < b < 1$, $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера;

2) вблизи любого конца c отрезка $[0, 1]$ $\varphi(x)$ представима в виде

$$\varphi(x) = \frac{\varphi^*(x)}{|x - c|^{\gamma}}, \qquad 0 \leqslant \gamma < 1,$$

где $\varphi^*(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера на отрезке $[0, 1]$.

Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости. Следуя идее Карлемана *), положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{b}{b^2 - z\xi} \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{3.18}$$

Очевидно, $\Phi(z)$ голоморфна на всей плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$ и луча (b^2, ∞) вещественной оси.

При $0 < x < 1$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) = \varphi(x),$$

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{b}{b^2 - x\xi} \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{3.19}$$

Это позволяет свести уравнение (3.17) к следующему:

$$(1 - i\pi\lambda)\, \Phi^+(x) - (1 + i\pi\lambda)\, \Phi^-(x) = \psi(x), \quad 0 < x < 1. \tag{3.20}$$

---

*) См. сноску на стр. 6.

Из (3.18) легко видеть, что

$$\Phi\left(\frac{b^2}{z}\right) = \frac{z}{b}\Phi(z). \tag{3.21}$$

Преобразование $t = b^2/z$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот; при этом интервал $(0, 1)$ переходит в луч (b^2, ∞). Заменим в (3.20) x на b^2/x и воспользуемся соотношением (3.21). Тогда получим

$$(1 + i\pi\lambda)\Phi^+(x) - (1 - i\pi\lambda)\Phi^-(x) = -\frac{b}{x}\psi\left(\frac{b^2}{x}\right), \quad b^2 < x < \infty. \tag{3.22}$$

Введем две функции:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + i\pi\lambda}{1 - i\pi\lambda} = e^{2i\alpha\pi}, & 0 < x < 1, \\ \dfrac{1 - i\pi\lambda}{1 + i\pi\lambda} = e^{-2i\alpha\pi}, & b^2 < x < \infty; \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{i\pi\alpha}\cos\alpha\pi\,\psi(x) & 0 < x < 1, \\ -e^{-i\pi\alpha}\cos\alpha\pi\,\dfrac{b}{x}\psi\left(\dfrac{b^2}{x}\right), & b^2 < x < \infty. \end{cases}$$

Тогда уравнения (3.20) и (3.22) можно объединить в одно уравнение:

$$\Phi^+(x) - G(x)\Phi^-(x) = h(x), \quad 0 < x < 1, \quad b^2 < x < \infty. \tag{3.23}$$

Нетрудно видеть, что функция

$$X(z) = \frac{(1 - z)^\alpha}{z^\alpha}(b^2 - z)^\alpha \tag{3.24}$$

является частным решением однородной задачи

$$X^+(x) = G(x)X^-(x), \quad 0 < x < 1, \quad b^2 < x < \infty. \tag{3.25}$$

Граничное условие (3.23) в силу (3.25) можно переписать в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)} - \frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)} = \frac{h(x)}{X^+(x)}. \tag{3.26}$$

Отсюда сразу получаем одно из частных решений:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{h(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+\int_{b^2}^{\infty}\frac{h(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}\right]=$$

$$=\frac{e^{i\pi\alpha}\cos\alpha\pi\,X(z)}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\psi(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{b}{b^2-zt}\right)dt. \qquad (3.27)$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi^+(x)}{X^+(x)}-\frac{\Phi^-(x)}{X^-(x)}=0.$$

Это уравнение показывает, что функция $\chi(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z=0$, $z=1$, $z=b^2$, которые могут быть только полюсами. Допуская, что голоморфная функция $\Phi(z)$ имеет особенность порядка ниже единицы при $z\to 0$, $z\to 1$ и $z\to b^2$, мы найдем, что

$$\chi(z)=\frac{C}{(1-z)(b^2-z)}.$$

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (3.23) имеет вид

$$\Phi(z)=\frac{e^{i\pi\alpha}\cos\alpha\pi\,X(z)}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\psi(t)}{X^+(t)}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{b}{b^2-zt}\right)dt+$$
$$+\frac{C}{z^{\alpha}(1-z)^{1-\alpha}(b^2-z)^{1-\alpha}}. \qquad (3.28)$$

Решение уравнения (3.17) получим по формуле $\varphi(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x)$. Выполнив указанные вычисления, найдем

$$\varphi(x)=\frac{\psi(x)}{1+\lambda^2\pi^2}+\frac{\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\,\frac{(1-x)^{\alpha}(b^2-x)^{\alpha}}{x^{\alpha}}\times$$
$$\times\int_0^1 \frac{t^{\alpha}\psi(t)}{(1-t)^{\alpha}(b^2-t)^{\alpha}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{b^2-xt}\right)dt+$$
$$+\frac{C_1}{x^{\alpha}(1-x)^{1-\alpha}(b^2-x)^{1-\alpha}}. \qquad (3.29)$$

Возвращаясь к уравнению (3.16), будем его решать, как если бы правая часть была известной функцией. Полагая $x^{-\alpha}\tau_1(x)=\varphi(x)$ и пользуясь решением (3.29) уравнения (3.17), получим интегральное уравнение

$$\tau_1(x)-\lambda_1\int_0^1 K_1(\xi, x)\,\tau_1(\xi)\,d\xi=F_1(x)$$

или, возвращаясь к функции $\tau(x)$,

$$\tau(x)-\lambda_1\int_0^{1-2\beta} K(x, \xi)\,\tau(\xi)\,d\xi=F_2(x), \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned} K(x, \xi)={}&\frac{16a^4(\xi^{2+2\beta}-a^{2+2\beta})}{a^8-x^4\xi^4}\int_0^{1-2\beta}\left[\frac{((1-2\beta)^4-x^4)(a^4b-x^4)}{((1-2\beta)^4-t^4)(a^4b-t^4)}\right]^\alpha\times\\ &\times\left[\frac{a^8-x^4\xi^4-\left(\frac{x}{t}\right)^4(a^8-x^4\xi^4)\left(\frac{a^4b-t^4}{a^4b-x^4}\right)^\alpha}{t^4-x^4}-\frac{a^4(a^8-x^4\xi^4)}{a^8-x^4t^4}\right]\times\\ &\times\frac{t^{4-2\beta}\,dt}{a^8-t^4\xi^4}+8\int_0^{1-2\beta}\left[\frac{((1-2\beta)^4-x^4)(a^4b-x^4)}{((1-2\beta)^4-t^4)(a^4b-t^4)}\right]^\alpha\times\\ &\times\left[\frac{H_1(\xi, t)-H_1(\xi, x)\left(\frac{a^4b-t^4}{a^4b-x^4}\right)^\alpha\left(\frac{x}{t}\right)^{4-4\alpha}}{t^4-x^4}-a^4\frac{H_1(\xi, t)}{a^8-x^4t^4}\right]t^3dt, \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} F_2(x)={}&\frac{4\lambda}{1+\lambda^2\pi^2}\int_0^{1-2\beta}\left[\frac{((1-2\beta)^4-x^4)(a^4b-x^4)}{((1-2\beta)^4-t^4)(a^4b-t^4)}\right]^\alpha\times\\ &\times\left[\frac{F(t)-F(x)\left(\frac{a^4b-t^4}{a^4b-x^4}\right)^\alpha\left(\frac{x}{t}\right)^{4-4\alpha}}{t^4-x^4}-\frac{a^4F(t)}{a^8-x^4t^4}\right]t^3\,dt+\\ &+\frac{C_2}{\left(1-\left(\frac{x}{1-2\beta}\right)^4\right)^{1-\alpha}\left(b^2-\left(\frac{x}{1-2\beta}\right)^4\right)^{1-\alpha}}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\lambda_1=\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2\pi^2}.$$

Так как мы ищем те решения уравнения (3.30), которые непрерывны при $x = 1 - 2\beta$, то в (3.32) необходимо положить $C_2 = 0$. К уравнению (3.30) применима теория Фредгольма, и, следовательно, из единственности решения задачи Ф. И. Франкля будет следовать разрешимость уравнения (3.30). Определив $\tau(x)$ из уравнения (3.30), мы найдем $\nu(x)$ из (3.11), а затем по формулам (3.4) и (3.7) получим решение задачи Франкля соответственно в областях D^- и D^+.

Замечание. $\Gamma + \Gamma^*$ — нормальный контур

$$x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{4}{(m+2)^2}$$

и точки B и C совпадают, то $H_1(x, \xi) \equiv 0$ и ядро уравнения (3.30) принимает более простой вид, причем $b = 1$. Совершенно аналогично решается краевая задача для уравнения (3.1), где краевое условие (1.3) заменено условием

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \psi_2(x), \qquad a_1 < x < a.$$

ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

§ 1. Постановка задачи

Ф. И. Франкль (см. [64к]) свел задачу определения течения внутри плоскопараллельного симметричного сопла Лаваля заданной формы (прямую задачу теории сопла Лаваля) к новой краевой задаче для уравнения

$$\operatorname{sgn} y|y|^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$(-1 < m < 0) \qquad (1.1)$$

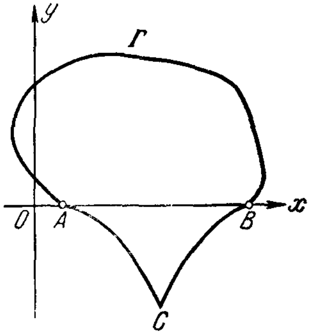

Рис 10.

с показателем $m = -1/2$. А именно, придя на плоскости годографа к области D, изображенной на рис. 10, где AC и BC — характеристики уравнения (1.1), а Г — спрямляемая жорданова кривая, Ф. И. Франкель показал, что для обеспечения существования и единственности в области D решения $u(x, y)$ уравнения (1.1) при $-1 < m < 0$ уже недостаточно подчинить функцию $u(x, y)$ краевым условиям

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad u|_{AC} = \psi(x), \qquad (1.2)$$

а следует, сверх того, на отрезке AB линии перехода вместо обычного требования непрерывности $u_y(x, +0) = u_y(x, -0)$ ввести предположение (условие разрывности Франкля)

$$\frac{\partial u(x, +0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x, -0)}{\partial y}. \qquad (1.3)$$

§ 2. Теорема единственности *)

Докажем теорему единственности в классе функций, удовлетворяющих условиям:

1) $u(x, y) \in C^{(2)}(D^+ \cup D^-)$;

2) интегралы

$$\int_A^B u(x, 0)\, u_y(x, 0)\, dx, \qquad \iint_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy,$$

$$\iint_{D^-} \left[(-y)^m u_x^2 - u_y^2\right] dx\, dy$$

существуют, и к интегралам

$$\iint_{D^+} u\,(y^m u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy, \qquad \iint_{D^-} u\,[(-y)^m u_{xx} - u_{yy}]\, dx\, dy$$

можно применить формулу Грина;

3) $(-y)^{m/2} u^2(B) = 0$.

Положим

$$\frac{\partial u(x, +0)}{\partial y} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \nu(x).$$

Покажем предварительно, что если $u(x, y)$ есть решение уравнения (1.1), обращающееся в нуль на характеристике AC, то

$$\int_0^1 \tau(x)\, \nu(x)\, dx \geqslant 0. \tag{2.1}$$

В самом деле, для области D^- нижней полуплоскости

$$0 = \iint_{D^-} u\,[(-y)^m u_{xx} - u_{yy}]\, dx\, dy =$$

$$= \int_{ACBA} u\left[(-y)^m u_x\, dy + u_y\, dx\right] + \iint_{D^-} \left[u_y^2 - (-y)^m u_x^2\right] dx\, dy.$$

*) См. [64к].

Отсюда, учитывая, что $u|_{AC}=0$, получим

$$\int_0^1 \tau(x)\,\nu(x)\,dx =$$

$$= -\iint_{D^-} \left[u_y^2 - (-y)^m u_x^2\right] dx\,dy - \int_C^B u\left[(-y)^m u_x\,dy + u_y\,dx\right]. \tag{2.2}$$

На характеристике CB имеем $dx=(-y)^{m/2}\,dy$. Тогда

$$\int_C^B u\left[(-y)^m u_x\,dy + u_y\,dx\right] = \int_C^B (-y)^{m/2}\,u\,(u_x\,dx + y_y\,dy) =$$

$$= \int_C^B (-y)^{\frac{m}{2}}\,u\,du = \frac{1}{2}(-y)^{\frac{m}{2}}\,u^2(B) + \frac{m}{4}\int_C^B (-y)^{\frac{m-2}{2}}\,u^2\,dy$$

или, в силу 3),

$$\int_C^B u\left[(-y)^m u_x\,dy + u_y\,dx\right] = \frac{m}{4}\int_C^B (-y)^{\frac{m-2}{2}}\,u^2\,dy \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Покажем, что первый интеграл в правой части равенства (2.2) неположителен. Для этого перейдем в плоскость характеристических координат

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}. \tag{2.4}$$

Имеем

$$\iint_{D^-} \left[u_y^2 - (-y)^m u_x^2\right] dx\,dy = -2 \iint_{\triangle AB'C'} (-y)^{\frac{m}{2}}\,u_\xi u_\eta\,d\xi\,d\eta. \tag{2.5}$$

В гиперболической полуплоскости уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}.$$

Из (2.6) имеем

$$u_\xi u_\eta = u_\eta^2 - \frac{\eta - \xi}{\beta} u_\eta u_{\xi\eta}. \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.5), получим

$$\iint_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2]\, dx\, dy =$$

$$= -2\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \left[\iint_{\triangle AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} u_\eta^2\, d\xi\, d\eta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\beta} \iint_{\triangle AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{2(m+1)}{m+2}} u_\eta u_{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta \right]$$

или, интегрируя по частям последний интеграл,

$$\iint_{D^-} [u_y^2 - (-y)^m u_x^2]\, dx\, dy =$$

$$= \frac{2(m+2)}{m} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{m}{m+2}} \iint_{\triangle AB'C'} (\eta - \xi)^{\frac{m}{m+2}} u_\eta^2\, d\xi\, d\eta \leqslant 0. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.3) и (2.8), из (2.2) получаем (2.1).

Теперь нетрудно доказать теорему единственности. Пусть $u(x, y)$ — решение уравнения (1.1), равное нулю на кривой Γ и на характеристике AC. Тогда

$$0 = \iint_{D^+} u\,(y^m u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy = - \iint_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy -$$

$$- \int_0^1 \tau(x)\, \nu(x)\, dx - \int_\Gamma u\,[y^m u_x \cos(nx) + u_y \cos(ny)]\, ds,$$

и так как $u|_\Gamma = 0$, то получим

$$\int_0^1 \tau(x)\, \nu(x)\, dx + \iint_{D^+} (y^m u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy = 0. \tag{2.9}$$

Поскольку $u=0$ на характеристике AC, то имеет место (2.1), а тогда из (2.9) легко заключаем, что $u\equiv 0$ в D^+. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (1.1) (см. [56ж]) получаем, что $u\equiv 0$ в D^-.

Таким образом, $u\equiv 0$ в D, что и требовалось доказать.

§ 3. Некоторые результаты теории производных и интегралов дробного порядка для вещественной функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в интервале (a, b). *Интегралом дробного порядка* $(-\alpha)$ $(\alpha<0)$ от функции $f(x)$ называется выражение вида

$$D_{af}^{\alpha}(x)=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_a^x (x-t)^{-(\alpha+1)}f(t)\,dt \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{3.1}$$

Функция $D_{af}^{\alpha}(x)$ существует для почти всех x и интегрируема; для $\alpha\leqslant -1$ она непрерывна.

Если $\alpha>0$, $n<\alpha<n+1$ (n — целое число) и существует $f^{(n+1)}(t)$, интегрируемая в (a, b), то *производной порядка* α от $f(x)$ называется выражение

$$D_{af}^{\alpha}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}+D_a^{\alpha-(n+1)}f^{(n+1)}(x); \tag{3.2}$$

так как $\alpha-(n+1)<0$, то последнее слагаемое в (3.2) определяется из (3.1). Производная порядка α от $f(x)$ может быть записана еще в следующем виде:

$$D_{af}^{\alpha}(x)=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D_a^{\alpha-(n+1)}f(x) \qquad (n<\alpha<n+1). \tag{3.3}$$

Это определение имеет смысл и для целых значений $\alpha=n$:

$$D_{af}^{\alpha}(x)=f^{(n)}(x).$$

Нетрудно видеть, что если $\alpha<0$ и $\beta<0$, то

$$D_a^{\alpha}D_{af}^{\beta}(x)=D_a^{\alpha+\beta}f(x). \tag{3.4}$$

Если

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0, \tag{3.5}$$

то, применяя оператор $D_a^{-\alpha}$ при $n<\alpha<n+1$ к функции $D_{a}^{\alpha}f(x)$, определенной формулой (3.2), мы получим

$$D_a^{-\alpha}D_{a}^{\alpha}f(x)=f(x).$$

Пусть $f(x)=D_a^{-\alpha}\varphi(x)$ при $n<\alpha<n+1$, тогда справедливо (3.5) и имеет место

$$D_{a}^{\alpha}f(x)=D_a^{\alpha}D_a^{-\alpha}\varphi(x)=\varphi(x). \tag{3.6}$$

§ 4. Исследование уравнения (1.1) в гиперболической полуплоскости

1. Задача Коши. Свойства обобщенного решения. В полуплоскости $y<0$ уравнение (1.1) принимает вид

$$(-y)^m u_{xx}-u_{yy}=0. \tag{4.1}$$

В характеристических координатах

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \qquad \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{4.2}$$

уравнение (4.1) переходит в уравнение Эйлера — Дарбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\beta}{\eta-\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0, \tag{4.3}$$

где

$$\beta=\frac{m}{2(m+2)} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}<\beta<0 \quad \text{при} \quad -1<m<0.$$

Известно, что решение уравнения (4.3) с начальными данными (см. [31a])

$$u(x,(0))=\tau(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4.4}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\lim_{\eta-\xi\to 0}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(x) \tag{4.5}$$

имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\varkappa_1\int_0^1\tau(t)\,\zeta^{\beta}(1-\zeta)^{\beta}\,d\zeta+$$
$$+\frac{\varkappa_1}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)\int_0^1\tau'(t)\,\zeta^{\beta}(1-\zeta)^{\beta}(2\zeta-1)\,d\zeta-$$
$$-\varkappa_2(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1\nu(t)\,\zeta^{-\beta}(1-\zeta)^{-\beta}\,d\zeta, \tag{4.6}$$

где

$$t = \xi + (\eta - \xi)\zeta,$$

$$\varkappa_1 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}, \qquad \varkappa_2 = [2(1-2\beta)]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}.$$

Переходя к старым переменным (x, y), получим решение задачи Коши для уравнения (4.1) в полуплоскости $y<0$ с начальными данными (4.4), (4.5) в виде

$$u(x, y) = \varkappa_1 \int_0^1 \tau(t)\zeta^\beta(1-\zeta)^\beta d\zeta + \\ + \frac{\varkappa_1}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \int_0^1 \tau'(t)\zeta^\beta(1-\zeta)^\beta(2\zeta-1)\,d\zeta + \\ + [2(1-2\beta)]^{1-2\beta}\varkappa_2 y \int_0^1 \nu(t)\zeta^{-\beta}(1-\zeta)^{-\beta}d\zeta, \qquad (4.7)$$

где

$$t = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2\zeta - 1).$$

Если $\tau(x) \in C^3[0, 1]$ и $\nu(x) \in C^2[0, 1]$, то функция $u(x, y)$, определенная формулой (4.6) или (4.7), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (4.1) с начальными данными (4.4), (4.5) в области, ограниченной характеристиками

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

и отрезком $[0, 1]$ оси x.

Выражение вида (4.6) или (4.7) будем называть *обобщенным решением* уравнения (4.1) в области D^-: $0<\xi<\eta<1$, если $\tau(t)$ и $\nu(t)$ непрерывны при $0<t<1$.

Для того чтобы обобщенное решение обладало той или иной гладкостью, необходимо, чтобы функции $\tau(t)$ и $\nu(t)$ имели определенную гладкость.

Рассмотрим следующий класс обобщенных решений задачи Коши (4.1), (4.4), (4.5).

Класс R_2 (см. [31a]). *Обобщенное решение* (4.6) *или* (4.7) *принадлежит классу* R_2, *если* $\nu(x)$ *непрерывна в* (0, 1) *и интегрируема и если* $\tau(x)$ *есть интеграл дробного порядка* $-(2\beta-1)$ *от некоторой функции* $T(x)$, *непрерывной и интегрируемой на* (0, 1), *т. е.*

$$\tau(x)=\tau(0)+\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt \qquad (-1<\beta<0). \tag{4.8}$$

Из (4.8) легко следует, что $\tau(x)\in C[0, 1]$ и существует $\tau'(x)\in C(0, 1)$. Без ограничения общности будем считать $\tau(0)=0$.

Лемма 1. *Обобщенное решение* $u\in R_2$ *непрерывно в замкнутой области* $\bar{D}^-$.

Действительно, полагая $t=\xi+(\eta-\xi)\zeta$, представим $u(\xi, \eta)$ в виде

$$u(\xi, \eta)=\varkappa_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^\eta \tau(t)(\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta\,dt+$$

$$+\frac{\varkappa_1}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^\eta \tau'(t)\left[(\eta-t)^{1+\beta}(t-\xi)^\beta-\right.$$

$$\left.-(\eta-t)^\beta(t-\xi)^{1+\beta}\right]dt-\varkappa_2\int_\xi^\eta \nu(t)(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\,dt. \tag{4.9}$$

Нетрудно проверить, что функции $\tau'(t)\,t^\beta$ и $\tau'(t)(1-t)^\beta$ интегрируемы на [0, 1], а поэтому $u(\xi, \eta)$ непрерывна при $\xi\to 0$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$ и при $\eta\to 1$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$. Из (4.6) легко следует, что $\lim\limits_{\eta-\xi\to 0} u(\xi, \eta)=\tau(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если обобщенное решение* $u\in R_2$, *то производные* u_x *и* u_y *непрерывны в* D^-, *а* u_y *непрерывна вплоть до линии перехода и*

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x) \qquad (0<x<1). \tag{4.10}$$

Доказательство. Подставив (4.8) в (4.9), получим

$$u(\xi, \eta) = \frac{\varkappa_1}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)^{-1-2\beta} \times$$

$$\times \int_\xi^\eta \left\{ \int_0^t T(\zeta)\left[2(1+2\beta)(\eta-t)^\beta (t-\xi)^\beta (t-\zeta)^{-2\beta} + \right.\right.$$

$$+ 2\beta(\eta-t)^{1+\beta}(t-\xi)^\beta(t-\zeta)^{-1-2\beta} -$$

$$\left.\left. - 2\beta(\eta-t)^\beta(t-\xi)^{1+\beta}(t-\zeta)^{-1-2\beta}\right] d\zeta \right\} dt -$$

$$- \varkappa_2 \int_\xi^\eta \nu(t)(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\,dt = \frac{\varkappa_1}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)^{-1-2\beta} J_1 - J_2. \tag{4.11}$$

В интеграле J_1 промежуток интегрирования по ζ разобьем на два: $(0, \xi)$, (ξ, t). Меняя порядок интегрирования, получим

$$J_1 = \int_0^\xi I_1(\xi, \eta; \zeta)\,T(\zeta)\,d\zeta + \int_\xi^\eta I_2(\xi, \eta; \zeta)\,T(\zeta)\,d\zeta, \tag{4.12}$$

где

$$I_1(\xi, \eta; \zeta) = 2(1+2\beta)\int_\xi^\eta (\eta-t)^\beta(t-\xi)^\beta(t-\zeta)^{-2\beta}\,dt +$$

$$+ 2\beta\int_\xi^\eta (\eta-t)^{1+\beta}(t-\xi)^\beta(t-\zeta)^{-1-2\beta}\,dt -$$

$$- 2\beta\int_\xi^\eta (\eta-t)^\beta(t-\xi)^{1+\beta}(t-\zeta)^{-1-2\beta}\,dt,$$

$$I_2(\xi, \eta; \zeta) = 2(1+2\beta)\int_\zeta^\eta (\eta-t)^\beta(t-\zeta)^{-2\beta}(t-\xi)^\beta\,dt +$$

$$+ 2\beta\int_\zeta^\eta (\eta-t)^{1+\beta}(t-\zeta)^{-1-2\beta}(t-\xi)^\beta\,dt -$$

$$- 2\beta\int_\zeta^\eta (\eta-t)^\beta(t-\zeta)^{-1-2\beta}(t-\xi)^{1+\beta}\,dt.$$

Для вычисления этих выражений положим

$$\Phi(k, l, m; \xi, \eta, \zeta) = \int_{\xi}^{\eta} (\eta - t)^k (t - \xi)^l (t - \zeta)^m \, dt.$$

Выполнив подстановку $t = \eta - (\eta - \xi)\mu$ и используя интегральное представление гипергеометрических функций, найдем

$$\Phi(k, l, m; \xi, \eta, \zeta) = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+l+2)} (\eta - \xi)^{k+l+1} (\eta - \zeta)^m \times F\left(k+1, -m, k+l+2; \frac{\eta-\xi}{\eta-\zeta}\right).$$

Вычисляя I_1, имеем

$$I_1(\xi, \eta; \zeta) = \frac{2\Gamma^2(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} (\eta-\xi)^{1+2\beta} (\eta-\zeta)^{-2\beta} \Big[F(1+\beta, 2\beta, 2+2\beta; z) + \frac{\beta}{2(1+2\beta)} zF(2+\beta, 1+2\beta, 3+2\beta; z) - \frac{\beta}{2(1+2\beta)} zF(1+\beta, 1+2\beta, 3+2\beta; z)\Big],$$

где

$$z = \frac{\eta-\xi}{\eta-\zeta}.$$

Учитывая, что квадратная скобка равна $(1-z)^{-\beta}$, окончательно будем иметь

$$I_1(\xi, \eta; \zeta) = \frac{2\Gamma^2(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} (\eta-\xi)^{1+2\beta} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\xi-\zeta)^{-\beta}. \tag{4.13}$$

Аналогично для $I_2(\xi, \eta; \zeta)$ находим

$$I_2(\xi, \eta; \zeta) = \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma(1-\beta)} (\eta-\xi)^{1+2\beta} (\eta-\zeta)^{-\beta} (\zeta-\xi)^{-\beta}. \tag{4.14}$$

Подставив (4.13) и (4.14) в (4.12), а затем полученное выражение для J_1 в (4.11), получим

$$u(\xi, \eta) = \int\limits_0^{\xi} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\xi - \zeta)^{-\beta} T(\zeta)\, d\zeta + \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta - \zeta)^{-\beta} (\zeta - \xi)^{-\beta} N(\zeta)\, d\zeta, \qquad (4.15)$$

где

$$N(\zeta) = \frac{1}{2\cos \pi\beta} T(\zeta) - \varkappa_2 \nu(\zeta). \qquad (4.16)$$

В силу определения класса R_2 из (4.16) следует, что функция $N(\zeta) \in C(0, 1)$ и интегрируема в (0, 1). Так как $-\beta > 0$, то из формулы (4.15) легко видеть, что $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ существуют и непрерывны в D^-.

Докажем теперь равенство (4.10). Из (4.15) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = [2(1 - 2\beta)]^{-2\beta} (\eta - \xi)^{2\beta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = -\beta [2(1 - 2\beta)]^{-2\beta} \times$$

$$\times \left\{ (\eta - \xi)^{1+2\beta} \int\limits_0^{\xi} (\eta - \zeta)^{-1-\beta} (\xi - \zeta)^{-1-\beta} T(\zeta)\, d\zeta - {} \right.$$

$$\left. - (\eta - \xi)^{1+2\beta} \int\limits_{\xi}^{\eta} (\eta - \zeta)^{-1-\beta} (\zeta - \xi)^{-1-\beta} N(\zeta)\, d\zeta \right\} =$$

$$= -\beta [2(1 - 2\beta)]^{-2\beta} (I_3 - I_4). \qquad (4.17)$$

Интеграл I_4 после замены $\zeta = \xi + (\eta - \xi) t$ примет вид

$$I_4 = \int\limits_0^1 N[\xi + (\eta - \xi) t]\, t^{-1-\beta} (1 - t)^{-1-\beta} dt.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\eta - \xi \to 0} I_4 = N(x) \int\limits_0^1 t^{-1-\beta} (1 - t)^{-1-\beta} dt = \frac{\Gamma^2(-\beta)}{\Gamma(-2\beta)} N(x). \qquad (4.18)$$

Вводя постоянную δ из условия $0<\delta<x<1$, разобьем интеграл I_3 на два: $\int\limits_0^\xi = \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\xi$. Выполнив во втором интеграле подстановку $\zeta=\xi-(\eta-\xi)\mu$, легко найдем, что

$$I_3=(\eta-\xi)^{1+2\beta}\int\limits_0^\delta (\eta-\zeta)^{-1-\beta}(\xi-\zeta)^{-1-\beta}T(\zeta)\,d\zeta+$$

$$+\int\limits_0^{\frac{\xi-\delta}{\eta-\xi}} T[\xi-(\eta-\xi)\mu]\,\mu^{-1-\beta}(1+\mu)^{-1-\beta}\,d\mu.$$

Первый интеграл в силу выбора δ стремится к нулю при $\eta\to x$, $\xi\to x$, $0<x<1$. Поэтому

$$\lim_{\eta-\xi\to 0} I_3=T(x)\int\limits_0^\infty \mu^{-1-\beta}\,(1+\mu)^{-1-\beta}\,d\mu=$$

$$=T(x)\frac{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(1+2\beta)}{\Gamma(1+\beta)}. \tag{4.19}$$

Переходя к пределу в (4.17) при $y\to 0$, в силу (4.18), (4.19) и (4.16) находим

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=-\beta[2(1-2\beta)]^{-2\beta}\frac{\Gamma^2(-\beta)}{\Gamma(-2\beta)}\varkappa_2\nu(x)=\nu(x).$$

Лемма доказана.

2. Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$. Используя явное интегральное представление (4.15) решения задачи Коши (4.1), (4.4) и (4.5) в D^-, найдем функциональное соотношение между $\tau(x)$, $\nu(x)$ и заданным значением $\psi(\eta)$ решения $u(\xi,\eta)$ на характеристике AC ($\xi=0$, $0\leqslant\eta\leqslant 1$). Пусть решение $u\in R_2$. При этом в силу его непрерывности в D^- должно быть

$$\psi(0)=0. \tag{4.20}$$

Положив $\xi=0$ в выражении (4.15), получим

$$\psi(\eta)=\int\limits_0^\eta N(\zeta)\,\zeta^{-\beta}(\eta-\zeta)^{-\beta}\,d\zeta.$$

Разрешим его относительно $T(\zeta)$. Положим

$$\Phi(\zeta) = N(\zeta)\zeta^{-\beta}. \tag{4.21}$$

Тогда имеем

$$\int_0^\eta (\eta-\zeta)^{-\beta}\Phi(\zeta)\,d\zeta = \psi(\eta). \tag{4.22}$$

Будем считать, что $\psi(\eta)$ имеет вторую производную $\psi''(\eta)$, интегрируемую в $(0, 1)$. Допустим, что существует решение уравнения (4.22). Запишем его в виде (см. (3.1))

$$D_0^{\beta-1}\Phi(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\psi(\eta). \tag{4.23}$$

Применим к обеим частям уравнения (4.23) оператор $D_0^{1-\beta}$. Тогда в силу (3.6) получим

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} D_0^{1-\beta}\psi(\eta). \tag{4.24}$$

Таким образом, решение уравнения (4.22), если оно существует, необходимо выражается формулой (4.24). Отсюда следует единственность решения уравнения (4.22). Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция (4.24) на самом деле является решением уравнения (4.22).

Сопоставляя теперь (4.16), (4.21) и (4.24), получим

$$T(\zeta) = \varkappa_3\nu(\zeta) + \frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\zeta^\beta D_0^{1-\beta}\psi(\zeta), \tag{4.25}$$

где

$$\varkappa_3 = 2\varkappa_2\cos\pi\beta. \tag{4.26}$$

Подставляя (4.25) в (4.8), окончательно находим

$$\tau(x) = \varkappa_3\int_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu(t)\,dt + \Phi_1(x), \tag{4.27}$$

где

$$\Phi_1(x) = \frac{2\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+2\beta)} D_0^{2\beta-1}\left[x^\beta D_0^{1-\beta}\psi(x)\right]. \tag{4.28}$$

§ 5. Исследование уравнения (1.1) в эллиптической полуплоскости

В полуплоскости $y>0$ уравнение (1.1) принимает вид

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-1<m<0). \tag{5.1}$$

Задача N. *Найти в области D^+ решение уравнения* (5.1), *непрерывное в замкнутой области $\overline{D}^+$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u|_\Gamma = \varphi(s), \qquad (0 \leqslant s \leqslant l), \tag{5.2}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \qquad 0<x<1, \tag{5.3}$$

причем $\varphi(s) \in C[0, l]$, $\nu(x) \in C(0, 1)$.

Относительно кривой Γ будем предполагать, что 1) функции $x(s)$, $y(s)$, дающие параметрическое уравнение кривой Γ, имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера в промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$; 2) в окрестности концов кривой Γ

$$\left|\frac{dx}{ds}\right| \leqslant C_1 y^{m+1}(s). \tag{5.4}$$

Уравнение (5.1) имеет фундаментальное решение

$$q_1(x, y; x_0, y_0) = k_1 r_1^{-2\beta} F(\beta, \beta, 2\beta, 1-\sigma), \tag{5.5}$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x-x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{\frac{m+2}{2}} \mp y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2,$$

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{m}{2(m+2)} < 0, \quad k_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Нетрудно убедиться, что построенная для уравнения (5.1) при $m>0$ теория потенциала (см. [56ж]) справедлива и для $-1<m<0$.

Определение. *Функцией Грина задачи N для уравнения* (5.1) *назовем функцию $G(x, y; x_0, y_0)$, удовлетворяющую следующим условиям*:

1) *внутри области D^+, кроме точки (x_0, y_0), эта функция есть регулярное решение уравнения* (5.1);

2) *она удовлетворяет краевым условиям*

$$G(x, y; x_0, y_0)|_\Gamma = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0 \qquad (x_0, y_0) \in D^+; \tag{5.6}$$

3) *она может быть представлена в виде*

$$G(x, y; x_0, y_0) = q_1(x, y; x_0, y_0) + v(x, y; x_0, y_0), \tag{5.7}$$

где $v(x, y; x_0, y_0)$ — *регулярное решение уравнения* (5.1) *везде внутри* D^+.

Для области D_0^+, ограниченной отрезком [0, 1] оси x и нормальной кривой $C_{1/2}$:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = \frac{1}{4}, \tag{5.8}$$

функция Грина задачи N выписывается в явном виде:

$$G_0(x, y; x_0, y_0) = \\ = q_1(x, y; x_0, y_0) - (4R_0^2)^{-\beta} q_1\left(x - \frac{1}{2}, y; \bar{x}_0, \bar{y}_0\right), \tag{5.9}$$

где

$$\bar{x}_0 = \frac{x_0 - \frac{1}{2}}{4R_0^2}, \qquad \bar{y}_0^{\frac{m+2}{2}} = \frac{y_0^{\frac{m+2}{2}}}{4R_0^2},$$

$$R_0^2 = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}.$$

В случае, когда кривая Γ не совпадает с нормальной кривой $C_{1/2}$, функция Грина задачи N может быть представлена в виде [56ж]

$$G(x, y; x_0, y_0) = G_0(x, y; x_0, y_0) + H(x, y; x_0, y_0). \tag{5.10}$$

Здесь

$$H(x, y; x_0, y_0) = \int_0^l \rho(t; x, y)\, G_0(\xi, \eta; x_0, y_0)\, dt, \tag{5.11}$$

$\rho(t; x, y)$ есть решение интегрального уравнения

$$\rho(s, x, y) - 2\int_0^l K(t, s)\,\rho(t, x, y)\, dt = 2A_s[q_1(\xi, \eta; x, y)],$$

где

$$A_s[q_1] = \eta^m \frac{d\eta}{ds}\frac{\partial q_1}{\partial \xi} - \frac{d\xi}{ds}\frac{\partial q_1}{\partial \eta}, \quad (\xi(s),\ \eta(s)) \in \Gamma,$$

$$K(t,\ s) = A_s[q_1(\xi(t),\ \eta(t);\ x(s),\ y(s))].$$

Имеет место следующая (см. [56ж])

Теорема. *Функция*

$$u(x_0,\ y_0) = -\int_0^1 \nu(x)\, G(x,\ 0;\ x_0,\ y_0)\, dx - \\ - \int_0^l \varphi(s)\, A_s[G(\xi,\ \eta,\ x_0,\ y_0)]\, ds \quad (5.12)$$

является решением задачи N.

В случае нормальной области D_0^+ решение задачи N выписывается в виде

$$u(x_0,\ y_0) = -k_1 \int_0^1 \nu(x) \left\{ \left[(x - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y_0^{m+2}\right]^{-\beta} - \right. \\ \left. - \left[(x + x_0 - 2xx_0)^2 + \frac{16\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y_0^{m+2}}{(m+2)^2}\right]^{-\beta} \right\} dx - \\ - \frac{k_1 m}{2}\left(\frac{1}{4} - R_0^2\right) \int_0^l \eta^{-1}\varphi(s)\,(r_1^2)^{-\beta-1} \times \\ \times F(\beta,\ \beta+1,\ 2\beta;\ 1-\sigma)\frac{d\xi}{ds}\, ds. \quad (5.13)$$

Переходя в (5.13) к пределу при $y_0 \to +0$, получим

$$\tau(x_0) = -k_1 \int_0^1 \nu(x)\left[|x - x_0|^{-2\beta} - (x + x_0 - 2xx_0)^{-2\beta}\right] dx - \\ - \frac{k_1 m}{2} x_0(1 - x_0) \int_0^l \eta^{-1}\varphi(s) \times \\ \times \left[(\xi - x_0)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\eta^{m+2}\right]^{-\beta-1} \frac{d\xi}{ds}\, ds,$$

Принимая во внимание уравнение нормальной кривой $C_{1/2}$

$$y = (1-2\beta)^{2\beta-1}\left[x(1-x)\right]^{\frac{1}{2}-\beta}$$

и полагая $\varphi(s) = \varphi_1(x)$, будем иметь

$$\tau(x_0) = \\ = -k_1 \int_0^1 \nu(x)\left[|x - x_0|^{-2\beta} - (x + x_0 - 2xx_0)^{-2\beta}\right] dx + \Phi_2(x_0), \tag{5.14}$$

где

$$\Phi_2(x_0) = \\ = 2k_1\beta(1-2\beta)^{-\beta} x_0(1-x_0)\int_0^1 \varphi_1(x)\frac{\left[x(1-x)\right]^{\beta-\frac{1}{2}}}{\left[x_0^2 + (1-2x_0)x\right]^{\beta+1}}\, dx. \tag{5.15}$$

Формула (5.14) дает второе функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, которое определяется из того условия, что решение $u(x, y)$ уравнения (5.1) в области D^+ должно принимать заданные значения $\varphi(s)$ на нормальной кривой $C_{1/2}$.

§ 6. Теорема существования видоизмененной задачи Трикоми

В этом параграфе мы докажем существование решения видоизмененной задачи Трикоми для случая, когда кривая Γ совпадает с нормальной кривой $C_{1/2}$: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\, y^{m+2} = \frac{1}{4}$.

1. Сведе́ние видоизмененной задачи Трикоми к сингулярному уравнению. В силу результатов §§ 4, 5 и условия (1.3) вопрос о существовании решения видоизмененной задачи Трикоми для уравнения (1.1) эквивалентен вопросу о разрешимости следующей системы:

$$\tau(x) = -\varkappa_3 \int_0^x (x-t)^{-2\beta} \nu(t)\, dt + \Phi_1(x), \tag{6.1}$$

$$\tau(x) = \\ = -k_1 \int_0^1 \left[|t-x|^{-2\beta} - (t+x-2xt)^{-2\beta} \right] \nu(t)\, dt + \Phi_2(x), \tag{6.2}$$

где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ определяются соответственно формулами (4.28) и (5.15).

Исключая из уравнений (6.1) и (6.2) функцию $\tau(x)$ и учитывая, что $\varkappa_3 = 2k_1 \sin \pi\beta$, получим

$$2 \sin \pi\beta \int_0^x (x-t)^{-2\beta} \nu(t)\, dt - \\ - \int_0^1 \left[|t-x|^{-2\beta} - (t+x-2xt)^{-2\beta} \right] \nu(t)\, dt = \frac{1}{k_1} f(x), \tag{6.3}$$

где

$$f(x) = \Phi_1(x) - \Phi_2(x). \tag{6.4}$$

Таким образом, если уравнение (6.3) имеет решение, то имеет решение и система (6.1), (6.2), т. е. видоизмененная задача Трикоми разрешима.

Следуя идее Ф. Трикоми, приведем уравнение (6.3) к сингулярному интегральному уравнению, обратив для этого его вольтерровскую часть. При этом мы будем рассматривать только такие решения $\nu(x)$ уравнения (6.3), которые удовлетворяют условию Гёльдера в интервале $(0, 1)$ и $\nu(x) \in L(0, 1)$.

Заметим, что первое слагаемое в левой части уравнения (6.3) согласно (3.1) можно записать в виде

$$2 \sin \pi\beta \Gamma(1-2\beta)\, D_0^{2\beta-1} \nu(x),$$

Применяя теперь к обеим частям уравнения (6.3) оператор $\Gamma(1+2\beta) D_0^{1-2\beta}$ и принимая во внимание (3.6), (3.3), получим

$$\frac{2\pi\beta}{\cos\pi\beta}\nu(x) - \\ -\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x (x-\zeta)^{2\beta} d\zeta \int_0^1 \left[|t-\zeta|^{-2\beta} - (t+\zeta-2\zeta t)^{-2\beta}\right]\nu(t)\,dt = \\ = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{k_1} D_0^{1-2\beta} f(x).$$

Далее, меняя порядок интегрирования и обозначая

$$I_1(x,\ t) = \int_0^x (x-\zeta)^{2\beta}|t-\zeta|^{-2\beta}\,d\zeta, \tag{6.5}$$

$$I_2(x,\ t) = \int_0^x (x-\zeta)^{2\beta}(t+\zeta-2\zeta t)^{-2\beta}\,d\zeta, \tag{6.6}$$

будем иметь

$$\frac{2\pi}{\cos\pi\beta}\nu(x) - \\ -\frac{d^2}{dx^2}\left[\int_0^1 I_1(x,\ t)\,\nu(t)\,dt - \int_0^1 I_2(x,\ t)\,\nu(t)\,dt\right] = \\ = \frac{\Gamma(1+2\beta)}{k_1} D_0^{1-2\beta} f(x). \tag{6.7}$$

Для выяснения возможности дифференцирования под знаком интеграла в (6.7) изучим первые две частные производные по x от функций $I_1(x,\ t)$ и $I_2(x,\ t)$.

Прежде всего заметим, что вычисление I_2 сводится к вычислению I_1 при помощи формулы

$$I_2(x,\ t) = |1-2t|^{-2\beta} I_1\left(x,\ \frac{t}{2t-1}\right), \tag{6.8}$$

которая легко проверяется. Поэтому достаточно исследовать функцию $I_1(x,\ t)$. Из формулы (6.5) имеем

$$I_1(x,\ t) = \int_0^x \left(\frac{x-\zeta}{t-\zeta}\right)^{2\beta} d\zeta \quad \text{при} \quad t > x \tag{6.9}$$

и

$$I_1(x, t) = \int_0^t \left(\frac{x-\zeta}{t-\zeta}\right)^{2\beta} d\zeta + \int_t^x \left(\frac{x-\zeta}{\zeta-t}\right)^{2\beta} d\zeta =$$

$$= \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta}(x-t) + \int_0^t \left(\frac{x-\zeta}{t-\zeta}\right)^{2\beta} d\zeta \quad \text{при} \quad t < x. \quad (6.10)$$

Выполнив подстановку $\mu = \frac{t-\zeta}{x-\zeta}$, найдем

$$I_1(x, t) = (t-x)\int_{t/x}^{\infty} \frac{\mu^{-2\beta}\,d\mu}{(1-\mu)^2} \quad \text{при} \quad t > x,$$

$$I_1(x, t) = (x-t)\left[\frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta} + \int_0^{t/x} \frac{\mu^{-2\beta}\,d\mu}{(1-\mu)^2}\right] \quad \text{при} \quad t < x$$

или, интегрируя по частям,

$$I_1(x, t) = x^{1+2\beta}t^{-2\beta} + 2\beta(t-x)\int_{t/x}^{\infty} \frac{\mu^{-1-2\beta}}{1-\mu}\,d\mu \quad (t > x),$$

$$I_1(x, t) = x^{1+2\beta}t^{-2\beta} + (x-t)\left[\frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta} + 2\beta\int_0^{t/x} \frac{\mu^{-1-2\beta}}{1-\mu}\,d\mu\right]$$

$$(t < x).$$

Дифференцируя по x, получим

$$\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x} = \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta} - 2\beta\int_{t/x}^{\infty} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} \qquad (t > x), \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x} = \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta} + \left(\frac{t}{x}\right)^{-2\beta} + 2\beta\int_0^{t/x} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} \quad (t < x).$$

$$(6.12)$$

Исследуем поведение $\frac{\partial I_1(x,t)}{\partial x}$ при $t \to x$. Для этого оценим интеграл, входящий в (6.11), при $t \to x$ $(t > x)$, и интеграл, входящий в (6.12), при $t \to x$ $(t < x)$.

Для первого интеграла, считая $t < 2x$, имеем

$$\int_{t/x}^{\infty} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{\mu-1} \leqslant \int_{t/x}^{2} \frac{d\mu}{\mu-1} + \int_{2}^{\infty} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{\mu-1} = O(|\ln|t-x||) + O(1),$$

а для второго, считая $t > x/2$,

$$\int_{0}^{t/x} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} \leqslant \int_{0}^{1/2} \frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} + 2^{1+2\beta} \int_{1/2}^{t/x} \frac{d\mu}{1-\mu} =$$

$$= O(1) + O(|\ln|t-x||).$$

Следовательно, из (6.11) и (6.12) при $0 < x < 1$ имеем оценку

$$\frac{\partial I_1(x,\ t)}{\partial x} = O(|\ln|t-x||). \tag{6.13}$$

Отсюда следует, что при вычислении производных от выражения

$$H(x) = \int_{0}^{1} I_1(x,\ t)\,\nu(t)\,dt \tag{6.14}$$

мы можем один раз дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{dH(x)}{dx} = \int_{0}^{1} \frac{\partial I_1(x,\ t)}{\partial x}\,\nu(t)\,dt.$$

Дифференцируя (6.11) и (6.12) по x, получим

$$\frac{\partial^2 I_1(x,\ t)}{\partial x^2} = \left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta} \frac{2\beta}{t-x}. \tag{6.15}$$

Отсюда видно, что второй раз дифференцировать выражение (6.14) под знаком интеграла уже нельзя.

Рассмотрим выражение

$$j(x,\ \varepsilon) = \int_{0}^{x-\varepsilon} \frac{\partial I_1(x,\ t)}{\partial x}\,\nu(t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^{1} \frac{\partial I_1(x,\ t)}{\partial x}\,\nu(t)\,dt. \tag{6.16}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} j(x, \varepsilon) = \frac{dH}{dx}.$$

Дифференцируя (6.16) по x и учитывая (6.15), получим

$$\frac{dj(x, \varepsilon)}{dx} = 2\beta\left[\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^1\right]\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x} +$$

$$+\nu(x-\varepsilon)\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x-\varepsilon} - \nu(x+\varepsilon)\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon}. \quad (6.17)$$

Вычислим предел разности

$$I = \left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x-\varepsilon} - \left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

В силу (6.11) и (6.12) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I = \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\frac{x-\varepsilon}{x}\right)^{-2\beta} - \left(\frac{x+\varepsilon}{x}\right)^{-2\beta} + \right.$$

$$\left. + 2\beta\left(\int_0^{\frac{x-\varepsilon}{x}}\frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} + \int_{\frac{x+\varepsilon}{x}}^{\infty}\frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi\beta}{\sin 2\pi\beta} + 2\beta\int_0^{\infty}\frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu}. \quad (6.18)$$

Очевидно, стремление к пределу при $\varepsilon\to 0$ равномерно по x, $0 < x < 1$. Интеграл справа понимается в смысле главного значения по Коши.

Нетрудно показать, что

$$\int_0^{\infty}\frac{\mu^{-1-2\beta}\,d\mu}{1-\mu} = -\pi\operatorname{ctg} 2\pi\beta.$$

Поэтому из (6.18) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right]_{t=x-\varepsilon} - \left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon}\right] = 2\pi\beta\operatorname{tg}\pi\beta. \quad (6.19)$$

В правой части равенства (6.17) прибавим и вычтем $\nu(x-\varepsilon)\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon}$. Тогда получим

$$\frac{dj(x, \varepsilon)}{dx}=2\beta\left[\int\limits_0^{x-\varepsilon}+\int\limits_{x+\varepsilon}^1\right]\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}+$$
$$+\left[\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x-\varepsilon}-\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon}\right]\nu(x-\varepsilon)+$$
$$+\left.\frac{\partial I_1(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x+\varepsilon}[\nu(x-\varepsilon)-\nu(x+\varepsilon)].$$

Отсюда в силу (6.19) и (6.13) следует существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{dj(x, \varepsilon)}{dx}=2\beta\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{\nu(t)\,dt}{t-x}+2\pi\beta\operatorname{tg}\beta\nu(x), \quad (6.20)$$

причем стремление к пределу при $\varepsilon\to 0$ равномерное относительно x $(0<x<1)$. Тогда в силу известной теоремы классического анализа существует производная $\frac{d^2H}{dx^2}$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{dj(x, \varepsilon)}{dx}=\frac{d^2H}{dx^2} \qquad (0<x<1). \quad (6.21)$$

Очевидно, из (6.8) и (6.15) имеем

$$\frac{\partial^2 I_2(x, t)}{\partial x^2}=\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\frac{2\beta}{t+x-2tx}. \quad (6.22)$$

Эта производная непрерывна при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $x\neq 0$, $x\neq 1$. Следовательно, второй интеграл, входящий в (6.7), можно дифференцировать под знаком интеграла.

Таким образом, на основании (6.14), (6.20)—(6.22) уравнение (6.7) можно записать в виде

$$\nu(x)-\lambda\int\limits_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\nu(t)\,dt=f_1(x), \quad (6.23)$$

где

$$\lambda = \frac{\cos \pi\beta}{\pi(1 - \sin \pi\beta)}, \tag{6.24}$$

$$f_1(x) = \frac{\Gamma(1+2\beta)\lambda}{2\beta k_1} D_0^{1-2\beta} f(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\beta k_1} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-t)^{2\beta} f(t)\, dt. \tag{6.25}$$

2. Исследование функции $f_1(x)$. Из (6.25) и (6.4) имеем

$$f_1(x) = \frac{\lambda\Gamma(1+2\beta)}{2\beta k_1} \left[D_0^{1-2\beta}\Phi_1(x) - D_0^{1-2\beta}\Phi_2(x) \right]. \tag{6.26}$$

Будем считать, что краевые значения решения задачи (2.1)–(2.3) на характеристике $\xi = 0$, т. е. функция $\psi(\eta)$ имеет вторую производную $\psi''(\eta)$, ограниченную и интегрируемую в (0, 1). Тогда из (4.28) и равенства $\psi(0) = 0$, получим

$$\frac{\lambda\Gamma(1+2\beta)}{2\beta k_1} D_0^{1-2\beta}\Phi_1(x) = \frac{\lambda\Gamma(1+2\beta)}{k_1\beta} x^\beta D_0^{1-\beta}\psi(x) =$$

$$= \frac{\lambda}{k_1\beta} x^\beta \frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (x-t)^\beta \psi(t)\, dt =$$

$$= \frac{\lambda}{k_1\beta} \left[\psi'(0) x^{2\beta} + x^\beta \int_0^x (x-t)^\beta \psi''(t)\, dt \right]. \tag{6.27}$$

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого в формуле (6.26). Его исследование сводится к изучению производных функции $\Phi_2(x)$. От краевых значений $\varphi_1(x)$ решения на нормальной кривой $C_{1/2}$ потребуем, чтобы $\varphi_1(x)$ можно было представить в виде

$$\varphi_1(x) = y^{1+\gamma}\bar{\varphi}(x), \tag{6.28}$$

где $\gamma > 0$, а $\bar{\varphi}(x) \in C[0, 1]$.

Если эти краевые условия заданы в виде непрерывной функции $\varphi^*(s)$ длины дуги s кривой $C_{1/2}$, то можно получить представление (6.28), потребовав:

1) чтобы в окрестности точек A и B $\varphi^*(s)$ имела непрерывную вплоть до этих точек производную $\varphi^{*\prime}(s)$; без ограничения общности можно считать, что

$$\varphi^*(0) = \varphi^*(l) = \varphi^{*\prime}(0) = \varphi^{*\prime}(l) = 0;$$

2) чтобы в окрестности точек A и B существовали конечные пределы

$$\lim_{s\to 0}\frac{\varphi^{*\prime}(s)}{s^{\gamma}}\quad \text{(в точке } B) \quad\text{и}\quad \lim_{s\to 0}\frac{\varphi^{*\prime}(s)}{(l-s)^{\gamma}}\quad \text{(в точке } A).$$

Подставив (6.28) в (5.15) и учитывая уравнение нормальной кривой $C_{1/2}$, получим

$$\Phi_2(x) = k_2 x(1-x)\int_0^1 \frac{[t(1-t)]^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\bar{\varphi}(t)\,dt}{[x^2+(1-2x)t]^{1+\beta}}, \tag{6.29}$$

где

$$k_2 = 2\beta k_1(1-2\beta)^{-1+(2\beta-1)\gamma}.$$

Отсюда видно, что $\Phi_2(x)$ имеет производные любого порядка внутри интервала (0, 1). Выясним поведение функции $\Phi_2(x)$ и ее производных $\Phi_2'(x)$, $\Phi_2''(x)$ при $x\to 0$ и $x\to 1$. Заметим, что если в правой части (6.29) заменить x на $(1-x)$ и t на $(1-t)$, то все выражение не изменится, за исключением того, что аргументом $\bar{\varphi}$ вместо t будет $1-t$. Это показывает, что поведение функции $\Phi_2(x)$ вблизи точек $x=0$ и $x=1$ одинаково. Следовательно, достаточно ограничиться рассмотрением пределов функции $\Phi_2(x)$ и ее производных при $x\to 0$.

После этого замечания продифференцируем последовательно два раза (6.29) по x и положим для краткости

$$H_{kl} = k_2\int_0^1 \bar{\varphi}(t)\,t^{k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}(1-t)^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\times$$

$$\times[x^2+(1-2x)t]^{-(l+1+\beta)}\,dt. \tag{6.30}$$

Тогда (6.29) и полученные формулы можем записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\Phi_2(x) &= x(1-x)H_{00},\\
\Phi_2'(x) &= (1-2x)H_{00} - 2(1+\beta)x^2(1-x)H_{01} + \\
&\qquad + 2(1+\beta)x(1-x)H_{11}, \qquad (6.31)\\
\Phi_2''(x) &= -2H_{00} - 2(1+\beta)(3-5x)H_{01} + \\
&+ 4(1+\beta)(1-2x)H_{11} + 4(1+\beta)(2+\beta)x^3(1-x)H_{02} - \\
&\qquad - 8(1+\beta)(2+\beta)x^2(1-x)H_{12} + \\
&\qquad\qquad + 4(1+\beta)(2+\beta)x(1-x)H_{22}.
\end{aligned}
$$

Ядро подынтегрального выражения (6.30) положительно в промежутке интегрирования. Применяя теорему о среднем, получим

$$
H_{kl} = k_2\bar{\varphi}(\xi_{kl})x^{-2(l+1+\beta)}\int_0^1 t^{k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)} \times
$$
$$
\times (1-t)^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\left(1-\frac{2x-1}{x^2}t\right)^{-(l+1+\beta)} dt,
$$

где $0<\xi_{kl}<1$.

Но интеграл, входящий в последнюю формулу, гипергеометрический, поэтому имеем

$$
H_{kl} = k_2\bar{\varphi}(\xi_{kl})x^{-2(l+\beta+1)}\frac{\Gamma\left(k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1\right)\Gamma\left(\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1\right)}{\Gamma(k+\gamma(1-2\beta)+2)}\times
$$
$$
\times F\left(l+1+\beta,\ k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1,\ k+\gamma(1-2\beta)+2;\ \frac{2x-1}{x^2}\right).
$$

Далее, используя функциональное соотношение между гипергеометрическими функциями с аргументами z и

$\left.\frac{1}{1-z}\,{}^{*}\right)$, получим

$$H_{kl}=k_2\bar{\varphi}(\xi_{kl})\left[\frac{\Gamma\left(\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1\right)\Gamma\left(k-l-(1+\gamma)\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(k-l+1+\gamma-(1+2\gamma)\beta)}(1-x)^{-2(l+1+\beta)}\times\right.$$

$$\times F\left(l+1+\beta,\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\gamma+1,\ l-k+1+(1+\gamma)\beta-\frac{\gamma}{2},\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{\Gamma\left(k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1\right)\Gamma\left(l-k+(1+\gamma)\beta-\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma(l+1+\beta)}\times$$

$$\times x^{2(k-l)-2\beta(1+\gamma)+\gamma}(1-x)^{-2\left(k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1\right)}\times$$

$$\left.\times F\left(k-l+\gamma+1-\beta(1+2\gamma),\ k+\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)+1,\ k-l+1+\frac{\gamma}{2}-(1+\gamma)\beta,\left(\frac{x}{1-x}\right)^2\right)\right].$$

Отсюда при малых x имеем следующие оценки:

$$H_{00}=O(1),\quad H_{11}=O(1),\quad H_{22}=O(1)$$

(так как $\gamma-2\beta(1+\gamma)>0$ при $\gamma>0$),

$$H_{01}=O\left(x^{\gamma-2-2\beta(1+\gamma)}\right),\qquad H_{02}=O\left(x^{\gamma-4-2\beta(1+\gamma)}\right),$$
$$H_{12}=O\left(x^{\gamma-2-2\beta(1+\gamma)}\right).$$

Подставляя эти оценки в (6.31), получим

$$\Phi_2(x)=O(x),\quad \Phi_2'(x)=O(1),\quad \Phi_2''(x)=O\left(x^{\gamma-1-2\beta(1+\gamma)}\right). \tag{6.32}$$

Если мы теперь определим γ из условия

$$\gamma-1-2\beta(1+\gamma)\geqslant 0, \tag{6.33}$$

т. е.

$$\gamma\geqslant\frac{1+2\beta}{1-2\beta}=1+m\qquad(-1<m<0),$$

то и для $\Phi_2''(x)$ будем иметь оценку

$$\Phi_2''(x)=O(1) \tag{6.34}$$

при $x\to 0$.

Таким образом, $\Phi_2'(x)$ и $\Phi_2''(x)$ при $x\to 0$ или $x\to 1$ стремятся к конечным пределам, если краевые данные на нормальной кривой $C_{1/2}$ удовлетворяют условиям (6.28) и (6.33).

---

*) См. сноску на стр. 101.

Заметим, что из (6.32) следует $\Phi_2(0)=0$. Поэтому из (6.26) и (6.27) получим для свободного члена $f_1(x)$ следующее выражение:

$$f_1(x)=\frac{\lambda}{k_1\beta}\left\{\left[\psi'(0)-\frac{1}{2}\Phi_2'(0)\right]x^{2\beta}+\right.$$
$$\left.+x^{\beta}\int_0^x (x-t)^{\beta}\psi''(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^{2\beta}\Phi_2''(t)\,dt\right\}. \quad (6.35)$$

Отметим, что в силу ограничений, наложенных на $\psi(x)$, и из (6.34) имеем для интегралов, входящих в (6.35), оценку

$$x^{\beta}\int_0^x (x-t)^{\beta}\psi''(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^{2\beta}\Phi_2''(t)\,dt=O\left(x^{1+2\beta}\right).$$

Пусть краевые данные на $C_{1/2}$ и характеристике AC таковы, что выполняется условие

$$\psi'(0)-\frac{1}{2}\Phi_2'(0)=$$
$$=\psi'(0)-\frac{k_2}{2}\int_0^1 \bar{\varphi}(t)\,t^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)-(1+\beta)}(1-t)^{\gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}\,dt=0. \quad (6.36)$$

Тогда

$$f_1(x)=O\left(x^{1+2\beta}\right), \quad \text{т. е.} \quad f_1(0)=0,$$

и из (6.35) следует, что $f_1(x)\in C[0,1]$. Более того, в силу теоремы Харди—Литтлвуда (см. [68]) $f_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1+2\beta$ на $[0,1]$. В случае невыполнения условия (6.36) из (6.35) следует (по той же теореме), что $f_1(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1+2\beta$ на $(0,1]$ и

$$f_1(x)=O\left(x^{2\beta}\right). \quad (6.37)$$

3. Решение сингулярного уравнения (6.23). Полагая

$$x^{1-2\beta}\nu(x)=\rho(x), \qquad x^{1-2\beta}f_1(x)=g(x), \quad (6.38)$$

приведем уравнение (6.23) к виду

$$\rho(x)-\lambda\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)\rho(t)\,dt=g(x), \tag{6.39}$$

где

$$g(x)=\frac{\lambda}{k_1\beta}\left\{\left[\psi'(0)-\frac{1}{2}\Phi_2'(0)\right]x+\right.$$

$$\left.+x^{1-\beta}\int_0^x(x-t)^{\beta}\psi''(t)\,dt-\frac{x^{1-2\beta}}{2}\int_0^x(x-t)^{2\beta}\Phi_2''(t)\,dt\right\}, \tag{6.40}$$

причем $g(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1+2\beta$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$.

Решение $\rho(x)$ уравнения (6.39) будем искать в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям:

а) на всяком отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, где $0<a<b<1$, $\rho(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера;

б) произведения $\rho(x)\ln x$ и $\rho(x)\ln(1-x)$ суммируемы на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$.

Согласно результату С. Г. Михлина *) решение уравнения (6.39) дается формулой

$$\rho(x)=$$

$$=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left\{g(x)+\lambda\int_0^1\left[\frac{(1-x)\,t}{x\,(1-t)}\right]^{2\theta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)g(t)\,dt\right\}+$$

$$+\frac{A}{x^{1+2\theta}\,(1-x)^{-2\theta}}, \tag{6.41}$$

где

$$\theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda\pi,\qquad -\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2},$$

и A — произвольная постоянная.

Заменив λ его значением по формуле (6.24), получим

$$\theta=\frac{1}{2}\left(\beta+\frac{1}{2}\right). \tag{6.42}$$

Отсюда $0<2\theta<{}^1\!/_2$ при $-{}^1\!/_2<\beta<0$.

---

*) См ДАН СССР **59**, 1948, 1053—1056.

Подставляя (6.42) в (6.41) и возвращаясь к функциям $\nu(x)$ и $f_1(x)$, получим решение уравнения (6.23):

$$\nu(x)=\frac{1}{2}(1-\sin\pi\beta)\left[f_1(x)+\right.$$
$$\left.+\lambda\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{3}{2}-\beta}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f_1(t)\,dt\right]+$$
$$+Ax^{\beta-\frac{5}{2}}(1-x)^{\beta+\frac{1}{2}}. \qquad (6.43)$$

Исследуем поведение функции $\nu(x)$, определяемой формулой (6.43), при $x\to0$.

Положим

$$\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{3}{2}-\beta}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f_1(t)\,dt=$$
$$=x^{2\beta}I(x), \qquad (6.44)$$

где

$$I(x)=\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{3}{2}+\beta}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f_2(t)\,dt,$$
$$f_2(x)=x^{-2\beta}f_1(x). \qquad (6.45)$$

Из (6.35) следует, что $f_2(x)\in C[0,1]$. После замены

$$\frac{x(1-t)}{t(1-x)}=\mu, \qquad t=\frac{x}{x+(1-x)\mu},$$

получим

$$I(x)=\int_0^\infty f_2\left(\frac{x}{x+(1-x)\mu}\right)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}2\mu\,d\mu}{[x+(1-x)\mu]^2(1-\mu^2)}.$$

Используя разложение дроби $\frac{2\mu}{[x+(1-x)\mu]^2(1-\mu^2)}$ на элементарные относительно переменной μ, будем иметь

$$I(x)=$$
$$=\int_0^\infty f_2\left(\frac{x}{x+(1-x)\mu}\right)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{1-\mu}-\frac{1}{(2x-1)^2}\int_0^\infty f_2(t)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{1+\mu}+$$
$$+\frac{2(1-x)(2x^2-2x+1)}{(2x-1)^2}\int_0^\infty f_2(t)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{x+(1-x)\mu}+$$
$$+\frac{2x(1-x)}{2x-1}\int_0^\infty f_2(t)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{[x+(1-x)\mu]^2}.$$

В двух последних интегралах возвратимся к старой переменной интегрирования t. Тогда

$$I(x)=\int_0^\infty f_2(t)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{1-\mu}-\frac{1}{(2x-1)^2}\int_0^\infty f_2(t)\frac{\mu^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}d\mu}{1+\mu}+$$
$$+\frac{2(2x^2-2x+1)}{(2x-1)^2}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\int_0^1\frac{f_2(t)\,dt}{t^{\frac{1}{2}-\beta}(1-t)^{\frac{1}{2}+\beta}}+$$
$$+\frac{2x^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}(1-x)^{\frac{1}{2}+\beta}}{2x-1}\int_0^1\frac{f_2(t)\,t^{\frac{1}{2}+\beta}\,dt}{(1-t)^{\frac{1}{2}+\beta}}. \tag{6.46}$$

Так как $-{}^1/_2<\beta<0$, то все интегралы в (6.46) существуют, причем первый интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Из (6.46), очевидно, имеем оценку

$$I(x)=O\left(x^{-\left(\frac{1}{2}+\beta\right)}\right)$$

при $x\to 0$, и в силу (6.44) интеграл, входящий в формулу (6.43), имеет оценку $O\left(x^{\beta-\frac{1}{2}}\right)$ при $x\to 0$. Отсюда, принимая во внимание (6.37), заключаем, что в формуле (6.43) мы должны положить $A=0$. Тогда $\nu(x)$ будет иметь оценку $O(x^{2\beta})$ при $x\to 0$. Итак, окончательно находим

$$\nu(x)=\frac{1-\sin\pi\beta}{2}\left[f_1(x)+\lambda\int_0^1\left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{3}{2}-\beta}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{t+x-2xt}\right)f_1(t)\,dt\right]. \qquad (6.47)$$

Из формул (6.47), (6.46), (6.44) и (6.35) легко следует, что $\nu(x)=O(1)$ при $x\to 1$. Таким образом, $\nu(x)$ непрерывна и интегрируема в интервале (0, 1).

Подставив (6.47) в (6.1), мы найдем $\tau(x)$. Из (4.27) и (4.28) следует, что $\tau(x)$ представима в виде (4.8), где

$$T(t)=\varkappa_3\nu(t)+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}t^\beta D_0^{1-\beta}\psi(t).$$

Легко видеть, что функция $T(t)$ непрерывна и интегрируема в (0, 1). Зная $\tau(x)$ и $\nu(x)$, по формулам (5.13) и (4.7) получим решение $u(x, y)$ соответственно в областях D^+ и D^-, причем в области D^- $u(x, y)$ — обобщенное решение из класса R_2. Таким образом, существование решения видоизмененной задачи Трикоми доказано для уравнения (1.1) в случае нормальной области. Единственность полученного решения непосредственно следует из единственности решения сингулярного уравнения (6.23) в указанном выше классе функций и из единственности задачи N и задачи Коши для уравнения (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1 Абуталиев Ф Б
а) Теорема единственности для некоторых газодинамических проблем, Изв АН УзССР, Сер физ-матем **1**, 1961, 12—21
б) К численному решению уравнений смешанного типа, Докл. АН УзССР **7**, 1961, 3—5

2 Агмон (Agmon S)
а) The fundamental solution and Tricomi's problem for a class of equations of mixed type, Proc. Internat Cong Math Amsterdam **II**, 1954
б) Boundary value problems for equations of mixed type. Convegno Internazionale sulle equationi lineari alle derivate parziali, Triest, 1954, 54—68, Edizioni Gremonese, Roma, 1955

3 Агмон, Ниренберг, Проттер (Agmon S, Nirenberg L., Protter M H)
A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type, Communs Pure and Appl Math **VI**, 4, 1953, 455—470

4 Бабенко К И
а) К теории уравнений смешанного типа, Докт. дисс (библиотека Матем ин-та АН СССР, 1952)
б) К теории уравнений смешанного типа. УМН **VIII**, 2 (54), 1953, 160
в) О сопряженных функциях, ДАН СССР **62**, 2, 1948

5 Бакиевич Н И
а) Некоторые краевые задачи уравнений смешанного типа в полосе и полуплоскости, ДАН СССР **112**, 5, 1957
б) Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа, возникающие при изучении бесконечно малых изгибаний поверхностей вращения, УМН **XV**, 1 (91), 1960, 171—176
в) Об одном уравнении смешанного типа в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, Волжский матем. сб **1**, 1963, 32—41
г) Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^{\alpha} u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \mu^2\eta^{\alpha}u=0$, Волжский матем сб **1**, 1963, 42—51
д) Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $\eta^{\alpha} u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \mu^2\eta^{\alpha}u=0$. Изв высш учебн зав, Математика 2, 1964

6 Баранцев Р Г
Лекции по трансзвуковой газодинамике, Изд-во ЛГУ, 1965.

7 Бергман (Bergmann S)
On solutions of linear partial differential equations of mixed type, Amer J Math. **74,** 1952, 444—474.

8 Березанский Ю М
а) Энергетические неравенства для некоторых классов уравнений смешанного типа, ДАН СССР **132,** 1, 1960, 9—12.
б) Существование слабых решений некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа, Укр. матем ж **15, 4,** 1963, 347—364
в) Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», 1965

9 Берс Л
Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, 1961

10 Бицадзе А В
а) О некоторых задачах смешанного типа, ДАН СССР **70, 4,** 1950, 561—565
б) О единственности решения общей граничной задачи для уравнения смешанного типа, Сообщ. АН ГрузССР **XI,** 4, 1950
в) К общей задаче смешанного типа, ДАН СССР **78,** 4, 1951, 621—624.
г) К проблеме уравнений смешанного типа. Тр Матем ин-та АН СССР **61,** 1953
д) Об одной задаче Франкля, ДАН СССР **109,** 6, 1956
е) К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, ДАН СССР **110,** 6, 1956
ж) О единственности решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина, ДАН СССР **112,** 3, 1957
з) Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях, ДАН СССР **122,** 2, 1958
и) Уравнения смешанного типа, Изд-во АН СССР, 1959
к) Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях, ДАН СССР **143,** 5, 1962, 1017—1019

11 Вайнбергер (Weinberger H)
Sur les solutions fortes du problème de Tricomi, Compt. rend. Acad Sci. Paris **238,** 1954, 1961—1962

12 Ван Гуан-инь (Wuang Kuang-Jing)
Sur l'unicité du problème de Tricomi de l'équation de Chapligin, Acta Math sinica **5,** 4, 1955. 455—461; **7,** 5 1957, 590—630.

13 Вахания Н. Н
Об одной особой задаче для уравнения смешанного типа, Тр ВЦ АН ГрузССР **III,** 1963, 79—80.

14 Векуа И. Н.
Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, 1959.

15 Волков Е А
К численному решению задачи Лаврентьева — Бицадзе, ДАН СССР **103,** 5, 1955

16. Волкодавов В Ф.
а) Единственность решения задачи T для общего уравнения Трикоми. Тр первой научн конф матем каф пед ин-тов Поволжья, 1961, 45—49
б) Решение задачи N для общего уравнения Трикоми, Тр первой научн конф. матем каф пед ин-тов Поволжья, 1961, 49—52.
в) Решение задачи Коши — Гурса для уравнения общего вида типа Трикоми, Тр второй научн конф матем каф пед ин-тов Поволжья 1, 1962, 25—27
г) О решении задачи T для уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=M_0(x, y)$, Волжский матем. сб 2, 1964, 25—30

17. Вострова Л. Е
а) Смешанная краевая задача для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} yu_{yy}-u=0$, Уч зап Куйб гос пед ин-та **21**, 1958, 219—267
б) Смешанная краевая задача для общего уравнения Лаврентьева — Бицадзе, Уч зап. Куйб гос пед ин та **29**, 1959, 45—66
в) Непрерывность решения задачи T_3 для уравнения $u_{xx}+\operatorname{sgn} yu_{yy}-u=0$, Тр первой научн. конф матем каф. пед. ин-тов Поволжья. 1961, 53—59

18 Геллерстедт (Gellerstedt S)
а) Sur un problème aux limites pour une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de tipe mixte, Thésis, Uppsala, 1935
б) Sur une équation linéaire aux dérivées partielles de type mixte, Arkiv Mat. Astr och Fysik **29**, 1937, B 25A
в) Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$, Arkiv Mat, Astr. och Fysik **3**, 1938, B 26A

19 Гудерлей (Guderley G)
On the development of solutions of Tricomi's differential equation in the vicinity of the origin, J. Rat, Mech, Anal **5**, 5, 1956, 747—789

20 Девингталь Ю В
а) О существовании решения одной задачи Ф И Франкля, ДАН СССР **119**, 1, 1958, 15—18
б) О существовании и единственности решения одной задачи Ф И Франкля, Изв вузов, Математика **2** (3), 1958, 39—51
в) К вопросу о существовании и единственности решения задачи Франкля, УМН **XIV**, 1 (85), 1959, 177—182

21. Диденко В П
а) О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа, ДАН СССР **114**, 4, 1962
б) О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно составного типа, Дифф уравнения **II**, **1**, 1966, 33—36.

22 Дин Ся-си (Ding S S)
Differential equations of mixed type, Acta Math. sinica **5, 2,** 1955, 193—204

23 Жегалов В И
а) Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка, Изв вузов, Математика **4** (17), 1960, 73—78
б) Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка, ДАН СССР **136,** 2, 1961, 274—276
в) Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии, Уч зап Казанск ун-та **122,** 3, 1962, 3—16.
г) Некоторые краевые задачи для системы уравнений смешанного типа второго порядка, Уч зап Казанск ун-та **122,** 3, 1962, 17—19

24 Жермен, Баде (Germain P, Bader R)
а) Application de la solulion fondamentale à certains problèms relatifs à l'équation de Tricomi, Compt Rend Acad Sci Paris **231,** 1950. 1203
б) Sur le problème de Tricomi, Compt Rend. Acad Sci Paris **232,** 1951, 463
в) Solution élémentaires des équations réqissant les écoulement des fluides compressibles, Compt Rend Acad Sci Paris **234,** 1952, 1248.
г) Sur quelques problèms relatifs à l'equation du type mixte de Tricomi, Publ O. N E R A **54,** 1952, 1—57.
д) Sur le problème de Tricomi, Rend Circolo mat Palermo **2,** 1, 1953, 53—70.
е) Problèmes elliptiques et hyperboliques singuliers pour une equation du type mixte, Publ O N E R A **60,** 1953
ж) Solutions élémentaires de certaines équations aux derivées partielles du type mixte, Bull Soc. Math France **81,** 2 1953, 145—174

25 Жермен (P Germain)
а) Recherche sur une équation du type mixte, Rech aéronaut **22,** 1951, 7—20
б) Remarks on the theory of partial differential equation of mixed type and applications to the study of transonic flow, Communs Pure and Appl Math **7,** 1, 1954, 117—143.
в) Remarques sur les propriétes qualitatives des caractéristiques les équations aux dérivées partielles du type mixte, Mém. Acad roy Belgiqe Cl sci **28,** 6, 1954, 28—36
г) New applications of Tricomi solutions to transonic flow, Proc., second u s National Congress of Applied Mech, Ann, Arbor 1954, 659—666
д) Maximum theorems and reflection of simple waves, NACA Technical Report 1955, No 3299
е) Remarks on transforms and boundary value problems, J. Rational Mech and Analysis **4,** 6, 1955, 925—943.

ж) An expression for Green's function for a particular Tricomi problem $T(u) = zu_{xx} + u_{zz} = 0$, Quart Appl. Math. **XIV**, 2, 1956, 113—125

26 Зигмунд А
Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939

27 Капилевич М Б
а) Об одном уравнении смешанного эллиптико гиперболического типа, Матем сб **30**, 72, 1952, 11—38
б) К теории линейных дифференциальных уравнений с двумя перпендикулярными линиями параболичности, ДАН СССР **125**, 2, 1959, 251—254
в) Уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, «Линейные уравнения математической физики» под ред С Г Михлина, «Наука», 1964, 258—291

28 Карамышев Ф И
Краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, Сиб матем. журн **II**, 4, 1961, 537—546.

29 Каратопраклиев Г
Об одном обобщении задачи Трикоми, ДАН СССР **158**, 2, 1964, 271—274.

30 Карманов В Г.
а) О краевой задаче для уравнения смешанного типа, ДАН СССР **95**, 3, 1954, 439—442
б) О существовании решений некоторых краевых задач для уравнения смешанного типа, Изв АН СССР, Сер матем. **22**, 1, 1958, 117—134

31 Кароль И Л
а) Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, ДАН СССР 88, 2, 1953, 197—200
б) К теории уравнений смешанного типа, ДАН СССР **88**, 3, 1953, 397—400.
в) Краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, ДАН СССР **101**, 5, 1955, 793—796
г) О краевых задачах для уравнения смешанного типа, Вести ЛГУ, Сер матем, мех. и астр **1**, 1, 1955, 177—181.
д) К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, Матем сб **38** (80), 3, 1956, 261—283

32 Клоков В В
Решение обобщенной ударной задачи Ф И Франкля методом интегральных уравнений, Тр Семинара по обратным краевым задачам, Казань, 1964, 42—71

33 Коваленко Л И
а) Разностный метод и единственность обобщенного решения для задачи Трикоми, ДАН СССР **162**, 4, 1965, 751—754

б) Обобщенное решение задачи Трикоми, ДАН СССР **162**, 5, 1965, 988—991

34 Коган М Н
О магнитогидродинамических течениях смешанного типа, Прикл матем и мех 25, 1, 1961, 132—137

35. Кол (J Cole)
Note on the fundamental solution of $wy_{vv}+y_{ww}=0$, Z angew Math. und Phys **3**, 1952, 286—297.

36 Крикунов Ю. М
Задача Трикоми с производными в краевом условии, Уч зап Казанск ун-та **123**, 9, 1964, 106—113

37 Лаврентьев М А и Бицадзе А. В
К проблеме уравнений смешанного типа, ДАН СССР **70**, 3, 1950, 373—376

38 Ладыженская О А.
Об одном методе приближенного решения задачи Лаврентьева — Бицадзе, УМН **9**, 4, 1954, 187—189

39 Лакс, Филлипс (Lax P D, Phillips R S)
Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Communs Pure and Appl. Math. **13**, 3, 1960, 427—455

40 Ланскау (Lanckau E)
Eine einheitliche Darstellung der Lösungen der Tricomischen Gleichung, Z. angew. Math. und Mech **42**, 4—5, 1962, 180—186

41 Лемешинская О М
Исследование краевых задач для уравнения Трикоми методом теории аналитических функций, Изв вузов, Математика **2** (45), 1965, 91—97.

42 Линь Цзянь-бин
О некоторых задачах Франкля, Вестн ЛГУ, Сер матем, мех. и астр **3**, 13, 1961, 28—39

43 Майоров И В.
а) К вопросу о принципе максимума и его следствиях для уравнений смешанного типа, Волжский матем сб, теор сер **1**, 1963, 145—155
б) О принципе экстремума для одной задачи Франкля, Сиб матем журн **VII**, 5, 1966, 1068—1075

44. Мелентьев Б В
а) О теоремах единственности решения некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа, ДАН СССР **143**, 1, 1962, 38—41.
б) О теореме существования решения граничной задачи для уравнения смешанного типа, ДАН СССР **142**, 6, 1962, 1251—1254
в) Об одной граничной задаче для уравнения смешанного типа, ДАН СССР **154**, 6, 1964, 1662—1665.

45. Михайлов В Н
Об обобщенной задаче Трикоми, ДАН СССР **175**, 5 (1967), 1012—1014

46. Моравец (Morawetz C S)
а) A uniqueness theorem for the Frankl problem, Communs Pure and Appl. Math **7**, 4, 1954, 697—703
б) Note on a maximum principle and a uniqueness theorem for on ellipt.c-hyperbolic equation, Proc Roy Soc **236**, 1024, 1956, 141—144
в) Uniqueness for the anologue of the Neumann problem for mixed equations, Michigan Math J **4**, 1, 1957, 5—14.
г) On the non existence of continuos transonic flow past profiles, Communs Pure and Appl Math., Part I, **9**, 1956, 45—68, Part II, **10**, 1957, 107—131; Part III, **11**, 1958, 129—144.
д) A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbotic type, Communs Pure and Appl Math. **XI**, 3, 1958, 315—331.

47 Нахушев А М.
Об одной задаче смешанного типа для уравнения $y(y-1)u_{xx}+$ $+u_{yy}=0$, ДАН СССР **166**, 3, 1966.

48 Нипше (Nitsche J)
On solutions of differential equations of mixed type, Bull A M. S **62**, 3, 1956

49 Оболашвили Б И
Эффективное решение задачи Римана — Гильберта для одной системы уравнений смешанного типа с применением к теории оболочек, Сообщ АН ГрузССР **36**, 1, 1964, 33—39

50 Овсянников Л В
О задаче Трикоми в одном классе обобщенных решений уравнения Эйлера — Дарбу, ДАН СССР **91**, 3, 1953.

51 Огава (Ogawa Hajimi)
On difference methods for the solution of a Tricomi, Trans Amer. Math Soc **100**, 1961, 404—424.

52 Петрушко И М
О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения

$$u_{xx}+yu_{yy}+\alpha(x, y)u_y+\beta(x, y)u_x+\gamma(x, y)u=f(x, y)$$

в смешанной области, Дифф уравнения **IV**, 1, 1968, 123—135

53. Проттер (Protter M H.)
а) A boundary value problem for an equation of mixed type, Trans Amer Math Soc. **71**, 1951, 416—429
б) Uniqueness theorems for the Tricomi problem, J Rational Mech. and Analysis, Part **I**, **2**, **1**, 1953, 107—114, Part II, **4**, 5, 1955, 721—733.

в) New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type, J Rational Mech and Analysis **3**, 4, 1954, 435—446
г) An existence theorem for the generalized Tricomi problem, Duke Math J **21**, 1, 1954, 1—8
д) On partiel differential equations of mixed type, Proc. Conf on differ equations University of Maryland book store College Park, 1956, 91—106

54. Пулькин С П
а) К вопросу о постановке задачи Трикоми в пространстве, Уч зап Куйб гос пед ин та **14**, 1956, 63—77
б) Задача Трикоми для обобщенного уравнения Лаврентьева — Бицадзе, ДАН СССР **118**, 1, 1958, 38—41
в) К вопросу о решении задачи Трикоми для уравнения типа Чаплыгина, Изв вузов, Математика **2**, 3, 1958
г) Некоторые краевые задачи для уравнения $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$, Уч зап. Куйб пед. ин-та **21**, 1958, 3—54.

55. Смирнов В И
Курс высшей математики, т V, Физматгиз 1959

56 Смирнов М М
а) Обобщенное уравнение Трикоми, Уч. зап Белорусск гос. ун-та, Сер физ-матем наук **12**, 1951, 3—9.
б) Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, Вестн ЛГУ, Сер матем, мех и астр **1**, 1, 1957, 80—96
в) Задача Дирихле для одного уравнения смешанного типа, Вестн ЛГУ, Сер. матем., мех. и астр. **1**, 1, 1959, 130—133
г) О единственности решения краевой задачи для уравнения смешанного типа, Докл АН БССР **IV**, 4, 1960, 140—143
д) Смешанная краевая задача для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} = 0$, Сибирск матем журн **IV**, 5, 1963, 1150—1161.
е) Некоторые краевые задачи для одного уравнения смешанного составного типа, Сибирск. матем журн **V**, 4, 1964, 949—954
ж) Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», 1966

57 Сорокина Н Г
О сильной разрешимости задачи Трикоми Укр матем журн **18**, 6, 1966, 65—77

58 Тонг Щан-чан (Tong Kwong-Chong)
Uniqueness theorem for Chaplygin's problem, Acta Math. sinica **6**, 2, 1956, 242—249, 250—262, **9**, 4, 1959, 365—381.

59 Трикоми Ф
а) О линейных уравнениях смешанного типа, Гостехиздат, 1947
б) Ulteriori richerche sull'equazione $yz_{xx} + z_{yy} = 0$, Rend Circolo Math Palermo **52**, 1928, 63—90.

в) Ancora sull'equazione $yz_{xx}+z_{yy}=0$, Rend Acc Lincei **VI**, 6, 1927.

60 У Син мо, Дин Ся-си (Ou S M, Ding S S)
Sur l'unicite du problème de Tricomi de l'équation de Chaplygin, Acta Math sinica **5**, 3, 1955, 393—399

61 У Цзи-цянь
Дифференциальные уравнения смешанного типа, Вестн ун-та им Сунь Ят сена, Сер естеств наук **4**, 1959, 11—32

62 Филиппов А Ф
О разностном методе решения задачи Трикоми, Изв АН СССР, Сер матем, **21**, 1, 1957, 73—88

63 Флайшер Н М
а) Краевые задачи для уравнений смешанного типа в случае неограниченных областей, Revue Roumaine de Math pures et Appl **X**, 5, 1965, 607—613
б) Об одной задаче Франкля для уравнения Лаврентьева в случае неограниченной области, Изв вузов, Математика **6** (55), 1966
в) Задача Франкля для полуплоскости, Revue Roumaine de Math pures et Appl **XI**, 2, 1966

64 Франкль Ф И
а) О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Изв АН СССР, Сер матем **9**, 2, 1945, 121—142
б) Два газодинамических приложения краевой задачи Лаврентьева — Бицадзе, Вестн ЛГУ, Сер матем, мех. и астр **6**, 11, 1951, 3—7
в) Об одной краевой задаче для уравнения $yz_{xx}+z_{yy}=0$, Уч. зап МГУ **152**, III, 1951, 99—116
г) О боковом водозаборе из быстрых мелких рек. Тр. Кирг. гос. ун-та **2**, 1953, 33—45
д) Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, Прикл матем. и мех **20**, 2, 1956, 196—202
е) Теорема единственности решения одной краевой задачи для уравнения

$$u_{xx}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{y}\right)=0,$$

Изв вузов, Математика **1** (8), 1959, 212—217.
ж) Теорема существования слабого решения прямой задачи теории плоскопараллельного сопла Лаваля в первом приближении, Изв вузов, Математика **6**, 13, 1959, 192—201
з) О прямой задаче теории сопла Лаваля, Уч зап Кабардино-Балкарского гос. ун-та **3**, 1959, 35—60
и) Обобщение задачи Трикоми и применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля, Уч. зап. Кабардино-Балкарского гос ун-та **3**, 1959, 79—93.

к) Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля, Матем сб. **54**, 2, 1961, 225—236

л) О задаче Коши для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа с начальными данными на переходной линии, Изв АН СССР, Сер матем **8**, 5, 1944, 195—224

65. Фридрихс (Fridrichs K O)
Symmetric positive linear differential equations, Communs Pure and Appl, Math **11**, 3, 1958, 333—418

66. Хаак, Хельвиг (Haack W, Hellwig G)
Lineare partielle Differentialgleichungen zweiten Ordnung von gemischten Typus, Arch Math **5**, $^1/_3$, 1954, 60—76.

67. Халилов З. И.
а) Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток, Докл АН Азерб ССР **IX**, 4, 1953
б) Решение задачи для уравнения смешанного типа методом сеток, Тр. Ин-та физ. и матем. АН Азерб ССР, Сер магем. **6**, 1953, 5—13

68 Харди, Литтлвуд (Hardy G., Littlewood J.)
Some properties of fractional integrals. I, Math. Z. **27**, 4, 1928, 565—606

69 Харди Г Г, Литтлвуд Дж Е., Полиа Г.,
Неравенства, ИЛ, 1948

70 Харкевич Ю. Ф
Графическое решение уравнения смешанного типа, Тр. Иркутского ун-та, Сер. физ.-матем **XV**, 2, 1957, 103—110

71. Хельвиг (Hellwig G)
а) Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselnden Typus auf den Rändern, Math. Z **58**, 4, 1953, 337—357
б) Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung von gemischten Typus, Math Z **61**, 1, 1954, 26—46

72 Хида (Hida K.)
On some singular solutions of the Tricomi equation relating to transonic flow, J. Phys Soc Japan **10**, 10, 1955, 869—882

73. Хохстадт (Hochstadt H)
On a partial differential equation of mixed type with discontinuous coefficients, Arch. for Rat. Mech. and Anal. **10**, 3, 1962

74 Цугэ (Tsuge Sh-i)
On a theory of shock waves in locally supersonic zone and a new boundary-value problem for Tricomi's equation, J. Phys. Soc. Japan **12**, 12, 1957, 1412—1419.

75 Чибрарио (M Cinquini Cibrario)
а) Una propriete degli integrali delle equazioni ellitico-paraboliche del secondo tipo misto, Reale Accad. D'Italia, Rendi-

conti Classe di Scienze, Fisiche, Mat e Nat ser. **7**, 3, 1952, № 9.

б) Alcuni theoremi di esistenza e di unicita per l'equazione

$$xz_{xx} + z_{yy} = 0,$$

Atti. Accad sci Torino **68**, 1932—1933, 35—44

76. Чибрикова Л И.

а) К решению краевой задачи Трикоми для уравнения $u_{xx} + \operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$, Уч зап Казанск ун-та **117**, 9, 1957, 48—51

б) Новый метод решения одной краевой задачи смешанного типа, Уч зап Казанск ун та **117**, 9, 1957, 44—47

77 Шабат Б В

Примеры решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, ДАН СССР **112**, 3, 1957.

Модест Михайлович Смирнов

Уравнения смешанного типа

М., 1970 г., 296 стр. с илл.

Редакторы *В. Г. Мазья, И. Е. Морозова*
Технич. редактор *В. С. Никифорова*
Корректор *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 24/X 1969 г. Подписано к печати 10/III 1970 г. Бумага $84\times108/_{32}$ Физ. печ. л. 9,25. Усл. вп. печ. л. 15,54. Уч. изд. л. 15,62. Тираж 9800 экз. Т 00227 Цена книги 1 р. 16 к. Заказ № 402

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29.