

М. Л. СМОЛЯНСКИЙ

ТАБЛИЦЫ
НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ
ИНТЕГРАЛОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

АННОТАЦИЯ

Неопределенные интегралы — наиболее употребительные формулы высшей математики. Самые разнообразные вопросы математики и ее приложений к технике, естествознанию, экономике, статистике и т. д. приводят к вычислению того или иного интеграла.

Комплект готовых интегралов нужен инженерам, техникам, экономистам, научным и практическим работникам самых разнообразных специальностей. Он необходим и студентам вузов и техникумов.

Справочник М. Л. Смолянского содержит около 1300 интегралов, выпускается небольшим форматом и приспособлен для быстрого отыскания нужной формулы.

Во втором издании изменено расположение таблиц и выправлены замеченные опечатки.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие ко второму изданию	7
Принятые обозначения	9

I. Рациональные функции

Таблица 1.	Интегралы вида $\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m}$	10
Таблица 2.	Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^n (a+bx)^m}$	12
Таблица 3.	Интегралы вида $\int x^{\pm n} \frac{(a+bx)^m}{(c+fx)^k} dx$	14
Таблица 4.	Интегралы вида $\int x^{\pm n} \frac{dx}{(a+bx)^m (c+fx)^k}$	15
Таблица 5.	Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n} dx}{(a^2+b^2x^2)^m}$	18
Таблица 6.	Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n} dx}{(a^2-b^2x^2)^m}$	20
Таблица 7.	Интегралы вида $\int \frac{x^n dx}{(a+bx^3)^m}$	22
Таблица 8.	Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^n (a+bx^3)^m}$	24
Таблица 9.	Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n} dx}{(a+bx^3)^m}$	26
Таблица 10.	Интегралы вида $\int \frac{x^n dx}{a+bx^m}$	28
Таблица 11.	Интегралы вида $\int \frac{x^n dx}{(ax^2+bx+c)^m}$	30
Таблица 12.	Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^n (ax^2+bx+c)^m}$	32
Таблица 13.	Интегралы вида $\int \frac{(\alpha x + \beta)^{\pm n} dx}{(ax^2+bx+c)^m}$	34
Таблица 14.	Интегралы вида $\int \frac{x^{\pm n} dx}{(ax^{2k}+bx^k+c)^m}$	36

II. Иррациональные функции

Таблица 15. Интегралы вида	$\int \frac{x^{\pm n + \frac{1}{2}} dx}{(a \pm bx)^m}$	38
Таблица 16. Интегралы вида	$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(a + bx)^m}}$	40
Таблица 17. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \sqrt{(a + bx)^m} dx$	42
Таблица 18. Интегралы вида	$\int \sqrt{(a + bx)^{\pm n} (c + fx)^{\pm m}} dx$	44
Таблица 19. Интегралы вида	$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}$	46
Таблица 20. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}$	48
Таблица 21. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx$	50
Таблица 22. Интегралы вида	$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}$	52
Таблица 23. Интегралы вида	$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}$	54
Таблица 24. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx$	56
Таблица 25. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{\pm m}} dx$	58
Таблица 26. Интегралы вида	$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^m}}$	60
Таблица 27. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^m} dx$	62
Таблица 28. Интегралы вида	$\int \frac{(A + Bx) dx}{(ax^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{(ax^2 + bx + c)^r}}$	64

III. Тригонометрические
и обратные тригонометрические функции

Таблица 29. Интегралы вида	$\int x^n \sin^m px dx$	66
Таблица 30. Интегралы вида	$\int \frac{\sin^m px}{x^n} dx, \int \frac{x^n dx}{\sin^m px}, \int \frac{x^n \sin^r x}{(a + b \sin x)^m} dx$	68
Таблица 31. Интегралы вида	$\int R(\sin px, \sin qx, \sqrt{a^2 \pm b^2 \sin^2 x}) dx$	70

Таблица 32. Интегралы вида	$\int x^n \cos^m px \, dx \dots\dots\dots$	72
Таблица 33. Интегралы вида	$\int \frac{\cos^m px}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^n dx}{\cos^m px}, \quad \int \frac{x^n \cos^r x}{(a + b \cos x)^m} dx \dots\dots$	74
Таблица 34. Интегралы вида	$\int R(\cos px, \cos qx, \sqrt{a^2 \pm b^2 \sin^2 x}) dx$	76
Таблица 35. Интегралы вида	$\int \sin^{\pm m} px \cos^{\pm n} qx \, dx \dots\dots\dots$	78
Таблица 36. Интегралы вида	$\int R(\sin x, \cos x) \, dx \dots\dots\dots$	80
Таблица 37. Интегралы вида	$\int F(x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \, dx \dots\dots\dots$	82
Таблица 38. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \arcsin \frac{x}{a} \, dx, \quad \int x^{\pm n} \arccos \frac{x}{a} \, dx \dots\dots\dots$	84
Таблица 39. Интегралы вида	$\int F\left(x, \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) dx, \quad \int F\left(x, \operatorname{arccotg} \frac{x}{a}\right) dx \dots\dots\dots$	86
Таблица 40. Интегралы вида	$\int F\left(x, \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right) dx, \quad \int F\left(x, \operatorname{arccosec} \frac{x}{a}\right) dx \dots\dots\dots$	88

IV. Показательные и логарифмические функции

Таблица 41. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} e^{ax} \, dx, \quad \int x^n e^{-x^2} \, dx \dots\dots$	90
Таблица 42. Интегралы вида	$\int R(x) e^{ax} \, dx, \quad \int R\left(x, \sqrt{x}, e^x, e^{\sqrt{x}}\right) dx \dots\dots\dots$	92
Таблица 43. Интегралы вида	$\int \frac{e^{ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m} \dots\dots\dots$	94
Таблица 44. Интегралы вида	$\int e^{ax} \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{\pm m}} dx \dots\dots$	96
Таблица 45. Интегралы вида	$\int e^{ax} \sin^n px \, dx, \quad \int e^{ax} \cos^n px \, dx, \quad \int e^{ax} \sin^m x \cos^n x \, dx \dots$	98
Таблица 46. Интегралы вида	$\int x^{\pm n} \ln^m (a + bx) \, dx \dots\dots\dots$	100
Таблица 47. Интегралы вида	$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\ln^m (a + bx)} \dots\dots\dots$	102

Таблица 48. Интегралы вида

$$\int x^n \ln |x^2 \pm a^2| dx, \int x^{\pm n} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx \dots\dots\dots 104$$

Таблица 49. Интегралы вида $\int x^{\pm n} \operatorname{sh}^{\pm m} px dx \dots\dots\dots 106$

Таблица 50. Интегралы вида $\int x^{\pm n} \operatorname{ch}^{\pm m} px dx \dots\dots\dots 108$

Таблица 51. Интегралы вида $\int \operatorname{sh}^{\pm m} x \operatorname{ch}^{\pm n} x dx \dots\dots\dots 110$

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Имеющаяся в настоящее время на русском языке справочная литература по интегральному исчислению представлена или весьма солидными монографиями или небольшими разделами в общих справочниках. Как в том, так и в другом случае возникают затруднения при использовании этой литературы для быстрого отыскания нужного неопределенного интеграла.

Настоящий справочник подчинен одной главной цели — обеспечить максимальную быстроту отыскания наиболее часто встречающихся в математике и в инженерной практике неопределенных интегралов. Поэтому автор сознательно ограничил себя при выборе включаемого материала.

Все интегралы, помещенные в справочнике, разбиты на четыре раздела:

I. Рациональные функции.

II. Иррациональные функции.

III. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

IV. Показательные и логарифмические функции.

Немногочисленные интегралы, которые не выражаются в элементарных функциях, отмечены *звездочкой*. Для них даются выражения через степенные ряды. Из практических соображений некоторые интегралы включены в разных формах одновременно в два раздела. В этом случае для них даются разные выражения.

При составлении справочника автор пользовался различной монографической и справочной литературой. В первую очередь это относится к справочникам:

Г. Б. Д в а й т, Таблицы интегралов и другие математические формулы, ИЛ, 1950,

И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4, перераб. при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина, Физматгиз, 1962, к которым читателю следует обращаться за более подробными сведениями.

В настоящей книге совсем не излагаются методы интегрирования тех или иных классов функций. Эти методы достаточно подробно рассматриваются во многих учебниках по математическому анализу (см., например, Г. М. Фихтенгольц, Основы математического анализа, т. I, изд. 4, Физматгиз, 1960). Читателю, желающему более подробно познакомиться с методами интегрирования, можно порекомендовать книгу: А. Ф. Тимофеев, Интегрирование функций, Гостехиздат, 1948.

Во втором издании добавлено незначительное число интегралов, исправлены замеченные опечатки и улучшено расположение таблиц.

Для удобства пользования книгой приняты единые обозначения (см. стр. 9), с которыми читателю необходимо познакомиться предварительно.

Автор выражает глубокую благодарность читателю Е. Н. Протасову за ценные советы и замечания. Для улучшения справочника много сделал редактор Н. Х. Розов, которому автор особенно признателен.

Все отзывы и пожелания автор просит присылать по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, Физматгиз, Редакция справочной литературы.

М. Л. Смолянский

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

x, t, u, s — переменные интегрирования.

$a, b, c, f, \alpha, \beta, \gamma, p, q, A, B$ — произвольные вещественные числа.

k, l, m, n, r — целые числа.

ν — индекс суммирования.

$F(x, t)$ — произвольная функция от x и t .

$R(x, t)$ — рациональная функция своих аргументов.

$P_n(x)$ — многочлен n -ой степени от x .

$P_n^{(k)}(x)$ — k -ая производная многочлена $P_n(x)$.

$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ — число сочетаний из m элементов по n (биномиальные коэффициенты); по определению полагаем:

$$C_m^0 = C_m^m = C_0^0 = 1.$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ — факториал; по определению полагаем: $0! = 1$.

B_n — числа Бернулли:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$

E_n — числа Эйлера:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385

$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & f \end{vmatrix} = af - bc$ — определитель второго порядка.

$\delta = b^2 - 4ac$ — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \eta = \sqrt[4]{\left| \frac{a}{b} \right|}.$$

ТАБЛИЦА 1

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots$$

$$1.1. \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln |a+bx|.$$

$$1.2. \int \frac{dx}{(a+bx)^m} = \frac{-1}{(m-1)b(a+bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$1.3. \int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \left(x - \frac{a}{b} \ln |a+bx| \right).$$

$$1.4. \int \frac{x dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{a}{a+bx} + \ln |a+bx| \right).$$

$$1.5. \int \frac{x dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{-1}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} + \frac{a}{(m-1)(a+bx)^{m-1}} \right] \\ (m \geq 3).$$

$$1.6. \int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{a}{b} x + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \ln |a+bx| \right].$$

$$1.7. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[x - \frac{a}{b} \left(\frac{a}{a+bx} + 2 \ln |a+bx| \right) \right].$$

$$1.8. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{2a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} + \ln |a+bx| \right].$$

$$1.9. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{-1}{(m-3)(a+bx)^{m-3}} + \right. \\ \left. + \frac{2a}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} - \frac{a^2}{(m-1)(a+bx)^{m-1}} \right] \quad (m \geq 4).$$

$$1.10. \int \frac{x^3 dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{b} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 x - \left(\frac{a}{b} \right)^3 \ln |a+bx| \right].$$

$$1.11. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{x^2}{2} - 2 \frac{a}{b} x + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left(\frac{a}{a+bx} + 3 \ln |a+bx| \right) \right].$$

$$1.12. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3} \left\{ x - \frac{a}{b} \left[\frac{3a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} + 3 \ln |a+bx| \right] \right\}.$$

$$1.13. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^4} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{3a}{a+bx} - \frac{3a^2}{2(a+bx)^2} + \frac{a^3}{3(a+bx)^3} + \ln |a+bx| \right].$$

$$1.14. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^m} = \frac{1}{b^4} \left[\frac{-1}{(m-4)(a+bx)^{m-4}} + \frac{3a}{(m-3)(a+bx)^{m-3}} - \frac{3a^2}{(m-2)(a+bx)^{m-2}} + \frac{a^3}{(m-1)(a+bx)^{m-1}} \right] \quad (m \geq 5).$$

$$1.15. \int \frac{x^3 dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{a}{b} \frac{x^3}{3} + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \frac{x^2}{2} - \left(\frac{a}{b} \right)^3 x + \left(\frac{a}{b} \right)^4 \ln |a+bx| \right].$$

$$1.16. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{b} x^2 + 3 \left(\frac{a}{b} \right)^2 x - \left(\frac{a}{b} \right)^3 \left(\frac{a}{a+bx} + 4 \ln |a+bx| \right) \right].$$

$$1.17. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^3} \left\{ \frac{x^2}{2} - 3 \frac{a}{b} x + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \left[\frac{4a}{a+bx} - \frac{a^2}{2(a+bx)^2} + 6 \ln |a+bx| \right] \right\}.$$

$$1.18. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^4} = \frac{1}{b^4} \left\{ x - \frac{a}{b} \left[\frac{6a}{a+bx} - \frac{2a^2}{(a+bx)^2} + \frac{a^3}{3(a+bx)^3} + 4 \ln |a+bx| \right] \right\}.$$

$$1.19. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^5} = \frac{1}{b^5} \left[\frac{4a}{a+bx} - \frac{3a^2}{(a+bx)^2} + \frac{4a^3}{3(a+bx)^3} - \frac{a^4}{4(a+bx)^4} + \ln |a+bx| \right].$$

$$1.20. \int \frac{x^n dx}{a+bx} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu a^\nu x^{n-\nu}}{(n-\nu)b^{\nu+1}} + \frac{(-a)^n}{b^{n+1}} \ln |a+bx| \quad (n \geq 1).$$

$$1.21. \int \frac{x^n dx}{(a+bx)^m} = -\frac{x^n}{(m-1)b(a+bx)^{m-1}} + \frac{n}{(m-1)b} \int \frac{x^{n-1} dx}{(a+bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 2
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^n (a+bx)^m}, \quad \begin{matrix} n=1, 2, 3, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$2.1. \int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right|.$$

$$2.2. \int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a+bx} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right).$$

$$2.3. \int \frac{dx}{x(a+bx)^3} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2(a+bx)^2} + \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.4. \int \frac{dx}{x(a+bx)^4} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3(a+bx)^3} + \frac{1}{2a(a+bx)^2} + \frac{1}{a^2(a+bx)} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.5. \int \frac{dx}{x(a+bx)^5} = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{4(a+bx)^4} + \frac{1}{3a(a+bx)^3} + \frac{1}{2a^2(a+bx)^2} + \frac{1}{a^3(a+bx)} - \frac{1}{a^4} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.6. \int \frac{dx}{x(a+bx)^m} = \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{1}{\nu a^{m-\nu} (a+bx)^\nu} - \frac{1}{a^m} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| \quad (m \geq 2).$$

$$2.7. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{a} \left(\frac{1}{x} - \frac{b}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right).$$

$$2.8. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = -\frac{1}{a^2} \left(\frac{b}{a+bx} + \frac{1}{x} - \frac{2b}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right).$$

$$2.9. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)^3} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{2(a+bx)^2} + \frac{2b}{a(a+bx)} + \frac{1}{ax} - \frac{3b}{a^2} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.10. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)^4} = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{b}{3(a+bx)^3} + \frac{b}{a(a+bx)^2} + \frac{3ab}{a^2(a+bx)} + \frac{1}{a^2x} - \frac{4b}{a^3} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.11. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)^m} = \frac{-1}{ax(a+bx)^{m-1}} - \frac{mb}{a} \int \frac{dx}{x(a+bx)^m} \quad (\text{см. 2.6}).$$

$$2.12. \int \frac{dx}{x^3(a+bx)} = \frac{1}{a} \left(\frac{b}{ax} - \frac{1}{2x^2} - \frac{b^2}{a^2} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right).$$

$$2.13. \int \frac{dx}{x^3(a+bx)^2} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{b^2}{a(a+bx)} + \frac{2b}{ax} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3b^2}{a^2} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.14. \int \frac{dx}{x^3(a+bx)^3} = \\ = \frac{1}{a^3} \left[\frac{3b^2}{a(a+bx)} + \frac{b^2}{2(a+bx)^2} + \frac{3b}{ax} - \frac{1}{2x^2} - \frac{6b^2}{a^2} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.15. \int \frac{dx}{x^3(a+bx)^m} = \\ = \frac{(m+1)bx-a}{2a^2x^2(a+bx)^{m-1}} + \frac{m(m+1)b^2}{2a^2} \int \frac{dx}{x(a+bx)^m} \quad (\text{см. 2.6}).$$

$$2.16. \int \frac{dx}{x^4(a+bx)} = -\frac{1}{a} \left(\frac{b^2}{a^2x} - \frac{b}{2ax^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{b^3}{a^3} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right).$$

$$2.17. \int \frac{dx}{x^4(a+bx)^2} = \\ = -\frac{1}{a^2} \left[\frac{b^2}{a^2(a+bx)} + \frac{3b^2}{a^2x^2} - \frac{b}{ax^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{4b^3}{a^3} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right].$$

$$2.18. \int \frac{dx}{x^4(a+bx)^m} = \frac{(m+2)abx - [m(m+3)+2]b^2x^2 - 2a^2}{6a^3x^3(a+bx)^{m-1}} - \\ - \frac{m(m+1)(m+2)b^3}{6a^3} \int \frac{dx}{x(a+bx)^m} \quad (\text{см. 2.6}).$$

$$2.19. \int \frac{dx}{x^n(a+bx)} = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{(-1)^\nu b^{\nu-1}}{(n-\nu)a^\nu x^{n-\nu}} + \frac{(-1)^{n-1} b^{n-1}}{a^n} \ln \left| \frac{x}{a+bx} \right| \\ (n \geq 2).$$

$$2.20. \int \frac{dx}{x^n(a+bx)^m} = \frac{-1}{(n-1)ax^{n-1}(a+bx)^{m-1}} - \\ - \frac{(n+m-2)b}{(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a+bx)^m} \quad (n \geq 2); \\ = \frac{1}{(m-1)ax^{n-1}(a+bx)^{m-1}} + \\ + \frac{n+m-2}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^n(a+bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 3
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \frac{(a+bx)^m}{(c+fx)^k} dx, \quad af \neq bc;$$

$n=0, 1, 2, \dots, m=1, 2, 3, \dots, k=1, 2, 3, \dots$

$$3.1. \int \frac{a+bx}{c+fx} dx = \frac{1}{f} \left(bx + \frac{\Delta}{f} \ln |c+fx| \right).$$

$$3.2. \int \frac{(a+bx)^2}{c+fx} dx = \frac{1}{f} \left[\frac{b^2}{2} x^2 + b \left(a + \frac{\Delta}{f} \right) x + \frac{\Delta^2}{f^2} \ln |c+fx| \right].$$

$$3.3. \int \frac{(a+bx)^m}{c+fx} dx =$$

$$= \sum_{\nu=1}^m C_m^{\nu} a^{m-\nu} b^{\nu} \int \frac{x^{\nu} dx}{c+fx} + \frac{a^m}{f} \ln |c+fx| \quad (\text{см. 1.20}).$$

$$3.4. \int \frac{a+bx}{(c+fx)^2} dx = -\frac{1}{f^2} \left(\frac{\Delta}{c+fx} - b \ln |c+fx| \right).$$

$$3.5. \int \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^2 dx = \frac{1}{f^2} \left[b^2 x - \frac{\Delta}{f} \left(\frac{\Delta}{c+fx} - 2b \ln |c+fx| \right) \right].$$

$$3.6. \int \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^m dx = \frac{1}{f^m} \sum_{\nu=0}^m C_m^{\nu} \Delta^{m-\nu} b^{\nu} \int \frac{dx}{(c+fx)^{m-\nu}} \quad (\text{см. 1.2}).$$

$$3.7. \int \frac{(a+bx)^m}{(c+fx)^k} dx = -\frac{(a+bx)^m}{(k-1)f(c+fx)^{k-1}} +$$

$$+ \frac{mb}{(k-1)f} \int \frac{(a+bx)^{m-1}}{(c+fx)^{k-1}} dx \quad (k \geq 2).$$

$$3.8. \int x \frac{a+bx}{c+fx} dx = \frac{1}{f} \left[\frac{b}{2} x^2 + \frac{\Delta}{f} \left(x - \frac{c}{f} \ln |c+fx| \right) \right].$$

$$3.9. \int x \frac{(a+bx)^2}{c+fx} dx =$$

$$= \frac{1}{f} \left[\frac{b^2}{3} x^3 + \frac{b}{2} \left(a + \frac{\Delta}{f} \right) x^2 + \frac{\Delta^2}{f^2} \left(x - \frac{c}{f} \ln |c+fx| \right) \right].$$

$$3.10. \int x \frac{a+bx}{(c+fx)^2} dx = \frac{1}{f^2} \left(bx + \frac{c\Delta}{f(c+fx)} + \left(\frac{2\Delta}{f} - a \right) \ln |c+fx| \right).$$

$$3.11. \int x \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^2 dx = \frac{1}{f^2} \left\{ \frac{b^2}{2} x^2 + \frac{2b\Delta}{f} x + \frac{\Delta}{f^2} \left[\frac{c\Delta}{c+fx} + (\Delta - 2bc) \ln |c+fx| \right] \right\}.$$

$$3.12. \int x \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^m dx = \frac{(a+bx)^m}{2f^2 (c+fx)^{m-2}} + \frac{c(a+bx)^m}{(m-1)f^2 (c+fx)^{m-1}} - \frac{m[(m-1)\Delta + 2bc]}{2(m-1)f^2} \int \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^{m-1} dx \quad (m \geq 2) \quad (\text{см. 3.6}).$$

$$3.13. \int x^2 \frac{a+bx}{c+fx} dx = \frac{1}{f} \left[\frac{b}{3} x^3 + \frac{\Delta}{f} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c}{f} x + \frac{c^2}{f^2} \ln |c+fx| \right) \right].$$

$$3.14. \int x^2 \frac{(a+bx)^2}{c+fx} dx = \frac{1}{f} \left[\frac{b^2}{4} x^4 + \frac{b}{3} \left(a + \frac{\Delta}{f} \right) x^3 + \frac{\Delta^2}{f^2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{c}{f} x + \frac{c^2}{f^2} \ln |c+fx| \right) \right].$$

$$3.15. \int x^2 \frac{a+bx}{(c+fx)^2} dx = \frac{1}{f^2} \left[\frac{b}{2} x^2 + \left(\frac{2\Delta}{f} - a \right) x - \frac{c^2\Delta}{f^2(c+fx)} - \frac{c}{f} \left(\frac{3\Delta}{f} - a \right) \ln |c+fx| \right].$$

$$3.16. \int x^2 \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^2 dx = \frac{1}{f^2} \left\{ \frac{b^2}{3} x^3 + \frac{b\Delta}{f} x^2 + \frac{c\Delta^2 x}{f^2(c+fx)} + \frac{\Delta}{f^3} [(\Delta - 2bc)(c+fx) - 2c(\Delta - bc) \ln |c+fx|] \right\}.$$

$$3.17. \int \frac{a+bx}{x(c+fx)} dx = \frac{a}{c} \ln |x| - \frac{\Delta}{cf} \ln |c+fx|.$$

$$B.18. \int \frac{(a+bx)^2}{x(c+fx)} dx = \frac{b^2}{f} x + \frac{1}{c} \left(a^2 \ln |x| - \frac{\Delta^2}{f^2} \ln |c+fx| \right).$$

$$3.19. \int \frac{a+bx}{x(c+fx)^2} dx = \frac{\Delta}{cf(c+fx)} - \frac{a}{c^2} \ln \left| \frac{c}{x} + f \right|.$$

$$3.20. \int \frac{1}{x} \left(\frac{a+bx}{c+fx} \right)^2 dx = \frac{\Delta^2}{cf^2(c+fx)} + \frac{a^2}{c^2} \ln |x| - \left[\left(\frac{a}{c} \right)^2 - \left(\frac{b}{f} \right)^2 \right] \ln |c+fx|.$$

ТАБЛИЦА 4
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \frac{dx}{(a+bx)^m (c+fx)^k}, \quad af \neq bc;$$

$n=0, 1, 2, \dots, m=1, 2, 3, \dots, k=1, 2, 3, \dots$

$$4.1. \int \frac{dx}{(a+bx)(c+fx)} = -\frac{1}{\Delta} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.2. \int \frac{dx}{(a+bx)(c+fx)^2} = \frac{-1}{\Delta(c+fx)} + \frac{b}{\Delta^2} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.3. \int \frac{dx}{(a+bx)^2(c+fx)^2} = -\frac{1}{\Delta^2} \left(\frac{b}{a+bx} + \frac{f}{c+fx} \right) + \frac{2bf}{\Delta^3} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.4. \int \frac{dx}{(a+bx)(c+fx)^3} = \frac{2b(c+fx) - \Delta}{2\Delta^2(c+fx)^2} - \frac{b^2}{\Delta^3} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.5. \int \frac{dx}{(a+bx)^2(c+fx)^3} = \frac{b^2}{\Delta^3(a+bx)} - \frac{f}{2\Delta^2(c+fx)^2} + \\ + \frac{2bf}{\Delta^3(c+fx)} - \frac{3b^2f}{\Delta^4} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.6. \int \frac{dx}{(a+bx)^3(c+fx)^3} = \frac{b^2}{2\Delta^3(a+bx)^2} + \frac{3b^2f}{\Delta^4(a+bx)} - \\ - \frac{f^2}{2\Delta^3(c+fx)^2} + \frac{3bf^2}{\Delta^4(c+fx)} - \frac{6b^2f^2}{\Delta^5} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.7. \int \frac{dx}{(a+bx)^m(c+fx)^k} = -\frac{1}{(k-1)\Delta(a+bx)^{m-1}(c+fx)^{k-1}} - \\ - \frac{(m+k-2)b}{(k-1)\Delta} \int \frac{dx}{(a+bx)^m(c+fx)^{k-1}} \quad (k \geq 2); \\ = \frac{1}{(m-1)\Delta(a+bx)^{m-1}(c+fx)^{k-1}} + \\ + \frac{(m+k-2)f}{(m-1)\Delta} \int \frac{dx}{(a+bx)^{m-1}(c+fx)^k} \quad (m \geq 2).$$

$$4.8. \int \frac{x dx}{(a+bx)(c+fx)} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{a}{b} \ln |a+bx| - \frac{c}{f} \ln |c+fx| \right].$$

$$4.9. \int \frac{x dx}{(a+bx)(c+fx)^2} = \frac{c}{f\Delta(c+fx)} - \frac{af}{b\Delta^2} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.10. \int \frac{x dx}{(a+bx)^2(c+fx)^2} = \\ = \frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{a}{a+bx} + \frac{c}{c+fx} \right] - \frac{af+bc}{\Delta^3} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.11. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)(c+fx)} = \frac{x}{bf} + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{c^2}{f^2} \ln |c+fx| - \frac{a^2}{b^2} \ln |a+bx| \right].$$

$$4.12. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)(c+fx)^2} = \\ = \frac{-c^2}{f^2\Delta(c+fx)} + \frac{a^2}{b\Delta^2} \ln |a+bx| + \frac{bc^2-2acf}{f^2\Delta^2} \ln |c+fx|.$$

$$4.13. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2(c+fx)^2} = \\ = -\frac{1}{\Delta^2} \left[\frac{a^2}{b(a+bx)} + \frac{c^2}{f(c+fx)} \right] + \frac{2ab}{\Delta^3} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right|.$$

$$4.14. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx)(c+fx)} = \\ = \frac{x^2}{2bf} - \frac{af+bc}{b^2f^2} x + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{a^3}{b^3} \ln |a+bx| - \frac{c^3}{f^2} \ln |c+fx| \right].$$

$$4.15. \int \frac{dx}{x(a+bx)(c+fx)} = \frac{1}{ac} \ln |x| + \frac{b}{a\Delta} \ln |a+bx| - \frac{f}{c\Delta} \ln |c+fx|.$$

$$4.16. \int \frac{dx}{x(a+bx)(c+fx)^2} = \frac{af(af+\Delta) + (af+bc)\Delta}{a^2cf(\Delta-bc)(c+fx)} + \frac{1}{ac^2} \ln |x| + \\ + \frac{b^2c^2-2a^2f^2}{a^2c^2f(\Delta-bc)} \ln |a+bx| + \frac{(af+bc)^2}{a^2c^2f(\Delta-bc)} \ln |c+fx|.$$

$$4.17. \int \frac{dx}{x^2(a+bx)(c+fx)} = \\ = -\frac{1}{acx} - \frac{af+bc}{a^2c^2} \ln |x| - \frac{b^2}{a^2\Delta} \ln |a+bx| + \frac{f^2}{c^2\Delta} \ln |c+fx|.$$

ТАБЛИЦА 5
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m}; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$5.1. \quad \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.2. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2)^2} = \frac{x}{2a^2 (a^2 + b^2 x^2)} + \frac{1}{2a^2 b} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.3. \quad \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)a^2 (a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} + \\ + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$5.4. \quad \int \frac{x dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{2b^2} \ln (a^2 + b^2 x^2).$$

$$5.5. \quad \int \frac{x dx}{(a^2 + b^2 x^2)^2} = -\frac{1}{2b^2 (a^2 + b^2 x^2)}.$$

$$5.6. \quad \int \frac{x dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)b^2 (a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$5.7. \quad \int \frac{x^2 dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.8. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + b^2 x^2)^2} = -\frac{x}{2b^2 (a^2 + b^2 x^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.9. \quad \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{x}{2(m-1)b^2 (a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} + \\ + \frac{1}{2(m-1)b^2} \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2) \quad (\text{см. 5.3}).$$

$$5.10. \quad \int \frac{x^3 dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{x^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^4} \ln (a^2 + b^2 x^2).$$

$$5.11. \quad \int \frac{x^3 dx}{(a^2 + b^2 x^2)^2} = \frac{a^2}{2b^4 (a^2 + b^2 x^2)} + \frac{1}{2b^4} \ln (a^2 + b^2 x^2).$$

$$5.12. \int \frac{x^3 dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{2(m-2)b^4(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}} + \frac{a^2}{2(m-1)b^4(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 3).$$

$$5.13. \int \frac{x^n dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{x^{n-1}}{2(n-1)b^2(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{n-1}{2(m-1)b^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$5.14. \int \frac{dx}{x(a^2 + b^2 x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$5.15. \int \frac{dx}{x(a^2 + b^2 x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 + b^2 x^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$5.16. \int \frac{dx}{x(a^2 + b^2 x^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)a^2(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$5.17. \int \frac{dx}{x^2(a^2 + b^2 x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{b}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.18. \int \frac{dx}{x^2(a^2 + b^2 x^2)^2} = \frac{1}{a^4 x} - \frac{b^2 x}{2a^4(a^2 + b^2 x^2)} - \frac{3b}{2a^5} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a}.$$

$$5.19. \int \frac{dx}{x^2(a^2 + b^2 x^2)^m} = \frac{-1}{a^2 x(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} - \frac{2(m-1)b^2}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 x^2)^m} \quad (\text{см. 5.3}).$$

$$5.20. \int \frac{dx}{x^3(a^2 + b^2 x^2)} = -\frac{1}{2a^2 x^2} - \frac{b^2}{2a^4} \ln \frac{x^2}{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$5.21. \int \frac{dx}{x^3(a^2 + b^2 x^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{b^2}{2a^4(a^2 + b^2 x^2)} - \frac{b^2}{a^6} \ln \frac{x^2}{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$5.22. \int \frac{dx}{x^3(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{2a^2 x^2(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} - \frac{mb^2}{a^2} \int \frac{dx}{x(a^2 + b^2 x^2)^m} \quad (\text{см. 5.16}).$$

$$5.23. \int \frac{dx}{x^n(a^2 + b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{(n-1)a^2 x^{n-1}(a^2 + b^2 x^2)^{m-1}} - \frac{(2m+n-3)b^2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2}(a^2 + b^2 x^2)^m} \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 6
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m}; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

- 6.1. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right|.$
- 6.2. $\int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)^2} = \frac{x}{2a^2 (a^2 - b^2 x^2)} + \frac{1}{4a^3 b} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right|.$
- 6.3. $\int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)a^2 (a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a^2} \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$
- 6.4. $\int \frac{x dx}{a^2 - b^2 x^2} = -\frac{1}{2b^2} \ln |a^2 - b^2 x^2|.$
- 6.5. $\int \frac{x dx}{(a^2 - b^2 x^2)^2} = \frac{1}{2b^2 (a^2 - b^2 x^2)}.$
- 6.6. $\int \frac{x dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)b^2 (a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$
- 6.7. $\int \frac{x^2 dx}{a^2 - b^2 x^2} = -\frac{x}{b^2} + \frac{a}{2b^3} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right|.$
- 6.8. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - b^2 x^2)^2} = \frac{x}{2b^2 (a^2 - b^2 x^2)} - \frac{1}{4ab^3} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right|.$
- 6.9. $\int \frac{x^2 dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} = \frac{x}{2(m-1)b^2 (a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} - \frac{1}{2(m-1)b^2} \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2) \text{ (см. 6.3)}.$
- 6.10. $\int \frac{x^3 dx}{a^2 - b^2 x^2} = -\frac{x^2}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^4} \ln |a^2 - b^2 x^2|.$
- 6.11. $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - b^2 x^2)^2} = \frac{a^2}{2b^4 (a^2 - b^2 x^2)} + \frac{1}{2b^4} \ln |a^2 - b^2 x^2|.$
- 6.12. $\int \frac{x^3 dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{2(m-2)b^4 (a^2 - b^2 x^2)^{m-2}} + \frac{a^2}{2(m-1)b^4 (a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 3).$

$$6.13. \int \frac{x^n dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} = \frac{x^{n-1}}{2(m-1)b^2(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} - \frac{n-1}{2(m-1)b^2} \int \frac{x^{n-2}}{(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} dx \quad (m \geq 2).$$

$$6.14. \int \frac{dx}{x(a^2 - b^2 x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - b^2 x^2} \right|.$$

$$6.15. \int \frac{dx}{x(a^2 - b^2 x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2 - b^2 x^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - b^2 x^2} \right|.$$

$$6.16. \int \frac{dx}{x(a^2 - b^2 x^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)a^2(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$6.17. \int \frac{dx}{x^2(a^2 - b^2 x^2)} = -\frac{1}{a^2 x} + \frac{b}{2a^3} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right|.$$

$$6.18. \int \frac{dx}{x^2(a^2 - b^2 x^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} + \frac{b^2 x}{2a^4(a^2 - b^2 x^2)} + \frac{3b}{4a^5} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right|.$$

$$6.19. \int \frac{dx}{x^2(a^2 - b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{a^2 x(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{(2m-1)b^2}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 - b^2 x^2)^m} \quad (\text{см. 6.3}).$$

$$6.20. \int \frac{dx}{x^3(a^2 - b^2 x^2)} = -\frac{1}{2a^2 x^2} + \frac{b^2}{2a^4} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - b^2 x^2} \right|.$$

$$6.21. \int \frac{dx}{x^3(a^2 - b^2 x^2)^2} = -\frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{b^2}{2a^4(a^2 - b^2 x^2)} + \frac{b^2}{a^6} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 - b^2 x^2} \right|.$$

$$6.22. \int \frac{dx}{x^3(a^2 - b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{2a^2 x^2(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{mb^2}{a^2} \int \frac{dx}{x(a^2 - b^2 x^2)^m} \quad (\text{см. 6.16}).$$

$$6.23. \int \frac{dx}{x^n(a^2 - b^2 x^2)^m} = -\frac{1}{(n-1)a^2 x^{n-1}(a^2 - b^2 x^2)^{m-1}} + \frac{(2m+n-3)b^2}{(n-1)a^2} \int \frac{dx}{x^{n-2}(a^2 - b^2 x^2)^m} \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 7
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^3)^m}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots$$

$$7.1. \int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{1}{6b\xi^2} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2 - \xi x + x^2} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}b\xi^2} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$

$$7.2. \int \frac{dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x}{3a(a+bx^3)} + \frac{2}{3a} \int \frac{dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.1}).$$

$$7.3. \int \frac{dx}{(a+bx^3)^m} = \frac{x}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} + \\ + \frac{3m-4}{3(m-1)a} \int \frac{dx}{(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$7.4. \int \frac{x dx}{a+bx^3} = \frac{-1}{6b\xi} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2 - \xi x + x^2} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}b\xi} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$

$$7.5. \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x^2}{3a(a+bx^3)} + \frac{1}{3a} \int \frac{x dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.4}).$$

$$7.6. \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^3} = -\frac{7ax^2+4bx^5}{18a^2(a+bx^3)^2} + \frac{2}{9a^2} \int \frac{x dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.4}).$$

$$7.7. \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^m} = \frac{x^2}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} + \\ + \frac{3m-5}{3(m-1)a} \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$7.8. \int \frac{x^2 dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3b} \ln |a+bx^3|.$$

$$7.9. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^3)^m} = -\frac{1}{3(m-1)b(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$7.10. \int \frac{x^3 dx}{a+bx^3} = \frac{x}{b} - \frac{\xi}{6b} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2 - \xi x + x^2} \right| - \frac{\xi}{\sqrt{3}b} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$

$$7.11. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{x}{3b(a+bx^3)} + \frac{1}{3b} \int \frac{dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.1}).$$

$$7.12. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx^3)^3} = \frac{3ax-5ax^2+6bx^4-5bx^5}{18ab(a+bx^3)^2} + \\ + \frac{2}{3ab} \int \frac{dx}{a+bx^3} - \frac{5}{18ab} \int \frac{x dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.1 и 7.4}).$$

$$7.13. \int \frac{x^3 dx}{(a+bx^3)^m} = \frac{x^4}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} + \\ + \frac{3m-7}{3(m-1)a} \int \frac{x^3 dx}{(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2); \\ = \frac{x}{(4-3m)b(a+bx^3)^{m-1}} - \\ - \frac{a}{(4-3m)b} \int \frac{dx}{(a+bx^3)^m} \quad (m \geq 2) \quad (\text{см. 7.3}).$$

$$7.14. \int \frac{x^4 dx}{a+bx^3} = \frac{x^2}{2b} + \frac{\xi^2}{6b} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2-\xi x+x^2} \right| - \frac{\xi^2}{\sqrt{3}b} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$

$$7.15. \int \frac{x^4 dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{-x^2}{3b(a+bx^3)} + \frac{2}{3b} \int \frac{x dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.4}).$$

$$7.16. \int \frac{x^4 dx}{(a+bx^3)^3} = -\frac{x^2}{4b(a+bx^3)^2} + \frac{a}{2b} \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^3} \quad (\text{см. 7.6}).$$

$$7.17. \int \frac{x^4 dx}{(a+bx^3)^m} = \frac{x^2}{(5-3m)b(a+bx^3)^{m-1}} - \\ - \frac{2a}{(5-3m)b} \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^m} \quad (\text{см. 7.7}).$$

$$7.18. \int \frac{x^n dx}{a+bx^3} = \frac{x^{n-2}}{(n-2)b} - \frac{a}{b} \int \frac{x^{n-3} dx}{a+bx^3} \quad (n \geq 3).$$

$$7.19. \int \frac{x^n dx}{(a+bx^3)^m} = \frac{x^{n+1}}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} - \\ - \frac{n+4-3m}{3(m-1)a} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2); \\ = \frac{x^{n-2}}{(n+1-3m)b(a+bx^3)^{m-1}} - \\ - \frac{(n-2)a}{(n+1-3m)b} \int \frac{x^{n-3} dx}{(a+bx^3)^m} \quad (n \neq 3m-1).$$

ТАБЛИЦА 8

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^n (a+bx^3)^m}; \quad n=1, 2, 3, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots$$

$$8.1. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)} = \frac{1}{3a} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$

$$8.2. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)^2} = \frac{1}{3a(a+bx^3)} + \frac{1}{3a^2} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$

$$8.3. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)^3} = \frac{3a+2bx^3}{6a^2(a+bx^3)^2} + \frac{1}{3a^3} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$

$$8.4. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)^4} = \frac{11a^2+15abx^3+6b^2x^6}{18a^2(a+bx^3)^3} + \frac{1}{3a^4} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$

$$8.5. \int \frac{dx}{x(a+bx^3)^m} = \\ = \frac{1}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$8.6. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)} = \\ = -\frac{1}{ax} + \frac{1}{6a\xi} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2-\xi x+x^2} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}a\xi} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$

$$8.7. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^2} = \frac{-3a+4bx^3}{3a^2x(a+bx^3)} + \frac{4}{3a} \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)} \quad (\text{см. 8.6}).$$

$$8.8. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^3} = \frac{1}{6a(a+bx^3)^2} + \frac{7}{18a^2(a+bx^3)} - \frac{14}{9a^2x} + \\ + \frac{14}{9a^2} \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)} \quad (\text{см. 8.6}).$$

$$8.9. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^m} = \frac{1}{3(m-1)a(a+bx^3)^{m-1}} + \\ + \frac{3m-2}{3(m-1)a} \int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$8.10. \int \frac{dx}{x^3(a+bx^3)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^3} \quad (\text{см. 7.1}).$$

- 8.11.
$$\int \frac{dx}{x^3 (a+bx^3)^2} = -\frac{3a+5bx^3}{6a^2x^2 (a+bx^3)} - \frac{5}{18a^2\xi^2} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2 - \xi x + x^2} \right| - \frac{5}{3\sqrt{3}a^2\xi^2} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$
- 8.12.
$$\int \frac{dx}{x^3 (a+bx^3)^3} = -\frac{9a^2+32abx^3+20b^3x^6}{18a^3x^2 (a+bx^3)^2} - \frac{10}{27a^3\xi^2} \ln \left| \frac{(\xi+x)^2}{\xi^2 - \xi x + x^2} \right| - \frac{20}{9\sqrt{3}a^3\xi^2} \operatorname{arctg} \frac{2x-\xi}{\sqrt{3}\xi}.$$
- 8.13.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 (a+bx^3)^m} &= \frac{1}{3(m-1)ax^2 (a+bx^3)^{m-1}} + \\ &+ \frac{3m-1}{3(m-1)a} \int \frac{dx}{x^3 (a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2); \\ &= \frac{-1}{2ax^2 (a+bx^3)^{m-1}} - \frac{(3m-1)bx}{6(m-1)a^2 (a+bx^3)^{m-1}} - \\ &- \frac{(3m-1)(3m-4)b}{6(m-1)a^2} \int \frac{x dx}{(a+bx^3)^{m-1}} \quad (\text{см. 7.7}). \end{aligned}$$
- 8.14.
$$\int \frac{dx}{x^4 (a+bx^3)} = -\frac{1}{3ax^3} - \frac{b}{3a^2} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$
- 8.15.
$$\int \frac{dx}{x^4 (a+bx^3)^2} = -\frac{a+2bx^3}{3a^2x^3 (a+bx^3)} - \frac{2b}{3a^3} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|.$$
- 8.16.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 (a+bx^3)^3} &= \\ &= -\frac{1}{3a^3x^3} - \frac{b}{6a^2 (a+bx^3)^2} - \frac{2b}{a^3 (a+bx^3)} - \frac{7b}{a^4} \ln \left| \frac{bx^3}{a+bx^3} \right|. \end{aligned}$$
- 8.17.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 (a+bx^3)^m} &= \frac{1}{3(m-1)ax^3 (a+bx^3)^{m-1}} + \\ &+ \frac{3m}{3(m-1)a} \int \frac{dx}{x^4 (a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2). \end{aligned}$$
- 8.18.
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^n (a+bx^3)^m} &= \frac{1}{3(m-1)ax^{n-1} (a+bx^3)^{m-1}} + \\ &+ \frac{3m+n-4}{3(m-1)a} \int \frac{dx}{x^n (a+bx^3)^{m-1}} \quad (m \geq 2); \\ &= \frac{-1}{(n-1)ax^{n-1} (a+bx^3)^{m-1}} - \\ &- \frac{(3m+n-4)b}{(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-3} (a+bx^3)^m} \quad (n \geq 2). \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 9
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

- 9.1. $\int \frac{dx}{a+bx^4} = \begin{cases} \frac{\eta}{4\sqrt{2}a} \left[\ln \frac{x^2 + \sqrt{2}\eta x + \eta^2}{x^2 - \sqrt{2}\eta x + \eta^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\eta x}{\eta^2 - x^2} \right] & \text{при } ab > 0; \\ -\frac{\eta}{4a} \left[\ln \left| \frac{x+\eta}{x-\eta} \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta} \right] & \text{при } ab < 0. \end{cases}$
- 9.2. $\int \frac{dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x}{4a(a+bx^4)} + \frac{3}{4a} \int \frac{dx}{a+bx^4}$ (см. 9.1).
- 9.3. $\int \frac{dx}{(a+bx^4)^3} = \frac{11ax+7bx^5}{32a^2(a+bx^4)^2} + \frac{21}{32a^2} \int \frac{dx}{a+bx^4}$ (см. 9.1).
- 9.4. $\int \frac{dx}{(a+bx^4)^m} = \frac{x}{4(m-1)a(a+bx^4)^{m-1}} + \frac{4m-5}{4(m-1)a} \int \frac{dx}{(a+bx^4)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$
- 9.5. $\int \frac{x dx}{a+bx^4} = \begin{cases} \frac{1}{2b\eta^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\eta^2} & \text{при } ab > 0; \\ -\frac{1}{4\sqrt{|ab|}} \ln \left| \frac{a-x^2\sqrt{|ab|}}{a+x^2\sqrt{|ab|}} \right| & \text{при } ab < 0. \end{cases}$
- 9.6. $\int \frac{x dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x^2}{4a(a+bx^4)} + \frac{1}{2a} \int \frac{x dx}{a+bx^4}$ (см. 9.5).
- 9.7. $\int \frac{x dx}{(a+bx^4)^3} = \frac{5ax^2+3bx^6}{16a^2(a+bx^4)^2} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{x dx}{a+bx^4}$ (см. 9.5).
- 9.8. $\int \frac{x dx}{(a+bx^4)^m} = \frac{x^2}{4(m-1)a(a+bx^4)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)a} \int \frac{x dx}{(a+bx^4)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$
- 9.9. $\int \frac{x^2 dx}{a+bx^4} = \begin{cases} \frac{-1}{4\sqrt{2}b\eta} \left[\ln \frac{x^2 + \sqrt{2}\eta x + \eta^2}{x^2 - \sqrt{2}\eta x + \eta^2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\eta x}{\eta^2 - x^2} \right] & \text{при } ab > 0; \\ -\frac{1}{4b\eta} \left[\ln \left| \frac{x+\eta}{x-\eta} \right| - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\eta} \right] & \text{при } ab < 0. \end{cases}$

$$9.10. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x^3}{4a(a+bx^4)} + \frac{1}{4a} \int \frac{x^2 dx}{a+bx^4} \quad (\text{см. 9.9}).$$

$$9.11. \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^4)^3} = \frac{9ax^3+5bx^7}{32a^2(a+bx^4)^2} + \frac{5}{32a^2} \int \frac{x^2 dx}{a+bx^4} \quad (\text{см. 9.9}).$$

$$9.12. \int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} = \frac{x^{n+1}}{4(m-1)a(a+bx^4)^{m-1}} + \\ + \frac{4m-n-5}{4(m-1)a} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}} \quad (m \geq 2); \\ = \frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b(a+bx^4)^{m-1}} - \\ - \frac{(n-3)a}{(n+1-4m)b} \int \frac{x^{n-4} dx}{(a+bx^4)^m} \quad (n \neq 4m-1).$$

$$9.13. \int \frac{dx}{x(a+bx^4)} = \frac{1}{4a} \ln \left| \frac{x^4}{a+bx^4} \right|.$$

$$9.14. \int \frac{dx}{x(a+bx^4)^2} = \frac{1}{4a(a+bx^4)} + \frac{1}{4a^2} \ln \left| \frac{x^4}{a+bx^4} \right|.$$

$$9.15. \int \frac{dx}{x(a+bx^4)^3} = \frac{3+2bx^4}{8a(a+bx^4)^2} + \frac{1}{4a^3} \ln \left| \frac{x^4}{a+bx^4} \right|.$$

$$9.16. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^4)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{x^2 dx}{a+bx^4} \quad (\text{см. 9.9}).$$

$$9.17. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^4)^2} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{bx^3}{4a^2(a+bx^4)} - \frac{5b}{4a^2} \int \frac{x^2 dx}{a+bx^4} \quad (\text{см. 9.9}).$$

$$9.18. \int \frac{dx}{x^2(a+bx^4)^3} = -\frac{1}{ax(a+bx^4)^2} - \frac{9b}{a} \int \frac{x^2 dx}{(a+bx^4)^3} \quad (\text{см. 9.11}).$$

$$9.19. \int \frac{dx}{x^n(a+bx^4)^m} = -\frac{1}{(n-1)ax^{n-1}(a+bx^4)^{m-1}} - \\ - \frac{(4m+n-5)b}{(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-4}(a+bx^4)^m} \quad (n \geq 2); \\ = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x^n(a+bx^4)^{m-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{n-4}(a+bx^4)^m}.$$

ТАБЛИЦА 10

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{a+bx^m}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ m=5, 6, 7, \dots$$

$$10.1. \int \frac{dx}{1+x^{2k}} = -\frac{1}{2k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\nu+1}{2k} \pi + 1 \right) \cos \frac{2\nu+1}{2k} \pi + \\ + \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sin \frac{2\nu+1}{2k} \pi}{1-x \cos \frac{2\nu+1}{2k} \pi} \right) \sin \frac{2\nu+1}{2k} \pi.$$

$$10.2. \int \frac{dx}{1+x^{2k+1}} = \frac{1}{2k+1} \ln |1+x| - \\ - \frac{1}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi + 1 \right) \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi + \\ + \frac{2}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sin \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi}{1-x \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi} \right) \sin \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi.$$

$$10.3. \int \frac{dx}{1-x^{2k}} = \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - \\ - \frac{1}{2k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \ln \left(x^2 + 2x \cos \frac{2\nu+1}{2k} \pi + 1 \right) \cos \frac{\nu}{k} \pi + \\ + \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sin \frac{2\nu+1}{2k} \pi}{1+x \cos \frac{2\nu+1}{2k} \pi} \right) \sin \frac{\nu}{k} \pi.$$

$$10.4. \int \frac{dx}{1-x^{2k+1}} = -\frac{1}{2k+1} \ln |1-x| + \\ + \frac{1}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \ln \left(x^2 + 2x \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi + 1 \right) \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi + \\ + \frac{2}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} \operatorname{arctg} \left(\frac{x \sin \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi}{1+x \cos \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi} \right) \sin \frac{2\nu+1}{2k+1} \pi.$$

- 10.5.
$$\int \frac{x^n dx}{1+x^{2k}} = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^k \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2\nu-1}{2k} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2k} \pi} \cos \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k} \pi -$$

$$- \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^k \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\nu-1}{2k} \pi + 1 \right) \cos \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k} \pi.$$
- 10.6.
$$\int \frac{x^n dx}{1+x^{2k+1}} = (-1)^n \frac{\ln |1+x|}{2k+1} -$$

$$- \frac{1}{2k+1} \sum_{\nu=1}^{2k+1} \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi + 1 \right) \cos \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k+1} \pi +$$

$$+ \frac{2}{2k+1} \sum_{\nu=1}^{2k+1} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi} \sin \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k+1} \pi.$$
- 10.7.
$$\int \frac{x^n dx}{1-x^{2k}} = \frac{1}{2k} \{ (-1)^n [\ln |1+x|] - \ln |1-x| \} +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{2k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \ln \left(x^2 + 2x \cos \frac{\nu}{k} \pi + 1 \right) \cos \frac{\nu(n+1)}{k} \pi +$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k-1} \operatorname{arctg} \frac{x + \cos \frac{\nu}{k} \pi}{\sin \frac{\nu}{k} \pi} \sin \frac{\nu(n+1)}{k} \pi.$$
- 10.8.
$$\int \frac{x^n dx}{1-x^{2k+1}} = -\frac{1}{2k+1} \ln |1-x| +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{2k+1} \sum_{\nu=1}^{2k+1} \ln \left(x^2 + 2x \cos \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi + 1 \right) \cos \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k+1} \pi +$$

$$+ (-1)^n \frac{2}{2k+1} \sum_{\nu=1}^{2k+1} \operatorname{arctg} \frac{x + \cos \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2k+1} \pi} \sin \frac{(n+1)(2\nu-1)}{2k+1} \pi$$
- 10.9.
$$\int \frac{x^n dx}{a+bx^m} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}} \int \frac{t^n dt}{1+t^m}, & \text{где } t = \sqrt[m]{\frac{b}{a}} x \quad (ab > 0) \\ \frac{1}{a} \sqrt[m]{\left(-\frac{a}{b}\right)^{n+1}} \int \frac{t^n dt}{1-t^m}, & \text{где } t = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}} x \quad (ab < 0) \end{cases}$$

ТАБЛИЦА 11
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{(ax^2 + bx + c)^m}, \quad b^2 - 4ac \neq 0; \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$11.1. \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\delta}} & \text{при } b^2 < 4ac; \\ \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\delta}}{2ax + b + \sqrt{\delta}} \right| & \text{при } b^2 > 4ac. \end{cases}$$

$$11.2. \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{-2ax - b}{\delta(ax^2 + bx + c)} - \frac{2a}{\delta} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.3. \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^3} = \frac{-2ax - b}{2\delta(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{3a(2ax + b)}{\delta^2(ax^2 + bx + c)} + \frac{6a^2}{\delta^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.4. \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{-2ax - b}{(m-1)\delta(ax^2 + bx + c)^{m-1}} - \frac{2(2m-3)a}{(m-1)\delta} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$11.5. \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{a\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\delta}} & (\delta < 0); \\ \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\delta}}{2ax + b + \sqrt{\delta}} \right| & (\delta > 0). \end{cases}$$

$$11.6. \int \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{bx + 2c}{\delta(ax^2 + bx + c)} + \frac{b}{\delta} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.7. \int \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{bx + 2c}{(m-1)\delta(ax^2 + bx + c)^{m-1}} - \frac{(2m-3)b}{(m-1)\delta} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} \quad (m \geq 2) \quad (\text{см. 11.4}).$$

$$11.8. \int \frac{x^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.9. \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = -\frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{a\delta(ax^2 + bx + c)} - \frac{2c}{\delta} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.10. \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{(b^2 - 2ac)x + bc}{(m-1)a\delta(ax^2 + bx + c)^{m-1}} - \frac{(m-4)b^2 + 10ac}{(m+1)a\delta} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} \quad (m \geq 2) \quad (\text{см. 11.4}).$$

$$11.11. \int \frac{x^3 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{ax^2 - bx}{2a^2} + \frac{b^2 - ac}{2a^2} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b(b^2 - 3ac)}{2a^3} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$11.12. \int \frac{x^n dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)a} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{n-2} dx}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{n-1} dx}{ax^2 + bx + c} \quad (n \geq 2).$$

$$11.13. \int \frac{x^3 dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{x^2}{2(m-2)a(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + \frac{c}{(m-2)a} \int \frac{x dx}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{(m-3)b}{2(m-2)a} \int \frac{x^2 dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (m \neq 2).$$

$$11.14. \int \frac{x^n dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{x^{n-1}}{(2m-n-1)a(ax^2 + bx + c)^{m-1}} + \frac{(n-1)c}{(2m-n-1)a} \int \frac{x^{n-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{(m-n)b}{(2m-n-1)a} \int \frac{x^{n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (n \neq 2m-1).$$

$$11.15. \int \frac{x^{2m-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2m-3} dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2m-3} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2m-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^m}.$$

ТАБЛИЦА 12
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^n (ax^2 + bx + c)^m}, \quad b^2 - 4ac \neq 0; \quad \begin{matrix} n = 1, 2, 3, \dots, \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$12.1. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)} = \begin{cases} \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} - \frac{b}{c\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\delta}} & (\delta < 0); \\ \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} - \frac{b}{2c\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\delta}}{2ax + b + \sqrt{\delta}} \right| & (\delta > 0) \end{cases}$$

$$12.2. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{abx - 2ac + b^2}{c\delta(ax^2 + bx + c)} + \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} + \frac{b(6ac - b^2)}{2c^2\delta} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$12.3. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^3} = \frac{2ax^2 + 2bx + 3c}{4c^2(ax^2 + bx + c)^2} + \frac{1}{2c^3} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} - \frac{b}{2c^3} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2c^2} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^3} \quad (\text{см. 11.1, 11.2 и 11.3}).$$

$$12.4. \int \frac{dx}{x(ax^2 + bx + c)^m} = -\frac{1}{c} \int \frac{t^{2m-3} dt}{(a + bt + ct^2)^{m-1}} + \frac{a}{c} \int \frac{t^{2m-3} dt}{(a + bt + ct^2)^m} + \frac{b}{c} \int \frac{t^{2m-2} dt}{(a + bt + ct^2)^m}, \quad \text{где } t = \frac{1}{x} \quad (\text{см. 11.13}).$$

$$12.5. \int \frac{dx}{x^2(ax^2 + bx + c)} = -\frac{1}{cx} - \frac{b}{2c^2} \ln \frac{x^2}{|ax^2 + bx + c|} + \frac{b^2 - 2ac}{2c^2} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \quad (\text{см. 11.1}).$$

$$12.6. \int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2a^2cx - ab^2x + 3abc - b^3}{c^2\delta(ax^2+bx+c)} - \frac{1}{c^2x^3} - \\ - \frac{b}{c^2} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2+bx+c} \right| + \frac{b^4 - 6ab^2c + 6a^2c^2}{c^3\delta} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \\ \text{(см. 11.1).}$$

$$12.7. \int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^3} = -\frac{1}{cx(ax^2+bx+c)^2} - \\ - \frac{3b}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^3} - \frac{5a}{c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^3} \quad \text{(см. 12.3 и 11.3).}$$

$$12.8. \int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^m} = -\frac{1}{cx(ax^2+bx+c)^{m-1}} - \\ - \frac{mb}{c} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^m} - \frac{(2m-1)a}{c} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \\ \text{(см. 12.4 и 11.4).}$$

$$12.9. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+bx+c)} = \frac{b^2-ac}{2c^3} \ln \left| \frac{x^2}{ax^2+bx+c} \right| + \frac{2bx-c}{2c^2x^2} + \\ + \frac{b(3c-b^2)}{2c^3} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad \text{(см. 11.1)}$$

$$12.10. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+bx+c)^2} = \frac{3bx-c}{2c^2x^2(ax^2+bx+c)} + \\ + \frac{3b^2-2ac}{c^2} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2} + \frac{9ab}{2c^2} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} \\ \text{(см. 12.2 и 11.2).}$$

$$12.11. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+bx+c)^3} = \frac{4bx-c}{2c^2x^2(ax^2+bx+c)^2} + \\ + \frac{6b^2-3ac}{c^2} \int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^3} + \frac{10ab}{c^2} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^3} \\ \text{(см. 12.3 и 11.3).}$$

$$12.12. \int \frac{dx}{x^n(ax^2+bx+c)^m} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1}(ax^2+bx+c)^{m-1}} - \\ - \frac{(n+m-2)b}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)^m} - \\ - \frac{(n+2m-3)a}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^2+bx+c)^m} \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 13
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{(\alpha x + \beta)^{\pm n} dx}{(ax^2 + bx + c)^m}, \quad b^2 - 4ac \neq 0; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ m = 1, 2, 3, \dots,$$

- 13.1. $\int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c} dx =$
- $$= \begin{cases} \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a\beta - b\alpha}{a\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\delta}} & (\delta < 0); \\ \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a\beta - b\alpha}{2a\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\delta}}{2ax + b + \sqrt{\delta}} \right| & (\delta > 0). \end{cases}$$
- 13.2. $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{b\alpha x + 2c\alpha}{\delta(ax^2 + bx + c)} + \frac{\alpha b}{\delta} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} +$
 $+ \beta \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}$ (см. 11.1 и 11.2).
- 13.3. $\int \frac{(\alpha x + \beta) dx}{(ax^2 + bx + c)^3} = -\frac{(b\alpha + 2a\beta)x + b\beta + 2c\alpha}{2\delta(ax^2 + bx + c)^2} -$
 $-\frac{6\alpha\beta - 3\alpha b}{2\delta} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2}$ (см. 11.2).
- 13.4. $\int \frac{(\alpha x + \beta)^2 dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha^2}{a} x + \frac{a\beta^2 - c\alpha^2}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} +$
 $+ \frac{\alpha}{a} (2a\beta - b\alpha) \int \frac{x dx}{ax^2 + bx + c}$ (см. 11.1 и 11.5).
- 13.5. $\int \frac{(\alpha x + \beta)^n dx}{(ax^2 + bx + c)^m} = \frac{\alpha(\alpha x + \beta)^{n-1}}{(n-2m+1)a(ax^2 + bx + c)^{m-1}} -$
 $-\frac{(n-1)(c\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2)}{(n-2m+1)a} \int \frac{(\alpha x + \beta)^{n-2} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} -$
 $-\frac{(n-m)(b\alpha - 2a\beta)}{(n-2m+1)a} \int \frac{(\alpha x + \beta)^{n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \quad (n \neq 2m-1);$
 $= \frac{(2a\beta - b\alpha - 2ax)(\alpha x + \beta)^n}{(m-1)\delta(ax^2 + bx + c)^{m-1}} +$
 $+ \frac{n(b\alpha - 2a\beta)}{(m-1)\delta} \int \frac{(\alpha x + \beta)^{n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} +$
 $+ \frac{2(n-2m+3)a}{(m-1)\delta} \int \frac{(\alpha x + \beta)^{n-1} dx}{(ax^2 + bx + c)^{m-1}} \quad (m \neq 1).$

$$13.6. \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)(ax^2 + bx + c)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha}{2(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2)} \ln \left| \frac{(\alpha x + \beta)^2}{ax^2 + bx + c} \right| - \\ \frac{b\alpha - 2a\beta}{(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2) \sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{-\delta}} \quad (\delta < 0); \\ \frac{\alpha}{2(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2)} \ln \left| \frac{(\alpha x + \beta)^2}{ax^2 + bx + c} \right| - \\ \frac{b\alpha - 2a\beta}{2(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2) \sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{\delta}}{2ax + b + \sqrt{\delta}} \right| \quad (\delta > 0). \end{cases}$$

$$13.7. \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)(ax^2 + bx + c)^2} = \frac{1}{2(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2)} \left[\frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} - \right.$$

$$\left. - 2\alpha^2 \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)(ax^2 + bx + c)} - (b\alpha - 2a\beta) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^2} \right]$$

(см. 13.6 и 11.2).

$$13.8. \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2(ax^2 + bx + c)} = -\frac{1}{\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2} \left[\frac{\alpha}{\alpha x + \beta} + \right.$$

$$\left. + (b\alpha - 2a\beta) \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)(ax^2 + bx + c)} + a \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \right]$$

(см. 13.6 и 11.1).

$$13.9. \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^n(ax^2 + bx + c)^m} =$$

$$= -\frac{\alpha}{(n-1)(\alpha^2 + b\alpha\beta + a\beta^2)(\alpha x + \beta)^{n-1}(ax^2 + bx + c)^{m-1}} -$$

$$-\frac{(n+2m-3)a}{2(n-1)(\alpha^2 - \alpha\beta b + a\beta^2)} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^{n-2}(ax^2 + bx + c)^m} -$$

$$-\frac{(n+m-2)(b\alpha - 2a\beta)}{(n-1)(\alpha^2 - \alpha\beta b + a\beta^2)} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^{n-1}(ax^2 + bx + c)^m} \quad (n \geq 2).$$

$$13.10. \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^n(ax^2 + bx + c)^m} =$$

$$= \frac{\alpha}{2(m-1)(\alpha^2 - \alpha\beta b + a\beta^2)(\alpha x + \beta)^{n-1}(ax^2 + bx + c)^{m-1}} -$$

$$-\frac{b\alpha - 2a\beta}{2(\alpha^2 - b\alpha\beta + a\beta^2)} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^{n-1}(ax^2 + bx + c)^m} +$$

$$+\frac{(n+2m-3)\alpha^2}{2(m-1)(\alpha^2 - \alpha\beta b + a\beta^2)} \int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^n(ax^2 + bx + c)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 14
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{(ax^{2k} + bx^k + c)^m}; \quad \begin{array}{l} k=2, 3, 4, \dots, \\ n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{array}$$

14.1. $\int \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} =$

$$= \begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{\delta}} \left[\int \frac{dx}{2ax^2 + b - \sqrt{\delta}} - \int \frac{dx}{2ax^2 + b + \sqrt{\delta}} \right] & \text{при } b^2 > 4ac, \\ \frac{a}{8|a|\sqrt{|c|}\sqrt{2\sqrt{ac}-b}} \ln \frac{x^2\sqrt{|a|} + x\sqrt{2\sqrt{ac}-b} + \sqrt{|c|}}{x^2\sqrt{|a|} - x\sqrt{2\sqrt{ac}-b} + \sqrt{|c|}} + \\ + \frac{a}{4|a|\sqrt{|c|}\sqrt{2\sqrt{ac}+b}} \operatorname{arctg} \frac{x^2\sqrt{|a|} - \sqrt{|c|}}{x\sqrt{2\sqrt{ac}-b}} & \text{при } b^2 < 4ac. \end{cases}$$

(см. 5.1 и 6.1);

14.2. $\int \frac{dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m} = \frac{abx^3 + (b^2 - 2ac)x}{2(m-1)c\delta} \cdot \frac{1}{(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} +$

$$+ \frac{2(m-1)\delta + 2ac - b^2}{2(m-1)c\delta} \int \frac{dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} +$$

$$+ \frac{(4m-7)ab}{2(m-1)c\delta} \int \frac{x^2 dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

14.3. $\int \frac{x dx}{ax^4 + bx^2 + c} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax^2 + b - \sqrt{\delta}}{2ax^2 + b + \sqrt{\delta}} \right| & \text{при } b^2 > 4ac; \\ \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax^2 + b}{\sqrt{-\delta}} & \text{при } b^2 < 4ac. \end{cases}$

14.4. $\int \frac{x^2 dx}{ax^4 + bx^2 + c} =$

$$\begin{cases} \frac{b + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \int \frac{dx}{2ax^2 + b + \sqrt{\delta}} - \frac{b - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}} \int \frac{dx}{2ax^2 + b - \sqrt{\delta}} & \text{при } b^2 > 4ac \text{ (см. 5.1 и 6.1);} \\ \frac{1}{4a\lambda} \left[\int \frac{x dx}{x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2} - \int \frac{x dx}{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2} \right], & \text{где } \lambda = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b}{4a}}}, \mu = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a} + \frac{b}{4a}}}, \\ & \text{при } b^2 < 4ac \text{ (см. 11.5).} \end{cases}$$

- 14.5. $\int \frac{x^3 dx}{ax^4 + bx^2 + c} =$
 $= \begin{cases} \frac{1}{4a} \ln |ax^4 + bx^2 + c| - \frac{b}{4a\sqrt{\delta}} \ln \left| \frac{2ax^2 + b - \sqrt{\delta}}{2ax^2 + b + \sqrt{\delta}} \right| & (\delta > 0); \\ \frac{1}{4a} \ln |ax^4 + bx^2 + c| - \frac{b}{2a\sqrt{-\delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax^2 + b}{\sqrt{-\delta}} & (\delta < 0). \end{cases}$
- 14.6. $\int \frac{x^n dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m} = \frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)a(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} -$
 $\frac{(n-3)c}{(n+1-4m)a} \int \frac{x^{n-4} dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m} -$
 $\frac{(n-1-2m)b}{(n+1-4m)a} \int \frac{x^{n-2} dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m} \quad (n+1 \neq 4m);$
 $= \frac{1}{a} \int \frac{x^{n-4} dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} -$
 $\frac{c}{a} \int \frac{x^{n-4} dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{n-2} dx}{(ax^4 + bx^2 + c)^m}.$
- 14.7. $\int \frac{x^n dx}{(ax^{2k} + bx^k + c)^m} = \frac{x^{n+1-2k}}{(n+1-2km)a(ax^{2k} + bx^k + c)^{m-1}} -$
 $\frac{(n+1-2k)c}{(n+1-2km)a} \int \frac{x^{n-2k} dx}{(ax^{2k} + bx^k + c)^m} -$
 $\frac{(n+1-k-km)b}{(n+1-2km)a} \int \frac{x^{n-k} dx}{(ax^{2k} + bx^k + c)^m} \quad (n \neq 2km-1).$
- 14.8. $\int \frac{dx}{x(ax^4 + bx^2 + c)} =$
 $= \frac{1}{4c} \ln \frac{x^4}{|ax^4 + bx^2 + c|} - \frac{b}{2c} \int \frac{x dx}{ax^4 + bx^2 + c} \quad (\text{см. 14.3}).$
- 14.9. $\int \frac{dx}{x^n(ax^4 + bx^2 + c)^m} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1}(ax^4 + bx^2 + c)^{m-1}} -$
 $\frac{n+2m-3}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^4 + bx^2 + c)^m} -$
 $\frac{n+2m-5}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-4}(ax^4 + bx^2 + c)^m} \quad (n \geq 2).$
- 14.10. $\int \frac{dx}{x^n(ax^{2k} + bx^k + c)^m} = \frac{-1}{(n-1)cx^{n-1}(ax^{2k} + bx^k + c)^{m-1}} -$
 $\frac{(n-1-k+mk)b}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-k}(ax^{2k} + bx^k + c)^m} -$
 $\frac{n-1-2k+2km}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-2k}(ax^{2k} + bx^k + c)^m} \quad (n \geq 2).$

ТАБЛИЦА 15
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n + \frac{1}{2}} dx}{(a \pm bx)^m}; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$15.1. \int \frac{\sqrt{x} dx}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{2\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{a-bx} = -\frac{2\sqrt{x}}{b} + \frac{\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.3. \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a+bx)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{b(a+bx)} + \frac{1}{b\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.4. \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{b(a-bx)} - \frac{1}{2b\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.5. \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^m} = \frac{\pm x \sqrt{x}}{(m-1)a(a \pm bx)^{m-1}} + \\ + \frac{2m-5}{2(m-1)a} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$15.6. \int \frac{x \sqrt{x} dx}{a+bx} = -\frac{6a\sqrt{x} + 2bx\sqrt{x}}{3b^2} + \frac{2a\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.7. \int \frac{x \sqrt{x} dx}{a-bx} = -\frac{6a\sqrt{x} + 2bx\sqrt{x}}{3b^2} + \frac{a\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.8. \int \frac{x \sqrt{x} dx}{(a+bx)^2} = \frac{3a\sqrt{x} + 2bx\sqrt{x}}{b^2(a+bx)} - \frac{3\sqrt{a}}{b^2\sqrt{b}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.9. \int \frac{x \sqrt{x} dx}{(a-bx)^2} = \frac{3a\sqrt{x} - 2bx\sqrt{x}}{b^2(a-bx)} - \frac{3\sqrt{a}}{2b^2\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.10. \int \frac{x \sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^m} = \pm \frac{x \sqrt{x}}{(m-1)b(a \pm bx)^{m-1}} \mp \\ \mp \frac{3}{2(m-1)b} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2) \text{ (см. 15.5).}$$

$$15.11. \int \frac{x^n \sqrt{x} dx}{a \pm bx} = 2 \sqrt{x} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu a^\nu x^{n-\nu}}{(2n-2\nu+1)(\pm b)^{\nu+1}} + \frac{a^{n+1}}{(\mp b)^{n+1}} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a \pm bx)} \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. 15.13 или 15.14}).$$

$$15.12. \int \frac{x^n \sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^m} = -\frac{x^n \sqrt{x} dx}{(m-1)b(a \pm bx)^{m-1}} + \frac{2n+1}{2(m-1)b} \int \frac{x^n \sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$15.13. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.14. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx)} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.15. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a+bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(a+bx)} + \frac{1}{a\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.16. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(a-bx)} + \frac{1}{2a\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.17. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(a \pm bx)^m} = \frac{2\sqrt{x}}{a(a \pm bx)^{m-1}} \pm \frac{(2m-3)b}{a} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(a \pm bx)^m} \quad (\text{см. 15.5}).$$

$$15.18. \int \frac{dx}{x\sqrt{x}(a+bx)} = -\frac{2}{a\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.19. \int \frac{dx}{x\sqrt{x}(a-bx)} = -\frac{2}{a\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{b}}{a\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.20. \int \frac{dx}{x\sqrt{x}(a+bx)^2} = -\frac{2a+3bx}{a^2(a+bx)\sqrt{x}} - \frac{3}{a^2} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{bx}{a}}.$$

$$15.21. \int \frac{dx}{x\sqrt{x}(a-bx)^2} = \frac{\sqrt{x}}{a(a-bx)} + \frac{1}{2a\sqrt{ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a} + \sqrt{bx}}{\sqrt{a} - \sqrt{bx}} \right|.$$

$$15.22. \int \frac{dx}{x^{n-\frac{1}{2}}(a \pm bx)^m} = -\frac{2\sqrt{x}}{(2n-3)ax^{n-1}(a \pm bx)^{m-1}} \mp \frac{(2m+2n-5)b}{(2n-3)a} \int \frac{dx}{x^{n-\frac{3}{2}}(a \pm bx)^m}.$$

ТАБЛИЦА 16

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(a+bx)^m}}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 3, 5, \dots$$

$$16.1. \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx}.$$

$$16.2. \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{(m-2)b\sqrt{(a+bx)^{m-2}}}.$$

$$16.3. \int \frac{x dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{3b^2} (bx-2a).$$

$$16.4. \int \frac{x dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^2\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \left(-\frac{a+bx}{m-4} + \frac{a}{m-2} \right).$$

$$16.5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3} \left[\frac{(a+bx)^2}{5} - \frac{2a(a+bx)}{3} + a^2 \right].$$

$$16.6. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{2}{b^3\sqrt{a+bx}} \left[\frac{(a+bx)^2}{3} - 2a(a+bx) - a^2 \right].$$

$$16.7. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \\ = \frac{2}{b^3\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \left[-\frac{(a+bx)^2}{m-6} + \frac{2\sqrt{a+bx}}{m-4} - \frac{a^2}{m-2} \right].$$

$$16.8. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx}} = \\ = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^4} \left[\frac{(a+bx)^3}{7} - \frac{3a(a+bx)^2}{5} + a^2(a+bx) - a^3 \right]$$

$$16.9. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a+bx)^3}} = \\ = \frac{2}{b^4\sqrt{a+bx}} \left[\frac{(a+bx)^3}{5} - a(a+bx)^2 + 3a^2(a+bx) + a^3 \right]$$

$$16.10. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^4\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \left[-\frac{(a+bx)^3}{m-8} + \right. \\ \left. + \frac{3a(a+bx)^2}{m-6} - \frac{3a^2(a+bx)}{m-4} + \frac{a^3}{m-2} \right]$$

$$16.11. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{b^{n+1}\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu C_n^\nu (a+bx)^{n-\nu} a^\nu}{2n-2\nu-m+2}$$

$$16.12. \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| & \text{при } a > 0; \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

$$16.13. \int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{2}{a\sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$16.14. \int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{2}{(m-2)a\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$16.15. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$16.16. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx)^3}} = \frac{-a-3b}{a^2x\sqrt{a+bx}} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$16.17. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{-1}{ax\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} - \frac{mb}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^m}} \quad (\text{см. 16.14}).$$

$$16.18. \int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}} = \frac{3bx-2a}{4a^2x^2}\sqrt{a+bx} + \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$16.19. \int \frac{dx}{x^n\sqrt{a+bx}} = \frac{\sqrt{a+bx}}{(n-1)ax^{n-1}} - \frac{(2n-3)b}{2(n-1)a} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{a+bx}} \quad (n \geq 2).$$

$$16.20. \int \frac{dx}{x^n\sqrt{(a+bx)^m}} = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}\sqrt{(a+bx)^m}} - \frac{mb}{2(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{(a+bx)^{m+2}}} \quad (n \geq 2);$$

$$= \frac{-2}{(m-2)bx^n\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} - \frac{2n}{(m-2)b} \int \frac{dx}{x^{n+1}\sqrt{(a+bx)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

ТАБЛИЦА 17
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \sqrt{(a+bx)^m} dx; \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 3, 5, \dots \end{matrix}$$

$$17.1. \int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^3}}{3b}.$$

$$17.2. \int \sqrt{(a+bx)^m} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{(m+2)b}.$$

$$17.3. \int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{b^2} \left[\frac{\sqrt{(a+bx)^5}}{5} - \frac{a \sqrt{(a+bx)^3}}{3} \right].$$

$$17.4. \int x \sqrt{(a+bx)^m} dx = \frac{2}{b^2} \left[\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+4}}}{m+4} - \frac{a \sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{m+2} \right].$$

$$17.5. \int x^2 \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{b^3} \left[\frac{\sqrt{(a+bx)^7}}{7} - \frac{2a \sqrt{(a+bx)^5}}{5} + \frac{a^2 \sqrt{(a+bx)^3}}{3} \right].$$

$$17.6. \int x^2 \sqrt{(a+bx)^3} dx = \frac{2}{b^3} \left[\frac{\sqrt{(a+bx)^9}}{9} - \frac{2a \sqrt{(a+bx)^7}}{7} + \frac{a^2 \sqrt{(a+bx)^5}}{5} \right].$$

$$17.7. \int x^2 \sqrt{(a+bx)^m} dx = \frac{2}{b^3} \left[\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+6}}}{m+6} - \frac{2a \sqrt{(a+bx)^{m+4}}}{m+4} + \frac{a^2 \sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{m+2} \right].$$

$$17.8. \int x^3 \sqrt{a+bx} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^3}}{b^4} \left[\frac{(a+bx)^3}{9} - \frac{3(a+bx)^2 a}{7} + \frac{3(a+bx) a^2}{5} - \frac{a^3}{3} \right].$$

$$17.9. \int x^3 \sqrt{(a+bx)^3} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^3}}{b^4} \left[\frac{(a+bx)^3}{11} - \frac{3(a+bx)^2 a}{9} + \frac{3(a+bx) a^2}{7} - \frac{a^3}{5} \right].$$

$$17.10. \int x^3 \sqrt{(a+bx)^m} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{b^4} \left[\frac{(a+bx)^3}{8+m} - \frac{3(a+bx)^2 a}{6+m} + \frac{3(a+bx) a^2}{4+m} - \frac{a^3}{2+m} \right].$$

$$17.11. \int x^n \sqrt{(a+bx)^m} dx = \frac{2 \sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{b^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu C_n^\nu (a+bx)^{n-\nu} a^\nu}{2n-2\nu+m+2}.$$

$$17.12. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = \begin{cases} 2\sqrt{a+bx} + \sqrt{a} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| & \text{при } a > 0; \\ 2\sqrt{a+bx} + \frac{2a}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

$$17.13. \int \frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{x} dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^3}}{3} + 2a\sqrt{a+bx} + a^2 \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$17.14. \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x} dx = \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(a+bx)^{\frac{m+1}{2}-\nu}}{(m-2\nu)} a^\nu + a^{\frac{m-1}{2}} \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx \quad (\text{см. 17.12}).$$

$$17.15. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$17.16. \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{ax} + \frac{mb}{2a} \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x} dx \quad (\text{см. 17.14}).$$

$$17.17. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^3} dx = -\frac{(2a+bx)\sqrt{a+bx}}{4ax^2} - \frac{b^2}{8a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} \quad (\text{см. 16.12}).$$

$$17.18. \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{2ax^2} + \frac{(m-2)b}{4a} \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^2} dx.$$

$$17.19. \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^n} dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{(n-1)ax^{n-1}} + \frac{(5-2n)b}{2(n-1)a} \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^{n-1}} dx \quad (n \geq 2).$$

$$17.20. \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^n} dx = -\frac{\sqrt{(a+bx)^{m+2}}}{(n-1)ax^{n-1}} + \frac{(m-2n+4)b}{2(n-1)a} \int \frac{\sqrt{(a+bx)^m}}{x^{n-1}} dx \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 18
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sqrt{(a+bx)^{\pm n} (c+fx)^{\pm m}} dx;$$

$$af - bc \neq 0, \quad n=1, 3, 5, \dots,$$

$$m=1, 3, 5, \dots$$

$$18.1. \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}} = \begin{cases} \frac{-1}{\sqrt{-bf}} \arcsin \frac{2bfx+af+bc}{\Delta} & \text{при } bf < 0; \\ \frac{2}{\sqrt{bf}} \ln | \sqrt{bf(a+bx)+b} \sqrt{c+fx} | & \text{при } bf > 0. \end{cases}$$

$$18.2. \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^3}} = -\frac{2}{\Delta} \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}}.$$

$$18.3. \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^5}} = -\frac{2}{\Delta} \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^3}} + b \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} \right].$$

$$18.4. \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^m}} = -\frac{2}{(m-2)\Delta} \left[\sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^{m-2}}} + \frac{(m-3)b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^{m-2}} \right] \quad (m \geq 3).$$

$$18.5. \int \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}}{f} + \frac{\Delta}{2f\sqrt{-bf}} \arcsin \frac{2bfx+af+bc}{\Delta} & \text{при } bf < 0; \\ \frac{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}}{f} - \frac{\Delta}{f\sqrt{bf}} \ln | \sqrt{bf(a+bx)+b} \sqrt{c+fx} | & \text{при } bf > 0. \end{cases}$$

$$18.6. \int \sqrt{\frac{(a+bx)^3}{c+fx}} dx = \frac{\sqrt{(a+bx)^3(c+fx)}}{2f} - \frac{3\Delta}{4f} \int \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} dx \quad (\text{см. 18.5}).$$

$$18.7. \int \sqrt{\frac{(a+bx)^5}{c+fx}} dx = \frac{\sqrt{(a+bx)^5(c+fx)}}{3f} - \frac{5\Delta \sqrt{(a+bx)^3(c+fx)}}{4f} + \frac{15\Delta^2}{8f} \int \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} dx \quad (\text{см. 18.5}).$$

- 18.8.
$$\int \sqrt{\frac{(a+bx)^n}{c+fx}} dx = \frac{\sqrt{(a+bx)^n (c+fx)}}{(n+1)f} - \frac{n\Delta}{(n+1)f} \int \sqrt{\frac{(a+bx)^{n-2}}{c+fx}} dx.$$
- 18.9.
$$\int \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^3}} dx = -\frac{2}{f} \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} - \frac{1}{f} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}} \quad (\text{см. 18.1}).$$
- 18.10.
$$\int \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^5}} dx = -\frac{1}{f} \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^3}} - \frac{\Delta}{f^2} \sqrt{\frac{a+bx}{c+fx}} + \frac{\Delta}{2f^2} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)}} \quad (\text{см. 18.1}).$$
- 18.11.
$$\int \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^m}} dx = -\frac{2}{(m-3)f} \sqrt{\frac{a+bx}{(c+fx)^{m-2}}} - \frac{\Delta}{(m-3)f} \int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx)(c+fx)^m}} \quad (m \geq 3) \quad (\text{см. 18.4}).$$
- 18.12.
$$\int \sqrt{(a+bx)(c+fx)} dx = \begin{cases} \frac{af+bc+2bfx}{4bf} \sqrt{(a+bx)(c+fx)} + \frac{\Delta^2}{8bf\sqrt{-bf}} \arcsin \frac{af+bc+2bfx}{|af-bc|} & \text{при } bf < 0; \\ \frac{af+bc+2bfx}{4bd} \sqrt{(a+bx)(c+dx)} - \frac{\Delta^2}{4bf\sqrt{bf}} \ln |\sqrt{bf(a+bx)} + b\sqrt{c+fx}| & \text{при } bf > 0. \end{cases}$$
- 18.13.
$$\int \sqrt{(a+bx)^3(c+fx)} dx = \frac{\sqrt{(a+bx)^5(c+fx)}}{3b} + \frac{\Delta}{6b} \int \sqrt{\frac{(a+bx)^3}{c+fx}} dx \quad (\text{см. 18.6}).$$
- 18.14.
$$\int \sqrt{(a+bx)^5(c+fx)} dx = \frac{\sqrt{(a+bx)^7(c+fx)}}{4b} + \frac{\Delta}{8b} \int \sqrt{\frac{(a+bx)^5}{c+fx}} dx \quad (\text{см. 18.7}).$$
- 18.15.
$$\int \sqrt{(a+bx)^n(c+fx)} dx = \frac{2\sqrt{(a+bx)^{n+2}(c+fx)}}{(n+3)b} + \frac{\Delta}{(n+3)b} \int \sqrt{\frac{(a+bx)^n}{c+fx}} dx \quad (\text{см. 18.8}).$$

ТАБЛИЦА 19

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$19.1. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.2. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}.$$

$$19.3. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}} = \frac{1}{a^4} \left[\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} - \frac{b^2 x^3}{3 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} \right].$$

$$19.4. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-3}^\nu b^{2\nu} x^{2\nu+1}}{(2\nu+1) \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{2\nu+1}}} \quad (m \geq 3).$$

$$19.5. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{b^2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$19.6. \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = -\frac{1}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}.$$

$$19.7. \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2) b^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$19.8. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2b^2} - \frac{a^2}{2b^3} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.9. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = -\frac{x}{b^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} + \frac{1}{b^3} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.10. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}} = \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}.$$

$$19.11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-3}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-5}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-5}^\nu b^{2\nu} x^{2\nu+3}}{(2\nu+3) \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{2\nu+3}}} \quad (m \geq 5).$$

$$19.12. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{3b^4} - \frac{a^2}{b^4} \sqrt{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$19.13. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{b^4} + \frac{a^2}{b^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

$$19.14. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-4)b^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-4}}} + \\ + \frac{a^2}{(m-2)b^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}}.$$

$$19.15. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{x^3 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{4b^2} - \frac{3a^2 x}{8b^4} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \\ + \frac{3a^4}{8b^5} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.16. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2b^4} + \frac{a^2 x}{b^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} - \\ - \frac{3a^2}{2b^5} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.17. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}} = -\frac{3a^2 x + 4b^2 x^3}{3b^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} + \frac{1}{b^5} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$19.18. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-5}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-7}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-\nu}^\nu b^{2\nu} x^{2\nu+5}}{(2\nu+5) \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{2\nu+5}}} \quad (m \geq 7).$$

$$19.19. \int \frac{x^{2k+1} dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{2} \int \frac{t^k dt}{\sqrt{(a^2 + b^2 t)^m}}, \quad \text{где } t = x^2 \quad (\text{см. 16.11}).$$

$$19.20. \int \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \\ = \frac{1}{a^{m-2k-1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-2k-3}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-2k-\nu}^\nu b^{2\nu} x^{2\nu+2k+1}}{(2\nu+2k+1) \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{2\nu+2k+1}}} \quad (m \geq 2k+3).$$

$$19.21. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = -\frac{x^{n-1}}{(m-2)b^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} + \\ + \frac{n-1}{(m-2)b^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}}.$$

ТАБЛИЦА 20
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}; \quad a > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$20.1. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.2. \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.3. \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{(m-2\nu) a^{2\nu} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2\nu}}} - \\ - \frac{1}{a^m} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right| \quad (m \geq 3).$$

$$20.4. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{a^2 x}.$$

$$20.5. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = -\frac{a^2 + 2b^2 x^2}{a^4 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}.$$

$$20.6. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-1}^\nu b^{2\nu} x^{2\nu-1}}{(2\nu-1) \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{2\nu-1}}}.$$

$$20.7. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2a^2 x^2} + \frac{b^2}{2a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.8. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = -\frac{a^2 + 3b^2 x^2}{2a^4 x^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} + \frac{3b^2}{2a^5} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.9. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2) b^2 x^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} - \\ - \frac{4}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$20.10. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{2b^2 x^2 - a^2}{a^4 x} \sqrt{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$20.11. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{8b^4 x^4 + 4a^2 b^2 x^2 - a^4}{3a^6 x^3 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}.$$

$$20.12. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} =$$

$$= \frac{1}{a^{m+3}} + \sum_{\nu=0}^{\frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-3} C_{\frac{m+1}{2}}^\nu b^{2\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} \right)^{2\nu-3}.$$

$$20.13. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{3b^2 x^2 - 2a^2}{8a^4 x^4} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} -$$

$$- \frac{3b^4}{8a^5} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.14. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{15b^4 x^4 + 5a^2 b^2 x^2 - 2a^4}{8a^6 x^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} -$$

$$- \frac{15b^4}{8a^7} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$20.15. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = - \frac{1}{(m-2) b^2 x^6 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} -$$

$$- \frac{6}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^7 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$20.16. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{a^6} \left[- \frac{b^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} + \frac{2b^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{3x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}}{5x^5} \right].$$

$$20.17. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}} = \frac{1}{a^8} \left[- \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}}{5x^5} + \frac{b^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{x^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{3b^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} - \frac{b^6 x}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} \right].$$

$$20.18. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} =$$

$$= \frac{1}{a^{m+5}} - \sum_{\nu=0}^{\frac{m+3}{2}} \frac{(-1)^\nu}{2\nu-5} C_{\frac{m+3}{2}}^\nu b^{2\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} \right)^{2\nu-5}.$$

$$20.19. \int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}} = - \frac{1}{(m-2) b^2 x^{n+1} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} -$$

$$- \frac{n+1}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^{n+2} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3)$$

ТАБЛИЦА 21
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$21.1. \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.2. \int \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3} dx = \\ = \frac{5a^2 x + 2b^2 x^3}{8} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{3a^4}{8b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.3. \int \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx = \\ = \frac{x}{m+1} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} + \frac{ma^2}{m+1} \int \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}} dx.$$

$$21.4. \int x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^2}.$$

$$21.5. \int x^2 \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \\ = \frac{a^2 x + 2b^2 x^3}{8b^2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - \frac{a^3}{8b^3} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.6. \int x^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3} dx = \frac{x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}}{6b^2} - \frac{a^2 x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{24b^2} - \\ - \frac{a^4 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{16b^2} - \frac{a^6}{16b^3} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.7. \int x^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx = \frac{x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+3)b^2} - \\ - \frac{a^2}{(m+3)b^2} \int \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx \quad (\text{см. 21.3}).$$

$$21.8. \int x^3 \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^5}}{5b^4} - \frac{a^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{3b^4}.$$

$$21.9. \int x^3 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m+4}}}{(m+4)b^4} - \frac{a^2 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^4}.$$

$$21.10. \int x^4 \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{x^3 \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{6b^2} - \frac{a^2 x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{8b^4} + \\ + \frac{a^4 x \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{16b^4} + \frac{a^6}{16b^3} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.11. \int x^n \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx = \frac{x^{n-1} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+n+1) b^2} - \frac{(n-1) a^2}{(m+n+1) b^2} \int x^{n-2} \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx.$$

$$21.12. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$21.13. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{x} dx = \frac{4a^2 + b^2 x^2}{3} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - a^3 \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$21.14. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}{x} dx = \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}{m} + a^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}}{x} dx.$$

$$21.15. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} + b \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.16. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{x^2} dx = \frac{b^2 x^2 - 2a^2}{2x} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + \frac{3ba^2}{2} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}|.$$

$$21.17. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}{x} + mb^2 \int x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}} dx \quad (\text{см. 21.4}).$$

$$21.18. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2x^2} - \frac{b^2}{2a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$21.19. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{x^3} dx = \frac{2b^2 x^2 - a^2}{2x^2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} - \frac{3}{2} ab^2 \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$21.20. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x^4} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3}}{3a^2 b^2 x^3}.$$

$$21.21. \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m}}{x^n} dx = a^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}}{x^n} dx + b^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^{m-2}}}{x^{n-2}} dx.$$

ТАБЛИЦА 22
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

- 22.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a}.$
- 22.2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$
- 22.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^5}} = \frac{3a^2 - 2b^2 x^2}{3a^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}.$
- 22.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{C_{m-3}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu+1}}{(2\nu+1) \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{2\nu+1}}} \quad (m \geq 3).$
- 22.5. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{b^2}.$
- 22.6. $\int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{(m-2) b^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}.$
- 22.7. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \arcsin \frac{bx}{a}.$
- 22.8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{x}{b^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{1}{b^3} \arcsin \frac{bx}{a}.$
- 22.9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^5}} = \frac{x^3}{3a^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}.$
- 22.10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-3}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-5}{2}} \frac{C_{m-5}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu+3}}{(2\nu+3) \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{2\nu+3}}} \quad (m \geq 5).$
- 22.11. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{2a^2 + b^2 x^2}{3b^4} \sqrt{a^2 - b^2 x^2}.$

$$22.12. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{2a^2 - b^2 x^2}{b^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

$$22.13. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = -\frac{1}{(m-4) b^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-4}}} + \frac{a^2}{(m-2) b^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}.$$

$$22.14. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{2b^2 x^3 + 3a^2 x}{8b^4} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + \frac{3a^4}{8b^5} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$22.15. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^4} + \frac{a^2 x}{b^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{a^2}{b^5} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$22.16. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^5}} = -\frac{x}{b^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} + \frac{x^3}{3b^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} + \frac{1}{b^5} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$22.17. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-5}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-7}{2}} \frac{C_{m-7}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu+5}}{(2\nu+5) \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{2\nu+5}}} \quad (m \geq 7).$$

$$22.18. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{x^{n-1} \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{b^2} + \frac{n-1}{b^2} \int x^{n-2} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx.$$

$$22.19. \int \frac{x^{2k+1} dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{2} \int \frac{t^k dt}{\sqrt{(a^2 - b^2 t)^m}}, \text{ где } t = x^2 \quad (\text{см. 16.11}).$$

$$22.20. \int \frac{x^{2k} dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m-2k-1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-2k-3}{2}} \frac{C_{m-2k-3}^{\nu} x^{2\nu+2k+1}}{(2\nu+2k+1) \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{2\nu+2k+1}}} \quad (m \geq 2k+3).$$

$$22.21. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{x^{n-1}}{(m-2) b^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} - \frac{n-1}{(m-2) b^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

ТАБЛИЦА 23
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}; \quad a > 0, n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, m = 1, 3, 5, \dots$$

$$23.1. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.2. \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.3. \int \frac{dx}{x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{(m-2\nu) a^{2\nu} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2\nu}}} - \\ - \frac{1}{a^m} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right| \quad (m \geq 3).$$

$$23.4. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{a^2 x}.$$

$$23.5. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{2b^2 x^2 - a^2}{a^4 x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

$$23.6. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{a^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{C_{m-1}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu-1}}{(2\nu-1) \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{2\nu-1}}}.$$

$$23.7. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2a^2 x^2} - \frac{b^2}{2a^3} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.8. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = \frac{3b^2 x^2 - a^2}{2a^4 x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{3b^2}{2a^5} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.9. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{(m-2) b^2 x^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} + \\ + \frac{4}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$23.10. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{a^2 + 2b^2 x^2}{3a^4 x^3} \sqrt{a^2 - b^2 x^2}.$$

$$23.11. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = -\frac{1}{a^6} \left[-\frac{b^4 x}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} + \frac{2b^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x} + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3x^3} \right].$$

$$23.12. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{-1}{a^{m+3}} \left[\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3x^3} + \frac{m+1}{2} \sum_{\nu=2}^2 \frac{(-1)^\nu}{2\nu-3} C_{m+1}^\nu b^{2\nu} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} \right)^{2\nu-3} \right] \quad (m \geq 3).$$

$$23.13. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{4a^2 x^4} - \frac{3b^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{8a^4 x^2} - \frac{3b^4}{8a^5} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.14. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}} = -\frac{1}{4a^2 x^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{5b^2}{8a^4 x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} + \frac{15b^4}{8a^6 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} - \frac{15b^4}{8a^7} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$23.15. \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{(m-2) b^2 x^6 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} + \frac{6}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^7 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$23.16. \int \frac{dx}{x^6 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = -\frac{1}{a^6} \left[\frac{b^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x} + \frac{2b^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3x^3} + \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^5}}{5x^5} \right].$$

$$23.17. \int \frac{dx}{x^n \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}} = \frac{1}{(m-2) b^2 x^{n+1} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} + \frac{n+1}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^{n+2} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

ТАБЛИЦА 24
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx; \quad a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$24.1. \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = \frac{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.2. \int \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3} dx = \frac{5a^2 x - 2b^2 x^3}{8} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + \frac{3a^4}{8b} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.3. \int \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx = \frac{x}{m+1} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} + \\ + \frac{ma^2}{m+1} \int \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}} dx \quad (m \geq 3).$$

$$24.4. \int x \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3b^2}.$$

$$24.5. \int x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^2}.$$

$$24.6. \int x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = \frac{2b^2 x^3 - a^2 x}{8b^2} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + \frac{a^4}{8b^3} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.7. \int x^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3} dx = -\frac{x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^5}}{6b^2} + \\ + \frac{a^2 x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{24b^2} + \frac{a^4 x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{16b^2} + \frac{a^6}{16b^3} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.8. \int x^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx = -\frac{x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+3)b^2} + \\ + \frac{a^2}{(m+3)b^2} \int \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx \quad (\text{см. 24.3}).$$

$$24.9. \int x^3 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+4}}}{(m+4)b^4} - \frac{a^2 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^4}.$$

$$24.10. \int x^4 \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx = -\frac{x^3 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{6b^2} - \frac{a^2 x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{8b^4} + \\ + \frac{a^4 x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{16b^4} + \frac{a^6}{16b^5} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.11. \int x^n \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx = -\frac{x^{n-1} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+n+1)b^2} + \\ + \frac{(n-1)a^2}{(m+n+1)b^2} \int x^{n-2} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx.$$

$$24.12. \int \frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - b^2 x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$24.13. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{x} dx = \\ = \frac{4a^2 - b^2 x^2}{3} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} - a^3 \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$24.14. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}{x} dx = \\ = \frac{1}{m} \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} + a^2 b^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}{x} dx.$$

$$24.15. \int \frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x} - b \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$24.16. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{x^2} dx = \\ = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{x} - \frac{3b^2 x}{2} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} - \frac{3a^2 b}{2} \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.17. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}{x^2} dx = a^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}{x^2} dx - \\ - b^2 \int \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}} dx \quad (\text{см. 24.3}).$$

$$24.18. \int \frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2x^2} + \frac{b^2}{2a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$24.19. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{x^3} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{2x^2} - \frac{3b^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2} + \\ + \frac{3ab^2}{2} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right|.$$

$$24.20. \int \frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x^4} dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3a^2 x^3}.$$

$$24.21. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{x^4} dx = \\ = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}{3x^3} + \frac{b^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{x} + b^3 \arcsin \frac{bx}{a}.$$

$$24.22. \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m}}{x^n} dx = a^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}{x^n} dx - \\ - b^2 \int \frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m-2}}}{x^{n-2}} dx \quad (m \geq 3).$$

ТАБЛИЦА 25
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{\pm m}} dx; \quad \begin{array}{l} a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b > 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \end{array}$$

$$25.1. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.2. \int \frac{dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{a^{m-1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(-1)^{\nu} C_{\frac{m-3}{2}}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu+1}}{(2\nu+1) \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{2\nu+1}}} \quad (m \geq 3).$$

$$25.3. \int \frac{x dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2) b^2 \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}}.$$

$$25.4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{x^2 \sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{2b} + \frac{a^2}{2b^3} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.5. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{b^2 \sqrt{b^2 x^2 - a^2}} + \frac{1}{b^3} \ln |bx \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.6. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = \frac{(-1)^{\frac{m-3}{2}}}{a^{m-3}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-5}{2}} \frac{(-1)^{\nu} C_{\frac{m-5}{2}}^{\nu} b^{2\nu} x^{2\nu+3}}{(2\nu+3) \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{2\nu+3}}} \quad (m \geq 5).$$

$$25.7. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{x^{n-1} \sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{b^2} - \frac{n-1}{b^2} \int x^{n-2} \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx.$$

$$25.8. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = -\frac{x^{n-1}}{(m-2) b^2 \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}} + \frac{n-1}{(m-2) b^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$25.9. \int \frac{dx}{x \sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \left| \frac{a}{bx} \right|.$$

$$25.10. \int \frac{dx}{x \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3}} = -\frac{1}{a^2 \sqrt{b^2 x^2 - a^2}} - \frac{1}{a^3} \arccos \left| \frac{a}{bx} \right|.$$

$$25.11. \int \frac{dx}{x \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^{\nu}}{(m-2\nu) a^{2\nu} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2\nu}}} - \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{a^m} \arccos \left| \frac{a}{bx} \right| \quad (m \geq 3).$$

$$25.12. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{a^2 x}.$$

$$25.13. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3}} = -\frac{1}{a^4} \left[\frac{\sqrt{b^2 a^2 - a^2}}{x} + \frac{x b^2}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} \right].$$

$$25.14. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{a^{m+1}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-1}{2}} \frac{(-1)^\nu C_{m-1}^\nu x^{2\nu-1} b^{2\nu}}{(2\nu-1) \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{2\nu-1}}}.$$

$$25.15. \int \frac{dx}{x^n \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}} = -\frac{1}{(m-2) b^2 x^{n+1} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}} - \frac{n+1}{(m-2) b^2} \int \frac{dx}{x^{n+1} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}} \quad (m \geq 3).$$

$$25.16. \int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx = \frac{x \sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.17. \int \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3} dx = \frac{2b^2 x^3 - 5a^2 x}{8} \sqrt{b^2 x^2 - a^2} + \frac{3a^4}{8b} \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.18. \int \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m} dx = \frac{x}{m+1} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m} - \frac{ma^2}{m+1} \int \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}} dx.$$

$$25.19. \int x^n \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m} dx = \frac{x^{n-1} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m+2}}}{(m+n+1) b^2} + \frac{(n-1) a^2}{(m+n+1) b} \int x^{n-2} \sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m} dx.$$

$$25.20. \int \frac{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{b^2 x^2 - a^2} - a \arccos \left| \frac{a}{bx} \right|.$$

$$25.21. \int \frac{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3}}{x} dx = \frac{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^3}}{3} - a^2 \sqrt{b^2 x^2 - a^2} + a^3 \arccos \left| \frac{a}{bx} \right|.$$

$$25.22. \int \frac{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}{x} + b \ln |bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2}|.$$

$$25.23. \int \frac{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^m}}{x^n} dx = -a^2 \int \frac{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}}{x^n} dx + b^2 \int \frac{\sqrt{(b^2 x^2 - a^2)^{m-2}}}{x^{n-2}} dx.$$

ТАБЛИЦА 26
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^m}}; \quad \begin{array}{l} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 3, 5, \dots \end{array}$$

$$26.1. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}} = \ln |2x + p + 2\sqrt{x^2 + px + q}|.$$

$$26.2. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| & \text{при } a > 0, b^2 \neq 4ac; \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax + b| & \text{при } a > 0, b^2 = 4ac; \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} & \text{при } a < 0, b^2 > 4ac. \end{cases}$$

$$26.3. \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = \frac{4ax + 2b}{(4ac - b^2)\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

$$26.4. \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^5}} = \frac{4ax + 2b}{3(4ac - b^2)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \left(\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{8a}{4ac - b^2} \right).$$

$$26.5. \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^m}} = \frac{4ax + 2b}{(m-2)(4ac - b^2)\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{m-2}}} + \frac{4(m-3)a}{(m-2)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{m-2}}} \quad (m \geq 3).$$

$$26.6. \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (\text{см. 26.2}).$$

$$26.7. \int \frac{x dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = -\frac{2bx + 4c}{(4ac - b^2)\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

$$26.8. \int \frac{x dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^m}} = -\frac{1}{(m-2)a\sqrt{(ax^2 + bx + c)^{m-2}}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^m}} \quad (\text{см. 26.5}).$$

$$26.9. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.2}).$$

$$26.10. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{8a^2x^2-10abx+15b^2-8ac}{24a^3} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{5b^3-12bc}{16a^3} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.2}).$$

$$26.11. \int \frac{x^n dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{n-1} dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}}.$$

$$26.12. \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{bx+2c+2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} \right| & \text{при } c > 0, b^2 \neq 4ac; \\ -\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left| \frac{bx+2c}{x} \right| & \text{при } c > 0, b^2 = 4ac; \\ \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}} & \text{при } c < 0, b^2 > 4ac. \end{cases}$$

$$26.13. \int \frac{dx}{x \sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} = \frac{1}{(m-2)c \sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}}} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x \sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} \quad (\text{см. 26.5}).$$

$$26.14. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{ax} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.12}).$$

$$26.15. \int \frac{dx}{x^n \sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1} \sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}}} - \frac{(2n+m-4)b}{2(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} - \frac{(n+m-3)a}{(n-1)c} \int \frac{dx}{x^{n-2} \sqrt{(ax^2+bx+c)^m}} \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 27
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^m} dx; \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots \\ m=1, 3, 5, \dots \end{matrix}$$

$$27.1. \int \sqrt{x^2 + px + q} dx = \frac{2x+p}{4} \sqrt{x^2 + px + q} + \frac{4q-p^2}{8} \ln |2\sqrt{x^2 + px + q} + 2x + p|.$$

$$27.2. \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| & \text{при } a>0, \quad b^2 \neq 4ac; \\ \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} & \text{при } a>0, \quad b^2 = 4ac; \\ \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{b^2-4ac}{8a\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} & \text{при } a<0, \quad b^2 > 4ac. \end{cases}$$

$$27.3. \int \sqrt{(ax^2 + bx + c)^m} dx = \frac{2ax+b}{2(m+1)a} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^m} + \frac{m(4ac-b^2)}{4(m+1)a} \int \sqrt{(ax^2 + bx + c)^{m-2}} dx.$$

$$27.4. \int x \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}}{3a} - \frac{b}{2a} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad (\text{см. 27.2}).$$

$$27.5. \int x^2 \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{6ax-5b}{24a^2} \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3} + \frac{5b^2-4ac}{16a^2} \int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad (\text{см. 27.2}).$$

$$27.6. \int x^3 \sqrt{ax^2+bx+c} dx = -\frac{7b^3-12bc}{32a^3} \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx + \\ + \frac{48a^2x^2-42abx+35b^2-32ac}{240a^3} \sqrt{(ax^2+bx+c)^3} \quad (\text{см. 27.2}).$$

$$27.7. \int x^n \sqrt{(ax^2+bx+c)^m} dx = \frac{x^{n-1} \sqrt{(ax^2+bx+c)^{m+2}}}{(m+n+1)a} - \\ - \frac{(n-1)c}{(m+n+1)a} \int x^{n-2} \sqrt{(ax^2+bx+c)^m} dx - \\ - \frac{(2n+m)b}{(m+n+1)2a} \int x^{n-1} \sqrt{(ax^2+bx+c)^m} dx.$$

$$27.8. \int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} dx = \sqrt{ax^2+bx+c} + \\ + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + c \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.2 и 26.12}).$$

$$27.9. \int \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}}{x} dx = \frac{1}{m} \sqrt{(ax^2+bx+c)^m} + \\ + \frac{b}{2} \int \sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}} dx + c \int \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^{m-2}}}{x} dx \quad (\text{см. 27.3}).$$

$$27.10. \int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x} + \\ + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx+c}} + a \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.12 и 26.2}).$$

$$27.11. \int \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^3} dx = -\frac{2c+bx}{4cx^2} \sqrt{ax^2+bx+c} - \\ - \frac{b^2-4ac}{8c} \int \frac{dx}{x \sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (\text{см. 26.12}).$$

$$27.12. \int \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}}{x^n} dx = -\frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^{m+2}}}{(n-1)cx^{n-1}} + \\ + \frac{(m-2n+4)b}{2(n-1)c} \int \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}}{x^{n-1}} dx + \\ + \frac{(m-n+3)a}{(n-1)c} \int \frac{\sqrt{(ax^2+bx+c)^m}}{x^{n-2}} dx \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 28
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{(A+Bx) dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{(\alpha x^2 + bx + c)^r}}; \quad r = -1, 1, 3.$$

$$28.1. \int \frac{dx}{(x+p) \sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\sqrt{c-bp+ap^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{c-bp+ap^2} + \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x+p} + \right. \\ \left. + \frac{b-2ap}{2\sqrt{c-bp+ap^2}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{c-bp+ap^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{c-bp+ap^2} - \sqrt{ax^2 + bx + c}}{x+p} + \right. \\ \left. + \frac{b-2ap}{2\sqrt{c-bp+ap^2}} \right| \\ \text{при } bp < c + ap^2; \\ \frac{\arcsin \frac{(b-2ap)x - bp + 2c}{(x+p)\sqrt{b^2 - 4ac}}}{\sqrt{bp - c - ap^2}} \quad \text{при } bp > c + ap^2 \text{ и } b^2 > 4ac; \\ \frac{2\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(b-2ap)(x+p)} \quad \text{при } bp = c + ap^2. \end{array} \right.$$

$$28.2. \int \frac{dx}{(x+p) \sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} = \frac{1}{c-bp+ap^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} -$$

$$-\frac{b-2ap}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax^2 + bx + c)^3}} + \int \frac{dx}{(x+p) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

(см. 26.2, 26.3 и 28.1).

$$28.3. \int \frac{dx}{(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{ax^2 + bx + c}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \left[\int \frac{dx}{(x+M) \sqrt{ax^2 + bx + c}} - \int \frac{dx}{(x+N) \sqrt{ax^2 + bx + c}} \right] \quad (\text{см. 28.1}),$$

где $M = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $N = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ при $\beta^2 > 4\alpha\gamma$.

$$28.4. \int \frac{dx}{(ax^2 + \gamma) \sqrt{ax^2 + c}} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\gamma}\sqrt{\gamma a - \alpha c}} \ln \left| \frac{\sqrt{\gamma}\sqrt{ax^2 + c} + x\sqrt{\gamma a + \alpha c}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{ax^2 + c} - x\sqrt{\gamma a - \alpha c}} \right| & \text{при } \gamma a > \alpha c, \gamma > 0; \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}\sqrt{\alpha c - \gamma a}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{\alpha c - \gamma a}}{\sqrt{\gamma}\sqrt{ax^2 + c}} & \text{при } \gamma a < \alpha c, \gamma > 0. \end{cases}$$

$$28.5. \int \frac{dx}{(x^2 + p^2) \sqrt{ax^2 + bx + c}} = \begin{cases} \frac{1}{(M^2 + N^2)p} [M\varphi - N \ln r] & \text{при } p^2 < 1; \\ -\frac{1}{(M^2 + N^2)p} [N\varphi + M \ln r] & \text{при } p^2 > 1, \end{cases}$$

где $\sqrt{c - ap^2 - bpi} \equiv M + Ni$; $\frac{b - 2api}{2\sqrt{c - ap^2 - bpi}} \equiv L + Ri$;

$$\frac{x\sqrt{ax^2 + bx + c} + Mx + Np}{x^2 + p^2} + L \equiv r \cos \varphi;$$

$$\frac{-p\sqrt{ax^2 + bx + c} - Mp + Nx}{x^2 + p^2} + R \equiv r \sin \varphi.$$

$$28.6. \int \frac{(A + Bx) dx}{(x+p)(x+q)\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{A - pB}{q - p} \int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{ax^2 + bx + c}} + \frac{A - qB}{p - q} \int \frac{dx}{(x+q)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (p \neq q) \text{ (см. 28.1).}$$

$$28.7. \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x+p} dx = a \int \frac{x dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + (b - ap) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} + (c - bp + ap^2) \int \frac{dx}{(x+p)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad \text{(см. 26.6, 26.2 и 28.1).}$$

$$28.8. \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{(x+p)(x+q)} dx = \frac{1}{q-p} \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x+p} dx + \frac{1}{p-q} \int \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x+q} dx \quad (p \neq q) \text{ (см. 28.7).}$$

III. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТАБЛИЦА 29

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^n \sin^m px \, dx; \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$29.1. \int \sin px \, dx = -\frac{1}{p} \cos px.$$

$$29.2. \int \sin^2 px \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2px}{4p}.$$

$$29.3. \int \sin^3 px \, dx = \frac{\cos^3 px}{3p} - \frac{\cos px}{p}.$$

$$29.4. \int \sin^m px \, dx = -\frac{\sin^{m-1} px \cos px}{mp} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} px \, dx.$$

$$29.5. \int x \sin px \, dx = \frac{1}{p^2} \sin px - \frac{x}{p} \cos px.$$

$$29.6. \int x \sin^2 px \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2px}{4p} - \frac{\cos 2px}{8p^2}.$$

$$29.7. \int x \sin^3 px \, dx = \frac{x \cos 3px}{12p} - \frac{\sin 3px}{36p^2} - \frac{3}{4p} x \cos px + \frac{3}{4p^2} \sin px.$$

$$29.8. \int x \sin^m px \, dx = \\ = \frac{\sin^{m-1} px}{m^2 p^2} [\sin px - mpx \cos px] + \frac{m-1}{m} \int x \sin^{m-2} px \, dx.$$

$$29.9. \int x^2 \sin px \, dx = \frac{2x \sin px}{p^2} - \frac{p^2 x^2 - 2}{p^3} \cos px.$$

$$29.10. \int x^2 \sin^2 px \, dx = \frac{x^3}{6} - \frac{2p^2 x^2 - 1}{8p^3} \sin 2px - \frac{x \cos 2px}{4p^2}.$$

$$29.11. \int x^2 \sin^m px \, dx = \frac{x \sin^{m-1} px}{m^2 p^2} [2 \sin px - mpx \cos px] + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^2 \sin^{m-2} px \, dx - \frac{2}{m^2 p^2} \int \sin^m px \, dx \quad (\text{см. 29.4}).$$

$$29.12. \int x^3 \sin px \, dx = \frac{3p^2 x^2 - 6}{p^4} \sin px + \frac{6x - p^2 x^3}{p^3} \cos px.$$

$$29.13. \int x^3 \sin^2 px \, dx = \frac{x^4}{8} + \frac{3x - 2p^2 x^3}{8p^3} \sin 2px - \frac{6x^2 p^2 - 3}{16p^4} \cos 2px.$$

$$29.14. \int x^3 \sin^m px \, dx = \frac{x^2 \sin^{m-1} px}{m^2 p^2} [3 \sin px - mpx \cos px] + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^3 \sin^{m-2} px \, dx - \frac{6}{m^2 p^2} \int x \sin^m px \, dx \quad (\text{см. 29.8}).$$

$$29.15. \int x^4 \sin px \, dx = \\ = \frac{1}{p^4} (4p^2 x^3 - 24x) \sin px - \frac{1}{p^3} (p^4 x^4 - 12p^2 x^2 + 24) \cos px.$$

$$29.16. \int x^n \sin px \, dx = \\ = -\frac{x^n}{p} \cos px + \frac{nx^{n-1}}{p^2} \sin px - \frac{n(n-1)}{p^2} \int x^{n-2} \sin px \, dx.$$

$$29.17. \int P_n(x) \sin px \, dx = \\ = -\cos px \sum_{\nu=0}^{E_1} \frac{(-1)^\nu}{p^{2\nu}} P_n^{(2\nu)}(x) + \sin px \sum_{\nu=1}^{E_2} \frac{(-1)^{\nu-1}}{p^{2\nu}} P_n^{(2\nu-1)}(x),$$

где $E_1 = \frac{n}{2}$ и $E_2 = \frac{n}{2}$ при n четном;

$E_1 = \frac{n-1}{2}$ и $E_2 = \frac{n+1}{2}$ при n нечетном.

$$29.18. \int x^n \sin^m px \, dx = \frac{x^{n-1} \sin^{m-1} px}{m^2 p^2} (n \sin px - mpx \cos px) + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^n \sin^{m-2} px \, dx - \frac{n(n-1)}{m^2 p^2} \int x^{n-2} \sin^m px \, dx.$$

ТАБЛИЦА 30
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{\sin^m px}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^n dx}{\sin^m px}, \quad \int \frac{x^n \sin^r x}{(a + b \sin x)^m} dx;$$

$n=0, 1, 2, \dots, \quad m=1, 2, 3, \dots, \quad r=0, 1.$

$$30.1.* \quad \int \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \dots$$

$$30.2.* \quad \int \frac{\sin px}{x^n} dx = -\frac{\sin px}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{p^{n-1}}{n-1} \int \frac{\cos t dt}{t^{n-1}}, \quad \text{где } t=px$$

$(n \geq 2)$ (см. 33.2).

$$30.3. \quad \int \frac{\sin^m px}{x^n} dx = -\frac{\sin^{m-1} px [(n-2) \sin px + mpx \cos px]}{(n-1)(n-2)x^{n-1}} -$$

$$-\frac{m^2 p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin^m px dx}{x^{n-2}} + \frac{m(m-1)p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\sin^{m-2} px dx}{x^{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

$$30.4. \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right|.$$

$$30.5. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$$

$$30.6. \quad \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$30.7. \quad \int \frac{dx}{\sin^m px} = -\frac{\cos px}{(m-1)p \sin^{m-1} px} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} px} \quad (m \geq 2).$$

$$30.8.* \quad \int \frac{x dx}{\sin x} = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7x^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31x^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127x^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \dots$$

$$\dots + \frac{2(2^{2n-1} - 1)}{(2n+1)!} B_n x^{2n+1} + \dots$$

$$30.9. \quad \int \frac{x dx}{\sin^2 x} = -x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$$

$$30.10.* \quad \int \frac{x dx}{\sin^3 x} = -\frac{x \cos x}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{2 \sin x} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sin x} \quad (\text{см. 30.8}).$$

$$30.11. \quad \int \frac{x dx}{\sin^m px} = -\frac{x \cos px}{(m-1) \sin^{m-1} px} - \frac{1}{(m-1)(m-2)p \sin^{m-2} px} +$$

$$+\frac{m-2}{m-1} \int \frac{x dx}{\sin^{m-2} px} \quad (m \geq 3).$$

$$\begin{aligned}
 30.12. \quad \int \frac{x^n dx}{\sin^m px} &= \\
 &= -\frac{x^{n-1}}{(m-1)(m-2)p^2 \sin^{m-1} px} [n \sin px + (m-2) px \cos px] + \\
 &+ \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x^n dx}{\sin^{m-2} px} + \frac{n(n-1)}{(m-1)(m-2)p^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\sin^{m-2} px} \quad (m \geq 3).
 \end{aligned}$$

$$30.13. \quad \int \frac{dx}{1 \pm \sin x} = \mp \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$$

$$30.14. \quad \int \frac{dx}{a + b \sin x} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} & \text{при } a^2 > b^2; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| & \text{при } a^2 < b^2. \end{cases}$$

$$30.15. \quad \int \frac{dx}{(1 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$30.16. \quad \int \frac{dx}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

$$30.17. \quad \int \frac{dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{b \cos x}{(a^2 - b^2)(a + b \sin x)} + \frac{a}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \text{ (см. 30.14)}.$$

$$30.18. \quad \int \frac{x dx}{1 \pm \sin x} = \mp x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right) + 2 \ln \left| \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right)} \right|.$$

$$30.19. \quad \int \frac{\sin x dx}{1 \pm \sin x} = \pm x + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$$

$$30.20. \quad \int \frac{\sin x dx}{a + b \sin x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \text{ (см. 30.14)}.$$

$$30.21. \quad \int \frac{\sin x dx}{(1 \pm \sin x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right) + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{x}{2} \right).$$

$$30.22. \quad \int \frac{\sin x dx}{(a + b \sin x)^2} = \frac{a \cos x}{(b^2 - a^2)(a + b \sin x)} + \frac{b}{b^2 - a^2} \int \frac{dx}{a + b \sin x} \quad (a^2 \neq b^2) \text{ (см. 30.14)}.$$

ТАБЛИЦА 31
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(\sin px, \sin qx, \sqrt{a^2 \pm b^2 \sin^2 x}) dx.$$

$$31.1 \quad \int \sin px \sin qx dx = \frac{\sin(q-p)x}{2(q-p)} - \frac{\sin(q+p)x}{2(q+p)} \quad (p^2 \neq q^2).$$

$$31.2 \quad \int \sin px \sin^n x dx = -\frac{\sin^n x \cos px}{p} + \frac{n}{2p} \int \sin^{n-1} x \cos(p-1)x dx + \\ + \frac{n}{2p} \int \sin^{n-1} x \cos(p+1)x dx \quad (\text{см. 35.8}).$$

$$31.3 \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{b} \arcsin \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$31.4 \quad \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x}} = -\frac{1}{b} \ln |b \cos x + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x}|.$$

$$31.5 \quad \int \sin x \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x} dx = \\ = -\frac{\cos x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x} - \frac{a^2 + b^2}{2b} \arcsin \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$31.6 \quad \int \sin x \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x} dx = \\ = -\frac{\cos x}{2} \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x} - \frac{a^2 - b^2}{2b} \ln |b \cos x + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 x}|.$$

$$31.7 \quad \int \frac{\sin^n x dx}{\sin(2k+1)x} = \\ = \frac{1}{2k+1} \sum_{\nu=0}^{2k} (-1)^{k+\nu} \cos^{2\nu} \frac{2\nu+1}{2(2k+1)} \pi \ln \left| \frac{\sin \left[\frac{(\nu-k)\pi}{2(2k+1)} + \frac{x}{2} \right]}{\sin \left[\frac{(\nu+k+1)\pi}{2(2k+1)} - \frac{x}{2} \right]} \right|.$$

$$31.8 \quad \int \frac{\sin^{2l} x dx}{\sin 2kx} = \\ = \frac{(-1)^k}{2k} \left[\ln \cos x + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \cos^{2\nu} \frac{\nu\pi}{2k} \ln \left(\cos^2 x - \sin^2 \frac{\nu\pi}{2k} \right) \right].$$

$$31.9. \int \frac{\sin^{2l+1} x}{\sin 2kx} dx = \frac{(-1)^k}{2k} \left\{ \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu \cos^{2\nu+1} \frac{\nu\pi}{2k} \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{k+\nu}{4k} \pi - \frac{x}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{k-\nu}{4k} \pi - \frac{x}{2} \right) \right] \right\}.$$

$$31.10. \int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx = 2 \sin x.$$

$$31.11. \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx = 2 \ln \sin x.$$

$$31.12. \int \frac{\sin 2x}{\sin^3 x} dx = -\frac{2}{\sin x}.$$

$$31.13. \int \frac{\sin 2x dx}{\sin^n x} = -\frac{2}{(n-2) \sin^{n-2} x} \quad (n \geq 3).$$

$$31.14. \int \frac{\sin x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$31.15. \int \frac{\sin^2 x}{\sin 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln |\cos x|.$$

$$31.16. \int \frac{\sin^3 x}{\sin 2x} dx = -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{2} \sin x.$$

$$31.17. \int \frac{\sin^n x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t^{n-1} dt}{1-t^2}, \text{ где } t = \sin x \quad (n \geq 2) \text{ (см. 6.13).}$$

$$31.18. \int \frac{\sin 3x}{\sin x} dx = x + \sin 2x.$$

$$31.19. \int \frac{\sin 3x}{\sin^2 x} dx = 3 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 4 \cos x.$$

$$31.20. \int \frac{\sin 3x}{\sin^3 x} dx = -3 \operatorname{ctg} x - 4x.$$

$$31.21. \int \frac{\sin kx}{\sin^n x} dx = \sum_{\nu=0}^E (-1)^\nu C_k^{2\nu+1} \int \frac{\cos^{k-2\nu-1} x}{\sin^{n-2\nu-1} x} dx,$$

$$\text{где } E = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{если } k \text{ четное,} \\ \frac{k+1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

ТАБЛИЦА 32

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^n \cos^m px \, dx; \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots, \\ n=0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

$$32.1. \int \cos px \, dx = \frac{1}{p} \sin px.$$

$$32.2. \int \cos^2 px \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2px}{4p}.$$

$$32.3. \int \cos^3 px \, dx = \frac{1}{p} \sin px - \frac{\sin^3 px}{3p}.$$

$$32.4. \int \cos^m px \, dx = \frac{\sin px \cos^{m-1} px}{mp} + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} px \, dx.$$

$$32.5. \int x \cos px \, dx = \frac{1}{p^2} \cos px + \frac{x}{p} \sin px.$$

$$32.6. \int x \cos^2 px \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2px}{4p} + \frac{\cos 2px}{8p^2}.$$

$$32.7. \int x \cos^3 px \, dx = \frac{x \sin 3px}{12p} + \frac{\cos 3px}{36p^2} + \frac{3}{4p} x \sin px + \frac{3}{4p^2} \cos px.$$

$$32.8. \int x \cos^m px \, dx = \\ = \frac{\cos^{m-1} x}{m^2 p^2} [\cos px + pm x \sin px] + \frac{m-1}{m} \int x \cos^{m-2} px \, dx.$$

$$32.9. \int x^2 \cos px \, dx = \frac{2x \cos px}{p^2} + \frac{p^2 x^2 - 2}{p^3} \sin px.$$

$$32.10. \int x^2 \cos^2 px \, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2p^2 x^2 - 1}{8p^3} \sin 2px + \frac{x \cos 2px}{4p^2}.$$

$$32.11. \int x^2 \cos^m px \, dx = \frac{x \cos^{m-1} px}{m^2 p^2} [2 \cos px + mpx \sin px] + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^2 \cos^{m-2} px \, dx - \frac{2}{m^2 p^2} \int \cos^m px \, dx \quad (\text{см. 32.4}).$$

$$32.12. \int x^3 \cos px \, dx = \frac{3p^2 x^2 - 6}{p^4} \cos px + \frac{p^2 x^3 - 6x}{p^3} \sin px.$$

$$32.13. \int x^3 \cos^2 px \, dx = \frac{x^4}{8} + \frac{2p^2 x^3 - 3x}{8p^3} \sin 2px + \frac{6p^2 x^2 - 3}{16p^4} \cos 2px.$$

$$32.14. \int x^3 \cos^m px \, dx = \frac{x^2 \cos^{m-1} px}{m^2 p^2} [3 \cos px + mpx \sin px] + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^3 \cos^{m-2} px \, dx - \frac{6}{m^2 p^2} \int x \cos^m px \, dx \quad (\text{см. 32.8}).$$

$$32.15. \int x^4 \cos px \, dx = \\ = \frac{1}{p^4} (4p^2 x^3 - 24x) \cos px + \frac{1}{p^5} (p^4 x^4 - 12p^2 x^2 + 24) \sin px.$$

$$32.16. \int x^4 \cos^2 px \, dx = \\ = \frac{x^5}{10} + \frac{2p^4 x^4 - 6p^2 x^2 + 3}{8p^5} \sin 2px + \frac{2p^2 x^3 - 3x}{4p^4} \cos 2px.$$

$$32.17. \int x^4 \cos^m px \, dx = \frac{x^3 \cos^{m-1} px}{m^2 p^2} (4 \cos px + mpx \sin px) + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^4 \cos^{m-2} px \, dx - \frac{12}{m^2 p^2} \int x^2 \cos^m px \, dx \quad (\text{см. 32.12}).$$

$$32.18. \int x^n \cos px \, dx = \\ = \frac{x^n}{p} \sin px + \frac{nx^{n-1}}{p^2} \cos px - \frac{n(n-1)}{p^2} \int x^{n-2} \cos px \, dx.$$

$$32.19. \int P_n(x) \cos px \, dx = \\ = \sin px \sum_{\nu=0}^{E_1} \frac{(-1)^\nu}{p^{2\nu}} P_n^{(2\nu)}(x) + \cos px \sum_{\nu=1}^{E_2} \frac{(-1)^{k-1}}{p^{2\nu}} P_n^{(2\nu-1)}(x),$$

где $E_1 = \frac{n}{2}$ и $E_2 = \frac{n}{2}$ при n четном;

$E_1 = \frac{n-1}{2}$ и $E_2 = \frac{n+1}{2}$ при n нечетном.

$$32.20. \int x^n \cos^m px \, dx = \frac{x^{n-1} \cos^{m-1} px}{m^2 p^2} (n \cos px + mpx \sin px) + \\ + \frac{m-1}{m} \int x^n \cos^{m-2} px \, dx - \frac{n(n-1)}{m^2 p^2} \int x^{n-2} \cos^m px \, dx.$$

ТАБЛИЦА 33

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{\cos^m px}{x^n} dx, \quad \int \frac{x^n dx}{\cos^m px}, \quad \int \frac{x^n \cos^r x}{(a+b \cos x)^m} dx;$$

$$m=1, 2, 3, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad r=0, 1.$$

$$33.1.* \quad \int \frac{\cos x}{x} dx = \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \frac{x^6}{6 \cdot 6!} + \frac{x^8}{8 \cdot 8!} - \dots$$

$$\dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k!)} + \dots$$

$$33.2.* \quad \int \frac{\cos px}{x^n} dx = -\frac{\cos px}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{p^{n-1}}{n-1} \int \frac{\sin t dt}{t^{n-1}}, \quad \text{где } t = px$$

$$(n \geq 2) \quad (\text{см. 30.2}).$$

$$33.3. \quad \int \frac{\cos^m px}{x^n} dx = -\frac{\cos^{m-1} px [(n-2) \cos px - mpx \sin px]}{(n-1)(n-2)x^{m-1}}$$

$$- \frac{m^2 p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos^m px dx}{x^{n-2}} + \frac{m(m-1)p^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{\cos^{m-2} px dx}{x^{n-2}} \quad (n \geq 3).$$

$$33.4. \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$33.5. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$33.6. \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$33.7. \quad \int \frac{dx}{\cos^m px} = \frac{\sin px}{(m-1)p \cos^{m-1} px} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\cos^{m-2} px} \quad (m \geq 2).$$

$$33.8.* \quad \int \frac{x dx}{\cos x} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5x^6}{6 \cdot 4!} + \frac{61x^8}{8 \cdot 6!} + \dots + \frac{E_n x^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \dots$$

$$33.9. \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|.$$

$$33.10.* \quad \int \frac{x dx}{\cos^3 x} = \frac{x \sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\cos x} \quad (\text{см. 33.8}).$$

$$33.11. \quad \int \frac{x dx}{\cos^m px} = \frac{x \sin px}{p(m-1) \cos^{m-1} px} -$$

$$- \frac{1}{(m-1)(m-2)p^2 \cos^{m-2} px} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x dx}{\cos^{m-2} px} \quad (m \geq 3).$$

$$\begin{aligned}
 33.12. \int \frac{x^n dx}{\cos^m px} &= \\
 &= -\frac{x^{n-1}}{(m-1)(m-2)p^2 \cos^{m-1} px} \{ n \cos px - (m-2) px \sin px \} + \\
 &+ \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x^n dx}{\cos^{m-2} px} + \frac{n(n-1)}{(m-1)(m-2)p^2} \int \frac{x^{n-2} dx}{\cos^{m-2} px} \quad (m \geq 3).
 \end{aligned}$$

$$33.13. \int \frac{dx}{1 \pm \cos x} = \pm \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 33.14. \int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } a^2 > b^2; \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{b^2-a^2}}{(b-a) \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{b^2-a^2}} \right| & \text{при } a^2 < b^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$33.15. \int \frac{dx}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$33.16. \int \frac{dx}{(1-\cos x)^2} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 33.17. \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^2} &= \frac{b \sin x}{(b^2-a^2)(a+b \cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2} \int \frac{dx}{a+b \cos x} \\
 &\quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 33.14}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 33.18. \int \frac{x dx}{1 \pm \cos x} &= \\
 &= \pm x \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] + 2 \ln \left| \cos \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] \right|.
 \end{aligned}$$

$$33.19. \int \frac{\cos x dx}{1 \pm \cos x} = \pm x \mp \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right].$$

$$33.20. \int \frac{\cos x dx}{a+b \cos x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a+b \cos x} \quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 33.14}).$$

$$\begin{aligned}
 33.21. \int \frac{\cos x dx}{(1 \pm \cos x)^2} &= \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right] - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \left[\frac{\pi}{4} \mp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 33.22. \int \frac{\cos x dx}{(a+b \cos x)^2} &= \frac{a \sin x}{(a^2-b^2)(a+b \cos x)} - \frac{b}{a^2-b^2} \int \frac{dx}{a+b \cos x} \\
 &\quad (a^2 \neq b^2) \quad (\text{см. 33.14})
 \end{aligned}$$

ТАБЛИЦА 34
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(\cos px, \cos qx, \sqrt{a^2 \pm b^2 \sin^2 x}) dx.$$

$$34.1. \int \cos px \cos qx dx = \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} \quad (p^2 \neq q^2).$$

$$34.2. \int \cos px \cos^n x dx = \frac{\cos^n x \sin px}{p} + \frac{n}{2p} \int \cos^{n-1} x \cos(p-1)x dx - \\ - \frac{n}{2p} \int \cos^{n-1} x \cos(p+1)x dx.$$

$$34.3. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 x}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b \sin x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$34.4. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x}} = \frac{1}{b} \ln |b \sin x + \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x}|.$$

$$34.5. \int \cos x \sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 x} dx = \\ = \frac{\sin x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 \cos^2 x} + \frac{a^2 + b^2}{2b} \arcsin \frac{b \sin x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$34.6. \int \cos x \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x} dx = \\ = \frac{\sin x}{2} \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x} + \frac{a^2 - b^2}{2b} \ln |b \sin x + \sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 x}|.$$

$$34.7. \int \frac{\cos^k x}{\cos kx} dx = \\ = \frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \cos^n \frac{2\nu+1}{2k} \pi \ln \left| \frac{\sin \left[\frac{2\nu+1}{4k} \pi + \frac{x}{2} \right]}{\sin \left[\frac{2\nu+1}{4k} \pi - \frac{x}{2} \right]} \right|.$$

$$34.8. \int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx = 2 \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$34.9. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx = 2x - \operatorname{tg} x.$$

$$34.10. \int \frac{\cos 2x}{\cos^3 x} dx = -\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$34.11. \int \frac{\cos 2x}{\cos^n x} dx = -\frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x} \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. 33.7}).$$

$$34.12. \int \frac{\cos x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 + \sqrt{2} \sin x} \right|.$$

$$34.13. \int \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right|.$$

$$34.14. \int \frac{\cos^3 x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{1 + \sqrt{2} \sin x} \right|.$$

$$34.15. \int \frac{\cos^n x}{\cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int \cos^{n-2} x dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos^{n-2} x}{\cos 2x} dx \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. 32.4}).$$

$$34.16. \int \frac{\cos 3x}{\cos x} dx = \sin 2x - x.$$

$$34.17. \int \frac{\cos 3x}{\cos^2 x} dx = 4 \sin x - 3 \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$34.18. \int \frac{\cos 3x}{\cos^3 x} dx = 4x - 3 \operatorname{tg} x.$$

$$34.19. \int \frac{\cos 3x}{\cos^n x} dx = 4 \int \frac{dx}{\cos^{n-3} x} - 3 \int \frac{dx}{\cos^{n-1} x} \quad (\text{см. 33.7}).$$

$$34.20. \int \frac{\cos kx}{\cos^n x} dx = \sum_{\nu=0}^E (-1)^\nu \frac{k}{k-\nu} 2^{k-2\nu-1} C_{n-\nu}^\nu \int \cos^{k-2\nu-n} x dx,$$

$$\text{где } E = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{если } k \text{ четное;} \\ \frac{k-1}{2}, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

$$34.21. \int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{12} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} \right)} \right|.$$

$$34.22. \int \frac{\cos^2 x}{\cos 3x} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{12} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{5\pi}{12} \right)} \right|.$$

ТАБЛИЦА 35

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \sin^{\pm m} px \cos^{\pm n} qx dx; \quad \begin{matrix} n=1, 2, 3, \dots \\ m=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$35.1. \int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

$$35.2. \int \sin x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

$$35.3. \int \sin^m x \cos x dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}.$$

$$35.4. \int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right).$$

$$35.5. \int \sin^2 x \cos^3 x dx = \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15} \sin^3 x.$$

$$35.6. \int \sin^m x \cos^n x dx = \\ = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx.$$

$$35.7. \int \sin px \cos^n x dx = \\ = -\frac{\cos^n x \cos px}{p+n} + \frac{n}{p+n} \int \cos^{n-1} x \sin (p-1) x dx.$$

$$35.8. \int \sin^m x \cos qx dx = \\ = \frac{\sin^m x \sin qx}{m+q} - \frac{m}{m+q} \int \sin^{m-1} x \sin (q-1) x dx \quad (\text{см. 31.2}).$$

$$35.9. \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x|.$$

$$35.10. \int \frac{dx}{\sin x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin x \cos^{n-2} x} \quad (n \geq 2).$$

$$35.11. \int \frac{dx}{\sin^m x \cos x} = \frac{-1}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos x} \quad (m \geq 2).$$

$$\begin{aligned}
 35.12. \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} &= \frac{1}{(n-1) \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} + \\
 &+ \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} \quad (n \geq 2); \\
 &= -\frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} x \cos^{n-2} x} + \\
 &+ \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} \quad (m \geq 2).
 \end{aligned}$$

$$35.13. \int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx = -2 \cos x.$$

$$35.14. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx = -2 \ln |\cos x|.$$

$$35.15. \int \frac{\sin 3x}{\cos x} dx = 2 \sin^2 x + \ln |\cos x|.$$

$$35.16. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 x} dx = -4 \cos x - \frac{1}{\cos x}.$$

$$35.17. \int \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} dx = -\frac{1}{2 \cos^2 x} - 4 \ln |\cos x|.$$

$$35.18. \int \frac{\sin 3x}{\cos^n x} dx = \frac{4}{(n-3) \cos^{n-3} x} - \frac{1}{(n-1) \cos^{n-1} x} \quad (n \geq 4).$$

$$35.19. \int \frac{\cos 2x}{\sin x} dx = 2 \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$35.20. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - 2x.$$

$$35.21. \int \frac{\cos 3x}{\sin x} dx = -2 \sin^2 x + \ln |\sin x|.$$

$$35.22. \int \frac{\cos 3x}{\sin^2 x} dx = -4 \sin x - \frac{1}{\sin x}.$$

$$35.23. \int \frac{\cos 3x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2 \sin^2 x} - 4 \ln |\sin x|.$$

$$35.24. \int \frac{\cos 3x}{\sin^m x} dx = \frac{4}{(m-3) \sin^{m-3} x} - \frac{1}{(m-1) \sin^{m-1} x} \quad (m \geq 4).$$

$$35.25. \int \frac{\sin px}{\cos^n x} dx = 2 \int \frac{\sin(p-1)x}{\cos^{n-1} x} dx - \int \frac{\sin(p-2)x}{\cos^n x} dx.$$

$$35.26. \int \frac{\cos qx}{\sin^m x} dx = -2 \int \frac{\sin(q-1)x}{\sin^{m-1} x} dx + \int \frac{\cos(q-2)x}{\sin^m x} dx \quad (\text{см. 31.21}).$$

ТАБЛИЦА 36
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(\sin x, \cos x) dx.$$

$$36.1. \int \frac{\sin x dx}{a + b \cos x} = -\frac{1}{b} \ln |a + b \cos x|.$$

$$36.2. \int \frac{\sin x dx}{(a + b \cos x)^n} = \frac{1}{(n-1)b(a + b \cos x)^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

$$36.3. \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 \pm \cos x)} = \ln \left| \frac{1 \pm \cos x}{\cos x} \right|.$$

$$36.4. \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 \pm \sin x)} = \frac{1}{2(1 \pm \sin x)} \pm \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right|.$$

$$36.5. \int \frac{\sin x dx}{(a + b \cos x)(\alpha + \beta \cos x)} = \frac{1}{a\beta - b\alpha} \ln \left| \frac{a + b \cos x}{\alpha + \beta \cos x} \right|$$

($a\beta - b\alpha \neq 0$).

$$36.6. \int \frac{\alpha + \beta \sin x}{a + b \cos x} dx = -\frac{\beta}{b} \ln |a + b \cos x| + \alpha \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

(см. 33.14).

$$36.7. \int \frac{\cos x dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{b} \ln |a + b \sin x|.$$

$$36.8. \int \frac{\cos x dx}{(a + b \sin x)^n} = -\frac{1}{(n-1)b(a + b \sin x)^{n-1}} \quad (n \geq 2).$$

$$36.9. \int \frac{\cos x dx}{\sin x (1 \pm \sin x)} = \ln \left| \frac{\sin x}{1 \pm \sin x} \right|.$$

$$36.10. \int \frac{\cos x dx}{\sin x (1 \pm \cos x)} = -\frac{1}{2(1 \pm \cos x)} \pm \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$36.11. \int \frac{\cos x dx}{(a + b \sin x)(\alpha + \beta \sin x)} = \frac{1}{a\beta - b\alpha} \ln \left| \frac{\alpha + \beta \sin x}{a + b \sin x} \right|$$

($a\beta - b\alpha \neq 0$).

$$36.12. \int \frac{\alpha + \beta \cos x}{a + b \sin x} dx = \frac{\beta}{b} \ln |a + b \sin x| + \alpha \int \frac{dx}{a + b \sin x} \quad (\text{см. 30.14}).$$

- 36.13. $\int \frac{dx}{\sin x (1 \pm \cos x)} = \pm \frac{1}{2(1 \pm \cos x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$
- 36.14. $\int \frac{dx}{\cos x (1 \pm \sin x)} = \mp \frac{1}{2(1 \pm \sin x)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$
- 36.15. $\int \frac{dx}{\sin x \pm \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \pm \frac{\pi}{8} \right) \right|.$
- 36.16. $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x + \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{2} \right|.$
- 36.17. $\int \frac{dx}{(a \cos x + b \sin x)^n} = \int \frac{d(x - \varphi)}{[q \cos(x - \varphi)]^n},$
 где $a = q \cos \varphi$, $b = q \sin \varphi$ (см. 33.7).
- 36.18. $\int \frac{dx}{1 + \cos x \pm \sin x} = \pm \ln \left| 1 \pm \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$
- 36.19. $\int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} = \int \frac{dt}{a + \sqrt{b^2 + c^2} \sin t},$
 где $t = x + \operatorname{arctg} \frac{b}{c}$ (см. 30.14).
- 36.20. $\int \frac{dx}{(a + b \cos x + c \sin x)^n} = \int \frac{d(x - \varphi)}{[a + q \cos(x - \varphi)]^n},$
 где $b = q \cos \varphi$, $c = q \sin \varphi$.
- 36.21. $\int \frac{\sin x dx}{\sin x \pm \cos x} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$
- 36.22. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x \pm \cos x} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$
- 36.23. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right) \quad (a > 0, b > 0).$
- 36.24. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b \operatorname{tg} x + a}{b \operatorname{tg} x - a} \right|.$
- 36.25. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x} = \frac{1}{2(b - a)} \ln |a \cos^2 x + b \sin^2 x| \quad (a \neq b).$

ТАБЛИЦА 37
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int F(x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) dx.$$

$$37.1. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|.$$

$$37.2. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x.$$

$$37.3. \int \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x|.$$

$$37.4. \int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \quad (n \geq 2).$$

$$37.5. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x|.$$

$$37.6. \int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x - x.$$

$$37.7. \int \operatorname{ctg}^3 x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln |\sin x|.$$

$$37.8. \int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx \quad (n \geq 2).$$

$$37.9. \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$$

$$37.10. \int \frac{dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b \ln |a + b \operatorname{tg} x| + b \ln |\cos x| + ax).$$

$$37.11. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$$

$$37.12. \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{a + b \operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2 + b^2} (bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|).$$

$$37.13. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

$$37.14. \int \frac{dx}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[x - \left| \frac{b}{a} \right| \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{b}{a} \right| \operatorname{tg} x \right) \right] \quad (a^2 \neq b^2).$$

$$37.15. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(x + \frac{b}{2a} \ln \left| \frac{a + b \operatorname{tg} x}{a - b \operatorname{tg} x} \right| \right).$$

- 37.16. $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = -\frac{\cos^2 x}{2}.$
- 37.17. $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\ln(\cos^2 x + a^2 \sin^2 x)}{2(a^2 - 1)} \quad (a \neq 1).$
- 37.18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ctg} x \pm 1} = \frac{x}{2} \pm \frac{1}{2} \ln |\sin x \pm \cos x|.$
- 37.19. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{a \operatorname{tg} x + b} \quad (\text{см. 37.12}).$
- 37.20. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{\operatorname{ctg} x \pm 2} = \pm \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x \pm 1} \quad (\text{см. 37.9}).$
- 37.21. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{a + b \operatorname{ctg} x} = \int \frac{dx}{a \operatorname{tg} x + b} \quad (\text{см. 37.10}).$
- 37.22. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x.$
- 37.23. $\int \frac{dx}{a^2 + b^2 \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[x - \left| \frac{b}{a} \right| \operatorname{arctg} \left(- \left| \frac{b}{a} \right| \operatorname{ctg} x \right) \right]$
 $(a^2 \neq b^2).$
- 37.24. $\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(x + \frac{b}{2a} \ln \left| \frac{a - b \operatorname{ctg} x}{a + b \operatorname{ctg} x} \right| \right).$
- 37.25. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\sin^2 x}{2}.$
- 37.26. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{1 + a^2 \operatorname{ctg}^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 + \frac{1}{a^2} \operatorname{tg}^2 x} \quad (\text{см. 37.17}).$
- 37.27. $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{1 \pm \operatorname{ctg} x} = \mp \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x \pm \cos x}{\cos^2 x} \right|.$
- 37.28. $\int \frac{\operatorname{ctg} x \, dx}{1 \pm \operatorname{tg} x} = \mp \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin^2 x (\sin x \pm \cos x)|.$
- 37.29.* $\int x \operatorname{tg} x \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + \dots + \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1) B_n}{(2n + 1)!} x^{2n+1} + \dots$
- 37.30.* $\int x \operatorname{ctg} x \, dx = x - \frac{x^3}{9} - \frac{x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n + 1)!} x^{2n+1} - \dots$
- 37.31. $\int \frac{\operatorname{tg} x \, dx}{\sqrt{a + b \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b - a}} \arccos \left(\frac{\sqrt{b - a}}{\sqrt{b}} \cos x \right).$

ТАБЛИЦА 38
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \arcsin \frac{x}{a} dx, \int x^{\pm n} \arccos \frac{x}{a} dx; \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$38.1. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$38.2. \int \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2 dx = x \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2 - 2x + 2 \sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

$$38.3. \int \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^3 dx = \\ = \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^3 \left[x + \frac{3 \sqrt{a^2 - x^2}}{\arcsin \frac{x}{a}} - \frac{6x}{\left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^2} - \frac{6 \sqrt{a^2 - x^2}}{\left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^3} \right].$$

$$38.4. \int \left(\arcsin \frac{x}{a} \right)^n dx = a \int t^n \cos t dt, \text{ где } t = \arcsin \frac{x}{a} \quad (\text{см. 32.16}).$$

$$38.5. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{2x^2 - a^2}{4} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$38.6. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$38.7. \int x^3 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{8x^4 - 3a^4}{32} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{2x^3 + 3xa^2}{32} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$38.8. \int x^4 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{3x^4 + 4x^2a^2 + 8a^4}{75} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$38.9. \int x^n \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

$$38.10.* \int \frac{1}{x} \arcsin \frac{x}{a} dx = \\ = \frac{x}{a} + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot 3a^3} + \frac{1 \cdot 3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7a^7} + \dots$$

$$38.11. \int \frac{1}{x^n} \arcsin \frac{x}{a} dx =$$

$$= -\frac{\arcsin \frac{x}{a}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a^2-x^2}} \quad (n \geq 2).$$

$$38.12. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$38.13. \int \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^2 dx = x \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^2 - 2x - 2 \sqrt{a^2-x^2} \arccos \frac{x}{a}.$$

$$38.14. \int \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^3 dx = \\ = \left[3 \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^2 - 6 \right] \sqrt{a^2-x^2} - \left[\left(\arccos \frac{x}{a} \right)^3 - 6 \arccos \frac{x}{a} \right] x.$$

$$38.15. \int \left(\arccos \frac{x}{a} \right)^n dx = -a \int t^n \sin t dt, \text{ где } t = \arccos \frac{x}{a} \text{ (см. 29.16).}$$

$$38.16. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{2x^2-a^2}{4} \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$38.17. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2+2a^2) \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$38.18. \int x^3 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{8x^4-3a^4}{32} \arccos \frac{x}{a} - \frac{3xa^2+2x^3}{32} \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$38.19. \int x^4 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^5}{5} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{75} (3x^4+4x^2a^2+8a^4) \sqrt{a^2-x^2}.$$

$$38.20. \int x^n \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ \text{(см. 22.18).}$$

$$38.21.* \int \frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln |x| - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \dots$$

$$38.22. \int \frac{1}{x^n} \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{\arccos \frac{x}{a}}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{a^2-x^2}} \quad (n \geq 2) \\ \text{(см. табл. 23).}$$

ТАБЛИЦА 39
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int F\left(x, \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right) dx, \quad \int F\left(x, \operatorname{arccotg} \frac{x}{a}\right) dx.$$

$$39.1. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$39.2. \int \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)^2 dx = x \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right)^2 - 2a \int \frac{x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{a^2 + x^2} dx \quad (\text{см. 39.11}).$$

$$39.3. \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$$

$$39.4. \int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2).$$

$$39.5. \int x^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{1}{4}(x^4 - a^4) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^3 x}{4}.$$

$$39.6. \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx \quad (\text{см. 5.15}).$$

$$39.7.* \int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)^2 a^{2\nu+1}}.$$

$$39.8. \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

$$39.9. \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{a^2 + x^2}{2a^2 x^2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2ax}.$$

$$39.10. \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \\ + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)} \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. 5.23}).$$

$$39.11.* \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{60} - \\ - \frac{x^7}{325} - \dots - \frac{2^{n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \dots$$

$$39.12. \int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

$$39.13.* \int \frac{x^3 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} (1+x^2) \operatorname{arctg} x - \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

(см. 39.11.)

$$39.14. \int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{6} x^2 + \frac{2}{3} \ln(1+x^2) + \left(\frac{x^3}{6} - x \right) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2.$$

$$39.15. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \operatorname{arctg} x + \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x.$$

$$39.16. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{(\alpha + \beta x)^2} dx = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\ln \left| \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{1+x^2}} \right| - \frac{\beta - \alpha x}{\alpha + \beta x} \operatorname{arctg} x \right].$$

$$39.17. \int \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2).$$

$$39.18. \int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}}{a^2 + x^2} dx$$

(см. 5.15).

$$39.19.* \int \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = \frac{\pi}{2} \ln x - \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)a^{2\nu+1}}.$$

$$39.20. \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} -$$

$$-\frac{a}{n+1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2+x^2)} \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. 5.23}).$$

$$39.21.* \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln(1+x^2) - \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \quad (\text{см. 39.11}).$$

$$39.22. \int F(\operatorname{arctg} x) dx = \int F\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx.$$

ТАБЛИЦА 40
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int F\left(x, \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}\right) dx, \quad \int F\left(x, \operatorname{arccosec} \frac{x}{a}\right) dx.$$

$$\begin{aligned}
 40.1. \int \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| & \text{при } 0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}; \\ x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| & \text{при } \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi. \end{cases} \\
 40.2. \int x \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} & \text{при } 0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} & \text{при } \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi. \end{cases} \\
 40.3. \int x^2 \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} - \\ - \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| & \text{при } 0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{ax}{6} \sqrt{x^2 - a^2} + \\ + \frac{a^3}{6} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| & \text{при } \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi. \end{cases} \\
 40.4. \int x^n \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx &= \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{при } 0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}; \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{при } \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \quad (\text{см. 25.7}). \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$40.5.* \int \frac{1}{x} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx = \frac{\pi}{2} \ln |x| + \frac{a}{x} + \frac{a^3}{2 \cdot 3 \cdot 3x^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot a^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5x^5} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7x^7} + \dots \left(0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$40.6. \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{ax} - \frac{1}{x} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} \left(0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$40.7. \int \frac{1}{x^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx = -\frac{1}{2x^2} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{4ax^2} +$$

$$+ \frac{1}{4a^2} \arccos \left| \frac{a}{x} \right| \left(0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$40.8. \int \frac{1}{x^n} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\ \text{при } 0 < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^n \sqrt{x^2 - a^2}} \\ \text{при } \frac{\pi}{2} < \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} < \pi \quad (n \geq 2) \quad (\text{см. табл. 25}). \end{cases}$$

$$40.9. \int \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} dx = \begin{cases} x \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\ \text{при } 0 < \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}; \\ x \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} - a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \\ \text{при } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} < 0. \end{cases}$$

$$40.10. \int x \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2}{2} \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} & \text{при } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} < 0; \\ \frac{x^2}{2} \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \sqrt{x^2 - a^2} & \text{при } 0 < \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$40.11.* \int \frac{1}{x} \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} dx = -\frac{a}{x} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{a^3}{x^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{a^5}{x^5} -$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{a^7}{x^7} - \dots \left(0 < \operatorname{arccosec} \frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$40.12. \int F(\operatorname{arccosec} x) dx = \int F\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x\right) dx.$$

IV. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ТАБЛИЦА 41
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} e^{ax} dx, \quad \int x^n e^{\pm x^2} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$41.1. \int A^{ax+b} dx = \frac{1}{a \ln A} A^{ax+b} \quad (A > 0, A \neq 1).$$

$$41.2. \int F(e^{ax}) dx = \frac{1}{a} \int \frac{F(t) dt}{t}, \quad \text{где } t = e^{ax}.$$

$$41.3. \int x e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}.$$

$$41.4. \int x^2 e^{ax} dx = \frac{a^2 x^2 - 2ax + 2}{a^3} e^{ax}.$$

$$41.5. \int x^3 e^{ax} dx = \frac{a^3 x^3 - 3a^2 x^2 + 6ax - 6}{a^4} e^{ax}.$$

$$41.6. \int x^4 e^{ax} dx = \frac{a^4 x^4 - 4a^3 x^3 + 12a^2 x^2 - 24ax + 24}{a^5} e^{ax}.$$

$$41.7. \int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx;$$

$$= e^{ax} \left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots \right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{n!x}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \right].$$

$$41.8. \int P_n(x) e^{ax} dx = e^{ax} \left[\frac{P_n(x)}{a} - \frac{P'_n(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right].$$

$$41.9.* \int \frac{e^{ax}}{x} dx = \ln|x| + \frac{ax}{1!} + \frac{a^2x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{a^3x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{a^4x^4}{4 \cdot 4!} + \dots + \frac{a^n x^n}{n \cdot n!} + \dots$$

$$41.10.* \int \frac{e^{ax}}{x^2} dx = -\frac{e^{ax}}{x} + a \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad (\text{см. 41.8}).$$

$$41.11.* \int \frac{e^{ax}}{x^3} dx = \frac{ax-1}{2x^2} e^{ax} + \frac{a^2}{2} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad (\text{см. 41.8}).$$

$$41.12.* \int \frac{e^{ax}}{x^4} dx = -\frac{e^{ax}}{3x^3} - \frac{ae^{ax}}{6x^2} - \frac{a^2e^{ax}}{6x} + \frac{a^3}{6} \int \frac{e^{ax}}{x} dx \quad (\text{см. 41.8}).$$

$$41.13.* \int \frac{e^{ax}}{x^n} dx = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} dx \quad (n \geq 2).$$

$$41.14.* \int e^{\pm x^2} dx = \\ = x \pm \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} \pm \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} + \dots$$

$$41.15. \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

$$41.16.* \int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x e^{x^2} - \frac{1}{2} \int e^{x^2} dx \quad (\text{см. 41.13}).$$

$$41.17. \int x^3 e^{x^2} dx = \frac{x^2-1}{2} e^{x^2}.$$

$$41.18. \int x^4 e^{x^2} dx = \frac{2x^3-3x}{4} e^{x^2} + \frac{3}{4} \int e^{x^2} dx \quad (\text{см. 41.13}).$$

$$41.19. \int x^{2k+1} e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} [x^{2k} - kx^{2k-2} + k(k-1)x^{2k-4} + \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} k! x^2 + (-1)^k k!].$$

$$41.20.* \int x^{2k} e^{x^2} dx = \frac{x^{2k} e^{x^2}}{2} - \frac{2k-1}{2} \int x^{2k-2} e^{x^2} dx.$$

$$41.21. \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

$$41.22. \int x^n e^{-x^2} dx = -\frac{x^{n-1} e^{-x^2}}{2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx.$$

ТАБЛИЦА 42
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int R(x) e^{ax} dx, \quad \int R(x, \sqrt{x}, e^x, e^{\sqrt{x}}) dx.$$

Обозначения: $u = \alpha + \beta x$, $t = \alpha - \beta x$, $s = \sqrt{x}$.

$$42.1.* \quad \int \frac{e^{ax}}{\alpha + \beta x} dx = \frac{e^{-\frac{a\alpha}{\beta}}}{\beta} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.2.* \quad \int \frac{xe^{ax}}{\alpha + \beta x} dx = \frac{e^{-a\alpha}}{a\beta} - \frac{ae^{-\frac{a\alpha}{\beta}}}{\beta^2} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.3.* \quad \int \frac{x^2 e^{ax}}{\alpha + \beta x} dx = \frac{\beta^2(\beta x - \alpha)}{\alpha} e^{ax} + \frac{\alpha^2}{\beta^3} e^{-\frac{a\alpha}{\beta}} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.4.* \quad \int \frac{x^n e^{ax}}{\alpha + \beta x} dx = (-1)^n \frac{\alpha^n}{\beta^{n+1}} e^{-\frac{a\alpha}{\beta}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu C_n^\nu}{\alpha^\nu} \int u^{\nu-1} e^{\frac{a}{\beta}u} du$$

(см. 41.7).

$$42.5. \quad \int \frac{e^{ax} dx}{(\alpha + \beta x)^2} = -\frac{e^{ax}}{\beta u} + \frac{ae^{-\frac{a\alpha}{\beta}}}{\beta^2} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.6. \quad \int \frac{xe^{ax} dx}{(\alpha + \beta x)^2} = \frac{\alpha e^{ax}}{\beta^2 u} + \frac{\beta - a\alpha}{\beta^3} e^{-\frac{a\alpha}{\beta}} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.7. \quad \int \frac{x^2 e^{ax}}{(\alpha + \beta x)^2} dx = \frac{e^{ax}}{\beta^3} \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha^2}{u} \right) + \frac{a\alpha^2 - 2\alpha\beta}{\beta^4} e^{-\frac{a\alpha}{\beta}} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du.$$

$$42.8. \quad \int \frac{x^n e^{ax}}{(\alpha + \beta x)^m} dx = (-1)^n \frac{\alpha^n}{\beta^{n+1}} e^{-\frac{a\alpha}{\beta}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu C_n^\nu}{\alpha^\nu} \int u^{\nu-m} e^{\frac{a}{\beta}u} du$$

(см. 41.7 при $\nu - m \geq 0$ и 41.13 при $\nu - m < 0$).

$$42.9.* \quad \int \frac{e^{ax}}{\alpha^2 - \beta^2 x^2} dx = \frac{e^{-\frac{a\alpha}{\beta}}}{2\alpha\beta} \int \frac{e^{\frac{a}{\beta}u}}{u} du - \frac{e^{\frac{a\alpha}{\beta}}}{2\beta\alpha} \int \frac{e^{-\frac{a}{\beta}t}}{t} dt \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.10. \quad \int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1).$$

$$42.11. \int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} (x - 2\sqrt{x} + 2).$$

$$42.12. \int xe^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} (x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6).$$

$$42.13. \int x\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} (x^2 - 4x\sqrt{x} + 12x - 24\sqrt{x} + 24).$$

$$42.14. \int x^2 e^{\sqrt{x}} dx = \\ = 2e^{\sqrt{x}} (x^2\sqrt{x} - 5x^2 + 20x\sqrt{x} - 60x + 120\sqrt{x} - 120).$$

$$42.15. \int x^n e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} [x^n\sqrt{x} - (2n+1)x^n + \\ + (2n+1)2nx^{n-1}\sqrt{x} - \dots + (2n+1)!\sqrt{x} - (2n+1)!]$$

$$42.16. \int x^{n+\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} dx = e^{\sqrt{x}} \left[x^{n+1} - (2n+2)x^{\frac{2n+1}{2}} \right] - \\ - \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} \int x^{n-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$42.17. \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}.$$

$$42.18. * \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx = 2 \int \frac{e^s}{s} ds \quad (\text{см. 41.9}).$$

$$42.19. * \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} dx = -\frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} dx \quad (\text{см. 42.18}).$$

$$42.20. * \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^n} dx = 2 \int \frac{e^s}{s^{2n-1}} ds \quad (\text{см. 41.13}).$$

$$42.21. * \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{n+\frac{1}{2}}} dx = 2 \int \frac{e^s}{s^{2n}} ds \quad (\text{см. 41.13}).$$

$$42.22. * \int \sqrt{x} e^x dx = 2 \int s^2 e^{s^2} ds \quad (\text{см. 41.16}).$$

$$42.23. * \int \frac{e^{\pm x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\pm s^2} ds \quad (\text{см. 41.14}).$$

ТАБЛИЦА 43
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{e^{ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$43.1. \int \frac{dx}{\alpha + \beta e^x} = \frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln |\alpha + \beta e^x|.$$

$$43.2. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta e^x)^2} = -\frac{1}{\alpha^2} \left[\ln \left| \frac{\alpha + \beta e^x}{e^x} \right| + \frac{\beta e^x}{\alpha + \beta e^x} \right].$$

$$43.3. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta e^x)^3} = -\frac{1}{\alpha^3} \left[\ln \left| \frac{\alpha + \beta e^x}{e^x} \right| + \frac{2\beta e^x}{\alpha + \beta e^x} - \frac{\beta^2 e^{2x}}{2(\alpha + \beta e^x)^2} \right].$$

$$43.4. \int \frac{dx}{(\alpha + \beta e^x)^m} = \\ = \frac{1}{\alpha^m} \left[\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{(-1)^\nu}{\nu} C_{m-1}^\nu \frac{\beta^\nu e^{\nu x}}{(\alpha + \beta e^x)^\nu} - \ln \left| \frac{\alpha + \beta e^x}{e^x} \right| \right].$$

$$43.5. \int \frac{e^{ax} dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{1}{a\beta} \ln |\alpha + \beta e^{ax}|.$$

$$43.6. \int \frac{e^{ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^2} = -\frac{1}{a\beta (\alpha + \beta e^{ax})^2}.$$

$$43.7. \int \frac{e^{ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m} = -\frac{1}{(m-1)a\beta (\alpha + \beta e^{ax})^{m-1}} \quad (m \geq 2).$$

$$43.8. \int \frac{e^{2ax} dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{e^{ax}}{a\beta} - \frac{\alpha}{a\beta^2} \ln |\alpha + \beta e^{ax}|.$$

$$43.9. \int \frac{e^{2ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^2} = \frac{1}{a\beta^2} \left[\ln |\alpha + \beta e^{ax}| + \frac{\alpha}{\alpha + \beta e^{ax}} \right].$$

$$43.10. \int \frac{e^{2ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m} = \frac{\alpha}{(m-1) a \beta^2 (\alpha + \beta e^{ax})^{m-1}} - \frac{1}{(m-2) a \beta^2 (\alpha + \beta e^{ax})^{m-1}} \quad (m > 2).$$

$$43.11. \int \frac{e^{3ax} dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{1}{a \beta^3} \left[\frac{(\alpha + \beta e^{ax})^2}{2} - 2\alpha (\alpha + \beta e^{ax}) + \alpha^2 \ln |\alpha + \beta e^{ax}| \right].$$

$$43.12. \int \frac{e^{nax} dx}{\alpha + \beta e^{ax}} = \frac{1}{a} \int \frac{t^{n-1} dt}{\alpha + \beta t}, \quad \text{где } t = e^{ax} \quad (n \geq 1) \quad (\text{см. 1.20}).$$

$$43.13. \int \frac{e^{nax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m} = \frac{ae^{(n-1)ax}}{(n-m) \beta (\alpha + \beta e^{ax})^{m-1}} - \frac{n\alpha}{(n-m) \beta} \int \frac{e^{(n-1)ax} dx}{(\alpha + \beta e^{ax})^m} \quad (n \neq m).$$

$$43.14. \int \frac{dx}{e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})} = \frac{1}{a\beta} \left(-\frac{\alpha + \beta e^{ax}}{\beta e^{ax}} + \ln |\alpha + \beta e^{ax}| \right) - \frac{x}{\alpha}.$$

$$43.15. \int \frac{dx}{e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})^2} = -\frac{1}{a\beta} \left[\frac{\alpha^2 (\alpha + 2\beta e^{ax})}{\beta e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})} - 2 \ln \left| \frac{\alpha + \beta e^{ax}}{\beta e^{ax}} \right| \right].$$

$$43.16. \int \frac{dx}{e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})^3} = -\frac{1}{a\beta} \left[\frac{2 - 6 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 e^{2ax} - 3 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 e^{3ax}}{2 \frac{\beta}{\alpha} e^{ax} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} e^{ax} \right)^2} - 2 \ln \left| \frac{\alpha + \beta e^{ax}}{\beta e^{ax}} \right| \right].$$

$$43.17. \int \frac{dx}{e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})^m} = -\frac{\alpha^2}{a\beta^2 e^{ax} (\alpha + \beta e^{ax})} - \frac{m\alpha^m}{a\beta} \int \frac{ds}{(\alpha + \beta e^s)^m}, \quad \text{где } s = ax \quad (\text{см. 43.4}).$$

ТАБЛИЦА 44

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int e^{ax} \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{\pm m}} dx; \quad a \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \\ m = 1, 3, 5, \dots$$

$$44.1. \int \frac{dx}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}} = \frac{1}{a\sqrt{\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \sqrt{\alpha}} \right|.$$

$$44.2. \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^3}} = \frac{2}{a\alpha\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}} - \frac{1}{a\alpha\sqrt{\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \sqrt{\alpha}} \right|.$$

$$44.3. \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m}} = \\ = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{(m-2)\alpha\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{m-2}}} + \frac{1}{\alpha} \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{m-2}}} \right] \quad (m \geq 3).$$

$$44.4. \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}.$$

$$44.5. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 \pm e^x}} = \pm 2\sqrt{1 \pm e^x}.$$

$$44.6. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{(1 \pm e^x)^3}} = \mp \frac{2}{\sqrt{1 \pm e^x}}.$$

$$44.7. \int \frac{e^{ax} dx}{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m}} = \mp \frac{2}{a\beta\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{m-2}}}.$$

$$44.8. \int \frac{dx}{e^x \sqrt{1 \pm e^x}} = -\frac{\sqrt{1 \pm e^x}}{e^x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 \pm e^x} - 1}{\sqrt{1 \pm e^x} + 1} \right|.$$

$$44.9. \int \frac{dx}{e^x \sqrt{(1 \pm e^x)^3}} = \\ = -\frac{1}{e^x \sqrt{1 \pm e^x}} \mp \frac{3}{\sqrt{1 \pm e^x}} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 \pm e^x} - 1}{\sqrt{1 \pm e^x} + 1} \right|.$$

$$44.10. \int \frac{dx}{e^x \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m}} = \\ = -\frac{1}{a} \left[\frac{1}{e^{ax} \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m}} + \frac{m}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{m+2}}} \right] \quad (\text{см. 44.3}).$$

$$44.11. \int \sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} dx = \frac{\sqrt{\alpha}}{a} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \sqrt{\alpha}} \right| + \frac{2}{a} \sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}.$$

$$44.12. \int \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^3} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^3} + \frac{2\alpha}{a} \sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \frac{\alpha^2}{a} \int \frac{dt}{t \sqrt{\alpha \pm \beta t}}, \quad \text{где } t = e^{ax} \text{ (см. 16.12).}$$

$$44.13. \int \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m} dx = \frac{1}{a} \left[2\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} \sum_{\nu=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{(\alpha \pm \beta e^{ax})^{\frac{m-1-\nu}{2}}}{m-2\nu} a^\nu + \alpha^{\frac{m-1}{2}} \sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \alpha^{\frac{m+1}{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \sqrt{\alpha}} \right| \right].$$

$$44.14. \int e^x \sqrt{1 \pm e^x} dx = \pm \frac{2\sqrt{(1 \pm e^x)^3}}{3}.$$

$$44.15. \int e^x \sqrt{(1 \pm e^x)^5} dx = \pm \frac{2\sqrt{(1 \pm e^x)^5}}{5}.$$

$$44.16. \int e^{ax} \sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m} dx = \frac{2\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}}{(m+1)\beta}.$$

$$44.17. \int \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}}{e^{ax}} dx = -\frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}}{ae^{ax}} \pm \frac{\beta}{a\sqrt{\alpha}} \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \sqrt{\alpha}} \right|.$$

$$44.18. \int \frac{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^3}}{e^{ax}} dx = -\frac{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^3}}{a\alpha e^{ax}} + \frac{3\beta}{2a\alpha} \left[\frac{2\sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}}}{3} + 2\alpha \sqrt{\alpha \pm \beta e^{ax}} + \alpha^2 \int \frac{dt}{t \sqrt{\alpha \pm \beta t}} \right],$$

где $t = e^{ax}$ (см. 16.12).

$$44.19. \int \frac{\sqrt{(\alpha \pm \beta e^{ax})^m}}{e^{ax}} dx = \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{(\alpha \pm \beta t)^m} dt}{t^2}, \quad \text{где } t = e^{ax} \text{ (см. 17.16).}$$

ТАБЛИЦА 45
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int e^{ax} \sin^n px \, dx, \quad \int e^{ax} \cos^n px \, dx;$$

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x \, dx; \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$45.1. \quad \int e^{ax} \sin px \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin px - p \cos px)}{a^2 + p^2}.$$

$$45.2. \quad \int e^{ax} \sin^2 px \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4p^2} \left(a \sin^2 px - 2p \cos px \sin px + \frac{2p^2}{a} \right).$$

$$45.3. \quad \int e^{ax} \sin^3 px \, dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + 9p^2} \left[a \sin^3 px - 3p \cos px \cdot \sin^2 px + \right.$$

$$\left. + \frac{6p^2}{a^2 + p^2} (a \sin px - p \cos px) \right].$$

$$45.4. \quad \int e^{ax} \sin^n px \, dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1} px}{a^2 + n^2 p^2} \left[a \sin px - np \cos px \right] +$$

$$+ \frac{n(n-1)p^2}{a^2 + n^2 p^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} px \, dx.$$

$$45.5. \quad \int e^{ax} \cos px \, dx = \frac{e^{ax} (a \cos px + p \sin px)}{a^2 + p^2}.$$

$$45.6. \quad \int e^{ax} \cos^2 px \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4p^2} \left(a \cos^2 px - 2p \cos px \sin px + \frac{2p^2}{a} \right).$$

$$45.7. \quad \int e^{ax} \cos^3 px \, dx =$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + 9p^2} \left[a \cos^3 px + 3p \sin px \cos^2 px + \right.$$

$$\left. + \frac{6p^2}{a^2 + p^2} (a \cos px + p \sin px) \right].$$

$$45.8. \quad \int e^{ax} \cos^n px \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} px}{a^2 + n^2 p^2} [a \cos px + np \sin px] +$$

$$+ \frac{n(n-1)p^2}{a^2 + n^2 p^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} px \, dx.$$

$$45.9. \int e^{ax} \sin px \cos qx dx = \frac{ae^{ax}}{2} \left[\frac{\sin(p+q)x}{a^2+(p+q)^2} + \frac{\sin(p-q)x}{a^2+(p-q)^2} \right] - \\ - \frac{e^{ax}}{2} \left[\frac{(p+q) \cos(p+q)x}{a^2+(p+q)^2} + \frac{(p-q) \cos(p-q)x}{a^2+(p-q)^2} \right].$$

$$45.10. \int e^{ax} \sin px \cos px dx = \frac{e^{ax}}{2a^2+8p^2} (a \sin 2px - 2p \cos 2px).$$

$$45.11. \int e^{ax} \sin^2 px \cos px dx = \\ = \frac{e^{ax}}{a^2+9p^2} \left[\frac{a^2+3p^2}{a^2+p^2} (a \cos px + p \sin px) - \right. \\ \left. - \cos^2 px (a \cos px + 3p \sin px) \right].$$

$$45.12. \int e^{ax} \sin^2 px \cos^2 px dx = \frac{1}{4} \int e^{ax} \sin^2 2px dx \quad (\text{см. 45.2}).$$

$$45.13. \int e^{ax} \sin px \cos^2 px dx = \\ = \frac{e^{ax}}{a^2+9p^2} \left[\frac{a^3+3p^2}{a^2+p^2} (a \sin px - p \cos px) - \right. \\ \left. - \sin^2 px (a \sin px + 3p \cos px) \right].$$

$$45.14. \int e^{ax} \sin^m x \cos^n x dx = \\ = \frac{1}{(m+n)^2+a^2} \left\{ e^{ax} \sin^m x \cos^{n-1} x [a \cos x + (m+n) \sin x] - \right. \\ \left. - ma \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx + \right. \\ \left. + (n-1)(m+n) \int e^{ax} \sin^m x \cos^{n-2} x dx \right\}; \\ = \frac{1}{(m+n)^2+a^2} \left\{ e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^n x [a \sin x - (m+n) \cos x] + \right. \\ \left. + na \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x dx + \right. \\ \left. + (m-1)(m+n) \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x dx \right\}.$$

ТАБЛИЦА 46
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \ln^m (a+bx) dx; \quad \begin{matrix} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{matrix}$$

$$46.1. \int \lg_A x dx = \frac{1}{\ln A} (x \ln x - x) = x \lg_A \frac{x}{e} \quad (A > 0, A \neq 1).$$

$$46.2. \int \ln (a+bx) dx = \frac{1}{b} (a+bx) \ln (a+bx) - x.$$

$$46.3. \int x \ln (a+bx) dx = \frac{b^2 x^2 - a^2}{2b^2} \ln (a+bx) - \frac{bx^2 - 2ax}{4b}.$$

$$46.4. \int x^2 \ln (a+bx) dx = \\ = \frac{1}{3} \left(x^3 - \frac{a^3}{b^3} \right) \ln (a+bx) - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2b} + \frac{a^2 x}{b^2} \right).$$

$$46.5. \int x^3 \ln (a+bx) dx = \\ = \frac{1}{4} \left(x^4 - \frac{a^4}{b^4} \right) \ln (a+bx) - \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3b} + \frac{a^2 x^2}{2b^2} - \frac{a^3 x}{b^3} \right).$$

$$46.6. \int x^n \ln (a+bx) dx = \frac{1}{n+1} \left(x^{n+1} - \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} \right) \ln (a+bx) + \\ + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(-1)^\nu x^{n-\nu+2} a^{\nu-1}}{(n-\nu+2) b^{\nu-1}}.$$

$$46.7. \int x^n \lg_A x dx = \frac{1}{\ln A} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right].$$

$$46.8. \int \ln^m (a+bx) dx = \frac{(a+bx) \ln^m (a+bx)}{b} - m \int \ln^{m-1} (a+bx) dx.$$

$$46.9. \int x \ln^m (a+bx) dx = \\ = \frac{(a+bx)^2 \ln^m (a+bx)}{2b^2} - a \int \ln^m (a+bx) dx - \\ - \frac{m}{2b} \int (a+bx) \ln^{m-1} (a+bx) dx \quad (\text{см. 46.8}).$$

$$\begin{aligned}
 46.10. \quad & \int x^2 \ln^m (a + bx) dx = \\
 & = \left[\frac{(a + bx)^3}{3} - a(a + bx) + a^2(a + bx) \right] \frac{\ln^m (a + bx)}{b^3} - \\
 & - \frac{m}{b^3} \left(\frac{1}{3} \int u^2 \ln^{m-1} u du - \frac{1}{2} \int u \ln^{m-1} u du + \int \ln^{m-1} u du \right), \\
 & \text{где } u = a + bx.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.11. \quad & \int x^n \ln^m (a + bx) dx = \\
 & = \frac{\ln^m (a + bx)}{b^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{n+\nu} n! (a + bx)^{\nu+1}}{a^{\nu-n} (n-\nu)! \nu! (\nu+1)!} - \\
 & - \frac{m}{b^{n+1}} \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^{n+\nu} n!}{a^{\nu-n} (n-\nu)! \nu! (\nu+1)!} \int u^\nu \ln^{m-1} u du, \\
 & \text{где } u = a + bx.
 \end{aligned}$$

$$46.12.* \quad \int \frac{\ln x dx}{a + bx} = \frac{\ln x \ln (a + bx)}{b} - \frac{1}{b} \int \frac{\ln (a + bx)}{x} dx \quad (\text{см. 46.13}).$$

$$\begin{aligned}
 46.13.* \quad & \int \frac{\ln (a + bx)}{x} dx = \\
 & = \begin{cases} \ln a \ln x + \frac{bx}{a} - \frac{b^2 x^2}{2^2 a^2} + \frac{b^3 x^3}{3^2 a^3} - \frac{b^4 x^4}{4^2 a^4} + \dots & \text{при } b^2 x^2 < a^2; \\ \frac{\ln^2 bx}{2} - \frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2^2 b^2 x^2} - \frac{a^3}{3^2 b^3 x^3} + \frac{a^4}{4^2 b^4 x^4} - \dots & \text{при } b^2 x^2 > a^2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$46.14. \quad \int \frac{\ln (a + bx)}{x^2} dx = \frac{b}{a} \ln x - \frac{a + bx}{ax} \ln (a + bx).$$

$$\begin{aligned}
 46.15. \quad & \int \frac{\ln (a + bx)}{x^n} dx = -\frac{\ln (a + bx)}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{b}{(n-1)} \int \frac{dx}{x^{n-1} (a + bx)} \\
 & (n \geq 2) \quad (\text{см. 2.19}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46.16.* \quad & \int \frac{\ln^2 (a + bx)}{x^2} dx = \\
 & = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) \ln^2 (a + bx) + \frac{2}{a} \int \frac{\ln (a + bx)}{x} dx \quad (\text{см. 46.13}).
 \end{aligned}$$

$$46.17. \quad \int \frac{\ln^2 (a + bx)}{x^n} dx = \frac{\ln^2 (a + bx)}{(n-1) x^{n-1}} - \frac{b}{(n-1)} \int \frac{\ln (a + bx)}{x^{n-1} (a + bx)} dx.$$

$$46.18. \quad \int \frac{\ln^m (a + bx)}{x^2} dx = -\frac{\ln^m (a + bx)}{x} + mb \int \frac{\ln^{m-1} (a + bx)}{x (a + bx)} dx.$$

ТАБЛИЦА 47

ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \frac{x^{\pm n} dx}{\ln^m (a+bx)}; \quad n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots$$

Обозначение: $u = a + bx$.

$$47.1.* \int \frac{dx}{\ln(a+bx)} = \frac{1}{b} \left[\ln |\ln(a+bx)| + \ln(a+bx) + \right. \\ \left. + \frac{\ln^2(a+bx)}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3(a+bx)}{3 \cdot 3!} + \dots \right].$$

$$47.2.* \int \frac{x dx}{\ln(a+bx)} = \frac{1}{b^2} \left[\ln |\ln(a+bx)| + 2 \ln(a+bx) + \right. \\ \left. + \frac{2^2 \ln^2(a+bx)}{2 \cdot 2!} + \frac{2^3 \cdot \ln^3(a+bx)}{3 \cdot 3!} + \dots - a \int \frac{du}{\ln u} \right] \quad (\text{см. 47.1}).$$

$$47.3.* \int \frac{x^n dx}{\ln x} = \ln |\ln x| + (n+1) \ln x + \frac{(n+1)^2 \ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \dots \\ \dots + \frac{(n+1)^v \ln^v x}{v \cdot v!} + \dots$$

$$47.4.* \int \frac{x^n dx}{\ln(a+bx)} = \frac{1}{b^{n+1}} \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^{v+n} n!}{a^{v-n} (n-v)! v!} \int \frac{u^v du}{\ln u} \quad (\text{см. 47.3}).$$

$$47.5.* \int \frac{dx}{\ln^2(a+bx)} = -\frac{a+bx}{b \ln(a+bx)} + \frac{1}{b} \int \frac{du}{\ln u} \quad (\text{см. 47.1}).$$

$$47.6.* \int \frac{x dx}{\ln^2(a+bx)} = -\frac{x(a+bx)}{b \ln(a+bx)} - \frac{a}{b^2} \int \frac{du}{\ln u} + \frac{2}{b^2} \int \frac{u du}{\ln u} \\ (\text{см. 47.3}).$$

$$47.7.* \int \frac{x^2 dx}{\ln^2(a+bx)} = -\frac{x^2(a+bx)}{b \ln(a+bx)} + \frac{a^2}{b^3} \int \frac{du}{\ln u} - \frac{4a}{b^3} \int \frac{u du}{\ln u} + \\ + \frac{3}{b^3} \int \frac{u^2 du}{\ln u} \quad (\text{см. 47.3}).$$

$$47.8.* \int \frac{dx}{\ln^m(a+bx)} = -\frac{a+bx}{b \ln^{m-1}(a+bx)} + \frac{1}{(m-1)b} \int \frac{du}{\ln^{m-1} u}.$$

$$47.9.* \int \frac{x dx}{\ln^m(a+bx)} = -\frac{x(a+bx)}{(m-1)b \ln^{m-1}(a+bx)} - \\ - \frac{a}{(m-1)b^2} \int \frac{du}{\ln^{m-1} u} + \frac{2}{(m-1)b^2} \int \frac{u du}{\ln^{m-1} u} \quad (\text{см. 47.8}).$$

$$47.10. \int \frac{x^2 dx}{\ln^m(a+bx)} = -\frac{x^2(a+bx)}{mb \ln^m(a+bx)} + \frac{a^2}{mb^3} \int \frac{du}{\ln u} - \\ - \frac{4a}{mb^3} \int \frac{u du}{\ln^m u} + \frac{3}{mb^3} \int \frac{u^2 du}{\ln^m u} \quad (\text{см. 47.8 и 47.9}).$$

$$47.11.* \int \frac{x^n dx}{\ln^m(a+bx)} = -\frac{x^n(a+bx)}{(m-1)b \ln^{m-1}(a+bx)} + \\ + \frac{1}{(m-1)b^{n+1}} \sum_{v=0}^n \frac{(-1)^{n+v}(v+1)n!}{a^{v+n}(n-v)!v!} \int \frac{u^v du}{\ln^{m-1}u}.$$

$$47.12.* \int \frac{dx}{x \ln(a+bx)} = \sum_{v=0}^{\infty} a^v \left[\ln |\ln(a+bx)| - v \ln(a+bx) + \right. \\ \left. + \frac{v^2 \ln^2(a+bx)}{2 \cdot 2!} - \frac{v^3 \ln^3(a+bx)}{3 \cdot 3!} + \dots \right].$$

$$47.13.* \int \frac{dx}{x^n \ln(a+bx)} = b^{n-1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+v-1)! a^v}{(n-1)! v!} \left[\ln |\ln(a+bx)| - \right. \\ \left. - (n+v-1) \ln(a+bx) + \frac{(n+v-1)^2 \ln^2(a+bx)}{2 \cdot 2!} - \right. \\ \left. - \frac{(n+v-1)^3 \ln^3(a+bx)}{3 \cdot 3!} + \dots \right].$$

$$47.14.* \int \frac{dx}{x \ln^2(a+bx)} = \\ = -\frac{a+bx}{bx \ln(a+bx)} - \sum_{v=0}^{\infty} v a^v \int \frac{du}{u^{v+1} \ln u} \quad (\text{см. 47.13}).$$

$$47.15. \int \frac{dx}{x^n \ln^2(a+bx)} = -\frac{a+bx}{bx^n \ln(a+bx)} - \\ - b^{n-1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+v-1)!(n+v-1)a^v}{(n-1)!v!} \int \frac{du}{u^{n+v} \ln u}.$$

$$47.16. \int \frac{dx}{x \ln^m(a+bx)} = -\frac{a+bx}{(m-1)bx \ln^{m-1}(a+bx)} - \\ - \frac{1}{m-1} \sum_{v=0}^{\infty} v a^v \int \frac{du}{u^{v+1} \ln^{m-1}u} \quad (\text{см. 46.13}).$$

$$47.17. \int \frac{dx}{x^n \ln^m(a+bx)} = -\frac{a+bx}{(m-1)bx^n \ln^{m-1}(a+bx)} - \\ - \frac{b^{n-1}}{m-1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(n+v-1)!(n+v-1)a^v}{(n-1)!v!} \int \frac{du}{u^{n+v} \ln^{m-1}u}.$$

ТАБЛИЦА 48
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^n \ln |x^2 \pm a^2| dx,$$

$$\int x^{\pm n} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx; \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$48.1. \int \ln (x^2 + a^2) dx = x \ln (x^2 + a^2) - 2x + 2a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

$$48.2. \int x \ln (x^2 + a^2) dx = \frac{1}{2} [(x^2 + a^2) \ln (x^2 + a^2) - x^2].$$

$$48.3. \int x^2 \ln (x^2 + a^2) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[x^3 \ln (x^2 + a^2) - \frac{2}{3} x^3 + 2xa^2 - 2a^3 \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right].$$

$$48.4. \int x^n \ln (x^2 + a^2) dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln (x^2 + a^2) - \frac{2}{n+1} \int \frac{x^{n+2} dx}{x^2 + a^2}.$$

$$48.5. \int \ln |x^2 - a^2| dx = x \ln |x^2 - a^2| - 2x + a \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|.$$

$$48.6. \int x \ln |x^2 - a^2| dx = \frac{1}{2} [(x^2 - a^2) \ln |x^2 - a^2| - x^2].$$

$$48.7. \int x^2 \ln |x^2 - a^2| dx =$$

$$= \frac{1}{3} \left[x^3 \ln |x^2 - a^2| - \frac{2}{3} x^3 - 2xa^2 + a^3 \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| \right].$$

$$48.8. \int x^n \ln |x^2 - a^2| dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln |x^2 - a^2| - \frac{2}{n+1} \int \frac{x^{n+2} dx}{x^2 - a^2}.$$

$$48.9. \int \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = -\sqrt{x^2 \pm a^2} + x \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

$$48.10. \int x \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx =$$

$$= -\frac{x \sqrt{x^2 \pm a^2}}{4} + \frac{2x^2 \pm a^2}{4} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

$$48.11. \int x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \\ = \pm \frac{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}}{3} - \frac{\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{9} + \frac{x^3}{3} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}).$$

$$48.12. \int x^n \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \\ = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) - \frac{1}{n+1} \int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

$$48.13.* \int \frac{\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right)}{x} dx = \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \left(\frac{x}{a}\right)^3 + \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \left(\frac{x}{a}\right)^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \left(\frac{x}{a}\right)^7 + \dots \text{ при } x^2 < a^2; \\ = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a}\right)^2 - \frac{1}{2^3} \left(\frac{a^2}{x}\right) + \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \left(\frac{a}{x}\right)^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \left(\frac{a}{x}\right)^6 + \dots \text{ при } \frac{x}{a} > 1.$$

$$48.14.* \int \frac{\ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2x}{a}\right)^2 + \frac{1}{2^3} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + \\ + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^3} \left(\frac{a}{x}\right)^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6^3} \left(\frac{a}{x}\right)^6 + \dots \text{ при } \frac{x}{a} > 1.$$

$$48.15. \int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{x^2} dx = \\ = -\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{x} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right|.$$

$$48.16. \int \frac{\ln x + (\sqrt{x^2 - a^2})}{x^2} dx = \\ = -\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x} + \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| \left(0 < \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| < \frac{\pi}{2} \right).$$

$$48.17. \int \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{x^n} dx = \\ = -\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1} \sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (n \geq 2).$$

ТАБЛИЦА 49
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \operatorname{sh}^{\pm m} \rho x \, dx; \quad \begin{array}{l} n=0, 1, 2, \dots, \\ m=1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$49.1. \int \operatorname{sh} \rho x \, dx = \frac{1}{\rho} \operatorname{ch} \rho x.$$

$$49.2. \int \operatorname{sh}^2 \rho x \, dx = \frac{\operatorname{sh} 2\rho x}{4\rho} - \frac{x}{2}.$$

$$49.3. \int \operatorname{sh}^3 \rho x \, dx = \frac{\operatorname{ch} \rho x}{3\rho} (\operatorname{ch}^2 \rho x - 3).$$

$$49.4. \int \operatorname{sh}^4 \rho x \, dx = \frac{1}{8\rho} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 4\rho x - 2 \operatorname{sh} 2\rho x + 3x \right).$$

$$49.5. \int \operatorname{sh}^m \rho x \, dx = \frac{\operatorname{sh}^{m-1} \rho x \operatorname{ch} \rho x}{m\rho} - \frac{m-1}{m} \int \operatorname{sh}^{m-2} \rho x \, dx.$$

$$49.6. \int x \operatorname{sh} \rho x \, dx = \frac{x}{\rho} \operatorname{ch} \rho x - \frac{1}{\rho^2} \operatorname{sh} \rho x.$$

$$49.7. \int x \operatorname{sh}^2 \rho x \, dx = \frac{x \operatorname{ch} 2\rho x}{4\rho} - \frac{\operatorname{ch} 2\rho x}{8\rho^2} - \frac{x^2}{4}.$$

$$49.8. \int x \operatorname{sh}^3 \rho x \, dx = \frac{x \operatorname{ch} \rho x}{3\rho} (\operatorname{ch}^2 \rho x - 3) - \frac{\operatorname{sh} \rho x}{9\rho^2} (\operatorname{sh}^2 \rho x - 6).$$

$$49.9. \int x^2 \operatorname{sh} \rho x \, dx = \frac{\rho^2 x^2 + 2}{\rho^3} \operatorname{ch} \rho x - \frac{2x}{\rho^2} \operatorname{sh} \rho x.$$

$$49.10. \int x^2 \operatorname{sh}^2 \rho x \, dx = \frac{(4\rho^2 x^2 + 2) \operatorname{sh} 2\rho x}{\rho^3} - \frac{4x}{\rho^2} \operatorname{ch} 2\rho x - \frac{x^3}{6}.$$

$$49.11. \int x^2 \operatorname{sh}^3 \rho x \, dx = \frac{\operatorname{ch} \rho x}{27\rho^3} (\rho^2 x^2 \operatorname{ch}^2 \rho x - 27\rho^2 x^2 - 54) - \\ - \frac{x \operatorname{sh} \rho x}{9\rho^2} (\operatorname{sh}^2 \rho x - 12).$$

$$49.12. \int x^3 \operatorname{sh} \rho x \, dx = \frac{\rho^3 x^3 + 6x}{\rho^3} \operatorname{ch} \rho x - \frac{3\rho^2 x^2 + 6}{\rho^3} \operatorname{sh} \rho x.$$

$$49.13. \int x^n \operatorname{sh} px \, dx = \frac{x^n}{p} \operatorname{ch} px - \frac{n}{p} \int x^{n-1} \operatorname{ch} px \, dx.$$

$$49.14. \int x^n \operatorname{sh}^2 px \, dx = \frac{x^n}{4p} \operatorname{sh} 2px - \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{n}{2^{n+2} p^{n+1}} \int t^{n-1} \operatorname{sh} t \, dt,$$

где $t = 2px$ (см. 49.13).

$$49.15.* \int \frac{\operatorname{sh} px}{x} \, dx = px + \frac{(px)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(px)^5}{5 \cdot 5!} + \frac{(px)^7}{7 \cdot 7!} + \dots$$

$$49.16.* \int \frac{\operatorname{sh} px}{x^2} \, dx = -\frac{\operatorname{sh} px}{x} + p \int \frac{\operatorname{ch} px}{x} \, dx \quad (\text{см. 50.15}).$$

$$49.17.* \int \frac{\operatorname{sh}^2 px \, dx}{x} = -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} pt}{t} \, dt, \quad \text{где } t = 2x \text{ (см. 50.15).}$$

$$49.18. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} px} = \frac{1}{p} \ln \left| \operatorname{th} \frac{px}{2} \right| = -\frac{1}{2p} \ln \frac{\operatorname{ch} px + 1}{\operatorname{ch} px - 1}.$$

$$49.19. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 px} = -\frac{1}{p} \operatorname{cth} px.$$

$$49.20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 px} = -\frac{1}{p} \left(\frac{\operatorname{ch} px}{2 \operatorname{sh}^2 px} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{px}{2} \right| \right).$$

$$49.21. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^m px} = -\frac{\operatorname{ch} px}{(m-1)p \operatorname{sh}^{m-1} px} - \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{m-2} px} \quad (m \geq 2).$$

$$49.22*. \int \frac{x \, dx}{\operatorname{sh} px} = \frac{1}{p^2} \left[px - \frac{(px)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7(px)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} - \frac{31(px)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{2(2^{2n-1} - 1)}{(2n+1)!} B_n (px)^{2n+1} + \dots \right] \quad (p^2 x^2 < \pi^2).$$

$$49.23. \int \frac{x \, dx}{\operatorname{sh}^2 px} = -\frac{1}{p^2} (px \operatorname{cth} px + \ln |\operatorname{sh} px|).$$

$$49.24. \int \operatorname{sh} px \operatorname{sh} qx \, dx = \frac{\operatorname{sh} (p+q)x}{2(p+q)} - \frac{\operatorname{sh} (p-q)x}{2(p-q)} \quad (p^2 \neq q^2).$$

ТАБЛИЦА 50
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int x^{\pm n} \operatorname{ch}^{\pm m} px \, dx; \quad \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$50.1. \int \operatorname{ch} px \, dx = \frac{1}{p} \operatorname{sh} px.$$

$$50.2. \int \operatorname{ch}^2 px \, dx = \frac{\operatorname{sh} 2px}{4p} + \frac{x}{2}.$$

$$50.3. \int \operatorname{ch}^3 px \, dx = \frac{\operatorname{sh} px}{3p} (\operatorname{sh}^2 px + 3).$$

$$50.4. \int \operatorname{ch}^4 px \, dx = \frac{1}{8p} \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 4px + 2 \operatorname{sh} 2px + 3x \right).$$

$$50.5. \int \operatorname{ch}^m px \, dx = \frac{1}{mp} \operatorname{sh} px \operatorname{ch}^{m-1} px - \frac{(m-1)}{m} \int \operatorname{ch}^{m-2} px \, dx.$$

$$50.6. \int x \operatorname{ch} px \, dx = \frac{x}{p} \operatorname{sh} px - \frac{1}{p^2} \operatorname{ch} px.$$

$$50.7. \int x \operatorname{ch}^2 px \, dx = \frac{x \operatorname{sh} 2px}{4p} - \frac{\operatorname{ch} 2px}{8p^2} + \frac{x^2}{4}.$$

$$50.8. \int x \operatorname{ch}^3 px \, dx = \frac{x \operatorname{sh} px}{3p} (\operatorname{sh}^2 px + 3) - \frac{\operatorname{ch} px}{9p^2} (\operatorname{ch}^2 px + 6).$$

$$50.9. \int x^2 \operatorname{ch} px \, dx = \frac{p^2 x^2 + 2}{p^3} \operatorname{sh} px - \frac{2x}{p^2} \operatorname{ch} px.$$

$$50.10. \int x^2 \operatorname{ch}^2 px \, dx = \frac{p^2 x^2 + 1}{4p^3} \operatorname{sh} 2px - \frac{x \operatorname{ch} 2px}{4p^2} + \frac{x^3}{6}.$$

$$50.11. \int x^2 \operatorname{ch}^3 px \, dx = \frac{\operatorname{sh} px}{9p^2} (9p^2 x^2 \operatorname{ch}^2 px + p \operatorname{sh}^2 px + 18 - 6p) - \frac{2x \operatorname{ch} px}{9p^2} (\operatorname{ch}^2 px + 12).$$

$$50.12. \int x^3 \operatorname{ch} px \, dx = \frac{(p^3 x^3 + 6x)}{p^3} \operatorname{sh} px - \frac{(3p^2 x^2 + 6)}{p^4} \operatorname{ch} px.$$

$$50.13. \int x^n \operatorname{ch} px \, dx = \frac{x^n}{p} \operatorname{sh} px - \frac{n}{p} \int x^{n-1} \operatorname{sh} px \, dx.$$

$$50.14. \int x^n \operatorname{ch}^2 px \, dx = \frac{x^n}{4p} \operatorname{sh} 2px + \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} - \frac{n}{2^{n+2} p^{n+1}} \int t^{n-1} \operatorname{sh} t \, dt,$$

где $t = 2px$ (см. 49.13).

$$50.15. * \int \frac{\operatorname{ch} px}{x} \, dx = \ln |px| + \frac{(px)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(px)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(px)^6}{6 \cdot 6!} + \dots$$

$$50.16. * \int \frac{\operatorname{ch} px}{x^2} \, dx = -\frac{\operatorname{ch} px}{x} + p \int \frac{\operatorname{sh} px}{x} \, dx.$$

$$50.17. * \int \frac{\operatorname{ch}^2 px}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln |x| + \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{ch} pt}{t} \, dt, \quad \text{где } t = 2x \text{ (см. 50.15).}$$

$$50.18. \int \frac{dx}{\operatorname{ch} px} = \frac{1}{p} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} px).$$

$$50.19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 px} = \frac{1}{p} \operatorname{th} px.$$

$$50.20. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 px} = \frac{1}{2p} \frac{\operatorname{sh} px}{\operatorname{ch}^2 px} + \frac{1}{2p} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} px).$$

$$50.21. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^m px} = \frac{\operatorname{sh} px}{(m-1)p \operatorname{ch}^{m-1} px} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{m-2} px} \quad (m \geq 2).$$

$$50.22. * \int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch} px} = \frac{1}{p^2} \left[\frac{(px)^2}{2} - \frac{(px)^4}{4 \cdot 2!} + \frac{5(px)^6}{6 \cdot 4!} - \frac{61(px)^8}{8 \cdot 6!} + \right. \\ \left. + \frac{138(px)^{10}}{10 \cdot 8!} + \dots + \frac{(-1)^n E_n}{(2n+2)(2n)!} (px)^{2n+2} + \dots \right] \quad (p^2 x^2 < \pi^2/4).$$

$$50.23. \int \frac{x \, dx}{\operatorname{ch}^2 px} = \frac{1}{p^2} (px \operatorname{th} px - \ln \operatorname{ch} px).$$

$$50.24. \int \operatorname{ch} px \operatorname{ch} qx \, dx = \frac{\operatorname{sh} (p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\operatorname{sh} (p-q)x}{2(p-q)} \quad (p^2 \neq q^2).$$

ТАБЛИЦА 51
ИНТЕГРАЛЫ ВИДА

$$\int \operatorname{sh}^{\pm m} x \operatorname{ch}^{\pm n} x dx; \quad \begin{array}{l} n=1, 2, 3, \dots \\ m=1, 2, 3, \dots \end{array}$$

- 51.1. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x dx = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2}.$
- 51.2. $\int \operatorname{sh} px \operatorname{ch} qx dx = \frac{1}{p^2 - q^2} (p \operatorname{ch} px \operatorname{ch} qx - q \operatorname{sh} px \operatorname{sh} qx) \quad (p^2 \neq q^2).$
- 51.3. $\int \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^n x dx = \frac{\operatorname{ch}^{n+1} x}{n+1}.$
- 51.4. $\int \operatorname{sh}^m x \operatorname{ch} x dx = \frac{\operatorname{sh}^{m+1} x}{m+1}.$
- 51.5. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{\operatorname{sh} 4x}{32} - \frac{x}{8}.$
- 51.6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = \ln |\operatorname{th} x|.$
- 51.7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} + \ln |\operatorname{th} x|.$
- 51.8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x} = \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \ln |\operatorname{th} x|.$
- 51.9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x} = -2 \operatorname{cth} 2x.$
- 51.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x).$
- 51.11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \ln |\operatorname{th} x|.$
- 51.12. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^n x} = \frac{1}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-2} x} \quad (n \geq 2).$
- 51.13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^m x \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{(m-1) \operatorname{sh}^{m-1} x} - \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{m-2} x \operatorname{ch} x} \quad (m \geq 2).$
- 51.14. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x.$
- 51.15. $\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^n x} dx = -\frac{1}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} \quad (n \geq 2).$

$$51.16. \int \frac{\operatorname{ch} x \, dx}{\operatorname{sh} x} = \int \operatorname{cth} x \, dx = \ln |\operatorname{sh} x|.$$

$$51.17. \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^m x} \, dx = -\frac{1}{(m-1) \operatorname{sh}^{m-1} x} \quad (m \geq 2).$$

$$51.18. \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \int \operatorname{th}^2 x \, dx = x - \operatorname{th} x.$$

$$51.19. \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = \int \operatorname{cth}^2 x \, dx = x - \operatorname{cth} x.$$

$$51.20. \int \frac{\operatorname{sh}^m x}{\operatorname{ch}^m x} \, dx = \int \operatorname{th}^m x \, dx = -\frac{\operatorname{th}^{m-1} x}{m-1} + \int \operatorname{th}^{m-2} x \, dx \quad (m \geq 2).$$

$$51.21. \int \frac{\operatorname{ch}^m x}{\operatorname{sh}^m x} \, dx = \int \operatorname{cth}^m x \, dx = -\frac{\operatorname{cth}^{m-1} x}{m-1} + \int \operatorname{cth}^{m-2} x \, dx \quad (m \geq 2).$$

$$51.22. \int \frac{\operatorname{sh}^m x}{\operatorname{ch} x} \, dx = \frac{\operatorname{sh}^{m-1} x}{m-1} - \int \frac{\operatorname{sh}^{m-2} x}{\operatorname{ch} x} \, dx \quad (m \geq 2).$$

$$51.23. \int \frac{\operatorname{sh}^m x}{\operatorname{ch}^n x} \, dx = -\frac{\operatorname{sh}^{m-1} x}{(n-1) \operatorname{ch}^{n-1} x} + \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\operatorname{sh}^{m-2} x}{\operatorname{ch}^{n-2} x} \, dx \quad (n \geq 2).$$

$$51.24. \int \frac{\operatorname{ch}^n x}{\operatorname{sh} x} \, dx = \frac{\operatorname{ch}^{n-1} x}{n-1} + \int \frac{\operatorname{ch}^{n-2} x}{\operatorname{sh} x} \, dx \quad (n \geq 2).$$

$$51.25. \int \frac{\operatorname{ch}^n x}{\operatorname{sh}^m x} \, dx = -\frac{\operatorname{ch}^{n-1} x}{(m-1) \operatorname{sh}^{m-1} x} + \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\operatorname{ch}^{n-2} x}{\operatorname{sh}^{m-2} x} \, dx \quad (m \geq 2).$$

Марк Львович Смолянский

Таблицы неопределенных интегралов

М., Физматгиз, 1963 г., 112 стр.

Редактор *Н. Х. Розов*

Техн. редактор *Э. И. Михлин*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 4.X 1962 г. Подписано к печати 15/XII 1962 г. Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 3,5. Услови. печ. л. 5,74. Уч.-изд. л. 6,61. Тираж 80 000 (Первый завод — 1—40 000) экз. Т-15063. Цена книги 20 коп. Заказ № 3417.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография
имени А. А. Жданова Московского городского
совнархоза. Москва, Ж-54, Валовая, 28.