

В. В. СОБОЛЕВ

ПЕРЕНОС
ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ
В АТМОСФЕРАХ
ЗВЕЗД И ПЛАНЕТ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1956

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
Глава I. Постановка задачи	10
§ 1. Поле излучения	11
§ 2. Уравнение переноса излучения	17
§ 3. Рассеяние света элементарным объемом	21
§ 4. Основная задача теории рассеяния излучения	26
§ 5. Случай чистого рассеяния	34
§ 6. Рассеяние света в планетных атмосферах	36
§ 7. Перенос излучения через атмосферу звезды (в непрерывном спектре)	41
§ 8. Перенос излучения через атмосферу звезды (в спектральной линии)	46
§ 9. Рассеяние света в одномерной среде	48
Глава II. Методы решения	57
§ 1. Метод последовательных приближений	57
§ 2. Усреднение интенсивности излучения по направлениям	62
§ 3. Применение квадратурных формул	67
§ 4. Вариационные методы	71
§ 5. Методы, дающие точное решение	75
Глава III. Метод сложения слоев	77
§ 1. Одномерная среда	78
§ 2. Диффузное отражение света	84
§ 3. Альbedo среды	95
§ 4. Диффузное отражение и пропускание света	100
§ 5. Определение функции B (τ, ζ)	111
§ 6. Световой режим в глубоких слоях	116
§ 7. Диффузное отражение и пропускание света средой большой оптической толщины	123
§ 8. Распределение диффузно-пропущенного излучения по направлениям	129

Глава IV. Линейные интегральные уравнения для коэффициентов яркости	134
§ 1. Интегральные уравнения для коэффициентов яркости	135
§ 2. Интегральные уравнения для вспомогательных функций	145
§ 3. Решение интегральных уравнений	149
Глава V. Рассеяние поляризованного света	156
§ 1. Основные уравнения	157
§ 2. Рассеяние света в земной атмосфере	161
§ 3. Рассеяние света в атмосферах планет	164
§ 4. Рассеяние света в электронной атмосфере звезды	169
§ 5. Поле излучения в глубоких слоях среды	172
Глава VI. Вероятность выхода кванта из среды	175
§ 1. Одномерная среда	176
§ 2. Среда бесконечно большой оптической толщины	182
§ 3. Внутренние источники излучения	191
§ 4. Контуры линий поглощения в звездных спектрах	195
§ 5. Контуры линий при учете флуоресценции	199
§ 6. Среда конечной оптической толщины	202
§ 7. Свечение среды при различных источниках излучения	209
§ 8. Точечный источник света	217
§ 9. Статистическое толкование проблемы перепоса излучения	222
Глава VII. Свечение среды, ограниченной отражающей поверхностью	226
§ 1. Интегральное уравнение для $B(\tau)$	227
§ 2. Вероятность выхода кванта из среды	230
§ 3. Свечение планетной атмосферы	235
§ 4. Внутренние источники излучения	238
§ 5. Зеркальное отражение света	241
§ 6. Среда бесконечно большой оптической толщины	244
§ 7. Некоторые применения	248
§ 8. Оптические явления на границе двух сред	253
Глава VIII. Диффузия излучения с перераспределением по частотам	256
§ 1. Элементарный акт рассеяния	257
§ 2. Диффузия излучения в одномерной среде	265
§ 3. Определение различных физических величин	272
§ 4. Вероятность выхода кванта из среды	280

§ 5. Диффузия излучения с полным перераспределением по частотам	285
§ 6. Свечение среды бесконечно большой оптической толщины	293
§ 7. Контуры линий поглощения при полностью некогерентном рассеянии	298
§ 8. Сравнение контуров линий	307
Глава IX. Нестационарное поле излучения	316
§ 1. Уравнение, определяющее функцию $B(\tau, t)$	317
§ 2. Интегральное уравнение для функции $p(\tau, t)$	322
§ 3. Среднее время пребывания кванта в среде	326
§ 4. Функциональные уравнения для функции $p(\tau, t)$	331
§ 5. Высвечивание среды	336
§ 6. Свечение звезды после отрыва оболочки	338
§ 7. Изменение ионизации со временем	341
Глава X. Приближенное решение основной задачи	352
§ 1. Случай чистого рассеяния	353
§ 2. Учет отражения света поверхностью	360
§ 3. Применения к земной атмосфере	362
§ 4. Световой режим при наличии истинного поглощения	366
§ 5. Оптические свойства планетных атмосфер	371
§ 6. Применение к оптике моря	377
Литература	385

ВВЕДЕНИЕ

Теория переноса лучистой энергии представляет собой важнейший раздел теоретической астрофизики. Это обусловлено прежде всего тем, что перенос излучения играет огромную роль в физических процессах, происходящих в небесных телах. Вместе с тем перенос излучения во внешних частях небесных тел определяет характер их спектров, служащих основой астрофизических исследований.

С проблемой переноса излучения мы встречаемся также в геофизике (при изучении земной атмосферы и водных бассейнов) и в некоторых других отделах физики. В последнее время приобрела большое значение проблема диффузии нейтронов, родственная по применяемым методам проблеме переноса излучения.

Важность теории переноса излучения вызвала появление многочисленных исследований в этой области, причем наиболее значительный прогресс был достигнут в послевоенные годы. Некоторые итоги проделанной работы были подведены в книге С. Чандрасекара «Перенос лучистой энергии» (Oxford, 1950) и в книге В. Курганова «Основные методы в проблемах переноса» (Oxford, 1952). Однако содержание указанных трудов, отражая в основном научные интересы их авторов (что вполне естественно), далеко не исчерпывает всех результатов, полученных в теории переноса излучения к настоящему времени.

В данной книге изложены некоторые новые методы в теории переноса излучения, а также применения этих методов к решению ряда астрофизических задач. Большое внимание уделено диффузии излучения с перераспределением по частотам и нестационарным процессам

переноса излучения, поскольку эти вопросы ранее подробно не рассматривались.

Содержание книги следующее.

В главе I выведены основные уравнения теории переноса излучения и при помощи этих уравнений сформулированы задачи о переносе излучения в атмосферах звезд и планет. В главе II кратко изложены основные методы, используемые для решения указанных уравнений в астрофизике.

Глава III посвящена рассмотрению методов В. А. Амбарцумяна. Они основаны на составлении функциональных уравнений для определения наиболее интересных для практики величин — интенсивностей излучения, выходящего из среды. После нахождения этих интенсивностей может быть сравнительно легко определен и световой режим внутри среды.

В главе IV для определения интенсивностей выходящего из среды излучения выводятся линейные интегральные уравнения. В случае среды бесконечно большой оптической толщины решение этих уравнений получается в конечном виде. При помощи указанных уравнений в главе V рассмотрена диффузия поляризованного излучения.

В главе VI вводится новая величина — вероятность выхода кванта из среды. Эта величина не зависит от расположения источников излучения, а зависит лишь от оптических свойств среды. Поэтому после определения вероятности выхода кванта из среды легко решаются (путем некоторого интегрирования) все задачи о свечении данной среды, отличающиеся друг от друга расположением источников излучения. Этим способом решен ряд задач, связанных с образованием звездных спектров. В дальнейшем этот способ применен также для решения других задач.

В главе VII рассмотрено свечение среды, ограниченной поверхностью, отражающей излучение. Наиболее важный пример такой среды — планетная атмосфера, ограниченная поверхностью планеты.

Содержанием главы VIII является исследование диффузии излучения с перераспределением по частотам. Сначала подробно рассмотрена диффузия резонансного излучения

в очень разреженной среде (например, в газовой туманности). Затем определены контуры линий поглощения в звездных спектрах при так называемом «полностью некогерентном рассеянии».

Глава IX посвящена изучению нестационарных процессов диффузии излучения. В частности, здесь рассмотрено изменение степени ионизации атомов в среде с течением времени. Полученные результаты использованы для интерпретации свечения новых звезд.

В последней, X главе дано приближенное решение задачи о переносе излучения в среде при довольно общих предположениях относительно ее оптических свойств. Полученное решение применено к определению оптических свойств атмосфер Земли и планет. Сделаны также применения к задачам оптики моря.

Материалом для написания глав IV — X послужили в основном исследования автора. Некоторые результаты (особенно в главах VI и VII) приведены впервые.

В книге специально не рассматриваются вопросы, связанные с диффузией нейтронов, однако изложенные в ней методы могут быть применены и к этому случаю.

Г Л А В А I

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача теории переноса излучения — расчет поля излучения в среде, способной поглощать и испускать лучистую энергию. Если поглощательная и излучательная способности среды заданы, то интенсивность излучения определяется весьма легко. Задача сильно усложняется тогда, когда количество энергии, излучаемое элементарным объемом, зависит от количества энергии, поглощаемого этим объемом, т. е. от интенсивности падающего на объем излучения и от способности объема поглощать излучение. В этом случае задача сводится к решению некоторого интегрального уравнения. Рассмотрением таких интегральных уравнений и занимается теория переноса излучения.

Процесс переноса лучистой энергии, вообще говоря, весьма сложен. Например, в случае звездных атмосфер он связан с переходом лучистой энергии в тепловую и обратным переходом, с изменением спектрального состава излучения и т. д. Однако в некоторых случаях перенос излучения может рассматриваться как многократное рассеяние световых квантов в среде. Даже в случае звездных атмосфер в отдельных задачах такая трактовка оказывается возможной при подходяще выбранных параметрах, характеризующих рассеяние света элементарным объемом. Поэтому в дальнейшем вместо употребления термина «перенос лучистой энергии» мы часто будем говорить о *р а с с е я н и и* (или *д и ф ф у з и и*) излучения.

В этой главе выводятся основные уравнения рассматриваемой теории. Одним из них является *уравнение переноса излучения*, определяющее изменение интенсивности

излучения вдоль луча. Другое уравнение, называемое обычно *уравнением лучистого равновесия*, связывает между собой количество энергии, излучаемое элементарным объемом, с количеством энергии, поглощаемым этим объемом. Эти уравнения пишутся затем для случаев звездных и планетных атмосфер. В конце главы в качестве примера рассматривается рассеяние света в одномерной среде.

§ 1. Поле излучения

Основной величиной, характеризующей поле излучения, является *интенсивность излучения*. Эта величина определяется так. Возьмем в данном месте пространства элементарную площадку, перпендикулярную к направлению, интересующего нас излучения. Если величина площадки есть $d\sigma$, а излучение падает в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ в телесном угле $d\omega$ в течение промежутка времени dt , то количество лучистой энергии dE_ν , падающее на площадку, будет пропорционально $d\sigma d\nu d\omega dt$, т. е. будет равно

$$dE_\nu = I_\nu d\sigma d\nu d\omega dt. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности I_ν , входящий в эту формулу, и называется интенсивностью излучения. Другими словами, интенсивность излучения есть количество лучистой энергии, падающее в единичном интервале частот за единицу времени в единичном телесном угле на единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению излучения. Вообще говоря, интенсивность излучения зависит от координат данной точки, от направления излучения и от частоты излучения ν .

Если интенсивность излучения нам известна, то легко могут быть определены и другие величины, характеризующие поле излучения. Одной из таких величин является *плотность излучения*, т. е. количество лучистой энергии, находящееся в единице объема.

Обозначим количество лучистой энергии в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, находящееся в единице объема, через $\rho_\nu d\nu$. Чтобы выразить ρ_ν через I_ν , поступим следующим образом. Рассмотрим излучение, падающее на

площадку $d\sigma$ перпендикулярно к ней, в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ внутри малого телесного угла $\Delta\omega$ за время dt . Согласно формуле (1) количество лучистой энергии, падающее на площадку, будет равно $I_\nu d\sigma d\nu \Delta\omega dt$. Очевидно, что эта энергия займет объем $d\sigma \cdot c dt$, где c — скорость света. Поэтому количество лучистой энергии в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, приходящееся на единицу объема, будет равно $I_\nu d\nu \frac{\Delta\omega}{c}$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\rho_\nu = I_\nu \frac{\Delta\omega}{c}. \quad (2)$$

В общем же случае, когда на данный объем падает излучение со всех сторон, плотность излучения ρ_ν выразится формулой

$$\rho_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega, \quad (3)$$

где интегрирование производится по всем телесным углам.

Отметим, что если излучение *изотропно*, т. е. интенсивность излучения не зависит от направления, то

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (4)$$

Важной величиной, характеризующей поле излучения, является также *поток излучения*. Эта величина представляет собой количество лучистой энергии, проходящее через единичную площадку за единицу времени в единичном интервале частот. Мы будем обозначать поток излучения через H_ν . Тогда количество лучистой энергии, протекающее через площадку $d\sigma$ за время dt в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, будет равно $H_\nu d\sigma dt d\nu$. С другой стороны, то же самое количество энергии может быть определено так. Рассмотрим излучение, проходящее через площадку $d\sigma$ в направлении, образующем угол ϑ с ее внешней нормалью (рис. 1). В данном случае площадь элементарной площадки, перпендикулярной к направлению излучения, равна $d\sigma \cos \vartheta$. Поэтому количество лучистой энергии, протекающее через площадку $d\sigma$ под углом ϑ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ за время dt в ин-

тервале частот от ν до $\nu + d\nu$, будет равно $I_\nu d\sigma \cos \vartheta d\omega dt d\nu$. Если мы проинтегрируем это выражение по всем направлениям, то получим величину, которая раньше была обозначена через $H_\nu d\sigma dt d\nu$. Следовательно,

$$H_\nu = \int I_\nu \cos \vartheta d\omega. \quad (5)$$

В полярной системе координат с осью z , направленной по внешней нормали к площадке $d\sigma$, элемент телесного угла равен

$$d\omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (6)$$

где φ — азимут выбранного направления. Поэтому выражение для потока излучения может быть переписано в виде

$$H_\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (7)$$

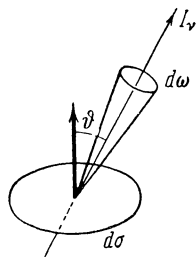


Рис. 1.

Как видно из формулы (7), поток излучения H_ν является разностью двух величин:

$$H_\nu = E_\nu - E'_\nu, \quad (8)$$

где

$$E_\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \quad (9)$$

и

$$E'_\nu = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (10)$$

Величина E_ν представляет собой *освещенность* площадки с одной стороны, а величина E'_ν — освещенность площадки с другой стороны. Таким образом, поток излучения через какую-либо площадку есть разность освещенностей этой площадки.

Понятно, что поток излучения зависит от направления нормали к площадке. Чтобы установить эту зависимость, возьмем прямоугольную систему координат с осями x , y , z и обозначим углы, образуемые направлением излучения с координатными осями, соответственно через ϑ_1 , ϑ_2 , ϑ_3 . Тогда величины

$$\begin{aligned} H_{vx} &= \int I_\nu \cos \vartheta_1 d\omega, & H_{vy} &= \int I_\nu \cos \vartheta_2 d\omega, \\ H_{vz} &= \int I_\nu \cos \vartheta_3 d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

будут представлять собой потоки излучения в направлении координатных осей. Обозначим, далее, углы между направлением нормали к площадке и осями координат через α_1 , α_2 , α_3 . Тогда косинус угла между направлением нормали к площадке и направлением излучения будет равен

$$\cos \vartheta = \cos \alpha_1 \cos \vartheta_1 + \cos \alpha_2 \cos \vartheta_2 + \cos \alpha_3 \cos \vartheta_3. \quad (12)$$

Подставляя это выражение для $\cos \vartheta$ в формулу (5) и принимая во внимание соотношения (11), получаем:

$$H_\nu = H_{vx} \cos \alpha_1 + H_{vy} \cos \alpha_2 + H_{vz} \cos \alpha_3. \quad (13)$$

Таким образом, поток излучения в заданном направлении может быть представлен как проекция вектора с компонентами, определяемыми формулами (11), на это направление.

Кроме введенных выше величин I_ν , ρ_ν и H_ν при рассмотрении поля излучения используются также величины I , ρ и H , равные

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu, \quad \rho = \int_0^\infty \rho_\nu d\nu, \quad H = \int_0^\infty H_\nu d\nu. \quad (14)$$

Они представляют собой соответственно *интегральную интенсивность*, *интегральную плотность* и *интегральный поток* излучения. Легко видеть, что величины I , ρ и H связаны друг с другом соотношениями, аналогичными

соотношениям (3) и (5), а именно:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{c} \int I d\omega, \\ H &= \int I \cos \vartheta d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В качестве примера использования выведенных формул рассмотрим поле излучения вокруг звезды, для простоты предполагая, что интенсивность выходящего из звезды излучения не зависит от направления.

Найдем сначала величины ρ_ν и H_ν на поверхности звезды. Согласно формуле (3) плотность излучения на поверхности звезды равна

$$\rho_\nu = \frac{2\pi}{c} I_\nu. \quad (16)$$

Эта величина в два раза меньше величины ρ_ν при изотропном излучении (так как на данный объем излучение падает только со стороны звезды и не падает с противоположной стороны). Что же касается потока излучения на поверхности звезды, то формула (7) при $I_\nu = \text{const}$ в интервале $0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ для него дает:

$$H_\nu = \pi I_\nu. \quad (17)$$

Заметим, что если радиус звезды есть r_* , то полная энергия, излучаемая звездой в частоте ν (т. е. светимость звезды), равна

$$L_\nu = 4\pi r_*^2 \cdot \pi I_\nu. \quad (18)$$

Найдем теперь величины ρ_ν и H_ν на расстоянии r от центра звезды ($r \geq r_*$). Используя полярную систему координат с осью z , направленной от данного объема по радиусу-вектору, мы по формуле (3) получаем:

$$\rho_\nu = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} I_\nu \sin \vartheta d\vartheta, \quad (19)$$

где ϑ_0 — значение угла ϑ для излучения, идущего от края

диска звезды (рис. 2). При $I_\nu = \text{const}$ формула (19) дает:

$$\rho_\nu = \frac{2\pi}{c} I_\nu (1 - \cos \vartheta_0), \quad (20)$$

или с учетом того, что $\sin \vartheta_0 = \frac{r_*}{r}$ (см. рис. 2):

$$\rho_\nu = \frac{2\pi}{c} I_\nu \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2} \right]. \quad (21)$$

Мы видим, что эта величина отличается от величины ρ_ν при изотропном излучении множителем

$$[W = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2} \right]]. \quad (22)$$

Этот множитель называется *коэффициентом дилуции* (разрежения) излучения. Заметим, что на поверхности

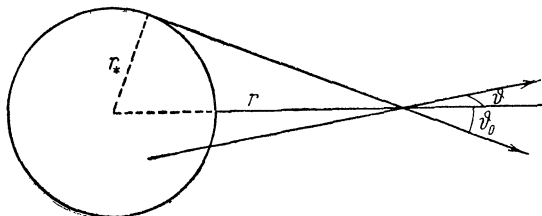


Рис. 2.

звезды $[W = \frac{1}{2}$, а на больших расстояниях от поверхности звезды

$$W = \frac{1}{4} \left(\frac{r_*}{r}\right)^2. \quad (23)$$

Для нахождения потока излучения на расстоянии r воспользуемся, как и раньше, формулой (7). Считая, что площадка перпендикулярна к направлению на центр звезды, для H_ν получаем:

$$H_\nu = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_0} I_\nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (24)$$

При $I_\nu = \text{const}$ отсюда следует:

$$H_\nu = \pi I_\nu \sin^2 \vartheta_0 = \pi I_\nu \left(\frac{r^*}{r} \right)^2. \quad (25)$$

Последняя формула может быть также получена из того соображения, что в данном случае поток излучения равен светимости звезды, деленной на поверхность сферы радиуса r , т. е.

$$H_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi r^2}. \quad (26)$$

Подставляя в (26) выражение для светимости звезды, даваемое формулой (18), мы и приходим к формуле (25).

Заметим, что в рассмотренном примере поток излучения совпадает с освещенностью (так как отсутствует излучение, падающее на площадку с противоположной от звезды стороны).

§ 2. Уравнение переноса излучения

Будем считать, что среда, в которой распространяется излучение, обладает способностью поглощать и испускать лучистую энергию. В таком случае интенсивность излучения будет некоторым образом меняться вдоль луча. В настоящем параграфе мы выведем уравнение, которое определяет закон этого изменения. Однако предварительно введем в рассмотрение величины, характеризующие поглощательную и испускательную способность среды.

Пусть на площадку $d\sigma$, расположенную перпендикулярно к направлению излучения, падает излучение интенсивности I_ν внутри телесного угла $d\omega$ в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ в течение времени dt . Количество энергии, падающее на площадку, будет равно $I_\nu d\sigma d\omega d\nu dt$. Если среда способна поглощать излучение, то на пути ds из указанного количества энергии будет поглощена некоторая доля, пропорциональная ds . Мы обозначим эту долю через $\alpha_\nu ds$. Таким образом, количество поглощенной энергии на пути ds будет равно

$$\alpha_\nu ds I_\nu d\sigma d\omega d\nu dt. \quad (27)$$

Величина α_ν называется *коэффициентом поглощения*. Так как доля поглощенной энергии $\alpha_\nu ds$ есть величина безразмерная, то коэффициент поглощения α_ν имеет размерность, обратную длине. Заместим, что коэффициент поглощения зависит от частоты излучения и координат данной точки, но не зависит от направления излучения (в изотропной среде).

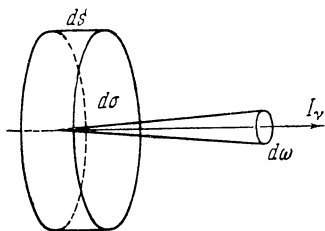


Рис. 3.

Если среда способна также излучать энергию, то количество энергии, излученное объемом dV внутри телесного угла $d\omega$ в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ в течение времени dt , будет пропорционально $dV d\omega d\nu dt$. Мы обозначим это количество энергии через

$$\epsilon_\nu dV d\omega d\nu dt \quad (28)$$

и назовем величину ϵ_ν *коэффициентом излучения*. Следовательно, коэффициент излучения есть количество энергии, излучаемое единичным объемом в единичном телесном угле в единичном интервале частот за единицу времени. Коэффициент излучения зависит от частоты ν , от координат данной точки и, вообще говоря, от направления излучения.

Считая величины α_ν и ϵ_ν заданными, найдем, как меняется интенсивность излучения вдоль луча. При этом будем предполагать, что поле излучения стационарно, т. е. не меняется с течением времени.

Возьмем элементарный цилиндр, ось которого направлена по данному лучу (рис. 3). Пусть площадь основания цилиндра равна $d\sigma$, а высота равна ds (причем высота мала по сравнению с линейными размерами основания). Рассмотрим излучение, входящее в цилиндр и выходящее из него внутри телесного угла $d\omega$ в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ за время dt . Если интенсивность излучения, входящего в цилиндр, есть I_ν , то ко-

личество входящей в цилиндр энергии будет равно

$$I_{\nu} d\sigma d\omega d\nu dt.$$

Обозначим интенсивность выходящего из цилиндра излучения через $I_{\nu} + dI_{\nu}$. Тогда количество выходящей из цилиндра энергии будет равно

$$(I_{\nu} + dI_{\nu}) d\sigma d\omega d\nu dt.$$

Разница между указанными количествами энергии возникает как за счет поглощения энергии в цилиндре, так и за счет испускания энергии цилиндром. Количество энергии, поглощаемой в цилиндре, определяется выражением (27). Что же касается энергии, испускаемой цилиндром, то она будет дана выражением (28), если мы заменим в нем величину dV объемом цилиндра, т. е. положим $dV = d\sigma ds$. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} (I_{\nu} + dI_{\nu}) d\sigma d\omega d\nu dt = \\ = I_{\nu} d\sigma d\omega d\nu dt - \alpha_{\nu} ds I_{\nu} d\sigma d\omega d\nu dt + \epsilon_{\nu} d\sigma ds d\omega d\nu dt, \end{aligned}$$

или после необходимых сокращений

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = -\alpha_{\nu} I_{\nu} + \epsilon_{\nu}. \quad (29)$$

Это и есть искомое уравнение, определяющее изменение интенсивности излучения при прохождении его через поглощающую и излучающую среду. Оно называется *уравнением переноса излучения*.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения переноса излучения.

Если $\alpha_{\nu} = 0$ и $\epsilon_{\nu} = 0$, то $I_{\nu} = \text{const}$. Следовательно, в пустом пространстве (т. е. при отсутствии поглощения и испускания лучистой энергии) интенсивность излучения не меняется вдоль луча. Этим очевидным свойством интенсивности излучения мы уже пользовались выше при рассмотрении поля излучения вокруг звезды (считая, что интенсивность излучения на поверхности звезды и на любом расстоянии от нее одна и та же).

Если в среде происходит поглощение лучистой энергии, но нет испускания (т. е. $\alpha_{\nu} \neq 0$, а $\epsilon_{\nu} = 0$), то вместо

уравнения (29) имеем:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (30)$$

Интегрирование этого уравнения дает:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{-\int_0^s \alpha_\nu(s') ds'}, \quad (31)$$

где $I_\nu(0)$ — интенсивность излучения при $s=0$ (например, интенсивность излучения, входящего в среду).

Безразмерная величина

$$\int_0^s \alpha_\nu(s') ds'$$

называется *оптическим расстоянием* между двумя точками. При прохождении излучением единичного оптического расстояния интенсивность излучения уменьшается в e раз.

В общем случае (т. е. при $\alpha_\nu \neq 0$ и $\epsilon_\nu \neq 0$), решая уравнение (29) относительно I_ν , получаем:

$$I_\nu(s) = I_\nu(0) e^{-\int_0^s \alpha_\nu(s') ds'} + \int_0^s \epsilon_\nu(s') e^{-\int_{s'}^s \alpha_\nu(s'') ds''} ds'. \quad (32)$$

Соотношение (32) может быть названо уравнением переноса излучения в интегральной форме.

Мы видим, что в общем случае интенсивность излучения состоит из двух частей. Первая часть представляет собой интенсивность первоначального излучения (в точке $s=0$), ослабленного вследствие поглощения на пути от 0 до s . Вторая часть есть интенсивность излучения, обусловленного испусканием лучистой энергии на пути от 0 до s и соответствующим ослаблением его вследствие поглощения на пути от места испускания s' до рассматриваемого места s .

Подчеркнем, что уравнение переноса излучения относится к определенной частоте ν . Только в том случае,

когда коэффициент поглощения не зависит от частоты ($\alpha_\nu = \alpha$), мы можем, проинтегрировав уравнение (29) по всем частотам, получить аналогичное ему уравнение для определения *интегральной интенсивности* излучения I :

$$\frac{dI}{ds} = -\alpha I + \dot{\epsilon}. \quad (33)$$

Входящая в это уравнение величина

$$\dot{\epsilon} = \int_0^{\infty} \epsilon_\nu d\nu \quad (34)$$

представляет собой *интегральный коэффициент излучения*.

На практике коэффициент поглощения α_ν обычно зависит от частоты ν . Тем не менее и в этом случае часто все-таки пользуются уравнением (33) для определения интегральной интенсивности излучения I . При этом под величиной α понимают коэффициент поглощения, некоторым образом усредненный по частоте. Однако результаты такого использования уравнения (33) могут оказаться весьма неточными.

В дальнейшем (за исключением отдельных случаев) мы будем рассматривать поле излучения для определенной частоты ν . Однако для упрощения записи будем писать просто I вместо I_ν , H вместо H_ν и т. д. Эти обозначения не следует путать с обозначениями соответствующих величин, характеризующих интегральное излучение.

§ 3. Рассеяние света элементарным объемом

Если коэффициент поглощения α и коэффициент излучения ϵ являются заданными, то интенсивность излучения находится весьма легко: как было показано в предыдущем параграфе, она определяется формулой (32). Однако гораздо труднее рассчитать поле излучения в том случае, когда лучистая энергия, поглощенная элементарным объемом, вновь им излучается, т. е. когда в среде происходит рассеяние излучения. В этом случае коэффициент излучения уже не является заданным, а зависит от интенсивности излучения, падающего со всех сторон на эле-

ментарный объем. В свою очередь интенсивность излучения I зависит от значений коэффициента излучения ϵ вдоль луча. Таким образом, задача сводится к совместному определению двух неизвестных функций: коэффициента излучения ϵ и интенсивности излучения I .

Чтобы точно сформулировать указанную задачу, надо задать закон рассеяния излучения элементарным объемом среды.

Возьмем элементарный объем с площадью основания $d\sigma$ и высотой dz (рис. 4). Пусть на этот объем падает излучение интенсивности I внутри телесного угла $d\omega'$ в направлении, образующем угол ϑ' с нормалью к основанию. Количество энергии, падающее на объем в единичном интервале частот за единицу времени, будет равно $I d\omega' d\sigma \cos \vartheta'$. Так как путь, проходимый излучением в объеме, равен $dz \sec \vartheta'$, то из общего количества падающей на объем энергии будет поглощаться в нем доля $\alpha dz \sec \vartheta'$. Следовательно, количество поглощенной энергии будет равно

$$\alpha dz d\sigma I d\omega'.$$

Произведение $dz d\sigma$ представляет собой величину поглощающего объема. Таким образом, единицей объема поглощается количество лучистой энергии, равное

$$\alpha I d\omega'.$$

Величину α называют часто *объемным коэффициентом поглощения* (т. е. коэффициентом поглощения, рассчитанным на единицу объема). Иногда вместо α пользуются коэффициентом поглощения, рассчитанным на единицу массы, или коэффициентом поглощения, рассчитанным на одну частицу. Первый из этих коэффициентов равен $\frac{\alpha}{\rho}$, где ρ — плотность вещества, а второй $\frac{\alpha}{n}$, где n — число частиц в 1 см^3 .

† Как уже сказано, мы будем считать, что только часть поглощенной объемом лучистой энергии может перейти затем в другие формы энергии, т. е. испытать истинное поглощение. Что же касается другой части, то она будет снова излучаться данным объемом, т. е. рас-

се п в а т ь с я. Обозначим долю рассеянной энергии из общего количества поглощенной объемом энергии через λ ; тогда доля энергии, испытавшей истинное поглощение, будет равна $1 - \lambda$. Величину $\lambda\alpha$ мы будем называть *коэффициентом рассеяния*, а величину $(1 - \lambda)\alpha$ — *коэффициентом истинного поглощения**).

На практике весьма часто встречается случай, когда в среде происходит только рассеяние света, но нет истинного поглощения. В этом случае $\lambda = 1$. Мы будем говорить, что в данной среде происходит *чистое рассеяние*.

Вообще говоря, вероятность рассеяния света элементарным объемом в разные стороны неодинакова. Она зависит от угла γ между направлением падающего излучения и направлением рассеянного излучения (см. рис. 4).

Мы обозначим вероятность того, что излучение рассеивается под углом γ внутри телесного угла $d\omega$, через

$$x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$$

и назовем функцию $x(\gamma)$ *индикатрисой рассеяния*. Очевидно, что должно выполняться условие

$$\int x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi} = 1, \quad (35)$$

или, так как $d\omega = \sin \gamma d\gamma d\varphi$,

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1. \quad (35')$$

Особо следует отметить случай *изотропного рассеяния*. В этом случае вероятность рассеяния света в разные

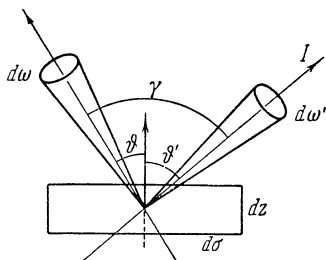


Рис. 4.

*) Величина λ не имеет общепринятого названия. В одних работах ее называют «вероятностью выживания кванта», в других — «альбедо частицы».

стороны одинакова, т. е.

$$x(\gamma) = 1.$$

Такая индикатриса рассеяния называется *сферической*.

Если величины α , λ и $x(\gamma)$ нам известны, то легко можно составить выражение для количества энергии, рассеянной единицей объема в заданном направлении. Для этого надо количество поглощенной объемом энергии, т. е. величину $\alpha I d\omega'$, умножить на долю этой энергии, рассеянной в интересующем нас направлении, т. е. на величину $\lambda x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$, и проинтегрировать полученное выражение по всем направлениям падающего на объем излучения. В результате получается выражение

$$\lambda \frac{d\omega}{4\pi} \alpha \int I x(\gamma) d\omega',$$

дающее количество энергии, рассеянное единицей объема за единицу времени в единичном интервале частот внутри телесного угла $d\omega$ (в заданном направлении). Если в среде происходит только рассеяние излучения, то эта величина равна $\varepsilon d\omega$. Следовательно, в данном случае коэффициент излучения равен

$$\varepsilon = \lambda \alpha \int I x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (36)$$

В общем случае, когда в среде происходит как рассеяние света, так и истинное излучение, вместо (36) мы должны написать:

$$\varepsilon = \lambda \alpha \int I x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + \varepsilon_0. \quad (37)$$

Величину ε_0 можно назвать *коэффициентом истинного излучения*.

Заметим, что, проинтегрировав соотношение (37) по всем телесным углам и воспользовавшись формулой (35), мы получаем:

$$\int \varepsilon d\omega = \lambda \alpha \int I d\omega' + \int \varepsilon_0 d\omega. \quad (38)$$

Соотношение (38) выражает собой полный баланс энергии единичного объема.

Введенные выше величины α , λ и $x(\gamma)$, характеризующие рассеивающую способность элементарного объема среды, будут считаться в дальнейшем заданными. Разумеется, они различны для разных сред. К настоящему времени выполнено много работ, посвященных определению величин α , λ и $x(\gamma)$ в зависимости от физических свойств среды. Некоторых из этих работ мы коснемся в дальнейшем при применении общей теории к конкретным объектам. Пока же сделаем предварительные замечания о возможных значениях указанных величин.

Значения коэффициента поглощения α нас интересовать не будут, так как от геометрических расстояний мы перейдем к оптическим расстояниям. Что же касается последних, то они могут быть весьма различны (от 0 до ∞).

Величина λ , представляющая собой отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения, определяется обычно двумя совершенно различными процессами. Допустим, например, что мы рассматриваем рассеяние света в резонансной линии. Если в элементарном объеме другие процессы не происходят, то мы имеем дело с чистым рассеянием ($\lambda = 1$). Однако на практике, кроме указанного процесса, обычно происходят столкновения возбужденных атомов с посторонними частицами, ведущие к истинному поглощению излучения. Так как число столкновений пропорционально плотности вещества, то и величина λ будет в данном случае зависеть от плотности вещества, которая может меняться в очень широких пределах. Вообще говоря, величина λ может принимать любые значения от 0 до 1.

Индикатрису рассеяния $x(\gamma)$ в некоторых случаях мы можем считать сферической. Так, например, обстоит дело при рассмотрении диффузии излучения в спектральной линии. Однако в других случаях индикатриса рассеяния оказывается более сложной.

Вопросом о рассеянии света частицами, размеры которых малы по сравнению с длиной волны света, впервые занимался Рэлей [1]. Он показал, что индикатриса

рассеяния в этом случае имеет вид:

$$x(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \gamma). \quad (39)$$

Рассеяние света по закону Рэля производится, в частности, молекулами и свободными электронами.

Основы теории рассеяния света частицами, размеры которых сравнимы с длиной волны, были даны Густавом Ми [2]. Индикатриса рассеяния в этом случае зависит от отношения радиуса частицы к длине волны света и от показателя преломления вещества частицы. Теория Ми была развита в работах многих авторов. Из них следует отметить исследования В. В. Шулейкина [3] и К. С. Шифрина [4].

На рис. 5 приведены для сравнения индикатриса рассеяния Рэля (а) и одна из индикатрис, вычисленных В. В. Шулейкиным (б). Мы видим, что вторая индикатриса сильно вытянута вперед.

Подробное рассмотрение вопроса о рассеянии света отдельными частицами выполнено в книге К. С. Шифрина [4].

§ 4. Основная задача теории рассеяния излучения

В предыдущих параграфах были введены в рассмотрение основные величины, характеризующие как поле излучения, так и среду, в которой излучение распространяется. Это дает нам возможность перейти к точной формулировке задачи, которой будем заниматься в дальнейшем.

Пусть имеется среда определенной формы и определенных размеров. На среду действуют источники излучения, расположение и мощность которых заданы. В среде происходит поглощение и рассеяние излучения, причем рассеивающая способность элементарного объема,

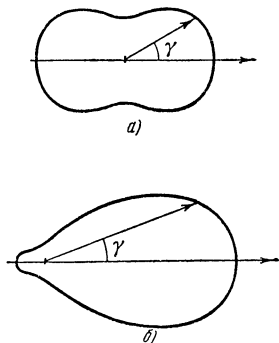


Рис. 5.

характеризующаяся величинами α , λ и $x(\gamma)$, известна. Требуется рассчитать поле излучения внутри среды и вне ее.

Как уже говорилось, задача состоит в совместном нахождении двух величин: интенсивности излучения I и коэффициента излучения ϵ . При этом коэффициент излучения ϵ определяется как истинным излучением единичного объема, так и излучением, рассеянным этим объемом.

Два уравнения, необходимых для нахождения величин I и ϵ , уже были получены выше. Это — уравнение переноса излучения (29) и уравнение (37), выражающее условие лучистого равновесия. Таким образом, задача сводится к совместному решению двух следующих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI}{ds} &= -\alpha I + \epsilon, \\ \epsilon &= \lambda \alpha \int I x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + \epsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

При помощи уравнений (40) может быть решена задача о свечении любой среды при любых действующих на нее источниках излучения. Однако для астрофизических и геофизических применений наибольший интерес представляют следующие два случая: 1) среда состоит из плоскопараллельных слоев; 2) среда обладает сферической симметрией. Весьма часто внешние слои сферически симметричной среды приближенно могут считаться плоскопараллельными. Поэтому особое значение приобретает задача о рассеянии света в среде, состоящей из плоскопараллельных слоев. Именно эту задачу мы и будем рассматривать в дальнейшем.

Под средой, состоящей из плоскопараллельных слоев, будем понимать среду, в которой оптические свойства, т. е. величины α , λ и $x(\gamma)$, зависят лишь от одной координаты — глубины z , отсчитываемой по нормали к слоям. Вместе с тем, будем считать, что интенсивность излучения, создаваемая источниками излучения, также не зависит от других координат, кроме глубины z . В таком

случае интенсивность рассеянного излучения будет функцией только от координаты z и от направления излучения (рис. 6).

Вместо глубины z удобно ввести *оптическую глубину* τ , равную

$$\tau = \int_0^z \alpha(z) dz. \quad (41)$$

Оптическая глубина τ , как и геометрическая глубина z , отсчитывается от одной из граничных плоскостей среды,

которую назовем верхней (а другую граничную плоскость — нижней).

Одновременно вместо геометрической толщины среды z_0 введем *оптическую толщину* τ_0 посредством соотношения

$$\tau_0 = \int_0^{z_0} \alpha(z) dz. \quad (42)$$

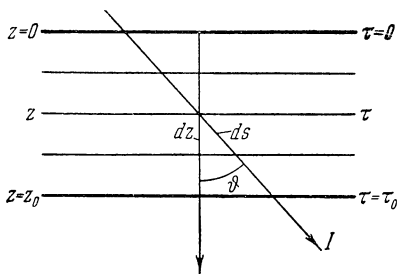


Рис. 6.

Для отсчета направлений будем брать в каждом месте среды сферическую систему координат с полярной осью, идущей в направлении растущих глубин. Полярное расстояние обозначим через ϑ , а азимут — через φ . Таким образом, интересующие нас величины I и ϵ будут функциями от τ , ϑ и φ .

Очевидно, что в рассматриваемом случае углы ϑ и φ не меняются вдоль луча (если пренебречь рефракцией). Следовательно, вдоль луча меняется только координата z , причем $dz = ds \cos \vartheta$. Поэтому в случае плоскопараллельных слоев уравнение переноса излучения [первое уравнение (40)] принимает вид

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dz} = -\alpha I + \epsilon. \quad (43)$$

Как уже сказано, вместо глубины z мы будем пользоваться оптической глубиной τ . Переходя от z к τ по-

средством соотношения $d\tau = \alpha dz$ и полагая

$$\varepsilon = \alpha B, \quad (44)$$

вместо (43) получаем:

$$\cos \vartheta \frac{dI}{d\tau} = -I + B. \quad (45)$$

Сделаем аналогичное преобразование во втором из уравнений системы (40). Учитывая соотношение (44), а также полагая

$$\varepsilon_0 = \alpha B_0, \quad (46)$$

вместо указанного уравнения находим:

$$B = \lambda \int Ix(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + B_0. \quad (47)$$

Таким образом, от системы уравнений (40) мы перешли к системе уравнений (45) и (47). Неизвестными функциями здесь являются $I(\tau, \vartheta, \varphi)$ и $B(\tau, \vartheta, \varphi)$ *).

Вообще говоря, среда может светиться под воздействием источников излучения, находящихся как внутри среды, так и вне ее. Наличие источников излучения внутри среды учитывается членом B_0 в уравнении (47). Что же касается излучения, падающего на среду от внешних источников света, то оно может быть введено в рассмотрение двумя путями:

1) постановкой соответствующих граничных условий, в которых должна быть задана интенсивность излучения, входящего в среду;

2) отделением поля прямого излучения (т. е. излучения, приходящего непосредственно от внешних источников) от поля диффузного излучения среды.

Обозначая через I_1 интенсивность прямого излучения, мы можем переписать уравнение (47) в виде

$$B = \lambda \int Ix(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi} + B_0 + B_1, \quad (48)$$

*) Функцию $B(\tau, \vartheta, \varphi)$ называют иногда «функцией источника» или «отдачей».

где

$$B_1 = \lambda \int I_1 x(\gamma) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (49)$$

Теперь уже в уравнениях (45) и (48) под I понимается интенсивность рассеянного излучения. Что же касается граничных условий, то они должны выражать тот факт, что входящее в среду излучение отсутствует.

В дальнейшем, как правило, мы будем пользоваться системой уравнений (45) и (48), т. е. из общего излучения будем выделять излучение, пришедшее непосредственно от внешних источников света.

Перепишем систему уравнений (45) и (48) в развернутом виде. Будем характеризовать направление рассеянного объемом излучения углами ϑ и φ , а направление падающего на объем диффузного излучения — углами ϑ' и φ' . Учитывая, что $d\omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$, вместо указанных уравнений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta, \varphi)}{d\tau} &= -I(\tau, \vartheta, \varphi) + B(\tau, \vartheta, \varphi), \\ B(\tau, \vartheta, \varphi) &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta', \varphi') x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' + \\ &\quad + B_0(\tau, \vartheta, \varphi) + B_1(\tau, \vartheta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

При этом угол γ определяется следующей формулой, известной из сферической тригонометрии:

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (51)$$

К уравнениям (50) надо добавить еще граничные условия. Как сказано выше, они должны выражать собой отсутствие диффузного излучения, падающего на верхнюю границу сверху и на нижнюю границу снизу. Иными словами, граничные условия будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} I(0, \vartheta, \varphi) &= 0 \quad \text{при} \quad \vartheta < \frac{\pi}{2}, \\ I(\tau_0, \vartheta, \varphi) &= 0 \quad \text{при} \quad \vartheta > \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Система уравнений (50) вместе с граничными условиями (52) полностью определяет искомые величины $B(\tau, \vartheta, \varphi)$ и $I(\tau, \vartheta, \varphi)$.

Из системы (50) можно получить одно интегральное уравнение для определения функции $B(\tau, \vartheta, \varphi)$. Для этого надо решить первое из уравнений (50) относительно $I(\tau, \vartheta, \varphi)$ и подставить найденные выражения для $I(\tau, \vartheta, \varphi)$ во второе из этих уравнений.

Решение первого из уравнений (50) при граничных условиях (52) дает:

$$I(\tau, \vartheta, \varphi) = \int_0^{\tau} B(\tau', \vartheta, \varphi) e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau' \quad \left(\text{при } \vartheta < \frac{\pi}{2} \right)$$
(53)

и

$$I(\tau, \vartheta, \varphi) = - \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau', \vartheta, \varphi) e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau' \quad \left(\text{при } \vartheta > \frac{\pi}{2} \right).$$
(54)

Подставляя (53) и (54) во второе из уравнений (50), получаем:

$$B(\tau, \vartheta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' \times \right. \\ \left. \times \int_0^{\tau} B(\tau', \vartheta', \varphi') e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' - \right. \\ \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau', \vartheta', \varphi') e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' \right] + \\ + B_0(\tau, \vartheta, \varphi) + B_1(\tau, \vartheta, \varphi). \quad (55)$$

Уравнение (55) и служит для определения функции $B(\tau, \vartheta, \varphi)$. После нахождения этой функции интенсивность излучения $I(\tau, \vartheta, \varphi)$ может быть определена по формулам (53) и (54).

Полученные уравнения существенно упрощаются в случае сферической индикатрисы рассеяния. В этом случае

функция B зависит только от τ , а интенсивность излучения I — только от τ и ϑ . Поэтому вместо системы уравнений (50) при $x(\gamma) = 1$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} &= -I(\tau, \vartheta) + B(\tau), \\ B(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' + g(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

где

$$g(\tau) = B_0(\tau) + B_1(\tau). \quad (57)$$

При этом мы считаем, что величина B_0 , как это обычно бывает, зависит только от τ (хотя, вообще говоря, она может зависеть также от ϑ и φ).

В случае сферической индикатрисы рассеяния интегральное уравнение (55) принимает вид

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{\tau} B(\tau') e^{-(\tau-\tau')\sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' - \\ &- \frac{\lambda}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \vartheta' d\vartheta' \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau') e^{-(\tau-\tau')\sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' + g(\tau). \end{aligned} \quad (58)$$

Меняя здесь порядок интегрирования, а также производя замену в первом интеграле $y = \sec \vartheta'$ и во втором $y = -\sec \vartheta$, получаем:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} B(\tau') d\tau' \int_1^{\infty} e^{-(\tau-\tau')y} \frac{dy}{y} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau') d\tau' \int_1^{\infty} e^{-(\tau'-\tau)y} \frac{dy}{y} + g(\tau). \end{aligned} \quad (59)$$

Ядро интегрального уравнения (59) представляет собой так называемую *интегральную показательную функцию*, определенную равенством

$$\text{Ei } x = \int_1^{\infty} e^{-xy} \frac{dy}{y}. \quad (60)$$

Поэтому уравнение (59) можно переписать так:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') \text{Ei}|\tau - \tau'| d\tau' + g(\tau). \quad (61)$$

Интегральное уравнение (61) играет очень важную роль в теории рассеяния света. Впервые оно было получено [для специального вида функции $g(\tau)$] профессором Петербургского университета О. Д. Хвольсоном, занимавшимся изучением рассеяния света в молочных стеклах [5].

Значения функции $\text{Ei} x$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения функции $\text{Ei} x$

x	$\text{Ei} x$	x	$\text{Ei} x$	x	$\text{Ei} x$	x	$\text{Ei} x$
0	∞						
0,01	4,0379	0,20	1,2227	0,39	0,7194	0,90	0,2602
0,02	3,3547	0,21	1,1829	0,40	0,7024	0,95	0,2387
0,03	2,9591	0,22	1,1454	0,41	0,6859	1,00	0,2194
0,04	2,6813	0,23	1,1099	0,42	0,6700	1,10	0,1860
0,05	2,4679	0,24	1,0762	0,43	0,6546	1,20	0,1584
0,06	2,2953	0,25	1,0443	0,44	0,6397	1,30	0,1355
0,07	2,1508	0,26	1,0139	0,45	0,6253	1,40	0,1162
0,08	2,0269	0,27	0,9849	0,46	0,6114	1,50	0,1000
0,09	1,9187	0,28	0,9573	0,47	0,5979	1,60	0,08631
0,10	1,8229	0,29	0,9309	0,48	0,5848	1,70	0,07465
0,11	1,7371	0,30	0,9057	0,49	0,5721	1,80	0,06471
0,12	1,6595	0,31	0,8815	0,50	0,5598	1,90	0,05620
0,13	1,5889	0,32	0,8583	0,55	0,5034	2,00	0,04890
0,14	1,5241	0,33	0,8361	0,60	0,4544	2,10	0,04261
0,15	1,4645	0,34	0,8147	0,65	0,4115	2,20	0,03719
0,16	1,4092	0,35	0,7942	0,70	0,3738	2,30	0,03250
0,17	1,3578	0,36	0,7745	0,75	0,3403	2,40	0,02844
0,18	1,3098	0,37	0,7554	0,80	0,3106	2,50	0,02490
0,19	1,2649	0,38	0,7371	0,85	0,2840		

Отметим некоторые свойства функции $Ei x$. При $x=0$ она имеет логарифмическую особенность. При малых x значения $Ei x$ могут быть вычислены с помощью ряда

$$Ei x = -\gamma - \ln x + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \dots, \quad (62)$$

где $\gamma = 0,5772$ — постоянная Эйлера. При больших x функция $Ei x$ разлагается в ряд

$$Ei x = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \dots \right). \quad (63)$$

§ 5. Случай чистого рассеяния

В случае чистого рассеяния в полученных в предыдущем параграфе уравнениях надо положить $\lambda = 1$. Так как случай чистого рассеяния весьма часто встречается на практике, то представляет большой интерес то обстоятельство, что при $\lambda = 1$ указанные уравнения допускают два простых первых интеграла.

Один из этих интегралов получается путем интегрирования уравнений (50) по всем телесным углам. В результате находим:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos \vartheta d\omega = - \int I d\omega + \int B d\omega, \quad (64)$$

$$\int B d\omega = \lambda \int I d\omega + g_1(\tau), \quad (65)$$

где

$$g_1(\tau) = \int (B_0 + B_1) d\omega. \quad (66)$$

При получении соотношения (65) мы воспользовались формулой (35).

Соотношения (64) и (65) при $\lambda = 1$ дают:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos \vartheta d\omega = g_1(\tau). \quad (67)$$

§ 5]

Отсюда следует:

$$H(\tau) = \int_0^{\tau} g_1(\tau) d\tau + C_1, \quad (68)$$

где

$$H(\tau) = \int I \cos \vartheta d\omega \quad (69)$$

и C_1 — произвольная постоянная.

Величина $H(\tau)$ представляет собой поток излучения в направлении, перпендикулярном к плоскопараллельным слоям. Соотношение (68) есть *интеграл потока*.

Другой интеграл уравнений (50) находится путем интегрирования этих уравнений по всем телесным углам после предварительного умножения их на $\cos \vartheta$. Производя указанную операцию, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos^2 \vartheta d\omega = -H(\tau) + \int B \cos \vartheta d\omega, \quad (70)$$

$$\int B \cos \vartheta d\omega = \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega' \int x(\gamma) \cos \vartheta d\omega + g_2(\tau), \quad (71)$$

где

$$g_2(\tau) = \int (B_0 + B_1) \cos \vartheta d\omega. \quad (72)$$

Если индикатрису рассеяния $x(\gamma)$ разложить в ряд по полиномам Лежандра, то, пользуясь формулой сложения шаровых функций, можно найти:

$$\frac{1}{4\pi} \int x(\gamma) \cos \vartheta d\omega = \frac{1}{3} x_1 \cos \vartheta', \quad (73)$$

где x_1 — первый коэффициент в разложении $x(\gamma)$ по полиномам Лежандра (см. гл. III, § 2).

Соотношение (71) при помощи (73) переписывается в виде

$$\int B \cos \vartheta d\omega = \frac{\lambda}{3} x_1 H(\tau) + g_2(\tau). \quad (74)$$

Из (70) и (74) следует:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos^2 \vartheta d\omega = - \left(1 - \frac{\lambda}{3} x_1 \right) H(\tau) + g_2(\tau). \quad (75)$$

При $\lambda = 1$ величина $H(\tau)$ дается формулой (68). Поэтому в указанном случае, вводя обозначение

$$K(\tau) = \int I \cos^2 \vartheta d\omega, \quad (76)$$

получаем:

$$K(\tau) = - \left(1 - \frac{x_1}{3} \right) \left[\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} g_1(\tau'') d\tau'' + C_1 \tau \right] + \int_0^{\tau} g_2(\tau') d\tau' + C_2, \quad (77)$$

где C_2 — новая произвольная постоянная. Соотношение (77) есть так называемый *K-интеграл*.

§ 6. Рассеяние света в планетных атмосферах

Свечение планетных атмосфер происходит в результате рассеяния ими солнечного света. Интенсивность излучения, диффузно-отраженного планетной атмосферой, обуславливает собой блеск и спектр планеты. Сравнение теоретических и наблюдаемых интенсивностей является единственным источником наших сведений о планетных атмосферах. Поэтому большое значение имеет задача о диффузном отражении света атмосферой планеты.

В случае земной атмосферы нас больше всего интересует интенсивность излучения, диффузно-пропущенного атмосферой. Это излучение определяет яркость неба в разных направлениях. Изучение распределения яркости по небу позволяет получить ценные сведения об оптических свойствах земной атмосферы.

В первом приближении можно принять, что атмосферные слои являются плоскопараллельными. Такое пред-

положение можно сделать потому, что толщина атмосферы (точнее говоря, тех ее слоев, в которых происходит заметное поглощение света) мала по сравнению с радиусом планеты. Что же касается падающих на планету солнечных лучей, то вследствие больших расстояний планет от Солнца они могут считаться параллельными. Таким образом, изучение планетных атмосфер приводит к за-

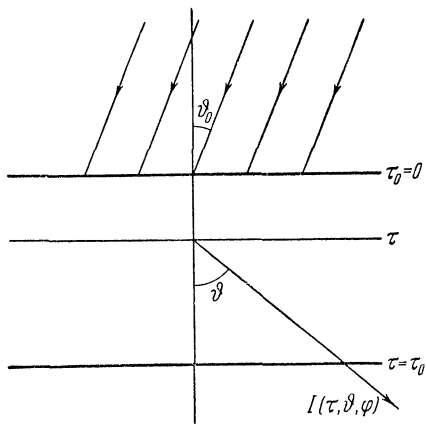


Рис. 7.

даче о рассеянии света в среде, состоящей из плоско-параллельных слоев, при освещении ее параллельными лучами.

Напишем уравнения, определяющие интенсивности излучения, рассеянного планетной атмосферой. Эти уравнения являются частным случаем полученных выше уравнений (50). В планетных атмосферах нет источников излучения, вследствие чего в уравнениях (50) надо положить $B_0 = 0$. Величина же B_1 определяется из следующих соображений.

Пусть солнечные лучи падают на атмосферу под углом ϑ_0 к нормали при азимуте φ_0 (рис. 7). Обозначим через πS освещенность перпендикулярной к лучам площадки на верхней границе атмосферы (при $\tau = 0$).

Очевидно, что освещенность такой же площадки на оптической глубине τ будет равна $\pi S e^{-\tau \sec \vartheta_0}$.

Для вычисления величины B_1 , определенной формулой (49), будем считать, что излучение падает на атмосферу внутри малого телесного угла $\Delta\omega$. Тогда величина B_1 будет равна

$$B_1 = \frac{\lambda}{4\pi} x(\gamma_1) I_1 \Delta\omega, \quad (78)$$

где γ_1 — угол между направлением солнечного излучения и направлением излучения, рассеянного данным объемом атмосферы. В рассматриваемом случае

$$I_1 \Delta\omega = \pi S e^{-\tau \sec \vartheta_0}. \quad (79)$$

Поэтому вместо (78) имеем:

$$B_1 = \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) S e^{-\tau \sec \vartheta_0}. \quad (80)$$

Входящий в это соотношение угол γ_1 определяется формулой, аналогичной формуле (51):

$$\cos \gamma_1 = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (81)$$

Таким образом, основная задача теории рассеяния света в планетных атмосферах сводится к решению системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta, \varphi)}{d\tau} &= -I(\tau, \vartheta, \varphi) + B(\tau, \vartheta, \varphi), \\ B(\tau, \vartheta, \varphi) &= \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi I(\tau, \vartheta', \varphi') x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' + \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) e^{-\tau \sec \vartheta_0}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

в которых углы γ и γ_1 определяются соответственно формулами (51) и (81).

Из уравнений (82) можно получить одно интегральное уравнение для определения функции $B(\tau, \vartheta, \varphi)$:

$$\begin{aligned}
 B(\tau, \vartheta, \varphi) = & \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' \times \right. \\
 & \times \int_0^{\tau} B(\tau', \vartheta', \varphi') e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x(\gamma) \sin \vartheta' d\vartheta' \times \\
 & \left. \times \int_0^{\tau_0} B(\tau', \vartheta', \varphi') e^{-(\tau-\tau') \sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau' \right] + \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) S e^{-\tau \sec \vartheta_0},
 \end{aligned} \tag{83}$$

являющееся частным случаем уравнения (55). Интегральное уравнение (83) впервые было рассмотрено В. А. Амбарцумяном [6].

В случае сферической индикатрисы рассеяния вместо уравнения (83) имеем:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau' + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0}. \tag{84}$$

Переход от системы уравнений (82) к интегральному уравнению (83) мы сделали при граничных условиях (52). Этими условиями выражается отсутствие диффузного излучения, падающего на верхнюю границу среды сверху и на нижнюю границу снизу. Однако планетная атмосфера ограничена снизу поверхностью планеты, которая может отражать излучение. Поэтому второе из указанных граничных условий (при $\tau = \tau_0$) должно быть соответствующим образом изменено. Здесь, однако, мы не будем останавливаться на этом. Вопрос о свечении среды, ограниченной отражающей поверхностью, будет подробно рассмотрен в главе VII.

Следует также отметить, что в планетных атмосферах индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ и параметр λ меняются с высотой. Однако в излагаемой ниже теории эти величины будут считаться постоянными в среде. Поэтому результаты применения этой теории к планетным атмосферам должны

рассматриваться как приближенные. Задача о рассеянии света в среде с меняющимися оптическими свойствами к настоящему времени подробно не рассмотрена. Отдельные работы по этому вопросу будут отмечены в главе X.

Как уже сказано, для применений наибольший интерес представляют интенсивности излучения, диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного атмосферой, т. е. величины

$$I(0, \vartheta, \varphi) \left(\text{при } \vartheta > \frac{\pi}{2} \right) \text{ и } I(\tau_0, \vartheta, \varphi) \left(\text{при } \vartheta < \frac{\pi}{2} \right).$$

Эти величины выражаются через функцию $B(\tau, \vartheta, \varphi)$ при помощи формул:

$$I(0, \vartheta, \varphi) = - \int_0^{\tau_0} B(\tau, \vartheta, \varphi) e^{-\tau \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau, \quad (85)$$

$$I(\tau_0, \vartheta, \varphi) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \vartheta, \varphi) e^{-(\tau_0 - \tau) \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau, \quad (86)$$

вытекающих из приведенных выше формул (53) и (54).

В дальнейшем вместо интенсивностей

$$I(0, \vartheta, \varphi) \text{ и } I(\tau_0, \vartheta, \varphi)$$

мы часто будем пользоваться так называемыми *коэффициентами яркости* $\rho(\vartheta, \varphi)$ и $\sigma(\vartheta, \varphi)$, определяемыми соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} I(0, \vartheta, \varphi) &= S\rho(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta_0, \\ I(\tau_0, \vartheta, \varphi) &= S\sigma(\vartheta, \varphi) \cos \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Физический смысл коэффициентов яркости выясняется из следующих соображений.

Пусть на верхней границе атмосферы находится ортотропная абсолютно белая площадка с площадью 1 см^2 . Ортотропность площадки означает, что интенсивность рассеянного ею излучения не зависит от направления. Обозначая эту интенсивность через I_* , получаем, что количество энергии, рассеянное площадкой за 1 сек , равно πI_* . С другой стороны, количество энергии, падающее на площадку за 1 сек , т. е. ее освещенность, равно, оче-

видно, $\pi S \cos \vartheta_0$. Так как площадка предполагается абсолютно белой, то оба эти количества энергии должны быть равны между собой. Отсюда следует, что интенсивность излучения, рассеянного ортотропной абсолютно белой площадкой, определяется формулой

$$I_*^- = S \cos \vartheta_0. \quad (88)$$

Из соотношений (87) и (88) получаем:

$$\rho(\vartheta, \varphi) = \frac{I(0, \vartheta, \varphi)}{I_*^-}; \quad \sigma(\vartheta, \varphi) = \frac{I(\tau_0, \vartheta, \varphi)}{I_*^-}. \quad (89)$$

Следовательно, коэффициент яркости представляет собой отношение интенсивности излучения, рассеянного атмосферой, к интенсивности излучения, рассеянного ортотропной абсолютно белой площадкой, находящейся на верхней границе атмосферы.

Миннарт [7] из физических соображений получил, что коэффициенты яркости ρ и σ являются симметричными функциями от угла отражения (или пропускания) и угла падения света. Ниже (в гл. VI, § 2) этот вывод будет сделан из уравнений теории переноса излучения.

§ 7. Перенос излучения через атмосферу звезды (в непрерывном спектре)

Свечение звезды происходит за счет энергии, вырабатываемой во внутренних частях звезды. Весьма сложный процесс переноса энергии из звездных недр наружу определяет вид спектра звезды. По спектру звезды мы судим о строении звездной атмосферы и о происходящих в ней процессах. Поэтому расчет спектра звезды является одной из основных задач теоретической астрофизики.

При решении указанной задачи делаются следующие предположения: 1) перенос энергии через атмосферу осуществляется путем лучеиспускания; 2) в атмосфере нет источников и стоков энергии; 3) атмосфера находится в стационарном состоянии. Иными словами, делается гипотеза о лучистом равновесии звездной атмосферы, при котором каждый элемент объема излучает столько энергии, сколько он поглощает.

Количество энергии, излучаемое единицей объема за 1 сек, равно

$$4\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu} d\nu,$$

а количество энергии, поглощаемое этим объемом за 1 сек, равно

$$\int d\omega \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} I_{\nu} d\nu.$$

Поэтому в качестве условия лучистого равновесия мы получаем:

$$4\pi \int_0^{\infty} \varepsilon_{\nu} d\nu = \int d\omega \int_0^{\infty} \alpha_{\nu} I_{\nu} d\nu. \quad (90)$$

Другим уравнением, связывающим величины I_{ν} и ε_{ν} , является уже известное нам уравнение переноса излучения. Атмосферные слои звезд, как и атмосферные слои планет, могут считаться плоскопараллельными. В этом случае уравнение переноса излучения имеет вид

$$\cos \vartheta \frac{dI_{\nu}}{dr} = -\alpha_{\nu} I_{\nu} + \varepsilon_{\nu}. \quad (91)$$

Здесь I_{ν} — интенсивность излучения, идущего на расстоянии r от центра звезды под углом ϑ к радиусу-вектору (рис. 8).

Если коэффициент поглощения α_{ν} не зависит от частоты ($\alpha_{\nu} = \alpha$), то вместо уравнения (90) имеем:

$$4\pi\varepsilon = \alpha \int I d\omega, \quad (92)$$

где ε — интегральный коэффициент излучения и I — интегральная интенсивность излучения. В этом случае, интегрируя уравнение (91) по всем частотам, получаем другое уравнение для определения величин ε и I :

$$\cos \vartheta \frac{dI}{dr} = -\alpha I + \varepsilon. \quad (93)$$

Вообще говоря, в звездных атмосферах коэффициент поглощения является весьма сложной функцией от частоты. Однако в астрофизике часто все-таки делают переход от уравнений (90) и (91) к уравнениям (92) и (93), понимая под α некоторый средний коэффициент поглощения.

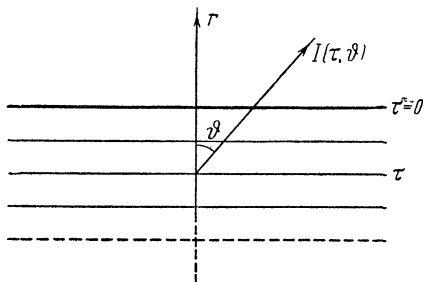


Рис. 8.

Введем оптическую глубину τ в звездной атмосфере, соответствующую среднему коэффициенту поглощения α :

$$\tau = \int_r^{\infty} \alpha dr. \quad (94)$$

Кроме того, введем обозначение: $\frac{\varepsilon}{\alpha} = B$. Тогда система уравнений (92) и (93) может быть переписана в виде:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} &= I(\tau, \vartheta) - B(\tau), \\ B(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

К уравнениям (95) должно быть добавлено граничное условие

$$I(0, \vartheta) = 0 \quad \text{при} \quad \vartheta > \frac{\pi}{2}, \quad (96)$$

выражающее тот факт, что нет излучения, падающего на звезду извне. Кроме того, для полного определения

величин I и B должен быть задан интегральный поток излучения. Он равен

$$H = \frac{L}{4\pi r_*^2}, \quad (97)$$

где L — светимость звезды и r_* — ее радиус.

Из уравнений (95) при граничном условии (96) получается следующее интегральное уравнение для нахождения функции $B(\tau)$:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(\tau') \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau'. \quad (98)$$

Это уравнение определяет функцию $B(\tau)$ с точностью до постоянного множителя, который находится из условия, что задан поток излучения H .

Уравнение (98) иногда называют *уравнением Милна* [8]. Оно является частным случаем уравнения (61) при $\lambda = 1$ (чистое рассеяние), $\tau_0 = \infty$, $g(\tau) = 0$.

В теории звездных атмосфер делается также гипотеза о локальном термодинамическом равновесии. Согласно этой гипотезе в каждом месте звездной атмосферы выполняется закон Стефана — Больцмана

$$\rho = aT^4 \quad (99)$$

и закон Кирхгофа — Планка

$$\frac{\epsilon_{\nu}}{\alpha_{\nu}} = B_{\nu}^*(T), \quad (100)$$

где

$$B_{\nu}^*(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\frac{h\nu}{kT} - 1}, \quad (101)$$

причем температура T считается меняющейся при переходе от одного места к другому. В приведенных формулах a — постоянная Стефана, h — постоянная Планка, k — постоянная Больцмана, c — скорость света.

Если функция $B(\tau)$ известна, то легко может быть найдена зависимость температуры T от оптической глу-

бины τ . Учитывая, что интегральная плотность излучения равна

$$\rho(\tau) = \frac{2\pi}{c} \int_0^\pi I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (102)$$

и сопоставляя эту формулу со вторым из уравнений (95), получаем:

$$\rho(\tau) = \frac{4\pi}{c} B(\tau). \quad (103)$$

Из формул (99) и (103) вытекает

$$T^4 = \frac{4\pi}{ac} B_-(\tau). \quad (104)$$

Пользуясь уравнением переноса (91) и формулой (101), мы можем получить следующее выражение для интенсивности излучения, выходящего из атмосферы звезды в частоте ν под углом ϑ к нормали:

$$I_\nu(0, \vartheta) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau_\nu \sec \vartheta}}{e^{hT} - 1} \sec \vartheta d\tau_\nu, \quad (105)$$

где τ_ν — оптическая глубина для частоты ν :

$$\tau_\nu = \int_r^\infty \alpha_\nu dr. \quad (106)$$

Если считать, что $\frac{\alpha_\nu}{\alpha}$ есть величина постоянная в атмосфере, то $\tau_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\alpha} \tau$. Поэтому вместо (105) можно написать:

$$I_\nu(0, \vartheta) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \tau \sec \vartheta}}{e^{hT} - 1} \frac{\alpha_\nu}{\alpha} \sec \vartheta d\tau. \quad (107)$$

Для выполнения интегрирования в этой формуле надо принять во внимание, что температура T связана с τ соотношением (104).

Формула (107) дает распределение энергии в непрерывном спектре звезды на угловом расстоянии ϑ от центра диска.

После определения величины $I_\nu(0, \vartheta)$ полная энергия, излучаемая звездой в частоте ν за 1 сек, может быть вычислена по формуле

$$L_\nu = 4\pi r_*^2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu(0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (108)$$

Как уже сказано, при строгом рассмотрении вопроса интегральное уравнение (98) справедливо только для случая $\alpha_\nu = \alpha$. Если же коэффициент поглощения зависит от частоты, то теория становится весьма сложной. Разработкой этой теории занимались Э. Р. Муфель [9], С. Чандрасекар [10] и др.

§ 8. Перенос излучения через атмосферу звезды (в спектральной линии)

Формула (107), дающая интенсивность выходящего из звезды излучения, неприменима к частотам спектральных линий, так как для самых внешних слоев звезды, в которых линии поглощения и возникают, предположение о локальном термодинамическом равновесии не оправдывается. Поэтому проблему переноса излучения через звездную атмосферу в частотах спектральных линий приходится рассматривать отдельно.

В этом случае следует считать, что в уравнении переноса излучения (91) коэффициент поглощения α_ν является суммой коэффициента поглощения в непрерывном спектре κ_ν и коэффициента поглощения в спектральной линии σ_ν , т. е.

$$\alpha_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu. \quad (109)$$

В свою очередь коэффициент излучения ϵ_ν также состоит из двух частей: из коэффициента излучения в непрерывном спектре, который, как и выше, может быть представлен в виде $\kappa_\nu B_\nu^*(T)$, где $B_\nu^*(T)$ — планковская

интенсивность, определяемая формулой (101), и из коэффициента излучения в спектральной линии. Считая, что в каждой частоте в спектральной линии происходит чистое рассеяние, мы имеем:

$$\varepsilon_\nu = \sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \kappa_\nu B_\nu^*(T). \quad (110)$$

С учетом (109) и (110) уравнение переноса излучения принимает вид:

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) I_\nu + \sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + \kappa_\nu B_\nu^*(T). \quad (111)$$

Введем оптическую глубину в частоте ν :

$$\tau_\nu = - \int_r^\infty (\kappa_\nu + \sigma_\nu) dr. \quad (112)$$

Кроме того, обозначим:

$$\lambda_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}. \quad (113)$$

Тогда уравнение (111) может быть переписано в виде системы:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \vartheta)}{d\tau_\nu} &= I_\nu(\tau_\nu, \vartheta) - B_\nu(\tau_\nu), \\ B_\nu(\tau_\nu) &= \frac{\lambda_\nu}{2} \int_0^\pi I_\nu(\tau_\nu, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta + (1 - \lambda_\nu) B_\nu^*(T). \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Из уравнений (114) при условии, что $I_\nu(0, \vartheta) = 0$ при $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, получается следующее интегральное уравнение для определения $B_\nu(\tau_\nu)$:

$$B_\nu(\tau_\nu) = \frac{\lambda_\nu}{2} \int_0^\infty B_\nu(\tau'_\nu) \text{Ei} |\tau_\nu - \tau'_\nu| d\tau'_\nu + (1 - \lambda_\nu) B_\nu^*(T). \quad (115)$$

После нахождения функции $B_\nu(\tau_\nu)$ интенсивность выходящего из звезды излучения может быть получена по

известной формуле

$$I_{\nu}(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} B_{\nu}(\tau_{\nu}) e^{-\tau_{\nu} \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau_{\nu}. \quad (116)$$

Тем самым определяется контур линии поглощения в спектре звезды на угловом расстоянии ϑ от центра диска.

Уравнение (115) является частным случаем уравнения (61). Учитывая физический смысл величин, входящих в уравнение (61), мы можем сказать, что задача об образовании линий поглощения в звездных спектрах есть задача о рассеянии света в среде с расположенными в ней источниками света, коэффициент излучения которых равен $\kappa_{\nu} B_{\nu}^*(T)$, с вероятностью выживания кванта при рассеянии, определенной формулой (113), и при сферической индикатрисе рассеяния.

Уравнение переноса излучения (111) впервые было получено Эддингтоном [11]. В дальнейшем оно было обобщено в некоторых направлениях (Паннекуком, Стремгеном и др.). В последнее время в теории звездных спектров вместо уравнения (111) применяют уравнение переноса, в котором учитывается перераспределение излучения по частотам внутри линии. Задача об образовании линий поглощения при перераспределении излучения по частотам будет рассмотрена в главе VIII.

§ 9. Рассеяние света в одномерной среде

В качестве примера применения введенных выше понятий и уравнений рассмотрим задачу о рассеянии света в одномерной среде. В этом случае система уравнений переноса излучения и лучистого равновесия легко решается точно.

Как мы увидим дальше, задача о рассеянии света в среде, состоящей из плоскопараллельных слоев, приближенно сводится к задаче о рассеянии света в одномерной среде. Следовательно, рассмотрение последней задачи представляет интерес и с этой точки зрения.

Пусть имеется прямолинейный отрезок длиной l_0 , способный рассеивать излучение. Обозначим через $\alpha(l)$ коэффициент поглощения на расстоянии l от одного из концов отрезка, через λ — отношение коэффициента рассеяния к коэффициенту поглощения (т. е. вероятность «выживания» кванта при элементарном акте рассеяния), через x — долю энергии, рассеянной вперед. Таким образом, если на элемент длины dl падает излучение интенсивности I , то в нем поглощается энергия $I\alpha dl$, из которой рассеивается часть $\lambda I\alpha dl$. При этом энергия, рассеянная вперед, равна $x\lambda I\alpha dl$, а энергия, рассеянная назад, равна $(1-x)\lambda I\alpha dl$. Часть энергии $(1-\lambda)I\alpha dl$ испытывает истинное поглощение на элементе длины dl .

Перейдем в среде от геометрических расстояний к оптическим, введя оптическую глубину τ и оптическую толщину τ_0 при помощи соотношений:

$$\tau = \int_0^l \alpha(l) dl, \quad \tau_0 = \int_0^{l_0} \alpha(l) dl. \quad (117)$$

Обозначим через $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$ интенсивности излучения, идущего на оптической глубине τ соответственно в сторону возрастающих и убывающих глубин. В рассматриваемом случае уравнения переноса излучения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1(\tau)}{d\tau} &= -I_1(\tau) + B_1(\tau), \\ -\frac{dI_2(\tau)}{d\tau} &= -I_2(\tau) + B_2(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

где

$$B_1(\tau) = \frac{\varepsilon_1}{\alpha}, \quad B_2(\tau) = \frac{\varepsilon_2}{\alpha}, \quad (119)$$

а ε_1 и ε_2 — коэффициенты излучения.

Чтобы написать уравнения лучистого равновесия, надо задать источники излучения, вызывающие свечение среды. Будем сначала считать, что источники излучения находятся внутри среды. Обозначим через $\varepsilon_1^0 = \alpha B_1^0$ и $\varepsilon_2^0 = \alpha B_2^0$ коэффициенты излучения, обусловленные указанными

источниками излучения (т. е. коэффициенты истинного излучения). Тогда в качестве уравнений лучистого равновесия получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_1(\tau) &= \lambda [xI_1(\tau) + (1-x)I_2(\tau)] + B_1^0(\tau), \\ B_2(\tau) &= \lambda [(1-x)I_1(\tau) + xI_2(\tau)] + B_2^0(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

К системе уравнений (118) и (120) надо добавить еще следующие граничные условия:

$$I_1(0) = 0, \quad I_2(\tau_0) = 0. \quad (121)$$

Если на среду действуют также внешние источники излучения, то они могут быть учтены в граничных условиях. Например, в том случае, когда на границу среды $\tau = 0$ падает излучение интенсивности I_0 , вместо первого из граничных условий (121) следует написать $I_1(0) = I_0$.

Однако часто оказывается удобным отделить излучение, приходящее непосредственно от внешних источников света, от излучения, испускаемого самой средой. В указанном выше случае падения внешнего излучения интенсивности I_0 на границу $\tau = 0$, интенсивность этого излучения на глубине τ будет равна $I_0 e^{-\tau}$. Выделяя в уравнениях (120) из интенсивности I_1 член $I_0 e^{-\tau}$, вместо уравнений (120) получаем:

$$\left. \begin{aligned} B_1(\tau) &= \lambda [xI_1(\tau) + (1-x)I_2(\tau)] + B_1^0(\tau) + \lambda x I_0 e^{-\tau}, \\ B_2(\tau) &= \lambda [(1-x)I_1(\tau) + xI_2(\tau)] + B_2^0(\tau) + \lambda (1-x) I_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

Теперь уже в уравнениях (118) и (122) под I_1 и I_2 понимаются интенсивности излучения, испускаемого самой средой, а граничные условия имеют форму (121).

Подставляя (122) в (118), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1}{d\tau} &= -I_1 + \lambda [xI_1 + (1-x)I_2] + B_1^0 + \lambda x I_0 e^{-\tau}, \\ -\frac{dI_2}{d\tau} &= -I_2 + \lambda [(1-x)I_1 + xI_2] + B_2^0 + \lambda (1-x) I_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

Отсюда, сначала складывая почленно оба уравнения,

§ 9]

а затем вычитая одно из другого, находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(I_1 - I_2)}{d\tau} &= -(1 - \lambda)(I_1 + I_2) + B_1^0 + B_2^0 + \lambda I_0 e^{-\tau}, \\ \frac{d(I_1 + I_2)}{d\tau} &= -[1 + \lambda(1 - 2x)](I_1 - I_2) + B_1^0 - B_2^0 + \\ &\quad + \lambda(2x - 1)I_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Система уравнений (124) при постоянных λ и x легко решается в общем виде. Однако мы не будем делать этого, а рассмотрим лишь некоторые частные случаи.

1. Чистое рассеяние. Полагая в уравнениях (124) $\lambda = 1$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(I_1 - I_2)}{d\tau} &= B_1^0 + B_2^0 + I_0 e^{-\tau}, \\ \frac{d(I_1 + I_2)}{d\tau} &= -2(1 - x)(I_1 - I_2) + B_1^0 - B_2^0 + (2x - 1)I_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

Интегрирование первого из этих уравнений дает:

$$I_1 - I_2 = \int_0^{\tau} (B_1^0 + B_2^0) d\tau - I_0 e^{-\tau} + C_1, \quad (126)$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Величина $I_1 - I_2$ представляет собой поток излучения. Соотношением (126) выражается уже известный нам интеграл потока, всегда имеющий место в случае чистого рассеяния (см. § 5).

Подставляя (126) во второе из уравнений (125) и интегрируя, находим:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 = -2(1 - x) \left[\int_0^{\tau} d\tau' \int_0^{\tau'} (B_1^0 + B_2^0) d\tau'' + C_1 \tau \right] + \\ + \int_0^{\tau} (B_1^0 - B_2^0) d\tau' - I_0 e^{-\tau} + C_2, \end{aligned} \quad (127)$$

где C_2 — новая произвольная постоянная.

Соотношения (126) и (127), в которых постоянные C_1 и C_2 определяются граничными условиями (121), дают полное решение задачи.

2. Внешние источники света. Будем считать, что на границу среды $\tau=0$ падает внешнее излучение интенсивности I_0 , а внутренние источники излучения отсутствуют. Полагая в уравнениях (124) $B_1^0=0$ и $B_2^0=0$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(I_1 - I_2)}{d\tau} &= -(1 - \lambda)(I_1 + I_2) + \lambda I_0 e^{-\tau}, \\ \frac{d(I_1 + I_2)}{d\tau} &= -[1 + \lambda(1 - 2x)](I_1 - I_2) + \lambda(2x - 1)I_0 e^{-\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Дифференцируя второе из этих уравнений по τ и пользуясь первым уравнением, находим:

$$\frac{d^2(I_1 + I_2)}{d\tau^2} = k^2(I_1 + I_2) - (1 - k^2)I_0 e^{-\tau}, \quad (129)$$

где обозначено

$$k^2 = (1 - \lambda)[1 + \lambda(1 - 2x)]. \quad (130)$$

Интегрирование уравнения (129) дает:

$$I_1 + I_2 = Ce^{-k\tau} + De^{k\tau} - I_0 e^{-\tau}, \quad (131)$$

где C и D — произвольные постоянные. Подставляя (131) во второе из уравнений (128), находим:

$$-Ce^{-k\tau} + De^{k\tau} = -\frac{k}{1-\lambda}(I_1 - I_2 + I_0 e^{-\tau}). \quad (132)$$

Из (131) и (132) при граничных условиях (121) следует:

$$I_1(\tau) = I_0 \frac{e^{k(\tau_0 - \tau)} - r_0^2 e^{-k(\tau_0 - \tau)}}{e^{k\tau_0} - r_0^2 e^{-k\tau_0}} - I_0 e^{-\tau}, \quad (133)$$

$$I_2(\tau) = I_0 r_0 \frac{e^{k(\tau_0 - \tau)} - e^{-k(\tau_0 - \tau)}}{e^{k\tau_0} - r_0^2 e^{-k\tau_0}}, \quad (134)$$

где введено новое обозначение:

$$r_0 = \frac{k-1+\lambda}{k+1-\lambda}. \quad (135)$$

Формулами (133) и (134) и определяются искомые интенсивности излучения $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$.

Представляют интерес интенсивности излучения, выходящего из среды, т. е. величины $I_1(\tau_0)$ и $I_2(0)$. Формулы (133) и (134) дают:

$$I_1(\tau_0) = I_0 \frac{(1-r_0^2)e^{-k\tau_0}}{1-r_0^2e^{-2k\tau_0}} - I_0 e^{-\tau_0}, \quad (136)$$

$$I_2(0) = I_0 r_0 \frac{1-e^{-2k\tau_0}}{1-r_0^2e^{-2k\tau_0}}. \quad (137)$$

Из формулы (137) виден физический смысл величины r_0 . Полагая в ней $\tau_0 = \infty$, имеем:

$$I_2(0) = I_0 r_0. \quad (138)$$

Следовательно, величина r_0 представляет собой коэффициент отражения света средой бесконечно большой оптической толщины.

Особо должен быть рассмотрен случай $\lambda = 1$. Для этого надо обратиться к полученным выше формулам (126) и (127). Полагая в них $B_1^0 = 0$ и $B_2^0 = 0$, находим:

$$I_1 - I_2 = -I_0 e^{-\tau} + C_1, \quad (139)$$

$$I_1 + I_2 = -2(1-x)C_1\tau - I_0 e^{-\tau} + C_2. \quad (140)$$

Определяя постоянные C_1 и C_2 из граничных условий (121), для искоемых интенсивностей излучения получаем:

$$I_1(\tau) = I_0 \frac{1+(1-x)(\tau_0-\tau)}{1+(1-x)\tau_0} - I_0 e^{-\tau}, \quad (141)$$

$$I_2(\tau) = I_0 \frac{(1-x)(\tau_0-\tau)}{1+(1-x)\tau_0}. \quad (142)$$

Интенсивности излучения, выходящего из среды, оказываются равными

$$I_1(\tau_0) = \frac{I_0}{1+(1-x)\tau_0} - I_0 e^{-\tau_0}, \quad (143)$$

$$I_2(0) = I_0 \frac{(1-x)\tau_0}{1+(1-x)\tau_0}. \quad (144)$$

Из формул (143) и (144), между прочим, следует:

$$I_2(0) + I_1(\tau_0) + I_0 e^{-\tau_0} = I_0. \quad (145)$$

Это соотношение выражает тот очевидный факт, что в случае чистого рассеяния количество энергии, выходящее из среды, равно количеству энергии, падающему на нее.

3. Изотропное рассеяние. Допустим, что рассеяние излучения в среде происходит с одинаковой вероятностью в обе стороны. В таком случае мы должны принять $x = 1/2$. Подставляя указанное значение x в формулы (133), (134), (141) и (142), мы получаем интенсивности излучения при изотропном рассеянии в среде, освещенной внешними источниками излучения.

Рассмотрим теперь общий случай, когда на среду действуют как внешние, так и внутренние источники излучения. Будем при этом для простоты считать, что внутренние источники излучения испускают одинаковое количество энергии в обе стороны. Величины B_1^0 и B_2^0 , равные друг другу, обозначим просто через B_0 .

Учитывая сказанное, вместо уравнений (124) при изотропном рассеянии получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(I_1 - I_2)}{d\tau} &= -(1 - \lambda)(I_1 + I_2) + 2B_0 + \lambda I_0 e^{-\tau}, \\ \frac{d(I_1 + I_2)}{d\tau} &= -(I_1 - I_2). \end{aligned} \right\} \quad (146)$$

Из уравнений (146) следует:

$$\frac{d^2(I_1 + I_2)}{d\tau^2} = (1 - \lambda)(I_1 + I_2) - 2g(\tau), \quad (147)$$

где обозначено

$$g(\tau) = B_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} I_0 e^{-\tau}. \quad (148)$$

Общее решение уравнения (147) имеет вид

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 = & \left[\frac{1}{k} \int_0^\tau g(\tau) e^{k\tau} d\tau + C \right] e^{-k\tau} + \\ & + \left[-\frac{1}{k} \int_0^\tau g(\tau) e^{-k\tau} d\tau + D \right] e^{k\tau}, \quad (149) \end{aligned}$$

где C и D — произвольные постоянные, а $k = \sqrt{1 - \lambda}$. Подставляя (149) во второе из уравнений (146), находим:

$$I_1 - I_2 = \left[\int_0^{\tau} g(\tau) e^{k\tau} d\tau + kC \right] e^{-k\tau} + \\ + \left[\int_0^{\tau} g(\tau) e^{-k\tau} d\tau - kD \right] e^{k\tau}. \quad (150)$$

Входящие в (149) и (150) постоянные C и D , определенные при помощи граничных условий (121), даются формулами:

$$kC = - \frac{(1 - k^2) \int_0^{\tau_0} g(\tau) e^{k(\tau_0 - \tau)} d\tau - (1 - k)^2 \int_0^{\tau_0} g(\tau) e^{-k(\tau_0 - \tau)} d\tau}{(1 + k)^2 e^{k\tau_0} - (1 - k)^2 e^{-k\tau_0}}, \quad (151)$$

$$kD = \frac{(1 + k)^2 \int_0^{\tau_0} g(\tau) e^{k(\tau_0 - \tau)} d\tau - (1 - k^2) \int_0^{\tau_0} g(\tau) e^{-k(\tau_0 - \tau)} d\tau}{(1 + k)^2 e^{k\tau_0} - (1 - k)^2 e^{-k\tau_0}}. \quad (152)$$

Следует отметить, что в рассматриваемом случае одномерной среды, как и в случае трехмерной среды, задача о рассеянии света в среде может быть сведена к некоторому интегральному уравнению. При $x = 1/2$ и при $B_1^0 = B_2^0$, как видно из уравнений (122), величины B_1 и B_2 равны друг другу. Обозначая их общее значение через B , из уравнений (122) находим:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)] + B_0(\tau) + \frac{\lambda}{2} I_0 e^{-\tau}. \quad (153)$$

Интегрирование уравнений переноса (118) при граничных условиях (121) и при условии $B_1 = B_2 = B$ дает:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\tau) &= \int_0^{\tau} B(\tau') e^{-(\tau - \tau')} d\tau', \\ I_2(\tau) &= \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau') e^{-(\tau' - \tau)} d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Подставляя (154) в (153), получаем следующее уравнение для определения функции $B(\tau)$:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') e^{-|\tau - \tau'|} d\tau' + g(\tau), \quad (155)$$

где использовано обозначение (148).

Уравнение (155) является аналогом уравнения (61), полученного ранее для трехмерной среды, состоящей из плоскопараллельных слоев.

Решение уравнения (155) получается при подстановке в формулу (153) соотношения (149), в котором постоянные C и D определены формулами (151) и (152).

Если внутренние источники излучения отсутствуют, то вместо уравнения (155) получаем:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') e^{-|\tau - \tau'|} d\tau' + \frac{\lambda}{2} I_0 e^{-\tau}. \quad (156)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$B(\tau) = \lambda I_0 \frac{(1+k)e^{h(\tau_0 - \tau)} - (1-k)e^{-h(\tau_0 - \tau)}}{(1+k)^2 e^{h\tau_0} - (1-k)^2 e^{-h\tau_0}}. \quad (157)$$

В случае $\lambda = 1$ находим:

$$B(\tau) = I_0 \frac{1 + \tau_0 - \tau}{2 + \tau_0}. \quad (158)$$

ГЛАВА II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Многие задачи астрофизики, геофизики и физики сводятся к решению уравнений переноса излучения. Вообще говоря, решение этих уравнений представляет значительные математические трудности. Поэтому многие исследователи занимались разработкой методов, пригодных для решения указанных уравнений.

В настоящей главе рассматриваются методы, наиболее часто используемые в астрофизике. К ним относятся: метод последовательных приближений, методы Шварцшильда — Шустера, Эддингтона и Chandrasekara, а также вариационные методы.

Десять лет назад В. А. Амбарцумян разработал методы решения уравнений переноса излучения, представляющие особый интерес для астрофизики. Им будет посвящена следующая глава. Методы, предложенные автором, рассматриваются в главах IV и VI.

§ 1. Метод последовательных приближений

Рассмотрим основное интегральное уравнение теории переноса излучения в планетных атмосферах. В случае сферической пндикатрисы рассеяния оно имеет вид:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1 |\tau - \tau'| B(\tau') d\tau' + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0}, \quad (1)$$

где приняты ранее введенные обозначения (см. гл. I, § 6).

Уравнение (1) в принципе может быть решено методом последовательных приближений. В качестве первого

приближения для $B(\tau)$ обычно берется свободный член уравнения (1), т. е. принимается

$$B_1(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0}. \quad (2)$$

Далее выражение (2) подставляется в правую часть уравнения (1) и находится второе приближение для $B(\tau)$:

$$B_2(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - \tau'| B_1(\tau') d\tau'. \quad (3)$$

Аналогично находится $B_3(\tau)$ и т. д.

Физический смысл такого решения заключается в следующем. Взяв для $B(\tau)$ выражение (2), мы принимаем во внимание излучение, рассеянное в среде только один раз, т. е. учитываем, как говорят, рассеяние *первого порядка*. Подставляя (2) в интегральный член уравнения (1), мы принимаем во внимание излучение, рассеянное в среде два раза, т. е. учитываем рассеяние *второго порядка*. Таким образом, рассматриваемый метод последовательных приближений представляет собой последовательный учет рассеяний первого, второго и более высоких порядков.

По приближенным выражениям для функции $B(\tau)$ могут быть найдены приближенные выражения для интенсивностей рассеянного средой излучения и соответствующих им коэффициентов яркости. Для этого служат формулы (85), (86) и (87) предыдущей главы. Коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка, оказываются равными

$$\rho_1(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0 (\sec \vartheta + \sec \vartheta_0)}}{\cos \vartheta + \cos \vartheta_0}, \quad (4)$$

$$\sigma_1(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\tau_0 \sec \vartheta} - e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0}}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}. \quad (5)$$

В формуле (4) под ϑ понимается угол отражения, в формуле (5) — угол пропускания излучения.

Заметим, что при индикатрисе рассеяния произвольного вида вместо формул (4) и (5) имеем:

$$\rho_1(\vartheta, \vartheta_0, \varphi) = \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) \frac{1 - e^{-\tau_0(\sec \vartheta + \sec \vartheta_0)}}{\cos \vartheta + \cos \vartheta_0}, \quad (6)$$

$$\sigma_1(\vartheta, \vartheta_0, \varphi) = \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) \frac{e^{-\tau_0 \sec \vartheta} - e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0}}{\cos \vartheta - \cos \vartheta_0}, \quad (7)$$

где γ_1 — угол между направлением падающего на среду излучения и направлением излучения, рассеянного средой.

Формулы для интенсивностей излучения, обусловленных рассеянием первого и второго порядков, были получены рядом авторов. Еще в 1916 г. В. Г. Фесенков [1] дал такую формулу для интенсивности излучения, рассеянного средой бесконечно большой оптической толщины при рэлеевой индикатрисе рассеяния. В дальнейшем аналогичные формулы для других случаев были найдены Шенбергом [2] и др.

Приведенные выше формулы для коэффициентов яркости, обусловленные рассеянием первого порядка, весьма часто применяются на практике. Иногда используются также формулы, учитывающие рассеяние первого и второго порядков. Поэтому представляет интерес вопрос, какова точность этих формул.

Очевидно, что упомянутые формулы тем точнее, чем меньше среднее число рассеяний, испытываемых квантом в среде. В свою очередь, среднее число рассеяний зависит прежде всего от величины параметра λ . Если значение λ мало (т. е. роль истинного поглощения велика), то квант испытывает в среднем небольшое число рассеяний. Математически это следует из того, что члены, учитывающие рассеяние первого порядка, пропорциональны λ , члены, учитывающие рассеяние второго порядка, пропорциональны λ^2 и т. д. Среднее число рассеяний будет также небольшим в случае малой оптической толщины среды. Таким образом, точность рассматриваемых формул тем больше, чем меньше значения λ и τ_0 для данной среды.

Таблица 2

Коэффициенты яркости ρ

τ_0	ρ_1	ρ_2	ρ	ρ'
0,2	0,041	0,052	0,055	0,050
0,4	0,069	0,096	0,113	0,10
0,6	0,087	0,129	0,17	0,15
0,8	0,100	0,153	0,22	0,19
1,0	0,108	0,171	0,27	0,23
1,2	0,114	0,183	0,31	0,27
1,4	0,117	0,192	0,36	0,31
1,6	0,120	0,198	0,40	0,35
1,8	0,122	0,202	0,44	0,38
2,0	0,123	0,205	0,47	0,41
∞	0,125	0,212	1,06	1,00

Таблица 3

Коэффициенты яркости σ

τ_0	σ_1	σ_2	σ	σ'
0,2	0,041	0,051	0,054	0,050
0,4	0,067	0,093	0,111	0,10
0,6	0,082	0,123	0,16	0,14
0,8	0,090	0,141	0,21	0,18
1,0	0,092	0,150	0,25	0,21
1,2	0,090	0,152	0,28	0,24
1,4	0,086	0,149	0,31	0,27
1,6	0,081	0,143	0,33	0,29
1,8	0,074	0,135	0,35	0,31
2,0	0,068	0,125	0,37	0,32
∞	0	0	0	0

Представление о точности рассматриваемых формул в случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) дают таблицы 2 и 3. В них для среды, обладающей сферической индикатрисой рассеяния, приводятся значения коэффициентов яркости

при $\vartheta_0 = 0$ и $\vartheta = 0$. В первом столбце каждой из таблиц приведены значения оптической толщины среды, во втором — коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка, в третьем — коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого и второго порядков, в четвертом — точные значения коэффициентов яркости (о пятом столбце будет сказано ниже).

Из таблиц видно, что даже для земной атмосферы, оптическая толщина которой в видимой части спектра равна 0,2 — 0,4, при решении некоторых задач необходимо учитывать рассеяния высших порядков. В случае же среды большой оптической толщины вычисление интенсивностей излучения при учете только первого или первого и второго порядков приводит к значениям, в несколько раз отличающимся от истинных.

Таким образом, приведенные выше простые формулы для коэффициентов яркости могут употребляться только в редких случаях. Однако уже учет рассеяния второго порядка приводит к весьма громоздким формулам для коэффициентов яркости. Что же касается последовательного учета рассеяний более высоких порядков, то в аналитической форме он практически невыполним.

Указанное обстоятельство заставило обратиться к решению интегральных уравнений теории рассеяния света методом последовательных приближений в численной форме. Это было осуществлено в ряде работ Е. С. Кузнецова по теории рассеяния света в земной атмосфере.

Е. С. Кузнецов [3] подробно рассмотрел вопрос о сходимости последовательных приближений и о технике вычислений последующего приближения по известному предыдущему. В результате было решено численным методом уравнение (1), а также более общее уравнение, учитывающее отражение света земной поверхностью. В работе Е. С. Кузнецова и Б. В. Овчинского [4] приведены подробные таблицы функции $B(\tau)$ для ряда значений оптической толщины атмосферы ($\tau_0 = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6$), зенитного расстояния Солнца ($\vartheta_0 = 30, 45, 60, 76^\circ$) и альбедо поверхности Земли ($A = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,8$).

§ 2. Усреднение интенсивности излучения по направлениям

Для решения уравнений переноса излучения в астрофизике весьма часто используется метод, основанный на усреднении интенсивности излучения по углам. В виде примера решим при помощи этого метода задачу о переносе излучения в звездной фотосфере*).

Примем для простоты, что коэффициент поглощения не зависит от частоты. Тогда интегральная интенсивность излучения $I(\tau, \vartheta)$ будет определяться из следующей системы уравнений [гл. I, § 7, уравнения (95)]:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} &= I(\tau, \vartheta) - B(\tau), \\ B(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

На границе звезды имеем: $I(0, \vartheta) = 0$ при $\vartheta > \frac{\pi}{2}$. Кроме того, считается заданным интегральный поток излучения, обусловленный энергией, выделяющейся внутри звезды.

Для усреднения интенсивности излучения по углам было предложено два способа: один - в работах Шварцшильда [5] и Шустера [6], другой - в работе Эддингтона [7]. Мы рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

Способ Шварцшильда Шустера. Введем в рассмотрение среднюю интенсивность излучения, идущего снизу вверх, и среднюю интенсивность излучения, идущего сверху вниз. Обозначая эти величины соответственно через $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$, имеем:

$$I_1(\tau) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad I_2(\tau) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} I(\tau, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (9)$$

*) Под фотосферой звезды понимается слой, от которого доходит до наблюдателя излучение в непрерывном спектре.

Умножая первое из уравнений (8) на $\sin \vartheta d\vartheta$ и интегрируя в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получаем:

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = I_1(\tau) - B(\tau). \quad (10)$$

Интеграл в левой части этого уравнения приближенно представим в виде:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} I_1(\tau), \quad (11)$$

т. е. вынесем за знак интеграла среднее значение интенсивности излучения, равное $I_1(\tau)$. Тогда вместо (10) будем иметь:

$$\frac{1}{2} \frac{dI_1(\tau)}{d\tau} = I_1(\tau) - B(\tau). \quad (12)$$

Умножая первое из уравнений (8) на $\sin \vartheta d\vartheta$ и интегрируя в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до π , аналогично находим:

$$-\frac{1}{2} \frac{dI_2(\tau)}{d\tau} = I_2(\tau) - B(\tau). \quad (13)$$

Второе из уравнений (8) при помощи величин $I_1(\tau)$ и $I_2(\tau)$ переписывается в виде

$$B(\tau) = \frac{1}{2} [I_1(\tau) + I_2(\tau)]. \quad (14)$$

Таким образом, от системы интегро-дифференциальных уравнений (8) мы приближенно перешли к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (12), (13) и (14).

Полученная система уравнений решается весьма просто. Складывая (12) и (13) и пользуясь (14), находим:

$$I_1(\tau) - I_2(\tau) = F, \quad (15)$$

где F — произвольная постоянная. Вычитая (13) из (12) и учитывая (15), получаем:

$$I_1(\tau) + I_2(\tau) = 2F\tau + C, \quad (16)$$

где C — новая постоянная.

Граничное условие в данном случае имеет вид: $I_2(0) = 0$. Находя из (15) и (16) величину $I_2(\tau)$ и используя указанное условие, имеем:

$$C = F. \quad (17)$$

Что касается постоянной F , то она выражается через поток излучения, являющийся заданным. В самом деле, в принятом приближении поток излучения равен

$$H = \int I \cos \vartheta d\omega = 2\pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \right. \\ \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} I \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right] = \pi(I_1 - I_2). \quad (18)$$

Сравнивая (15) с (18), получаем:

$$H = \pi F. \quad (19)$$

Постоянство потока излучения в фотосфере звезды есть следствие отсутствия в ней источников и стоков энергии (см. § 5 предыдущей главы).

Подстановка (16) и (17) в соотношение (14) дает:

$$B(\tau) = F \left(\frac{1}{2} + \tau \right). \quad (20)$$

Сравнивая (20) с формулой (104) гл. I, находим следующую зависимость между температурой T и оптической глубиной τ :

$$T^4 = T_0^4 (1 + 2\tau), \quad (21)$$

где

$$T_0 = \left(\frac{2\pi}{ac} F \right)^{\frac{1}{4}} \quad (22)$$

— поверхностная температура звезды.

Знание функции $B(\tau)$ дает также возможность определить интегральную интенсивность излучения, выходящего из звезды. Для этого служит формула

$$I(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} B(\tau) e^{-\tau \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau. \quad (23)$$

Подставляя (20) в (23), находим:

$$I(0, \vartheta) = F \left(\frac{1}{2} + \cos \vartheta \right). \quad (24)$$

Способ Эддингтона. Введем в рассмотрение величину

$$\bar{I} = \int I \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (25)$$

представляющую собой среднюю интенсивность излучения в данном месте. Тогда систему (8) можно переписать в виде одного уравнения:

$$\cos \vartheta \frac{dI(\tau, \vartheta)}{d\tau} = I(\tau, \vartheta) - \bar{I}(\tau). \quad (26)$$

Интегрируя уравнение (26) по всем телесным углам, получаем, что поток излучения H постоянен. Как и выше, обозначим $H = \pi F$.

Умножая уравнение (26) на $\cos \vartheta d\omega$ и интегрируя по всем телесным углам, находим:

$$\frac{d}{d\tau} \int I \cos^2 \vartheta d\omega = H. \quad (27)$$

В этом уравнении вынесем за знак интеграла среднюю интенсивность излучения \bar{I} , т. е. примем приближенно:

$$\int I \cos^2 \vartheta d\omega = \frac{4\pi}{3} \bar{I}. \quad (28)$$

Тогда из (27) получим:

$$\bar{I}(\tau) = \frac{3}{4} F\tau + C, \quad (29)$$

где C — произвольная постоянная.

На поверхности звезды

$$\left. \begin{aligned} \bar{I} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \sin \vartheta \, d\vartheta, \\ H &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \approx \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \sin \vartheta \, d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Отсюда приближенно следует:

$$\bar{I} = \frac{H}{2\pi} \quad \text{при } \tau = 0. \quad (31)$$

При граничном условии (31) для постоянной C находим:

$$C = \frac{F}{2}. \quad (32)$$

Так как в данном случае $B = \bar{I}$ [согласно (8) и (25)], то на основании (29) и (32) получаем:

$$B(\tau) = F \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \tau \right). \quad (33)$$

При помощи формулы (33) можно, как и выше, определить зависимость температуры T от оптической глубины τ . Эта зависимость имеет вид

$$T^4 = T_0^4 \left(1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (34)$$

Подстановка (33) в (23) приводит к следующему выражению для интенсивности излучения, выходящего из звезды:

$$I(0, \vartheta) = F \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cos \vartheta \right). \quad (35)$$

Представляет интерес сравнение полученных приближенных формул для величин $B(\tau)$ и $I(0, \vartheta)$ с точными формулами (см. § 5).

Величина $I(0, \vartheta)$ характеризует распределение яркости по диску звезды. Отношение яркости в центре диска

к яркости на краю, т. е. $I(0, 0)/I\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, согласно формуле (24), равно 3, а согласно формуле (35) равно 2,5. Точное значение этого отношения есть 2,9.

Для величины $B(\tau)$ при больших значениях τ формулы (20) и (33) дают соответственно $B(\tau) \approx F\tau$ и $B(\tau) \approx \frac{3}{4}F\tau$. К последнему выражению приводит и точная теория. При $\tau=0$ обе указанные формулы дают $B(0) = \frac{1}{2}F$ в отличие от точного значения $B(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}F$.

Из сказанного следует, что оба способа усреднения интенсивности излучения по углам приводят к формулам, обладающим приблизительно одинаковой точностью.

Способы Шварцшильда — Шустера и Эддингтона могут быть использованы также для решения других задач теории переноса излучения. В частности, пользуясь этими способами, мы можем решить рассмотренную в предыдущем параграфе задачу о свечении среды, освещенной параллельными лучами. Найденные в результате решения указанной задачи методом Эддингтона для случая чистого рассеяния коэффициенты яркости приведены в таблицах 2 и 3 (они обозначены через ρ' и σ'). Из сравнения приближенных значений коэффициентов яркости с их точными значениями мы видим, что метод Эддингтона для всех оптических толщин среды дает точность, достаточную для многих практических применений.

§ 3. Применение квадратурных формул

В последнее время в теории переноса излучения нашел широкое применение метод, подробно разработанный Чандрасекаром [8]. Он основан на замене интегрального члена уравнения переноса излучения суммой Гаусса. Благодаря этому интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения приближенно заменяется системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Указанный метод является обобщением рассмотренного в предыдущем параграфе метода Шварцшильда — Шустера.

Рассмотрим, следуя Чандрасекару, задачу о переносе излучения в фотосфере звезды при предположении, что коэффициент поглощения не зависит от частоты. В таком случае уравнением переноса излучения будет служить (26). Мы его переписем, обозначив $\eta = \cos \vartheta$:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta)}{d\tau} = I(\tau, \eta) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') d\eta'. \quad (36)$$

Интегральный член уравнения (36) заменим суммой согласно формуле Гаусса для численных квадратур:

$$\int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta) d\eta \approx \sum_{j=-n}^n a_j I(\tau, \eta_j), \quad (37)$$

где $\eta_{-n}, \dots, \eta_{-1}, \eta_1, \dots, \eta_n$ суть корни полинома Лежандра, $P_{2n}(\eta)$ и a_j — некоторые весовые множители ($a_j = a_{-j}$). Представление (37) тем точнее, чем больше n .

В n -м приближении уравнение (36) заменяется системой линейных дифференциальных уравнений порядка $2n$:

$$\eta_i \frac{dI_i}{d\tau} = I_i - \frac{1}{2} \sum_j a_j I_j \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n), \quad (38)$$

где для краткости $I(\tau, \eta_i)$ обозначено через I_i .

Легко видеть, что частными решениями уравнений (38) будут функции

$$I_i = \frac{1}{1 + k\eta_i} e^{-k\tau} \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n), \quad (39)$$

где k определяется из характеристического уравнения

$$\frac{1}{2} \sum_j \frac{a_j}{1 + k\eta_j} = 1. \quad (40)$$

Так как $a_j = a_{-j}$, $\eta_{-j} = -\eta_j$, то уравнение (40) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 - k^2 \eta_j^2} = 1. \quad (41)$$

Уравнение (41) имеет $2n - 2$ различных, не равных нулю корней, которые разделяются на пары

$$\pm k_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n-1)$$

($k^2 = 0$ есть также корень). В соответствии с этим система уравнений (38) имеет $2n - 2$ независимых решения вида (39).

Легко убедиться, что система уравнений (38) имеет также частное решение

$$I_i = b(\tau + Q + \eta_i) \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n), \quad (42)$$

где b и Q — произвольные постоянные.

Таким образом, общее решение системы (38) может быть записано в виде

$$I_i = b \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + k_\alpha \eta_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_{-\alpha} e^{k_\alpha \tau}}{1 - k_\alpha \eta_i} + \tau + \eta_i + Q \right] \quad (43)$$

$$(i = \pm 1, \dots, \pm n),$$

где b , $L_{\pm\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n-1$) и Q суть $2n$ постоянных интегрирования.

В рассматриваемом случае в выражении для I_i должны отсутствовать члены, экспоненциально возрастающие с τ . Поэтому вместо (43) имеем:

$$I_i = b \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + k_\alpha \tau} + \tau + \eta_i + Q \right] \quad (i = \pm 1, \dots, \pm n). \quad (44)$$

Так как на границе звезды нет излучения, падающего извне, то должно быть

$$I_{-i} = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (45)$$

Учитывая (45), получаем n уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha}{1 - k_\alpha \eta_i} - \eta_i + Q = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (46)$$

для определения постоянных L_α ($\alpha = 1, \dots, n-1$) и Q .

Что касается постоянной b , то она определяется из того условия, что задан поток излучения $H = \pi F$.

Представляя величину F в виде суммы Гаусса

$$F = 2 \sum_i a_i \eta_i I_i \quad (47)$$

и подставляя сюда значения I_i из (44), после небольших преобразований находим:

$$b = \frac{3}{4} F. \quad (48)$$

После нахождения величин I_i может быть определена и функция $B(\tau)$, являющаяся основной искомой величиной задачи. В принятом приближении

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \sum a_i I_i. \quad (49)$$

Подставляя и сюда значения I_i из (44) и учитывая (48), получаем:

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{\alpha} e^{-k_{\alpha} \tau} + \tau + Q \right]. \quad (50)$$

Знание функции $B(\tau)$ дает возможность вычислить интенсивность излучения $I(\tau, \eta)$, идущего на оптической глубине τ под любым углом $\arccos \eta$ к нормали. Для интенсивности излучения, выходящего из звезды, согласно формулам (23) и (50), имеем:

$$I(0, \eta) = \frac{3}{4} F \left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_{\alpha}}{1 + k_{\alpha} \eta} + \eta + Q \right]. \quad (51)$$

Найдем в виде примера функцию $B(\tau)$ в первом приближении. В данном случае $\eta_1 = -\eta_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_1 = a_{-1} = 1$. Поэтому вместо (38) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_1}{d\tau} &= I_1 - \frac{1}{2} (I_1 + I_{-1}), \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dI_{-1}}{d\tau} &= I_{-1} - \frac{1}{2} (I_1 + I_{-1}). \end{aligned} \quad (52)$$

Общее решение этой системы дается формулами (42) при $i = \pm 1$. Из условия на поверхности звезды находим $Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, согласно (50),

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F\left(\tau + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (53)$$

Интересно отметить, что эта простая формула дает точные значения $B(\tau)$ не только при больших значениях τ [как и формула (33)], но и при $\tau = 0$. Можно показать, что это свойство решения сохраняется и при последующих приближениях.

Изложенным методом Чандрасекар решил большое число задач теории переноса излучения. Поскольку полученные им результаты подробно изложены в его книге [8], мы на них останавливаться не будем.

В заключение этого параграфа заметим, что приближенный переход от интегро-дифференциального уравнения переноса излучения к системе линейных дифференциальных уравнений может быть осуществлен не только при помощи формулы Гаусса, но и при помощи других квадратурных формул. Недавно Е. С. Кузнецов [9] предложил представить интенсивность излучения $I(\tau, \eta)$ интерполяционным полиномом Лагранжа относительно η . Тогда интегральный член уравнения переноса выразится через значения интенсивности излучения $I_k(\tau)$ в узлах интерполяции η_k . Написав уравнение переноса излучения для этих узлов, получаем систему линейных дифференциальных уравнений для определения величин $I_k(\tau)$. Число и расположение узлов интерполяции можно выбирать произвольно. Соответственно этому получают различные формы приближенных уравнений переноса излучения.

§ 4. Вариационные методы

Для решения интегральных уравнений теории переноса излучения некоторыми авторами были предложены вариационные методы. Эти методы основаны на построении функционала, принимающего экстремальное значение при

подстановке в него решения рассматриваемого уравнения. Если такой функционал построен, то в него подставляется некоторая подходящая выбранная функция с неопределенными коэффициентами. Значения коэффициентов находятся из условия обращения в нуль первой вариации функционала. Определенная таким путем функция принимается в качестве приближенного решения данного интегрального уравнения.

Рассмотрим, как и выше, задачу о переносе излучения в звездной фотосфере. Как известно (гл. I, § 7), эта задача сводится к решению интегрального уравнения:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1 |\tau - t| B(t) dt. \quad (54)$$

В. Курганов [10, 11] для определения функции $B(\tau)$ предложил следующий вариационный метод. В звездной фотосфере сохраняется интегральный поток излучения, т. е.

$$2 \int_0^{\pi} I(\tau, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = F = \text{const.} \quad (55)$$

Подставляя в (55) выражение $I(\tau, \vartheta)$ через $B(\tau)$, получаем:

$$2 \int_{\tau}^{\infty} E_2(t - \tau) B(t) dt - 2 \int_0^{\tau} E_2(\tau - t) B(t) dt = F, \quad (56)$$

где

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xz} \frac{dz}{z^n}. \quad (57)$$

Легко видеть, что дифференцирование (56) по τ приводит к уравнению (54). Следовательно, если удовлетворяется уравнение (56), то удовлетворяется и (54).

Обозначим

$$\Phi(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\infty} E_2(t - \tau) B(t) dt - 2 \int_0^{\tau} E_2(\tau - t) B(t) dt \quad (58)$$

и рассмотрим функционал

$$\sigma = \int_0^{\infty} \left[\frac{\Phi(\tau)}{F} - 1 \right]^2 d\tau. \quad (59)$$

Если в (58) функция $B(\tau)$ является решением уравнения (54), то $\sigma = 0$. Если $B(\tau)$ — какая-либо другая функция, то $\sigma > 0$. Таким образом, решение уравнения (54) делает значение функционала (59) минимальным.

Введем вместо $B(\tau)$ новую функцию $q(\tau)$ с помощью соотношения

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F[\tau + q(\tau)] \quad (60)$$

и будем искать $q(\tau)$ в виде

$$q(\tau) = A_0 + A_2 E_2(\tau) + A_3 E_3(\tau) + \dots + A_n E_n(\tau). \quad (61)$$

Тогда σ будет функцией от A_0, A_2, \dots, A_n , и из условия минимума функционала (59) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_0, A_2, \dots, A_n :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial A_0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial A_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial A_n} = 0. \quad (62)$$

Подстановка найденных коэффициентов в (61) дает приближенное решение задачи, наилучшее «в среднем» при выбранной форме функции $q(\tau)$.

Возьмем для примера $q(\tau) = A_0$, т. е.

$$B(\tau) = \frac{3}{4} F(\tau + A_0). \quad (63)$$

Подставляя (63) в (59), находим:

$$\sigma = \frac{9}{4} [J_{33} A_0^2 - 2J_{34} A_0 + J_{44}], \quad (64)$$

где

$$J_{nm} = \int_0^{\infty} E_n(\tau) E_m(\tau) d\tau. \quad (65)$$

Из условия минимума σ получаем:

$$A_0 = \frac{J_{34}}{J_{33}} = 0,719. \quad (66)$$

Изложенным методом, принимая n равным последовательно 2, 3, 4, 5, 6, Курганов получил весьма точные значения искомой функции $B(\tau)$.

Для решения уравнения (54) были также предложены другие вариационные методы, основанные на использовании функционалов, отличающихся от (59). Один из таких методов применяли в своих работах Маршак [12], Дэвисон [13] и Ле Кейн [14]. Интересно отметить, что первоначально этот метод был предложен для решения проблемы диффузии нейтронов.

Если в уравнение (54) подставить выражение (60), то мы получим следующее неоднородное уравнение для определения функции $q(\tau)$:

$$q(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| q(t) dt + f_0(\tau), \quad (67)$$

где

$$f_0(\tau) = \frac{1}{2} E_3(\tau). \quad (68)$$

Можно показать, что если $q(\tau)$ удовлетворяет уравнению (67), то имеет экстремум функционал

$$\frac{\int_0^{\infty} q(\tau) \left[q(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \text{Ei} |\tau - t| q(t) dt \right] d\tau}{\left[\int_0^{\infty} q(\tau) f_0(\tau) d\tau \right]^2}. \quad (69)$$

Именно этот функционал и использовался в работах названных авторов. Для функции $q(\tau)$ бралось выражение (61).

Недавно Су Шу Хуан [15] использовал для решения уравнения (67) новый функционал. Он показал, что функ-

ционал

$$\int_0^{\infty} q(\tau) \left[q(\tau) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} q(t) \operatorname{Ei} |\tau - t| dt \right] d\tau - \\ - \int_0^{\infty} q(\tau) E_3(\tau) d\tau \quad (70)$$

будет стационарен, когда $q(\tau)$ является решением уравнения (67). Для приближенного вычисления функции $q(\tau)$ было взято выражение (61) при $n = 5$.

Су Шу Хуан при помощи функционалов, аналогичных (70), дал также приближенное решение задачи о контурах линий поглощения в звездных спектрах и задачи о диффузном отражении света средой бесконечно большой оптической толщины.

К изложенным вариационным методам примыкает метод, развитый в работах Менцела и Сена [16]. Он основан на представлении искомой функции в виде суммы типа (61) и определении коэффициентов из того условия, чтобы данное интегральное уравнение наилучшим образом удовлетворялось в среднем при различных весовых функциях. При помощи этого метода названные авторы решили ряд задач теории переноса излучения в звездных атмосферах.

§ 5. Методы, дающие точное решение

Получение точных решений интегральных уравнений теории переноса излучения в аналитической форме представляет большие трудности. До сих пор такие решения были найдены только для случая сферической индикатрисы рассеяния и бесконечно большой оптической толщины среды. Примененные методы основаны на использовании интегралов Фурье.

Хопф [17] дал точное решение интегрального уравнения (54). В частности, он впервые получил соотношение

$$B(0) = \frac{\sqrt{3}}{4} F. \quad (71)$$

Для асимптотического значения функции $q(\tau)$ им была найдена формула

$$q_{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{\sin^2 \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha - \operatorname{tg} \alpha} \right) d\alpha. \quad (72)$$

Вычисления дают $q_{\infty} = 0,710$.

В. А. Фок [18] нашел точное решение уравнения

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} K |\tau - t| B(t) dt + g(\tau) \quad (73)$$

при довольно общих предположениях относительно ядра и свободного члена. Из него при

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \operatorname{Ei} \tau, \quad g(\tau) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\xi}} \quad (74)$$

получается выражение для функции $B(\tau)$ в задаче о рассеянии среды бесконечно большой оптической толщины при освещении ее параллельными лучами, т. е. решение уравнения (1) в случае $\tau_0 = \infty$.

Отметим, что для интенсивности выходящего из среды излучения В. А. Фок получил представление

$$I(0, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} S \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} \zeta \quad (75)$$

и определил функцию $\varphi(\zeta)$ формулой

$$\operatorname{lg} \varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{lg} \left(1 - \lambda \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \right) \frac{\zeta du}{1 + \zeta^2 u^2}. \quad (76)$$

Здесь ζ — косинус угла падения излучения, η — косинус угла отражения.

Представление величины $I(0, \eta, \zeta)$ в виде (75) было найдено В. А. Фоком одновременно с В. А. Амбарцумяном (см. главу III).

ГЛАВА III

МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СЛОЕВ

Рассмотренные выше методы дают возможность определить функцию $B(\tau, \vartheta, \varphi)$, после чего путем некоторого интегрирования могут быть найдены и интенсивности излучения на любых оптических глубинах. В частности, таким путем находятся и интенсивности излучения, выходящего из среды. Следовательно, в указанных методах для определения интенсивностей выходящего из среды излучения необходимо предварительное определение функции $B(\tau, \vartheta, \varphi)$, т. е. рассмотрение светового режима внутри среды.

Между тем для многих практических применений необходимо знание лишь интенсивностей излучения, выходящего из среды (или соответствующих коэффициентов яркости). Возникает поэтому вопрос, нельзя ли находить коэффициенты яркости без предварительного определения функции $B(\tau, \vartheta, \varphi)$, т. е. нельзя ли составить уравнения, непосредственно определяющие эти наиболее интересные для практики величины. Ответ на поставленный вопрос был дан в работах В. А. Амбарцумяна.

В. А. Амбарцумян показал, что уравнения для определения коэффициентов яркости могут быть легко получены из основного интегрального уравнения теории рассеяния света. Одновременно он разработал другой метод для получения упомянутых уравнений, не связанный с использованием обычно употребляемых в теории рассеяния света уравнений переноса излучения и лучистого равновесия.

Второй метод В. А. Амбарцумяна был применен первоначально к задаче о диффузном отражении света средой бесконечно большой оптической толщины. Для этого использовался следующий «принцип инвариантности»: прибавление к данной среде слоя бесконечно малой оптической толщины не изменяет отражательной способности среды. Уравнение для коэффициента яркости находилось в результате рассмотрения процессов, происходящих в добавочном слое.

В общем виде указанный метод заключается в мысленном сложении двух слоев произвольной оптической толщины. Уравнения для определения коэффициентов яркости получаются путем установления связей между интенсивностями излучения, выходящего из всей среды, и интенсивностями излучения на границе двух слоев.

Оба метода В. А. Амбарцумяна приводят к выяснению структуры коэффициентов яркости, т. е. к выражению этих сложных функций от нескольких аргументов через некоторые вспомогательные функции, зависящие только от одного аргумента. Для определения же вспомогательных функций получаются системы функциональных уравнений.

Как методы В. А. Амбарцумяна, так и полученные им функциональные уравнения играют важную роль в современной теории рассеяния света. Их рассмотрению будет посвящена вся настоящая глава.

§ 1. Одномерная среда

Приступая к изложению теории В. А. Амбарцумяна, мы сначала займемся задачей о рассеянии света в одномерной среде. Рассмотрение этой задачи дает нам наиболее простой пример употребления метода сложения слоев.

Пусть имеется одномерная среда оптической толщины τ , освещенная с одной стороны излучением интенсивности I_0 . Будем считать, что при элементарном акте рассеяния, происходящем в среде, вероятность выживания кванта равна λ , а вероятность рассеяния вперед и назад равна соответственно x и $1-x$. Найдем интенсивность излучения, отраженного и пропущенного средой [1].

Для решения поставленной задачи разобьем данную среду на два слоя с оптическими толщинами τ_1 и τ_2 и введем в рассмотрение, наряду с интенсивностью отраженного света I_1 и интенсивностью пропущенного света I_2 , также интенсивности излучения I_3 и I_4 на границе между слоями (рис. 9).

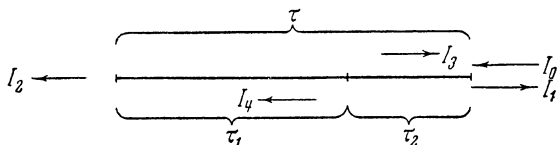


Рис. 9.

Обозначим через r и q искомые коэффициенты отражения и пропускания. Тогда по определению имеем:

$$I_1 = r(\tau_1 + \tau_2) I_0, \quad (1)$$

$$I_2 = q(\tau_1 + \tau_2) I_0. \quad (2)$$

Кроме того, мы можем написать:

$$I_1 = r(\tau_2) I_0 + q(\tau_2) I_3, \quad (3)$$

$$I_2 = q(\tau_1) I_4, \quad (4)$$

$$I_3 = r(\tau_1) I_4, \quad (5)$$

$$I_4 = q(\tau_2) I_0 + r(\tau_2) I_3. \quad (6)$$

Из трех последних соотношений вытекает:

$$I_2 = \frac{q(\tau_1) q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1) r(\tau_2)} I_0, \quad (7)$$

$$I_3 = \frac{r(\tau_1) q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1) r(\tau_2)} I_0. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (2), находим:

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1) q(\tau_2)}{1 - r(\tau_1) r(\tau_2)}. \quad (9)$$

Кроме того, из (1), (3) и (8) получаем:

$$r(\tau_1 + \tau_2) = r(\tau_2) + \frac{q^2(\tau_2) r(\tau_1)}{1 - r(\tau_1) r(\tau_2)}. \quad (10)$$

Мы пришли к двум функциональным уравнениям (9) и (10) для определения неизвестных функций $r(\tau)$ и $q(\tau)$.

Решим сначала полученные уравнения для случая чистого рассеяния. В этом случае

$$r(\tau) = 1 - q(\tau). \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9), мы получаем одно функциональное уравнение для определения величины $q(\tau)$:

$$q(\tau_1 + \tau_2) = \frac{q(\tau_1)q(\tau_2)}{q(\tau_1) + q(\tau_2) - q(\tau_1)q(\tau_2)}. \quad (12)$$

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{1}{q(\tau_1 + \tau_2)} - 1 = \frac{1}{q(\tau_1)} - 1 + \frac{1}{q(\tau_2)} - 1.$$

Отсюда видно, что величина

$$\frac{1}{q(\tau)} - 1$$

должна быть линейной однородной функцией от τ . Обозначая ее через $a\tau$, находим:

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + a\tau}. \quad (13)$$

Это и есть решение функционального уравнения (12).

Для определения постоянной a следует рассмотреть пропускание излучения слоем малой оптической толщины. При малом τ вместо формулы (13) имеем:

$$q(\tau) = 1 - a\tau. \quad (14)$$

С другой стороны, в рассматриваемом случае величина $q(\tau)$ может быть найдена из следующих соображений. Если на среду падает излучение интенсивности I_0 , то при малом τ в среде будет поглощена энергия $I_0\tau$. Как мы уже условились считать, из поглощенной энергии отражается назад доля $1 - x$. Поэтому интенсивность отраженного средой излучения будет равна $(1 - x)I_0\tau$. Следовательно, $r(\tau) = (1 - x)\tau$, а значит,

$$q(\tau) = 1 - (1 - x)\tau. \quad (15)$$

Сравнивая между собой соотношения (14) и (15), мы получаем, что

$$a = 1 - x, \quad (16)$$

и подставляя это значение a в формулу (13), находим окончательно

$$q(\tau) = \frac{1}{1 + (1-x)\tau}. \quad (17)$$

Найдем теперь решение уравнений (9) и (10) в общем случае, когда наряду с рассеянием в среде происходит и истинное поглощение излучения.

В данном случае мы примем, что оптическая толщина одного из слоев, на которые разбивается рассматриваемая среда, бесконечно мала. Это позволит нам от функциональных уравнений (9) и (10) перейти к дифференциальным уравнениям.

Предварительно напишем выражения для коэффициентов отражения и пропускания света слоем малой оптической толщины. Соответствующие выражения в случае чистого рассеяния уже были приведены выше. При произвольном λ и оптической толщине среды $d\tau$ мы аналогично получаем:

$$r = \lambda(1-x)d\tau, \quad (18)$$

$$q = 1 - (1-\lambda x)d\tau. \quad (19)$$

Заменим в уравнениях (9) и (10) τ_1 на $d\tau$, τ_2 на τ и воспользуемся формулами (18) и (19). В результате находим:

$$q(\tau + d\tau) = \frac{q(\tau)[1 - (1-\lambda x)d\tau]}{1 - r(\tau)\lambda(1-x)d\tau},$$

$$r(\tau + d\tau) = r(\tau) + \frac{q^2(\tau)\lambda(1-x)d\tau}{1 - r(\tau)\lambda(1-x)d\tau},$$

или, пренебрегая членами, содержащими $d\tau^2$:

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = \lambda(1-x)q(\tau)r(\tau) - (1-\lambda x)q(\tau), \quad (20)$$

$$\frac{dr(\tau)}{d\tau} = \lambda(1-x)q^2(\tau). \quad (21)$$

Полученные дифференциальные уравнения решаются без труда. Деля (20) на (21), имеем:

$$q dq = r dr - \frac{1 - \lambda x}{\lambda(1-x)} dr. \quad (22)$$

Интегрирование этого уравнения при условии, что $q = 1$ при $r = 0$ (это соответствует случаю $\tau = 0$), дает:

$$1 + r^2 - \frac{2(1-\lambda x)}{\lambda(1-x)} r = q^2. \quad (23)$$

Мы получили интересное соотношение, связывающее коэффициенты r и q .

Обозначая корни квадратичного трехчлена в левой части (23) через r_0 и $\frac{1}{r_0}$, вместо соотношения (23) получаем:

$$(r_0 - r) \left(\frac{1}{r_0} - r \right) = q^2. \quad (24)$$

Мы возьмем $r_0 \leq 1$. Тогда будет $r = r_0$ при $q = 0$. Но $q = 0$ при $\tau = \infty$. Следовательно, r_0 представляет собой коэффициент отражения среды бесконечно большой оптической толщины. Заметим, что формула (24) получается непосредственно из (10) при $\tau_1 = \infty$ и $\tau_2 = \tau$.

При помощи формулы (24) уравнение (21) переписывается в виде

$$\frac{dr}{(r_0 - r) \left(\frac{1}{r_0} - r \right)} = \lambda(1-x) d\tau. \quad (25)$$

Интегрируя это уравнение при условии, что $r = 0$ при $\tau = 0$, получаем:

$$r = r_0 \frac{1 - e^{-2k\tau}}{1 - r_0^2 e^{-2k\tau}}, \quad (26)$$

где

$$k = \frac{\lambda}{2} (1-x) \frac{1-r_0^2}{r_0}. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (24), находим:

$$q = \frac{(1-r_0^2) e^{-k\tau}}{1-r_0^2 e^{-2k\tau}}. \quad (28)$$

Формулы (26) и (28) определяют искомые величины r и q .

Будем теперь считать, что среда имеет бесконечно большую оптическую толщину, и найдем отражательную способность среды при помощи сформулированного выше «принципа инвариантности».

Добавим к рассматриваемой среде слой малой оптической толщины $\Delta\tau$ с такими же оптическими свойствами, что и вся среда (рис. 10). Очевидно, что от прибавления этого слоя коэффициент отражения среды не изменится.

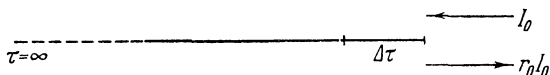


Рис. 10.

Коэффициент отражения, как и раньше, мы обозначим через r_0 . Чтобы определить его, надо найти интенсивность излучения, отраженного средой с добавочным слоем, и приравнять ее интенсивности излучения, отраженного средой без добавочного слоя, т. е. величине $r_0 I_0$.

Легко видеть, что интенсивность излучения, отраженного средой с добавочным слоем, складывается из следующих частей (при отбрасывании членов порядка $\Delta\tau^2$):

1. Интенсивности излучения, прошедшего через добавочный слой, отраженного от среды и снова прошедшего через добавочный слой:

$$I_0 (1 - \Delta\tau) r_0 (1 - \Delta\tau).$$

2. Интенсивности излучения, рассеянного добавочным слоем назад:

$$I_0 \Delta\tau \lambda (1 - x).$$

3. Интенсивности излучения, рассеянного добавочным слоем вперед и отраженного от среды:

$$I_0 \Delta\tau \lambda x r_0.$$

4. Интенсивности излучения, отраженного от среды и рассеянного добавочным слоем вперед:

$$I_0 r_0 \Delta\tau \lambda x.$$

5. Интенсивности излучения, отраженного от среды, рассеянного добавочным слоем назад и снова отраженного от среды:

$$I_0 r_0 \Delta \tau \lambda (1 - x) r_0.$$

Складывая все перечисленные интенсивности и приравнявая их $I_0 r_0$, имеем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_0 r_0 = I_0 (1 - \Delta \tau) r_0 (1 - \Delta \tau) + I_0 \Delta \tau \lambda (1 - x) + I_0 \Delta \tau \lambda x r_0 + \\ + I_0 r_0 \Delta \tau \lambda x + I_0 r_0 \Delta \tau \lambda (1 - x) r_0. \end{aligned}$$

Отсюда получается следующее уравнение для определения величины r_0 :

$$r_0^2 - 2 \frac{1 - \lambda x}{\lambda (1 - x)} r_0 + 1 = 0, \quad (29)$$

совпадающее с полученным выше.

Разумеется, найденные в этом параграфе результаты можно получить также обычным способом, т. е. путем решения уравнений переноса излучения и лучистого равновесия (см. гл. I, § 9). Однако наша цель состояла не столько в получении результатов, сколько в выяснении метода.

§ 2. Диффузное отражение света

Применим метод, описанный в конце предыдущего параграфа, к решению задачи о диффузном отражении света плоским слоем бесконечно большой оптической толщины. Будем считать сначала, что индикатриса рассеяния является сферической [2].

Пусть среда освещена параллельными лучами, создающими освещенность перпендикулярной к ним площадки, равную πS . Обозначим через ζ косинус угла падения лучей, через η — косинус угла отражения, через $I(\eta, \zeta)$ — интенсивность отраженного света.

Добавим к среде слой малой оптической толщины $\Delta \tau$ (рис. 11). Так как отражательная способность среды бесконечно большой оптической толщины не изменится от прибавления этого слоя, то мы можем интенсивность излучения, отраженного от новой границы среды, приравнять

прежней интенсивности. Это дает нам уравнение, определяющее непосредственно величину $I(\eta, \zeta)$.

Обозначим новую границу среды через A' , а прежнюю — через A . Чтобы написать выражение для интенсивности излучения, отраженного от границы A' (при отбрасывании членов порядка $\Delta\tau^2$), мы должны принять во внимание, как и в одномерном случае, следующие процессы:

1) Излучение от внешних источников света, ослабленное вследствие поглощения в дополнительном слое, падает на границу A , отражается от нее и затем выходит наружу, по пути снова испытывая ослабление. Очевидно, интенсивность выходящего наружу излучения будет равна

$$I(\eta, \zeta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\zeta}\right) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right).$$

2) Дополнительный слой рассеивает часть падающего на него прямого излучения в заданном направлении (определяемом заданием η). Соответствующая интенсивность излучения будет равна

$$\frac{\lambda}{4} S \frac{\Delta\tau}{\eta}.$$

3) Часть рассеянного дополнительным слоем прямого излучения направляется в сторону границы A и от нее частично отражается. Выражение для интенсивности этого излучения таково:

$$\frac{\lambda}{2} \Delta\tau \int_0^1 I(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}.$$

4) Прямое излучение отражается от границы A и затем рассеивается дополнительным слоем в заданном направле-

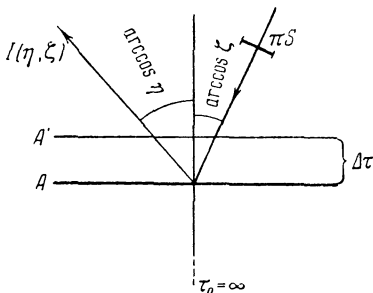


Рис. 11.

нии. Интенсивность этого излучения равна

$$\frac{\lambda}{2} \frac{\Delta\tau}{\eta} \int_0^1 I(\eta', \zeta) d\eta'.$$

5) Прямое излучение отражается от поверхности A , рассеивается добавочным слоем обратно и снова отражается поверхностью A . Для интенсивности излучения, выходящего из среды в результате этого процесса, получаем:

$$\lambda \Delta\tau \int_0^1 \frac{I(\eta, \eta'')}{S} \frac{d\eta''}{\eta''} \int_0^1 I(\eta', \zeta) d\eta'.$$

Складывая все написанные выше члены и приравнявая их величине $I(\eta, \zeta)$, находим:

$$I(\eta, \zeta) \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{\lambda}{4} S \frac{1}{\eta} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 I(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ + \frac{\lambda}{2\eta} \int_0^1 I(\eta', \zeta) d\eta' + \lambda \int_0^1 \frac{I(\eta, \eta'')}{S} \frac{d\eta''}{\eta''} \int_0^1 I(\eta', \zeta) d\eta'. \quad (30)$$

Это и есть искомое уравнение, определяющее интенсивность излучения $I(\eta, \zeta)$.

Для упрощения полученного уравнения перейдем от интенсивности излучения $I(\eta, \zeta)$ к коэффициенту яркости $\rho(\eta, \zeta)$ посредством соотношения

$$I(\eta, \zeta) = S\rho(\eta, \zeta)\zeta. \quad (31)$$

Тогда вместо уравнения (30) будем иметь:

$$\rho(\eta, \zeta)(\eta + \zeta) = \\ = \frac{\lambda}{4} \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta' \right] \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right]. \quad (32)$$

Легко видеть, что если уравнению (32) удовлетворяет функция $\rho(\eta, \zeta)$, то ему будет также удовлетворять функция $\rho(\zeta, \eta)$. Поэтому при допущении единственности реше-

ния уравнения (32) должно быть

$$\rho(\eta, \zeta) = \rho(\zeta, \eta), \quad (33)$$

т. е. коэффициент яркости должен быть симметричной функцией относительно углов падения и отражения. Как уже говорилось в гл. I, § 6, этот вывод следует также из физических соображений.

Вследствие симметричности функции $\rho(\eta, \zeta)$ мы заключаем, что в правой части уравнения (32) находится произведение некоторой функции, зависящей только от η , на функцию того же вида, зависящую только от ζ . Обозначим

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta'. \quad (34)$$

Тогда коэффициент яркости ρ будет определяться формулой

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (35)$$

Таким образом, функцию $\rho(\eta, \zeta)$, зависящую от двух аргументов, мы выразили через функцию $\varphi(\eta)$, зависящую только от одного аргумента. Что же касается функции $\varphi(\eta)$, то она будет определяться уравнением

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \quad (36)$$

получаемым при подстановке (35) в (34).

Уравнение (36) без труда решается численно. В таблице 4 (стр. 88) приведены результаты этого решения для некоторых значений параметра λ .

Если для данного значения λ функция $\varphi(\eta)$ известна, то при помощи формулы (35) легко могут быть найдены значения коэффициента яркости $\rho(\eta, \zeta)$ для любых комбинаций углов падения и отражения. В виде примера на стр. 88 приводится таблица 5, в которой даны значения коэффициента яркости $\rho(\eta, \zeta)$ для случая чистого рассеяния ($\lambda = 1$).

Так же, как при сферической индикатрисе рассеяния, может быть решена задача о диффузном отражении света

Таблица 4

Значения функции $\varphi(\eta)$

$\lambda \backslash \eta$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,06	1,07	1,09	1,11	1,14	1,17	1,25
0,2	1,09	1,11	1,15	1,18	1,23	1,29	1,45
0,3	1,11	1,14	1,19	1,24	1,30	1,39	1,64
0,4	1,13	1,17	1,22	1,28	1,36	1,48	1,83
0,5	1,14	1,19	1,25	1,32	1,41	1,56	2,01
0,6	1,15	1,20	1,27	1,35	1,46	1,63	2,19
0,7	1,16	1,22	1,29	1,38	1,50	1,69	2,38
0,8	1,17	1,23	1,31	1,40	1,54	1,75	2,55
0,9	1,18	1,24	1,32	1,42	1,57	1,80	2,73
1,0	1,18	1,25	1,34	1,44	1,60	1,85	2,91

Таблица 5

Коэффициент яркости $\rho(\eta, \zeta)$ для случая чистого рассеяния

$\zeta \backslash \eta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	∞	3,12	1,81	1,37	1,14	1,01	0,91	0,85	0,80	0,76	0,73
0,1	3,12	1,95	1,51	1,28	1,14	1,05	0,98	0,93	0,88	0,85	0,83
0,2	1,81	1,51	1,32	1,19	1,11	1,04	0,99	0,96	0,93	0,90	0,88
0,3	1,37	1,28	1,19	1,13	1,07	1,03	1,00	0,98	0,95	0,93	0,92
0,4	1,14	1,14	1,11	1,07	1,05	1,02	1,00	0,99	0,97	0,96	0,95
0,5	1,01	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,00	1,00	0,99	0,98	0,98
0,6	0,91	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,7	0,85	0,93	0,96	0,98	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02
0,8	0,80	0,88	0,93	0,95	0,97	0,99	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03
0,9	0,76	0,85	0,90	0,93	0,96	0,98	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04
1,0	0,73	0,83	0,88	0,92	0,95	0,98	1,00	1,02	1,03	1,04	1,06

плоским слоем бесконечно большой оптической толщины при произвольной индикатрисе рассеяния $x(\gamma)$ [3].

При произвольной индикатрисе рассеяния коэффициент яркости зависит, вообще говоря, не только от углов падения и отражения, но и от разности азимутов отражен-

ного и падающего лучей. Мы его обозначим через $\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0)$. Учитывая также, что косинус угла между двумя направлениями, характеризуемыми углами $\arccos \eta', \varphi'$ и $\arccos \zeta, \varphi_0$, равен

$$\cos \gamma' = \eta' \zeta + \sqrt{(1 - \eta'^2)(1 - \zeta^2)} \cos(\varphi' - \varphi_0), \quad (37)$$

мы будем обозначать индикатрису рассеяния $x(\gamma')$ в виде $x(\eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0)$.

Используя инвариантность коэффициента яркости по отношению к добавлению слоя малой оптической толщины $\Delta\tau$, получаем следующее уравнение для определения величины $\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0)$:

$$\begin{aligned} (\eta + \zeta) \rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \frac{\lambda}{4} x(-\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi} \zeta \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') \rho(\eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) d\eta' + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi} \eta \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \varphi - \varphi') x(\eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) d\eta' + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi^2} \eta \zeta \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 x(-\eta', \eta'', \varphi' - \varphi_0) \rho(\eta'', \zeta, \varphi'' - \varphi_0) d\eta'', \end{aligned} \quad (38)$$

являющееся обобщением уравнения (32).

Будем считать, что индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\cos \gamma). \quad (39)$$

Тогда на основании теоремы сложения шаровых функций $x(\gamma)$ может быть представлена в виде

$$x(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^n q_m(\eta, \zeta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \quad (40)$$

где

$$q_m(\eta, \zeta) = \sum_{i=m}^n c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\zeta); \quad (41)$$

$$c_{i0} = x_i, \quad c_{im} = 2x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}. \quad (42)$$

В форме ряда, аналогичного (40), представляется и коэффициент яркости:

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) = \sum_{m=0}^n f_m(\eta, \zeta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (43)$$

Подставим (40) и (43) в уравнение (38). Производя интегрирование по φ' и φ'' и приравнявая коэффициенты при $\cos m(\varphi - \varphi_0)$ в обеих частях полученного равенства, находим:

$$\begin{aligned} & (\eta + \zeta) f_m(\eta, \zeta) = \\ & = \frac{\lambda}{4} q_m(-\eta, \zeta) + \frac{2}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 q_m(\eta, \eta') f_m(\eta', \zeta) d\eta' + \\ & \quad + \frac{2}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 q_m(\eta', \zeta) f_m(\eta, \eta') d\eta' + \\ & \quad + \frac{4}{(2 - \delta_{0m})^2} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') d\eta' \int_0^1 q_m(-\eta', \eta'') f_m(\eta'', \zeta) d\eta'', \quad (44) \end{aligned}$$

где $\delta_{00} = 1$ и $\delta_{0m} = 0$ при $m > 0$. Таким образом, для определения каждой из функций $f_m(\eta, \zeta)$ мы получили отдельное функциональное уравнение.

Подставим теперь (41) в (44). После небольших преобразований имеем:

$$\begin{aligned} & (\eta + \zeta) f_m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=m}^n (-1)^{i+m} c_{im} \times \\ & \times \left[P_i^m(\eta) + 2 \frac{(-1)^{i+m}}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') d\eta' \right] \times \\ & \times \left[P_i^m(\zeta) + 2 \frac{(-1)^{i+m}}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 f_m(\eta', \eta) P_i^m(\eta') d\eta' \right]. \quad (45) \end{aligned}$$

В силу симметрии функций $f_m(\eta, \zeta)$ уравнение (45) можно переписать в виде

$$f_m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \sum_{i=m}^n (-1)^{i+m} \frac{c_{im} \varphi_i^m(\eta) \varphi_i^m(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (46)$$

где

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + 2 \frac{(-1)^{i+m}}{2 - \delta_{0m}} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') d\eta'. \quad (47)$$

Таким образом, функции $f_m(\eta, \zeta)$, зависящие от двух аргументов, оказываются выраженными через функции $\varphi_i^m(\eta)$, зависящие только от одного аргумента.

Для определения вспомогательных функций $\varphi_i^m(\eta)$ при подстановке (46) в (47) получается следующая система функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi_i^m(\eta) = & P_i^m(\eta) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=m}^n (-1)^{i+k} x_k \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \eta \int_0^1 \frac{\varphi_k^m(\eta) \varphi_k^m(\eta')}{\eta + \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' \quad (48) \\ & (i = m, m+1, \dots, n). \end{aligned}$$

При заданном m число уравнений системы равно $n - m + 1$.

Итак, мы видим, что при индикатрисе рассеяния, представленной в форме (39), коэффициент яркости выражается через $n + 1$ функций $f_m(\eta, \zeta)$, каждая из которых в свою очередь выражается через $n - m + 1$ функций $\varphi_i^m(\eta)$. Таким образом, при заданном n для нахождения функции $\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0)$ надо найти $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ вспомогательных функций $\varphi_i^m(\eta)$.

Рассмотрим в виде примера случай простейшей несферической индикатрисы рассеяния

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma. \quad (49)$$

В этом случае коэффициент яркости равен

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) = f_0(\eta, \zeta) + f_1(\eta, \zeta) \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (50)$$

а функции $f_0(\eta, \zeta)$ и $f_1(\eta, \zeta)$, согласно (46), имеют следующую структуру:

$$f_0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\zeta) - x_1 \varphi_1^0(\eta) \varphi_1^0(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (51)$$

$$f_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\varphi_1^1(\eta) \varphi_1^1(\zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (52)$$

Вспомогательные функции $\varphi_0^0(\eta)$ и $\varphi_1^0(\zeta)$ определяются из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^0(\eta) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \\ \varphi_1^0(\eta) &= \eta - \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')}{\eta + \eta'} \eta' d\eta' + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')}{\eta + \eta'} \eta' d\eta', \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

а вспомогательная функция $\varphi_1^1(\eta)$ — из уравнения

$$\varphi_1^1(\eta) = \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{\lambda}{4} x_1 \eta \varphi_1^1(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^1(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta'. \quad (54)$$

Уравнения (53) и (54) легко решаются численно методом последовательных приближений.

Отметим, что из системы (53) вытекает простое соотношение между функциями $\varphi_0^0(\eta)$ и $\varphi_1^0(\eta)$, которым можно воспользоваться при решении системы. Для установления его во втором из уравнений (53) заменим:

$$\frac{\eta'}{\eta + \eta'} = 1 - \frac{\eta}{\eta + \eta'}.$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(\eta) = \eta - \frac{\lambda}{2} \eta \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \varphi_0^0(\eta') d\eta' + \frac{\lambda}{2} x_1 \eta \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \varphi_1^0(\eta') d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{2} \eta^2 \varphi_0^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta' - \frac{\lambda}{2} x_1 \eta^2 \varphi_1^0(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta'. \end{aligned}$$

Последние два члена на основании первого из уравнений (53) равны

$$\eta [\varphi_0^0(\eta) - 1].$$

Поэтому, вводя обозначения

$$\alpha = \int_0^1 \varphi_0^0(\eta) d\eta, \quad \beta = \int_0^1 \varphi_1^0(\eta) d\eta,$$

находим:

$$\varphi_1^0(\eta) = \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha\right) \eta \varphi_0^0(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2} x_1 \beta \eta}. \quad (55)$$

В таблицах 6, 7 и 8 даны значения вспомогательных функций $\varphi_0^0(\eta)$, $\varphi_1^0(\eta)$ и $\varphi_1^1(\eta)$ для индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$ и для разных значений параметра λ .

Таблица 6

Значения функции $\varphi_0^0(\eta)$ для индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\eta \backslash \lambda$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,05	1,07	1,09	1,11	1,13	1,17	1,25
0,2	1,08	1,11	1,14	1,17	1,22	1,28	1,45
0,3	1,10	1,13	1,17	1,22	1,28	1,37	1,64
0,4	1,11	1,15	1,19	1,25	1,32	1,44	1,83
0,5	1,12	1,16	1,21	1,27	1,36	1,50	2,01
0,6	1,12	1,16	1,22	1,29	1,39	1,54	2,19
0,7	1,12	1,17	1,23	1,30	1,41	1,60	2,38
0,8	1,12	1,17	1,23	1,31	1,43	1,64	2,55
0,9	1,12	1,17	1,23	1,32	1,44	1,67	2,73
1,0	1,12	1,17	1,23	1,32	1,45	1,70	2,91

Таблица 7

Значения функции $\varphi_1^0(\eta)$ для индикатрисы рассеяния
 $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\eta \backslash \lambda$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,08	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0
0,2	0,17	0,16	0,15	0,14	0,12	0,09	0
0,3	0,26	0,25	0,24	0,22	0,19	0,15	0
0,4	0,36	0,34	0,32	0,30	0,27	0,21	0
0,5	0,46	0,44	0,42	0,39	0,35	0,28	0
0,6	0,56	0,54	0,51	0,48	0,43	0,35	0
0,7	0,65	0,64	0,61	0,57	0,52	0,43	0
0,8	0,76	0,73	0,71	0,67	0,61	0,51	0
0,9	0,86	0,84	0,81	0,77	0,70	0,59	0
1,0	0,96	0,94	0,91	0,87	0,80	0,67	0

Таблица 8

Значения функции $\varphi_1^1(\eta)$ для индикатрисы рассеяния
 $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\eta \backslash \lambda$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05
0,2	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06
0,3	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
0,4	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02
0,5	0,90	0,92	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98
0,6	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,90	0,91
0,7	0,75	0,76	0,77	0,78	0,79	0,80	0,82
0,8	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
0,9	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50
1,0	0	0	0	0	0	0	0

Интересно, что при $\lambda = 1$ значения функции $\varphi_0^0(\eta)$ совпадают с значениями функции $\varphi(\eta)$ для сферической индикатрисы рассеяния, а $\varphi_1^0(\eta) = 0$. Легко убедиться

путем непосредственного рассмотрения системы (53), что это справедливо при любых значениях x_1 . Таким образом, в случае чистого рассеяния усредненный по азимуту коэффициент яркости при индикатрисе рассеяния

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$$

в точности такой же, как и при сферической индикатрисе рассеяния.

§ 3. Альbedo среды

Для практических применений иногда важно знать не интенсивность излучения, выходящего из среды в разных направлениях, а полную энергию, выходящую из среды через единицу поверхности за единицу времени. Эта энергия, выраженная в долях энергии, падающей от внешних источников света на единицу поверхности среды за единицу времени, называется, как известно, *альbedo* среды. Мы обозначим альbedo среды через A .

Выразим альbedo среды A через коэффициент яркости ρ . Если интенсивность излучения, выходящего из среды, равна $I(\eta, \zeta, \varphi)$, то количество энергии, выходящее из среды через единицу поверхности за единицу времени внутри телесного угла $d\omega$, будет равно

$$I(\eta, \zeta, \varphi) \eta d\omega,$$

а полное количество энергии, выходящее через ту же поверхность за то же время, будет равно

$$E = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 I(\eta, \zeta, \varphi) \eta d\eta. \quad (56)$$

Выражая интенсивность излучения $I(\eta, \zeta, \varphi)$ через коэффициент яркости $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$, получаем:

$$E = S\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(\eta, \zeta, \varphi) \eta d\eta. \quad (57)$$

С другой стороны, количество энергии, падающее на единицу поверхности среды за единицу времени от внеш-

них источников света, будет равно

$$E_0 = \pi S \zeta. \quad (58)$$

Так как альbedo среды равно $A = \frac{E}{E_0}$, то из формул (57) и (58) находим:

$$A(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho(\eta, \zeta, \varphi) \eta d\eta. \quad (59)$$

В случае сферической индикатрисы рассеяния формула (59) упрощается и принимает вид

$$A(\zeta) = 2 \int_0^1 \rho(\eta, \zeta) \eta d\eta. \quad (60)$$

Отметим, что при постоянном коэффициенте яркости

$$A = \rho.$$

Для среды бесконечно большой оптической толщины легко получить простые формулы, выражающие альbedo $A(\zeta)$ через введенные выше вспомогательные функции.

При сферической индикатрисе рассеяния, подставляя в формулу (60) выражение для коэффициента яркости, даваемое формулой (35), находим:

$$\begin{aligned} A(\zeta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} \eta d\eta = \\ &= \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta - \frac{\lambda}{2} \zeta \varphi(\zeta) \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta. \end{aligned}$$

При помощи уравнения (36), определяющего функцию $\varphi(\eta)$, это выражение преобразуется к виду

$$A(\zeta) = 1 - \varphi(\zeta) \left[1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta \right].$$

Но интеграл

$$\alpha_0 = \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta$$

легко определяется из того же уравнения (36). Интегрируя обе части этого уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta &= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')}{\eta+\eta'} \eta d\eta d\eta' = \\ &= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta \int_0^1 \varphi(\eta') d\eta' - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta')}{\eta+\eta'} \eta' d\eta d\eta', \end{aligned}$$

откуда вытекает следующее квадратное уравнение для определения α_0 :

$$\frac{\lambda}{4} \alpha_0^2 - \alpha_0 + 1 = 0.$$

Это уравнение дает:

$$\alpha_0 = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}),$$

где перед корнем взят знак «минус», так как должно быть $\alpha_0 = 1$ при $\lambda = 0$. Поэтому для альбеда $A(\zeta)$ получаем окончательно:

$$A(\zeta) = 1 - \varphi(\zeta) \sqrt{1 - \lambda}. \quad (61)$$

В случае простейшей несферической индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ для нахождения альбеда $A(\zeta)$ следует подставить в формулу (59) выражение (50). Делая это, находим:

$$A(\zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta)\varphi_0^0(\zeta) - x_1\varphi_1^0(\eta)\varphi_1^0(\zeta)}{\eta+\zeta} \eta d\eta,$$

или, учитывая второе из уравнений (53),

$$A(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta} \varphi_1^0(\zeta). \quad (62)$$

Заметим, что если мы перейдем здесь от функции $\varphi_1^0(\zeta)$ к функции $\varphi_0^0(\zeta)$ посредством соотношения (55) и положим $x_1 = 0$, то формула (62) превратится в формулу (61).

В таблицах 9 и 10 на стр. 99 приводятся значения альbedo плоского слоя бесконечно большой оптической толщины,

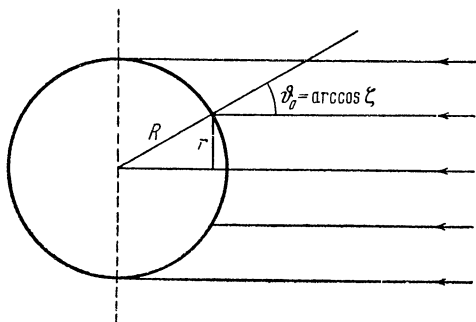


Рис. 12.

вычисленные для индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ при $x_1 = 0$ (сферическая индикатриса) и при $x_1 = 1$ соответственно.

В планетной астрономии, кроме альbedo плоского слоя, употребляется еще так называемое *сферическое альbedo*. Эта величина представляет собой отношение энергии, отраженной всей планетой, к энергии, полученной планетой от Солнца. Если альbedo плоского слоя известно, то легко определить и сферическое альbedo.

Обозначим радиус планеты через R (рис. 12). Тогда энергия, полученная планетой от Солнца, будет равна $\pi R^2 \cdot \pi S$. С другой стороны, обозначая через r расстояние данной точки на диске планеты от центра видимого диска, находим, что энергия, отраженная планетой, будет равна

$$2\pi \int_0^R A(\zeta) \pi S r dr.$$

Таблица 9

Альбе́до плоско́го сло́я $A(\zeta)$ при сферической индикатрисе
рассеяния

$\zeta \backslash \lambda$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,23	0,29	0,37	0,45	0,55	0,68	1,00
0,1	0,18	0,24	0,31	0,39	0,49	0,63	1,00
0,2	0,16	0,21	0,28	0,35	0,45	0,59	1,00
0,3	0,14	0,19	0,25	0,32	0,42	0,56	1,00
0,4	0,13	0,17	0,23	0,30	0,39	0,53	1,00
0,5	0,12	0,16	0,21	0,28	0,37	0,51	1,00
0,6	0,11	0,15	0,20	0,26	0,35	0,49	1,00
0,7	0,10	0,14	0,19	0,25	0,33	0,47	1,00
0,8	0,10	0,13	0,17	0,23	0,31	0,45	1,00
0,9	0,09	0,12	0,16	0,22	0,30	0,43	1,00
1,0	0,08	0,12	0,15	0,21	0,29	0,41	1,00

Таблица 10

Альбе́до плоско́го сло́я $A(\zeta)$ при индикатрисе рассеяния
 $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\zeta \backslash \lambda$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,22	0,28	0,36	0,43	0,53	0,66	1,00
0,1	0,17	0,23	0,29	0,36	0,46	0,59	1,00
0,2	0,14	0,19	0,25	0,32	0,41	0,55	1,00
0,3	0,12	0,16	0,22	0,28	0,37	0,51	1,00
0,4	0,10	0,14	0,19	0,25	0,34	0,48	1,00
0,5	0,09	0,12	0,17	0,22	0,31	0,45	1,00
0,6	0,08	0,11	0,15	0,20	0,28	0,42	1,00
0,7	0,07	0,09	0,13	0,18	0,26	0,39	1,00
0,8	0,06	0,08	0,12	0,16	0,24	0,37	1,00
0,9	0,05	0,07	0,10	0,15	0,22	0,35	1,00
1,0	0,04	0,06	0,09	0,13	0,20	0,33	1,00

Но $r dr = R^2 \zeta d\zeta$. Поэтому последнее выражение переписывается так:

$$2\pi R^2 \cdot \pi S \int_0^1 A(\zeta) \zeta d\zeta.$$

Отсюда, обозначая сферическое альbedo через A^* , получаем:

$$A^* = 2 \int_0^1 A(\zeta) \zeta d\zeta. \quad (63)$$

В таблице 11 даны значения сферического альbedo, вычисленные для среды бесконечно большой оптической толщины при индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$. Вычисления производились по формуле (63) с использованием таблиц 9 и 10.

Таблица 11

Сферическое альbedo A^*
($\tau_0 = \infty$, $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$)

λ x_1	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,11	0,15	0,19	0,26	0,34	0,48	1,00
0,5	0,09	0,13	0,17	0,23	0,31	0,45	1,00
1,0	0,07	0,10	0,14	0,20	0,28	0,41	1,00

Формулы и таблицы, приведенные в этом и предыдущем параграфах, могут быть применены к изучению планетных атмосфер большой оптической толщины (атмосфер Венеры, Юпитера, Сатурна). Такое применение было сделано в работах В. А. Амбарцумяна [4], Н. П. Барабашева [8] и др.

§ 4. Диффузное отражение и пропускание света

Перейдем теперь к рассмотрению задачи о свечении плоского слоя конечной оптической толщины τ_0 . Как и раньше, будем считать, что слой освещен параллельными лучами. Наша задача будет состоять в нахождении

интенсивностей излучения, диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного слоев.

Поставленная задача может быть решена путем применения следующего «принципа инвариантности»: прибавление слоя малой оптической толщины $\Delta\tau$ с одной стороны среды и убавление такого же слоя с другой стороны не должны изменить способности среды отражать и пропускать излучение. Однако здесь мы предпочтем дать представление о другом методе, введенном В. А. Амбарцумяном в теорию рассеяния света [4], и решим указанную задачу при помощи этого метода. Оба метода В. А. Амбарцумяна приводят к одним и тем же функциональным уравнениям для определения искомых интенсивностей излучения.

В качестве исходного уравнения нам будет служить основное интегральное уравнение теории рассеяния света. В случае сферической индикатрисы рассеяния, который для простоты мы только и рассмотрим, это уравнение имеет вид:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B(t, \zeta) dt + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \quad (64)$$

(см. главу I, § 6). Здесь явно указана зависимость величины B от косинуса угла падения внешнего излучения ζ .

Перепишем уравнение (64) в виде:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} \text{Ei}(\tau - t) B(t, \zeta) dt + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{\tau}^{\tau_0} \text{Ei}(t - \tau) B(t, \zeta) dt + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}$$

и положим $\tau - t = x$ в первом интеграле и $t - \tau = x$ - во втором. Тогда получаем:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} \text{Ei} x B(\tau - x, \zeta) dx + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0 - \tau} \text{Ei} x B(\tau + x, \zeta) dx + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (65)$$

Дифференцируя это уравнение по τ , находим:

$$B'(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B'(t, \zeta) dt - \frac{\lambda S}{4\zeta} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \\ + \frac{\lambda}{2} B(0, \zeta) \text{Ei} \tau - \frac{\lambda}{2} B(\tau_0, \zeta) \text{Ei} (\tau_0 - \tau),$$

или, учитывая определение функции $\text{Ei} \tau$,

$$B'(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B'(t, \zeta) dt - \\ - \frac{\lambda S}{4\zeta} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \frac{\lambda}{2} B(0, \zeta) \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta'}} \frac{d\zeta'}{\zeta'} - \\ - \frac{\lambda}{2} B(\tau_0, \zeta) \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta'}} \frac{d\zeta'}{\zeta'}. \quad (66)$$

Мы видим, что уравнение (66) имеет такое же ядро, как и исходное уравнение (64), и отличается от него только свободным членом. Однако свободный член уравнения (66) представляет собой суперпозицию членов такого же типа, каким является свободный член уравнения (64). Вследствие линейности рассматриваемых уравнений это означает, что решение уравнения (66) является суперпозицией решений уравнения (26). Именно:

$$B'(\tau, \zeta) = -\frac{1}{\zeta} B(\tau, \zeta) + \\ + \frac{2}{S} B(0, \zeta) \int_0^1 B(\tau, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} - \\ - \frac{2}{S} B(\tau_0, \zeta) \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'}. \quad (67)$$

Мы получили важное соотношение, связывающее функцию $B(\tau, \zeta)$ и ее производную по τ .

При помощи уравнения (67) можно легко получить функциональные уравнения для определения коэффициен-

тов яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, определенных равенствами:

$$\left. \begin{aligned} S\rho(\eta, \zeta)\zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \\ S\sigma(\eta, \zeta)\zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Умножая обе части уравнения (67) на $e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 и учитывая формулы (68), находим:

$$\begin{aligned} S\rho(\eta, \zeta)(\eta + \zeta) &= B(0, \zeta) \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') d\zeta' \right] - \\ &- B(\tau_0, \zeta) \left[e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta') d\zeta' \right]. \end{aligned} \quad (69)$$

После умножения уравнения (67) на $e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$ и интегрирования мы аналогично получаем:

$$\begin{aligned} S\sigma(\eta, \zeta)(\eta - \zeta) &= B(0, \zeta) \left[e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta') d\zeta' \right] - \\ &- B(\tau_0, \zeta) \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') d\zeta' \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

Но величины $B(0, \zeta)$ и $B(\tau_0, \zeta)$ легко выражаются через функции $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$. В самом деле, из уравнения (64) вытекает:

$$\begin{aligned} B(0, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(t, \zeta) dt \int_0^1 e^{-\frac{t}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \frac{\lambda}{4} S = \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 d\eta' \int_0^{\tau_0} B(t, \zeta) e^{-\frac{t}{\eta'}} \frac{dt}{\eta'} + \frac{\lambda}{4} S = \\ &= \frac{\lambda}{4} S \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right] \end{aligned} \quad (71)$$

И

$$\begin{aligned}
 B(\tau_0, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(t, \zeta) dt \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0-t}{\eta'}} \frac{d\eta'}{\eta'} + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} = \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^1 d\eta' \int_0^{\tau_0} B(t, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-t}{\eta'}} \frac{dt}{\eta'} + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} = \\
 &= \frac{\lambda}{4} S \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right]. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Поэтому вместо уравнений (69) и (70) имеем:

$$\begin{aligned}
 \rho(\eta, \zeta)(\eta + \zeta) &= \\
 &= \frac{\lambda}{4} \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right] \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') d\zeta' \right] - \\
 &- \frac{\lambda}{4} \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right] \left[e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right] \quad (73)
 \end{aligned}$$

И

$$\begin{aligned}
 \sigma(\eta, \zeta)(\eta - \zeta) &= \\
 &= \frac{\lambda}{4} \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right] \left[e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta') d\zeta' \right] - \\
 &- \frac{\lambda}{4} \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right] \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') d\zeta' \right]. \quad (74)
 \end{aligned}$$

Так как коэффициенты яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ симметричны относительно η и ζ , то уравнения (73) и (74)

могут быть переписаны в виде

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\zeta)\varphi(\eta) - \psi(\zeta)\psi(\eta)}{\eta + \zeta}, \quad (75)$$

$$\sigma(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\zeta)\psi(\eta) - \psi(\zeta)\varphi(\eta)}{\eta - \zeta}, \quad (76)$$

где введены обозначения:

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') d\zeta', \quad (77)$$

$$\psi(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta') d\zeta'. \quad (78)$$

Формулы (75) и (76) определяют структуру коэффициентов яркости. При подстановке (75) в (77) и (76) в (78) получаются следующие уравнения для определения вспомогательных функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)\varphi(\eta) - \psi(\zeta)\psi(\eta)}{\eta + \zeta} d\zeta, \quad (79)$$

$$\psi(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)\psi(\eta) - \psi(\zeta)\varphi(\eta)}{\eta - \zeta} d\zeta. \quad (80)$$

Формулы (75), (76) и уравнения (79), (80) являются искомыми. Из них вытекают, в частности, ранее полученные для случая $\tau_0 = \infty$ формула (35) и уравнение (36).

Отметим, что нулевые моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ связаны друг с другом простым соотношением. Для получения его проинтегрируем обе части уравнения (79) по η :

$$\int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta\varphi(\zeta)\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta d\zeta - \\ - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta\psi(\zeta)\psi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta d\zeta. \quad (81)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\eta \varphi(\zeta) \varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta d\zeta &= \\ &= \left[\int_0^1 \varphi(\eta) d\eta \right]^2 - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\zeta \varphi(\zeta) \varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \varphi(\eta) d\eta \right]^2. \end{aligned}$$

Поэтому, введя обозначения

$$\int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = \alpha_0, \quad \int_0^1 \psi(\eta) d\eta = \beta_0, \quad (82)$$

получаем вместо (81):

$$\alpha_0 = 1 + \frac{\lambda}{4} (\alpha_0^2 - \beta_0^2). \quad (83)$$

При $\lambda = 1$ это соотношение принимает вид

$$\alpha_0 + \beta_0 = 2. \quad (84)$$

Система уравнений (79) и (80) может быть решена численным способом. Следует, однако, иметь в виду, что в случае чистого рассеяния решение этой системы не единственно. Легко убедиться, что если $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ являются решением системы (79) и (80) при $\lambda = 1$, то функции

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) + C\eta[\varphi(\eta) + \psi(\eta)], \\ \psi(\eta) - C\eta[\varphi(\eta) + \psi(\eta)], \end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная, также представляют собой решение этой системы. В данном случае для устранения неопределенности можно воспользоваться интегралом потока и так называемым K -интегралом (см. § 5 главы I).

Представляет интерес то обстоятельство, что для определения коэффициентов яркости $\rho(\eta, \zeta)$, $\sigma(\eta, \zeta)$ и вспомогательных функций $\varphi(\eta)$, $\psi(\eta)$ могут быть со-

ставлены новые уравнения, отличные от полученных выше. Мы примем во внимание, что указанные величины зависят не только от переменных η и ζ , но и от оптической толщины слоя τ_0 , и найдем уравнения, связывающие между собой значения рассматриваемых величин при разных значениях τ_0 .

Как и раньше, будем исходить из основного интегрального уравнения теории рассеяния света, которое переищем в виде:

$$B(\tau, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B(t, \zeta, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (85)$$

подчеркнув зависимость величины B от τ_0 . Это уравнение может быть записано еще так:

$$B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau_0 - t| B(\tau_0 - t, \zeta, \tau_0) dt + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}}. \quad (86)$$

Дифференцируя уравнения (85) и (86) по τ_0 , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(\tau, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| \frac{\partial B(t, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} dt + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}(\tau_0 - \tau) B(\tau_0, \zeta, \tau_0); \quad (87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau_0 - t| \frac{\partial B(\tau_0 - t, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} dt + \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}(\tau_0 - \tau) B(0, \zeta, \tau_0) - \frac{\lambda}{4\zeta} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}}. \quad (88) \end{aligned}$$

Решение уравнений (87) и (88) получается из решений уравнений (85) и (86) по принципу суперпозиции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(\tau, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \frac{2}{S} B(\tau_0, \zeta, \tau_0) \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (89) \\ &= \frac{2}{S} B(0, \zeta, \tau_0) \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} - \\ &\quad - \frac{1}{\zeta} B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0). \quad (90) \end{aligned}$$

Обратимся теперь к соотношениям (68), определяющим коэффициенты яркости ρ и σ . Переписав их в виде

$$\left. \begin{aligned} S \rho(\eta, \zeta, \tau_0) \zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \\ S \sigma(\eta, \zeta, \tau_0) \zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

и дифференцируя по τ_0 , получаем:

$$S \frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} \zeta = \int_0^{\tau_0} \frac{\partial B(\tau, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} + B(\tau_0, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \frac{1}{\eta}, \quad (92)$$

$$S \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_0} \zeta = \int_0^{\tau_0} \frac{\partial B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0)}{\partial \tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} + B(0, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \frac{1}{\eta}. \quad (93)$$

Подставляя (89) в (92) и (90) в (93), имеем:

$$\begin{aligned} S \frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} \zeta &= \frac{2}{S} B(\tau_0, \zeta, \tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} + \\ &\quad + B(\tau_0, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \frac{1}{\eta}, \end{aligned}$$

$$S \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_0} \zeta = \frac{2}{S} B(0, \zeta, \tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \eta', \tau_0) \frac{d\eta'}{\eta'} -$$

$$-\frac{1}{\zeta} \int_0^{\tau_0} B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} + B(0, \zeta, \tau_0) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \frac{1}{\eta},$$

или, приняв во внимание (91),

$$S \frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} \zeta = B(\tau_0, \zeta, \tau_0) \left[2 \int_0^1 \sigma(\eta, \eta', \tau_0) d\eta' + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right], \quad (94)$$

$$\begin{aligned} S \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_0} \zeta &= \\ &= B(0, \zeta, \tau_0) \left[2 \int_0^1 \sigma(\eta, \eta', \tau_0) d\eta' + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right] - \\ &\quad - S \sigma(\eta, \zeta, \tau_0). \end{aligned} \quad (95)$$

Но уравнения (85) и (86) при $\tau=0$ дают:

$$\left. \begin{aligned} B(0, \zeta, \tau_0) &= \frac{\lambda}{4} S \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta, \tau_0) d\eta' \right], \\ B(\tau_0, \zeta, \tau_0) &= \frac{\lambda}{4} S \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta, \tau_0) d\eta' \right]. \end{aligned} \right\} (96)$$

Поэтому, обозначая

$$B(0, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4} S \varphi(\tau_0, \zeta), \quad B(\tau_0, \zeta, \tau_0) = \frac{\lambda}{4} S \psi(\tau_0, \zeta), \quad (97)$$

вместо (94) и (95) получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau_0} \eta \zeta = \frac{\lambda}{4} \psi(\tau_0, \zeta) \psi(\tau_0, \eta), \quad (98)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau_0} \eta \zeta = \frac{\lambda}{4} \varphi(\tau_0, \zeta) \psi(\tau_0, \eta) - \eta \sigma(\eta, \zeta, \tau_0). \quad (99)$$

Отсюда

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) \eta \zeta = \frac{\lambda}{4} \int_0^{\tau_0} \psi(t_0, \eta) \psi(t_0, \zeta) dt_0, \quad (100)$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) \eta \zeta = \frac{\lambda}{4} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - t_0}{\zeta}} \varphi(t_0, \zeta) \psi(t_0, \eta) dt_0. \quad (101)$$

Подставляя (100) и (101) в (96) и учитывая соотношения (97), находим:

$$\varphi(\tau_0, \zeta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \psi(t_0, \zeta) dt_0 \int_0^1 \psi(t_0, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (102)$$

$$\psi(\tau_0, \zeta) = e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \left[1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{\frac{\tau_0}{\zeta}} \varphi(t_0, \zeta) dt_0 \int_0^1 \psi(t_0, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \right]. \quad (103)$$

Таким образом, мы получили новые уравнения (102) и (103) для определения вспомогательных функций φ и ψ и новые формулы (100) и (101), выражающие коэффициенты яркости ρ и σ через вспомогательные функции.

Таблица 12

Значения функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ при $\lambda=1$

$\tau_0 \backslash \eta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	1,00	1,11	1,13	1,14	1,15	1,15	1,15	1,16	1,16	1,16	1,16
0,2	1,00	1,14	1,20	1,22	1,23	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,26
0,3	1,00	1,16	1,23	1,27	1,30	1,31	1,32	1,33	1,34	1,34	1,35
0,4	1,00	1,17	1,26	1,31	1,35	1,37	1,39	1,40	1,42	1,42	1,43
0,5	1,00	1,18	1,28	1,34	1,39	1,42	1,44	1,46	1,48	1,49	1,50
0,6	1,00	1,18	1,29	1,36	1,42	1,46	1,49	1,51	1,53	1,55	1,56
0,7	1,00	1,18	1,30	1,38	1,47	1,50	1,54	1,56	1,58	1,60	1,61
0,8	1,00	1,19	1,31	1,40	1,49	1,53	1,58	1,60	1,63	1,65	1,67
0,9	1,00	1,19	1,32	1,42	1,49	1,56	1,61	1,64	1,67	1,70	1,72
1,0	1,00	1,19	1,33	1,43	1,51	1,58	1,63	1,67	1,70	1,74	1,76

Таблица 13

Значения функции $\psi(\tau_0, \eta)$ при $\lambda=1$

$\tau_0 \backslash \eta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	0	0,46	0,73	0,85	0,92	0,97	1,00	1,02	1,04	1,05	1,06
0,2	0	0,24	0,53	0,71	0,82	0,90	0,95	0,99	1,03	1,05	1,07
0,3	0	0,15	0,40	0,59	0,72	0,83	0,90	0,96	1,01	1,04	1,07
0,4	0	0,10	0,31	0,50	0,65	0,76	0,86	0,93	0,99	1,02	1,06
0,5	0	0,09	0,25	0,43	0,59	0,71	0,81	0,89	0,95	1,01	1,05
0,6	0	0,07	0,21	0,37	0,53	0,66	0,72	0,85	0,92	0,98	1,04
0,7	0	0,07	0,18	0,33	0,48	0,61	0,71	0,81	0,89	0,96	1,02
0,8	0	0,06	0,16	0,30	0,43	0,57	0,68	0,78	0,86	0,94	1,00
0,9	0	0,06	0,15	0,27	0,40	0,53	0,64	0,75	0,83	0,92	0,99
1,0	0	0,06	0,14	0,25	0,37	0,50	0,61	0,72	0,81	0,90	0,97

Систему уравнений (102) и (103) можно легко решить численно, переходя шаг за шагом от меньших значений τ_0 к большим значениям. Таким путем были получены таблицы 12 и 13, дающие значения функции $\varphi(\tau_0, \eta)$ и $\psi(\tau_0, \eta)$ для случая чистого рассеяния (с точностью до одной-двух единиц последнего знака).

§ 5. Определение функции $B(\tau, \zeta)$

В предыдущих параграфах была рассмотрена задача об определении интенсивностей излучения, выходящего из среды. Однако для многих применений представляет интерес и нахождение интенсивностей излучения внутри среды. Оказывается, что решение второй задачи существенно упрощается после решения первой. Таким образом, мы получаем новый способ для определения светового режима внутри среды.

В этом параграфе мы займемся задачей об определении светового режима внутри плоского слоя бесконечно большой оптической толщины. При этом будем считать, что решение задачи о диффузном отражении света плоским слоем уже известно. Для простоты ограничимся случаем изотропного рассеяния.

Мы знаем, что нахождение интенсивностей излучения как вне, так и внутри среды сводится к определению функции $B(\tau, \zeta)$. Обычно эта функция находится из основного интегрального уравнения теории рассеяния света. Однако, если нам известна функция $\varphi(\zeta)$, введенная при решении задачи о диффузном отражении света и определенная уравнением (36), то для нахождения функции $B(\tau, \zeta)$ может быть получено другое интегральное уравнение.

В предыдущем параграфе было выведено соотношение (67), связывающее функцию $B(\tau, \zeta)$ и ее производную по τ . В случае $\tau_0 = \infty$ это соотношение принимает вид

$$B'(\tau, \zeta) = -\frac{1}{\zeta} B(\tau, \zeta) + \frac{2}{S} B(0, \zeta) \int_0^1 B(\tau, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} . \quad (104)$$

Воспользуемся известным обозначением

$$B(0, \zeta) = \frac{\lambda}{4} S\varphi(\zeta) \quad (105)$$

и введем новое обозначение

$$2 \int_0^1 B(\tau, \zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'} = S\Phi(\tau). \quad (106)$$

Тогда уравнение (104) переписется так:

$$B'(\tau, \zeta) = -\frac{1}{\zeta} B(\tau, \zeta) + \frac{\lambda}{4} S\varphi(\zeta) \Phi(\tau). \quad (107)$$

Решая уравнение (107) относительно $B(\tau, \zeta)$, находим:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{4} S\varphi(\zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \left[1 + \int_0^{\tau} e^{\frac{t}{\zeta}} \Phi(t) dt \right]. \quad (108)$$

Полученное соотношение позволяет находить функцию $B(\tau, \zeta)$, если известна функция $\Phi(\tau)$. Но уравнение, определяющее $\Phi(\tau)$, легко получается из самого соотношения (108). Умножая обе части указанного соотношения

на $\frac{1}{\zeta}$ и интегрируя по ζ в пределах от 0 до 1, имеем:

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau} \Phi(t) K(\tau - t) dt, \quad (109)$$

где обозначено:

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \varphi(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta}. \quad (110)$$

Таким образом, нахождение функции $B(\tau, \zeta)$ сведено к нахождению функции $\Phi(\tau)$, определенной интегральным уравнением типа Вольтерра.

Важно то, что для глубоких слоев среды ($\tau \gg 1$) при помощи уравнения (104) может быть получено точное асимптотическое выражение функции $B(\tau, \zeta)$.

Мы будем искать это выражение в виде

$$B(\tau, \zeta) = C(\zeta) e^{-k\tau}, \quad (111)$$

где $C(\zeta)$ — неизвестная функция от ζ , а k — неизвестная постоянная. Тот факт, что при $\tau \gg 1$ функция $B(\tau, \zeta)$ представляется формулой (111), вытекает из физических соображений: в глубоких слоях среды относительное распределение интенсивности излучения по направлениям не должно зависеть от τ .

Подставляя (111) в (104) и пользуясь (105), находим:

$$-kC(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} C(\zeta) + \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \int_0^1 C(\zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'},$$

откуда

$$C(\zeta) = A \frac{\varphi(\zeta) \zeta}{1 - k\zeta}, \quad (112)$$

где

$$A = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 C(\zeta') \frac{d\zeta'}{\zeta'}. \quad (113)$$

Умножим обе части соотношения (112) на $\frac{\lambda}{2\zeta}$ и проинтегрируем по ζ в пределах от 0 до 1. Учитывая (113),

получаем следующее уравнение для определения постоянной k :

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} d\zeta = 1. \quad (114)$$

Легко показать, что связь между λ и k можно установить и без посредства функции $\varphi(\zeta)$. Для этого воспользуемся уравнением, определяющим функцию $\varphi(\zeta)$:

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} d\zeta. \quad (115)$$

Умножая обе части уравнения (115) на $\frac{\lambda}{2} \frac{1}{1-k\eta}$ и интегрируя по η в пределах от 0 до 1, получаем:

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} d\eta = -\frac{\lambda}{2k} \lg(1-k) + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} \eta d\eta \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} d\zeta,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} d\eta = & -\frac{\lambda}{2k} \lg(1-k) + \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} d\eta \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{1+k\zeta} d\zeta - \\ & - \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{1+k\zeta} \zeta d\zeta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если выполняется соотношение (114), то должно выполняться и соотношение

$$1 = -\frac{\lambda}{2k} \lg(1-k) + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{d\zeta}{1+k\zeta} \left[\varphi(\zeta) - \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)}{\eta + \zeta} d\eta \right],$$

которое при учете (115) принимает вид

$$\frac{\lambda}{2k} \lg \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (116)$$

Таким образом, в глубоких слоях среды функция $B(\tau, \zeta)$ представляется формулой

$$B(\tau, \zeta) = A \frac{\varphi(\zeta)\zeta}{1-k\zeta} e^{-k\tau}, \quad (117)$$

где k определяется из уравнения (116).

Значения величины k в зависимости от λ даны в таблице 14.

Таблица 14

Зависимость между λ и k при сферической индикатрисе рассеяния

k	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
λ	1,000	0,999	0,997	0,992	0,987	0,979	0,969	0,958	0,944	0,928	0,910
k		0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
λ		0,890	0,866	0,838	0,807	0,771	0,728	0,677	0,611	0,519	0

Постоянная A , входящая в формулу (117), не может быть определена из уравнения (104). Однако ее можно найти таким путем.

Рассмотрим однородное интегральное уравнение:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} B(t) \text{Ei} |\tau - t| dt. \quad (118)$$

Легко убедиться, что решением этого уравнения является функция $e^{-k\tau}$, где k определяется уравнением (116). Поэтому мы можем написать следующее тождество:

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \text{Ei} |\tau - t| dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{ht} \text{Ei} (\tau + t) dt. \quad (119)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ht} \text{Ei} (\tau + t) dt &= \int_0^{\infty} e^{ht} dt \int_0^1 e^{-\frac{\tau+t}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta} \int_0^1 e^{kt - \frac{t}{\zeta}} dt = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{1-k\zeta}. \end{aligned}$$

Следовательно, вместо (119) имеем:

$$e^{-k\tau} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-kt} \text{Ei} |\tau - t| dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{1 - k\zeta}. \quad (120)$$

Сравнивая соотношение (120) с основным интегральным уравнением теории рассеяния света

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(t, \zeta) \text{Ei} |\tau - t| dt + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (121)$$

мы видим, что функция $e^{-k\tau}$ может быть представлена как суперпозиция решений уравнения (121). Именно:

$$e^{-k\tau} = \frac{2}{S} \int_0^1 \frac{B(\tau, \zeta)}{1 - k\zeta} d\zeta. \quad (122)$$

Функция $B(\tau, \zeta)$ должна удовлетворять условию (122) для всех τ . Применим это условие к случаю очень больших τ . В данном случае функция $B(\tau, \zeta)$ дается формулой (117). Подставляя (117) в (122), находим:

$$A \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta) \zeta d\zeta}{(1 - k\zeta)^2} = \frac{S}{2}. \quad (123)$$

Этим соотношением и определяется искомая величина A . После определения A задача о нахождении функции $B(\tau, \zeta)$ в глубоких слоях среды может считаться решенной полностью.

Таким образом, знание функции $\varphi(\zeta)$ позволяет нам определить значение величины $B(\tau, \zeta)$ на границе среды [оно дается формулой (105)] и выражение для $B(\tau, \zeta)$ в глубоких слоях среды [дается формулой (117)]. Что же касается значений $B(\tau, \zeta)$ в промежуточной области, то они могут быть получены в результате решения уравнения (109).

§ 6. Световой режим в глубоких слоях

Определение светового режима внутри среды при произвольной индикатрисе рассеяния может быть выполнено тем же способом, какой был применен в предыдущем параграфе при сферической индикатрисе рассеяния.

В частности, в данном случае может быть также получено асимптотическое выражение для функции B в глубоких слоях. Однако если нас интересует выражение для функции B только с точностью до постоянного множителя, то это выражение можно найти другим, более простым путем [5].

Возьмем основное интегральное уравнение теории рассеяния света при произвольной индикатрисе рассеяния. В случае $\tau_0 = \infty$ оно имеет вид

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\tau} dt \int_0^1 \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} x(\gamma) B(t, \eta', \varphi') d\varphi' - \\ - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} dt \int_{-1}^0 \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} x(\gamma) B(t, \eta', \varphi') d\varphi' + \frac{\lambda}{4} x(\gamma_1) S e^{-\frac{\tau}{2}}. \quad (124)$$

Мы будем считать, что световой режим в глубоких слоях среды обладает следующими свойствами: 1) роль прямого излучения пренебрежимо мала по сравнению с ролью диффузного излучения; 2) интенсивность излучения не зависит от азимута; 3) относительное распределение интенсивности излучения по углам не зависит от оптической глубины. Разумеется, наличие этих свойств может быть строго доказано, однако мы удовлетворимся тем, что оно вытекает из физических соображений.

Перепишем уравнение (124) для глубоких слоев среды. На основании первого из указанных свойств отбросим свободный член этого уравнения. Одновременно в первом интеграле заменим нижний предел 0 на $-\infty$. В результате получаем:

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\tau} dt \int_0^1 \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} x(\gamma) B(t, \eta', \varphi') d\varphi' - \\ - \frac{\lambda}{4\pi} \int_{\frac{\tau}{2}}^{\infty} dt \int_{-1}^0 \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} x(\gamma) B(t, \eta', \varphi') d\varphi'. \quad (125)$$

На основании второго свойства примем, что B не зависит от φ . Тогда вместо (125) находим:

$$B(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\tau} dt \int_0^1 e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} B(t, \eta') p(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} - \\ - \frac{\lambda}{2} \int_{\tau}^{\infty} dt \int_{-1}^0 e^{-\frac{\tau-t}{\eta'}} B(t, \eta') p(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}, \quad (126)$$

где

$$p(\eta, \eta') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\gamma) d\varphi'. \quad (127)$$

Третье свойство позволяет написать:

$$B(\tau, \eta) = a(\tau) b(\eta),$$

или, так как нульпункт отсчета оптических глубин произволен,

$$B(\tau, \eta) = b(\eta) e^{-k\tau}, \quad (128)$$

где k — постоянная. Подставляя (128) в (126), имеем:

$$b(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{p(\eta, \eta') b(\eta')}{1 - k\eta'} d\eta'. \quad (129)$$

Итак, мы получили, что в глубоких слоях среды величина $B(\tau, \eta)$ дается формулой (128), а функция $b(\eta)$ определяется уравнением (129). Так как уравнение (129) при заданном λ имеет отличное от нуля решение только при определенном значении k , то искомое значение постоянной k находится из условия разрешимости этого уравнения.

Пользуясь формулой (128) и уравнением переноса излучения, мы получаем следующее выражение для интенсивности излучения в глубоких слоях среды:

$$I(\tau, \eta) = \frac{b(\eta)}{1 - k\eta} e^{-k\tau}. \quad (130)$$

Обратимся к рассмотрению уравнения (129). Так как функция $p(\eta, \eta')$ симметричная, то ядро этого уравнения является несимметричным. Однако его легко симметризовать. Для этого вместо функции $b(\eta)$ введем новую функцию

$$h(\eta) = \frac{b(\eta)}{\sqrt{1-k\eta}}. \quad (131)$$

Тогда вместо (129) получаем уравнение

$$h(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{p(\eta, \eta') h(\eta')}{\sqrt{(1-k\eta)(1-k\eta')}} d\eta' \quad (132)$$

с симметричным ядром.

Исследование уравнения (132) может быть выполнено обычными способами. Не останавливаясь на этом, отметим только два следующих важных его свойства:

1. При заданной индикатрисе рассеяния значения параметра k убывают с возрастанием λ .

2. В случае чистого рассеяния ($\lambda=1$) при произвольной индикатрисе рассеяния $k=0$.

Последнее свойство легко доказать. Для этого убедимся, что решением уравнения (129) при $\lambda=1$ будет $b(\eta)=1$ и $k=0$. Подставляя указанные значения λ , k и $b(\eta)$ в уравнение (129) и пользуясь (127), получаем:

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 x(\gamma) d\eta' = 1,$$

что является тождеством на основании нормировки индикатрисы рассеяния.

Примем, как и раньше, что индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\cos \gamma). \quad (133)$$

Тогда, пользуясь формулой (40), имеем:

$$p(\eta, \eta') = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\eta) P_i(\eta'). \quad (134)$$

Таким образом, в случае представления индикатрисы рассеяния формулой (133) ядро интегрального уравнения (129) становится вырожденным и, следовательно, рассматриваемое уравнение решается без затруднений.

Из (129) и (134) видно, что функция $b(\eta)$ представляется в виде ряда

$$b(\eta) = \sum_{i=0}^n b_i P_i(\eta), \quad (135)$$

где b_i — некоторые коэффициенты. Подставляя (134) и (135) в (129), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов b_i :

$$b_i = \frac{\lambda}{2} x_i \sum_{j=0}^n b_j \int_{-1}^{+1} \frac{P_j(\eta') P_i(\eta')}{1 - k\eta'} d\eta' \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (136)$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы находится значение параметра k .

Найдем решение уравнения (129) для некоторых частных случаев индикатрисы рассеяния.

В случае сферической индикатрисы рассеяния [$x(\gamma) = 1$] соотношения (135) и (136) дают:

$$b(\eta) = b_0 = \text{const}$$

и

$$\frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\eta'}{1 - k\eta'} = 1.$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение (116) для определения k .

В случае простейшей несферической индикатрисы рассеяния

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$$

функция $b(\eta)$ имеет вид

$$b(\eta) = b_0 + b_1 \eta. \quad (137)$$

Для нахождения коэффициентов b_0 и b_1 из (136) полу-

чается система двух линейных однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \lambda \left[\frac{b_0}{2k} \lg \frac{1+k}{1-k} - b_1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \lg \frac{1+k}{1-k} \right) \right], \\ b_1 &= -\lambda x_1 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \lg \frac{1+k}{1-k} \right) \left(b_0 + \frac{b_1}{k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Чтобы эти уравнения были совместными, необходимо, чтобы определитель системы (138) обращался в нуль. Это условие приводит к уравнению

$$\frac{\lambda}{2k} \left(1 + x_1 \frac{1-\lambda}{k^2} \right) \lg \frac{1+k}{1-k} - \lambda x_1 \frac{1-\lambda}{k^2} = 1, \quad (139)$$

служащему для определения k . После определения k из уравнений (138) находится отношение $\frac{b_1}{b_0}$.

Результаты решения уравнения (129) для принятой индикатрисы рассеяния приведены в таблицах 15 и 16. В них даны значения величин λ и $\frac{b_1}{b_0}$ в зависимости от значений x_1 и k .

Таблица 15

Значения λ в зависимости от k и x_1 при индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$

$x_1 \backslash k$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0,99	0,97	0,94	0,91	0,87	0,81	0,73	0,61	0,52
0,2	0,99	0,97	0,94	0,90	0,86	0,79	0,71	0,59	0,49
0,4	0,98	0,96	0,94	0,90	0,85	0,78	0,69	0,56	0,47
0,6	0,98	0,96	0,93	0,89	0,83	0,76	0,67	0,54	0,44
0,8	0,98	0,96	0,92	0,88	0,82	0,75	0,65	0,52	0,41
1,0	0,98	0,96	0,92	0,87	0,81	0,73	0,63	0,49	0,39

В рассматриваемом случае интенсивность излучения дается формулой

$$I(\tau, \eta) = \frac{b_0 + b_1 \eta}{1 - k \eta} e^{-k\tau}. \quad (140)$$

Отсюда, в частности, следует, что отношение интенсивности излучения, идущего снизу вверх (при $\eta = -1$), к интенсив-

Таблица 16

Значения $\frac{b_1}{b_0}$ в зависимости от k и x_1 при индикатрисе
 рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$

$x_1 \backslash k$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,02	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10
0,4	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,13	0,15	0,20	0,22
0,6	0,06	0,08	0,11	0,14	0,17	0,21	0,25	0,31	0,35
0,8	0,09	0,10	0,15	0,20	0,23	0,29	0,35	0,44	0,49
1,0	0,10	0,13	0,21	0,26	0,31	0,38	0,46	0,56	0,63

ности излучения, идущего сверху вниз (при $\eta = 1$), равно

$$\frac{I(\tau, -1)}{I(\tau, +1)} = \frac{b_0 - b_1}{b_0 + b_1} \cdot \frac{1 - k}{1 + k}. \quad (141)$$

При помощи таблиц 15 и 16 может быть получено численное значение этой величины. Например, при $x_1 = 0,6$ и $\lambda = 0,93$ из таблицы 15 получаем, что $k = 0,4$. Далее, таблица 16 дает $\frac{b_1}{b_0} = 0,11$. Поэтому в данном случае $\frac{I(\tau, -1)}{I(\tau, +1)} = 0,35$.

Аналогично может быть получено решение уравнения (129) при более сложных индикатрисах рассеяния. Однако если число членов в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра велико, то вычисления становятся довольно громоздкими. Поэтому в работе автора [7] предложен другой способ решения уравнения (129), более быстро приводящий к цели. В той же работе [7] приведены таблицы вспомогательных величин, необходимых для решения уравнения (129), а также результаты решения для индикатрис рассеяния типа

$$x(\gamma) = C(1 \pm \cos \gamma)^n \quad (142)$$

при разных значениях параметра n .

§ 7. Диффузное отражение и пропускание света средой большой оптической толщины

Полученные в § 4 этой главы результаты позволяют находить коэффициенты яркости плоского слоя любой оптической толщины. Однако решение уравнений (79) и (80), определяющих вспомогательные функции, при больших значениях τ_0 становится затруднительным. Между тем случай среды большой оптической толщины весьма часто встречается на практике. Поэтому представляет особый интерес то обстоятельство, что при больших значениях τ_0 для коэффициентов отражения и пропускания света могут быть получены простые асимптотические формулы (тем более точные, чем больше τ_0).

Для вывода упомянутых формул мы воспользуемся тем, что нам известен световой режим в глубоких слоях среды бесконечно большой оптической толщины.

Интегральное уравнение, определяющее функцию $B(\tau, \zeta)$, в случае среды бесконечно большой оптической толщины мы можем записать в виде

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(t, \zeta) \text{Ei} |\tau - t| dt + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} B(t, \zeta) \text{Ei}(t - \tau) dt + \frac{\lambda}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (143)$$

Здесь мы приняли для простоты $S=1$ и считаем, что $0 \leq \tau \leq \tau_0$. Второй из интегралов, входящих в это уравнение, может быть переписан так:

$$\int_{\tau_0}^{\infty} B(t, \zeta) \text{Ei}(t - \tau) dt = \int_{\tau_0}^{\infty} B(t, \zeta) dt \int_0^1 e^{-\frac{t-\tau}{\eta}} \frac{d\eta}{\eta} = \\ = \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} d\eta \int_{0^{\tau}}^{\infty} B(t, \zeta) e^{-\frac{t-\tau_0}{\eta}} \frac{dt}{\eta} = \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} I(\tau_0, -\eta, \zeta) d\eta, \quad (144)$$

где $I(\tau_0, -\eta, \zeta)$ — интенсивность излучения, идущего на оптической глубине τ_0 под углом $\arccos(-\eta)$ к внутренней нормали (т. е. снизу вверх).

Сравним уравнение (143) с уравнением (85), определяющим функцию $B(\tau, \zeta, \tau_0)$ в случае среды конечной оптической толщины τ_0 (при $S=1$). Принимая во внимание (144), мы видим, что свободный член уравнения (143) представляет собой суперпозицию свободных членов уравнения (85). Отсюда

$$B(\tau, \zeta) = B(\tau, \zeta, \tau_0) + 2 \int_0^1 I(\tau_0, -\eta, \zeta) B(\tau_0 - \tau, \eta, \tau_0) d\eta. \quad (145)$$

Применим соотношение (145) к случаю, когда $\tau_0 \gg 1$. Так как на больших оптических глубинах функция $B(\tau, \zeta)$ дается формулой (117), то

$$I(\tau_0, -\eta, \zeta) = \frac{A}{1+k\eta} \frac{\varphi(\zeta)\zeta}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0}. \quad (146)$$

Подставляя (146) в (145), получаем:

$$B(\tau, \zeta) = \\ = B(\tau, \zeta, \tau_0) + 2A \frac{\varphi(\zeta)\zeta}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \zeta', \tau_0) \frac{d\zeta'}{1+k\zeta'}. \quad (147)$$

Обозначим через $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ соответственно коэффициенты отражения и пропускания света плоским слоем оптической толщины τ_0 . Умножая (147) на $e^{-\frac{\tau}{\eta} \frac{d\tau}{\eta}}$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , находим:

$$\rho(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta, \tau_0) + 2A \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta', \tau_0) \frac{\zeta' d\zeta'}{1+k\zeta'}, \quad (148)$$

где (η, ζ) — попрежнему означает коэффициент отражения света плоским слоем бесконечно большой оптической толщины (здесь мы пренебрегли членом порядка

$e^{-(k+\frac{1}{\eta})\tau_0}$). Умножая (147) на $e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$, интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 и снова пользуясь формулой (117) для функции $B(\tau, \zeta)$, получаем:

$$\frac{A}{1-k\eta} \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} = \sigma(\eta, \zeta, \tau_0) + \\ + 2A \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} \int_0^1 \rho(\eta, \zeta', \tau_0) \frac{\zeta' d\zeta'}{1+k\zeta'}. \quad (149)$$

Мы видим, что второй член в правой части формулы (148) мал по сравнению с первым членом. Поэтому указанная формула в первом приближении дает:

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta). \quad (150)$$

Подставляя (150) в (149), имеем:

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = A \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} \left[\frac{1}{1-k\eta} - 2 \int_0^1 \rho(\eta, \zeta') \frac{\zeta' d\zeta'}{1+k\zeta'} \right]. \quad (151)$$

Полученное соотношение при помощи формулы (35) для величины $\rho(\eta, \zeta)$ и уравнения (36) для функции $\varphi(\eta)$ легко преобразуется к виду

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = A \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-k\tau_0} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta')}{1+k\zeta'} d\zeta' \right]. \quad (152)$$

Если мы подставим (152) в (148), то получим выражение для $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ во втором приближении:

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - 2A^2 \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} \frac{\varphi(\zeta)}{1-k\zeta} e^{-2k\tau_0} \times \\ \times \left[1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta')}{1+k\zeta'} d\zeta' \right] \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta')}{1-k^2\zeta'^2} \zeta' d\zeta'. \quad (153)$$

Формулы (152) и (153) и дают искомые асимптотические выражения для коэффициентов яркости $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ при больших оптических толщинах. Напомним,

что входящая в эти формулы величина A определяется соотношением (123)

Особо следует рассмотреть случай чистого рассеяния ($\lambda = 1$, $k = 0$). Так как в этом случае

$$\int_0^1 \varphi(\zeta) d\zeta = 2,$$

то формула (152) дает $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = 0$. Это значит, что при определении $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ нельзя ограничиться первым членом в выражении для $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$, а надо взять также и второй член.

При $\lambda = 1$ соотношения (148) и (149) принимают вид

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - 2A\varphi(\zeta) \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta', \tau_0) \zeta' d\zeta', \quad (154)$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = A\varphi(\zeta) \left[1 - 2 \int_0^1 \rho(\eta, \zeta', \tau_0) \zeta' d\zeta' \right]. \quad (155)$$

Подставляя (154) в (155), получаем:

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = 2A\varphi(\zeta) \int_0^1 \sigma(\eta, \zeta', \tau_0) \zeta' d\zeta'. \quad (156)$$

Но величины $\rho(\eta, \zeta, \tau_0)$ и $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$ должны быть симметричными функциями от η и ζ . Следовательно, должно быть

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - 2A\varphi(\zeta)\varphi(\eta)f(\tau_0), \quad (157)$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = 2A\varphi(\zeta)\varphi(\eta)f(\tau_0), \quad (158)$$

где $f(\tau_0)$ — пока неизвестная функция от τ_0 .

Для определения $f(\tau_0)$ применим следующий искусственный прием. Легко убедиться, что

$$\int_0^{\tau_0} \text{Ei}|\tau - t| t dt = 2\tau + \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta d\zeta - \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} (\tau_0 + \zeta) d\zeta. \quad (159)$$

Это значит, что решением интегрального уравнения

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta d\zeta + \\ + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} (\tau_0 + \zeta) d\zeta \quad (160)$$

будет $B(\tau) = \tau$.

Сравним уравнение (160) с уравнением, определяющим функцию $B(\tau, \zeta, \tau_0)$:

$$B(\tau, \zeta, \tau_0) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - t| B(t, \zeta, \tau_0) dt + \frac{1}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (161)$$

Так как свободный член уравнения (160) является суперпозицией свободных членов уравнения (161), то мы находим:

$$\tau = -2 \int_0^1 B(\tau, \zeta, \tau_0) \zeta d\zeta + 2 \int_0^1 B(\tau_0 - \tau, \zeta, \tau_0) (\tau_0 + \zeta) d\zeta. \quad (162)$$

Полагая в (162) $\tau = 0$, получаем.

$$\int_0^1 B(0, \zeta, \tau_0) \zeta d\zeta = \int_0^1 B(\tau_0, \zeta, \tau_0) (\tau_0 + \zeta) d\zeta. \quad (163)$$

Соотношение (163) и дает нам возможность определить функцию $f(\tau_0)$, так как величины $B(0, \zeta, \tau_0)$ и $B(\tau_0, \zeta, \tau_0)$ легко выражаются через эту функцию.

Интегрируя (158) по ζ в пределах от 0 до 1 и учитывая соотношения (78) (без члена $e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}$) и (97), имеем:

$$B(\tau_0, \eta, \tau_0) = 2A\varphi(\eta) \eta f(\tau_0). \quad (164)$$

Далее, из (147) при $\tau = 0$ находим:

$$B(0, \zeta, \tau_0) = B(0, \zeta) - 2A\varphi(\zeta) \zeta \int_0^1 B(\tau_0, \zeta', \tau_0) d\zeta'. \quad (165)$$

Подстановка (164) в (165) дает:

$$B(0, \zeta, \tau_0) = B(0, \zeta) - 2A\varphi(\zeta)\zeta f(\tau_0). \quad (166)$$

Здесь мы воспользовались формулой (123), определяющей A .

При помощи (164) и (166) из соотношения (163) мы получаем:

$$2Af(\tau_0) = \frac{\int_0^1 B(0, \zeta) d\zeta}{2 \int_0^1 \varphi(\zeta) \zeta^2 d\zeta + \tau_0 \int_0^1 \varphi(\zeta) \zeta d\zeta}, \quad (167)$$

или, так как $B(0, \zeta) = \frac{1}{4} \varphi(\zeta)$,

$$2Af(\tau_0) = \frac{1}{4} \frac{1}{\tau_0 + \gamma}, \quad (168)$$

где введено обозначение

$$\gamma = 2 \frac{\int_0^1 \varphi(\zeta) \zeta^2 d\zeta}{\int_0^1 \varphi(\zeta) \zeta d\zeta}. \quad (169)$$

Вычисления дают $\gamma = 1,42$.

Подставляя (168) в (157) и (158), мы приходим к следующим формулам, определяющим коэффициенты отражения и пропускания света в случае чистого рассеяния:

$$\rho(\eta, \zeta, \tau_0) = \rho(\eta, \zeta) - \frac{1}{4} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\tau_0 + \gamma}, \quad (170)$$

$$\sigma(\eta, \zeta, \tau_0) = \frac{1}{4} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\tau_0 + \gamma}. \quad (171)$$

Как уже говорилось, эти формулы тем точнее, чем больше τ_0 .

§ 8. Распределение диффузно-пропущенного излучения по направлениям

В предыдущем параграфе были получены формулы для интенсивности излучения, диффузно-пропущенного средой очень большой оптической толщины при сферической индикатрисе рассеяния. Аналогичным путем могут быть найдены соответствующие формулы и при индикатрисе рассеяния произвольного вида. Однако если интересоваться только относительным распределением диффузно-пропущенного излучения по углам, то оно может быть получено значительно проще [6].

Из формулы (152) видно, что относительное распределение диффузно-пропущенного излучения по углам не зависит ни от оптической толщины среды, ни от направления падающего на среду излучения. Это заключение, сделанное для случая сферической индикатрисы рассеяния, будет, очевидно, справедливо и при произвольной индикатрисе рассеяния. Кроме того, при любой индикатрисе рассеяния интенсивность излучения, диффузно-пропущенного средой очень большой оптической толщины, не зависит от азимута (ср. с § 6). Мы обозначим эту интенсивность через $I(\eta)$ и найдем ее с точностью до постоянного множителя.

Величина $I(\eta)$ может быть весьма просто определена методом прибавления к среде слоя малой оптической толщины $\Delta\tau$, подробно разобранным в § 2.

Прибавим слой толщиной $\Delta\tau$ к нижней границе среды. Тогда интенсивность излучения, выходящего через новую границу, будет равна $I(\eta)(1 - k\Delta\tau)$, где k — некоторая постоянная. С другой стороны, указанную интенсивность мы можем определить, приняв во внимание все изменения, которые происходят вследствие добавления слоя.

Прежде всего слой производит ослабление излучения, идущего в данном направлении. Соответствующая интенсивность излучения будет равна

$$I(\eta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta} \right).$$

Далее, слой рассеивает излучение, приходящее от прежней границы, в данном направлении. Интенсивность

рассеянного излучения может быть представлена в виде

$$\frac{\lambda}{2\eta} \Delta\tau \int_0^1 I(\eta') p(\eta, \eta') d\eta',$$

где $p(\eta, \eta')$ — величина, определенная формулой (127).

Наконец, слой рассеивает излучение в сторону прежней границы, и оно диффузно отражается от нее в направлении η . Интенсивность этого излучения равна

$$\lambda \Delta\tau \int_0^1 f_0(\eta, \eta'') d\eta'' \int_0^1 I(\eta') p(-\eta'', \eta') d\eta',$$

где $f_0(\eta, \eta'')$ — усредненный по азимуту коэффициент яркости слоя бесконечно большой оптической толщины.

Таким образом, мы получаем:

$$I(\eta)(1 - k\Delta\tau) = I(\eta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta}\right) + \frac{\lambda}{2\eta} \Delta\tau \int_0^1 I(\eta') p(\eta, \eta') d\eta' + \\ + \lambda \Delta\tau \int_0^1 f_0(\eta, \eta'') d\eta'' \int_0^1 I(\eta') p(-\eta'', \eta') d\eta'. \quad (172)$$

Отсюда следует:

$$I(\eta)(1 - k\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 I(\eta') p(\eta, \eta') d\eta' + \\ + \lambda\eta \int_0^1 f_0(\eta, \eta'') d\eta'' \int_0^1 I(\eta') p(-\eta'', \eta') d\eta'. \quad (173)$$

Уравнение (173) можно переписать также в виде

$$I(\eta)(1 - k\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 K(\eta, \eta') I(\eta') d\eta', \quad (174)$$

где

$$K(\eta, \eta') = p(\eta, \eta') + 2\eta \int_0^1 f_0(\eta, \eta'') p(-\eta'', \eta') d\eta''. \quad (175)$$

Выражение для $K(\eta, \eta')$ может быть сильно упрощено. Подставляя (134) в (175), находим:

$$K(\eta, \eta') = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\eta') \times \\ \times \left[P_i(\eta) + 2(-1)^i \eta \int_0^1 f_0(\tau, \eta'') P_i(\eta'') d\tau \right]. \quad (176)$$

Но из (47) следует, что

$$\varphi_i^0(\eta) = P_i(\eta) + 2(-1)^i \eta \int_0^1 f_0(\eta, \eta'') P_i(\eta'') d\eta''. \quad (177)$$

Поэтому мы получаем:

$$K(\eta, \eta') = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\eta') \varphi_i^0(\eta). \quad (178)$$

Подстановка (178) в (174) дает:

$$I(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^n \frac{x_i c_i \varphi_i^0(\eta)}{1 - k\eta}, \quad (179)$$

где введено обозначение

$$c_i = \int_0^1 I(\eta) P_i(\eta) d\eta. \quad (180)$$

Для определения постоянных c_i умножим (179) на $P_j(\eta)$ и проинтегрируем по η от 0 до 1. В результате находим:

$$c_j = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^n a_{ij} x_i c_i, \quad (181)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\varphi_i^0(\eta) P_j(\eta) d\eta}{1 - k\eta}. \quad (182)$$

Таким образом, постоянные c_i определяются из системы однородных алгебраических уравнений (181). Из условия разрешимости этой системы находится значение k .

Формула (179) дает окончательное решение задачи. Мы видим, что интенсивность излучения, диффузно-пропущенного слоем очень большой оптической толщины, выражается через те же функции $\varphi_i^0(\eta)$, которые были введены выше при решении задачи о диффузном отражении света.

Рассмотрим для примера два простейших случая формулы (179).

При сферической индикатрисе рассеяния из (179) получаем:

$$I(\eta) = C \frac{\varphi_0^0(\eta)}{1-k\eta}, \quad (183)$$

где $C = \frac{\lambda}{2} c_0$, а соотношения (181) и (182) дают следующее уравнение для определения k :

$$1 = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta)}{1-k\eta} d\eta. \quad (184)$$

Как было показано в § 5 этой главы, уравнение (184) приводится к виду (116). Таким образом, формула (183) находится в согласии с формулой (152).

При индикатрисе рассеяния типа $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ формула (179) дает:

$$I(\eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{c_0 \varphi_0^0(\eta) + x_1 c_1 \varphi_1^0(\eta)}{1-k\eta}, \quad (185)$$

а из (181) и (182) находим уравнения:

$$c_0 = c_0 \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta)}{1-k\eta} d\eta + c_1 \frac{\lambda}{2} x_1 \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta)}{1-k\eta} d\eta, \quad (186)$$

$$c_1 = c_0 \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta)}{1-k\eta} \eta d\eta + c_1 \frac{\lambda}{2} x_1 \int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta)}{1-k\eta} \eta d\eta, \quad (187)$$

служащие для определения величин $\frac{c_1}{c_0}$ и k .

Допустим, что в среде происходит чистое рассеяние ($\lambda = 1$). Тогда, как было показано в § 2, функция $\varphi_0^0(\eta)$ одинакова при всех значениях x_1 [и равна функции $\varphi_0^0(\eta)$ при сферической индикатрисе рассеяния], а $\varphi_1^0(\eta) = 0$. Кроме того, при $\lambda = 1$ мы имеем $k = 0$. Поэтому получаем:

$$I(\eta) = C\varphi_0^0(\eta). \quad (188)$$

Таким образом, в случае чистого рассеяния интенсивность излучения, диффузно-пропущенного средой очень большой оптической толщины, одинакова при всех индикатрисах рассеяния типа $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ и определяется формулой (188).

Последний результат имеет отношение к задаче о распределении яркости по облачному небу. При решении данной задачи в первом приближении можно реальную индикатрису рассеяния заменить индикатрисой типа $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ (т. е. не учитывать высших членов в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра). Если считать, что в облачном слое происходит чистое рассеяние, то распределение яркости по облачному небу будет даваться формулой (188). Согласно этой формуле отношение яркости в зените к яркости горизонта должно равняться 2,9. Это значение находится в хорошем согласии с результатами наблюдений.

На этом мы заканчиваем изложение теории В. А. Амбарцумяна. Развитие этой теории, связанное с применением принципов инвариантности, было выполнено Чандрасекаром.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЯРКОСТИ

Как уже говорилось, одной из важнейших задач теории рассеяния света является нахождение интенсивностей излучения, диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного плоским слоем. В предыдущей главе были изложены методы, дающие возможность определять указанные интенсивности (или соответствующие им коэффициенты яркости) без предварительного нахождения функции B . Применение этих методов позволило выяснить структуру коэффициентов яркости, т. е. выразить эти функции от нескольких аргументов через некоторые вспомогательные функции, зависящие только от одного аргумента, и получить для определения вспомогательных функций сравнительно простые функциональные уравнения.

Теперь мы дадим другой метод для нахождения интенсивностей излучения, диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного плоским слоем. Этот метод заключается в получении линейных интегральных уравнений, определяющих непосредственно коэффициенты яркости. Указанные уравнения могут быть легко выведены из уравнения переноса излучения и уравнения лучистого равновесия [1-4].

Кроме того, мы покажем, что введенные в предыдущей главе вспомогательные функции также удовлетворяют линейным интегральным уравнениям. С некоторых точек зрения эти уравнения имеют значительные преимущества перед функциональными уравнениями, выведенными ранее.

Существенно то, что линейные интегральные уравнения, определяющие как коэффициенты яркости, так и вспомогательные функции, сильно упрощаются в случае

плоского слоя бесконечно большой оптической толщины. В указанном случае они превращаются в уравнения с ядрами типа Коши, и их решение может быть получено в конечном виде.

§ 1. Интегральные уравнения для коэффициентов яркости

Пусть имеется плоский слой оптической толщины τ_0 , освещенный параллельными лучами. Будем считать сначала, что индикатриса рассеяния является сферической. В таком случае уравнения переноса излучения в лучистого равновесия имеют вид

$$\eta' \frac{dI(\tau, \eta', \zeta)}{d\tau} = B(\tau, \zeta) - I(\tau, \eta', \zeta), \quad (1)$$

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \zeta) d\eta' + \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (2)$$

где ζ — косинус угла падения внешнего излучения, η' — косинус угла, образованного направлением рассеянного излучения с направлением внутренней нормали.

Нам надо найти интенсивность диффузно-отраженного излучения $I(0, -\eta, \zeta)$ и интенсивность диффузно-пропущенного излучения $I(\tau_0, \eta, \zeta)$. Как известно, эти величины связаны с величиной $B(\tau, \zeta)$ и с коэффициентами яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ соотношениями:

$$S\rho(\eta, \zeta)\zeta = I(0, -\eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}; \quad (3)$$

$$S\sigma(\eta, \zeta)\zeta = I(\tau_0, \eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}. \quad (4)$$

Для получения уравнений, определяющих коэффициенты яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, поступим следующим образом. Умножим уравнение (2) сначала на $e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$, затем на $e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до τ_0 .

Учитывая (3) и (4), находим:

$$S\rho(\eta, \zeta)\zeta = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} d\eta' \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} + \frac{\lambda}{4} S\rho_1(\eta, \zeta)\zeta, \quad (5)$$

$$S\sigma(\eta, \zeta)\zeta = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} d\eta' \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} + \frac{\lambda}{4} S\sigma_1(\eta, \zeta)\zeta, \quad (6)$$

где

$$\rho_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta})}}{\eta + \zeta}, \quad \sigma_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}{\eta - \zeta} \quad (7)$$

— коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка.

Но при помощи уравнения переноса излучения интегралы

$$\int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} \quad \text{и} \quad \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$$

в свою очередь могут быть выражены через коэффициенты яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$. В самом деле, умножая (1) сначала на $e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$, затем на $e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\eta'}{\eta} I(\tau_0, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} - \frac{\eta'}{\eta} I(0, \eta', \zeta) + \frac{\eta'}{\eta} \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} = \\ = I(0, -\eta, \zeta) - \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\eta'}{\eta} I(\tau_0, \eta', \zeta) - \frac{\eta'}{\eta} I(0, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} - \frac{\eta'}{\eta} \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} = \\ = I(\tau_0, \eta, \zeta) - \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (9) \end{aligned}$$

или, принимая во внимание (3) и (4),

$$\begin{aligned}
 (\eta + \eta') \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} = \\
 = [\eta\rho(\eta, \zeta) + \eta'\rho(-\eta', \zeta) - \eta'\sigma(\eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}] S\zeta; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\eta - \eta') \int_0^{\tau_0} I(\tau, \eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} = \\
 = [\eta\sigma(\eta, \zeta) - \eta'\sigma(\eta', \zeta) + \eta'\rho(-\eta', \zeta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}] S\zeta, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $\rho(-\eta', \zeta) = 0$ при $\eta' > 0$ и $\sigma(\eta', \zeta) = 0$ при $\eta' < 0$.

Подставляя (10) в (5), а (11) в (6), получаем:

$$\begin{aligned}
 \rho(\eta, \zeta) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \eta \lg \frac{1+\eta}{1-\eta}\right) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\rho(\eta', \zeta)}{\eta' - \eta} \eta' d\eta' - \\
 - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\sigma(\eta', \zeta)}{\eta' + \zeta} \eta' d\eta' + \rho_1(\eta, \zeta), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma(\eta, \zeta) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \eta \lg \frac{1+\eta}{1-\eta}\right) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\sigma(\eta', \zeta)}{\eta' - \eta} \eta' d\eta' - \\
 - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\rho(\eta', \zeta)}{\eta' + \zeta} \eta' d\eta' + \sigma_1(\eta, \zeta). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Это и есть искомая система двух линейных интегральных уравнений, определяющая $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$.

Подчеркнем, что в уравнениях (12) и (13) независимой переменной является только величина η , в то время как величины τ_0 и ζ играют роль параметров.

Допустим теперь, что рассеяние света в плоском слое происходит при неферрической индикатрисе рассеяния.

Тогда вместо уравнений (1) и (2) имеем:

$$\eta' \frac{dI(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0)}{d\tau} = B(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0) - I(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} B(\tau, \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) = \\ = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{4} Sx(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Индикатриса рассеяния $x(\gamma)$, где

$$\cos \gamma = \eta\eta' + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi'), \quad (16)$$

обозначена здесь через $x(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$.

Введем в рассмотрение «обобщенные коэффициенты яркости» $F(\eta, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0)$ и $G(\eta, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0)$, определенные соотношениями:

$$SF(\eta, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0) \zeta = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0) e^{-\frac{\tau}{\eta} \frac{d\tau}{\eta}}, \quad (17)$$

$$SG(\eta, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0) \zeta = \int_0^{\tau_0} B(\tau, \eta', \zeta, \varphi - \varphi_0) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta} \frac{d\tau}{\eta}}. \quad (18)$$

Очевидно, что искомые коэффициенты яркости определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= F(\eta, \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0); \\ \sigma(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= G(\eta, \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Поступая так же, как в случае сферической индикатрисы рассеяния, мы получаем следующие уравнения для

нахождения величин F и G :

$$\begin{aligned}
 F(\eta'', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' F(\eta'', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) - \eta' F(\eta', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0)}{\eta'' - \eta'} \times \\
 &\quad \times x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' - \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau_0}{\eta''}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta'' + \eta'} \times \\
 &\quad \times \sigma(\eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) x(\eta, -\eta', \varphi - \varphi') d\eta' + \\
 &\quad + x(-\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) \rho_1(\eta'', \zeta), \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\eta'', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' G(\eta'', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) - \eta' G(\eta', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0)}{\eta'' - \eta'} \times \\
 &\quad \times x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' - \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau_0}{\eta''}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta'' + \eta'} \times \\
 &\quad \times \rho(\eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) x(\eta, -\eta', \varphi - \varphi') d\eta' + \\
 &\quad + x(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) \sigma_1(\eta'', \zeta), \quad (21)
 \end{aligned}$$

причем $F(\eta', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) = 0$ и $G(\eta', \eta', \zeta, \varphi' - \varphi_0) = 0$ при $\eta' < 0$.

Как и раньше, предположим, что индикатриса рассеяния разложена в ряд по полиномам Лежандра:

$$x(\gamma) = \sum_{i=0}^n x_i P_i(\cos \gamma). \quad (22)$$

В таком случае

$$x(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \sum_{m=0}^n \cos m(\varphi - \varphi') \sum_{i=m}^n c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta'), \quad (23)$$

где

$$c_{i0} = x_i, \quad c_{im} = 2x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}. \quad (24)$$

Величины F и G мы будем искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} F(\eta'', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \sum_{m=0}^n \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{i=m}^n u_i^m(\eta'', \zeta) P_i^m(\eta), \\ G(\eta'', \eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \sum_{m=0}^n \cos m(\varphi - \varphi_0) \sum_{i=m}^n v_i^m(\eta'', \zeta) P_i^m(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где $u_i^m(\eta, \zeta)$ и $v_i^m(\eta, \zeta)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (23) и (25) в уравнения (20) и (21), находим:

$$\begin{aligned} u_i^m(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \times \\ &\times \sum_{j=m}^n \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_j^m(\eta, \zeta) - \eta' u_j^m(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') P_j^m(\eta') d\eta' - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} v_j^m(\eta', \zeta) P_i^m(-\eta') P_j^m(\eta') d\eta' \right] + \\ &+ c_{im} P_i^m(-\zeta) \rho_1(\eta, \zeta); \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_i^m(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \times \\ &\times \sum_{j=m}^n \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\eta v_j^m(\eta, \zeta) - \eta' v_j^m(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') P_j^m(\eta') d\eta' - \right. \\ &\left. - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} u_j^m(\eta', \zeta) P_i^m(-\eta') P_j^m(\eta') d\eta' \right] + \\ &+ c_{im} P_i^m(\zeta) \sigma_1(\eta, \zeta). \quad (27) \end{aligned}$$

Таким образом, для каждого m мы имеем отдельную систему линейных интегральных уравнений, определяющих $u_i^m(\eta, \zeta)$ и $v_i^m(\eta, \zeta)$.

Согласно (19) и (25) искомые коэффициенты яркости следующим образом выражаются через функции $u_i^m(\eta, \zeta)$

и $v_i^m(\eta, \zeta)$:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \sum_{m=0}^n \rho_m(\eta, \zeta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ \sigma(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) &= \sum_{m=0}^n \sigma_m(\eta, \zeta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho_m(\eta, \zeta) &= \sum_{i=m}^n u_i^m(\eta, \zeta) P_i^m(\eta); \\ \sigma_m(\eta, \zeta) &= \sum_{i=m}^n v_i^m(\eta, \zeta) P_i^m(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Нетрудно найти уравнения, определяющие непосредственно величины $\rho_m(\eta, \zeta)$ и $\sigma_m(\eta, \zeta)$. Для этого преобразуем уравнения (26) и (27) к виду:

$$\begin{aligned} u_i^m(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_m(\eta', \zeta) - \eta' \rho_m(\eta, \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' - \right. \\ &- \sum_{j=m}^n u_j^m(\eta, \zeta) \int_{-1}^{+1} \frac{P_j^m(\eta) - P_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' - \\ &- \left. e^{-\frac{\zeta_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} \sigma_m(\eta', \zeta) P_i^m(-\eta') d\eta' \right] + \\ &+ c_{im} P_i^m(-\zeta) \rho_1(\eta, \zeta); \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_i^m(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\eta \sigma_m(\eta', \zeta) - \eta' \sigma_m(\eta, \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' - \right. \\ &- \sum_{j=m}^n v_j^m(\eta, \zeta) \int_{-1}^{+1} \frac{P_j^m(\eta) - P_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' - \\ &- \left. e^{-\frac{\zeta_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta + \eta'} \rho_m(\eta', \zeta) P_i^m(-\eta') d\eta' \right] + \\ &+ c_{im} P_i^m(\zeta) \sigma_1(\eta, \zeta). \quad (31) \end{aligned}$$

Уравнения (30) и (31) можно рассматривать как системы линейных алгебраических уравнений относительно $u_i^m(\eta, \zeta)$ и $v_i^m(\eta, \zeta)$. Находя из этих уравнений функции $u_i^m(\eta, \zeta)$ и $v_i^m(\eta, \zeta)$ и подставляя их в соотношения (29), мы для каждого m действительно получаем два линейных интегральных уравнения для определения $\rho_m(\eta, \zeta)$ и $\sigma_m(\eta, \zeta)$. После нахождения этих величин полные коэффициенты яркости составляются по формулам (28).

Применим полученные уравнения к случаю среды бесконечно большой оптической толщины. В этом случае нам надо найти только функции $u_i^m(\eta, \zeta)$, так как все функции $v_i^m(\eta, \zeta)$ равны нулю. Вместо уравнений (26) имеем:

$$u_i^m(\eta, \zeta) = \\ = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \sum_{j=m-1}^n \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_j^m(\eta, \zeta) - \eta' u_j^m(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') P_j^m(\eta') d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{4} c_{im} \frac{P_i^m(-\zeta)}{\eta + \frac{\zeta}{2}}. \quad (32)$$

Эти уравнения могут быть переписаны так:

$$u_i^m(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_m(\eta, \zeta) - \eta' \rho_m(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' - \right. \\ \left. - \sum_{j=m}^n u_j^m(\eta, \zeta) \int_{-1}^{+1} \frac{P_j^m(\eta) - P_j^m(\eta')}{\eta - \eta'} P_i^m(\eta') d\eta' \right] + \\ + \frac{\lambda}{4} c_{im} \frac{P_i^m(-\zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (33)$$

Находя из уравнений (33) для данного m функции $u_i^m(\eta, \zeta)$ и подставляя их в первое из соотношений (29), получаем одно интегральное уравнение для определения $\rho_m(\eta, \zeta)$. После этого при помощи первой из формул (28) находится полный коэффициент отражения.

Допустим, например, что индикатриса рассеяния имеет вид

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma.$$

Тогда

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi - \varphi_0) = \rho_0(\eta, \zeta) + \rho_1(\eta, \zeta) \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (34)$$

$$\rho_0(\eta, \zeta) = u_0^0(\eta, \zeta) + u_1^0(\eta, \zeta) \eta, \quad (35)$$

$$\rho_1(\eta, \zeta) = u_1^1(\eta, \zeta) \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (36)$$

Функции $u_0^0(\eta, \zeta)$ и $u_1^0(\eta, \zeta)$ находятся из системы уравнений:

$$u_0^0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{-1} \frac{\eta u_0^0(\eta, \zeta) - \eta' u_0^0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_1^0(\eta, \zeta) - \eta' u_1^0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} \eta' d\eta' + \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\eta + \zeta}, \quad (37)$$

$$u_1^0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} x_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_0^0(\eta, \zeta) - \eta' u_0^0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} \eta' d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{2} x_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_1^0(\eta, \zeta) - \eta' u_1^0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} \eta'^2 d\eta' - \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\zeta}{\eta + \zeta}, \quad (38)$$

а функция $u_1^1(\eta, \zeta)$ — из уравнения

$$u_1^1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} x_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_1^1(\eta, \zeta) - \eta' u_1^1(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} (1 - \eta'^2) d\eta' + \\ + \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\eta + \zeta}. \quad (39)$$

Вместо уравнений (37) и (38) можно написать:

$$u_0^0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_0(\eta, \zeta) - \eta' \rho_0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} d\eta' - \\ - \lambda \eta u_1^0(\eta, \zeta) + \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\eta + \zeta}, \quad (40)$$

$$u_1^0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} x_1 \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_0(\eta, \zeta) - \eta' \rho_0(\eta', \zeta)}{\eta - \eta'} \eta' d\eta' - \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\zeta}{\eta + \zeta}. \quad (41)$$

Находя из (40) и (41) функции $u_0^0(\eta, \zeta)$ и $u_1^0(\eta, \zeta)$ и подставляя их в (35), получаем:

$$\rho_0(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho_0(\eta', \zeta) - \eta' \rho(\eta, \zeta)}{\eta - \eta'} [1 + (1 - \lambda) x_1 \eta \eta'] d\eta' + \frac{\lambda}{4} \frac{1 - (1 - \lambda) x_1 \eta \zeta}{\eta + \zeta}. \quad (42)$$

Из (36) и (39), очевидно, следует:

$$\begin{aligned} \rho_1(\eta, \zeta) = & \\ = \frac{\lambda}{4} x_1 \int_{-1}^{+1} & \frac{\eta \rho_1(\eta', \zeta) \sqrt{1 - \eta'^2} - \eta' \rho_1(\eta, \zeta) \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - \eta'} \sqrt{1 - \eta'^2} d\eta' + \\ & + \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)}}{\eta + \zeta}. \quad (43) \end{aligned}$$

Таким образом, в случае простейшей несферической индикатрисы рассеяния задача о диффузном отражении света плоским слоем бесконечно большой оптической толщины сводится к линейным интегральным уравнениям (42) и (43).

Отметим, что в случае сферической индикатрисы рассеяния коэффициент отражения света средой бесконечно большой оптической толщины определяется уравнением

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta \rho(\eta', \zeta) - \eta' \rho(\eta, \zeta)}{\eta - \eta'} d\eta' + \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\eta + \zeta}, \quad (44)$$

которое получается из (12) при $\tau_0 = \infty$ или из (42) при $x_1 = 0$. [Напомним, что в (42) $\rho_0(\eta', \zeta) = 0$ при $\eta' < 0$.]

Сравнивая между собой уравнения (42) и (44), мы видим, что при $\lambda = 1$ они совпадают. Это значит, что в случае чистого рассеяния усредненный по азимуту коэффициент отражения при простейшей несферической индикатрисе рассеяния совпадает с коэффициентом отражения при сферической индикатрисе рассеяния. Такой вывод уже был сделан раньше из других уравнений (в § 2 предыдущей главы).

§ 2. Интегральные уравнения для вспомогательных функций

Найденные выше линейные интегральные уравнения, определяющие коэффициенты яркости, дают возможность получить также линейные интегральные уравнения для вспомогательных функций, введенных В. А. Амбарцумяном.

Займемся сначала задачей о диффузном отражении света средой бесконечно большой оптической толщины при сферической индикатрисе рассеяния. В данном случае коэффициент яркости $\rho(\eta, \zeta)$ определяется интегральным уравнением (44), которое мы перепишем в виде:

$$\rho(\eta, \zeta) a(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta' - \eta} \rho(\eta', \zeta) d\eta' + \frac{\lambda}{4} \frac{1}{\eta + \zeta}, \quad (45)$$

где

$$a(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2} \eta \lg \frac{1 + \eta}{1 - \eta}. \quad (46)$$

Введем вместо $\rho(\eta, \zeta)$ новую неизвестную функцию $R(\eta, \zeta)$ с помощью соотношения

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{R(\eta, \zeta)}{\eta + \zeta}. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (45), получаем следующее уравнение для определения $R(\eta, \zeta)$:

$$\begin{aligned} R(\eta, \zeta) a(\eta) - \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 R(\eta', \zeta) \frac{d\eta'}{\eta' - \eta} = \\ = \frac{\lambda}{2} \zeta \int_0^1 R(\eta', \zeta) \frac{d\eta'}{\eta' + \zeta} + 1. \end{aligned} \quad (48)$$

Из (48) видно, что функцию $R(\eta, \zeta)$ можно пытаться искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от η , а другая только от ζ . Вследствие симметричности $\rho(\eta, \zeta)$ эти функции должны быть

одинаковы. Поэтому положим:

$$R(\eta, \zeta) = \varphi(\eta) \varphi(\zeta). \quad (49)$$

В результате подстановки (49) в (48) мы приходим к следующему уравнению:

$$\varphi(\eta) a(\eta) - \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta' = \frac{\lambda}{2} \zeta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' + \zeta} d\eta' + \frac{1}{\varphi(\zeta)}, \quad (50)$$

которое может быть удовлетворено только в случае выполнения двух соотношений:

$$\varphi(\zeta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \varphi(\zeta) \zeta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' + \zeta} d\eta' \quad (51)$$

и

$$\varphi(\eta) a(\eta) - \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta' = 1. \quad (52)$$

Следовательно, если функция (49) действительно является решением уравнения (48), то функция φ должна удовлетворять как уравнению (51), так и уравнению (52).

Легко показать, что из (51) следует (52). Для этого умножим (51) на $\frac{1}{\zeta - \eta}$ и проинтегрируем по ζ в пределах от 0 до 1. После небольших преобразований находим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \eta} d\zeta &= \int_0^1 \frac{d\zeta}{\zeta - \eta} + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' + \eta'} d\eta' \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \eta} d\zeta + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' + \eta'} \eta' d\eta' \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta' + \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (53)$$

Умножая (53) на $\varphi(\eta)$ и пользуясь (51), получаем:

$$-\varphi(\eta) \lg \frac{1+\eta}{1-\eta} - \int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \eta} d\zeta + \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' + \eta'} d\eta' = 0. \quad (54)$$

Умножая (54) на $\frac{\lambda}{2}$ и снова пользуясь (51), мы приходим к уравнению (52).

Таким образом, мы можем сделать следующий вывод: искомая функция $\rho(\eta, \zeta)$ дается формулами (47) и (49), а функция $\varphi(\eta)$ определяется либо уравнением (51), либо уравнением (52).

Формулы (47) и (49), а также уравнение (51) уже были выведены раньше (в § 2 главы III). Теперь мы вывели их другим способом и получили одновременно новое уравнение, которому должна удовлетворять функция $\varphi(\eta)$ — линейное интегральное уравнение (52). Разумеется, если результаты главы III считать известными, то можно было бы ограничиться получением (52) из (51).

Линейные интегральные уравнения для вспомогательных функций могут быть также получены и при индикатрисе рассеяния произвольного вида. Рассмотрим в виде примера случай простейшей несферической индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$. Коэффициент отражения в этом случае дается формулой (34), а величины $\rho_0(\eta, \zeta)$ и $\rho_1(\eta, \zeta)$ определяются уравнениями (42) и (43).

С другой стороны, как было показано ранее (в § 2 главы III), величины $\rho_0(\eta, \zeta)$ и $\rho_1(\eta, \zeta)$ даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi_0^0(\eta) \varphi_0^0(\zeta) - x_1 \varphi_1^0(\eta) \varphi_1^0(\zeta)}{\eta + \zeta}; \\ \rho_1(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} x_1 \frac{\varphi_1^1(\eta) \varphi_1^1(\zeta)}{\eta + \zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

а вспомогательные функции $\varphi_0^0(\eta)$, $\varphi_1^0(\eta)$ и $\varphi_1^1(\eta)$ определяются системой функциональных уравнений (53) и (54) той же главы.

Действуя так же, как в случае сферической индикатрисы рассеяния, мы находим, что вспомогательные функции $\varphi_0^0(\eta)$, $\varphi_1^0(\eta)$ и $\varphi_1^1(\eta)$ должны удовлетворять не только указанным функциональным уравнениям, но и следующие

щим линейным интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} \varphi_0^0(\eta) \left[1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_{-1}^{+1} \frac{1 + (1-\lambda) x_1 \eta \eta'}{\eta' - \eta} d\eta' \right] = \\ = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{1 + (1-\lambda) x_1 \eta \eta'}{\eta' - \eta} \varphi_0^0(\eta') d\eta', \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^0(\eta) \left[1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_{-1}^{+1} \frac{1 + (1-\lambda) x_1 \eta \eta'}{\eta' - \eta} d\eta' \right] = \\ = (1 - \lambda) \eta + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{1 + (1-\lambda) x_1 \eta \eta'}{\eta' - \eta} \varphi_1^0(\eta') d\eta', \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^1(\eta) \left[1 + \frac{\lambda}{4} x_1 \eta \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \eta'^2}{\eta' - \eta} d\eta' \right] = \\ = \sqrt{1 - \eta^2} \left[1 + \frac{\lambda}{4} x_1 \eta \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \eta'^2}}{\eta' - \eta} \varphi_1^1(\eta') d\eta' \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Следует отметить существенные преимущества только что полученных линейных интегральных уравнений перед системой функциональных уравнений (53) и (54) предыдущей главы: 1) каждая из вспомогательных функций определяется из отдельного уравнения; 2) как будет показано ниже, решение этих уравнений может быть получено в конечном виде. Указанные преимущества линейных интегральных уравнений перед системой функциональных уравнений для определения вспомогательных функций сохраняются в случае среды бесконечно большой оптической толщины и при произвольной индикатрисе рассеяния.

В случае среды конечной оптической толщины τ_0 коэффициенты отражения и пропускания при сферической индикатрисе рассеяния определяются уравнениями (12) и (13). С другой стороны, как было показано в § 4 главы III, эти величины даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta) - \psi(\eta) \psi(\zeta)}{\eta + \zeta}; \\ \sigma(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\zeta) \psi(\eta) - \psi(\zeta) \varphi(\eta)}{\eta - \zeta}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

причем для нахождения вспомогательных функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ служит система функциональных уравнений (79) и (80).

Подставляя (59) в (12) и (13), мы получаем, что вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ должны также удовлетворять следующей системе линейных интегральных уравнений:

$$\varphi(\eta) a(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta' - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\psi(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \quad (60)$$

$$\psi(\eta) a(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\psi(\eta')}{\eta' - \eta} d\eta' - \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta'. \quad (61)$$

В данном случае линейные интегральные уравнения не имеют указанных выше преимуществ перед функциональными уравнениями. Система уравнений (60) и (61) может быть решена численными методами *).

§ 3. Решение интегральных уравнений

Мы уже видели, что в случае среды бесконечно большой оптической толщины линейные интегральные уравнения, определяющие коэффициенты яркости, имеют ядра типа Коши. Это обстоятельство позволяет найти точные выражения для коэффициентов яркости в конечном виде, так как указанные уравнения могут быть решены методом Карлемана [5].

Будем считать сначала, что в среде происходит изотропное рассеяние света. В таком случае коэффициент отражения $\rho(\eta, \zeta)$ определяется уравнением (45). Однако для нас удобнее начать рассмотрение вопроса не с коэффициента отражения, а с коэффициента пропускания (понимая под коэффициентом пропускания излучения средой бесконечно большой оптической толщины асимптотическое выражение этого коэффициента для среды большой оптической толщины). Полагая в уравнении (13) $\tau_0 = \infty$,

*) Недавно уравнения (60) и (61) были получены другим способом и подробно исследованы Басбриож (Ар. J. 122, № 2, 1955).

получаем следующее уравнение для определения коэффициента пропускания в данном случае

$$\sigma(\eta) a(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\sigma(\eta')}{\eta' - \eta} \eta' d\eta', \quad (62)$$

где $a(\eta)$ дается формулой (46).

Уравнение (62) определяет коэффициент пропускания с точностью до постоянного множителя, зависящего от τ_0 и ζ [поэтому мы и пишем просто $\sigma(\eta)$, а не $\sigma(\eta, \zeta, \tau_0)$]. Иными словами, найденная из уравнения (62) величина $\sigma(\eta)$ дает только относительное распределение диффузно-пропущенного излучения по углам.

Существенно то, что если нам известна функция $\sigma(\eta)$, то легко может быть найдена и вспомогательная функция $\varphi(\eta)$, входящая в выражение для $\rho(\eta, \zeta)$.

Как было показано выше, функция $\varphi(\eta)$ должна удовлетворять уравнению (52). Пользуясь соотношением

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = 1 - \sqrt{1 - \lambda}, \quad (63)$$

вытекающим из (51), мы можем переписать уравнение (52) также в виде

$$\varphi(\eta) a(\eta) = \sqrt{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta' - \eta} \eta' d\eta'. \quad (64)$$

Сравнивая между собой уравнения (62) и (64), мы видим, что первое из них является соответствующим однородным уравнением для второго. Это значит, что из уравнения (64) функция $\varphi(\eta)$ определяется только с точностью до произвольной постоянной. Поэтому для полного определения функции $\varphi(\eta)$ следует наложить на нее некоторое дополнительное условие, например приведенное выше соотношение (63).

Легко убедиться, что если найденная из уравнения (62) функция $\sigma(\eta)$ нормирована согласно условию

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \sigma(\eta) d\eta = 1, \quad (65)$$

то функция

$$\varphi(\eta) = (1 - k\eta)\sigma(\eta), \quad (66)$$

где постоянная k определяется из соотношения

$$\frac{\lambda}{2} k \int_0^1 \sigma(\eta) \eta d\eta = \sqrt{1 - \lambda}, \quad (67)$$

будет удовлетворять как уравнению (64), так и соотношению (63).

Таким образом, после решения задачи о диффузном пропускании света плоским слоем бесконечно большой оптической толщины может быть без труда получено и решение задачи о диффузном отражении света этим слоем.

Как уже сказано, уравнения типа (62) решаются методом Карлемана. Решение самого уравнения (62) имеет вид

$$\sigma(\eta) = \frac{C}{1 - \eta} \frac{e^{\omega(\eta)}}{\sqrt{a^2(\eta) + \left(\frac{\lambda}{2} \pi \eta\right)^2}}, \quad (68)$$

где

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{\frac{\lambda}{2} \pi \eta'}{a(\eta') \sqrt{\eta' - \eta}} d\eta', \quad (69)$$

а C — произвольная постоянная.

Значения функции $\sigma(\eta)$ при разных значениях параметра λ приведены в таблице 17 (стр. 152).

Для случая несферической индикатрисы рассеяния мы ограничимся рассмотрением диффузного пропускания излучения.

Мы уже знаем, что коэффициент пропускания излучения средой бесконечно большой оптической толщины не зависит от азимута. Поэтому в соотношениях (28) и (29) следует положить $m = 0$. Обозначая коэффициент пропускания через $\sigma(\eta)$ (как и в случае сферической индикатрисы рассеяния, мы не сможем определить зависимость σ от τ_0 и ζ), имеем:

$$\sigma(\eta) = \sum_{i=0}^n v_i(\eta) P_i(\eta), \quad (70)$$

где $P_i(\eta)$ — полином Лежандра. Полагая в уравнениях (27)

Таблица 17

Коэффициент пропускания $\sigma(\eta)$ при сферической индикатрисе рассеяния

$\eta \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	$\eta \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,6	2,68	2,54	2,37	2,19
0,1	1,21	1,23	1,24	1,25	0,7	3,28	2,98	2,67	2,37
0,2	1,42	1,43	1,44	1,45	0,8	4,14	3,55	3,01	2,55
0,3	1,64	1,65	1,65	1,64	0,9	5,58	4,34	3,41	2,73
0,4	1,91	1,90	1,87	1,83	1,0	8,38	5,51	3,90	2,91
0,5	2,25	2,19	2,11	2,01					

$m = 0$ и $\tau_0 = \infty$, получаем следующие уравнения для определения функций $v_i(\eta)$:

$$v_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \sum_{j=0}^n \int_{-1}^{+1} \frac{\eta v_j(\eta) - \eta' v_j(\eta')}{\eta - \eta'} P_j(\eta') P_i(\eta') d\eta'. \quad (71)$$

Уравнения (71) могут быть переписаны так:

$$v_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} x_i \int_{-1}^{+1} \frac{\eta v(\eta) - \eta' v(\eta')}{\eta - \eta'} P_i(\eta') d\eta' - \frac{\lambda}{2} x_i \eta \sum_{j=i+1}^n c_{ij}(\eta) v_j(\eta), \quad (72)$$

где через $c_{ij}(\eta)$ обозначен полином

$$c_{ij}(\eta) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_j(\eta) - P_j(\eta')}{\eta - \eta'} P_i(\eta') d\eta'. \quad (73)$$

Рассматривая уравнения (72) как систему линейных алгебраических уравнений относительно функций $v_i(\eta)$,

находим:

$$v_i(\eta) = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=i}^n x_j L_{ij}(\eta) \int_{-1}^{+1} \frac{\eta^{\tau}(\eta) - \eta'^{\tau}(\eta')}{\eta - \eta'} P_j(\eta') d\eta', \quad (74)$$

где $L_{ii}(\eta) = 1$, а

$$L_{ij}(\eta) = -\frac{\lambda}{2} x_i \eta \sum_{k=i}^{j-1} L_{ik}(\eta) c_{kj}(\eta) \quad (j = i + 1, \dots, n). \quad (75)$$

Подстановка (74) в (70) дает:

$$\sigma(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta^{\tau}(\eta) - \eta'^{\tau}(\eta')}{\eta - \eta'} A(\eta, \eta') d\eta', \quad (76)$$

где

$$A(\eta, \eta') = \sum_{i=0}^n P_i(\eta) \sum_{j=i}^n x_j L_{ij}(\eta) P_j(\eta').$$

Меняя здесь порядок суммирования и вводя обозначение

$$R_j(\eta) = \sum_{i=0}^j P_i(\eta) L_{ij}(\eta), \quad (77)$$

получаем:

$$A(\eta, \eta') = \sum_{j=0}^n x_j R_j(\eta) P_j(\eta'). \quad (78)$$

Пользуясь (75), легко получить, что функции $R_j(\eta)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению:

$$R_j(\eta) = P_j(\eta) - \frac{\lambda}{2} \eta \sum_{k=0}^{j-1} x_k c_{kj}(\eta) R_k(\eta). \quad (79)$$

Таким образом, в случае произвольной индикатрисы рассеяния коэффициент пропускания излучения средой бесконечно большой оптической толщины определяется уравнением (76), а величины $A(\eta, \eta')$ и $R_j(\eta)$ — формулами (78) и (79).

Уравнение (76) может быть решено методом Карлемана. Для этого перепишем его так:

$$\sigma(\eta) a(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\eta'}{\eta' - \eta} A(\eta, \eta') \sigma(\eta') d\eta' + f(\eta), \quad (80)$$

где

$$a(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_{-1}^{+1} \frac{A(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} d\eta', \quad (81)$$

$$f(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{A(\eta, \eta') - A(\eta', \eta)}{\eta' - \eta} \sigma(\eta') \eta' d\eta'. \quad (82)$$

Решение уравнения (80) имеет вид

$$\sigma(\eta) = \frac{a(\eta) f(\eta)}{a^2(\eta) + \left[\frac{\lambda}{2} \pi \eta A(\eta, \eta) \right]^2} + \frac{e^{\omega(\eta)}}{\sqrt{a^2(\eta) + \left[\frac{\lambda}{2} \pi \eta A(\eta, \eta) \right]^2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\eta' A(\eta', \eta') f(\eta') e^{-\omega(\eta')}}{\sqrt{a^2(\eta') + \left[\frac{\lambda}{2} \pi \eta' A(\eta', \eta') \right]^2}} \frac{d\eta'}{\eta' - \eta} + \frac{C}{1 - \eta} \right\}, \quad (83)$$

где

$$\omega(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{\frac{\lambda}{2} \pi \eta' A(\eta', \eta')}{a(\eta')} \frac{d\eta'}{\eta' - \eta} \quad (84)$$

и C — произвольная постоянная. Коэффициенты полинома $f(\eta)$ определяются при подстановке (83) в (82).

Значения величины $\sigma(\eta)$ для индикатрисы рассеяния $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$ при разных значениях параметра λ , найденные по приведенным формулам, даны в таблице 18.

Полученные результаты могут быть использованы при нахождении интенсивности излучения, диффузно-пропущенного облаками. Если оптическая толщина облачного слоя велика, то относительное распределение яркости по облачному небу при любой индикатрисе рассеяния и при любом значении параметра λ дается формулой (83). В таблицах 17 (стр. 152) и 18 содержатся значения яркости в различных точках облачного неба по отношению к яркости

Таблица 18

Коэффициент пропускания $\sigma(\eta)$ при индикатрисе рассеяния
 $x(\gamma) = 1 + \cos \gamma$

$\eta \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	$\eta \backslash \lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	0,6	2,87	2,62	2,39	2,19
0,1	1,24	1,24	1,25	1,25	0,7	3,46	3,04	2,68	2,37
0,2	1,48	1,47	1,46	1,45	0,8	4,24	3,54	2,99	2,55
0,3	1,74	1,71	1,67	1,64	0,9	5,35	4,18	3,34	2,73
0,4	2,05	1,97	1,90	1,83	1,0	7,06	5,01	3,74	2,91
0,5	2,42	2,27	2,14	2,01					

горизонта при двух простейших индикатрисах рассеяния для разных значений параметра λ . Мы видим, что отношение яркости в зените к яркости горизонта тем больше, чем больше роль истинного поглощения в облаках.

С задачей о диффузии излучения в среде большой оптической толщины мы встречаемся также при рассмотрении проблемы переноса излучения через звездную фотосферу. Источники излучения звезды находятся в ее внутренних слоях, т. е. на очень большой оптической глубине. В фотосфере нет ни источников, ни стоков энергии. Поэтому можно считать, что в данном случае мы имеем дело с диффузией излучения при отсутствии истинного поглощения. Индикатриса рассеяния является сферической. Следовательно, распределение интегральной яркости на диске звезды дается формулой (68) при $\lambda = 1$. Значения величины $\sigma(\eta)$ для этого случая приведены в последнем столбце таблицы 17.

ГЛАВА V

РАСSEЯНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННОГО СВЕТА

В предыдущих главах мы не учитывали состояния поляризации излучения. Однако при строгом рассмотрении процесса рассеяния это делать необходимо, так как в результате рассеяния свет, вообще говоря, становится поляризованным.

Учет поляризации может существенно сказаться на общей интенсивности рассеянного излучения. Кроме того, — и это еще более важно — большой интерес представляет задача о нахождении состояния поляризации рассеянного излучения. Решение этой задачи и последующее сравнение теории с наблюдениями дают дополнительные возможности для изучения физических свойств рассеивающей среды. В частности, задача эта имеет значение для планетных атмосфер, а также для некоторых классов звезд, в атмосферах которых большую роль играет рассеяние света свободными электронами.

В настоящей главе указанная задача рассматривается для случая закона рассеяния Рэлея. Сначала выводятся уравнения переноса излучения и уравнения лучистого равновесия, учитывающие поляризацию света. Эти уравнения определяют как общую интенсивность излучения (причем более точно, чем раньше), так и величины, характеризующие поляризацию света, т. е. степень поляризации света и положение плоскости поляризации. Далее полученные уравнения применяются к среде бесконечно большой оптической толщины, причем определяется световой режим в глубоких слоях среды и находятся интенсивности диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного света.

Изложение ведется на основе работы автора [1]. Другим способом и более подробно проблема рассеяния поляризованного света была рассмотрена Чандрасекаром [2].

§ 1. Основные уравнения

В случае неполяризованного света для характеристики поля излучения достаточно задать одну величину — интенсивность излучения. В случае поляризованного света поле излучения характеризуется тремя величинами. Эти три величины можно выбирать различно. Мы выберем их так, чтобы все они имели размерность интенсивности.

Возьмем в плоскости, перпендикулярной к лучу, прямоугольную систему координат xOy . Обозначим через I_x и I_y составляющие интенсивности излучения по осям Ox и Oy , через I_β — составляющую интенсивности излучения по направлению, образующему угол β с осью Ox , и через I_1 и I_2 — максимальное и минимальное значения величины I_β , имеющие место при углах β_0 и $\beta_0 + \frac{\pi}{2}$. Мы имеем:

$$I_x = I_1 \cos^2 \beta_0 + I_2 \sin^2 \beta_0, \quad (1)$$

$$I_y = I_1 \sin^2 \beta_0 + I_2 \cos^2 \beta_0, \quad (2)$$

$$I_\beta = I_1 \cos^2(\beta - \beta_0) + I_2 \sin^2(\beta - \beta_0). \quad (3)$$

Отсюда получаем:

$$I_\beta = I_x \cos^2 \beta + L \cos \beta \sin \beta + I_y \sin^2 \beta, \quad (4)$$

где

$$L = (I_1 - I_2) \sin 2\beta_0. \quad (5)$$

Таким образом, для любого угла β величина I_β определяется заданием трех величин I_x , I_y и L . Эти три величины мы и будем употреблять в дальнейшем для характеристики поля излучения.

Удобно еще ввести следующие обозначения:

$$I_x + I_y = I, \quad I_x - I_y = K. \quad (6)$$

Очевидно, что

$$I_1 + I_2 = I, \quad I_1 - I_2 = \sqrt{K^2 + L^2}. \quad (7)$$

При принятых обозначениях величина I есть общая интенсивность излучения, степень поляризации p равна

$$p = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{\sqrt{K^2 + L^2}}{I}, \quad (8)$$

а положение плоскости поляризации определяется соот-

ношением (5). В дальнейшем вместо величин I_x , I_y , L мы будем также пользоваться величинами I , K , L .

Чтобы написать уравнения переноса излучения при учете поляризации, введем в рассмотрение коэффициент поглощения α и коэффициент излучения ϵ . Как обычно, введем также функцию $B = \frac{\epsilon}{\alpha}$. Так как излучение единицы объема обусловлено рассеянием света в этом объеме, то оно будет, вообще говоря, поляризованным. Обозначим через B_β составляющую величины B по направлению, образуемому углом β с осью Ox . По аналогии с (4) величина B_β может быть представлена в виде

$$B_\beta = B_x \cos^2 \beta + D \cos \beta \sin \beta + B_y \sin^2 \beta. \quad (9)$$

В дальнейшем для характеристики излучательной способности единицы объема мы будем употреблять либо тройку величин B_x , B_y , D , либо тройку величин B , C , D , причем

$$B = B_x + B_y, \quad C = B_x - B_y. \quad (10)$$

Очевидно, что изменение величин I , K , L вдоль луча будет определяться следующими уравнениями переноса излучения:

$$\frac{dI}{\alpha ds} = B - I, \quad \frac{dK}{\alpha ds} = C - K, \quad \frac{dL}{\alpha ds} = D - L, \quad (11)$$

являющимися обобщением обычного уравнения переноса на случай поляризованного света.

Чтобы составить уравнение лучистого равновесия, надо задать закон рассеяния света элементарным объемом среды. Мы будем считать, что в среде происходит истинное поглощение света и рассеяние по закону Рэлея. Коэффициент истинного поглощения обозначим через κ , коэффициент рассеяния — через σ . Далее, как и раньше, введем обозначение: $\frac{\sigma}{\kappa + \sigma} = \frac{\sigma}{\alpha} = \lambda$.

Как известно, закон рассеяния Рэлея формулируется следующим образом. Пусть $I_{||}$ и I_{\perp} суть интенсивности линейно-поляризованного излучения с электрическими векторами соответственно параллельным и перпендикулярным плоскости рассеяния. Если излучение падает на единич-

ный объем среды внутри телесного угла $d\omega$, то количество энергии, рассеянное этим объемом в направлении, образующем угол γ с направлением падающего излучения, в единичном телесном угле равно соответственно

$$\frac{3}{2} \sigma I_{\parallel} \cos^2 \gamma \frac{d\omega}{4\pi} \quad \text{и} \quad \frac{3}{2} \sigma I_{\perp} \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (12)$$

причем рассеянное излучение имеет то же направление электрического вектора, что и падающее излучение.

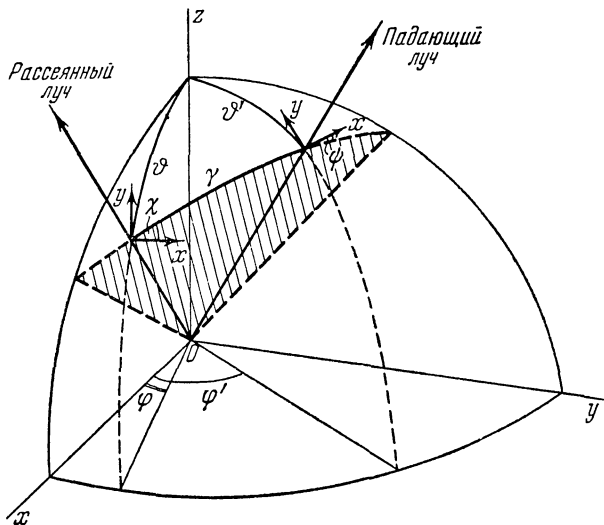


Рис. 13.

При законе рассеяния Рэлея мы получаем следующее уравнение лучистого равновесия:

$$\begin{aligned} B_x \cos^2 \beta + D \cos \beta \sin \beta + B_y \sin^2 \beta = \\ = \frac{3}{2} \lambda \int \{ I_1 [\cos(\psi - \beta_0) \cos \gamma \cos(\chi - \beta) + \\ + \sin(\psi - \beta_0) \sin(\chi - \beta)]^2 + I_2 [\sin(\psi - \beta_0) \cos \gamma \cos(\chi - \beta) - \\ - \cos(\psi - \beta_0) \sin(\chi - \beta)]^2 \} \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (13) \end{aligned}$$

где ψ — угол между плоскостью рассеяния и осью Ox для

падающего луча и χ — угол между плоскостью рассеяния и осью Ox для рассеянного луча (рис. 13).

Используя соотношения (1), (2) и (5), вместо уравнения (13) находим:

$$\begin{aligned} B_x \cos^2 \beta + D \cos \beta \sin \beta + B_y \sin^2 \beta = \\ = \frac{3}{2} \lambda \int \{ [I_x \cos^2 \psi + L \cos \psi \sin \psi + I_y \sin^2 \psi] \cos^2 \gamma \cos^2 (\chi - \beta) + \\ + [I_x \sin^2 \psi - L \cos \psi \sin \psi + I_y \cos^2 \psi] \sin^2 (\chi - \beta) + \\ + [(I_x - I_y) \sin 2\psi - L \cos 2\psi] \cos \gamma \cos (\chi - \beta) \sin (\chi - \beta) \} \frac{d\omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из уравнения (14) получаем:

$$\begin{aligned} B_x = \frac{3}{2} \lambda \int \{ [I_x \cos^2 \psi + L \cos \psi \sin \psi + I_y \sin^2 \psi] \cos^2 \gamma \cos^2 \chi + \\ + [I_x \sin^2 \psi - L \cos \psi \sin \psi + I_y \cos^2 \psi] \sin^2 \chi + \\ + [(I_x - I_y) \sin 2\psi - L \cos 2\psi] \cos \gamma \cos \chi \sin \chi \} \frac{d\omega}{4\pi}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_y = \frac{3}{2} \lambda \int \{ [I_x \cos^2 \psi + L \cos \psi \sin \psi + I_y \sin^2 \psi] \cos^2 \gamma \sin^2 \chi + \\ + [I_x \sin^2 \psi - L \cos \psi \sin \psi + I_y \cos^2 \psi] \cos^2 \chi - \\ - [(I_x - I_y) \sin 2\psi - L \cos 2\psi] \cos \gamma \cos \chi \sin \chi \} \frac{d\omega}{4\pi}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D = \frac{3}{2} \lambda \int \{ [I_x \cos^2 \psi + L \cos \psi \sin \psi + I_y \sin^2 \psi] \cos^2 \gamma \sin 2\chi - \\ - [I_x \sin^2 \psi - L \cos \psi \sin \psi + I_y \cos^2 \psi] \sin 2\chi - \\ - [(I_x - I_y) \sin 2\psi - L \cos 2\psi] \cos \gamma \cos 2\chi \} \frac{d\omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Мы будем характеризовать направление падающего луча зенитным расстоянием ϑ' и азимутом φ' , а направление рассеянного луча — зенитным расстоянием ϑ и азимутом φ (рис. 13). Для каждого луча ось Ox направим перпендикулярно к полярной оси.

Из рассмотрения сферического треугольника, образованного полярной осью, падающим лучом и рассеянным лучом, легко получить выражения для углов γ , ψ и χ через углы ϑ , ϑ' и $\varphi - \varphi'$. Выполняя это, вместо уравне-

ний (15), (16) и (17) находим:

$$B_x = \frac{3\lambda}{8\pi} \int \left\{ I_x \cos^2(\varphi - \varphi') + I_y \cos^2 \vartheta' \sin^2(\varphi - \varphi') - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} L \cos \vartheta' \sin 2(\varphi - \varphi') \right\} d\omega; \quad (18)$$

$$B_y = \frac{3\lambda}{8\pi} \int \left\{ I_x \cos^2 \vartheta \sin^2(\varphi - \varphi') + \right. \\ \left. + I_y [\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \sin \vartheta \sin \vartheta']^2 + \right. \\ \left. + L [\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \sin \vartheta \sin \vartheta] \cos \vartheta \sin(\varphi - \varphi') \right\} d\omega; \quad (19)$$

$$D = \frac{3\lambda}{8\pi} \int \left\{ I_x \cos \vartheta \sin 2(\varphi - \varphi') - 2I_y [\cos \vartheta \cos \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \right. \\ \left. + \sin \vartheta \sin \vartheta'] \cos \vartheta' \sin(\varphi - \varphi') + \right. \\ \left. + L [\sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \vartheta \cos \vartheta' \cos 2(\varphi - \varphi')] \right\} d\omega. \quad (20)$$

Это окончательный вид уравнения лучистого равновесия.

Отметим, что рассеяние излучения по закону Рэлея производится молекулами и свободными электронами. В случае рассеяния света молекулами объемный коэффициент рассеяния равен

$$\sigma = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4 N}, \quad (21)$$

где N — число молекул в 1 см^3 , n — показатель преломления среды, λ — длина волны излучения. Так как величина $n - 1$ пропорциональна N , то, как и должно быть, коэффициент рассеяния σ также пропорционален N .

В случае рассеяния света свободными электронами

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 N_e, \quad (22)$$

где N_e — число свободных электронов в 1 см^3 , c — скорость света, e — заряд электрона, m — его масса.

§ 2. Рассеяние света в земной атмосфере

Допустим, что среда состоит из плоскопараллельных слоев и освещена параллельными лучами. В первом приближении такой средой является земная атмосфера.

В случае среды, состоящей из плоскопараллельных слоев, все величины, характеризующие поле излучения, являются функциями от оптической глубины τ , угла ϑ между направлением излучения и нормалью к слоям и от азимута φ . Уравнения переноса излучения в данном случае принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI_x(\tau, \vartheta, \varphi)}{d\tau} &= B_x(\tau, \vartheta, \varphi) - I_x(\tau, \vartheta, \varphi), \\ \cos \vartheta \frac{dI_y(\tau, \vartheta, \varphi)}{d\tau} &= B_y(\tau, \vartheta, \varphi) - I_y(\tau, \vartheta, \varphi), \\ \cos \vartheta \frac{dL(\tau, \vartheta, \varphi)}{d\tau} &= D(\tau, \vartheta, \varphi) - L(\tau, \vartheta, \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В уравнениях лучистого равновесия целесообразно выделить, как это обычно делается, члены, соответствующие излучению, приходящему непосредственно от источников света. Мы будем считать, что среда освещена неполяризованным излучением, падающим под углом ϑ_0 к нормали и создающим освещенность перпендикулярной к нему площадки, равную πS . Для неполяризованного излучения $I_x = I_y = \frac{1}{2} I$, $L = 0$. Поэтому из уравнений (18), (19) и (20) получаем, что члены, учитывающие рассеяние излучения, пришедшего непосредственно от источников света, будут соответственно равны

$$B_{1x} = \frac{3\lambda}{16} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} (\cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi), \quad (24)$$

$$B_{1y} = \frac{3\lambda}{16} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} [\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \vartheta_0)^2], \quad (25)$$

$$D_1 = \frac{3\lambda}{16} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} (\cos \vartheta \sin^2 \vartheta_0 \sin 2\varphi - \sin \vartheta \sin 2\vartheta_0 \sin \varphi). \quad (26)$$

Во всех этих уравнениях принято, что азимут падающих на среду лучей равен нулю.

Полученные выражения для B_{1x} , B_{1y} и D_1 надо ввести в правые части уравнений (18), (19) и (20). Тогда входящие в эти уравнения величины I_x , I_y и L будут относиться только к диффузному излучению.

В граничных условиях, которые следует добавить к уравнениям переноса излучения и лучистого равновесия, должен быть учтен тот факт, что нет диффузного излучения, падающего на среду извне.

При помощи выражений для B_{1x} , B_{1y} , D_1 и уравнений переноса излучения могут быть найдены интенсивности излучения, диффузно-пропущенного и диффузно-отраженного средой при учете рассеяния первого порядка. Для интенсивностей диффузно-пропущенного излучения получаем:

$$I_{1x}(\tau_0, \vartheta, \varphi) = \frac{3}{4} S \sigma_1(\tau_0, \vartheta) \cos \vartheta_0 (\cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta_0 \sin^2 \varphi), \quad (27)$$

$$I_{1y}(\tau_0, \vartheta, \varphi) = \frac{3}{4} S \sigma_1(\tau_0, \vartheta) \cos \vartheta_0 [\cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \\ + (\cos \vartheta \cos \vartheta_0 \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \vartheta_0)^2], \quad (28)$$

$$L_1(\tau_0, \vartheta, \varphi) = \frac{3}{4} S \sigma_1(\tau_0, \vartheta) (\cos \vartheta \sin^2 \vartheta_0 \sin 2\varphi - \\ - \sin \vartheta \sin 2\vartheta_0 \sin \varphi), \quad (29)$$

где

$$\sigma_1 = \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0} - e^{-\tau_0 \sec \vartheta}}{\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta}, \quad (30)$$

а τ_0 — оптическая толщина среды. Аналогично могут быть определены величины $I_1(0, \vartheta, \varphi)$, $I_{1y}(0, \vartheta, \varphi)$ и $L_1(0, \vartheta, \varphi)$.

Формулы (27), (28) и (29) могут быть использованы для нахождения величин, характеризующих свечение неба. Применим их в виде примера к точкам неба, находящимся в одном вертикале с Солнцем. Полагая в формулах (27) — (29) $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, получаем:

$$I_{1x} = \frac{3}{4} S \sigma_1 \cos \vartheta_0; I_{1y} = \frac{3}{4} S \sigma_1 \cos \vartheta_0 \cos^2(\vartheta \mp \vartheta_0); L_1 = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует, что полная интенсивность излучения равна

$$I = \frac{3}{4} S \sigma_1 \cos \vartheta_0 [1 + \cos^2(\vartheta \mp \vartheta_0)], \quad (32)$$

степень поляризации равна

$$P = \frac{1 - \cos^2(\vartheta \mp \vartheta_0)}{1 + \cos^2(\vartheta \mp \vartheta_0)}, \quad (33)$$

а плоскость поляризации для всех точек вертикала Солнца

одинакова (преимущественные колебания происходят перпендикулярно к плоскости вертикала). Наибольшая степень поляризации $p = 1$ имеет место на угловом расстоянии 90° от Солнца.

Формулы (27), (28) и (29) получены при учете рассеяния лишь первого порядка. Если учесть рассеяния высших порядков, т. е. решить приведенные выше уравнения переноса излучения и лучистого равновесия, то картина распределения поляризации излучения в вертикале Солнца окажется более сложной. Наибольшая степень поляризации будет меньше единицы. Около Солнца и в стороне, противоположной Солнцу (при низком его положении), будут области отрицательной поляризации (а значит, и нейтральные точки, в которых поляризация меняет знак). Эти выводы в общих чертах соответствуют наблюдениям.

Однако при более строгом рассмотрении проблемы поляризации света неба необходимо учитывать еще следующие факторы: 1) отражение света земной поверхностью (это просто учесть постановкой соответствующих граничных условий); 2) наличие в атмосфере, кроме молекул, также крупных частиц, рассеивающих свет не по закону Рэлея; 3) оптическую анизотропию молекул, что ведет к деполяризации рассеянного света.

Полученные выше уравнения переноса излучения и лучистого равновесия могут быть решены методами, изложенными в предыдущих главах. В частности, для определения интенсивностей излучения, выходящего из среды, могут быть составлены и решены линейные интегральные уравнения. Ниже это будет сделано для среды бесконечно большой оптической толщины.

§ 3. Рассеяние света в атмосферах планет

Рассмотрим задачу о диффузном отражении света средой бесконечно большой оптической толщины, рассеивающей излучение по закону Рэлея. Эта задача интересна для физики планет с оптически толстыми атмосферами.

Для простоты допустим, что внешнее излучение падает на среду нормально ($\vartheta_0 = 0$). В таком случае поле излуче-

ния будет обладать аксиальной симметрией, т. е. интенсивности излучения не будут зависеть от азимута φ . Далее, очевидно, что для каждого луча преимущественные колебания будут происходить либо в вертикальной плоскости, проходящей через луч, либо перпендикулярно к ней. Поэтому мы будем иметь $L = 0$ и $D = 0$.

Чтобы получить уравнения лучистого равновесия для данного случая, надо в уравнениях (18) и (19) произвести интегрирование по азимуту φ' , а в формулах (24) и (25) положить $\vartheta_0 = 0$. В результате находим:

$$B_x(\tau, \vartheta) = \frac{3}{8} \lambda \int_0^{\pi} [I_x(\tau, \vartheta') + I_y(\tau, \vartheta') \cos^2 \vartheta'] \sin \vartheta' d\vartheta' + \frac{3}{16} \lambda S e^{-\tau}, \quad (34)$$

$$B_y(\tau, \vartheta) = \frac{3}{8} \lambda \int_0^{\pi} [I_x(\tau, \vartheta') \cos^2 \vartheta + I_y(\tau, \vartheta') (\cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' + 2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \vartheta')] \sin \vartheta' d\vartheta' + \frac{3}{16} \lambda S e^{-\tau} \cos^2 \vartheta. \quad (35)$$

Перейдем здесь от интенсивностей I_x и I_y к интенсивностям I и K при помощи формул (6), а от величин B_x и B_y к величинам B и C при помощи формул (10). Вводя обозначения $\eta = \cos \vartheta$, $\eta' = \cos \vartheta'$, вместо уравнений (34) и (35) получаем:

$$B(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') \left[1 + \frac{1}{2} P_2(\eta) P_2(\eta') \right] d\eta' + \frac{3}{8} \lambda P_2(\eta) \int_{-1}^{+1} K(\tau, \eta') (1 - \eta'^2) d\eta' + \frac{3}{16} \lambda S e^{-\tau} (1 + \eta^2); \quad (36)$$

$$C(\tau, \eta) = \frac{3}{8} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') P_2(\eta') d\eta' + \frac{9}{16} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} K(\tau, \eta') (1 - \eta'^2) d\eta' + \frac{3}{16} \lambda S e^{-\tau} (1 - \eta^2). \quad (37)$$

Здесь $P_2(\eta)$ есть второй полином Лежандра: $P_2(\eta) = \frac{3}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}$.

Уравнения переноса излучения записываются в рассматриваемом случае так:

$$\left. \begin{aligned} \eta \frac{dI(\tau, \eta)}{d\tau} &= -B(\tau, \eta) + I(\tau, \eta), \\ \eta \frac{dK(\tau, \eta)}{d\tau} &= -C(\tau, \eta) + K(\tau, \eta). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

В качестве граничных условий мы имеем:

$$I(0, \eta) = 0, \quad K(0, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta < 0. \quad (39)$$

Заметим, что под η теперь понимается косинус угла, образованного направлением излучения с внешней нормалью к среде.

Наша задача состоит в нахождении интенсивностей излучения, выходящего из среды, т. е. величин

$$I(\eta) = \int_0^{\infty} B(\tau, \eta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad K(\eta) = \int_0^{\infty} C(\tau, \eta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}. \quad (40)$$

Для решения поставленной задачи мы применим метод, изложенный в предыдущей главе, а именно получим линейные интегральные уравнения, определяющие непосредственно величины $I(\eta)$ и $K(\eta)$.

Введем в рассмотрение величины:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\eta'', \eta) &= \int_0^{\infty} B(\tau, \eta) e^{-\frac{\tau}{\eta''}} \frac{d\tau}{\eta''}, \\ \bar{K}(\eta'', \eta) &= \int_0^{\infty} C(\tau, \eta) e^{-\frac{\tau}{\eta''}} \frac{d\tau}{\eta''}. \end{aligned} \quad (41)$$

Очевидно, что

$$\bar{I}(\eta, \eta) = I(\eta), \quad \bar{K}(\eta, \eta) = K(\eta) \quad (42)$$

Из уравнений переноса излучения получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} I(\tau, \eta') e^{-\frac{\tau}{\eta'}} \frac{d\tau}{\eta''} &= \frac{\eta'' \bar{I}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{I}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'}, \\ \int_0^{\infty} K(\tau, \eta') e^{-\frac{\tau}{\eta'}} \frac{d\tau}{\eta''} &= \frac{\eta'' \bar{K}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{K}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'}. \end{aligned} \right\} (43)$$

С помощью (43) уравнения (36) и (37) дают:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\eta'', \eta) &= \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' \bar{I}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{I}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'} \left[1 + \frac{1}{2} P_2(\eta) P_2(\eta') \right] d\eta' + \\ &+ \frac{3}{8} \lambda P_2(\eta) \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' \bar{K}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{K}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'} (1 - \eta'^2) d\eta' + \\ &+ \frac{\lambda}{4} S \frac{1 + \frac{1}{2} P_2(\eta)}{1 + \eta''}; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}(\eta'', \eta) &= \frac{3}{8} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' \bar{I}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{I}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'} P_2(\eta') d\eta' + \\ &+ \frac{9}{16} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'' \bar{K}(\eta'', \eta') - \eta' \bar{K}(\eta', \eta')}{\eta'' - \eta'} (1 - \eta'^2) d\eta' + \\ &+ \frac{3}{16} \lambda S \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta''}, \end{aligned} \quad (45)$$

где надо считать, что $\bar{I}(\eta', \eta') = 0$ и $\bar{K}(\eta', \eta') = 0$ при $\eta' < 0$.

Из (44) и (45) видно, что функции $\bar{I}(\eta'', \eta)$ и $\bar{K}(\eta'', \eta)$ имеют вид:

$$\bar{I}(\eta'', \eta) = u_0(\eta'') + u_2(\eta'') P_2(\eta), \quad \bar{K}(\eta'', \eta) = \frac{3}{2} u_2(\eta'') (1 - \eta^2), \quad (46)$$

а, значит, искомые функции $I(\eta)$ и $K(\eta)$ равны

$$I(\eta) = u_0(\eta) + u_2(\eta) P_2(\eta), \quad K(\eta) = \frac{3}{2} u_2(\eta) (1 - \eta^2) \quad (47)$$

Подставляя (46) в (44) и (45), находим следующие уравнения для определения вспомогательных функций $u_0(\eta)$ и $u_2(\eta)$:

$$u_0(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta I(\eta) - \eta' I(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' - \frac{3}{2} \lambda \eta^2 u_2(\eta) + \frac{\lambda}{4} \frac{S}{1 + \eta}; \quad (48)$$

$$u_2(\eta) = \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta I(\eta) - \eta' I(\eta')}{\eta - \eta'} P_2(\eta') d\eta' + \\ + \frac{9}{16} \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\eta u_2(\eta) - \eta' u_2(\eta')}{\eta - \eta'} (1 - \eta'^2) d\eta' + \frac{\lambda}{8} \frac{S}{1 + \eta}. \quad (49)$$

Если бы мы не учитывали поляризации света, то для определения общей интенсивности излучения получили бы следующие уравнения:

$$B(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') \left[1 + \frac{1}{2} P_2(\eta) P_2(\eta') \right] d\eta' + \\ + \frac{3\lambda}{16} S e^{-\tau} (1 + \eta^2); \quad (50) \\ \eta \frac{dI(\tau, \eta)}{d\tau} = I(\tau, \eta) - B(\tau, \eta).$$

Из этих уравнений для функции $I(\eta)$ получается уже знакомое нам выражение (47), а для вспомогательных функций $u_0(\eta)$ и $u_2(\eta)$ — уравнения (48) и (49), однако без второго слагаемого в правой части уравнения (49).

Результаты численного решения системы уравнений (48) и (49) для случая $\lambda = 1$ приведены в таблице 19 (при $S = 1$).

Таблица 19

Диффузное отражение света

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$I(\eta)$	0,60	0,70	0,77	0,83	0,88	0,93	0,98	1,02	1,07	1,11	1,15
$K(\eta)$	0,28	0,26	0,24	0,21	0,18	0,15	0,12	0,09	0,06	0,03	0
$p(\eta)$	0,45	0,37	0,31	0,25	0,20	0,16	0,12	0,09	0,06	0,03	0
$I'(\tau)$	0,65	0,75	0,82	0,87	0,91	0,95	0,98	1,01	1,04	1,07	1,10
$K_1(\tau)$	0,19	0,17	0,15	0,13	0,11	0,09	0,075	0,06	0,04	0,02	0

Таблица дает величины $I(\eta)$ и $K(\eta)$, а также степень поляризации $p(\eta) = \frac{K(\eta)}{I(\eta)}$. Для сравнения дана также интенсивность излучения $I'(\eta)$, найденная без учета поляризации света.

В последней строке таблицы приведена величина

$$K_1(\eta) = \frac{3}{16}(1 - \eta), \quad (51)$$

т. е. член первого порядка в величине $K(\eta)$. Сравнение величин $K_1(\eta)$ и $K(\eta)$ позволяет заключить, что поляризация света при отражении обусловлена в основном рассеянием первого порядка.

§ 4. Рассеяние света в электронной атмосфере звезды

Допустим, как и выше, что среда, рассеивающая свет по закону Рэлея, обладает очень большой оптической толщиной. Пусть на верхнюю границу среды падает излучение от внешних источников света. Найдем интенсивности диффузного излучения, выходящего из среды через ее нижнюю границу.

Как уже было выяснено ранее (гл. III, § 6), до нижних слоев среды очень большой оптической толщины излучение от внешних источников света практически не доходит. Что же касается поля диффузного излучения, то при любых направлениях внешнего излучения, падающего на среду, оно в этих слоях обладает аксиальной симметрией.

Уравнения лучистого равновесия в данном случае имеют вид

$$B(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') \left[1 + \frac{1}{2} P_2(\eta) P_2(\eta') \right] d\eta' + \\ + \frac{3}{8} \lambda P_2(\eta) \int_{-1}^{+1} K(\tau, \eta') (1 - \eta'^2) d\eta'; \quad (52)$$

$$C(\tau, \eta) = \frac{3}{8} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta') P_2(\eta') d\eta' + \\ + \frac{9}{16} \lambda (1 - \eta^2) \int_{-1}^{+1} K(\tau, \eta') (1 - \eta'^2) d\eta'. \quad (53)$$

Они могут быть получены из уравнений (36) и (37) путем отбрасывания свободных членов, соответствующих внешнему излучению. Уравнения переноса излучения записываются в форме (38).

Пользуясь тем же способом, что и в предыдущем параграфе, мы получаем из указанных уравнений следующие выражения для искоемых интенсивностей излучения, диффузно-пропущенного средой:

$$\left. \begin{aligned} I(\eta) &= v_0(\eta) + v_2(\eta) P_2(\eta), \\ K(\eta) &= \frac{3}{2} v_2(\eta) (1 - \eta^2), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

где вспомогательные функции $v_0(\eta)$ и $v_2(\eta)$ определяются из уравнений:

$$v_0(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta I(\eta') - \eta' I(\eta)}{\eta - \eta'} d\eta' - \frac{3}{2} \lambda \eta^2 v_2(\eta); \quad (55)$$

$$\begin{aligned} v_2(\eta) &= \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta I(\eta') - \eta' I(\eta)}{\eta - \eta'} P_2(\eta') d\eta' + \\ &+ \frac{9}{16} \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{\eta v_2(\eta') - \eta' v_2(\eta)}{\eta - \eta'} (1 - \eta'^2) d\eta'. \end{aligned} \quad (56)$$

Поятно, что в данном случае величины $I(\eta)$ и $K(\eta)$ находятся лишь с точностью до произвольного множителя.

Если бы мы не учитывали поляризацию света, то для интенсивности излучения $I'(\eta)$ получили бы также выражение (54), а для функций $v_0(\eta)$ и $v_2(\eta)$ — систему уравнений (55) и (56) без последнего члена во втором из них. Отметим, что такой же результат вытекает из уравнений (70) и (72) предыдущей главы при индикатрисе рассеяния Рэлея

$$x(\gamma) = 1 + \frac{1}{2} P_2(\cos \gamma). \quad (57)$$

Результаты численного решения системы уравнений (55) и (56) для случая чистого рассеяния ($\lambda = 1$) приведены

в таблице 20, содержащей значения величин $I(\eta)$, $K(\eta)$ и степени поляризации $p(\eta)$. Значения величины $I'(\eta)$ не приводятся, так как она мало отличается от величины $I(\eta)$.

Таблица 20

Диффузное пропускание света

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$I(\eta)$	1,00	1,24	1,46	1,67	1,87	2,07	2,27	2,46	2,66	2,85	3,04
$10 K(\eta)$	1,25	1,00	0,84	0,70	0,58	0,47	0,37	0,27	0,18	0,09	0
$p(\eta)$ в %	12,5	8,0	5,8	4,2	3,1	2,3	1,6	1,1	0,7	0,3	0

Полученные выше результаты могут быть использованы при изучении атмосфер горячих звезд. Подсчеты показывают, что в атмосферах звезд типов В0 и О коэффициент рассеяния света свободными электронами может значительно превосходить коэффициент поглощения, обусловленный фотоионизацией и свободно-свободными переходами. А так как рассеяние света свободными электронами происходит по закону Рэлея, то при рассмотрении перепада излучения через атмосферы этих звезд необходимо пользоваться приведенными выше уравнениями, учитывающими поляризацию излучения.

Из таблицы 20 видно, что закон потемнения диска звезды с чисто электронной атмосферой мало отличается от закона потемнения диска обычной звезды (отношение яркости в центре диска к яркости на краю равно 3,04 вместо 2,91). Однако наличие большого числа свободных электронов в звездной атмосфере должно проявить себя тем, что излучение, идущее от разных частей диска звезды, будет поляризовано в различной степени. Максимальная степень поляризации ($p = 12,5\%$) имеет место при $\vartheta = 90^\circ$, т. е. на краю диска звезды, причем излучение поляризовано по радиусу.

Очевидно, что излучение, идущее от всего диска сферически симметричной звезды, будет неполяризованным. Поэтому эффект поляризации звездного света, вызванный

рассеянием излучения на свободных электронах, может наблюдаться только в случае затменных двойных звезд. Этот эффект был предсказан теоретически Чандрасекаром и автором, а затем был подтвержден с качественной стороны наблюдениями [3]. Количественного согласия между наблюдениями и теорией ожидать нельзя, так как вычисления соответствуют предположению о чисто электронной атмосфере, которое в действительности не выполняется.

Интересно, что при указанных наблюдениях было открыто новое явление — поляризация света одиночных звезд. В настоящее время это явление интенсивно изучается и для его объяснения выдвинут ряд гипотез.

§ 5. Поле излучения в глубоких слоях среды

Допустим опять, что среда имеет бесконечно большую оптическую толщину, и найдем интенсивности излучения в глубоких слоях среды. Эта задача уже была рассмотрена ранее (гл. III, § 6) без учета поляризации света. Теперь мы будем считать, что рассеяние излучения происходит по закону Рэлея.

Так как в глубоких слоях среды излучение от внешних источников света практически отсутствует, а интенсивности диффузного излучения не зависят от азимута, то поле излучения в этих слоях будет определяться уравнениями лучистого равновесия (52) и (53) и уравнениями переноса излучения (38). В последних уравнениях мы изменим знак перед η , что будет соответствовать отсчету угла $\vartheta = \arccos \eta$ от внутренней нормали.

Как и в § 6 главы III, будем искать функции $B(\tau, \eta)$ и $C(\tau, \eta)$ в виде:

$$\left. \begin{aligned} B(\tau, \eta) &= b(\eta) e^{-k\tau}, \\ C(\tau, \eta) &= c(\eta) e^{-k\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Тогда из уравнений переноса излучения получаем:

$$\left. \begin{aligned} I(\tau, \eta) &= \frac{b(\eta) e^{-k\tau}}{1 - k\eta}, \\ K(\tau, \eta) &= \frac{c(\eta) e^{-k\tau}}{1 - k\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Подставляя (58) и (59) в уравнения лучистого равновесия, находим:

$$b(\eta) = b_0 + b_2 P_2(\eta), \quad c(\eta) = \frac{3}{2} b_2 (1 - \eta^2) \quad (60)$$

и для определения постоянных k и $\frac{b_2}{b_0}$ получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{b_0 + b_2 P_2(\eta')}{1 - k\eta'} d\eta', \\ b_2 &= \frac{\lambda}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{b_0 + b_2 P_2(\eta')}{1 - k\eta'} P_2(\eta') d\eta' + \frac{9}{16} \lambda b_2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \eta'^2) d\eta'}{1 - k\eta'}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Результаты решения системы уравнений (61) для некоторых частных случаев приведены в таблице 21. При этом задавались значения k и находились значения λ и $\frac{b_2}{b_0}$. Затем по формулам (60) были определены функции $b(\eta)$ и $c(\eta)$ (при $b_0 = 1$).

В той же таблице приведены для сравнения значения параметра λ и функции $b(\eta)$, найденные при индикатрисе рассеяния Рэля без учета поляризации света, т. е. путем решения системы уравнений (61) без последнего члена в правой части второго из этих уравнений. Соответствующие значения λ и $b(\eta)$ обозначены через λ' и $b'(\eta)$.

Из таблицы видно, что с возрастанием величины k , т. е. с уменьшением величины λ , степень поляризации излучения $p(\eta) = \frac{c(\eta)}{b(\eta)}$ увеличивается (в случае чистого рассеяния, т. е. при $\lambda = 1$, она равна нулю). Если не учитывать поляризацию света, то происходящая от этого ошибка в общей интенсивности излучения также увеличивается с уменьшением λ . Эта ошибка особенно существенна в величине k , так как эта величина входит в показатели в формулах (58) и (59).

Таблица 21

Световой режим в глубоких слоях

	η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$k=0,6$	$b(\eta)$	0,96	0,96	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,02	1,04	1,06	1,09
$\lambda=0,861$	$c(\eta)$	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07	0,05	0,03	0
$\lambda'=0,864$	$b'(\eta)$	0,98	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03
$k=0,7$	$b(\eta)$	0,94	0,94	0,95	0,96	0,97	0,99	1,01	1,03	1,06	1,09	1,12
$\lambda=0,798$	$c(\eta)$	0,18	0,18	0,17	0,16	0,15	0,14	0,12	0,09	0,07	0,04	0
$\lambda'=0,803$	$b'(\eta)$	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00	1,01	1,02	1,04	1,05
$k=0,8$	$b(\eta)$	0,92	0,92	0,93	0,94	0,96	0,98	1,01	1,04	1,08	1,12	1,17
$\lambda=0,712$	$c(\eta)$	0,25	0,25	0,24	0,23	0,21	0,19	0,16	0,13	0,09	0,05	0
$\lambda'=0,720$	$b'(\eta)$	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,99	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08
$k=0,9$	$b(\eta)$	0,88	0,89	0,90	0,92	0,94	0,97	1,01	1,06	1,11	1,17	1,23
$\lambda=0,581$	$c(\eta)$	0,34	0,34	0,33	0,31	0,29	0,26	0,22	0,17	0,12	0,07	0
$\lambda'=0,595$	$b'(\eta)$	0,94	0,94	0,95	0,96	0,97	0,98	1,00	1,03	1,06	1,09	1,12

ГЛАВА VI

ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА КВАНТА ИЗ СРЕДЫ

В предыдущих главах мы в основном занимались задачей о рассеянии света в среде, освещенной параллельными лучами. Однако для многих применений представляют также интерес задачи о свечении среды с расположенными в ней источниками излучения. Важнейшим из таких применений в астрофизике является теория звездных спектров. Указанные задачи могут быть решены при помощи методов, изложенных выше. Однако здесь мы дадим другой метод, который наиболее удобен в этих случаях. Он основан на использовании нового понятия — вероятности выхода кванта из среды [1].

Каждый квант, поглощенный на оптической глубине τ , имеет определенную вероятность выйти затем из среды в заданном направлении (как непосредственно, так и после ряда рассеяний). Очевидно, что вероятность выхода кванта из среды не зависит от того, каким путем он появился в среде, а зависит только от оптических свойств среды. Поэтому после определения вероятности выхода кванта из среды могут быть легко найдены интенсивности выходящего из среды излучения при любых действующих на среду источниках излучения. Для этого надо только умножить количество энергии, приходящее непосредственно от источников излучения и поглощаемое на данной глубине, на вероятность выхода кванта из среды с этой глубины и проинтегрировать полученное произведение по всем глубинам.

Тот факт, что после определения вероятности выхода кванта из среды легко могут быть решены различные задачи о свечении этой среды (отличающиеся друг от друга расположением источников излучения), представляет значительное преимущество данного метода перед другими. К тому же, как мы увидим ниже, вероятность выхода кванта

из среды совпадает с точностью до постоянного множителя с функцией $B(\tau, \zeta)$ в задаче о рассеянии света в среде, освещенной параллельными лучами. Поэтому для определения вероятности выхода кванта из среды могут быть использованы результаты, полученные выше для функции $B(\tau, \zeta)$.

В настоящей главе при помощи указанного метода мы решим некоторые простейшие задачи теории переноса излучения (частично рассмотренные выше). В следующих главах тот же метод будет применен к более сложным задачам, которые не рассматривались ранее*).

§ 1. Одномерная среда

Пусть имеется одномерная среда оптической толщины τ_0 . Допустим, что в среде происходит изотропное рассеяние света (т. е. $x = \frac{1}{2}$). Вероятность «выживания» кванта при элементарном акте рассеяния, как и раньше, обозначим через λ .

Для решения различных задач о свечении данной среды введем в рассмотрение вероятность выхода кванта из среды. Пусть квант поглощен на оптической глубине τ . Обозначим через $p(\tau)$ вероятность выхода этого кванта из среды через границу $\tau = 0$ (как непосредственно с глубины τ , так и после рассеяний в среде).

Очевидно, что если величина $p(\tau)$ известна, то легко могут быть найдены интенсивности излучения, выходящего из среды, при любых источниках излучения, вызывающих ее свечение.

Обозначим через $f(\tau)d\tau$ количество энергии, приходящее непосредственно от источников излучения и поглощаемое в интервале оптических глубин от τ до $\tau + d\tau$. Тогда интенсивность излучения, выходящего из среды через границу $\tau = 0$, будет равна

$$I_2(0) = \int_0^{\tau_0} p(\tau) f(\tau) d\tau. \quad (1)$$

*) В этой и следующих главах предполагается, что $\lambda = \text{const}$. Обобщение некоторых результатов на случай зависимости λ от τ дано в статье автора (ДАН, 1956).

Аналогично может быть найдена интенсивность излучения, выходящего из среды через границу $\tau = \tau_0$:

$$I_1(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Для определения функции $p(\tau)$ можно составить линейное интегральное уравнение. Вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ , выйдет из среды без рассеяний по пути, равна $\frac{\lambda}{2} e^{-\tau}$. Чтобы найти вероятность выхода кванта из среды после ряда рассеяний, надо умножить вероятность поглощения этого кванта в интервале глубин от τ' до $\tau' + d\tau'$, т. е. величину $\frac{\lambda}{2} e^{-|\tau - \tau'|} d\tau'$, на вероятность выхода кванта с глубины τ' , т. е. на величину $p(\tau')$, и проинтегрировать это произведение по τ' в пределах от 0 до τ_0 . В результате искомая вероятность будет равна

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} p(\tau') e^{-|\tau - \tau'|} d\tau'.$$

Таким образом, для полной вероятности получаем:

$$p(\tau) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} p(\tau') e^{-|\tau - \tau'|} d\tau'. \quad (3)$$

Этим уравнением и определяется функция $p(\tau)$.

Сравнивая уравнение (3) с уравнением (156) главы I, мы заключаем, что функция $p(\tau)$ равна функции $B(\tau)$ в задаче о свечении среды, освещенной излучением единичной интенсивности, падающим извне на границу $\tau = 0$.

Указанное обстоятельство позволяет сразу написать решение уравнения (3). Полагая в формулах (157) и (158) главы I $I_0 = 1$, получаем:

$$p(\tau) = \lambda \frac{(1+k) e^{k(\tau_0 - \tau)} - (1-k) e^{-k(\tau_0 - \tau)}}{(1+k)^2 e^{k\tau_0} - (1-k)^2 e^{-k\tau_0}}, \quad (4)$$

где $k = \sqrt{1 - \lambda}$, и

$$p(\tau) = \frac{1 + \tau_0 - \tau}{2 + \tau_0} \quad (5)$$

при $\lambda = 1$.

Для определения величины $p(\tau)$ можно также получить функциональное уравнение. Для этого найдем вероятность выхода кванта из среды с оптической глубины $\tau + \Delta\tau$, т. е. величину $p(\tau + \Delta\tau)$. При этом величину $\Delta\tau$ будем считать настолько малой, что квадратом ее можно пренебрегать.

Выход кванта с глубины $\tau + \Delta\tau$ из среды толщины τ_0 мы можем себе представить как выход кванта с глубины τ из среды толщины $\tau_0 - \Delta\tau$ [вероятность этого обозначим через $p_1(\tau)$] с последующим прохождением его через дополнительный слой толщины $\Delta\tau$.

Вероятность выхода кванта с глубины τ с последующим прохождением его через дополнительный слой без поглощения равна $p_1(\tau)(1 - \Delta\tau)$. Вероятность выхода кванта с глубины τ с последующим поглощением его в дополнительном слое и выходом из среды наружу после ряда рассеяний равна $p_1(\tau)\Delta\tau p(0)$. Таким образом, мы получаем:

$$p(\tau + \Delta\tau) = p_1(\tau)(1 - \Delta\tau) + p_1(\tau)\Delta\tau p(0). \quad (6)$$

Для величины $p_1(\tau)$ легко находим:

$$p_1(\tau) = p(\tau) - p(\tau_0 - \tau)\Delta\tau p(\tau_0). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и полагая $\Delta\tau \rightarrow 0$, приходим к следующему уравнению для определения функции $p(\tau)$:

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -p(\tau) + p(\tau)p(0) - p(\tau_0 - \tau)p(\tau_0). \quad (8)$$

Входящие в уравнение (8) величины $p(0)$ и $p(\tau_0)$ могут быть представлены в виде:

$$p(0) = \frac{\lambda}{2}(1 + \rho); \quad p(\tau_0) = \frac{\lambda}{2}(e^{-\tau_0} + \sigma), \quad (9)$$

где

$$\rho = \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} p(\tau) d\tau, \quad \sigma = \int_0^{\tau_0} e^{-\tau} p(\tau_0 - \tau) d\tau. \quad (10)$$

Величина ρ есть вероятность диффузного отражения кванта от среды, а величина σ — вероятность диффузного пропускания кванта средой*).

Отметим, что между величинами ρ и σ существует следующая связь:

$$2\rho = \frac{\lambda}{2} [(1 + \rho)^2 - (\sigma + e^{-\tau_0})^2]. \quad (11)$$

Она получается из уравнения (8) путем умножения его на $e^{-\tau}$ и интегрирования по τ в пределах от 0 до τ_0 .

Решение уравнения (8) имеет вид

$$p(\tau) = Ce^{-k\tau} + De^{k\tau}, \quad (12)$$

где постоянные k , C и D связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} [1 - p(0) - k]C + p(\tau_0)e^{k\tau_0}D &= 0, \\ p(\tau_0)e^{-k\tau_0}C + [1 - p(0) + k]D &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полагая в (12) сначала $\tau = 0$, а затем $\tau = \tau_0$, для постоянных C и D получаем:

$$C = \frac{p(0)e^{k\tau_0} - p(\tau_0)}{e^{k\tau_0} - e^{-k\tau_0}}, \quad D = \frac{p(\tau_0) - p(0)e^{-k\tau_0}}{e^{k\tau_0} - e^{-k\tau_0}}. \quad (14)$$

Подстановка найденных значений C и D в первое из соотношений (13) дает:

$$p^2(0) - p^2(\tau_0) = (1 + k)[p(0) - p(\tau_0)e^{k\tau_0}]. \quad (15)$$

Далее, из соотношений (13), рассматриваемых в качестве уравнений относительно C и D , следует:

$$k^2 = [p(0) - 1]^2 - p^2(\tau_0). \quad (16)$$

*) Величины ρ и σ связаны с введенными в § 1 главы III коэффициентами r и q соотношениями: $r = \rho$; $q = \sigma + e^{-\tau_0}$. Различие между коэффициентами σ и q состоит в том, что первый из них учитывает только диффузное излучение, а второй — диффузное и прямое.

Решая уравнения (15) и (16) относительно $p(0)$ и $p(\tau_0)$, находим:

$$p(0) = (1 - k^2) \frac{(1+k)e^{k\tau_0} - (1-k)e^{-k\tau_0}}{(1+k)^2 e^{k\tau_0} - (1-k)^2 e^{-k\tau_0}}; \quad (17)$$

$$p(\tau_0) = (1 - k^2) \frac{2k}{(1+k)^2 e^{k\tau_0} - (1-k)^2 e^{-k\tau_0}}. \quad (18)$$

Подставляя найденные значения $p(0)$ и $p(\tau_0)$ в (14), а затем значения C и D в (12), получаем следующую формулу для искомой величины $p(\tau)$:

$$p(\tau) = (1 - k^2) \frac{(1+k)e^{k(\tau_0-\tau)} - (1-k)e^{-k(\tau_0-\tau)}}{(1+k)^2 e^{k\tau_0} - (1-k)^2 e^{-k\tau_0}}. \quad (19)$$

Входящий в формулу (19) параметр k связан с параметром λ . Для получения этой связи надо подставить (9) в (16). В результате находим:

$$k^2 = 1 - \lambda(1 + \rho) + \frac{\lambda^2}{4}(1 + \rho)^2 - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma + e^{-\tau_0})^2, \quad (20)$$

или, учитывая (11),

$$k^2 = 1 - \lambda. \quad (21)$$

Если мы подставим (21) в (19), то придем к ранее полученной формуле (4).

В случае $\lambda = 1$ мы, очевидно, имеем:

$$p(\tau) + p(\tau_0 - \tau) = 1. \quad (22)$$

Пользуясь (22), вместо (8) получаем:

$$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = -p(\tau_0), \quad (23)$$

откуда

$$p(\tau) = p(0) - p(\tau_0)\tau. \quad (24)$$

Полагая в (22) и (24) $\tau = \tau_0$, находим:

$$p(0) = \frac{1 + \tau_0}{2 + \tau_0}, \quad p(\tau_0) = \frac{1}{2 + \tau_0}. \quad (25)$$

Если мы подставим (25) в (24), то снова получим ранее введенную формулу (5).

Полученные выражения для функции $p(\tau)$ дают возможность вычислить интенсивности выходящего из среды излучения при любых заданных источниках излучения. Для этого служат формулы (1) и (2), в которых источники излучения характеризуются функцией $f(\tau)$.

Если на границу среды $\tau = 0$ падает внешнее излучение интенсивности I_0 , то

$$f(\tau) = I_0 e^{-\tau}. \quad (26)$$

Так как в данном случае

$$I_2(0) = I_0 \rho; \quad I_1(\tau_0) = I_0 \sigma, \quad (27)$$

то для вычисления интенсивностей $I_2(0)$ и $I_1(\tau_0)$ можно воспользоваться формулами (9), связывающими ρ и σ с $p(0)$ и $p(\tau_0)$, и формулами (17) и (18), дающими значения величин $p(0)$ и $p(\tau_0)$ [или формулами (25) при $\lambda = 1$].

Если же источники излучения находятся внутри среды и в интервале глубин от τ до $\tau + d\tau$ они излучают одинаковое в обе стороны количество энергии $B_0(\tau) d\tau$, то мы можем считать, что в указанном интервале глубин поглощается энергия $\frac{2}{\lambda} B_0(\tau) d\tau$, которая рассеивается затем с вероятностью $\frac{\lambda}{2}$ в каждую сторону. Таким образом, в этом случае имеем:

$$f(\tau) = \frac{2}{\lambda} B_0(\tau). \quad (28)$$

Подставляя (28) в (1) и (2), получаем:

$$I_2(0) = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\tau_0} B_0(\tau) p(\tau) d\tau, \quad I_1(\tau_0) = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} B_0(\tau) p(\tau_0 - \tau) d\tau. \quad (29)$$

Допустим, например, что $B_0 = \text{const}$ и $\lambda = 1$. Тогда, подставляя (5) в (29), находим:

$$I_2(0) = I_1(\tau_0) = B_0 \tau_0, \quad (30)$$

как и следовало ожидать из физических соображений.

§ 2. Среда бесконечно большой оптической толщины

Полученные в предыдущем параграфе результаты могут быть легко обобщены на случай трехмерной среды, состоящей из плоскопараллельных слоев. Сначала мы рассмотрим задачу о свечении среды бесконечно большой оптической толщины. При этом для простоты будем считать, что индикатриса рассеяния сферическая.

В этом случае функция $B(\tau)$ определяется следующим интегральным уравнением:

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(\tau') E_i |\tau - \tau'| d\tau' + g(\tau), \quad (31)$$

где $g(\tau) d\tau$ — количество энергии, излучаемое элементарным цилиндром, находящимся на оптической глубине τ , с площадью основания 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$ в единичном телесном угле за 1 сек (как в результате действия источников излучения, расположенных в среде, так и в результате рассеяния излучения, пришедшего непосредственно от внешних источников).

Если среда освещена параллельными лучами, падающими под углом ϑ_0 к нормали, то вместо уравнения (31) имеем:

$$B(\tau, \vartheta_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(\tau', \vartheta_0) E_i |\tau - \tau'| d\tau' + \lambda \frac{S}{4} e^{-\tau \sec \vartheta_0}, \quad (32)$$

где πS — освещенность площадки, перпендикулярной к падающим лучам при $\tau = 0$.

Интенсивность излучения, выходящего из среды под углом ϑ к нормали, выражается через функцию $B(\tau, \vartheta_0)$ формулой

$$I(0, \vartheta, \vartheta_0) = \int_0^{\infty} B(\tau, \vartheta_0) e^{-\tau \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau. \quad (33)$$

Решим теперь задачу о свечении данной среды не при помощи уравнения (31), а другим способом, основанным на определении вероятности выхода кванта из среды.

Обозначим через $p(\tau, \vartheta) d\omega$ вероятность того, что световой квант, поглощенный на оптической глубине τ , выйдет из среды (вообще говоря, после многократных рассеяний) под углом ϑ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Пусть, далее, $f(\tau) d\tau$ есть количество энергии, приходящее непосредственно от источников излучения и поглощаемое в элементарном объеме с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$ на оптической глубине τ за 1 сек . Тогда из общего количества энергии, поглощенной данным элементарным объемом, выйдет из среды под углом ϑ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ следующая часть:

$$f(\tau) d\tau p(\tau, \vartheta) d\omega.$$

Поэтому интенсивность излучения, выходящего из среды под углом ϑ к нормали, будет выражаться формулой

$$I(0, \vartheta) = \int_0^{\infty} p(\tau, \vartheta) f(\tau) \sec \vartheta d\tau. \quad (34)$$

Заметим, что если источники излучения расположены внутри среды и количество энергии, испускаемое элементарным объемом внутри единичного телесного угла за 1 сек , равно $B_0(\tau) d\tau$, то мы можем себе представить, что количество энергии, поглощаемое этим объемом за 1 сек , равно $\frac{4\pi}{\lambda} B_0(\tau) d\tau$. Иными словами, функция $f(\tau)$ будет в этом случае равна

$$f(\tau) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0(\tau). \quad (35)$$

Следует подчеркнуть, что вероятность выхода кванта из среды зависит только от оптических свойств среды, но не зависит от источников излучения. Поэтому после определения функции $p(\tau, \vartheta)$ мы можем вычислить путем интегрирования по формуле (34) интенсивности выходящего из среды излучения при любых источниках излучения.

Для определения функции $p(\tau, \vartheta)$ можно получить линейное интегральное уравнение. Чтобы сделать это, заметим, что функция $p(\tau, \vartheta)$ складывается из двух

частей: из вероятности выхода кванта из среды без рассеяний по пути и из вероятности выхода кванта из среды после ряда рассеяний. Очевидно, первая часть равна $\frac{\lambda}{4\pi} e^{-\tau \sec \vartheta}$. Что же касается второй части, то она может быть получена из следующих соображений.

Квант, поглощенный на глубине τ , затем излучается под углами от ϑ' до $\vartheta' + d\vartheta'$ к нормали с вероятностью, равной $\frac{\lambda}{4\pi} \cdot 2\pi \sin \vartheta' d\vartheta'$. Вероятность того, что этот квант будет поглощен между оптическими глубинами от τ' до $\tau' + d\tau'$, равна $e^{-|\tau - \tau'| \sec \vartheta'} \sec \vartheta' d\tau'$. Поэтому вероятность для кванта, поглощенного на глубине τ , быть затем поглощенным между глубинами от τ' до $\tau' + d\tau'$ дается выражением

$$\frac{\lambda}{4\pi} \cdot 2\pi d\tau' \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\tau - \tau'| \sec \vartheta'} \sec \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

Умножая это выражение на $p(\tau', \vartheta)$ и интегрируя по τ' в пределах от 0 до ∞ , получаем искомую вероятность выхода кванта из среды после ряда рассеяний в виде

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} p(\tau', \vartheta) d\tau' \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-|\tau - \tau'| \sec \vartheta'} \sec \vartheta' \sin \vartheta' d\vartheta'.$$

Но внутренний интеграл в этом выражении равен $Ei|\tau - \tau'|$ (см. § 4 гл. I). Поэтому мы получаем:

$$p(\tau, \vartheta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\tau \sec \vartheta} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} p(\tau', \vartheta) Ei|\tau - \tau'| d\tau'. \quad (36)$$

Этим уравнением и определяется функция $p(\tau, \vartheta)$ *).

*) Следует отметить, что уравнение (36) и формула (34) могут быть получены не только из физических соображений, как это было сделано выше, но и из уравнения (31) и формулы (33). Это было выполнено в заметке Л. М. Бибермана [9].

Сравнивая уравнение (36) с приведенным выше уравнением (32), мы видим, что

$$p(\tau, \vartheta) = \frac{B(\tau, \vartheta)}{\pi S}, \quad (37)$$

т. е. вероятность выхода кванта из среды $p(\tau, \vartheta)$ равна функции $B(\tau, \vartheta)$ в задаче о рассеянии света в среде, освещенной параллельными лучами при $\pi S = 1$.

Сделанный вывод представляет большой интерес, так как он означает, что все уравнения и формулы, полученные выше для функции $B(\tau, \vartheta)$ в указанной задаче, могут быть использованы для вероятности выхода кванта из среды $p(\tau, \vartheta)$.

В качестве примера применения формул (34) и (37) рассмотрим задачу о свечении среды, освещенной параллельными лучами. В данном случае функция $f(\tau)$ равна

$$f(\tau) = \pi S e^{-\tau \sec \vartheta_0}. \quad (38)$$

Подстановка (38) в (34) дает:

$$I(0, \vartheta, \vartheta_0) = \pi S \int_0^{\infty} p(\tau, \vartheta) e^{-\tau \sec \vartheta_0} \sec \vartheta \, d\tau. \quad (39)$$

Сравнивая между собой формулы (39) и (38) и пользуясь соотношением (37), получаем:

$$I(0, \vartheta, \vartheta_0) \cos \vartheta = I(0, \vartheta_0, \vartheta) \cos \vartheta_0. \quad (40)$$

Перейдем здесь от интенсивности выходящего из среды излучения $I(0, \vartheta, \vartheta_0)$ к коэффициенту яркости $\rho(\vartheta, \vartheta_0)$ при помощи формулы:

$$I(0, \vartheta, \vartheta_0) = S \rho(\vartheta, \vartheta_0) \cos \vartheta_0. \quad (41)$$

Тогда вместо (40) будем иметь:

$$\rho(\vartheta, \vartheta_0) = \rho(\vartheta_0, \vartheta). \quad (42)$$

Таким образом, коэффициент яркости является симметричной функцией от углов падения и отражения. Мы получили простое доказательство важной теоремы, которой уже пользовались раньше.

Для определения функции $p(\tau, \vartheta)$, кроме интегрального уравнения (36), можно также получить функциональное уравнение. Сделаем это, обозначив для удобства $\cos \vartheta$ через η и $p(\tau, \vartheta)$ через $p(\tau, \eta)$.

Найдем вероятность выхода кванта из среды с глубины $\tau + \Delta\tau$, т. е. величину $p(\tau + \Delta\tau, \eta)$. Для этого представим себе, что квант выходит из среды с оптической глубины τ и затем проходит через дополнительный слой толщиной $\Delta\tau$. Считая величину $\Delta\tau$ малой, получаем:

$$p(\tau + \Delta\tau, \eta) = p(\tau, \eta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta} \right) + 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{\Delta\tau}{\eta'} d\eta' p(0, \eta). \quad (43)$$

Первый член в правой части этого соотношения учитывает тот факт, что квант может выйти с глубины τ под углом $\arccos \eta$ к нормали и пройти через дополнительный слой без поглощения, а второй член — тот факт, что квант может выйти с глубины τ в любом направлении, затем поглотиться в дополнительном слое и рассеяться средой в направлении $\arccos \eta$. Из соотношения (43) находим:

$$\frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + 2\pi p(0, \eta) \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (44)$$

Входящая в уравнение (44) величина $p(0, \eta)$ складывается из вероятности выхода кванта непосредственно из пограничного слоя и вероятности рассеяния кванта этим слоем в сторону среды и последующего диффузного отражения кванта средой. Легко получить, что

$$p(0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta' \right], \quad (45)$$

где $\rho(\eta, \eta')$ — введенный выше коэффициент яркости, т. е.

$$\rho(\eta, \eta') \eta' = \pi \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{\eta'}} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \quad (46)$$

Заметим, что формула (45) вытекает также из уравнения (36) при $\tau = 0$.

Мы видим, что уравнение (44) для функции $p(\tau, \eta)$ совпадает с уравнением (104) главы III для функции $B(\tau, \eta)$ при $\pi S = 1$, как этого и можно было ожидать на основании соотношения (37). Однако при помощи уравнения (104) главы III была решена раньше только задача о рассеянии света в среде при освещении ее параллельными лучами. Теперь же при помощи уравнения (44) и формулы (34) мы можем решить и более сложные задачи о свечении данной среды.

Пользуясь уравнением (44), найдем сначала величину $\rho(\eta, \zeta)$. Умножая указанное уравнение на $e^{-\frac{\tau}{\zeta}} d\tau$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ , получаем:

$$(\eta + \zeta)\rho(\eta, \zeta) = \pi p(0, \eta) \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right]. \quad (47)$$

Подставляя сюда выражение (45) для $p(0, \eta)$ и учитывая доказанную выше симметричность функции $\rho(\eta, \zeta)$, находим:

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (48)$$

где введено обозначение:

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta'. \quad (49)$$

Функция $\varphi(\eta)$ определяется из уравнения

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \quad (50)$$

которое получается при подстановке (49) в (48).

Как мы помним, формула (48) для $\rho(\eta, \zeta)$ и уравнение (50) для $\varphi(\eta)$ уже были найдены ранее (глава III, § 2).

Сопоставление формул (45) и (49) дает:

$$p(0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta). \quad (51)$$

Таким образом, функция $\varphi(\eta)$ определяет вероятность выхода кванта из среды при поглощении его в поверхностном слое.

Пользуясь уравнением (44), мы можем также определить некоторые другие свойства функции $p(\tau, \eta)$, аналогичные свойствам функции $B(\tau, \eta)$, найденным в § 5 главы III.

Вводя обозначение

$$2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta} = \Phi(\tau), \quad (52)$$

из уравнения (44) получаем:

$$p(\tau, \eta) = p(0, \eta) \left[e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta}} \Phi(\tau') d\tau' \right]. \quad (53)$$

Подставляя (53) в (52), находим:

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^{\tau} K(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (54)$$

где

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\eta}} \varphi(\eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (55)$$

Таким образом, после определения функции $\Phi(\tau)$ из уравнения (54) вероятность выхода кванта из среды $p(\tau, \eta)$ может быть найдена по формуле (53).

Результаты вычисления функции $p(\tau, \eta)$ для случая чистого рассеяния приведены в таблице 22 (стр. 189).

Из уравнения (44) может быть также получено асимптотическое выражение для функции $p(\tau, \eta)$ на больших оптических глубинах. Как и в § 5 главы III, находим, что при больших значениях τ

$$p(\tau, \eta) = A \frac{\varphi(\eta) \eta}{1 - k\eta} e^{-k\tau}, \quad (56)$$

Значения величины $\frac{p(\tau, \eta)}{p(0, \eta)}$ в случае чистого рассеяния

$\tau \backslash \eta$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	∞
0,1	1,00	0,53	0,33	0,25	0,21	0,20	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17
0,2	1,00	0,81	0,65	0,55	0,48	0,44	0,41	0,39	0,38	0,37	0,36	0,35	0,35	0,35
0,3	1,00	0,94	0,85	0,78	0,72	0,67	0,64	0,61	0,59	0,57	0,56	0,53	0,52	0,52
0,4	1,00	1,01	0,27	0,93	0,89	0,86	0,83	0,81	0,79	0,77	0,76	0,72	0,71	0,69
0,5	1,00	1,05	1,05	1,04	1,02	1,01	0,999	0,97	0,96	0,95	0,94	0,90	0,88	0,87
0,6	1,00	1,09	1,11	1,12	1,13	1,12	1,12	1,11	1,11	1,10	1,10	1,07	1,06	1,04
0,7	1,00	1,11	1,16	1,19	1,21	1,22	1,23	1,23	1,23	1,24	1,24	1,23	1,23	1,21
0,8	1,00	1,13	1,19	1,24	1,27	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,38	1,39	1,39
0,9	1,00	1,14	1,22	1,28	1,32	1,36	1,39	1,42	1,44	1,45	1,47	1,51	1,54	1,56
1,0	1,00	1,15	1,24	1,31	1,37	1,42	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,64	1,68	1,73

где постоянные k и A определяются из уравнений

$$\frac{\lambda}{2k} \lg \frac{1+k}{1-k} = 1, \quad (57)$$

$$2\pi A \int_0^1 \frac{\varphi(\eta) \eta d\eta}{(1-k\eta)^2} = 1. \quad (58)$$

В случае чистого рассеяния $\lambda = 1$ и $k = 0$. Поэтому вместо (56) имеем:

$$p(\tau, \eta) = \frac{\varphi(\eta) \eta}{2\pi \int_0^1 \varphi(\eta) \eta d\eta}. \quad (59)$$

Заметим, что если источники излучения расположены в тонком слое толщиной $\Delta\tau$ на оптической глубине τ , то интенсивность выходящего из среды излучения согласно формулам (34) и (35) равна

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0 p(\tau, \eta) \frac{\Delta\tau}{\eta}. \quad (60)$$

Если излучающий слой находится на большой оптической глубине, то, подставляя (56) в (60), находим:

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0 A \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} e^{-k\tau}. \quad (61)$$

В случае чистого рассеяния последняя формула дает:

$$I(0, \eta) = 2B_0 \Delta\tau \frac{\varphi(\eta)}{\int_0^1 \varphi(\eta) \eta d\eta}. \quad (62)$$

Таким образом, в данном случае интенсивность выходящего из среды излучения пропорциональна функции $\varphi(\eta)$.

Формула (62) может быть применена, в частности, к звездным фотосферам. В этом случае источники излучения находятся на очень больших глубинах (в недрах звезды), а процесс переноса интегрального излучения через фотосферу может рассматриваться как чистое рассеяние. Поэтому формула (62) дает распределение интегральной яркости по диску звезды.

Как уже говорилось, после определения функции $p(\tau, \eta)$ по формуле (34) может быть найдена интенсивность выходящего из среды излучения при любых заданных источниках излучения. Однако в некоторых случаях для вычисления интеграла (34) можно обойтись без определения функции $p(\tau, \eta)$, а использовать для этой цели непосредственно уравнение (44). Так, например, обстоит дело тогда, когда $f(\tau)$ является полиномом или экспоненциальной функцией от τ . Нахождение интенсивностей выходящего из среды излучения для этих случаев будет сделано в следующем параграфе.

§ 3. Внутренние источники излучения

Будем считать, что источники излучения расположены внутри среды, причем

$$V_0(\tau) = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \dots \quad (63)$$

В таком случае согласно формулам (34) и (35) интенсивность выходящего из среды излучения будет равна

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} \left[b_0 \int_0^{\infty} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + b_1 \int_0^{\infty} p(\tau, \eta) \tau \frac{d\tau}{\eta} + \dots \right]. \quad (64)$$

Таким образом, в данном случае для нахождения интенсивности излучения $I(0, \eta)$ должны быть вычислены величины

$$A_n(\eta) = \int_0^{\infty} p(\tau, \eta) \tau^n \frac{d\tau}{\eta}. \quad (65)$$

После определения этих величин интенсивность выходящего из среды излучения находится по формуле

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} [b_0 A_0(\eta) + b_1 A_1(\eta) + b_2 A_2(\eta) + \dots]. \quad (66)$$

Для определения величин $A_n(\eta)$ может быть использовано непосредственно уравнение (44). Учитывая (51),

перепишем его в виде

$$\frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (67)$$

Умножая (67) на τ^n и интегрируя по τ в пределах от 0 до ∞ , получаем (при $n \geq 1$):

$$-n\eta A_{n-1}(\eta) = -A_n(\eta) + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) \int_0^1 A_n(\eta') d\eta'. \quad (68)$$

Для определения входящего в соотношение (68) интеграла проинтегрируем это соотношение по η в пределах от 0 до 1. В результате находим:

$$n \int_0^1 A_{n-1}(\eta) \eta d\eta = \left[1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta \right] \int_0^1 A_n(\eta) d\eta. \quad (69)$$

Но из уравнения (50) следует:

$$1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = \sqrt{1-\lambda} \quad (70)$$

(см. § 3 гл. III). Поэтому вместо (69) имеем:

$$\int_0^1 A_n(\eta) d\eta = \frac{n}{\sqrt{1-\lambda}} \int_0^1 A_{n-1}(\eta) \eta d\eta. \quad (71)$$

Подставляя (71) в (68), окончательно получаем:

$$A_n(\eta) = n\eta A_{n-1}(\eta) + \frac{\lambda}{2} \frac{n}{\sqrt{1-\lambda}} \varphi(\eta) \int_0^1 A_{n-1}(\eta) \eta d\eta. \quad (72)$$

Мы пришли к рекуррентной формуле для определения величин $A_n(\eta)$.

Найдем теперь величину $A_0(\eta)$. Интегрируя уравнение (67) по τ в пределах от 0 до ∞ и учитывая (51), имеем:

$$-\frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) = -A_0(\eta) + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) \int_0^1 A_0(\eta') d\eta'. \quad (73)$$

Отсюда следует:

$$\int_0^1 A_0(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{4\pi \sqrt{1-\lambda}} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta. \quad (74)$$

Подставляя (74) в (73) и снова пользуясь соотношением (70), находим:

$$A_0(\eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (75)$$

Зная величину $A_0(\eta)$, мы при помощи формулы (72) можем определить величины $A_1(\eta)$, $A_2(\eta)$ и т. д. Полагая в (72) $n = 1$ и подставляя сюда (75), получаем:

$$A_1(\eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) \left[\frac{\eta}{\sqrt{1-\lambda}} + \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1}{1-\lambda} \right], \quad (76)$$

где использовано обозначение

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(\eta) \eta^n d\eta. \quad (77)$$

Аналогично находим:

$$A_2(\eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta) \left[2 \frac{\eta^2}{\sqrt{1-\lambda}} + \lambda \frac{\alpha_1 \eta}{1-\lambda} + \frac{\lambda^2 \alpha_1^2}{2(1-\lambda)^{3/2}} + \frac{\lambda \alpha_2}{1-\lambda} \right]. \quad (78)$$

Заметим, что если источники излучения распределены в среде равномерно (т. е. $B_0 = \text{const}$), то интенсивность выходящего из среды излучения согласно формулам (66) и (75) равна

$$I(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (79)$$

Если $B_0(\tau) = b_0 + b_1 \tau$, то, как следует из формул (66), (75) и (76):

$$I(0, \eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}} \left[b_0 + b_1 \left(\eta + \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \right]. \quad (80)$$

Разумеется, задача о свечении среды бесконечно большой оптической толщины при источниках излучения, заданных в форме (63), имеет смысл только в случае $\lambda < 1$.

Если же $\lambda = 1$, то вся производимая внутри среды энергия выходит из среды, вследствие чего интенсивности выходящего излучения будут в этом случае бесконечно большими.

Как уже было сказано, интенсивности выходящего из среды излучения легко определяются не только в случае, когда функция $f(\tau)$ полином, но и когда $f(\tau)$ — экспоненциальная функция. Принимая, что

$$f(\tau) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0 e^{-m\tau}, \quad (81)$$

где B_0 и m — постоянные, имеем:

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0 \int_0^{\infty} p(\tau, \eta) e^{-m\tau} \frac{d\tau}{\eta}. \quad (82)$$

При помощи уравнения (67), как и выше, получаем:

$$I(0, \eta) = \frac{B_0}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{1 + m\eta'} d\eta'} \frac{\varphi(\eta)}{1 + m\eta}. \quad (83)$$

Если $m = \frac{1}{\zeta} \geq 1$, то из формулы (83) при учете (50) следует:

$$I(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta) \varphi(\zeta)}{\eta + \zeta} \zeta,$$

что формально согласуется с (41) и (48) при $B_0 = \frac{\lambda}{4} S$.

Полагая в (83) $m = 0$, получаем формулу (79).

Формула (83) остается справедливой и тогда, когда $f(\tau)$ экспоненциально возрастает с ростом τ (т. е. когда $m < 0$). Однако в этом случае должно быть $-m < k$, где k определяется уравнением (57). При $-m \geq k$ формула (82) дает для интенсивности выходящего из среды излучения бесконечно большие значения, так как согласно (56) при больших τ вероятность выхода кванта из среды пропорциональна $e^{-k\tau}$.

§ 4. Контуры линий поглощения в звездных спектрах

В качестве примера использования полученных выше результатов решим весьма важную для астрофизики задачу о контурах линий поглощения в звездных спектрах. При этом будем считать, что диффузия излучения в спектральной линии происходит без изменения частоты. Такое предположение является обычным для теории образования линий поглощения. Лишь в последнее время стали производить учет перераспределения излучения по частотам внутри линии (на этом мы остановимся в гл. VIII).

Точная формулировка поставленной задачи была дана в § 8 гл. I. Для функции $B_\nu(\tau_\nu)$ там было получено следующее интегральное уравнение:

$$B_\nu(\tau_\nu) = \frac{\lambda_\nu}{2} \int_0^\infty B_\nu(\tau_\nu) \text{Ei}|\tau_\nu - \tau'_\nu| d\tau'_\nu + (1 - \lambda_\nu) B_\nu^*(T), \quad (84)$$

где $\lambda_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\kappa + \sigma_\nu}$, $d\tau_\nu = -(\kappa + \sigma_\nu) dr$, σ_ν — коэффициент поглощения в линии, κ — коэффициент поглощения в непрерывном спектре, $B_\nu^*(T)$ — планковская интенсивность при температуре T . Задача состоит в нахождении интенсивности выходящего из звезды излучения $I_\nu(0, \eta)$.

Однако данную задачу мы будем решать не при помощи уравнения (84), а путем использования вероятности выхода кванта из среды. В данном случае количество энергии, излучаемое элементарным объемом с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau_\nu$ в единичном телесном угле за 1 сек , равно $(1 - \lambda_\nu) B_\nu^*(T) d\tau_\nu$. Поэтому для функции $f_\nu(\tau_\nu)$ получаем:

$$f_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{\lambda_\nu} (1 - \lambda_\nu) B_\nu^*(T). \quad (85)$$

Подставляя (85) в (34), находим:

$$I_\nu(0, \eta) = 4\pi \frac{1 - \lambda_\nu}{\lambda_\nu} \int_0^\infty B_\nu^*(T) p_\nu(\tau_\nu, \eta) \frac{d\tau_\nu}{\eta}, \quad (86)$$

где $p_\nu(\tau_\nu, \eta)$ — вероятность выхода кванта частоты ν с

оптической глубины τ_ν под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри единичного телесного угла.

Функция $B_\nu^*(T)$ может быть разложена в ряд:

$$B_\nu^*(T) = B_\nu^*(T_0) (1 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + \dots), \quad (87)$$

где T_0 — поверхностная температура и τ — оптическая глубина в непрерывном спектре. Обычно в разложении (87) берут только два первых члена, однако следует иметь в виду, что в ряде задач такая аппроксимация может оказаться недостаточно точной.

Прежде чем подставлять выражение (87) для $B_\nu^*(T)$ в формулу (86), перейдем в нем от τ к τ_ν . Так как $\tau = (1 - \lambda_\nu) \tau_\nu$, то мы получаем:

$$B_\nu^*(T) = B_\nu^*(T_0) [1 + \beta_1 (1 - \lambda_\nu) \tau_\nu + \beta_2 (1 - \lambda_\nu)^2 \tau_\nu^2 + \dots]. \quad (88)$$

Подставляя (88) в (86), находим:

$$I_\nu(0, \eta) = 4\pi \frac{1 - \lambda_\nu}{\lambda_\nu} B_\nu^*(T_0) [A_{\nu_0}(\eta) + \beta_1 (1 - \lambda_\nu) A_{\nu_1}(\eta) + \\ + \beta_2 (1 - \lambda_\nu)^2 A_{\nu_2}(\eta) + \dots], \quad (89)$$

где величины $A_{\nu n}(\eta)$ определены формулой (65); значком ν обозначена зависимость их от частоты через посредство λ_ν .

Величины $A_{\nu n}$ уже были найдены в предыдущем параграфе. Поэтому интенсивность выходящего из звезды излучения внутри спектральной линии может считаться известной при любом числе членов в разложении (87).

Обычно интенсивность внутри линии $I_\nu(0, \eta)$ выражают в интенсивностях непрерывного спектра вблизи линии, т. е. находят величину

$$r_\nu(\eta) = \frac{I_\nu(0, \eta)}{I(0, \eta)}. \quad (90)$$

Интенсивность непрерывного спектра $I(0, \eta)$ может быть получена из формулы для $I_\nu(0, \eta)$ при $\lambda_\nu = 0$.

В случае изотермической атмосферы, т. е. при $B_\nu^*(T) = B_\nu^*(T_0)$, при помощи формул (89) и (75) получаем:

$$r_\nu(\eta) = \varphi_\nu(\eta) \sqrt{1 - \lambda_\nu}. \quad (91)$$

Если в разложении (87) ограничиться лишь двумя первыми членами, то будем иметь:

$$r_{\nu}(\eta) = \frac{\varphi_{\nu}(\eta) \sqrt{1-\lambda_{\nu}}}{1+\beta_1\eta} \left\{ 1 + \beta_1 \sqrt{1-\lambda_{\nu}} (\eta \sqrt{1-\lambda_{\nu}} + \frac{\lambda_{\nu}}{2} \alpha_{\nu 1}) \right\}. \quad (92)$$

Взяв в разложении (87) три первых члена, при помощи формул (89), (75), (76) и (78) находим:

$$r_{\nu}(\eta) = \frac{\varphi_{\nu}(\eta) \sqrt{1-\lambda_{\nu}}}{1+\beta_1\eta+2\beta_2\eta^2} \left\{ 1 + \beta_1 \sqrt{1-\lambda_{\nu}} (\eta \sqrt{1-\lambda_{\nu}} + \frac{\lambda_{\nu}}{2} \alpha_{\nu 1}) + \right. \\ \left. + \beta_2 (1-\lambda_{\nu}) \left[2\eta^2 (1-\lambda_{\nu}) + \eta \lambda_{\nu} \sqrt{1-\lambda_{\nu}} \alpha_{\nu 1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda_{\nu}^2}{2} \alpha_{\nu 1}^2 + \lambda_{\nu} \sqrt{1-\lambda_{\nu}} \alpha_{\nu 2} \right] \right\}. \quad (93)$$

Аналогично могут быть получены выражения для $r_{\nu}(\eta)$ при любом числе членов в разложении (87).

Приведенные выше формулы дают возможность вычислить интенсивность в центре линии на заданном расстоянии от центра диска звезды, т. е. величину $r_{\nu 0}(\eta)$.

Для сильных линий отношение $\frac{\sigma_{\nu 0}}{z}$ очень велико, а потому величина $\lambda_{\nu 0}$ очень близка к единице. Пользуясь этим, для указанных линий из формулы (93) получаем:

$$r_{\nu 0} \approx \frac{\varphi_{\nu 0}(\eta) \sqrt{1-\lambda_{\nu 0}}}{1+\beta_1\eta+2\beta_2\eta^2}. \quad (94)$$

Учитывая физический смысл величины λ_{ν} , эту формулу можно переписать в виде

$$r_{\nu 0} \approx \frac{\varphi_{\nu 0}(\eta)}{1+\beta_1\eta+2\beta_2\eta^2} \sqrt{\frac{z}{z+\sigma_{\nu 0}}}. \quad (95)$$

Представляет также интерес поведение внешних частей линии поглощения при переходе от центра диска звезды к краю. Во внешних частях линии величина λ_{ν} мала, вследствие чего величина $r_{\nu}(\eta)$ близка к единице. Поэтому для характеристики поведения внешних частей

линии может быть использована величина

$$C(\eta) = \lim_{\lambda_\nu \rightarrow 0} \frac{1 - r_\nu(\eta)}{\lambda_\nu}. \quad (96)$$

Подставляя (93) в (96) и учитывая, что при малых λ_ν

$$\varphi_\nu(\eta) = 1 + \frac{\lambda_\nu}{2} \eta \lg \frac{1 + \eta}{\eta}, \quad (97)$$

находим:

$$C(\eta) = \frac{3}{2} - \frac{\tau_1}{2} \lg \frac{1 - \eta}{\eta} - \frac{1}{1 + \beta_1 \eta + 2\beta_2 \eta^2} \left[1 + \frac{\beta_1}{4} + \beta_2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} - 2\eta^2 \right) \right]. \quad (98)$$

Величина $r_\nu(\eta)$ дает контур линии поглощения на угловом расстоянии $\arccos \eta$ от центра диска звезды. Чтобы найти контур линии в спектре всей звезды, надо вычислить величину

$$r_\nu = \frac{\int_0^1 r_\nu(\eta) I(0, \eta) \eta d\eta}{\int_0^1 I(0, \eta) \eta d\eta}. \quad (99)$$

Пользуясь формулой (93) и тем, что

$$I(0, \eta) = B_\nu^*(T_0) (1 + \beta_1 \eta + 2\beta_2 \eta^2), \quad (100)$$

получаем:

$$r_\nu = \frac{2 \sqrt{1 - \lambda_\nu}}{1 + \frac{2}{3} \beta_1 + \beta_2} \left\{ \alpha_{\nu 1} + \beta_1 \sqrt{1 - \lambda_\nu} \left(\alpha_{\nu 2} \sqrt{1 - \lambda_\nu} + \frac{\lambda_\nu}{2} \alpha_{\nu 1}^2 \right) + \beta_2 (1 - \lambda_\nu) \left[2\alpha_{\nu 3} (1 - \lambda_\nu) + \alpha_{\nu 2} \alpha_{\nu 1} \lambda_\nu \sqrt{1 - \lambda_\nu} + \frac{\lambda_\nu^2}{2} \alpha_{\nu 1}^2 + \lambda_\nu \sqrt{1 - \lambda_\nu} \alpha_{\nu 2}^2 \right] \right\}. \quad (101)$$

Значения входящих в приведенные формулы величин α_n , являющихся моментами функции $\varphi(\eta)$, приведены в таблице 23.

Т а б л и ц а 23

Моменты функции $\varphi(\eta)$

λ	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
0	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200
0,1	1,026	0,516	0,344	0,258	0,207
0,2	1,056	0,533	0,357	0,268	0,215
0,3	1,089	0,553	0,371	0,279	0,224
0,4	1,127	0,576	0,387	0,292	0,234
0,5	1,172	0,603	0,407	0,307	0,247
0,6	1,225	0,637	0,431	0,326	0,262
0,7	1,292	0,679	0,461	0,350	0,282
0,8	1,382	0,736	0,503	0,382	0,309
0,85	1,442	0,774	0,532	0,405	0,327
0,90	1,519	0,825	0,569	0,435	0,352
0,925	1,570	0,859	0,594	0,455	0,368
0,950	1,635	0,902	0,627	0,480	0,390
0,975	1,727	0,964	0,674	0,518	0,422
1,000	2,000	1,155	0,820	0,637	0,522

§ 5. Контуры линий при учете флуоресценции

Найденные в предыдущем параграфе контуры линий поглощения в звездных спектрах относятся к случаю, когда все кванты, поглощенные атомом в данной спектральной линии, излучаются им в той же линии. Однако при переносе излучения через звездную атмосферу возможны и более сложные процессы. Важнейшими из них являются два следующих взаимно противоположных процесса: 1) ионизация атома из нижнего состояния с последующей рекомбинацией в верхнее состояние и излучением кванта в линии; 2) поглощение кванта в линии, ионизация из верхнего состояния и последующая рекомбинация в нижнее состояние. Первый из этих процессов ведет к увеличению квантов в рассматриваемой линии, второй — к уменьшению таких квантов.

Уравнение переноса излучения, учитывающее указанные процессы флуоресценции, было составлено Стремгреном [2]

в следующем виде:

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu}{dr} = -(\sigma_\nu + \kappa) I_\nu + (1 - \varepsilon) \sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} + (\kappa + Q \varepsilon \sigma_\nu) B_\nu^*(T), \quad (102)$$

где ε — доля переходов из второго состояния в ионизованное, уменьшающих число квантов в линии, $Q \varepsilon \sigma_\nu B_\nu^*(T)$ — коэффициент истинного излучения в линии, обусловленный ионизациями из нижнего состояния и рекомбинациями в верхнее (Q — некоторая постоянная).

Уравнение (102) может быть переписано так:

$$\cos \vartheta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi} - (1 - \lambda_\nu^0 + Q \varepsilon \lambda_\nu^0) B_\nu^*(T), \quad (103)$$

где

$$\lambda_\nu = (1 - \varepsilon) \frac{\sigma_\nu}{\kappa + \sigma_\nu}, \quad \lambda_\nu^0 = \frac{\sigma_\nu}{\kappa + \sigma_\nu}. \quad (104)$$

Заметим, что в предыдущем параграфе величина λ_ν^0 , т. е. значение λ_ν при $\varepsilon = 0$, была обозначена просто через λ_ν .

Чтобы найти интенсивность выходящего из звезды излучения $I_\nu(0, \eta)$, мы опять воспользуемся вероятностью выхода кванта из среды. В данном случае

$$f_\nu(\tau_\nu) = \frac{4\pi}{\lambda_\nu} (1 - \lambda_\nu^0 + Q \varepsilon \lambda_\nu^0) B_\nu^*(T), \quad (105)$$

и поэтому

$$I_\nu(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda_\nu} (1 - \lambda_\nu^0 + Q \varepsilon \lambda_\nu^0) \int_0^\infty B_\nu^*(T) p_\nu(\tau_\nu, \eta) \frac{d\tau_\nu}{\eta}. \quad (106)$$

Функцию $B_\nu^*(T)$, как и раньше, возьмем в виде ряда (87). Переходя от τ к τ_ν при помощи соотношения $\tau = (1 - \lambda_\nu^0) \tau_\nu$, вместо (87) имеем:

$$B_\nu^*(T) = B_\nu^*(T_0) [1 + \beta_1 (1 - \lambda_\nu^0) \tau_\nu + \beta_2 (1 - \lambda_\nu^0)^2 \tau_\nu^2 + \dots]. \quad (107)$$

Подстановка (107) в (106) дает:

$$I_{\nu}(0, \eta) = (1 - \lambda_{\nu}^0 + Q\varepsilon i_{\nu}^0) B_{\nu}^*(T_0) \frac{\varphi_{\nu}(\eta)}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \times \\ \times \left\{ 1 + \beta_1 (1 - \lambda_{\nu}^0) \left(\eta + \frac{\lambda_{\nu}}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \right) + \right. \\ \left. + \beta_2 (1 - \lambda_{\nu}^0)^2 \left[2\eta^2 + \eta \frac{\lambda_{\nu} \alpha_{\nu 1}}{1 - \lambda_{\nu}} + \frac{\lambda_{\nu}^2}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}^2}{1 - \lambda_{\nu}} + \frac{\lambda_{\nu} \alpha_{\nu 2}}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \right] \right\}, \quad (108)$$

где использованы полученные в § 3 значения величин $A_n(\eta)$.

На основании соотношения (90) получаем:

$$r_{\nu}(\eta) = \frac{1 - \lambda_{\nu}^0 + Q\varepsilon \lambda_{\nu}^0}{1 + \beta_1 \eta + 2\beta_2 \eta^2} \cdot \frac{\varphi_{\nu}(\eta)}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \times \\ \times \left\{ 1 + \beta_1 (1 - \lambda_{\nu}^0) \left(\eta + \frac{\lambda_{\nu}}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \right) + \right. \\ \left. + \beta_2 (1 - \lambda_{\nu}^0)^2 \left[2\eta^2 + \eta \frac{\lambda_{\nu} \alpha_{\nu 1}}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} + \frac{\lambda_{\nu}^2}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}^2}{1 - \lambda_{\nu}} + \frac{\lambda_{\nu} \alpha_{\nu 2}}{\sqrt{1 - \lambda_{\nu}}} \right] \right\}. \quad (109)$$

Этой формулой и определяется контур линии поглощения при учете флуоресценции.

Получим некоторые следствия из формулы (109).

Для интенсивности в центре сильной линии, пользуясь тем, что в этом случае величина $\lambda_{\nu 0}^0$ близка к единице, найдем:

$$r_{\nu 0} \approx \frac{\varphi_{\nu 0}(\eta)}{1 + \beta_1 \eta + 2\beta_2 \eta^2} Q \sqrt{\varepsilon}. \quad (110)$$

Для величины $C(\eta)$, характеризующей поведение внешних частей линии, получаем:

$$C(\eta) = \frac{3}{2} - \left(Q - \frac{1}{2} \right) \varepsilon - \frac{1 - \varepsilon}{2} \eta \lg \frac{1 + \eta}{\eta} - \\ - \frac{1}{1 + \beta_1 \eta + 2\beta_2 \eta^2} \left[1 - 2\beta_2 \eta^2 + (1 - \varepsilon) \left(\frac{\beta_1}{4} + \frac{\beta_2}{2} \eta + \frac{\beta_2}{3} \right) \right]. \quad (111)$$

Так как величина ε обычно очень мала, то значения $C(\eta)$, даваемые выражением (111), почти не отличаются от тех, которые определяются формулой (98).

Чтобы определить контур линии в спектре всей звезды, надо подставить в формулу (99) выражения (100) и (109). В результате находим:

$$r_{\nu} = \frac{2}{\sqrt{1-\lambda_{\nu}}} \frac{1-\lambda_{\nu}^0 + Q\epsilon\lambda_{\nu}^0}{1 + \frac{2}{3}\beta_1 + \beta_2} \times \\ \times \left\{ \alpha_{\nu 1} + \beta_1(1-\lambda_{\nu}^0) \left(\alpha_{\nu 2} + \frac{\lambda_{\nu}}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}^2}{\sqrt{1-\lambda_{\nu}}} \right) + \beta_2(1-\lambda_{\nu}^0)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[2\alpha_{\nu 3} + \lambda_{\nu} \frac{\alpha_{\nu 1}\alpha_{\nu 2}}{\sqrt{1-\lambda_{\nu}}} + \frac{\lambda_{\nu}^2}{2} \frac{\alpha_{\nu 1}^3}{1-\lambda_{\nu}} + \lambda_{\nu} \frac{\alpha_{\nu 1}\alpha_{\nu 2}}{\sqrt{1-\lambda_{\nu}}} \right] \right\}. \quad (112)$$

При получении формул (109) и (112) мы приняли во внимание три первых члена в разложении функции $B_{\nu}^*(T)$ по степеням τ . Аналогичные формулы, но при учете двух членов в указанном разложении были получены раньше другим методом Чандрасекаром [3].

Следует отметить, что вместо разложения функции $B_{\nu}^*(T)$ в ряд по степеням τ ее иногда представляют в виде:

$$B_{\nu}^*(T) = B_{\nu}^*(T_0) [\beta_0 + \beta_1\tau + (1-\beta_0)e^{-m\tau}],$$

где β_0 , β_1 и m — постоянные, выбранные надлежащим образом. Определение величины $r_{\nu}(\eta)$ в данном случае также не представляет труда. Чтобы учесть наличие экспоненциального члена в приведенном выражении для $B_{\nu}^*(T)$, надо воспользоваться формулой (83).

§ 6. Среда конечной оптической толщины

Решим теперь принятым в этой главе методом задачу о свечении среды конечной оптической толщины τ_0 . Как и выше, допустим, что в среде происходит изотропное рассеяние света.

Обозначим через $p(\tau, \eta) d\omega$ вероятность выхода из среды кванта, поглощенного на оптической глубине τ , под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Тогда интенсивности излучения, выходящего из среды через по-

верхности $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, будут соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} I(0, \eta) &= \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) f(\tau) \frac{d\tau}{\eta}, \\ I(\tau_0, \eta) &= \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta) f(\tau) \frac{d\tau}{\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

где $f(\tau) d\tau$ — количество энергии, пришедшее непосредственно от источников излучения и поглощенное элементарным объемом с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$ за 1 сек .

Для определения функции $p(\tau, \eta)$, как и в случае $\tau_0 = \infty$, можно составить линейное интегральное уравнение. Оно имеет вид

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} p(\tau', \eta) \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau'. \quad (114)$$

Сравнивая уравнение (114) с интегральным уравнением, определяющим функцию $B(\tau, \zeta)$ в задаче о свечении среды, освещенной параллельными лучами:

$$B(\tau, \zeta) = \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau', \zeta) \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau', \quad (115)$$

мы заключаем, что функция $p(\tau, \eta)$ равна функции $B(\tau, \eta)$ при $\pi S = 1$.

Применяя формулы (113) к задаче о свечении среды, освещенной параллельными лучами, т. е. полагая в них

$f(\tau) = \pi S e^{-\frac{\tau}{\zeta}}$, и переходя от интенсивности излучения к коэффициентам яркости при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} I(0, \eta, \zeta) &= S\rho(\eta, \zeta)\zeta; \\ I(\tau_0, \eta, \zeta) &= S\sigma(\eta, \zeta)\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\eta, \zeta) \zeta &= \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}; \\ \sigma(\eta, \zeta) \zeta &= \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Из сравнения этих формул с формулами, выражающими величины ρ и σ через функцию $B(\tau, \zeta)$:

$$\left. \begin{aligned} S\rho(\eta, \zeta) \zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \\ S\sigma(\eta, \zeta) \zeta &= \int_0^{\tau_0} B(\tau, \zeta) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

при учете того, что $p(\tau, \eta) = \frac{B(\tau, \eta)}{\pi S}$, вытекает:

$$\rho(\eta, \zeta) = \rho(\zeta, \eta), \quad \sigma(\eta, \zeta) = \sigma(\zeta, \eta), \quad [(119)$$

т. е. симметричность коэффициентов яркости относительно углов падения и отражения (или пропускания).

Кроме уравнения (113), для определения функции $p(\tau, \eta)$ можно также получить функциональное уравнение. Как и в § 1, найдем для этого вероятность выхода кванта с оптической глубины $\tau + \Delta\tau$, т. е. величину $p(\tau + \Delta\tau, \eta)$.

Разобьем среду оптической толщины τ_0 на слой оптической толщины $\tau_0 - \Delta\tau$ и слой малой оптической толщины $\Delta\tau$ (рис. 14). Обозначим через $p_1(\tau, \eta)$ вероятность выхода кванта с оптической глубины τ из среды оптической толщины $\tau_0 - \Delta\tau$. Для величины $p(\tau + \Delta\tau, \eta)$ получаем:

$$\begin{aligned} p(\tau + \Delta\tau, \eta) &= \\ &= p_1(\tau, \eta) \left(1 - \frac{\Delta\tau}{\eta} \right) + 2\pi \int_0^1 p_1(\tau, \eta') \frac{\Delta\tau}{\eta'} d\eta' p(0, \eta). \end{aligned} \quad (120)$$

Что же касается величины $p_1(\tau, \eta)$, то она равна

$$p_1(\tau, \eta) = p(\tau, \eta) - 2\pi \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') \frac{\Delta\tau}{\eta'} d\eta' p(\tau_0, \eta). \quad (121)$$

Подставляя (121) в (120) и полагая $\Delta\tau \rightarrow 0$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = & -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + 2\pi p(0, \eta) \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} - \\ & - 2\pi p(\tau_0, \eta) \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}. \end{aligned} \quad (122)$$

Это уравнение является обобщением уравнения (44), полученного ранее для случая $\tau_0 = \infty$.

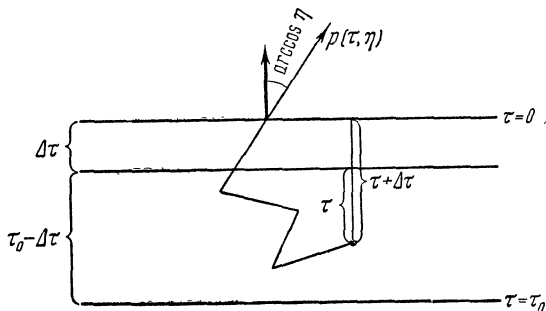


Рис. 14.

Для определения входящих в уравнение (122) величин $p(0, \eta)$ и $p(\tau_0, \eta)$ надо принять во внимание, что выход из среды кванта, поглощенного в поверхностном слое, может произойти как непосредственно из этого слоя, так и в результате диффузного отражения (или пропускания) излучения средой. Таким образом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} p(0, \eta) &= \frac{\lambda}{4\pi} \left[1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta' \right], \\ p(\tau_0, \eta) &= \frac{\lambda}{4\pi} \left[e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') d\eta' \right], \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

где $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости, определенные формулами (117).

Найдем при помощи уравнения (122) величины $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$. Умножая уравнение (122) сначала на $e^{-\frac{\tau}{\zeta}} d\tau$, затем на $e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} dt$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , имеем:

$$(\eta + \zeta) \rho(\eta, \zeta) = \pi p(0, \eta) \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right] - \pi p(\tau_0, \eta) \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right], \quad (124)$$

$$(\zeta - \eta) \sigma(\eta, \zeta) = \pi p(0, \eta) \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2\zeta \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) d\eta' \right] - \pi p(\tau_0, \eta) \left[1 + 2\zeta \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) d\eta' \right]. \quad (125)$$

Пользуясь (123) и учитывая доказанную выше симметричность функций $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta) - \psi(\eta)\psi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \\ \sigma(\eta, \zeta) &= \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\psi(\zeta) - \varphi(\zeta)\psi(\eta)}{\zeta - \eta}, \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

где

$$\varphi(\eta) = 1 + 2\eta \int_0^1 \rho(\eta, \eta') d\eta'; \quad \psi(\eta) = e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2\eta \int_0^1 \sigma(\eta, \eta') d\eta'. \quad (127)$$

Подстановка (126) в (127) дает следующие уравнения для определения функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\varphi(\eta') - \psi(\eta)\psi(\eta')}{\eta + \eta'} d\eta', \\ \psi(\eta) &= e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \frac{\lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{\varphi(\eta)\psi(\eta') - \varphi(\eta')\psi(\eta)}{\eta' - \eta} d\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Из (123) и (127) вытекает:

$$\left. \begin{aligned} p(0, \eta) &= \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\eta), \\ p(\tau_0, \eta) &= \frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

Этими формулами определяется физический смысл функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Формулы (126) для величин $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$, а также уравнения (128) для функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ уже были получены раньше (глава III, § 4). Однако теперь при помощи формул (113) и уравнения (122) мы можем решить также другие задачи о свечении рассматриваемой среды. Примеры решения таких задач будут даны в следующем параграфе.

Здесь же мы еще остановимся на вопросе о решении уравнений (128) для случая чистого рассеяния. Дело в том, что в указанном случае общее решение уравнений (128) включает произвольную постоянную C . Именно, если функции $\varphi_*(\eta)$ и $\psi_*(\eta)$ являются решением системы уравнений (128), то решением этой системы будут также функции

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\eta) &= \varphi_*(\eta) + C\eta[\varphi_*(\eta) + \psi_*(\eta)], \\ \psi(\eta) &= \psi_*(\eta) - C\eta[\varphi_*(\eta) + \psi_*(\eta)], \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

где C — постоянная.

Чтобы определить постоянную C , можно воспользоваться так называемым K -интегралом (об этом уже говорилось в § 4 главы III). Однако постоянную C мы можем найти и другим способом, основанным на физическом смысле функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ [данном формулами (129)].

В случае чистого рассеяния должно выполняться соотношение

$$2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) d\eta + 2\pi \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta) d\eta = 1, \quad (131)$$

означающее, что все кванты, поглощенные на любой оптической глубине τ , должны выйти из среды.

Полагая в (131) $\tau = 0$ и пользуясь формулами (129) при $\lambda = 1$, находим:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(\eta) d\eta = 1. \quad (132)$$

Однако это соотношение не может служить для определения постоянной C , так как при подстановке функций (130) в (132) постоянная C исключается. Объясняется это тем, что соотношение (132) является следствием уравнений (128) при $\lambda = 1$.

Но из соотношения (131) при помощи уравнения (122) могут быть получены также другие формулы, включающие в себя функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ и не вытекающие из уравнений (128).

Интегрируя (131) по τ в пределах от 0 до τ_0 , имеем:

$$4\pi \int_0^1 d\eta \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) d\tau = \tau_0. \quad (133)$$

Далее, путем интегрирования уравнения (122) по τ в пределах от 0 до τ_0 , получаем:

$$\int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} = [p(0, \eta) - p(\tau_0, \eta)] \left[1 + 2\pi \int_0^1 d\eta' \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta') \frac{d\tau}{\eta'} \right]. \quad (134)$$

Но интеграл, входящий в правую часть соотношения (134), легко находится из самого этого соотношения путем интегрирования (134) по η в пределах от 0 до 1. В результате мы приходим к формуле

$$\int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 [\varphi(\eta) - \psi(\eta)] d\eta}, \quad (135)$$

где приняты во внимание соотношения (129).

Формула (135) справедлива при любых значениях λ . Подставляя значение интеграла (135) при $\lambda = 1$ в (133),

находим:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \tau_0 \left[1 - \frac{1}{2} (\alpha_0 - \beta_0) \right], \quad (136)$$

где использованы обозначения

$$\alpha_n = \int_0^1 \varphi(\eta) \eta^n d\eta; \quad \beta_n = \int_0^1 \psi(\eta) \eta^n d\eta. \quad (137)$$

Соотношение (136) и может служить для определения постоянной C в случае чистого рассеяния. Если мы подставим в (136) функции (130), то получим:

$$C = \frac{\tau_0 \left[1 - \frac{1}{2} (\alpha_0^* - \beta_0^*) \right] - \alpha_1^* + \beta_1^*}{2(\alpha_2^* + \beta_2^*) + \tau_0(\alpha_1^* + \beta_1^*)}, \quad (138)$$

где α_n^* и β_n^* — моменты функций $\varphi^*(\eta)$ и $\psi^*(\eta)$.

В дальнейшем мы будем считать, что функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, найденные из уравнений (128) при $\lambda = 1$, удовлетворяют соотношению (136), т. е. имеют физический смысл, требуемый соотношениями (129).

В статье автора (Астр. журн., в печати) показано, что применяемым в этой главе методом легко могут быть найдены уравнения (102) и (103) гл. III для функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, а также некоторые новые уравнения. Там же даются асимптотические формулы для $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$ при больших значениях τ_0 .

§ 7. Свечение среды при различных источниках излучения

Если функция $p(\tau, \eta)$ известна, то формулы (113) дают возможность вычислить интенсивности выходящего из среды излучения при любых источниках излучения. Однако в некоторых случаях вычисление интенсивностей $I(0, \eta)$ и $I(\tau_0, \eta)$ по формулам (113) может быть выполнено без предварительного определения функции $p(\tau, \eta)$ — путем использования непосредственно уравнения (122) с учетом соотношений (129). Ниже даются примеры таких вычислений.

1. Допустим, что источники излучения расположены внутри среды, причем функция $B_0(\tau)$ представлена в виде

ряда, расположенного по степеням τ , т.е. имеет форму (63). В таком случае согласно формуле (35) функция $f(\tau)$ будет равна

$$f(\tau) = \frac{4\pi}{\lambda} (b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \dots). \quad (139)$$

Подставляя (139) в (113), получаем:

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} [b_0 A_0(\eta) + b_1 A_1(\eta) + b_2 A_2(\eta) + \dots]; \quad (140)$$

$$I(\tau_0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} [b_0 D_0(\eta) + b_1 D_1(\eta) + b_2 D_2(\eta) + \dots], \quad (141)$$

где введены обозначения

$$A_n(\eta) = \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) \tau^n \frac{d\tau}{\eta}; \quad D_n(\eta) = \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta) \tau^n \frac{d\tau}{\eta}. \quad (142)$$

Для вычисления интегралов (142) воспользуемся уравнением (122), которое перепишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\tau, \eta)}{\partial \tau} = & -\frac{1}{\eta} p(\tau, \eta) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) \int_0^1 p(\tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} - \frac{\lambda}{2} \psi(\eta) \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}. \end{aligned} \quad (143)$$

Умножая (143) на τ^n и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , находим (при $n \geq 1$):

$$\begin{aligned} & p(\tau_0, \eta) \tau_0^n - n\eta A_{n-1}(\eta) = \\ & = -A_n(\eta) + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) \int_0^1 A_n(\eta') d\eta' - \frac{\lambda}{2} \psi(\eta) \int_0^1 D_n(\eta') d\eta'. \end{aligned} \quad (144)$$

Очевидно, что

$$D_n(\eta) = \tau_0^n A_0(\eta) - C_n^1 \tau_0^{n-1} A_1(\eta) + \dots + (-1)^n A_n(\eta), \quad (145)$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Поэтому вместо (144) имеем:

$$\begin{aligned} A_n(\eta) = & -\frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta) \tau_0^n + n\eta A_{n-1}(\eta) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \varphi(\eta) a_n - \frac{\lambda}{2} \psi(\eta) [\tau_0^n a_0 - C_n^1 \tau_0^{n-1} a_1 + \dots + (-1)^n a_n], \end{aligned} \quad (146)$$

где обозначено

$$a_n = \int_0^1 A_n(\eta) d\eta. \quad (147)$$

Интегрируя (146) по η в пределах от 0 до 1, получаем:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + (-1)^n \frac{\lambda}{2} \beta_0 \right] a_n = & -\frac{\lambda}{4\pi} \beta_0 \tau_0^n + \\ & + n \int_0^1 \eta A_{n-1}(\eta) d\eta - \frac{\lambda}{2} \beta_0 [\tau_0^n a_0 - C_n^1 \tau_0^{n-1} a_1 + \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} C_n^1 \tau_0 a_{n-1}]. \quad (148) \end{aligned}$$

Если значение a_n , даваемое соотношением (148), мы подставим в (146), то получим рекуррентную формулу для определения величин $A_n(\eta)$. Величина $A_0(\eta)$ уже была найдена выше. Она дается формулой (135).

После определения величин $A_n(\eta)$ по формуле (145) могут быть найдены и величины $D_n(\eta)$.

Применим полученные формулы к частным случаям. Пусть источники излучения распределены в среде равномерно (т. е. $B_0 = \text{const}$). Тогда, пользуясь формулами (140), (141) и (135), находим:

$$I(0, \eta) = I(\tau_0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} B_0 A_0(\eta), \quad (149)$$

где

$$A_0(\eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2} (\alpha_0 - \beta_0)}. \quad (150)$$

При $\tau_0 = \infty$ из (149) следует ранее полученная формула (79).

Рассмотрим также случай $B_0(\tau) = b_1 \tau$. При $n = 1$ соотношения (146) и (148) принимают вид

$$\begin{aligned} A_1(\eta) = & -\frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta) \tau_0 + \eta A_0(\eta) + \\ & + \frac{\lambda}{2} [\varphi(\eta) + \psi(\eta)] a_1 - \frac{\lambda}{2} \psi(\eta) \tau_0 a_0, \quad (151) \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0 \right) a_1 = -\frac{\lambda}{4\pi} \beta_0 \tau_0 + \int_0^1 \eta A_0(\eta) d\eta - \frac{\lambda}{2} \beta_0 \tau_0 a_0. \quad (152)$$

На основании (150) постоянная a_0 равна

$$a_0 = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\alpha_0 - \beta_0}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0}. \quad (153)$$

Чтобы определить постоянную a_1 , надо подставить (150) в (152). В результате находим:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) a_1 = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0}. \quad (154)$$

Но из уравнений (128) следует, что

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 - \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) = 1 - \lambda \quad (155)$$

(см. § 4 главы III). Поэтому соотношение (154) дает:

$$a_1 = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \lambda}. \quad (156)$$

Подставляя в формулу (151) выражения (150), (153) и (156), получаем для искомой величины $A_1(\eta)$:

$$A_1(\eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \left\{ \eta \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} - \tau_0 \frac{\psi(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0}{1 - \lambda} [\varphi(\eta) + \psi(\eta)] \right\}. \quad (157)$$

Интенсивности выходящего из среды излучения будут в данном случае равны

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} b_1 A_1(\eta); \quad I(\tau_0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} b_1 [\tau_0 A_0(\eta) - A_1(\eta)]. \quad (158)$$

Рассмотрим еще случай $B_0(\tau) = b_2 \tau^2$. При указанном распределении источников в среде

$$I(0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} b_2 A_2(\eta), \quad I(\tau_0, \eta) = \frac{4\pi}{\lambda} b_2 D_2(\eta), \quad (159)$$

причем согласно (145)

$$D_2(\eta) = \tau_0^2 A_0(\eta) - 2\tau_0 A_1(\eta) + A_2(\eta). \quad (160)$$

Чтобы определить величину $A_2(\eta)$, надо в соотношениях (146) и (148) положить $n=2$. В результате находим:

$$A_2(\eta) = -\frac{\lambda}{4\pi} \psi(\eta) \tau_0^2 + 2\eta A_1(\eta) + \frac{\lambda}{2} [\varphi(\eta) - \psi(\eta)] a_2 - \\ - \frac{\lambda}{2} \psi(\eta) (\tau_0^2 a_0 - 2\tau_0 a_1); \quad (161)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) a_2 = \\ = -\frac{\lambda}{4\pi} \beta_0 \tau_0^2 + 2 \int_0^1 \eta A_1(\eta) d\eta - \frac{\lambda}{2} \beta_0 (\tau_0^2 a_0 - 2\tau_0 a_1). \quad (162)$$

Подставляя в (162) ранее найденные выражения для $A_1(\eta)$ и a_0 , получаем:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0\right) a_2 = \\ = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2(\alpha_2 - \beta_2) - 2\tau_0 \beta_1 - \tau_0^2 \beta_0}{1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 + \frac{\lambda}{2} \beta_0} + \lambda (\alpha_1 + \beta_1 + \tau_0 \beta_0) a_1. \quad (163)$$

Если мы подставим a_2 из (163) в (161), то придем к искомому выражению для величины $A_2(\eta)$.

Обратим внимание на то, что при $\lambda=1$ найденные выше выражения для $A_1(\eta)$ и $A_2(\eta)$ становятся неопределенными вследствие неопределенности постоянной a_1 . Для нахождения этой постоянной мы можем применить тот же прием, какой был применен в конце предыдущего параграфа для определения постоянной C , т. е. воспользоваться соотношением (131).

Умножая (131) на τ^n и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , находим:

$$2\pi \int_0^1 A_n(\eta) \eta d\eta + 2\pi \int_0^1 D_n(\eta) \eta d\eta = \frac{\tau_0^{n+1}}{n+1}. \quad (164)$$

Если мы положим в этом равенстве $n=1$, то, учитывая (145) и (150), получим соотношение

$$\alpha_1 - \beta_1 - \beta_0 \tau_0 = 0, \quad (165)$$

вытекающее также из выражения (156) для a_1 при $\lambda=1$.

Примем теперь в (164) $n = 2$. Пользуясь (160), имеем:

$$\int_0^1 A_2(\eta) \eta d\eta + \frac{\tau_0^2}{2} \int_0^1 A_0(\eta) \eta d\eta - \tau_0 \int_0^1 A_1(\eta) d\eta = \frac{\tau_0^3}{12\pi}. \quad (166)$$

Подставляя сюда полученные выше выражения для $A_0(\eta)$, $A_1(\eta)$ и $A_2(\eta)$, находим:

$$a_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{\tau_0^3}{3} \beta_0 + \tau_0^2 \beta_1 + 2\tau_0 \beta_2 - 2(\alpha_3 - \beta_3)}{\beta_0 \left[\alpha_2 + \beta_2 + \frac{\tau_0}{2} (\alpha_1 + \beta_1) \right]}. \quad (167)$$

Это значение a_1 и надо подставить в формулы для $A_1(\eta)$ и $A_2(\eta)$ в случае чистого рассеяния.

Аналогично может быть устранена возникающая при $\lambda = 1$ неопределенность в выражениях для любых других величин $A_n(\eta)$.

Отметим, что задача о свечении среды конечной оптической толщины в том случае, когда функция $B_0(\tau)$ является полиномом, была также рассмотрена в трех работах Горака и Лундквиста [4] другим, более сложным методом.

2. Выше мы считали, что расположенные внутри среды источники излучения испускают одинаковое количество энергии во все стороны. Однако при помощи функции $p(\tau, \eta)$ могут быть также решены и задачи о свечении среды при неізотропном испускании энергии источниками.

Обозначим через $B_0(\tau, \eta) d\omega$ количество энергии, испускаемое источниками излучения, находящимися на оптической глубине τ в элементарном объеме с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$, под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$ за 1 сек. Очевидно, что в данном случае мы уже не можем определять функцию $f(\tau)$ при помощи соотношения (35), т. е. не можем принять энергию, излучаемую элементарным объемом, за энергию, рассеянную этим объемом, так как рассеяние излучения в среде предполагается изотропным. Поэтому мы должны вычислять функцию $f(\tau)$ в согласии с ее формальным определением путем нахождения количества энергии, приходящего непосредственно от источников излучения и поглощенного в данном месте среды.

Легко получить, что

$$f(\tau) = 2\pi \int_0^1 d\eta' \int_0^{\bar{\tau}} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} B_0(\tau', \eta') \frac{d\tau'}{\eta'} + \\ + 2\pi \int_0^1 d\eta' \int_{\bar{\tau}}^{\tau_0} e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} B_0(\tau', -\eta') \frac{d\tau'}{\eta'}. \quad (168)$$

Если мы подставим это выражение для $f(\tau)$ в формулы (113), то найдем интенсивности выходящего из среды диффузного излучения. Чтобы найти полные интенсивности излучения, надо добавить к ним интенсивности излучения, обусловленные непосредственно источниками света. В результате для полной интенсивности $I(0, \eta)$ выходящего из среды излучения получаем:

$$I(0, \eta) = 2\pi \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} \int_0^1 d\eta' \left[\int_0^{\bar{\tau}} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}} B_0(\tau', \eta') \frac{d\tau'}{\eta'} + \right. \\ \left. + \int_{\bar{\tau}}^{\tau_0} e^{-\frac{\tau'-\tau}{\eta'}} B_0(\tau', -\eta') \frac{d\tau'}{\eta'} \right] + \int_0^{\tau_0} B_0(\tau, -\eta) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta} \quad (169)$$

и аналогичное выражение для $I(\tau_0, \eta)$.

При помощи формул (169) и уравнения (143) величины $I(0, \eta)$ и $I(\tau_0, \eta)$ могут быть вычислены для многих частных случаев зависимости B_0 от τ и η . Однако здесь для примера мы рассмотрим лишь тот случай, когда источники излучения распределены в среде равномерно, т. е. $B_0(\tau, \eta) = B_0(\eta)$.

В указанном случае формула (169) принимает вид

$$I(0, \eta) = 2\pi \int_0^1 B_0(\eta') d\eta' \int_0^{\tau_0} \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\eta'}}\right) p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + \\ + 2\pi \int_0^1 B_0(-\eta') d\eta' \int_0^{\tau_0} \left(1 - e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\eta'}}\right) p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + \\ + B_0(-\eta) \left(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\right). \quad (170)$$

Пользуясь формулами (117) и (135), вместо (170) находим:

$$I(0, \eta) = \frac{\lambda}{2} \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 - \beta_0)} \int_0^1 [B_0(\eta') + B_0(-\eta')] d\eta' -$$

$$- 2 \int_0^1 B_0(\eta') \rho(\eta, \eta') \eta' d\eta' - 2 \int_0^1 B_0(-\eta') \sigma(\eta, \eta') \eta' d\eta' +$$

$$+ B_0(-\eta) \left(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}\right). \quad (171)$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае интенсивности выходящего из среды излучения весьма просто выражаются через введенные выше функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Легко убедиться в том, что при $B_0(\eta) = B_0 = \text{const}$ формула (171) переходит в формулу (149). Для этого надо воспользоваться соотношениями (126) и уравнениями (128), определяющими функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Если величина B_0 зависит не только от τ и η , но и от азимута, то в тех членах полученных выше формул, которые определяют интенсивность диффузного излучения, под $B_0(\tau, \eta)$ следует понимать величину B_0 , усредненную по азимуту.

3. Допустим теперь, что на среду падает внешнее излучение, интенсивность которого зависит от зенитного расстояния и азимута. Обозначим через $I_0(\zeta)$ интенсивность этого излучения, усредненную по азимуту. Функция $f(\tau)$ в данном случае будет равна

$$f(\tau) = 2\pi \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} I_0(\zeta) d\zeta. \quad (172)$$

Подставляя (172) в первую из формул (113), получаем:

$$I(0, \eta) = 2\pi \int_0^1 I_0(\zeta) d\zeta \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (173)$$

или, учитывая (117),

$$I(0, \eta) = 2 \int_0^1 I_0(\zeta) \rho(\eta, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (174)$$

Аналогично находится выражение для интенсивности излучения, выходящего через другую границу среды:

$$I(\tau_0, \eta) = 2 \int_0^1 I_0(\zeta) \sigma(\eta, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (175)$$

Разумеется, формулы (174) и (175) мы могли бы получить, пользуясь непосредственно соотношениями (116).

В том случае, когда среда освещается изотропным излучением (т. е. $I_0 = \text{const}$), формулы (174) и (175) при помощи (126) и (128) преобразуются к виду

$$I(0, \eta) = I_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 \right) \varphi(\eta) - \frac{\lambda}{2} \beta_0 \psi(\eta) \right], \quad (176)$$

$$I(\tau_0, \eta) = I_0 \left[\left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 \right) \psi(\eta) + \frac{\lambda}{2} \beta_0 \varphi(\eta) - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right]. \quad (177)$$

Мы не будем приводить здесь решения других задач о свечении среды при помощи уравнения (122). Отметим лишь, что полученные в этом параграфе решения могут быть легко обобщены на тот случай, когда среда ограничена поверхностью, отражающей излучение. Это обобщение будет сделано в следующей главе.

§ 8. Точечный источник света

При формулировке задачи о свечении среды, состоящей из плоскопараллельных слоев, мы сделали предположение (которое всегда подразумевалось в дальнейшем), что источники излучения в разных местах на одной и той же глубине одинаковы. Однако встречаются также случаи, когда эти источники излучения различны. Простейшим из них является случай точечного источника излучения, расположенного внутри среды или вне ее*).

*) Хотя вопрос о свечении среды под действием точечного источника излучения весьма важен, он раньше почти не рассматривался. Решение некоторых специальных задач, связанных с точечным источником излучения, дано в работах В. А. Амбарцумяна [5] и автора [6].

Задачи о свечении среды с указанными источниками излучения значительно сложнее задач, рассмотренных выше. Это связано с тем, что величины I и B зависят в таких случаях не только от глубины, но и от других координат. Например, в случае точечного источника света эти величины являются функциями глубины и расстояния от перпендикуляра к границе среды, проходящего через источник света. Если подобные задачи решать приближенно (путем усреднения интенсивности излучения по углам), то для определения функции B мы получим не обыкновенные дифференциальные уравнения, какие получали раньше, а уравнения в частных производных.

Однако при помощи введенной выше функции $p(\tau, \eta)$ можно получить некоторые данные о свечении среды и в том случае, когда источники излучения различны в разных местах на одной и той же глубине.

Функция $p(\tau, \eta)$ определяет вероятность выхода кванта из среды под углом η к нормали (внутри единичного телесного угла) после поглощения его на оптической глубине τ . При этом не имеет значения, от каких именно источников излучения квант появился на данной глубине. Поэтому после умножения количества энергии, пришедшей от источников излучения и поглощенной между глубинами τ и $\tau + d\tau$, на функцию $p(\tau, \eta)$ и интегрирования по всем глубинам мы во всех случаях можем найти полное количество энергии, выходящее из среды в заданном направлении. Однако, вообще говоря, при помощи функции $p(\tau, \eta)$ мы не можем определить, какое количество квантов проходит через границу среды в данном месте, т. е. не можем определить интенсивность излучения. Это можно сделать только в рассмотренном выше случае равномерного распределения источников излучения на одной и той же глубине. В этом простейшем случае через единичную площадку, находящуюся в любом месте границы среды, проходит одно и то же число квантов.

Предполагая распределение источников излучения на одной и той же глубине произвольным, обозначим через $F(\tau)d\tau$ количество энергии, пришедшее непосредственно от источников излучения и поглощенное во всей среде между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$ за 1 сек.

Тогда полное количество энергии, излучаемое средой под углом $\arccos \eta$ к нормали в единичном телесном угле за 1 сек через границу $\tau = 0$, будет равно

$$E(0, \eta) = \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) F(\tau) d\tau. \quad (178)$$

Аналогично для количества энергии, излученной средой через границу $\tau = \tau_0$, получаем

$$E(\tau_0, \eta) = \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta) F(\tau) d\tau. \quad (179)$$

Применим формулы (178) и (179) к случаю точечного источника света, испускающего во все стороны одинаковое количество энергии и имеющего светимость L .

Допустим сначала, что точечный источник находится над средой (рис. 15). Количество энергии, падающее от источника на среду под углом $\arccos \zeta$ к нормали внутри телесного угла $2\pi d\zeta$, равно $\frac{2\pi d\zeta}{4\pi} L$. Из этого количества энергии между глубинами τ и $\tau + d\tau$ поглощается часть, равная

$$\frac{L}{2} d\zeta e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\tau}{\zeta}.$$

Поэтому полная энергия, поглощенная в среде между глубинами τ и $\tau + d\tau$, будет равна

$$\frac{L}{2} d\tau \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

т. е.

$$F(\tau) = \frac{L}{2} \text{Ei } \tau. \quad (180)$$

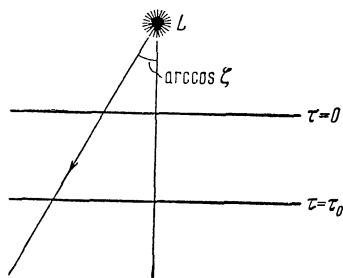


Рис. 15.

Подставляя (180) в (178) и (179), находим:

$$\left. \begin{aligned} E(0, \eta) &= \frac{L}{2} \int_0^{\tau_0} p(\tau, \eta) \text{Ei } \tau \, d\tau, \\ E(\tau_0, \eta) &= \frac{L}{2} \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta) \text{Ei } \tau \, d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Полученные интегралы могут быть вычислены при помощи интегрального уравнения (114), определяющего функцию $p(\tau, \eta)$. Полагая в этом уравнении сначала $\tau = 0$, а затем $\tau = \tau_0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} p(0, \eta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei } \tau \, p(\tau, \eta) \, d\tau + \frac{\lambda}{4\pi}, \\ p(\tau_0, \eta) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei } (\tau_0 - \tau) \, p(\tau, \eta) \, d\tau + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}. \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} E(0, \eta) &= \frac{L}{\lambda} \left[p(0, \eta) - \frac{\lambda}{4\pi} \right]; \\ E(\tau_0, \eta) &= \frac{L}{\lambda} \left[p(\tau_0, \eta) - \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

Но величины $p(0, \eta)$ и $p(\tau_0, \eta)$ при помощи соотношений (129) могут быть выражены через функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$. Поэтому окончательно получаем:

$$E(0, \eta) = \frac{L}{4\pi} [\varphi(\eta) - 1]; \quad E(\tau_0, \eta) = \frac{L}{4\pi} [\psi(\eta) - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}]. \quad (184)$$

Отметим, что величины $E(0, \eta)$ и $E(\tau_0, \eta)$ не зависят от высоты источника света над средой.

Предположим теперь, что точечный источник находится внутри среды на оптической глубине τ . Легко получить, что в данном случае

$$F(\tau') = \frac{L}{2} \text{Ei} |\tau - \tau'|. \quad (185)$$

Подставляя (185) в формулы (178) и (179) и пользуясь уравнением (114), находим:

$$\left. \begin{aligned} E(0, \eta) &= \frac{L}{\lambda} \left[p(\tau, \eta) - \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}} \right], \\ E(\tau_0, \eta) &= \frac{L}{\lambda} \left[p(\tau_0 - \tau, \eta) - \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

Формулы (186) определяют, разумеется, только энергию, выходящую из среды после рассеяний (но не прямо от источника света). Принимая во внимание физический смысл величины $p(\tau, \eta)$, мы могли бы написать эти формулы сразу.

Полученные выше формулы (184) и (186) могут быть применены к определению количества энергии, рассеиваемой туманностью в разных направлениях при освещении ее звездой (или несколькими звездами).

Указанное применение уже было сделано в работе С. А. Каплана [7], посвященной свечению пылевых туманностей. Оптическая толщина туманности считалась бесконечно большой, а звезда — находящейся вне туманности. Кроме первой из формул (184), была использована также формула для величины $E(0, \eta)$, полученная при простейшей сферической индикатрисе рассеяния

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma.$$

Попутно отметим, что в работе С. А. Каплана и И. А. Климишина [8] рассматривалась задача о свечении сферически симметричной туманности с находящейся в ее центре звездой. Так как толщина туманности принималась малой по сравнению с ее радиусом, то можно было считать, что туманность состоит из плоскопараллельных слоев и освещенность в каждом месте на одной и той же глубине одинакова. Поэтому была найдена не только полная энергия, излучаемая туманностью, но и интенсивность выходящего из туманности излучения.

Подчеркнем, что определение интенсивности выходящего из среды излучения в общем случае (т. е. при неравномерном распределении источников излучения на одной и той же глубине) при помощи функции $p(\tau, \eta)$ невоз-

можно. Чтобы дать полное решение задачи о свечении среды в этом случае, надо найти вероятность выхода кванта из среды в заданном направлении и в определенном месте (точнее говоря, на определенном расстоянии от перпендикуляра, проходящего через элементарный объем, в котором был поглощен квант). Однако здесь мы на этом останавливаться не будем.

§ 9. Статистическое толкование проблемы переноса излучения

После решения конкретных задач при помощи функции $p(\tau, \eta)$ выскажем некоторые общие соображения о проблеме переноса излучения.

Все величины, характеризующие элементарный акт рассеяния, имеют простой вероятностный смысл. Коэффициент поглощения α определяется так, что величина αds представляет собой вероятность поглощения кванта на пути ds . Отношение коэффициента рассеяния к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения, обозначенное нами через λ , есть вероятность «выживания» кванта при элементарном акте рассеяния. Величина $x(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$, где $x(\gamma)$ — индикатор рассеяния, дает вероятность рассеяния кванта под углом γ к направлению падающего излучения внутри телесного угла $d\omega$.

Проблема переноса (точнее, многократного рассеяния) излучения может также рассматриваться как чисто вероятностная проблема. Мы уже видели, что введение в теорию переноса излучения вероятности выхода кванта из среды позволяет легко определить поле излучения вне среды. Соответствующим обобщением этого метода может определяться и поле излучения внутри среды.

Существенно то, что для указанного обобщения нет необходимости вводить в рассмотрение новые величины, поскольку величины, уже употребляемые в теории переноса излучения, могут быть истолкованы с вероятностной точки зрения. Это позволяет дать статистическое толкование различным соотношениям теории переноса излучения, а также получить некоторые новые соотношения.

Рассмотрим в качестве примера перенос излучения в среде бесконечно большой оптической толщины, состоящей из плоскопараллельных слоев, при сферической индикатрисе рассеяния. В этом случае функция $B(\tau)$ определяется уравнением

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} B(\tau') \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau' + g(\tau), \quad (187)$$

где $g(\tau) d\tau$ — количество энергии, испускаемое элементарным объемом с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$ в единичном телесном угле за 1 сек в результате непосредственного действия источников излучения. Формальное решение уравнения (187) имеет вид

$$B(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') g(\tau') d\tau', \quad (188)$$

где $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента.

Как известно, величина $\Gamma(\tau, \tau') d\tau'$ представляется в виде ряда

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \tau') d\tau' = & \frac{\lambda}{2} \text{Ei} |\tau - \tau'| d\tau' + \\ & + \frac{\lambda^2}{4} d\tau' \int_0^{\infty} \text{Ei} |\tau - \tau''| \text{Ei} |\tau'' - \tau'| d\tau'' + \dots \end{aligned} \quad (189)$$

Легко видеть, что первый член этого ряда представляет собой вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , будет излучен затем между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$, испытав одно рассеяние. Второй член дает аналогичную вероятность для кванта, испытавшего два рассеяния, и т. д. Следовательно, величина $\Gamma(\tau, \tau') d\tau'$ есть вероятность того, что квант, излученный на глубине τ , излучается затем между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$ после любого числа рассеяний в среде.

В свою очередь, функция $g(\tau) d\tau$ может быть истолкована как относительная вероятность возникновения кванта между глубинами τ и $\tau + d\tau$, а величина $B(\tau) d\tau$ — как относительная вероятность того, что квант, возникший при данном распределении источников излучения (т. е. при

заданной функции распределения вероятностей для возникающих кваптов), будет излучен затем между глубинами τ и $\tau + d\tau$ после многократных рассеяний в среде. Таким образом, решение задачи о переносе излучения состоит в нахождении функции распределения вероятностей для одного кванта с заданным начальным распределением вероятностей.

Указанный вероятностный смысл величин $g(\tau)$, $B(\tau)$ и $\Gamma(\tau, \tau')$ может быть использован при решении различных задач теории переноса излучения. Приведем некоторые примеры.

1. Из сказанного выше относительно резольвенты следует, что величина $\frac{\lambda}{4\pi} \Gamma(\tau, \tau') d\tau'$ представляет собой вероятность того, что квант, поглощенный на глубине τ , будет излучен после рассеяний в среде между глубинами τ' и $\tau' + d\tau'$ в единичном телесном угле. Поэтому, умножая

указанную величину на $e^{-\frac{\tau'}{\eta}}$ и интегрируя по τ' в пределах от 0 до ∞ , мы должны получить вероятность выхода из среды под углом $\arccos \eta$ к нормали кванта, поглощенного на глубине τ . Если к полученному интегралу мы добавим величину $\frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}$, представляющую

собой вероятность выхода кванта из среды непосредственно с глубины τ , то придем к уже известной нам функции $p(\tau, \eta)$, т. е. будем иметь

$$p(\tau, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{\eta}} d\tau'. \quad (190)$$

Сравнив уравнение (190) с уравнением (183) при $g(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\eta}}$, мы видим, что в этом случае $B(\tau, \eta) = p(\tau, \eta)$. Иными словами, функция $B(\tau, \eta)$ в задаче о свечении среды при освещении ее параллельными лучами равна вероятности выхода кванта из среды. Этот вывод уже был получен в § 2 другим способом.

2. Составим уравнение для определения резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$. Для этого представим себе, что к данной среде добавлен слой малой оптической толщины $\Delta\tau$.

Учитывая вероятностный смысл резольвенты, получаем:

$$\Gamma(\tau + \Delta\tau, \tau' + \Delta\tau) = \Gamma(\tau, \tau') + \Gamma(\tau, 0) \Delta\tau \Gamma(0, \tau'). \quad (191)$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Gamma(\tau, 0) \Gamma(0, \tau'). \quad (192)$$

Уравнение (192) дает (при $\tau' > \tau$):

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Gamma(0, \tau' - \tau) + \int_0^{\tau} \Gamma(x, 0) \Gamma(0, x + \tau' - \tau) dx. \quad (193)$$

Таким образом, функция от двух переменных $\Gamma(\tau, \tau')$ выражается через функцию от одной переменной $\Gamma(\tau, 0)$ [в силу симметрии резольвенты: $\Gamma(0, \tau) = \Gamma(\tau, 0)$].

Что касается функции $\Gamma(\tau, 0)$, то она, очевидно, равна

$$\Gamma(\tau, 0) = 2\pi \int_0^1 p(\tau, \eta) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (194)$$

Принимая во внимание формулу (52), получаем:

$$\Gamma(\tau, 0) = \Phi(\tau), \quad (195)$$

где $\Phi(\tau)$ — функция, определенная уравнением (54).

Таким образом, отыскание резольвенты сводится к решению уже известного нам уравнения типа Вольтерра. После решения этого уравнения резольвента находится по формуле (193), а функция $B(\tau)$ — по формуле (188). Тем самым определяется поле излучения как вне, так и внутри среды при любых действующих на среду источниках излучения.

Аналогичное статистическое толкование основных величин и соотношений теории переноса излучения может быть сделано и в более сложных случаях (для среды произвольной формы, при несферической индикатрисе рассеяния и т. д.).

ГЛАВА VII

СВЕЧЕНИЕ СРЕДЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В этой главе мы рассмотрим ряд задач о свечении среды, ограниченной поверхностью, отражающей излучение. Важнейшим примером таких сред является планетная атмосфера, ограниченная снизу поверхностью планеты. Другим примером может служить газ или жидкость в сосуде.

При решении указанных задач необходимо принимать во внимание, что световой квант может отразиться от поверхности, затем рассеяться средой в сторону поверхности, снова отразиться от поверхности и т. д. В результате этих процессов возникает диффузное излучение, падающее на среду от поверхности. Интенсивность этого излучения заранее неизвестна. Для решения задачи о свечении среды в рассматриваемых случаях следует написать соответствующие граничные условия, учитывающие отражательные свойства поверхности. Указанными граничными условиями и отличаются эти задачи от задач, рассмотренных выше. Как мы помним, выше считалось, что нет диффузного излучения, падающего на среду извне [условия (52) главы I].

В § 1 настоящей главы задача о свечении среды, прилегающей к отражающей поверхности, приводится к интегральному уравнению для функции $B(\tau)$.

В дальнейшем вводится в рассмотрение вероятность выхода кванта из среды, причем ее удается выразить через вероятность выхода кванта из среды при отсутствии отражающей поверхности. Это дает возможность получить выражения для интенсивностей излучения, выходящего из

данной среды, через известные нам функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$. Полученные в этой главе результаты применяются к планетным атмосферам и к морю.

§ 1. Интегральное уравнение для $B(\tau)$

Рассмотрим задачу о рассеянии света в среде оптической толщины τ_0 при сферической индикатрисе рассеяния и при вероятности выживания кванта λ . В отличие от задач, рассмотренных выше, будем считать, что среда ограничена снизу поверхностью, отражающей излучение.

Для точной формулировки указанной задачи надо задать отражательные свойства поверхности. Мы примем, что величина $y(\vartheta_1, \vartheta_0) \frac{d\omega}{2\pi}$ представляет собой вероятность того, что световой квант, падающий на поверхность под углом ϑ_0 к нормали, отразится от нее под углом ϑ_1 к нормали внутри элементарного телесного угла $d\omega$. Таким образом, если на отражающую поверхность падает излучение интенсивности I_0 под углом ϑ_0 к нормали, то интенсивность излучения I_1 , отраженного от поверхности под углом ϑ_1 к нормали, будет определяться формулой

$$I_1 \cos \vartheta_1 = \frac{y(\vartheta_1, \vartheta_0)}{2\pi} I_0 \cos \vartheta_0. \quad (1)$$

Допустим, что свечение среды вызывается как внутренними источниками излучения, так и внешним излучением, падающим на верхнюю границу среды ($\tau = 0$) в виде параллельных лучей под углом ϑ_0 к нормали. Тогда уравнения переноса излучения и лучистого равновесия запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI}{d\tau} &= -I + B, \\ B &= \frac{\lambda}{4\pi} \int I d\omega + B_0 + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $B_0(\tau)$ — отношение коэффициента истинного излучения (обусловленного непосредственно внутренними источниками излучения) к коэффициенту поглощения и πS — освещенность площадки, перпендикулярной к внешнему излучению, на верхней границе среды (см. § 4 главы I).

В качестве граничного условия на верхней границе среды, как и раньше, имеем:

$$I(0, \vartheta) = 0 \quad \left(\vartheta < \frac{\pi}{2} \right). \quad (3)$$

Чтобы написать граничное условие на нижней границе среды, надо принять во внимание, что прилегающая к среде поверхность освещена как излучением, идущим от среды, так и внешним излучением, прошедшим через среду. Обозначая интенсивность излучения, отраженного от поверхности под углом ϑ_1 к нормали, через $\bar{I}(\vartheta_1)$ и пользуясь соотношением (1), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{I}(\vartheta_1) \cos \vartheta_1 = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(\vartheta_1, \vartheta) I(\tau_0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \\ & + \frac{S}{2} e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0} y(\vartheta_1, \vartheta_0) \cos \vartheta_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, граничное условие при $\tau = \tau_0$ имеет вид

$$I(\tau_0, \vartheta) = \bar{I}(\pi - \vartheta) \quad \left(\vartheta > \frac{\pi}{2} \right). \quad (5)$$

Из уравнений (2) при граничных условиях (3) и (5) может быть получено следующее интегральное уравнение для определения функции $B(\tau)$:

$$\begin{aligned} B(\tau) = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - \tau'| B(\tau') d\tau' + B_0(\tau) + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{I}(\vartheta) e^{-(\tau_0 - \tau) \sec \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \end{aligned} \quad (6)$$

Входящая в уравнение (6) величина $\bar{I}(\vartheta)$ определяется соотношением (4), а входящая в это соотношение величина $I(\tau_0, \vartheta)$ выражается через искомую функцию $B(\tau)$

при помощи формулы:

$$I(\tau_0, \vartheta) = \int_0^{\tau_0} B(\tau) e^{-(\tau_0 - \tau) \sec \vartheta} \sec \vartheta d\tau. \quad (7)$$

Функция $y(\vartheta_1, \vartheta_0)$, характеризующая отражательную способность поверхности, может быть весьма различной. Однако на практике считают, что многие поверхности отражают излучение изотропно. Поэтому случай изотропного отражения заслуживает особого рассмотрения.

В указанном случае интенсивность отраженного излучения не зависит от направления. Поэтому в согласии с формулой (1) получаем:

$$y(\vartheta_1, \vartheta_0) = 2A(\vartheta_0) \cos \vartheta_1, \quad (8)$$

а сама формула (1) принимает вид

$$I_1 = \frac{A(\vartheta_0)}{\pi} I_0 \cos \vartheta_0. \quad (9)$$

Легко видеть, что величина $A(\vartheta_0)$ представляет собой альbedo поверхности, т. е. отношение полной энергии, отраженной поверхностью, к энергии падающей.

Вообще говоря, альbedo поверхности зависит от угла падения излучения, однако мы примем, что $A = \text{const.}$ В таком случае вместо формулы (4) имеем

$$\bar{I} = 2A \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\tau_0, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + AS e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0} \cos \vartheta_0. \quad (10)$$

Подставляя (7) в (10), находим:

$$\bar{I} = 2A \int_0^{\tau_0} B(\tau) \text{Ei}_2(\tau_0 - \tau) d\tau + AS e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0} \cos \vartheta_0, \quad (11)$$

где

$$\text{Ei}_2 x = \int_1^{\infty} e^{-xz} \frac{dz}{z^2}. \quad (12)$$

Поэтому интегральное уравнение для функции $B(\tau)$ приводится к виду

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} \text{Ei} |\tau - \tau'| B(\tau') d\tau' + B_0(\tau) + \frac{\lambda}{4} S e^{-\tau \sec \vartheta_0} + \\ + \frac{\lambda}{2} \text{Ei}_2(\tau_0 - \tau) \left[2A \int_0^{\tau_0} B(\tau') \text{Ei}_2(\tau_0 - \tau') d\tau' + \right. \\ \left. + A e^{-\tau_0 \sec \vartheta_0} \cos \vartheta_0 \right]. \quad (13)$$

Интегральное уравнение (13), как и более общее уравнение (6), могут быть решены методами, изложенными в главе II.

При $B_0 = 0$ полученные уравнения определяют функцию $B(\tau)$ в задаче о рассеянии излучения в среде, освещенной параллельными лучами при наличии отражающей поверхности. К этой задаче мы приходим, в частности, при изучении планетных атмосфер.

Интегральное уравнение (13) при $B_0 = 0$ было подробно рассмотрено в работе Е. С. Кузнецова [1] с целью применения к земной атмосфере. В другой его работе [2] были также изучены более общие интегральные уравнения, соответствующие некоторым формам зависимости отражательной способности поверхности от углов падения и отражения.

§ 2. Вероятность выхода кванта из среды

Сформулированная выше задача о свечении среды, ограниченной отражающей поверхностью, легко может быть решена путем использования вероятности выхода кванта из среды.

Допустим, как и в § 1, что отражающая поверхность ограничивает среду снизу. Тогда вместо одной функции $p(\tau, \eta)$, употреблявшейся при отсутствии отражающей поверхности, мы должны ввести в рассмотрение две величины: вероятность выхода кванта из среды через верхнюю границу и вероятность достижения квантом нижней границы.

Обозначим через $p_1(\tau, \eta) \frac{d\omega}{4\pi}$ и через $p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\omega}{4\pi}$ соответственно вероятность того, что квант, поглощенный на оптической глубине τ , выйдет из среды через верхнюю границу или дойдет до нижней границы под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Если обозначить через $f(\tau) d\tau$ количество энергии, пришедшей от источников излучения и поглощенной в элементарном цилиндре с сечением 1 см^2 и оптической толщиной $d\tau$ за 1 сек , то интенсивности излучения, выходящего из среды через границу $\tau = 0$ и падающего на границу $\tau = \tau_0$, будут соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} I(0, \eta) &= \int_0^{\tau_0} f(\tau) p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}, \\ I(\tau_0, \eta) &= \int_0^{\tau_0} f(\tau) p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Составим уравнения для определения величин $p_1(\tau, \eta)$ и $p_2(\tau, \eta)$. При этом будем считать, что функция $p(\cdot, \eta)$ известна.

Вероятность выхода кванта из рассматриваемой среды складывается из двух частей: из вероятности выхода кванта из среды без отражения от поверхности и из вероятности выхода кванта из среды после отражений от поверхности. Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} p_1(\tau, \eta) &= p(\tau, \eta) + \\ &+ 2\pi \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') d\eta'' \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta''}} p_1(\tau', \eta) \frac{d\tau'}{\eta''}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $y(\eta'', \eta') \frac{d\omega}{2\pi}$ — вероятность того, что квант, падающий на поверхность под углом $\arccos \eta'$ к нормали, отражается от нее под углом $\arccos \eta''$ к нормали внутри телесного

угла $d\omega$. Аналогично находим:

$$\begin{aligned}
 p_2(\tau_0 - \tau, \eta) &= p(\tau_0 - \tau, \eta) + \\
 &+ 2\pi \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') d\eta'' \times \\
 &\times \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta''}} p_2(\tau_0 - \tau', \eta) \frac{d\tau'}{\eta''}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} &= \sigma_*(\eta, \zeta) \zeta; \\
 \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} &= \rho_*(\eta, \zeta) \zeta. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Величины $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$ представляют собой коэффициенты яркости среды при освещении ее снизу параллельными лучами, падающими под углом $\arccos \zeta$ к нормали.

Используя (17), вместо (15) и (16) получаем:

$$\begin{aligned}
 p_1(\tau, \eta) &= p(\tau, \eta) + \\
 &+ 2\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') \sigma_*(\eta, \eta'') d\eta'', \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2(\tau_0 - \tau, \eta) &= p(\tau_0 - \tau, \eta) + \\
 &+ 2\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') \rho_*(\eta, \eta'') d\eta''. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Для определения функций $p_1(\tau, \eta)$ и $p_2(\tau, \eta)$ следует предварительно найти величины $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$. Уравнения для этих величин могут быть получены из уравнений (18) и (19). Умножая указанные уравнения на

$\pi e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} \frac{d\tau}{\eta}$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , находим:

$$\sigma_*(\eta, \zeta) = \sigma(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) \eta' d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') \sigma_*(\eta, \eta'') d\eta'', \quad (20)$$

$$\rho_*(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) \eta' d\eta' \int_0^1 y(\eta'', \eta') \rho_*(\eta, \eta'') d\eta'', \quad (21)$$

где $\sigma(\eta, \zeta)$ и $\rho(\eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости среды при отсутствии отражающей поверхности, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\eta, \zeta) \zeta &= \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}; \\ \rho(\eta, \zeta) \zeta &= \pi \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Уравнения (20) и (21) без труда решаются, когда функция $y(\eta'', \eta')$ представляется в виде

$$y(\eta'', \eta') = \sum u_i(\eta'') v_i(\eta'). \quad (23)$$

Легко видеть, что определение функций $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$ в этом случае сводится к нахождению величин

$$\int_0^1 \sigma_*(\eta, \zeta) u_i(\zeta) d\zeta, \quad \int_0^1 \rho_*(\eta, \zeta) u_i(\zeta) d\zeta$$

из системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим важный для практики случай, когда поверхность отражает излучение изотропно, т. е. когда функция $y(\eta'', \eta')$ определяется формулой (8). Для простоты примем, что альбеда поверхности A не зависит от угла падения излучения.

В данном случае уравнения (18) и (19) принимают вид

$$p_1(\tau, \eta) = p(\tau, \eta) + 4A\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 \sigma_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta''; \quad (24)$$

$$p_2(\tau_0 - \tau, \eta) = p(\tau_0 - \tau, \eta) + 4A\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 \rho_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'', \quad (25)$$

а вместо уравнений (20) и (21) имеем:

$$\sigma_*(\eta, \zeta) = \sigma(\eta, \zeta) + 4A \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) \eta' d\eta' \int_0^1 \sigma_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'', \quad (26)$$

$$\rho_*(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) + 4A \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) \eta' d\eta' \int_0^1 \rho_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta''. \quad (27)$$

Из уравнений (26) и (27) находим:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \sigma_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'' &= \frac{\int_0^1 \sigma(\eta, \eta'') \eta'' d\eta''}{1-AC}; \\ \int_0^1 \rho_*(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'' &= \frac{\int_0^1 \rho(\eta, \eta'') \eta'' d\eta''}{1-AC}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где введено обозначение:

$$C = 4 \int_0^1 \zeta d\zeta \int_0^1 \rho(\eta, \zeta) \eta d\eta. \quad (29)$$

Подстановка выражений (28) в (24) и (25) дает:

$$p_1(\tau, \eta) = p(\tau, \eta) + \frac{4A}{1-AC} \eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 \sigma(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'', \quad (30)$$

$$p_2(\tau_0 - \tau, \eta) = p(\tau_0 - \tau, \eta) + \frac{4A}{1-AC} \eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta' \int_0^1 \rho(\eta, \eta'') \eta'' d\eta''. \quad (31)$$

Таким образом, мы получили формулы, выражающие величины $p_1(\tau, \eta)$ и $p_2(\tau_0 - \tau, \eta)$ через $p(\tau, \eta)$.

При помощи формул (14), (30) и (31) могут быть решены различные задачи о свечении среды, ограниченной отражающей поверхностью. Примеры решения таких задач даны в следующих параграфах.

§ 3. Свечение планетной атмосферы

Задача о свечении планетной атмосферы была сформулирована в § 6 главы I и подробно рассмотрена в главах III и IV. Однако там мы не учитывали отражения излучения от поверхности планеты. Теперь мы учтем это обстоятельство, причем для простоты будем считать, что поверхность отражает излучение изотропно и ее альbedo равно A .

Пусть солнечные лучи падают на атмосферу под углом $\arccos \zeta$ к нормали и создают освещенность перпендикулярной к ним площадки на верхней границе атмосферы, равную πS . Найдем интенсивности выходящего из атмосферы излучения, предположив сначала, что индикатриса рассеяния сферическая.

Чтобы воспользоваться формулами (14), надо найти величину $f(\tau) d\tau$, т. е. количество энергии, дошедшее до данного элементарного объема от Солнца без рассеяний в атмосфере и поглощенное этим объемом. В рассматриваемом случае солнечное излучение доходит до

каждого объема как непосредственно, так и после отражения от поверхности планеты. Таким образом, мы имеем:

$$f(\tau) = \pi S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + 2\pi A S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta''}} d\eta''. \quad (32)$$

Подставляя (32) во вторую из формул (14) и пользуясь соотношениями (31) и (22), получаем:

$$I(\tau_0, \eta, \zeta) = S\sigma(\eta, \zeta)\zeta + \frac{AS\zeta}{1-AC} 2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'' \left[e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} + 2 \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) \eta' d\eta' \right]. \quad (33)$$

Введем обозначения:

$$e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + 2 \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) \eta' d\eta' = \mu(\zeta); \quad 2 \int_0^1 \rho(\eta, \eta'') \eta'' d\eta'' = \nu(\eta). \quad (34)$$

Тогда формула (33) переписется в виде

$$I(\tau_0, \eta, \zeta) = \left[\sigma(\eta, \zeta) + \frac{A}{1-AC} \nu(\eta) \mu(\zeta) \right] S\zeta. \quad (35)$$

Если мы подставим (32) в первую из формул (14), то найдем интенсивность излучения, диффузно-отраженного планетной атмосферой, без учета излучения, идущего непосредственно от поверхности планеты. Полная интенсивность излучения, выходящего из планетной атмосферы через верхнюю границу, определится формулой

$$I(0, \eta, \zeta) = \int_0^{\tau_0} f(\tau) p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + A e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \left[2 \int_0^1 I(\tau_0, \eta', \zeta) \eta' d\eta' + S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta \right]. \quad (36)$$

Подставляя (32) и (35) в (36), находим:

$$I(0, \eta, \zeta) = \pi S \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + \\ + 2\pi A S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta \int_0^1 d\eta'' \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta''}} p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + \frac{AS}{1-AC} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \mu(\zeta) \zeta, \quad (37)$$

или, пользуясь соотношениями (30) и (22),

$$I(0, \eta, \zeta) = \left[\rho(\eta, \zeta) + \frac{A}{1-AC} \mu(\eta) \mu(\zeta) \right] S \zeta. \quad (38)$$

Формулы (35) и (38) являются искомыми. Они в явном виде выражают интенсивности излучения, выходящего из атмосферы при $A \neq 0$, через коэффициенты яркости атмосферы $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ при $A = 0$.

Так как раньше коэффициенты яркости $\rho(\eta, \zeta)$ и $\sigma(\eta, \zeta)$ были выражены через вспомогательные функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, то целесообразно выразить через эти функции также величины $\mu(\eta)$ и $\nu(\eta)$. При помощи формул (126) и уравнений (128) предыдущей главы получаем:

$$\mu(\zeta) = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 \right) \psi(\zeta) + \frac{\lambda}{2} \beta_0 \varphi(\zeta), \quad (39)$$

$$\nu(\zeta) = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2} \alpha_0 \right) \varphi(\zeta) - \frac{\lambda}{2} \beta_0 \psi(\zeta), \quad (40)$$

где α_0 и β_0 — нулевые моменты функций $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$.

Легко видеть, что величины $\mu(\zeta)$ и $\nu(\zeta)$ имеют простой физический смысл. Величина $\mu(\zeta)$ представляет собой отношение освещенности поверхности планеты к освещенности верхней границы атмосферы, а величина $\nu(\zeta)$ — отношение освещенности верхней границы снизу к освещенности верхней границы сверху (при $A = 0$).

При выводе формул (35) и (38) предполагалось, что индикатриса рассеяния является сферической. Однако это предположение не ограничивает общности полученных формул. Легко показать, что в случае изотропного отражения излучения поверхностью планеты

формулы (35) и (38) имеют место при любой индикатрисе рассеяния с указанным выше физическим смыслом величин $\mu(\zeta)$ и $\nu(\zeta)$.

Формулы (35) и (38) были раньше найдены автором [3] и ван де Хулстом [4] другими способами. Еще ранее автором были получены приближенные формулы такого же типа, как и формулы (35) и (38), при произвольной индикатрисе рассеяния (см. главу X).

§ 4. Внутренние источники излучения

В предыдущем параграфе была решена задача о свечении среды, прилегающей к отражающей поверхности, при освещении среды параллельными лучами сверху. В § 2 были определены коэффициенты яркости среды $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$ при освещении ее параллельными лучами снизу. Теперь мы найдем интенсивности выходящего из среды излучения в том случае, когда источники излучения находятся внутри среды.

Допустим, что источники излучения испускают энергию изотропно и обусловленная ими отдача равна $B_0(\tau)$. Так как рассеяние излучения в среде также предполагается изотропным, то мы можем рассматривать энергию, излучаемую элементарным объемом, как энергию, рассеянную этим объемом, т. е. можем положить $B_0(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} f(\tau)$. Таким образом, вместо формул (14) в данном случае имеем:

$$\left. \begin{aligned} I(0, \eta) &= \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\tau_0} B_0(\tau) p_1(\tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}; \\ I(\tau_0, \eta) &= \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\tau_0} B_0(\tau) p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Соотношения (30) и (31), определяющие величины $p_1(\tau, \eta)$ и $p_2(\tau_0 - \tau, \eta)$, могут быть при помощи формул (34) переписаны так:

$$p_1(\tau, \eta) = p(\tau, \eta) + \frac{2A}{1-AC} \eta [\mu(\eta) - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}] \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta', \quad (42)$$

$$p_2(\tau_0 - \tau, \eta) = p(\tau_0 - \tau, \eta) + \frac{2A}{1-AC} \eta \nu(\eta) \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, \eta') d\eta'. \quad (43)$$

Подставляя (42) и (43) в (41), получаем:

$$I(0, \eta) = I_0(0, \eta) + \frac{2A}{1-AC} [\mu(\eta) - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}] \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') \eta' d\eta', \quad (44)$$

$$I(\tau_0, \eta) = I_0(\tau_0, \eta) + \frac{2A}{1-AC} \nu(\eta) \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') \eta' d\eta', \quad (45)$$

где через $I_0(0, \eta)$ и $I_0(\tau_0, \eta)$ обозначены интенсивности излучения, выходящего из рассматриваемой среды при отсутствии отражающей поверхности.

Формула (44) дает интенсивность излучения, выходящего из среды через верхнюю границу, без учета излучения, идущего непосредственно от поверхности. Чтобы получить полную интенсивность излучения на границе $\tau = 0$, надо в правую часть формулы (44) добавить член

$$Ae^{-\frac{\tau_0}{\eta}} 2 \int_0^1 I(\tau_0, \eta') \eta' d\eta'.$$

Пользуясь формулой (45), находим, что этот член равен

$$\frac{2A}{1-AC} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') \eta' d\eta'.$$

Следовательно, полная интенсивность излучения на границе $\tau = 0$ определяется формулой

$$I(0, \eta) = I_0(0, \eta) + \frac{2A}{1-AC} \mu(\eta) \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') \eta' d\eta'. \quad (46)$$

При помощи формул (45) и (46) интенсивности излучения на границах среды при $A \neq 0$ выражаются через интенсивности излучения на границах среды при $A = 0$.

В § 7 предыдущей главы были определены интенсивности выходящего из среды излучения при отсутствии отражающей поверхности в том случае, когда функция $B_0(\tau)$ представлена в виде ряда, расположенного по степеням τ . Пользуясь формулами (45) и (46), мы можем теперь найти интенсивности излучения, выходящего из среды с теми же источниками излучения при наличии отражающей поверхности.

Рассмотрим для примера случай, когда источники излучения распределены в среде равномерно (т. е. $B_0 = \text{const}$). Взяв для величин $I_0(0, \eta)$ и $I_0(\tau_0, \eta)$ (в рассматриваемом случае они равны друг другу) выражение, данное формулой (149) предыдущей главы, и подставив его в формулы (45) и (46), получаем:

$$I(\tau_0, \eta) = \frac{B_0}{1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 - \beta_0)} \left[\varphi(\eta) - \psi(\eta) + \frac{2A}{1-AC} (\alpha_1 - \beta_1) \nu(\eta) \right], \quad (47)$$

$$I(0, \eta) = \frac{B_0}{1 - \frac{\lambda}{2}(\alpha_0 - \beta_0)} \left[\varphi(\eta) - \psi(\eta) + \frac{2A}{1-AC} (\alpha_1 - \beta_1) \mu(\eta) \right]. \quad (48)$$

При $\lambda = 1$, т. е. при отсутствии в среде истинного поглощения, формулы (47) и (48) несколько упрощаются. Учитывая, что в этом случае имеют место полученные в § 6 предыдущей главы соотношения: $\alpha_0 + \beta_0 = 2$, $\alpha_1 - \beta_1 = \beta_0 \tau_0$, вместо указанных формул находим:

$$I(\tau_0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{\beta_0} + B_0 \frac{A}{1-AC} \tau_0 \{2 - \beta_0 [\varphi(\eta) + \psi(\eta)]\}, \quad (49)$$

$$I(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta) - \psi(\eta)}{\beta_0} + B_0 \frac{A}{1-AC} \tau_0 \beta_0 [\varphi(\eta) + \psi(\eta)]. \quad (50)$$

§ 5. Зеркальное отражение света

Кроме рассмотренного выше случая изотропного отражения света поверхностью, большой интерес для практики представляет случай, когда поверхность отражает излучение зеркально. Примером среды, ограниченной зеркальной поверхностью, может служить атмосфера над спокойным морем (если не учитывать диффузного излучения, выходящего из моря).

При зеркальном отражении света поверхностью световые кванты, падающие на поверхность под углом $\arccos \zeta$ к нормали, отражаются от поверхности под тем же углом к нормали, причем падающий луч, отраженный луч и нормаль к поверхности находятся в одной плоскости. Вообще говоря, не все падающие на поверхность кванты отражаются от нее, а лишь некоторая доля их, которую мы обозначим через $r(\zeta)$. Другая часть падающих на поверхность квантов, равная $1 - r(\zeta)$, проходит через поверхность. Этой частью мы интересоваться не будем. Функция $r(\zeta)$, характеризующая оптические свойства поверхности, должна считаться известной.

Примем, как и выше, что отражающая поверхность примыкает к среде снизу (при $\tau = \tau_0$). Уравнения для определения вероятностей выхода кванта из среды мы можем получить из общих уравнений (18) и (19), положив в них

$$y(\eta'', \eta') = \delta(\eta'' - \eta') r(\eta'), \quad (51)$$

где δ — функция Дирака. В результате находим:

$$p_1(\tau, \eta) = p(\tau, \eta) + 2\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') r(\eta') \sigma_*(\eta, \eta') d\eta', \quad (52)$$

$$p_2(\tau_0 - \tau, \eta) = p(\tau_0 - \tau, \eta) + 2\eta \int_0^1 p(\tau_0 - \tau, \eta') r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') d\eta'. \quad (53)$$

Входящие в уравнения (52) и (53) величины $\sigma_*(\eta, \eta')$ и $\rho_*(\eta, \eta')$ представляют собой коэффициенты яркости

данной среды при освещении ее снизу. Эти величины определяются из уравнений:

$$\sigma_*(\eta, \zeta) = \sigma(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) r(\eta') \sigma_*(\eta, \eta') \eta' d\eta', \quad (54)$$

$$\rho_*(\eta, \zeta) = \rho(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \rho(\eta', \zeta) r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta', \quad (55)$$

получающихся при подстановке (51) в уравнения (20) и (21).

Если функции $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$ найдены, то при помощи формул (52) и (53) могут быть определены величины $p_1(\tau, \eta)$ и $p_2(\tau_0 - \tau, \eta)$, а затем по формулам (14) — интенсивности выходящего из среды излучения при различных источниках излучения.

Пользуясь указанными формулами, мы можем также получить выражения для величин $I(0, \eta)$ и $I(\tau_0, \eta)$ через величины $I_0(0, \eta)$ и $I_0(\tau_0, \eta)$, т. е. интенсивности выходящего из среды излучения при отсутствии отражающей поверхности, и через функции $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$.

Допустим сначала, что среда освещена параллельными лучами сверху. В таком случае

$$f(\tau) = \pi S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \pi S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} r(\zeta) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}}. \quad (56)$$

Подставляя (56) во вторую из формул (14), имеем:

$$I(\tau_0, \eta, \zeta) = \pi S \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta} + \\ + \pi S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} r(\zeta) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\zeta}} p_2(\tau_0 - \tau, \eta) \frac{d\tau}{\eta}. \quad (57)$$

Выражая в первом из этих интегралов $p_2(\tau_0 - \tau, \eta)$ через $\rho(\tau_0 - \tau, \eta)$ при помощи соотношения (53), а также поль-

зуюсь формулами (17) и (22), получаем:

$$I(\tau_0, \eta, \zeta) = S\zeta \left[\sigma(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta' + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} r(\zeta) \rho_*(\eta, \zeta) \right]. \quad (58)$$

Аналогично находится интенсивность излучения, выходящего через верхнюю границу среды:

$$I(0, \eta, \zeta) = S\zeta \left[\rho(\eta, \zeta) + 2 \int_0^1 \sigma(\eta', \zeta) r(\eta') \sigma_*(\eta, \eta') \eta' d\eta' + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} r(\zeta) \sigma_*(\eta, \zeta) \right] + I(\tau_0, \eta, \zeta) r(\eta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}. \quad (59)$$

Последний член добавлен в эту формулу для учета излучения, идущего непосредственно от отражающей поверхности.

Если источники излучения находятся внутри среды и они испускают энергию изотропно, то при помощи формул (41), (52) и (53) получаем:

$$I(\tau_0, \eta) = I_0(\tau_0, \eta) + 2 \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta', \quad (60)$$

$$I(0, \eta) = I_0(0, \eta) + 2 \int_0^1 I_0(\tau_0, \eta') r(\eta') \sigma_*(\eta, \eta') \eta' d\eta' + \\ + I(\tau_0, \eta) r(\eta) e^{-\frac{\tau_0}{\eta}}. \quad (61)$$

В (61) тоже добавлен член, учитывающий излучение, идущее непосредственно от зеркальной поверхности.

Таким образом, различные задачи о свечении среды, ограниченной зеркальной поверхностью, сводятся к нахождению из уравнений (54) и (55) функций $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$.

Входящие в уравнения (54) и (55) функции $\sigma(\eta, \zeta)$ и $\rho(\eta, \zeta)$, т. е. коэффициенты яркости среды при $r=0$, считаются известными. Формулы (126) предыдущей главы

выражают эти функции от двух аргументов через функции $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, зависящие только от одного аргумента. Пользуясь уравнениями (54) и (55), а также указанными формулами предыдущей главы, мы можем функции $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$ также выразить через некоторые вспомогательные функции, зависящие только от одного аргумента. В следующем параграфе это будет сделано для случая $\tau_0 = \infty$.

§ 6. Среда бесконечно большой оптической толщины

Допустим, что среда, ограниченная зеркальной поверхностью, имеет бесконечно большую оптическую толщину. В таком случае световые кванты выходят из среды после рассеяний в ней и отражений от зеркальной поверхности только через эту поверхность. Для нахождения интенсивностей выходящего из среды излучения надо определить не две функции $\sigma_*(\eta, \zeta)$ и $\rho_*(\eta, \zeta)$, как в случае среды конечной оптической толщины, а только одну функцию $\rho_*(\eta, \zeta)$. Для определения функции $\rho_*(\eta, \zeta)$ служит уравнение (55).

Входящая в уравнение (55) величина $\rho(\eta, \zeta)$, т. е. коэффициент яркости среды при отсутствии отражающей поверхности, в случае $\tau_0 = \infty$ дается формулой

$$\rho(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \quad (62)$$

в которой функция $\varphi(\eta)$ определена уравнением (50) предыдущей главы.

Представим искомую величину $\rho_*(\eta, \zeta)$ в виде:

$$\rho_*(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \varphi(\eta)\varphi(\zeta) \left[\frac{A(\eta, \zeta)}{\eta + \zeta} + \frac{B(\eta, \zeta)}{\eta - \zeta} \right], \quad (63)$$

где $A(\eta, \zeta)$ и $B(\eta, \zeta)$ — функции, подлежащие определению.

Подставляя (62) и (63) в (55), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{A(\eta, \zeta)}{\eta + \zeta} + \frac{B(\eta, \zeta)}{\eta - \zeta} &= \\ &= \frac{1}{\eta + \zeta} + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \left[\frac{A(\eta, \eta')}{\eta + \eta'} + \frac{B(\eta, \eta')}{\eta - \eta'} \right] \frac{\eta' d\eta'}{\eta' + \zeta}. \end{aligned} \quad (64)$$

Преобразуя это уравнение при помощи соотношений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(\eta' + \zeta)(\eta + \eta')} &= \left(\frac{1}{\eta' + \zeta} - \frac{1}{\eta + \eta'} \right) \frac{1}{\eta - \zeta}, \\ \frac{1}{(\eta' + \zeta)(\eta - \eta')} &= \left(\frac{1}{\eta' + \zeta} + \frac{1}{\eta - \eta'} \right) \frac{1}{\eta + \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

и приравнивая в нем отдельно члены, содержащие множители $\frac{1}{\eta + \zeta}$ и $\frac{1}{\eta - \zeta}$, приходим к следующим уравнениям для определения $A(\eta, \zeta)$ и $B(\eta, \zeta)$:

$$A(\eta, \zeta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') B(\eta, \eta') \left(\frac{1}{\eta' + \zeta} + \frac{1}{\eta - \eta'} \right) \eta' d\eta', \quad (66)$$

$$B(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') A(\eta, \eta') \left(\frac{1}{\eta' + \zeta} - \frac{1}{\eta + \eta'} \right) \eta' d\eta'. \quad (67)$$

Легко убедиться, что решение уравнений (66) и (67) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} A(\eta, \zeta) &= \alpha(\eta) \alpha(\zeta) - \beta(\eta) \beta(\zeta), \\ B(\eta, \zeta) &= \alpha(\eta) \beta(\zeta) - \alpha(\zeta) \beta(\eta), \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ определяются из уравнений:

$$\alpha(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \beta(\eta') \frac{\eta' d\eta'}{\eta + \eta'}, \quad (69)$$

$$\beta(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \alpha(\eta') \frac{\eta' d\eta'}{\eta + \eta'}. \quad (70)$$

Подставляя выражения (68) в уравнения (66) и (67), мы получаем, что функции $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ должны удовле-

творять не только уравнениям (69) и (70), но и следующим уравнениям:

$$\alpha(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \frac{\alpha(\eta) \beta(\eta') - \alpha(\eta') \beta(\eta)}{\eta - \eta'} \eta' d\eta', \quad (71)$$

$$\beta(\eta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \frac{\alpha(\eta) \alpha(\eta') - \beta(\eta) \beta(\eta')}{\eta' + \eta} \eta' d\eta'. \quad (72)$$

Однако если функции $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ удовлетворяют уравнениям (69) и (70), то они должны удовлетворять и уравнениям (71) и (72). По отношению к уравнению (72) это очевидно. Чтобы убедиться в справедливости сказанного по отношению к уравнению (71), поступим следующим образом.

Вводя для упрощения записи обозначение

$$\frac{\lambda}{2} \varphi^2(\eta) r(\eta) \eta = K(\eta), \quad (73)$$

перепишем уравнение (71) в виде

$$\alpha(\eta) = 1 + \alpha(\eta) \int_0^1 K(\eta') \frac{\beta(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' - \\ - \beta(\eta) \int_0^1 K(\eta') \frac{\alpha(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta'. \quad (74)$$

Учитывая (69) и (70), вместо (74) находим:

$$\alpha(\eta) = 1 + \left[1 + \int_0^1 K(\eta'') \beta(\eta'') \frac{d\eta''}{\eta + \eta''} \right] \int_0^1 K(\eta') \frac{\beta(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' - \\ - \int_0^1 K(\eta'') \alpha(\eta'') \frac{d\eta''}{\eta + \eta''} \int_0^1 K(\eta') \frac{\alpha(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta',$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \alpha(\eta) = & 1 + \int_0^1 K(\eta') \beta(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 K(\eta') K(\eta'') \beta(\eta') \beta(\eta'') \left(\frac{1}{\eta - \eta'} - \frac{1}{\eta + \eta''} \right) \frac{d\eta' d\eta''}{\eta' + \eta''} - \\ & - \int_0^1 \int_0^1 K(\eta') K(\eta'') \alpha(\eta') \alpha(\eta'') \left(\frac{1}{\eta - \eta'} - \frac{1}{\eta + \eta''} \right) \frac{d\eta' d\eta''}{\eta' + \eta''}. \end{aligned}$$

Снова пользуясь уравнениями (69) и (70), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \alpha(\eta) = & 1 + \int_0^1 K(\eta') \beta(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \\ & + \int_0^1 K(\eta') \beta(\eta') [\alpha(\eta') - 1] \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} - \\ & - \int_0^1 K(\eta'') \beta(\eta'') [\alpha(\eta'') - 1] \frac{d\eta''}{\eta + \eta''} - \\ & - \int_0^1 K(\eta') \alpha(\eta') \beta(\eta') \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \int_0^1 K(\eta'') \alpha(\eta'') \beta(\eta'') \frac{d\eta''}{\eta + \eta''}, \end{aligned}$$

являющееся тождеством.

Таким образом, мы нашли, что величина $\rho_*(\eta, \zeta)$ выражается через вспомогательные функции $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ при помощи формулы

$$\begin{aligned} \rho_*(\eta, \zeta) = & \frac{\lambda}{4} \varphi(\eta) \varphi(\zeta) \left[\frac{\alpha(\eta) \alpha(\zeta) - \beta(\eta) \beta(\zeta)}{\eta + \zeta} + \right. \\ & \left. + \frac{\alpha(\eta) \beta(\zeta) - \alpha(\zeta) \beta(\eta)}{\eta - \zeta} \right], \quad (75) \end{aligned}$$

а функции $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$, в свою очередь, определяются уравнениями (69) и (70). Для каждого конкретного закона отражения света поверхностью, характеризующегося функцией $r(\zeta)$, указанные уравнения могут быть легко решены численно.

§ 7. Некоторые применения

После определения функции $\rho_*(\eta, \zeta)$ мы можем решить различные задачи о свечении среды бесконечно большой оптической толщины, ограниченной зеркальной поверхностью. Дадим примеры решения таких задач, имеющие практическое значение.

1. Облачное небо над морем. Будем считать, что облака равномерно покрывают небо и их оптическая толщина очень велика. Распределение яркости по облачному небу было найдено в § 8 главы III. В случае изотропного рассеяния света в облаках яркость неба на зенитном расстоянии $\arccos \eta$ дается формулой

$$I_0(\eta) = C \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\eta}, \quad (76)$$

где C и k — постоянные.

Однако при выводе формулы (76) не было учтено наличие поверхности, к которой примыкает атмосфера. Теперь мы допустим, что облачный слой находится над морем и примем во внимание зеркальное отражение света морем (рис. 16).

В данном случае яркость неба определяется формулой

$$I(\eta) = C \frac{\varphi(\eta)}{1 - k\eta} + 2C \int_0^1 \frac{\varphi(\eta')}{1 - k\eta'} r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta', \quad (77)$$

где $r(\eta)$ — коэффициент отражения излучения водой, даваемый формулой Френеля (см. § 8 этой главы).

Подставляя в формулу (77) полученное ранее выражение (75) для функции $\rho_*(\eta, \zeta)$ и пользуясь равенствами

$$\frac{1}{(1 - k\eta')(\eta + \eta')} = \left(\frac{1}{\eta + \eta'} + \frac{k}{1 - k\eta'} \right) \frac{1}{1 + k\eta},$$

$$\frac{1}{(1 - k\eta')(\eta - \eta')} = \left(\frac{1}{\eta - \eta'} - \frac{k}{1 - k\eta'} \right) \frac{1}{1 - k\eta},$$

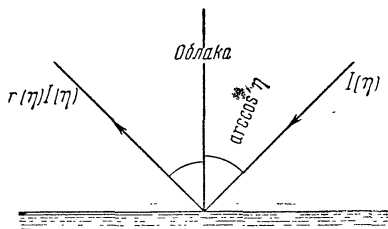


Рис. 16.

находим:

$$\begin{aligned}
 I(\eta) = & C \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} + \\
 & + C \frac{\varphi(\eta)}{1+k\eta} \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') [\alpha(\eta)\alpha(\eta') - \beta(\eta)\beta(\eta')] \times \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\eta+\eta'} + \frac{k}{1-k\eta'} \right) \eta' d\eta' + \\
 & + C \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') [\alpha(\eta)\beta(\eta') - \alpha(\eta')\beta(\eta)] \times \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\eta-\eta'} - \frac{k}{1-k\eta'} \right) \eta' d\eta'. \quad (78)
 \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (71) и (72), вместо (78) получаем:

$$\begin{aligned}
 I(\eta) = & C \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} + C \frac{\varphi(\eta)}{1+k\eta} [\beta(\eta) + \alpha(\eta)M - \beta(\eta)N] + \\
 & + C \frac{\varphi(\eta)}{1-k\eta} [\alpha(\eta) - 1 - \alpha(\eta)N + \beta(\eta)M], \quad (79)
 \end{aligned}$$

где через M и N обозначены постоянные величины:

$$\left. \begin{aligned}
 M &= \frac{\lambda}{2} k \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \frac{\alpha(\eta')}{1-k\eta'} \eta' d\eta', \\
 N &= \frac{\lambda}{2} k \int_0^1 \varphi^2(\eta') r(\eta') \frac{\beta(\eta')}{1-k\eta'} \eta' d\eta'.
 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Формула (79) может быть переписана также в виде

$$I(\eta) = C\varphi(\eta) \left[\frac{\alpha(\eta)(1-N) + \beta(\eta)M}{1-k\eta} + \frac{\alpha(\eta)M + \beta(\eta)(1-N)}{1+k\eta} \right]. \quad (81)$$

В случае чистого рассеяния излучения в облачном слое ($\lambda=1$, $k=0$) формула (81) сильно упрощается. Яркость неба в этом случае равна

$$I(\eta) = C\varphi(\eta) [\alpha(\eta) + \beta(\eta)]. \quad (82)$$

Для вычисления интенсивности излучения $I(\eta)$ по приведенным формулам необходимо предварительное определение функций $\alpha(\eta)$ и $\beta(\eta)$ для того случая, когда величина $r(\eta)$ является коэффициентом отражения воды. В таблице 24 даны значения этих функций, полученные в результате решения уравнений (69) и (70) при $\lambda = 1$. В той же таблице приведены значения величины $r(\eta)$. При вычислениях принято, что показатель преломления воды равен $n = 1,33$.

Т а б л и ц а 24

Свечение облачного неба над морем

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$r(\eta)$	1,000	0,543	0,297	0,168	0,097	0,059	0,039	0,028	0,023	0,021	0,020
$\alpha(\eta)$	1,017	1,009	1,007	1,006	1,005	1,004	1,004	1,004	1,003	1,003	1,003
$\beta(\eta)$	0,187	0,118	0,094	0,079	0,068	0,061	0,055	0,050	0,046	0,042	0,039
$I_0(\eta)$	1,00	1,25	1,45	1,64	1,83	2,01	2,19	2,37	2,55	2,73	2,91
$I(\eta)$	1,20	1,41	1,60	1,78	1,96	2,14	2,32	2,50	2,68	2,85	3,03

В таблице 24 даны также для сравнения две величины: яркость облачного неба при отсутствии отражающей поверхности $I_0(\eta)$ и яркость облачного неба при учете зеркального отражения света морем $I(\eta)$.

Разумеется, полученные выше формулы не дают полного учета влияния моря на яркость неба. В действительности необходимо принимать во внимание не только излучение, отраженное морем зеркально, но и излучение, выходящее из моря после рассеяний в нем.

2. Свечение моря. Световые кванты, попавшие в море, испытывают рассеяние в нем и зеркальное отражение от поверхности (так называемое «внутреннее отражение»). Оптическую толщину моря можно считать бесконечно большой. Поэтому для решения задачи о свечении моря могут быть использованы полученные в предыдущем параграфе результаты.

Допустим, что море освещено параллельными солнечными лучами. Эти лучи частично отражаются от поверх-

ности, а частично преломляются. Мы обозначим через ζ косинус угла падения лучей, вошедших в море (после преломления), а через πS созданную этими лучами освещенность перпендикулярной к ним площадки непосредственно под поверхностью моря (рис. 17).

В данном случае излучение от внешнего источника входит в среду со стороны отражающей поверхности.

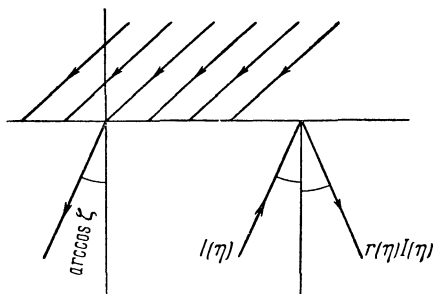


Рис. 17.

Поэтому на основании определения коэффициента яркости $\rho_*(\eta, \zeta)$ получаем, что интенсивность диффузного излучения, подходящего к поверхности моря, будет равна

$$I(0, \eta, \zeta) = S\rho_*(\eta, \zeta)\zeta. \quad (83)$$

Чтобы найти интенсивность излучения, выходящего из моря, надо умножить выражение (83) на некоторый коэффициент, учитывающий оптические явления на границе двух сред (см. § 8).

Формула для величины $I(0, \eta, \zeta)$ может быть также записана в виде

$$I(0, \eta, \zeta) = \frac{\lambda}{4} \varphi(\eta) \varphi(\zeta) \frac{\eta \delta(\eta) \gamma(\zeta) - \zeta \gamma(\eta) \delta(\zeta)}{\eta^2 - \zeta^2} S\zeta, \quad (84)$$

где

$$\gamma(\eta) = \alpha(\eta) + \beta(\eta), \quad \delta(\eta) = \alpha(\eta) - \beta(\eta). \quad (85)$$

В таблице 25 на стр. 252 приведены значения функций $\gamma(\eta)$ и $\delta(\eta)$, полученные путем решения уравнений (69) и (70) при $\lambda=1$. В той же таблице даны значения

величины $r(\eta)$, т. е. коэффициента внутреннего отражения света в воде.

Таблица 25

Вспомогательные функции $\gamma(\eta)$ и $\delta(\eta)$ при $\lambda=1$

η	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$r(\eta)$	1	1	1	1	1	1	1	0,156	0,038	0,022	0,020
$\gamma(\eta)$	3,30	2,73	2,44	2,24	2,09	1,97	1,88	1,80	1,73	1,67	1,63
$\delta(\eta)$	0,30	0,45	0,54	0,60	0,64	0,68	0,71	0,73	0,75	0,77	0,79

Задача о свечении моря впервые была решена в неопубликованной работе В. А. Амбарцумяна. Для этого применялся метод, изложенный в § 4 главы III. Однако полученные В. А. Амбарцумяном выражение для $I(0, \eta, \zeta)$ и уравнения для вспомогательных функций отличаются от найденных нами.

Чтобы определить полные интенсивности излучения, выходящего из моря, надо учесть, что море освещено не только прямыми солнечными лучами, но и светом, рассеянным атмосферой. Кроме того, при строгом рассмотрении задачи о свечении моря необходимо решать ее совместно с задачей о свечении атмосферы (так как световые кванты могут по многу раз переходить из моря в атмосферу и обратно).

3. Среда с равномерным распределением источников излучения. В качестве последнего примера применения полученных в предыдущем параграфе формул рассмотрим среду бесконечно большой оптической толщины, в которой источники излучения распределены равномерно ($B_0 = \text{const}$). Будем считать, что испускание энергии источниками производится с одинаковой вероятностью во все стороны. В таком случае, как было показано в § 3 главы VI [см. формулу (79)], при отсутствии отражающей поверхности интенсивность излучения, выходящего из среды, равна

$$I_0(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (86)$$

Если же среда ограничена зеркальной поверхностью с коэффициентом внутреннего отражения $r(\eta)$, то интенсивность излучения, подходящего к поверхности, будет определяться формулой:

$$I(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}} + 2 \frac{B_0}{\sqrt{1-\lambda}} \int_0^1 \varphi(\eta') r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta'. \quad (87)$$

Но из уравнений (71) и (72) следует:

$$\varphi(\eta) \gamma(\eta) = \varphi(\eta) + 2 \int_0^1 \varphi(\eta') r(\eta') \rho_*(\eta, \eta') \eta' d\eta'. \quad (88)$$

Поэтому вместо (87) находим:

$$I(0, \eta) = B_0 \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{1-\lambda}} \gamma(\eta). \quad (89)$$

Формула (89) может быть использована при определении свечения жидкости, производящей рассеяние и поглощение света, с находящимися в ней источниками излучения.

§ 8. Оптические явления на границе двух сред

При изучении свечения среды, ограниченной зеркальной поверхностью, мы встречаемся с двумя задачами. Первая из них состоит в учете отражения излучения поверхностью при рассмотрении диффузии излучения в среде. Этой задачей мы подробно занимались выше. В результате были найдены интенсивности излучения, рассеянного средой, при подходе его к поверхности. Вторая, гораздо более простая задача заключается в вычислении интенсивности излучения, выходящего из среды, после того как интенсивность излучения, подходящего к поверхности, уже найдена. Эту вторую задачу мы рассмотрим в этом параграфе.

Пусть световые кванты падают на границу двух сред под углом ϑ_1 к нормали. Для этих квантов вероятность отразиться от границы под тем же углом ϑ_1 к нормали равна $r(\vartheta_1)$, а вероятность пройти через границу равна $1 - r(\vartheta_1)$. В последнем случае кванты меняют свое направление, т. е. луч света преломляется. Угол, под которым

кванты вступают во вторую среду (угол преломления), мы обозначим через ϑ_2 . Он определяется из соотношения

$$n \sin \vartheta_2 = \sin \vartheta_1, \quad (90)$$

где n — показатель преломления второй среды относительно первой.

Если падающий свет — естественный (неполяризованный), то коэффициент отражения $r(\vartheta_1)$ дается следующей формулой Френеля:

$$r(\vartheta_1) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \left[1 + \frac{\cos^2(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{\cos^2(\vartheta_2 - \vartheta_1)} \right]. \quad (91)$$

Значения функции $r(\vartheta_1)$, вычисленные по формуле (91), приведены в таблице 24 (см. стр. 250) для случая падения лучей из воздуха в воду и в таблице 25 (стр. 252) в противоположном случае.

Если излучение падает из воздуха в воду, то, как следует из формулы (90), при изменении угла падения от 0 до 90° угол преломления меняется от 0 до ϑ_0 , определенным соотношением $n \sin \vartheta_0 = 1$, где n — показатель преломления воды относительно воздуха. Так как в данном случае $n = 1,33$, то $\vartheta_0 = 49^\circ$. Из воды в воздух излучение может выйти только при углах падения, не превышающих ϑ_0 . При

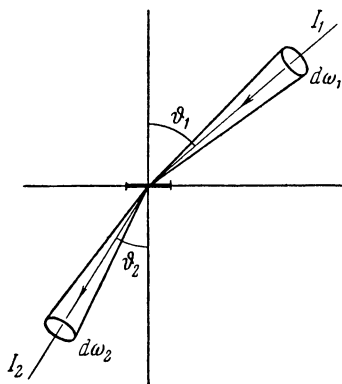


Рис. 18.

этом угол преломления может принимать все значения от 0 до 90° . Если угол падения больше ϑ_0 , то $r(\vartheta_1) = 1$, т. е. излучение испытывает полное внутреннее отражение.

Таким образом, при переходе излучения из одной среды в другую происходит перераспределение излучения по телесным углам. Найдем происходящее вследствие этого изменение интенсивности излучения.

Пусть излучение интенсивности I_1 падает на границу двух сред под углом ϑ_1 к нормали внутри телесного угла

$d\omega_1$ (рис. 18). Количество энергии, падающее на единичную площадку, равно $I_1 \cos \vartheta_1 d\omega_1$, а количество энергии, проходящее через эту площадку, равно

$$[1 - r(\vartheta_1)] I_1 \cos \vartheta_1 d\omega_1.$$

С другой стороны, количество энергии, проходящее через площадку, равно $I_2 \cos \vartheta_2 d\omega_2$, где I_2 — интенсивность излучения, входящего во вторую среду, ϑ_2 — угол, образованный направлением этого излучения с нормалью, $d\omega_2$ — телесный угол, внутри которого это излучение распространяется. Следовательно,

$$I_2 \cos \vartheta_2 d\omega_2 = [1 - r(\vartheta_1)] I_1 \cos \vartheta_1 d\omega_1. \quad (92)$$

Учитывая, что

$$d\omega_1 = \sin \vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1, \quad d\omega_2 = \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 d\varphi_2, \quad d\varphi_1 = d\varphi_2,$$

вместо (92) находим:

$$I_2 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 = [1 - r(\vartheta_1)] I_1 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \quad (93)$$

Далее, из соотношения (90) следует:

$$n^2 \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_2 d\vartheta_2 = \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \quad (94)$$

Поэтому окончательно получаем:

$$I_2 = [1 - r(\vartheta_1)] n^2 I_1. \quad (95)$$

Формула (95) является искомой. Она означает, что интенсивность излучения, прошедшего через границу двух сред, равна интенсивности излучения, подошедшего к этой границе, умноженной на величину $[1 - r(\vartheta_1)] n^2$.

Если излучение входит из воздуха в воду, то при очень больших углах падения [при которых множитель $1 - r(\vartheta_1)$ близок к единице] интенсивность излучения возрастает приблизительно в 1,7 раза. Если излучение идет в обратном направлении, то интенсивность излучения убывает приблизительно в 1,7 раза. Объясняется это тем, что при переходе излучения через границу телесный угол, внутри которого распространяется излучение, в первом случае уменьшается, а во втором — увеличивается.

ГЛАВА VIII

ДИФФУЗИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО ЧАСТОТАМ

В предыдущих главах мы считали, что рассеяние света происходит без изменения частоты световых квантов. В таком случае интенсивность излучения какой-либо определенной частоты не зависит от интенсивностей излучения других частот. Однако в некоторых случаях при элементарном акте рассеяния происходит перераспределение излучения по частотам. Вследствие этого количество энергии, излучаемое элементарным объемом в какой-либо частоте, зависит от количества энергии, поглощенного этим объемом в других частотах. В таких случаях определение интенсивностей излучения в разных частотах приходится производить совместно.

Важнейшим примером рассеяния света с перераспределением по частотам является диффузия излучения в спектральной линии. Вычисленные ранее (в частности, в § 4 гл. VI) контуры линий поглощения в звездных спектрах при предположении о неизменности частоты диффундирующих квантов могут считаться верными лишь в первом приближении.

В настоящей главе решается ряд задач о диффузии излучения с перераспределением по частотам, причем основное внимание уделяется диффузии излучения в спектральной линии. В § 1 рассматривается рассеяние излучения в спектральной линии, происходящее в элементарном объеме. Точнее говоря, здесь определяется вероятность того, что элементарный объем поглощает излучение в виде квантов частоты ν_1 , а испускает его в виде квантов частоты ν_2 . Далее рассматривается диффузия излучения в одно-

мерной среде конечной оптической толщины. При этом производится сравнение диффузии излучения с перераспределением по частотам с диффузией излучения без перераспределения по частотам. Полученные здесь результаты могут быть применены к диффузии L_α -квантов в газовых туманностях и межзвездной среде, а также к диффузии резонансного излучения в различных физических экспериментах. В последних параграфах решена задача о свечении среды бесконечно большой оптической толщины, состоящей из плоскопараллельных слоев. В качестве применения полученных результатов определены контуры линий поглощения в звездных спектрах при так называемом «полном перераспределении излучения по частотам» (при котором вероятность излучения кванта данной частоты элементарным объемом не зависит от того, какой частоты квант был им поглощен).

§ 1. Элементарный акт рассеяния

При предположении о неизменности частоты диффундирующего кванта задача о диффузии излучения в среде сводится, как мы уже знаем, к следующим уравнениям:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\sigma_\nu I_\nu + \epsilon_\nu, \quad (1)$$

$$\epsilon_\nu = \sigma_\nu \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (2)$$

где I_ν — интенсивность излучения, ϵ_ν — коэффициент излучения, σ_ν — коэффициент поглощения; интегрирование в (2) производится по всем телесным углам. Считается, что в среде происходит чистое рассеяние при сферической индикатрисе рассеяния.

Если при элементарном акте рассеяния происходит перераспределение излучения по частотам, то вместо уравнения (2) мы должны написать:

$$\epsilon_\nu = \int W(\nu', \nu) \sigma_{\nu'} d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi}, \quad (3)$$

где $W(\nu', \nu) d\nu$ — вероятность того, что после поглощения

квантов с частотой ν' элементарный объем излучает кванты с частотами в интервале от ν до $\nu + d\nu$.

Функция

$$Q(\nu', \nu) = W(\nu', \nu) \sigma_{\nu'} \quad (4)$$

представляет собой объемный коэффициент поглощения квантов частоты ν' с последующим излучением квантов частоты ν . Очевидно, что

$$\int_0^{\infty} Q(\nu', \nu) d\nu = \sigma_{\nu'}. \quad (5)$$

Кроме того, функция $Q(\nu', \nu)$ должна удовлетворять условию

$$Q(\nu', \nu) = Q(\nu, \nu'), \quad (6)$$

выражающему принцип обратимости оптических явлений.

Рассмотрим один частный случай перераспределения излучения по частотам. Допустим, что вероятность излучения элементарным объемом кванта определенной частоты ν не зависит от частоты поглощенного кванта ν' , т. е.

$$Q(\nu', \nu) = W(\nu) \sigma_{\nu'}.$$

В таком случае при помощи формулы (6) получаем:

$$Q(\nu', \nu) = C \sigma_{\nu} \sigma_{\nu'}, \quad (7)$$

где C — постоянная. Подставляя (7) в (5), находим:

$$C \int_0^{\infty} \sigma_{\nu} d\nu = 1. \quad (8)$$

Вместо формулы (3) в данном случае имеем:

$$\epsilon_{\nu} = \sigma_{\nu} \frac{\int \sigma_{\nu'} d\nu' \int I_{\nu'} \frac{d\omega}{4\pi}}{\int \sigma_{\nu'} d\nu'}. \quad (9)$$

Мы будем говорить, что коэффициент излучения ϵ_{ν} , определенный формулой (9), соответствует случаю полного перераспределения излучения по частотам.

Будем теперь считать, что мы имеем дело с диффузией излучения в спектральной линии. В этом случае процессы рассеяния излучения, происходящие в элементарном объеме, определяются следующими основными причинами: 1) затуханием излучения; 2) эффектом Доплера, происходящим от теплового движения атомов; 3) эффектами давления.

При учете только первой из указанных причин коэффициент поглощения в спектральной линии, рассчитанный на один атом, равен

$$\frac{e^2}{mc} f \frac{\gamma}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2},$$

где ν_0 — центральная частота линии, γ — постоянная затухания, f — сила осциллятора, e — заряд электрона, m — его масса, c — скорость света.

Если в единице объема находится N атомов и их скорости распределены по закону Максвелла, то объемный коэффициент поглощения определяется формулой

$$\sigma_\nu = \sigma_0 \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-z^2} dz}{(x-z)^2 + a^2}, \quad (10)$$

где

$$x = \frac{c}{u} \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} \quad (11)$$

— расстояние от центра линии, выраженное в доплеровских ширинах;

$$a = \frac{\gamma c}{u \nu_0} \quad (12)$$

— отношение естественной ширины линии к доплеровской ширине;

$$\sigma_0 = \sqrt{\pi} \frac{e^2 f}{m u \nu_0} N \quad (13)$$

— коэффициент поглощения в центре линии при $a = 0$;
 u — средняя тепловая скорость атома.

При одновременном учете эффектов давления коэффициент поглощения σ_ν выражается той же формулой (10), однако под величиной γ следует теперь понимать эффективную постоянную затухания (т. е. определенную как

затуханием вследствие излучения, так и затуханием вследствие столкновений).

При определении функции $Q(\nu', \nu)$ следует различать два случая. Если концентрация атомов в среде велика, т. е. если столкновения играют большую роль, то можно предполагать (точные вычисления пока не сделаны), что при элементарном акте рассеяния происходит полное перераспределение излучения по частотам. В таком случае функция $Q(\nu', \nu)$ определяется формулой (7). Именно это выражение для функции $Q(\nu', \nu)$ мы используем в дальнейшем при нахождении контуров линий поглощения в звездных спектрах.

Если же концентрация атомов в среде мала (как, например, в туманностях или в межзвездной среде), то при определении функции $Q(\nu', \nu)$ надо принять во внимание лишь затухание излучения и тепловое движение атомов. В этом случае функция $Q(\nu', \nu)$ может быть найдена весьма просто. Мы сейчас найдем ее для резонансной линии.

Пусть на элементарный объем падает излучение с частотой ν_1 . Рассмотрим атомы, движущиеся со скоростями от v до $v - dv$ под углами от ϑ_1 до $\vartheta_1 + d\vartheta_1$ к направлению падающего излучения. Число таких атомов в единице объема дается формулой Максвелла:

$$dN = \frac{2N}{\sqrt{\pi} u^3} e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} v^2 dv \sin \vartheta_1 d\vartheta_1, \quad (14)$$

а средняя частота поглощаемого ими излучения равна

$$\nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1.$$

Поэтому объемный коэффициент поглощения квантов частоты ν_1 , обусловленный рассматриваемыми атомами, будет равен

$$\frac{e^2 f}{mc} \frac{\gamma}{\left(\nu_1 - \nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1\right)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{2N}{\sqrt{\pi} u^3} e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} v^2 dv \sin \vartheta_1 d\vartheta_1. \quad (15)$$

Если проинтегрировать полученное выражение по всем скоростям и по всем направлениям движений атомов, то после небольших преобразований мы получим приведенную ранее формулу (10). Однако нас интересуют не все процессы поглощения квантов частоты ν_1 , а только те из них, за которыми следует излучение квантов частоты ν_2 .

Мы обозначим угол между направлением излучения квантов и направлением движения атомов через ϑ_2 . Учитывая, что для неподвижных атомов частоты ν_1 и ν_2 совпадают (так как мы рассматриваем резонансное излучение), получаем следующую формулу, связывающую между собой (при заданных ν_1 и ϑ_1) величины ν_2 и ϑ_2 :

$$\nu_2 - \nu_1 = \nu_0 \frac{v}{c} (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1). \quad (16)$$

Доля квантов, излучаемых рассматриваемыми атомами в интервале частот от ν_2 до $\nu_2 + d\nu_2$, будет равна

$$\frac{2\pi \sin \vartheta_2 d\vartheta_2}{4\pi} = \frac{1}{2} \frac{c}{v} \frac{d\nu_2}{\nu_0}. \quad (17)$$

Поэтому, перемножая выражения (15) и (17) и интегрируя по v и ϑ_1 , для функции $Q(\nu_1, \nu_2)$ находим:

$$Q(\nu_1, \nu_2) = \frac{e^2 f \gamma N}{V \pi m \nu_0 u^3} \iint \frac{e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} v dv \sin \vartheta_1 d\vartheta_1}{\left(\nu_1 - \nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c} \cos \vartheta_1\right)^2 + \gamma^2}. \quad (18)$$

Интегрирование в формуле (18) надо производить, однако, не по всем значениям v и ϑ_1 , а только по тем, которые находятся в согласии с соотношением (16). Из указанного соотношения получаем, что величины v и ϑ_1 меняются в следующих пределах:

$$\frac{c}{2} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{\nu_0} \leq v < +\infty; \quad (19)$$

$$-1 \leq \cos \vartheta_1 \leq 1 - \frac{c}{v} \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} \quad (\text{при } \nu_2 > \nu_1), \quad (20)$$

$$-1 - \frac{c}{v} \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_0} \leq \cos \vartheta_1 \leq 1 \quad (\text{при } \nu_2 < \nu_1), \quad (21)$$

Два последних неравенства можно объединить в одно:

$$-1 + \frac{c}{v} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2\nu_0} \leq \cos \vartheta_1 + \frac{c}{v} \frac{\nu_2 - \nu_1}{2\nu_0} \leq 1 - \frac{c}{v} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2\nu_0}. \quad (22)$$

Таким образом, вместо формулы (12) имеем:

$$Q(\nu_1, \nu_2) = \frac{e^2 f \gamma N}{\sqrt{\pi} m \nu_0 u^3} \int_{\frac{c}{2} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{\nu_0}}^{\infty} e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} v dv \times \\ \times \int_{-1 + \frac{c}{v} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2\nu_0}}^{1 - \frac{c}{v} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2\nu_0}} \frac{dt}{\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c} t\right)^2 + \gamma^2}, \quad (23)$$

где введена новая переменная интегрирования

$$t = \cos \vartheta_1 + \frac{c}{v} \frac{\nu_2 - \nu_1}{2\nu_0}. \quad (24)$$

Интегрируя по t , получаем:

$$Q(\nu_1, \nu_2) = \frac{e^2 f c N}{\sqrt{\pi} m \nu_0^2 u^3} \times \\ \times \int_{\frac{c}{2} \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{\nu_0}}^{\infty} e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} dv \left[\operatorname{arctg} \frac{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \nu_0 + \nu_0 \frac{v}{c} - \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2}}{\gamma} - \right. \\ \left. - \operatorname{arctg} \frac{\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} - \nu_0 - \nu_0 \frac{v}{c} + \frac{|\nu_2 - \nu_1|}{2}}{\gamma} \right]. \quad (25)$$

Введем здесь обозначения:

$$x_1 = \frac{c}{u} \frac{\nu_1 - \nu_0}{\nu_0}, \quad x_2 = \frac{c}{u} \frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_0} \quad (26)$$

и заменим функцию $Q(\nu_1, \nu_2)$ новой функцией:

$$q(x_1, x_2) = Q(\nu_1, \nu_2) \frac{u \nu_0}{c}. \quad (27)$$

Величина $q(x_1, x_2) dx_2$ представляет собой коэффициент поглощения квантов безразмерной частоты x_1 с после-

дующим излучением квантов в интервале безразмерных частот от x_2 до $x_2 + dx_2$.

Сделав также замену $v = uz$ и воспользовавшись соотношениями (12) и (13), мы можем переписать формулу (25) в виде

$$q(x_1, x_2) = \frac{\sigma_0}{\pi} \int_{\frac{|x_2 - x_1|}{2}}^{\infty} e^{-z^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{z + \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_2 - x_1|}{2}}{a} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{z - \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_2 - x_1|}{2}}{a} \right] dz. \quad (28)$$

Формула (28) значительно упростится, если ввести новые обозначения:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = s, \quad \frac{|x_2 - x_1|}{2} = r; \quad (29)$$

переходя также к новой переменной интегрирования $y = z - r$, вместо формулы (28) находим:

$$q(x_1, x_2) = \frac{\sigma_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(y+r)^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{y+s}{a} + \operatorname{arctg} \frac{y-s}{a} \right] dy. \quad (30)$$

Это есть окончательное выражение для искомой функции $q(x_1, x_2)$.

Отметим следующие свойства функции $q(x_1, x_2)$.

1. Она симметрична относительно x_1 и x_2 :

$$q(x_1, x_2) = q(x_2, x_1). \quad (31)$$

2. Она не меняется при перемене знака обоих аргументов:

$$q(x_1, x_2) = q(-x_1, -x_2). \quad (32)$$

3. Она удовлетворяет интегральному соотношению:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1, x_2) dx_2 = \sigma_{v_1}. \quad (33)$$

путем интегрирования по углу можно получить приведенную выше формулу (30) для функции $q(x_1, x_2)$. Однако мы предпочли получить эту формулу более простым путем, исходя непосредственно из физических соображений.

§ 2. Диффузия излучения в одномерной среде

После выяснения законов перераспределения излучения по частотам при элементарном акте рассеяния приступим к рассмотрению диффузии излучения в среде при заданном законе перераспределения по частотам [2].

Сначала мы допустим, что диффузия излучения происходит в одномерной среде. Как известно, от трехмерной среды, состоящей из плоскопараллельных слоев, можно приближенно перейти к одномерной среде. Такой переход тем более оправдан, что нас сейчас интересует не столько распределение излучения по углам, сколько распределение его по частотам.

Пусть излучение в спектральной линии диффундирует в прямолинейном отрезке длины l_0 . Перейдем от длины l_0 к оптической длине отрезка. Так как для разных частот оптическая длина отрезка будет различной, то для определенности мы введем ее для центра линии. Обозначая указанную оптическую длину через τ_0 , имеем:

$$\tau_0 = \int_0^{l_0} \sigma_{\nu_0}(l) dl, \quad (34)$$

где l — расстояние точки внутри среды от одной из ее границ. Аналогично может быть введено оптическое расстояние какой-либо точки от выбранной границы среды

$$\tau = \int_0^l \sigma_{\nu_0}(l) dl. \quad (35)$$

Для упрощения записи мы будем также пользоваться вместо частоты ν безразмерной частотой x , определенной выше равенством (11) и представляющей собой отношение расстояния от центра линии к доплеровской ширине.

Таким образом, интенсивности диффундирующего в среде излучения будут функциями от τ и x . Мы их обозначим через $I_1(\tau, x)$ и $I_2(\tau, x)$ соответственно для излучения, идущего в сторону возрастающих значений τ и в обратную сторону.

В принятых обозначениях уравнения переноса излучения запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1(\tau, x)}{d\tau} &= -\alpha(x) I_1(\tau, x) + \varepsilon(\tau, x), \\ -\frac{dI_2(\tau, x)}{d\tau} &= -\alpha(x) I_2(\tau, x) + \varepsilon(\tau, x). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь $\varepsilon(\tau, x) d\tau dx$ — энергия, излучаемая на пути от τ до $\tau + d\tau$ в интервале безразмерных частот от x до $x + dx$ за единицу времени в одном направлении, а $\alpha(x)$ — безразмерный коэффициент поглощения, равный

$$\alpha(x) = \frac{\sigma_\nu}{\sigma_{\nu_0}}. \quad (37)$$

Так как величины σ_ν и σ_{ν_0} зависят от места в среде только через посредство множителя N , то величина $\alpha(x)$ от места в среде не зависит.

Чтобы написать уравнение лучистого равновесия, мы должны воспользоваться введенной выше функцией $q(x_1, x_2)$, характеризующей происходящее в элементарном объеме перераспределение излучения по частотам. Переходя от $q(x_1, x_2)$ к безразмерной функции

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{q(x_1, x_2)}{\sigma_{\nu_0}}, \quad (38)$$

мы можем записать уравнение лучистого равновесия в виде

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [I_1(\tau, x') + I_2(\tau, x')] \beta(x', x) dx' + \varepsilon_0(\tau, x), \quad (39)$$

где $\varepsilon_0(\tau, x) d\tau dx$ — энергия, испускаемая непосредственно находящимися в среде источниками излучения на пути от τ до $\tau + d\tau$ в интервале безразмерных частот от x до $x + dx$ в одном направлении за 1 сек.

Мы считаем, что в среде нет истинного поглощения лучистой энергии, т. е. нет переходов атомов из возбуж-

депного состояния без излучения квантов в линии. Если бы такие переходы были и их доля равнялась $1 - \lambda$, то входящий в уравнение (39) интеграл следовало бы умножить на λ .

Из уравнений (36) и (39) можно получить одно интегральное уравнение для определения величины $\varepsilon(\tau, x)$. Для этого решим уравнения (36) относительно I_1 и I_2 . Считая, что нет излучения, падающего на среду извне, находим:

$$\left. \begin{aligned} I_1(\tau, x) &= \int_0^{\tau} e^{-\alpha(x)(\tau-\tau')} \varepsilon(\tau', x) d\tau', \\ I_2(\tau, x) &= \int_{\tau}^{\tau_0} e^{-\alpha(x)(\tau'-\tau)} \varepsilon(\tau', x) d\tau'. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Подстановка (40) в (39) дает:

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x', x) dx' \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x')|\tau-\tau'|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + \varepsilon_0(\tau, x). \quad (41)$$

Прежде чем приступить к решению интегрального уравнения (41), мы его несколько упростим. Будем считать, что источники излучения распределены в среде равномерно (т. е. ε_0 не зависит от τ) и излучаемая ими энергия зависит от частоты так же, как коэффициент поглощения $\alpha(x)$. Указанный случай зависимости ε_0 от x осуществляется тогда, когда свечение среды вызывается возбуждением каким-либо способом атомов, испускающих кванты в данной линии. Примером может служить появление L_{α} -квантов в туманностях в результате фотоионизации водородных атомов и последующих рекомбинаций.

Таким образом, вместо уравнения (41) мы будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(x', x) dx' \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x')|\tau-\tau'|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + \alpha(x) B_0, \quad (42)$$

где B_0 есть некоторая постоянная.

Далее мы примем, что зависимость коэффициента поглощения от частоты обусловлена только тепловым движением атомов, т. е.

$$\alpha(x) = e^{-x^2}. \quad (43)$$

При принятых предположениях мы решим интегральное уравнение (42) для следующих случаев: А) кванты диффундируют в среде без изменения частоты; В) диффузия квантов происходит при полном перераспределении по частотам; С) диффузия квантов происходит при перераспределении по частотам согласно закону (30).

Случай А. При диффузии излучения без перераспределения по частотам

$$\beta(x', x) = \delta(x - x') \alpha(x'), \quad (44)$$

где δ — функция Дирака. Поэтому вместо уравнения (42) имеем:

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)|\tau - \tau'|} \varepsilon(\tau', x) d\tau' + \alpha(x) B_0. \quad (45)$$

Полученное уравнение проще всего решается путем обращения к исходным уравнениям (36) и (39), последнее из которых в данном случае принимает вид

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{\alpha(x)}{2} [I_1(\tau, x) + I_2(\tau, x)] + \alpha(x) B_0. \quad (46)$$

Из уравнений (36) и (46) при условии, что

$$I_1(0, x) = 0, \quad I_2(\tau_0, x) = 0,$$

находим:

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{\alpha^2(x)}{2} B_0 [\tau_0 + \alpha(x) \tau (\tau_0 - \tau)] + \alpha(x) B_0, \quad (47)$$

$$I_1(\tau, x) = \alpha(x) B_0 \tau \left[1 + \frac{\alpha(x)}{2} (\tau_0 - \tau) \right], \quad (48)$$

$$I_2(\tau, x) = \alpha(x) B_0 (\tau_0 - \tau) \left[1 + \frac{\alpha(x)}{2} \tau \right]. \quad (49)$$

Эти формулы справедливы при произвольном виде функции $\alpha(x)$.

Случай В. При полном перераспределении излучения по частотам функция $\beta(x', x)$ имеет вид

$$\beta(x', x) = A\alpha(x)\alpha(x'), \quad (50)$$

где

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) dx = 1. \quad (51)$$

Подставляя указанное выражение для $\beta(x', x)$ в уравнение (42), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau, x) = \frac{A}{2} \alpha(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x') dx' \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x')|\tau-\tau'|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + \\ + \alpha(x) B_0. \end{aligned} \quad (52)$$

Мы видим, что функция $\varepsilon(\tau, x)$ может быть представлена в виде произведения

$$\varepsilon(\tau, x) = \alpha(x) B(\tau), \quad (53)$$

где $B(\tau)$ — неизвестная функция от τ . При подстановке (53) в (52) находим следующее уравнение для определения этой функции:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) B(\tau') d\tau' + B_0, \quad (54)$$

где

$$K(\tau) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x)\tau} \alpha^2(x) dx. \quad (55)$$

В том случае, когда $\alpha(x)$ дается формулой (43), функция $K(\tau)$ принимает вид

$$K(\tau) = \frac{1}{V\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 - \tau e^{-x^2}} dx. \quad (56)$$

В таблице 27 (стр. 270) даны значения функции $K(\tau)$ в интервале для τ от 0 до 10. В той же таблице

приведены значения функции

$$L(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 - \tau e^{-x^2}} dx, \quad (57)$$

которая нам встретится в дальнейшем.

Заметим, что при больших значениях τ справедливы асимптотические формулы:

$$K(\tau) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^2} \sqrt{\lg \tau}}, \quad L(\tau) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi\tau} \sqrt{\lg \tau}}. \quad (58)$$

Мы видим, что функция $K(\tau)$, являющаяся ядром интегрального уравнения (54), довольно медленно убывает

Таблица 27

Функции $K(\tau)$ и $L(\tau)$

τ	$K(\tau)$	$L(\tau)$	τ	$K(\tau)$	$L(\tau)$	τ	$K(\tau)$	$L(\tau)$
0	0,707	1,000	1,5	0,219	0,381	6,5	0,013	0,063
0,1	0,652	0,932	2,0	0,152	0,289	7,0	0,011	0,057
0,2	0,601	0,869	2,5	0,107	0,225	7,5	0,009	0,052
0,3	0,554	0,812	3,0	0,077	0,180	8,0	0,008	0,048
0,4	0,512	0,758	3,5	0,057	0,147	8,5	0,007	0,044
0,5	0,478	0,709	4,0	0,042	0,122	9,0	0,006	0,041
0,6	0,437	0,664	4,5	0,032	0,104	9,5	0,005	0,038
0,7	0,403	0,662	5,0	0,025	0,090	10,0	0,004	0,036
0,8	0,373	0,583	5,5	0,020	0,079			
0,9	0,345	0,547	6,0	0,016	0,070			
1,0	0,312	0,514						

с ростом τ . Это значит, что до данного элементарного объема в большом количестве доходит излучение от других объемов, находящихся на больших оптических расстояниях от него. По этой причине интегральное уравнение (54) не может быть заменено дифференциальным уравнением без большой потери точности.

Указанным обстоятельством уравнение (54) существенно отличается от уравнения (45), ядром которого является экспоненциальная функция; интегральное уравнение (45) можно заменить дифференциальным уравнением второго порядка.

Уравнение (54) было решено численно для случая $\tau_0 = 10$. Результаты решения приведены в таблице 28. Так как $B(\tau_0 - \tau) = B(\tau)$, то значения $B(\tau)$ даны лишь для значений τ от 0 до 5.

Таблица 28

Значения функции ($B \tau$)

τ	0	1	2	3	4	5
$B(\tau)$	3,4	4,9	5,9	6,6	7,0	7,2

Случай С. В данном случае функция $\beta(x_1, x_2)$ определяется формулой

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{\sigma_0}{\pi \nu_0} \int_0^{\infty} e^{-(y+r)^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{y+s}{a} + \operatorname{arctg} \frac{y-s}{a} \right] dy, \quad (59)$$

вытекающей из (30) и (38).

Интегральное уравнение (42) мы условились решать для случая, когда коэффициент поглощения определяется только эффектом Допплера, происходящим от теплового движения атомов. Поэтому в формуле (59) следует положить $a = 0$. Выполняя это, находим:

$$\beta(x_1, x_2) = \int_{|s|}^{\infty} e^{-(y+r)^2} dy, \quad (60)$$

или, используя соотношения (29),

$$\beta(x_1, x_2) = \int_{|x_2|}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (\text{при } |x_2| > |x_1|) \quad (61)$$

и

$$\beta(x_1, x_2) = \int_{|x_1|}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (\text{при } |x_2| < |x_1|). \quad (62)$$

Таким образом, в предельном случае $a = 0$ функция $\beta(x_1, x_2)$ имеет весьма простой вид.

Подставляя (61) и (62) в уравнение (42), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau, x) = & \int_0^x dx' \int_0^{c_0} e^{-\alpha(x')|\tau-\tau'|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz + \\ & + \int_x^{\infty} dx' \int_{x'}^{\infty} e^{-z^2} dz \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x')|\tau-\tau'|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + \alpha(x) B_0. \end{aligned} \quad (63)$$

Это уравнение может быть переписано также в виде (при $\alpha = e^{-x^2}$):

$$\varepsilon(\tau, x) = \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz \int_0^z dx' \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau-\tau'|e^{-x'^2}} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + e^{-x^2} B_0. \quad (64)$$

Результаты численного решения уравнения (64) при $\tau_0 = 10$ приведены в таблице 29.

Таблица 29

Функция $\varepsilon(\tau, x)$ (при $B_0=1$)

$x \backslash \tau$	0	1	2	3	4	5
0	3,6	5,3	6,6	7,4	7,9	8,0
0,2	3,4	5,1	6,3	7,1	7,6	7,7
0,4	3,1	4,5	5,6	6,3	6,7	6,8
0,6	2,5	3,6	4,5	5,0	5,4	5,5
0,8	1,9	2,7	3,3	3,7	3,9	4,0
1,0	1,3	1,8	2,2	2,5	2,6	2,7
1,2	0,83	1,1	1,4	1,5	1,6	1,7
1,4	0,48	0,65	0,77	0,86	0,91	0,93
1,6	0,25	0,34	0,40	0,44	0,47	0,48
1,8	0,12	0,16	0,19	0,21	0,22	0,23
2,0	0,05	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10

§ 3. Определение различных физических величин

Полученные выше результаты дают возможность определить значения различных физических величин (плотности излучения, светового давления и др.) в среде. Мы

сейчас найдем значения этих величин для трех рассмотренных выше случаев и сравним их между собой.

Энергия, излучаемая единицей объема. Обозначим через $\varepsilon(\tau) d\tau$ полную энергию, излучаемую элементарным отрезком длиной $d\tau$ на глубине τ за 1 сек в одном направлении. Очевидно, что

$$\varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(\tau, x) dx. \quad (65)$$

Полная энергия, излучаемая единицей «объема» (т. е. отрезком длиной 1 см) за 1 сек в одном направлении будет равна $\varepsilon(\tau) \sigma_{v_0}$.

В случае А, пользуясь формулой (47), получаем:

$$\varepsilon(\tau) = B_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\frac{\tau_0}{\sqrt{2}} + \frac{\tau(\tau_0 - \tau)}{\sqrt{3}} \right] + B_0 \sqrt{\pi}. \quad (66)$$

В случае В, как видно из формул (53) и (65),

$$\varepsilon(\tau) = B(\tau) \sqrt{\pi}. \quad (67)$$

Значения функции $\varepsilon(\tau)$ для случаев А, В и С приведены в таблице 30. При ее составлении были использованы данные таблиц 28 и 29.

Таблица 30

Функция $\varepsilon(\tau)$ (при $B_0=1$)

τ	А	В	С
0	8,0	6,1	6,3
1	12,6	8,7	9,1
2	16,2	10,5	11,2
3	18,8	11,8	12,6
4	20,3	12,5	13,4
5	20,8	12,7	13,7

При помощи функции $\varepsilon(\tau)$ может быть найдена степень возбуждения атомов в среде. Обозначим через N_1 число атомов в основном состоянии и через N_2 — число атомов

в возбужденном состоянии в единице объема. Очевидно, что

$$2\varepsilon(\tau)\sigma_{\nu_0} = N_2 A_{21} h\nu_0, \quad (68)$$

где A_{21} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода и $h\nu_0$ — энергия кванта. Но

$$\sigma_{\nu_0} = N_1 k_{\nu_0}, \quad (69)$$

где k_{ν_0} — коэффициент поглощения, рассчитанный на один атом. Поэтому

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{2k_{\nu_0}}{A_{21}h\nu_0} \varepsilon(\tau). \quad (70)$$

С задачей об определении величины $\frac{N_2}{N_1}$ мы встречаемся, в частности, при изучении оболочек звезд типа Ве, новых звезд и др. В указанных оболочках под действием излучения звезды происходит ионизация водородных атомов, затем следуют захваты электронов ионами, каскадные переходы электронов с уровня на уровень и, наконец, переходы со второго уровня на первый, связанные с появлением L_α -квантов. Вследствие больших оптических толщин оболочек в линии L_α в них накапливается большое количество L_α -квантов, что приводит к большим значениям величины $\frac{N_2}{N_1}$. Благодаря этому оптические толщины оболочек в бальмеровских линиях в некоторых случаях оказываются порядка единицы и больше. По указанной причине в спектрах рассматриваемых объектов наблюдаются абсорбционные линии бальмеровской серии.

Следует отметить, что вопрос о степени возбуждения атомов, обусловленной диффузией резонансного излучения, рассматривался раньше в физической литературе. Л. М. Биберман [3] составил интегральное уравнение диффузии излучения в среде, состоящей из плоскопараллельных слоев, при предположении о полном перераспределении по частотам и решил это уравнение численно при разных значениях оптической толщины среды и разных значениях параметра λ (соответствующих различной эффективности тушащих столкновений). Он определил концентрацию возбужденных атомов в зависимости от координат и констатировал согласие теории с экспериментом.

Плотность излучения. Пусть $I(\tau)$ — средняя интегральная интенсивность излучения, т. е.

$$I(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [I_1(\tau, x) + I_2(\tau, x)] dx. \quad (71)$$

Тогда интегральная плотность излучения будет равна

$$\sigma_{\nu_0} \rho(\tau) = \frac{2}{c} I(\tau). \quad (72)$$

В случае А

$$I(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[\tau_0 + \frac{\tau(\tau_0 - \tau)}{\sqrt{2}} \right] B_0. \quad (73)$$

В случае В при помощи формул (40) и (53) находим:

$$I(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') L(|\tau - \tau'|) d\tau', \quad (74)$$

где функция $L(\tau)$ определена соотношением (57).

Значения функции $I(\tau)$ для рассматриваемых случаев даны в таблице 31 (при $B_0 = 1$).

Т а б л и ц а 31

Средняя интегральная интенсивность излучения $I(\tau)$

τ	А	В	С
0	8,9	8,9	8,9
1	14,5	12,6	12,9
2	18,9	15,4	15,9
3	22,0	17,2	18,0
4	23,9	18,4	19,2
5	24,5	18,7	19,6
$Tc\sigma_{\nu_0}$	193	155	161

Знание функции $\rho(\tau)$ позволяет определить среднее время пребывания кванта в среде (его мы обозначим

через T). Так как полное количество лучистой энергии в среде равно

$$E = \int_0^{\tau_0} \rho(\tau) d\tau, \quad (75)$$

а количество энергии, испускаемое источниками излучения за 1 сек, равно

$$E_0 = 2 \sqrt{\pi} B_0 \tau_0, \quad (76)$$

то

$$T = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{c \tau_0 \sqrt{\pi}} \int_0^{\tau_0} I(\tau) d\tau. \quad (77)$$

Значения произведения $T c \tau_0$ даны в последней строке таблицы 31.

Поток излучения. Интегральный поток излучения по определению равен

$$H(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [I_2(\tau, x) - I_1(\tau, x)] dx. \quad (78)$$

Для нахождения $H(\tau)$ воспользуемся уравнениями (36) и (39). Из (36) получаем:

$$\frac{dH}{d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha(x) [I_1(\tau, x) + I_2(\tau, x)] - 2\varepsilon(\tau, x)\} dx. \quad (79)$$

Учитывая (39), находим:

$$\frac{dH}{d\tau} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(\tau, x) dx, \quad (80)$$

или

$$H(\tau) = 2 \int_{\tau}^{\tau_0} d\tau' \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0(\tau', x) dx. \quad (81)$$

Здесь мы приняли во внимание, что $H\left(\frac{\tau_0}{2}\right) = 0$.

Так как мы считаем, что $\varepsilon_0(\tau, x) = \alpha(x) B_0$, то вместо (81) имеем:

$$H(\tau) = (\tau_0 - 2\tau) B_0 \sqrt{\pi}. \quad (82)$$

Формулы (81) и (82) выражают тот очевидный факт, что интегральный поток излучения на глубине τ равен полному количеству энергии, испускаемому источниками излучения в интервале глубин от τ до $\frac{\tau_0}{2}$. Интегральный поток излучения не зависит от типа рассеяния. В частности, он одинаков в случаях А, В и С.

Световое давление. Найдем величину светового давления, вызванного излучением в рассматриваемой линии. Обозначим через $P(\tau) d\tau$ силу светового давления, действующего на элемент длины $d\tau$. Как известно,

$$P(\tau) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x) [I_2(\tau, x) - I_1(\tau, x)] dx. \quad (83)$$

Сила светового давления, действующая на единицу объема, равна $P(\tau) \sigma_{\nu_0}$.

При помощи уравнений переноса излучения (36) и соотношения (71) получаем:

$$P(\tau) = \frac{2}{c} \frac{dI(\tau)}{d\tau}. \quad (84)$$

В случае А

$$P(\tau) = \frac{B_0}{c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\tau_0 - 2\tau). \quad (85)$$

Значения функции $cP(\tau)$ (при $B_0 = 1$) даны в таблице 32. Тот факт, что величина светового давления во всех трех случаях различна, хотя интегральный поток излучения одинаков, объясняется различным распределением потока излучения по частотам.

Следует отметить, что задача о световом давлении, вызванном L_α -излучением, представляет большой интерес для динамики планетарных туманностей. Впервые эта задача была рассмотрена В. А. Амбарцумяном [4] для неподвижной туманности и Занстра [5] для туманности,

расширяющейся с градиентом скорости. В обеих указанных работах предполагалось, что диффузия излучения происходит без изменения частоты.

Таблица 32

Величина $c P(\tau)$

τ	A	B	C
0	12,5	8,6	9,1
1	10,0	6,6	7,1
2	7,5	4,7	5,1
3	5,0	3,0	3,3
4	2,5	1,4	1,6
5	0	0	0

В работе автора [6] была решена задача о диффузии L_α -излучения в туманности, расширяющейся с градиентом скорости, при предположении о полном перераспределении излучения по частотам. В этой работе было показано, что даже при небольшом градиенте скорости значения плотности L_α -излучения и вызываемого им светового давления во много раз меньше значений этих величин, найденных ранее Амбарцумяном и Занстра.

В дальнейшем Занстра [7] при том же предположении о полном перераспределении излучения по частотам определил величину светового давления в неподвижной туманности. Для этого он решил интегральное уравнение (54) при некоторых частных выражениях для функции $B_0(\tau)$ [точнее говоря, он принял некоторые простые выражения для $B(\tau)$ и при помощи (54) определил $B_0(\tau)$]. Занстра получил, что при τ_0 порядка 10^4 сила светового давления в случае диффузии излучения с перераспределением по частотам (т. е. в случае B) примерно в 300 раз меньше силы светового давления в случае диффузии излучения без изменения частоты (т. е. в случае A).

Из таблицы 32 видно, что при $\tau_0 = 10$ отношение силы светового давления в случае B к силе светового давления в случае A равно приблизительно $2/3$. Таким образом,

указанное отношение убывает с увеличением оптической толщины τ_0 .

Из таблицы 32 также следует, что в случаях В и С сила светового давления примерно одинакова.

Контур спектральной линии. Интенсивность излучения, выходящего из среды наружу, равна

$$I_2(0, x) = \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)\tau} \varepsilon(\tau, x) d\tau. \quad (86)$$

В случае А

$$I_2(0, x) = \alpha(x) B_0 \tau_0. \quad (87)$$

На рис. 20 приведены графики функции $\frac{I_2(0, x)}{B_0}$, полученные при помощи формул (86) и (87). Эти графики представляют собой контуры спектральных линий, образованных рассматриваемой средой.

Мы видим, что контуры линий в случаях В и С сильно отличаются от контуров линий в случае А.

Необходимо отметить, что диффузия излучения с перераспределением по частотам приводит к спектральным линиям такого же типа, как и так называемое «самообращение» спектральных линий. Эти два процесса образования эмиссионных линий с центральной депрессией следует различать.

Из полученных выше результатов можно сделать следующие выводы:

1. Значения различных физических величин при диффузии излучения с перераспределением по частотам (случаи В и С) весьма сильно отличаются от значений тех же величин при диффузии излучения без перераспределения по частотам (случай А). Это отличие должно увеличиваться с возрастанием оптической толщины среды τ_0 .

2. Значения физических величин в случаях В и С сравнительно близки друг к другу. Однако этот вывод

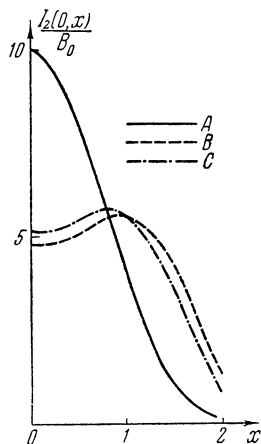


Рис. 20.

сделан только для небольших значений τ_0 (порядка 10). Вопрос о том, как будут различаться случаи В и С при возрастании τ_0 , должен быть исследован дополнительно.

§ 4. Вероятность выхода кванта из среды

В § 2 задача о диффузии излучения с перераспределением по частотам была рассмотрена при помощи интегрального уравнения, определяющего коэффициент излучения $\varepsilon(\tau, x)$. Теперь мы рассмотрим ту же задачу при помощи определения вероятности выхода кванта из среды [2].

Преимущества и недостатки каждого из этих способов решения задачи о диффузии излучения заключаются в следующем. Первый способ дает возможность определить поле излучения как вне, так и внутри среды при заданных источниках излучения. Чтобы решить задачу при других источниках излучения, надо решить новое интегральное уравнение (отличающееся от прежнего свободным членом). Второй способ позволяет найти лишь интенсивности излучения, выходящего из среды. Однако вероятность выхода квантов из среды не зависит от того, каким путем в ней появились кванты, т. е. не зависит от источников излучения. Поэтому после определения вероятности выхода кванта из среды нахождение интенсивностей выходящего из среды излучения может быть произведено при любых источниках излучения.

При рассмотрении задачи первым способом получается следующее интегральное уравнение для определения коэффициента излучения:

$$\varepsilon(\tau, x) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x', x) \alpha(x') dx' \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x')|\tau' - \tau|} \varepsilon(\tau', x') d\tau' + \varepsilon_0(\tau, x), \quad (88)$$

где введено обозначение

$$\beta(x', x) = g(x', x) \alpha(x'). \quad (89)$$

Уравнение (88) отличается от уравнения (41) лишь наличием множителя перед интегралом (раньше считалось $\lambda = 1$).

После определения величины $\dot{\epsilon}(\tau, x)$ из уравнения (88) могут быть легко найдены интенсивности излучения на любой оптической глубине τ . Они определяются формулами (40).

Обратимся к рассмотрению задачи вторым способом. Обозначим через $p(\tau, x_1, x_2) dx_2$ вероятность того, что излучение, поглощенное на оптической глубине τ в виде квантов частоты x_1 , выйдет из среды (вообще говоря, после многократных рассеяний с перераспределением по частотам) в виде квантов с частотами в интервале от x_2 до $x_2 + dx_2$. Очевидно, что функция $p(\tau, x_1, x_2)$ должна удовлетворять следующему интегральному уравнению:

$$p(\tau, x_1, x_2) = \frac{\lambda}{2} g(x_1, x_2) e^{-\alpha(x_2)\tau} + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x) \alpha(x) dx \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)|\tau' - \tau|} p(\tau', x, x_2) d\tau'. \quad (90)$$

Здесь первый член в правой части учитывает излучение, выходящее наружу непосредственно из данного объема, а второй — излучение, выходящее из среды после рассеяний в других объемах.

Если величина $p(\tau, x_1, x_2)$ известна, то легко найти интенсивности выходящего из среды излучения при любых источниках излучения. Пусть $L(\tau, x') d\tau dx'$ — количество энергии, пришедшее непосредственно от источников излучения и поглощенное в среде между τ и $\tau + d\tau$ в интервале частот от x' до $x' + dx'$ за 1 сек. Тогда интенсивности излучения, выходящего из среды (соответственно через границы $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$), будут равны:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_0^{\tau_0} L(\tau, x') p(\tau, x', x) d\tau, \\ I_1(\tau_0, x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_0^{\tau_0} L(\tau, x') p(\tau_0 - \tau, x', x) d\tau. \end{aligned} \right\} (91)$$

Применим написанные соотношения к случаю, когда источники излучения находятся вне среды. Допустим, что на одну из границ среды ($\tau = 0$) падает излучение частоты x_1 и интенсивности I_0 . Тогда вместо уравнения (88) имеем:

$$\varepsilon(\tau, x_1, x_2) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, x_2) \alpha(x) dx \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x)|\tau' - \tau|} \varepsilon(\tau', x_1, x) d\tau' + \frac{\lambda}{2} g(x_1, x_2) \alpha(x_1) I_0 e^{-\alpha(x_1)\tau}. \quad (92)$$

Сравнивая между собой уравнения (90) и (92) и учитывая симметричность функции $\alpha(x_1)g(x_1, x_2)$, получаем:

$$p(\tau, x_2, x_1) = \frac{\varepsilon(\tau, x_1, x_2)}{I_0 \alpha(x_2)}, \quad (93)$$

т. е. функция $\alpha(x_2)p(\tau, x_2, x_1)$ равна коэффициенту излучения в среде, освещенной излучением единичной интенсивности. Таким образом, знание коэффициента излучения для среды, находящейся под воздействием внешнего источника излучения, позволяет определить свечение среды при любых источниках излучения.

Другой интересный результат получается при применении соотношения (93) к выражениям для интенсивностей излучения, выходящего из среды. Из формул (40) имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x_1, x_2) &= \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x_2)\tau} \varepsilon(\tau, x_1, x_2) d\tau, \\ I_1(\tau_0, x_1, x_2) &= \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x_2)(\tau_0 - \tau)} \varepsilon(\tau, x_1, x_2) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

С другой стороны, если на среду падает излучение частоты x_1 и интенсивности I_0 , то

$$L(\tau, x') = I_0 e^{-\alpha(x')\tau} \alpha(x') \delta(x_1 - x'), \quad (95)$$

где δ — функция Дирака. Поэтому из формул (91) следует:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x_1, x_2) &= I_0 \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x_1)\tau} \alpha(x_1) p(\tau, x_1, x_2) d\tau, \\ I_1(\tau_0, x_1, x_2) &= I_0 \int_0^{\tau_0} e^{-\alpha(x_1)\tau} \alpha(x_1) p(\tau_0 - \tau, x_1, x_2) d\tau. \end{aligned} \right\} (96)$$

Сравнивая (94) и (96) и принимая во внимание (93), находим:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x_1, x_2) &= I_2(0, x_2, x_1), \\ I_1(\tau_0, x_1, x_2) &= I_1(\tau_0, x_2, x_1). \end{aligned} \right\} (97)$$

Таким образом, интенсивности диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного излучения являются симметричными функциями частот x_1 и x_2 . Это — частный случай принципа обратимости оптических явлений.

Результаты, выраженные формулами (93) и (97), могут быть обобщены на случай трехмерной среды.

Интегральное уравнение (90) не является единственным для определения $p(\tau, x_1, x_2)$. Можно также составить функциональное уравнение для определения той же величины.

Для вывода этого функционального уравнения найдем вероятность выхода кванта с глубины $\tau + \Delta\tau$, т. е. величину $p(\tau + \Delta\tau, x_1, x_2)$. Пренебрегая членами порядка $\Delta\tau^2$, получаем:

$$\begin{aligned} p(\tau + \Delta\tau, x_1, x_2) &= p(\tau, x_1, x_2) [1 - \alpha(x_2)\Delta\tau] + \\ &+ \int p(\tau, x_1, x) \alpha(x) \Delta\tau p(0, x, x_2) dx - \\ &- \int p(\tau_0 - \tau, x_1, x) \alpha(x) \Delta\tau p(\tau_0, x, x_2) dx \end{aligned} \quad (98)$$

(здесь и дальше интегрирование по x от $-\infty$ до $+\infty$)

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\tau, x_1, x_2)}{\partial \tau} = & -\alpha(x_2) p(\tau, x_1, x_2) + \\ & + \int p(\tau, x_1, x) \alpha(x) p(0, x, x_2) dx - \\ & - \int p(\tau_0 - \tau, x_1, x) \alpha(x) p(\tau_0, x, x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (99)$$

Входящие в уравнение (99) величины $p(0, x_1, x_2)$ и $p(\tau_0, x_1, x_2)$ могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} p(0, x_1, x_2) &= \frac{\lambda}{2} g(x_1, x_2) + \frac{\lambda}{2} \int g(x_1, x) \rho(x, x_2) dx, \\ p(\tau_0, x_1, x_2) &= \frac{\lambda}{2} g(x_1, x_2) e^{-\alpha(x_2)\tau_0} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int g(x_1, x) \sigma(x, x_2) dx, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \int_0^{\tau_0} p(\tau, x_1, x_2) \alpha(x_1) e^{-\alpha(x_1)\tau} d\tau, \\ \sigma(x_1, x_2) &= \int_0^{\tau_0} p(\tau_0 - \tau, x_1, x_2) \alpha(x_1) e^{-\alpha(x_1)\tau} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Величина $\rho(x_1, x_2) dx_2$ есть вероятность того, что излучение, падающее на среду с частотой x_1 , отразится от нее в интервале частот от x_2 до $x_2 + dx_2$, а величина $\sigma(x_1, x_2) dx_2$ — вероятность того, что излучение, падающее на среду с частотой x_1 , пройдет через среду (после рассеяний в ней) в интервале частот от x_2 до $x_2 + dx_2$.

Умножим уравнение (99) на $e^{-\alpha(x_1)\tau} \alpha(x_1)$ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до τ_0 . В результате получаем:

$$\begin{aligned} [\alpha(x_1) + \alpha(x_2)] \rho(x_1, x_2) = & \alpha(x_1) p(0, x_1, x_2) - \\ - \alpha(x_1) p(\tau_0, x_1, x_2) e^{-\alpha(x_1)\tau_0} + & \int \rho(x_1, x) \alpha(x) p(0, x, x_2) dx - \\ - \int \sigma(x_1, x) \alpha(x) p(\tau_0, x, x_2) dx. \end{aligned} \quad (102)$$

Умножая уравнение (99) на $e^{-\alpha(x_1)(\tau_0-\tau)} \alpha(x_1)$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , аналогично находим:

$$\begin{aligned} [\alpha(x_2) - \alpha(x_1)] \sigma(x_1, x_2) &= \alpha(x_1) p(0, x_1, x_2) e^{-\alpha(x_1)\tau_0} - \\ &- \alpha(x_1) p(\tau_0, x_1, x_2) + \int \sigma(x_1, x) \alpha(x) p(0, x, x_2) dx - \\ &- \int \rho(x_1, x) \alpha(x) p(\tau_0, x, x_2) dx. \quad (103) \end{aligned}$$

Уравнения (100), (102) и (103) представляют собой систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными функциями: $p(0, x_1, x_2)$, $p(\tau_0, x_1, x_2)$, $\rho(x_1, x_2)$ и $\sigma(x_1, x_2)$. Нахождение из указанной системы уравнений функций $\rho(x_1, x_2)$ и $\sigma(x_1, x_2)$ дает решение задачи о свечении среды при внешних источниках излучения. Нахождение функций $p(0, x_1, x_2)$ и $p(\tau_0, x_1, x_2)$ позволяет при помощи уравнения (99) определить функцию $p(\tau, x_1, x_2)$, что ведет к решению задачи о свечении среды при любых источниках излучения.

Полученные уравнения в общем виде довольно сложны. Однако в некоторых частных случаях они сильно упрощаются. Ниже рассматривается один из таких случаев.

§ 5. Диффузия излучения с полным перераспределением по частотам

Допустим, что при элементарном акте рассеяния происходит полное перераспределение излучения по частотам. В таком случае величина $g(x_1, x_2)$ не зависит от x_1 и равна

$$g(x_1, x_2) = A\alpha(x_2), \quad (104)$$

где A определяется из условия (51).

Величина $p(\tau, x_1, x_2)$ также не будет теперь зависеть от частоты поглощенного излучения. Мы ее обозначим через $p(\tau, x_2)$.

В таком случае вместо уравнений (99) и (100) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\tau, x_2)}{\partial \tau} &= -\alpha(x_2) p(\tau, x_2) + p(0, x_2) \int p(\tau, x) \alpha(x) dx - \\ &- p(\tau_0, x_2) \int p(\tau_0 - \tau, x) \alpha(x) dx, \quad (105) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} p(0, x_2) &= \frac{\lambda}{2} A \alpha(x_2) + \frac{\lambda}{2} A \int \alpha(x) \rho(x, x_2) dx, \\ p(\tau_0, x_2) &= \frac{\lambda}{2} A \alpha(x_2) e^{-\alpha(x_2)\tau_0} + \frac{\lambda}{2} A \int \alpha(x) \sigma(x, x_2) dx, \end{aligned} \right\} (106)$$

а уравнения (102) и (103) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} [\alpha(x_1) + \alpha(x_2)] \rho(x_1, x_2) &= p(0, x_2) \left[\alpha(x_1) + \int \rho(x_1, x) \alpha(x) dx \right] - \\ &- p(\tau_0, x_2) \left[\alpha(x_1) e^{-\alpha(x_1)\tau_0} + \int \sigma(x_1, x) \alpha(x) dx \right], \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} [\alpha(x_2) - \alpha(x_1)] \sigma(x_1, x_2) &= p(0, x_2) \left[\alpha(x_1) e^{-\sigma(x_1)\tau_0} + \right. \\ &+ \left. \int \sigma(x_1, x) \alpha(x) dx \right] - p(\tau_0, x_2) \left[\alpha(x_1) + \int \rho(x_1, x) \alpha(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= A \left[\alpha(x) + \int \rho(x', x) \alpha(x') dx' \right], \\ \psi(x) &= A \left[\alpha(x) e^{-\alpha(x)\tau_0} + \int \sigma(x', x) \alpha(x') dx' \right]. \end{aligned} \right\} (109)$$

Тогда, учитывая доказанную выше симметричность функций $\rho(x_1, x_2)$ и $\sigma(x_1, x_2)$, а также тот факт, что

$$p(0, x_2) = \frac{\lambda}{2} \varphi(x_2), \quad p(\tau_0, x_2) = \frac{\lambda}{2} \psi(x_2), \quad (110)$$

вместо (107) и (108) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \frac{\lambda}{2A} \frac{\varphi(x_1) \varphi(x_2) - \psi(x_1) \psi(x_2)}{\alpha(x_1) + \alpha(x_2)}, \\ \sigma(x_1, x_2) &= \frac{\lambda}{2A} \frac{\psi(x_1) \varphi(x_2) - \psi(x_2) \varphi(x_1)}{\alpha(x_2) - \alpha(x_1)}. \end{aligned} \right\} (111)$$

Таким образом, функции $\rho(x_1, x_2)$ и $\sigma(x_1, x_2)$, зависящие от двух аргументов, оказываются выраженными через вспомогательные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, зависящие только от одного аргумента.

Подставляя (111) в (109), находим следующие уравнения для определения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= A\alpha(x) + \frac{\lambda}{2} \int \frac{\varphi(x')\varphi(x') - \psi(x)\psi(x')}{\alpha(x') + \alpha(x)} \alpha(x') dx', \\ \psi(x) &= A\alpha(x) e^{-\alpha(x)\tau_0} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int \frac{\psi(x')\varphi(x) - \psi(x)\varphi(x')}{\alpha(x) - \alpha(x')} \alpha(x') dx'. \end{aligned} \right\} (112)$$

После решения уравнений (112) задача о свечении среды при внешних источниках излучения решается при помощи формул (111). Чтобы определить свечение среды при внутренних источниках излучения, надо, вообще говоря, найти функцию $p(\tau, x)$. Это можно сделать тем же способом, какой был указан в § 2 главы VI для нахождения функции $p(\tau, \eta)$.

Если величина $p(\tau, x)$ известна, то интенсивности выходящего из среды излучения при любых источниках излучения определяются при помощи формул (91). В данном случае p не зависит от x' . Поэтому формулы (91) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x) &= \int_0^{\tau_0} \bar{L}(\tau) p(\tau, x) d\tau, \\ I_1(\tau_0, x) &= \int_0^{\tau_0} \bar{L}(\tau) p(\tau_0 - \tau, x) d\tau, \end{aligned} \right\} (113)$$

где

$$\bar{L}(\tau) = \int L(\tau, x) dx. \quad (114)$$

В том случае, когда энергия, испускаемая источниками излучения, пропорциональна коэффициенту поглощения в линии, т. е.

$$\dot{\epsilon}_0(\tau, x) = \alpha(x) B_0(\tau), \quad (115)$$

при вычислениях по формулам (113) мы можем принять:

$$\alpha(x) B_0(\tau) = \frac{\lambda}{2} A\alpha(x) \bar{L}(\tau),$$

откуда

$$\bar{L}(\tau) = \frac{2}{\lambda} \frac{B_0(\tau)}{A}. \quad (116)$$

Подставляя (116) в (113), имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, x) &= \frac{2}{\lambda A} \int_0^{\tau_0} B_0(\tau) p(\tau, x) d\tau, \\ I_1(\tau_0, x) &= \frac{2}{\lambda A} \int_0^{\tau_0} B_0(\tau) p(\tau_0 - \tau, x) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

Легко видеть, что если $\bar{L}(\tau)$ или $B_0(\tau)$ представляется в виде полинома от τ , то интенсивности выходящего из среды излучения могут быть найдены без предварительного определения функции $p(\tau, x)$ непосредственно из уравнения (105). Чтобы сделать это, достаточно умножить уравнение (105) на τ^n проинтегрировать по τ в пределах от 0 до τ_0 .

Допустим, например, что $B_0 = \text{const.}$ Тогда из формул (117) получаем:

$$I_2(0, x) = \frac{2}{\lambda A} B_0 \int_0^{\tau_0} p(\tau, x) d\tau \quad (118)$$

и $I_1(\tau_0, x) = I_2(0, x)$. Для нахождения интеграла, входящего в (118), проинтегрируем уравнение (105) по τ в пределах от 0 до τ_0 . В результате имеем:

$$\begin{aligned} p(\tau_0, x) - p(0, x) &= -\alpha(x) \int_0^{\tau_0} p(\tau, x) d\tau + \\ &+ \frac{\lambda}{2} [\varphi(x) - \psi(x)] \int \alpha(x) dx \int_0^{\tau_0} p(\tau, x) d\tau, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \alpha(x) \int_0^{\tau_0} p(\tau, x) d\tau &= \\ &= \frac{\lambda}{2} [\varphi(x) - \psi(x)] \left[1 + \int \alpha(x) dx \int_0^{\tau_0} p(\tau, x) d\tau \right]. \quad (119) \end{aligned}$$

После интегрирования (119) по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ находим:

$$1 + \int \alpha(x) dx \int_0^{\infty} p(\tau, x) d\tau = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \int [\varphi(x) - \psi(x)] dx}. \quad (120)$$

При помощи (119) и (120) формула (118) дает:

$$\alpha(x) I_2(0, x) = \frac{B_0}{A} \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{1 - \frac{\lambda}{2} \int [\varphi(x) - \psi(x)] dx}. \quad (121)$$

Таким образом, и в данном случае интенсивности выходящего из среды излучения весьма просто выражаются через вспомогательные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Система уравнений (112), определяющая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, может быть легко решена численными методами.

Отметим, что между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ существует некоторое интегральное соотношение. Для получения его проинтегрируем первое из уравнений (112) по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. В результате находим:

$$\begin{aligned} \int \varphi(x) dx &= 1 + \frac{\lambda}{2} \iint \frac{\varphi(x')\varphi(x) - \psi(x')\psi(x)}{\alpha(x') + \alpha(x)} \alpha(x') dx dx' = \\ &= 1 + \frac{\lambda}{2} \iint [\varphi(x')\varphi(x) - \psi(x')\psi(x)] dx dx' - \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \iint \frac{\varphi(x')\varphi(x) - \psi(x')\psi(x)}{\alpha(x') + \alpha(x)} \alpha(x) dx dx'. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\int \varphi(x) dx = \varphi_0, \quad \int \psi(x) dx = \psi_0, \quad (122)$$

получаем:

$$\varphi_0 = 1 + \frac{\lambda}{4} (\varphi_0^2 - \psi_0^2). \quad (123)$$

При $\lambda = 1$ имеем:

$$\varphi_0 + \psi_0 = 2. \quad (124)$$

Особо следует остановиться на решении системы уравнений (112) в случае чистого рассеяния. Дело в том, что

при $\lambda = 1$ указанная система имеет не единственное решение. Пользуясь (124), легко убедиться, что если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются решениями системы (112), то ее решениями будут также функции

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \frac{C}{\alpha(x)} [\varphi(x) + \psi(x)], \\ \psi(x) - \frac{C}{\alpha(x)} [\varphi(x) + \psi(x)],\end{aligned}$$

где C — произвольная постоянная.

Для устранения неопределенности решения следует найти дополнительное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Такое соотношение мы получим, если примем во внимание, что при $\lambda = 1$ все кванты, испускаемые внутренними источниками излучения, должны выйти из среды. Иначе говоря, должно быть:

$$\int I_2(0, x) dx + \int I_1(\tau_0, x) dx = 2 \int dx \int_0^{\tau_0} \varepsilon_0(\tau, x) d\tau. \quad (125)$$

Применим (125) к тому случаю, когда $\varepsilon_0(\tau, x)$ определяется формулой (115) при $B_0 = \text{const}$. В данном случае соотношение (125) принимает вид:

$$\int I_2(0, x) dx = \frac{B_0}{A} \tau_0. \quad (126)$$

Но $I_2(0, x)$ определяется в рассматриваемом случае формулой (121). Поэтому вместо (126) получаем:

$$\int \frac{\varphi(x) - \psi(x)}{\alpha(x)} dx = \tau_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2} \int [\varphi(x) - \psi(x)] dx \right\}. \quad (127)$$

Это соотношение и следует добавить к системе уравнений (112) для получения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, имеющих необходимый физический смысл, т. е. связанных с вероятностью выхода кванта из среды формулами (110).

В таблице 33 приведены значения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, найденные путем численного решения уравнений (112) для случая чистого рассеяния при $\tau_0 = 10$.

Т а б л и ц а 33

Значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $\lambda=1$, $\tau_0=10$

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\varphi(x)$	0,82	0,80	0,73	0,64	0,52	0,41	0,30	0,21	0,13	0,07	0,03
$\psi(x)$	0,05	0,05	0,05	0,05	0,06	0,08	0,10	0,11	0,08	0,06	0,03

В качестве примеров применения полученных выше результатов укажем на возможность определения ряда физических величин, представляющих интерес для практики. Для данной среды эти величины выражаются через одни и те же функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при любых источниках излучения (как внешних, так и внутренних).

1. Контурные спектральных линий. Эти величины определяются непосредственно интенсивностями выходящего из среды излучения $I_1(\tau_0, x)$ и $I_2(0, x)$. В частности, при равномерном распределении в среде источников излучения, т. е. при $\epsilon_0(\tau, x) = \alpha(x) B_0$, контуры линий определяются формулой (121). Вычисление по этой формуле величины $I_2(0, x)$ при помощи таблицы 33 дает контур линии, изображенный на рис. 20 (случай В).

2. Световое давление на границах среды. Обозначим через $P(\tau) \sigma_{\nu_0}$ силу светового давления, действующего на единицу объема на оптической глубине τ . На границах среды имеем:

$$\left. \begin{aligned} P(0) &= \frac{1}{c} \int \alpha(x) I_2(0, x) dx, \\ P(\tau_0) &= \frac{1}{c} \int \alpha(x) I_1(\tau_0, x) dx, \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

где c — скорость света. При равномерном распределении источников излучения при помощи формулы (121) и обозначений (122) получаем:

$$P(0) = P(\tau_0) = \frac{B_0}{cA} \frac{\varphi_0 - \psi_0}{1 - \frac{\lambda}{2}(\varphi_0 - \psi_0)}. \quad (129)$$

В случае чистого рассеяния ($\lambda = 1$) формула (129) принимает вид

$$P(0) = P(\tau_0) = \frac{2B_0}{cA} \left(\frac{1}{\psi_0} - 1 \right). \quad (130)$$

Формула (130) может быть использована для вычисления светового давления, вызванного излучением в линии L_α на границах туманностей.

3. Число атомов в возбужденном состоянии. При полном перераспределении излучения по частотам объемный коэффициент излучения равен $\epsilon(\tau, x) = \alpha(x)B(\tau)$. Поэтому для далеких от центра частей линии, где поглощение уже не играет большой роли (точнее говоря, для значений x , удовлетворяющих неравенству $\alpha(x)\tau_0 \ll 1$), имеем:

$$I_2(0, x) = I_1(\tau_0, x) = \alpha(x) \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau. \quad (131)$$

Так как интенсивности выходящего из среды излучения могут считаться известными, то соотношение (131) позволя-

ет определить величину интеграла $\int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau$.

Очевидно, что полная энергия, излучаемая средой за 1 сек, равна $\frac{2}{A} \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau$. С другой стороны, эта

энергия может быть представлена в виде $\bar{N}_2 A_{21} h\nu_0$, где \bar{N}_2 — полное число атомов в возбужденном состоянии

$\left(\bar{N}_2 = \int_0^{l_0} N_2 dl \right)$, A_{21} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода в данной линии, $h\nu_0$ — энергия кванта.

Из соотношения

$$\frac{2}{A} \int_0^{\tau_0} B(\tau) d\tau = \bar{N}_2 A_{21} h\nu_0 \quad (132)$$

может быть найдена величина \bar{N}_2 .

Значение величины \bar{N}_2 позволяет определить оптическую толщину среды в линиях, имеющих нижним уровнем рассматриваемое возбужденное состояние. В частности, по найденной интенсивности L_α -излучения, выходящего из туманности, можно вычислить оптическую толщину туманности в бальмеровских линиях.

§ 6. Свечение среды бесконечно большой оптической толщины

Выше мы считали, что диффузия излучения происходит в одномерной среде. Теперь мы займемся рассмотрением диффузии излучения в трехмерной среде, состоящей из плоскопараллельных слоев. Оптическую толщину среды будем считать бесконечно большой. Примем также, что при элементарном акте рассеяния происходит полное перераспределение излучения по частотам.

Имея в виду последующее применение теории к задаче о контурах линий в звездных спектрах, предположим, что, кроме поглощения в линиях, в среде происходит также поглощение в непрерывном спектре. Коэффициент поглощения в линии обозначим через σ'_ν , а коэффициент поглощения в непрерывном спектре через κ' . Отношение $\frac{\sigma'_\nu}{\kappa'}$ будем считать в среде постоянным.

Для упрощения записи введем обозначения:

$$\frac{\sigma'_\nu}{\int_0^\infty \sigma'_\nu d\nu} = \sigma_\nu, \quad \frac{\kappa'}{\int_0^\infty \sigma'_\nu d\nu} = \kappa.$$

Тогда оптическую глубину в частоте ν мы можем представить в виде

$$\tau_\nu = (\sigma_\nu + \kappa) z, \quad (133)$$

где

$$\int_0^\infty \sigma_\nu d\nu = 1. \quad (134)$$

При принятых обозначениях мы будем также иметь, что доля излучения, поглощенного в спектральной линии слоем толщиной dz в виде квантов частоты ν' и рассеянного им в виде квантов с частотами от ν до $\nu + d\nu$, равна $\sigma_\nu d\nu \sigma_{\nu'} dz$ (в случае чистого рассеяния).

Задачу о свечении данной среды мы решим путем предварительного определения вероятности выхода кванта из среды. Обозначим через $p(z, \nu, \eta) d\nu d\omega$ вероятность того, что квант, поглощенный в рассматриваемой линии на глубине z , выйдет из среды (вообще говоря, после многократных рассеяний) в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$. Обозначим, далее, через $L(z) dz$ количество энергии, приходящее непосредственно от источников излучения и поглощаемое в линии элементарным объемом с сечением 1 см^2 и толщиной dz на глубине z за 1 сек. Очевидно, интенсивность излучения частоты ν , выходящего из атмосферы под углом $\arccos \eta$ к нормали, будет равна

$$I_\nu(0, \eta) = \int_0^\infty L(z) p(z, \nu, \eta) \frac{dz}{\eta}. \quad (135)$$

Здесь мы уже воспользовались предположением о полном перераспределении излучения по частотам, так как считаем, что величина p не зависит от частоты излучения, поглощенного данным элементарным объемом.

Чтобы составить уравнение для определения величины $p(z, \nu, \eta)$, найдем вероятность выхода кванта с глубины $z + \Delta z$, т. е. величину $p(z + \Delta z, \nu, \eta)$. Для этого представим себе, что квант выходит с глубины z , а затем проходит через дополнительный слой толщины Δz (как без поглощения, так и с поглощением в нем). Тогда получаем следующее выражение для величины $p(z + \Delta z, \nu, \eta)$:

$$p(z + \Delta z, \nu, \eta) = p(z, \nu, \eta) \left(1 - \frac{\sigma_\nu + \kappa}{\eta} \Delta z \right) + \\ + 2\pi p(0, \nu, \eta) \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int_0^1 p(z, \nu', \eta') \frac{\Delta z}{\eta'} d\eta'. \quad (136)$$

Отсюда находим:

$$\frac{\partial p(z, \nu, \eta)}{\partial z} = -p(z, \nu, \eta) \frac{\sigma_\nu + z}{\eta} + \\ + 2\pi p(0, \nu, \eta) \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int_0^1 p(z, \nu', \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}. \quad (137)$$

Напишем теперь выражение для величины $p(0, \nu, \eta)$. Для этого надо принять во внимание закон рассеяния излучения элементарным объемом среды. При предположении о полном перераспределении излучения по частотам вероятность рассеяния в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ равна $\sigma_\nu d\nu$. Для общности мы будем считать, что не вся энергия, поглощенная элементарным объемом в линии, излучается им в той же линии, а только ее некоторая доля λ . В таком случае вероятность того, что квант, поглощенный элементарным объемом в линии, выйдет из объема в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ внутри телесного угла $d\omega$, будет равна $\frac{\lambda}{4\pi} \sigma_\nu d\nu d\omega$. Учитывая сказанное, получаем:

$$p(0, \nu, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_\nu + \frac{\lambda}{2} \int \sigma_{\nu'} d\nu' \int_0^1 \rho(\nu, \nu', \eta, \eta') d\eta', \quad (138)$$

где

$$\rho(\nu, \nu_1, \eta, \zeta) = \int_0^\infty p(z, \nu, \eta) e^{-\frac{\sigma_{\nu_1} + z}{\zeta} z} \sigma_{\nu_1} \frac{dz}{\zeta}. \quad (139)$$

Величина $\rho(\nu, \nu_1, \eta, \zeta) d\nu d\omega$ представляет собой вероятность того, что излучение частоты ν_1 , падающее на среду под углом $\arccos \zeta$ к нормали, отразится от нее в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$ под углом $\arccos \eta$ к нормали внутри телесного угла $d\omega$.

Из уравнений (137), (138) и (139) можно легко получить одно уравнение для определения функций $\rho(\nu, \nu_1, \eta, \zeta)$ и $p(0, \nu, \eta)$. Умножая обе части уравнения (137) на

$e^{-\frac{\sigma_{v_1} + x}{\zeta}} \sigma_{v_1} \frac{dz}{\zeta}$ и интегрируя в пределах от 0 до ∞ , паходим:

$$\begin{aligned} \rho(v, v_1, \eta, \zeta) \left(\frac{\sigma_v + x}{\eta} + \frac{\sigma_{v_1} + x}{\zeta} \right) = \\ = p(0, v, \eta) \left[\frac{\sigma_{v_1}}{\zeta} + 2\pi \int \sigma_{v'} dv' \int \rho(v', v_1, \eta', \zeta) \frac{d\eta'}{\eta'} \right]. \end{aligned} \quad (140)$$

Но из физических соображений следует, что

$$\rho(v, v_1, \eta, \zeta) \zeta = \rho(v_1, v, \zeta, \eta) \eta \quad (141)$$

[это соотношение можно также получить аналогично соотношениям (97)]. Поэтому член в квадратных скобках равенства (140) оказывается равным $\frac{4\pi}{\lambda\zeta} p(0, v_1, \zeta)$. Следовательно, обозначая

$$p(0, v, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(v, \eta) \sigma_v, \quad (142)$$

вместо (140) получаем:

$$\rho(v, v_1, \eta, \zeta) \left(\frac{\sigma_v + x}{\eta} + \frac{\sigma_{v_1} + x}{\zeta} \right) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\sigma_v \sigma_{v_1}}{\zeta} \varphi(v, \eta) \varphi(v_1, \zeta). \quad (143)$$

Итак, величины $p(0, v, \eta)$ и $\rho(v, v_1, \eta, \zeta)$ оказываются выраженными через одну и ту же функцию $\varphi(v, \eta)$. Что же касается самой функции $\varphi(v, \eta)$, то для ее определения может служить следующее уравнение, получающееся при подстановке (142) и (143) в (138):

$$\varphi(v, \eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \eta \int \mu_{v'} \sigma_{v'} dv' \int_0^1 \frac{\varphi(v, \eta) \varphi(v', \eta') d\eta'}{\eta(\mu_{v'} + 1) + \eta(\mu_{v'} + 1)}, \quad (144)$$

где обозначено $\mu_v = \sigma_v/x$. Легко видеть, что функция $\varphi(v, \eta)$ зависит в действительности не от двух аргументов

ν и η , а от одного, равного

$$x = \frac{\eta}{1 + \mu_\nu} \quad *).$$

Поэтому вместо уравнения (144) получаем:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x \varphi(x) \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K(x') dx', \quad (145)$$

где функция $K(x)$ определяется равенством

$$K(x) = 2 \int_{\nu(x)}^{\infty} \mu_\nu \sigma_\nu d\nu, \quad (146)$$

причем $\nu(x) = \nu_0$, если $x < \frac{1}{1 + \mu_{\nu_0}}$, и $\frac{1}{1 + \mu_{\nu(x)}} = x$, если $x > \frac{1}{1 + \mu_{\nu_0}}$ (ν_0 — центральная частота линии).

После нахождения величины $p(0, \nu, \eta)$ можно определить и величину $p(z; \nu, \eta)$ из уравнения (137). Из этого уравнения видно, что величина $p(z, \nu, \eta)$ может быть представлена в форме

$$p(z, \nu, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_\nu \Phi(z, x). \quad (147)$$

Подставляя (147) в (137), находим следующее уравнение для определения функции $\Phi(z, x)$:

$$\frac{\partial \Phi(z, x)}{\partial z} = -\frac{x}{x} \Phi(z, x) + \frac{\lambda}{2} \varphi(x) \int_0^1 \Phi(z, x') K(x') \frac{x}{x'} dx'. \quad (148)$$

Вводя обозначение

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Phi(z, x') K(x') \frac{x}{x'} dx' = G(z) \quad (149)$$

*) Здесь через x обозначена иная величина, чем в предыдущих параграфах. Мы не стали менять обозначений, принятых в астрофизической литературе.

и используя тот факт, что $\Phi(0, x) = \varphi(x)$, из (148) получаем:

$$\Phi(z, x) = \varphi(x) e^{-\frac{\kappa}{x} z} + \varphi(x) \int_0^z G(z') e^{-\frac{\kappa}{x}(z-z')} dz'. \quad (150)$$

Таким образом, определение величины $p(z, \nu, \eta)$ сводится к нахождению функции $G(z)$. Что же касается этой последней, то она может быть найдена из следующего интегрального уравнения типа Вольтерра, вытекающего из (149) и (150):

$$G(z) = N(z) + \int_0^z G(z') N(z-z') dz', \quad (151)$$

где

$$N(z) = \kappa \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(x) e^{-\frac{\kappa}{x} z} K(x) dx. \quad (152)$$

Нахождение решения уравнения (151) в принципе не составляет труда. Однако мы не будем на этом останавливаться, так как многие задачи о свечении данной среды могут быть решены и без нахождения величины $p(z, \nu, \eta)$ в конечном виде, а путем использования уравнения (137). В частности, таким путем решается и задача о контурах линий в звездных спектрах, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

§ 7. Контурные линии поглощения при полностью некогерентном рассеянии

Задача об образовании линий поглощения в звездных спектрах в случае диффузии излучения без перераспределения по частотам (т. е. при некогерентном рассеянии) была рассмотрена в §§ 4 и 5 главы VI. Уравнение переноса излучения в указанном случае имеет вид

$$\eta \frac{dI_{\nu}(z, \eta)}{dz} = (\sigma_{\nu} + \kappa) I_{\nu}(z, \eta) - (1 - \epsilon) \frac{\sigma_{\nu}}{2} \int_{-1}^{+1} I_{\nu}(z, \eta') d\eta' - \\ - (\kappa + \epsilon \sigma_{\nu}) B_{\nu}^*(T). \quad (153)$$

Аналогично может быть записано уравнение переноса излучения в случае полного перераспределения по частотам (или, как говорят, при полностью некогерентном рассеянии):

$$\eta \frac{dI_{\nu}(z, \eta)}{dz} = (\sigma_{\nu} + \kappa) I_{\nu}(z, \eta) - (1 - \varepsilon) \frac{\sigma_{\nu}}{2} \int_0^{\infty} \sigma_{\nu'} dv' \int_{-1}^{+1} I_{\nu'}(z, \eta') d\eta' - (\kappa + \varepsilon\sigma_{\nu}) B_{\nu}^*(T). \quad (154)$$

Определение контура линии поглощения состоит в нахождении величины $I_{\nu}(0, \eta)$ из уравнения (153) или (154).

Однако величина $I_{\nu}(0, \eta)$ может быть также найдена при помощи вероятности выхода кванта из среды. В главе VI это было сделано для случая когерентного рассеяния света. Теперь таким же путем мы найдем контур линии поглощения в случае полностью некогерентного рассеяния света.

Для определения величины $I_{\nu}(0, \eta)$ по формуле (135) надо предварительно найти величину $L(z)$. В данном случае источники излучения находятся внутри среды, причем количество энергии в частоте ν , излучаемое элементарным объемом с сечением 1 см^2 и толщиной dz в единице телесного угла за 1 сек , равно

$$(\kappa + \varepsilon\sigma_{\nu}) B_{\nu}^*(T) dz. \quad (155)$$

Мы примем, как это обычно делается, что

$$B_{\nu}^*(T) = B_0(1 + \beta\tau),$$

где τ — оптическая глубина в непрерывном спектре, или, так как $\tau = \kappa z$, то

$$B_{\nu}^*(T) = B_0(1 + \kappa\beta z). \quad (156)$$

В интересах общности величину $\kappa + \varepsilon\sigma_{\nu}$ мы заменим произвольной функцией от частоты γ_{ν} . Таким образом, для количества энергии, излучаемого элементарным объемом, вместо выражения (155) будем иметь:

$$\gamma_{\nu} B_0(1 + \kappa\beta z) dz. \quad (157)$$

При принятом распределении источников излучения в звездной атмосфере величина $L(z)$ будет равна

$$L(z) = 2\pi B_0 \int \sigma_{\nu'} \gamma_{\nu'} d\nu' \int_0^1 \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\infty} (1 + \kappa\beta z') e^{-\frac{\sigma_{\nu'} + \kappa}{\eta'} |z - z'|} dz', \quad (158)$$

или после интегрирования по z'

$$L(z) = 2\pi B_0 \int \frac{\sigma_{\nu'} \gamma_{\nu'} d\nu'}{\sigma_{\nu'} + \kappa} \left[2(1 + \kappa\beta z) - \int_0^1 e^{-\frac{\sigma_{\nu'} + \kappa}{\eta'} z} \left(1 - \frac{\kappa\beta\eta'}{\sigma_{\nu'} + \kappa} \right) d\eta' \right]. \quad (159)$$

Сделаем здесь, как и раньше, замену

$$x' = \frac{\kappa\eta'}{\kappa + \sigma_{\nu'}}.$$

Тогда формула (159) примет вид:

$$L(z) = 4\pi B_0 (1 + \kappa\beta z) \int \frac{\sigma_{\nu'} \gamma_{\nu'} d\nu'}{\sigma_{\nu'} + \kappa} - 2\pi B_0 \int_0^1 e^{-\frac{\kappa}{x'} z} (1 - \beta x') \bar{K}(x') dx', \quad (160)$$

где

$$\bar{K}(x) = 2 \int_{\nu(x)}^{\infty} \frac{\gamma_{\nu}}{x} \sigma_{\nu} d\nu, \quad (161)$$

а нижний предел интегрирования $\nu(x)$ определяется так же, как в интеграле (146).

Прежде чем воспользоваться формулой (135), заметим, что при написании ее мы приняли во внимание лишь излучение, рассеянное средой. Однако в тех случаях, когда источники излучения паходятся внутри среды, необходимо учитывать также излучение, выходящее наружу непосредственно от этих источников. В рассматриваемом

случае интенсивность этого излучения равна

$$\gamma_{\nu} B_0 \int_0^{\infty} (1 + \kappa \beta z) e^{-\frac{\sigma_{\nu} + \kappa}{\eta} z} \frac{dz}{\eta},$$

или после интегрирования

$$\frac{\gamma_{\nu}}{\kappa} B_0 \frac{1 + \beta x}{1 + \mu_{\nu}}.$$

Полученное выражение надо добавить в правую часть (135). Используя также соотношение (147), приходим к следующей формуле для определения интенсивности излучения, выходящего из звездной атмосферы:

$$I_{\nu}(0, \eta) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\sigma_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} \int_0^{\infty} L(z) \Phi(z, x) \frac{dz}{x} + \frac{\gamma_{\nu}}{\kappa} B_0 \frac{1 + \beta x}{1 + \mu_{\nu}}. \quad (162)$$

Теперь нам надо подставить в формулу (162) ранее найденное выражение (159) для $L(z)$. Выполняя это, получаем:

$$\begin{aligned} I_{\nu}(0, \eta) = & \frac{\gamma_{\nu}}{\kappa} B_0 \frac{1 + \beta x}{1 + \mu_{\nu}} + \\ & + \lambda \frac{\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} B_0 \int \frac{\sigma_{\nu'} \gamma_{\nu'} d\nu'}{\sigma_{\nu'} + \kappa} \int_0^{\infty} (1 + \kappa \beta z) \Phi(z, x) \frac{\kappa dz}{x} - \\ & - \frac{\lambda}{2} \frac{\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} B_0 \int_0^1 (1 - \beta x') \bar{K}(x') dx' \int_0^{\infty} e^{-\frac{\kappa}{x'} z} \Phi(z, x) \frac{\kappa dz}{x}. \end{aligned} \quad (163)$$

Входящие в (163) интегралы легко находятся из уравнения (148), служащего для определения функции $\Phi(z, x)$. Из указанного уравнения имеем:

$$\frac{\kappa}{x} \int_0^{\infty} \Phi(z, x) dz = \frac{\varphi(x)}{A} \quad (164)$$

и

$$\frac{x^2}{x} \int_0^{\infty} \Phi(z, x) z dz = x \frac{\varphi(x)}{A} + \frac{\lambda}{2} \frac{\varphi(x)}{A^2} \int_0^1 \varphi(x') K(x') x' dx'. \quad (165)$$

Здесь обозначено

$$A = 1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(x) K(x) dx. \quad (166)$$

Из уравнения (145), определяющего функцию $\varphi(x)$, находим:

$$A = \sqrt{1 - \lambda \int \frac{\sigma_v^2}{\sigma_v + x} dv}. \quad (167)$$

Что же касается последнего интеграла по z в (163), то он уже был найден нами раньше. Из (139) и (143) следует, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{x'} z} \Phi(z, x) \frac{x}{x'} dz = \frac{\varphi(x) \varphi(x')}{x + x'} x'. \quad (168)$$

Подставляя только что найденные значения интегралов в формулу (163), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{I_\nu(0, \eta)}{B_0} &= \lambda \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \frac{\varphi(x)}{A} \left[1 + \beta x + \beta \frac{\lambda}{2A} \int_0^1 \varphi(x') K(x') x' dx' \right] \times \\ &\times \int \frac{\sigma_{\nu'} \gamma_{\nu'} dv'}{\sigma_{\nu'} + x} - \frac{\lambda}{2} \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \varphi(x) \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x + x'} (1 - \beta x') \bar{K}(x') x' dx' + \\ &+ \frac{\gamma_\nu}{x} \frac{1 + \beta x}{1 + \mu_\nu}. \quad (169) \end{aligned}$$

Этой формулой и дается искомое выражение для интенсивности излучения, выходящего из звезды.

При выводе формулы (169) не делалось никаких предположений относительно вида функции γ_ν . Предположим теперь, что $\gamma_\nu = x + \epsilon \sigma_\nu$. Кроме того, будем считать, что $\lambda = 1 - \epsilon$. В этом частном случае формула (169) даст нам выражение для $I_\nu(0, \eta)$, соответствующее решению уравнения (154).

Производя подстановку указанных значений γ_ν и λ в формулу (169), находим:

$$\frac{I_\nu(0, \eta)}{B_0} = \frac{1 + \varepsilon\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} (1 + \beta x) + (1 - \varepsilon) \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \varphi(x) \left\{ A(1 + \beta x) + \right. \\ \left. + A_1\beta - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} (1 - \beta x') [K_1(x') + \varepsilon K(x')] x' dx' \right\}. \quad (170)$$

Здесь

$$A = \sqrt{\int \frac{1 + \varepsilon\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \sigma_\nu d\nu}, \quad (171)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \int_0^1 \varphi(x') K(x') x' dx' \quad (172)$$

и

$$K_1(x) = 2 \int_{\nu(x)}^{\infty} \sigma_\nu d\nu, \quad (173)$$

причем нижний предел интегрирования $\nu(x)$ берется такой же, как и при определении функции $K(x)$.

Величина $I_\nu(0, \eta)$ представляет собой интенсивность излучения, выходящего из звезды в частоте спектральной линии. Однако при изучении звездных спектров обычно находят отношение этой величины к интенсивности излучения, выходящего из звезды в соседнем месте непрерывного спектра. Очевидно, что указанное отношение равно

$$r_\nu(\eta) = \frac{I_\nu(0, \eta)}{B_0(1 + \beta\eta)}. \quad (174)$$

Подставляя (170) в (174) и производя небольшие преобразования, получаем:

$$r_\nu(\eta) = \frac{1}{1 + \beta\eta} \left\{ \frac{1 + \varepsilon\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} + \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \Psi(x) + \right. \\ \left. + \beta \left[\frac{1 + \varepsilon\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} x + \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \Psi_1(x) \right] \right\}, \quad (175)$$

где

$$\Psi(x) = (1 - \varepsilon) \varphi(x) \left\{ A - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} [K_1(x') + \varepsilon K(x')] x' dx' \right\}, \quad (176)$$

$$\Psi_1(x) = (1 - \varepsilon) \varphi(x) \left\{ Ax + A_1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} [K_1(x') + \varepsilon K(x')] x'^2 dx' \right\}. \quad (177)$$

В случае изотермической атмосферы ($\beta = 0$) и отсутствия флуоресценции ($\varepsilon = 0$) формула (175) дает:

$$r_\nu(\eta) = \frac{1}{1 + \mu_\nu} + \frac{\mu_\nu}{1 + \mu_\nu} \varphi(x) \left[A_0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K_1(x') x' dx' \right], \quad (178)$$

где

$$A_0 = \sqrt{\int \frac{\sigma_\nu d\nu}{1 + \mu_\nu}} = \sqrt{\int_0^1 K_1(x) dx}. \quad (179)$$

Формула (178) была впервые найдена в работе автора [8] путем использования «принципа инвариантности». Затем Басбридж [9] дала обобщение этой формулы на случай линейной зависимости $B_\nu^*(T)$ от τ , т. е. получила частный случай формулы (175) при $\varepsilon = 0$. Формула (175) принятым здесь способом была получена автором [10]. Очевидно, что этим способом легко можно получить еще более общее выражение для величины $r_\nu(\eta)$, учитывающее любое число членов в разложении $B_\nu^*(T)$ по степеням τ , однако на этом мы останавливаться не будем.

Следует отметить, что в теории образования линий поглощения при когерентном рассеянии иногда рассматривается уравнение (153) с последним членом $(x + Q\varepsilon\sigma_\nu) B_\nu^*(T)$ вместо $(x + \varepsilon\sigma_\nu) B_\nu^*(T)$. Введением множителя Q здесь учитывается возможное отличие интенсивности излучения, вызывающего флуоресценцию, от интенсивности излучения,

определяемой формулой Планка. При полностью некогерентном рассеянии можно рассматривать аналогичным образом измененное уравнение (154). Величина $I_\nu(0, \eta)$, соответствующая этому случаю, получается из (169) при $\lambda = 1 - \epsilon$ и $\gamma_\nu = \kappa + Q\epsilon\sigma_\nu$.

Дадим пример вычисления контуров линий поглощения по формуле (175). Мы будем считать, что коэффициент поглощения в линии определяется затуханием излучения и эффектом Доплера, т. е. дается формулой (10). Так как величина σ_ν должна удовлетворять условию (134), то надо принять $\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Для параметра a , являющегося отношением естественной ширины к доплеровской ширине, возьмем значение $a = 0,01$. Далее надо задать отношение коэффициента поглощения в центре линии к коэффициенту поглощения в непрерывном спектре. Для сильных линий это отношение очень велико. Мы при-

мем $\mu_{\nu_0} = \frac{\sigma_{\nu_0}}{\kappa} = 10^4$.

Результаты вычислений для данного случая содержатся в таблице 34 (стр. 306). Сначала приведены значения функций $K(x)$ и $K_1(x)$, определенных формулами (146) и (173). Затем даны значения функции $\varphi(x)$, полученные путем численного решения уравнения (145) при трех значениях параметра ϵ ($\epsilon = 0$; 0,001 и 0,01). В последних столбцах таблицы приведены значения функций $\Psi(x)$ и $\Psi_1(x)$, вычисленные по формулам (176) и (177).

При помощи формулы (175) и таблицы 34 можно найти для рассматриваемого случая контуры линий поглощения на любых расстояниях $a\sigma\cos\eta$ от центра диска. Для этого надо сначала при заданном значении η определить значения $x = \frac{\eta}{1 + \mu_\nu}$ для разных частот ν и найти затем по таблице 34 значения функций $\Psi(x)$ и $\Psi_1(x)$. После этого по формуле (175) могут быть определены контуры линий для принятого значения параметра β . Примеры вычисленных таким путем контуров линий будут приведены ниже.

Вспомогательные функции (для случая $\alpha=0,01$, $\mu_{\nu_0}=10^4$)

x	$K(x)$	$K_1(x)$	$\varphi(x)$			$\Psi(x)$			$\Psi_1(x)$		
			$\epsilon=0$	$\epsilon=0,001$	$\epsilon=0,01$	$\epsilon=0$	$\epsilon=0,001$	$\epsilon=0,01$	$\epsilon=0$	$\epsilon=0,001$	$\epsilon=0,01$
0	7000	1,00	1,0	1,0	1,0	0,024	0,038	0,09	0,006	0,005	0,003
0,000507	7000	1,00	1,6	1,5	1,6	0,038	0,059	0,14	0,010	0,008	0,004
0,000101	5700	0,87	1,9	1,9	1,9	0,047	0,073	0,18	0,012	0,010	0,005
0,000127	2300	0,49	2,1	2,0	2,1	0,052	0,080	0,19	0,013	0,011	0,005
0,000152	1400	0,37	2,3	2,1	2,3	0,056	0,086	0,21	0,014	0,012	0,006
0,000304	250	0,14	3,1	2,8	3,1	0,075	0,115	0,27	0,019	0,016	0,007
0,000457	100	0,088	3,7	3,2	3,6	0,090	0,14	0,32	0,023	0,019	0,009
0,000914	21	0,040	5,0	4,2	4,9	0,125	0,19	0,42	0,032	0,026	0,011
0,00137	88,9	0,027	6,1	4,8	5,8	0,15	0,23	0,48	0,039	0,031	0,013
0,00274	2,1	0,014	8,1	5,8	7,7	0,20	0,30	0,58	0,052	0,041	0,017
0,00412	0,90	0,010	9,5	6,4	8,9	0,24	0,35	0,64	0,062	0,050	0,020
0,00824	0,26	0,0060	12	7,2	11	0,31	0,43	0,73	0,079	0,062	0,025
0,0123	0,115	0,0048	14	7,7	12	0,35	0,48	0,77	0,091	0,071	0,030
0,0246	0,034	0,0035	16	8,2	14	0,43	0,57	0,83	0,11	0,089	0,042
0,0370	0,019	0,0031	18	8,5	15	0,48	0,62	0,86	0,13	0,10	0,054
0,0740	0,0085	0,0025	20	8,8	16	0,56	0,69	0,89	0,17	0,14	0,090
0,111	0,0053	0,0022	21	8,9	17	0,61	0,73	0,92	0,20	0,17	0,125
0,222	0,0018	0,0016	23	9,1	18	0,70	0,81	0,94	0,30	0,28	0,23
0,333	0,0075	0,0012	24	9,2	19	0,76	0,85	0,95	0,40	0,38	0,34
0,667	0,00010	0,0006	25	9,3	20	0,84	0,90	0,96	0,72	0,70	0,67
1,000	0	0	26	9,3	20	0,88	0,93	0,97	1,04	1,03	1,00

§ 8. Сравнение контуров линий

Представляет интерес сравнение контуров линий в звездных спектрах, образованных при когерентном и при полностью некогерентном рассеянии света.

Выражение для величины $r_{\nu}(\eta)$ в случае полностью некогерентного рассеяния мы возьмем в форме (175). Соответствующее выражение для $r_{\nu}(\eta)$ при когерентном рассеянии дается формулой (109) главы VI при $\beta_2 = 0$ и $Q = 1$. Оно имеет вид

$$r_{\nu}(\eta) = \frac{\varphi_{\nu}(\eta)}{(1 + \beta\eta)(1 + \mu_{\nu})} \left[(1 + \mu_{\nu} + \beta\eta) \left(\frac{1 + \varepsilon\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} \right)^{1/2} + \frac{\beta}{2}(1 - \varepsilon) \frac{\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} \alpha_{\nu 1} \right], \quad (180)$$

где функция $\varphi_{\nu}(\eta)$ определена уравнением (50) главы VI при $\lambda_{\nu} = (1 - \varepsilon) \frac{\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}}$, а $\alpha_{\nu 1}$ — ее первый момент.

Мы сравним сначала центральные интенсивности линий, затем поведение величины $r_{\nu}(\eta)$ во внутренних частях линий и, наконец, поведение $r_{\nu}(\eta)$ во внешних частях линии.

Центральные интенсивности линий. Как известно, проблема центральных интенсивностей линий поглощения является одной из труднейших в теории образования звездных спектров. Первоначальная теория, основанная на гипотезе о когерентном рассеянии и не учитывающая флуоресценции, приводит к слишком малым значениям центральных интенсивностей по сравнению с наблюдаемыми. Учет флуоресценции значительно увеличивает теоретические значения центральных интенсивностей, однако для полного согласия с наблюдениями приходится вводить уже упоминавшийся выше гипотетический множитель Q , превосходящий единицу. Поэтому представляет интерес вопрос, к каким значениям центральных интенсивностей приводит теория образования линий поглощения при полностью некогерентном рассеянии.

Рассмотрим сначала случай $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$. В этом случае при полностью некогерентном рассеянии величина $r_{\nu}(\eta)$ определяется формулой (178).

Сравним между собой два члена в прямых скобках формулы (178). Для этого предварительно найдем верхнюю границу функции $\varphi(x)$. Из уравнения (145) при помощи (166) получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} x \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K(x') dx'} < \\ &< \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \varphi(x') K(x') dx'} = \frac{1}{A}. \end{aligned} \quad (181)$$

Учитывая (181), при $\lambda = 1$ находим:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K_1(x') x' dx' < \frac{1}{2A_0} \int_0^1 K_1(x') dx' = \frac{1}{2} A_0. \quad (182)$$

Итак, второй член в прямых скобках, по крайней мере, в два раза меньше первого. Следовательно, им можно пренебречь при оценке порядка центральной интенсивности линии поглощения. Это нам выгодно потому, что для вычисления второго члена надо знать функцию $\varphi(x)$, для вычисления же первого — не надо.

Что касается множителя перед прямой скобкой, то при очень малых значениях x (а в центре линии $x \leq \frac{1}{1 + \mu_{\nu_0}}$) этот множитель по порядку близок к единице. Таким образом, мы получаем следующую оценку для центральной интенсивности линии поглощения при полностью некогерентном рассеянии:

$$r_{\nu_0} \approx A_0. \quad (183)$$

Вычисляя A_0 при коэффициенте поглощения σ_{ν} , даваемом формулой (10), находим:

$$r_{\nu_0} \approx \left(\frac{a}{\mu_{\nu_0}} \right)^{1/4} \quad (184)$$

При когерентном рассеянии для оценки r_{ν_0} надо использовать формулу (180). В случае $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$ она дает

$$r_{\nu}(\eta) = \frac{\varphi_{\nu}(\eta)}{\sqrt{1 + \mu_{\nu}}}, \quad (185)$$

и так как функция $\varphi_{\nu}(\eta)$ меняется в небольших пределах (от 1 до 2,9), то для порядка центральной интенсивности получаем:

$$r_{\nu_0} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu_{\nu_0}}}. \quad (186)$$

Мы видим, что выражения для величины r_{ν_0} при когерентном и полностью некогерентном рассеянии резко отличаются друг от друга. Подставляя в формулы (184) и (186) значения $a = 0,01$ и $\mu_{\nu_0} = 10^4$, находим, что отношение центральных интенсивностей при полностью некогерентном и когерентном рассеянии равно примерно 3 (точное значение этого отношения 2,5 на краю диска и 1,6 в центре диска). Однако указанное отношение тем больше, чем больше значения параметров a и μ_{ν_0} . Например, в случае $a = 0,01$ и $\mu_{\nu_0} = 10^6$ это отношение будет порядка 10. Таким образом, центральные интенсивности линий поглощения при полностью некогерентном рассеянии могут быть гораздо больше, чем при когерентном рассеянии.

Будем теперь считать, что в формулах (175) и (180) $\varepsilon = 0$, но $\beta \neq 0$. Как видно из формулы (180), наличие в ней членов, содержащих множитель β , совершенно не влияет на величину центральной интенсивности линии поглощения. Это объясняется тем, что при когерентном рассеянии центральные части линии образуются в самых верхних слоях атмосферы, где склонение величины $B_{\nu}^*(T)$ от значения B_0 очень невелико. Однако при некогерентном рассеянии энергия, поглощенная во внешних частях линий, может излучаться в ее центральных частях (и притом — при предположении о полностью некогерентном рассеянии — с очень большой вероятностью). Поскольку же количество указанной энергии сильно зависит от того

является величина $B_{\nu}^*(T)$ постоянной или линейной функцией от τ , то учет членов с множителем β в формуле (180) заметно отражается на значении центральной интенсивности линии поглощения. Например, из таблицы 34 (стр. 306) видно, что при $\epsilon = 0$ и при малых значениях x значения функции $\Psi_1(x)$ приблизительно в четыре раза меньше значений функции $\Psi(x)$. Это значит, что величина $I_{\nu}(0, \eta)$ при $\beta = 4$ будет примерно вдвое больше, чем при $\beta = 0$. Следовательно, учет отклонения величины $B_{\nu}^*(T)$ от значения B_0 еще более увеличивает центральные интенсивности линий поглощения в случае некогерентного рассеяния по сравнению со случаем когерентного рассеяния.

Допустим, наконец, что $\epsilon \neq 0$, т. е. рассмотрим вопрос о влиянии флуоресценции на центральные интенсивности линий поглощения.

При некогерентном рассеянии, как и раньше, для оценки порядка величины r_{ν_0} мы возьмем только первый член в фигурных скобках формулы (170) и отбросим остальные. Тогда приближенно получаем:

$$r_{\nu_0} \approx \frac{\varphi(x_0)}{1 + \beta\eta} \sqrt{\int \frac{1 + \epsilon\mu_{\nu}}{1 + \mu_{\nu}} \sigma_{\nu} d\nu} \quad (187)$$

где $x_0 = \frac{\eta}{1 + \mu_{\nu_0}}$, или, производя интегрирование,

$$r_{\nu_0} \approx \frac{\varphi(x_0)}{1 + \beta\eta} \sqrt{\left(\frac{a}{\mu_{\nu_0}}\right)^{1/2} + \epsilon}. \quad (188)$$

Что касается отброшенных членов, то они не могут повлиять на порядок величины r_{ν_0} . В самом деле,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K_1(x') x' dx' < \frac{1}{2A} \int_0^1 K_1(x') dx' = \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 A \quad (189)$$

и

$$\frac{\epsilon}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(x')}{x+x'} K(x') x' dx' \leq \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 \varphi(x') K(x') dx' < \frac{\epsilon}{1-\epsilon}. \quad (190)$$

Другие отброшенные члены (содержащие множитель β) могут несколько увеличить значение величины r_{ν_0} , даваемое формулой (188). Однако так как множитель β не может быть очень большим, то их учет не изменит порядка r_{ν_0} (см. для примера табл. 34).

При когерентном рассеянии из формулы (180) находим:

$$r_{\nu_0} \approx \frac{\varphi_{\nu_0}(\eta)}{1 + \beta\eta} \sqrt{\frac{1}{\mu_{\nu_0}} + \epsilon}. \quad (191)$$

Сравним между собой формулы (188) и (191). Принимая во внимание, что функции $\varphi(x)$ и $\varphi_{\nu}(\eta)$ равны единице на краю диска звезды и возрастают более или менее одинаково при переходе от края к центру, мы приходим к следующему заключению.

При $\epsilon = 0$, как уже было установлено раньше, центральные интенсивности при некогерентном рассеянии будут значительно больше, чем при когерентном рассеянии [разумеется, если $\left(\frac{a}{\mu_{\nu_0}}\right)^{1/2} \gg \frac{1}{\mu_{\nu_0}}$, что безусловно справедливо для сильных линий].

Если

$$\epsilon \ll \left(\frac{a}{\mu_{\nu_0}}\right)^{1/2}, \quad (192)$$

то величина r_{ν_0} при некогерентном рассеянии остается почти такой же, как в случае $\epsilon = 0$, в то время как при когерентном рассеянии она может заметно возрасти. Тем не менее при выполнении неравенства (192) значения величины r_{ν_0} при некогерентном рассеянии будут превосходить значения этой величины при когерентном рассеянии.

Если

$$\epsilon \gg \left(\frac{a}{\mu_{\nu_0}}\right)^{1/2}, \quad (193)$$

то флуоресценция играет преобладающую роль в формировании центральных частей линии поглощения не только при когерентном, но и при некогерентном рассеянии. В этом случае значения величины r_{ν_0} при когерентном и некогерентном рассеянии будут одного порядка.

Как уже говорилось, теория когерентного рассеяния без учета флуоресценции дает слишком низкие значения центральных интенсивностей по сравнению с получаемыми из наблюдений. Учет флуоресценции заметно улучшает положение. Однако только тогда, когда ϵ велико, теоретические и наблюдаемые значения величины r_{ν_0} оказываются близкими друг к другу. Если же ϵ мало (а для многих линий солнечного спектра дело так и обстоит), теория и при учете флуоресценции все-таки сильно расходится с наблюдениями.

Полученные выше результаты позволяют сделать вывод, что в вопросе о центральных интенсивностях линий поглощения теория некогерентного рассеяния находится в лучшем согласии с наблюдениями, чем теория когерентного рассеяния. В тех случаях, когда ϵ велико, для величины r_{ν_0} при некогерентном рассеянии получаются примерно такие же значения, как при когерентном рассеянии, т. е. не отличающиеся заметно от наблюдаемых. В тех же случаях, когда ϵ мало, некогерентное рассеяние дает для величины r_{ν_0} более высокие значения, чем когерентное рассеяние, т. е. более близкие к наблюдаемым.

Внутренние части линии. При некогерентном рассеянии контур линии определяется формулой (175). Пользуясь этой формулой и таблицей 34, мы вычислили ряд контуров линий для случая $a = 0,01$, $\mu_{\nu_0} = 10^4$. Эти контуры для центра диска изображены на рис. 21. Там же для сравнения даны контуры линий при когерентном рассеянии, вычисленные по формуле (180).

Из приведенных рисунков видно, что внутренние части линий при когерентном и некогерентном рассеянии заметно различаются между собой. Эта разница особенно велика при больших значениях ϵ . Хотя в этом случае центральные интенсивности близки друг к другу, однако сами линии при некогерентном рассеянии оказываются значительно более резкими, чем при когерентном рассеянии.

Указанный вывод, сделанный из рассмотрения контуров линий в частных случаях, справедлив и при других значениях параметров, входящих в выражение для $r_{\nu}(\eta)$. При когерентном рассеянии величина $r_{\nu}(\eta)$ пропорциональна функции $\varphi_{\nu}(\eta)$, которая почти не меняется в централь-

ных частях линий. Поэтому из формулы (180) следует, что величина $r_{\nu}(\eta)$ почти постоянна в интервале частот, для которых $\mu_{\nu} > \frac{1}{\varepsilon}$, и лишь затем возрастает примерно как $\mu_{\nu}^{-1/2}$. При некогерентном рассеянии, как видно из формулы (179), величина $r_{\nu}(\eta)$ в центральных частях

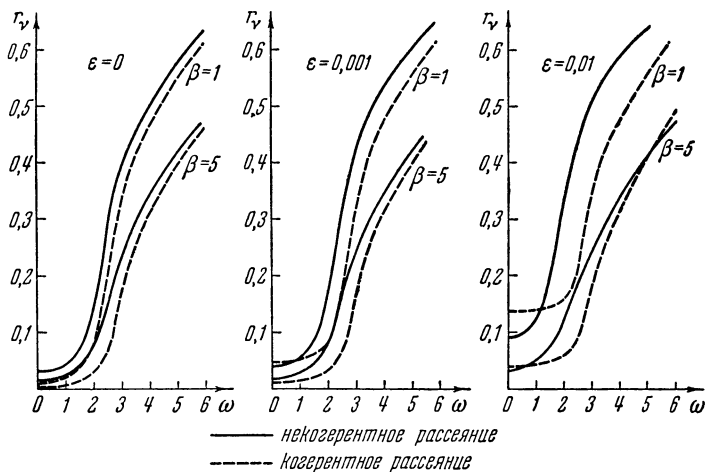


Рис. 21

линии приближенно пропорциональна функции $\varphi(x)$, очень быстро возрастающей с увеличением x . Поэтому быстро возрастает при удалении от центра линии и величина $r_{\nu}(\eta)$. Этим и объясняется бóльшая резкость линии поглощения в случае некогерентного рассеяния по сравнению со случаем когерентного рассеяния.

Наблюдения дают как будто более резкие линии, чем получаемые из теории когерентного рассеяния. Однако детальное сравнение теории с наблюдениями пока затруднительно, так как наблюдения не очень надежны. К тому же представляет трудности определение параметров a , $\mu_{\nu 0}$, ε и β для каждой линии.

Внешние части линии. В самых внешних частях линии величина $r_{\nu}(\eta)$ изменяется пропорционально μ_{ν} .

Поэтому для характеристики линии в указанных частях может быть использована не зависящая от частоты величина

$$C(\eta) = \lim_{\mu_{\nu} \rightarrow 0} \frac{1 - r_{\nu}(\eta)}{\mu_{\nu}}. \quad (194)$$

При когерентном рассеянии

$$C(\eta) = \frac{3}{2} - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)\eta \lg \frac{1 + \eta}{\eta} - \frac{1}{1 + \beta\eta} \left[1 + \frac{\beta}{4}(1 - \varepsilon) \right]. \quad (195)$$

Эта формула может быть получена из формулы (111) главы VI при $Q = 1$ и $\beta_2 = 0$.

При некогерентном рассеянии из формулы (175) находим:

$$C(\eta) = 1 - \varepsilon + \frac{\beta\eta}{1 + \beta\eta} - \frac{\Psi(x) + \beta\Psi_1(\eta)}{1 + \beta\eta}. \quad (196)$$

Следует отметить, что при не очень малых значениях η (скажем, при $\eta > 0,1$) в формулах (176) и (177), служащих для определения функций $\Psi(x)$ и $\Psi_1(x)$, можно приближенно сохранить только первый член в каждой из фигурных скобок и считать $\varphi(\eta) \approx \frac{1}{A}$. Тогда вместо формулы (196) приближенно получаем:

$$C(\eta) \approx \frac{\beta\eta}{1 + \beta\eta}. \quad (197)$$

Разумеется, переход от (196) к (197) справедлив только при значениях β , не очень близких к нулю.

Легко видеть, что формула (197) дает точные значения величины $C(\eta)$ при $\varepsilon = 1$, т. е. когда в уравнениях (153) и (154) отсутствует член, соответствующий рассеянию излучения в спектральной линии. Следовательно, поведение далеких крыльев линии при некогерентном рассеянии приближенно оказывается таким же, как при отсутствии рассеяния.

На рис. 22 даны графики функции $C(\eta)/C(1)$, вычисленные для когерентного рассеяния по формуле (195) и для некогерентного рассеяния по формуле (196) при помощи таблицы 34. Приведенные кривые относятся к случаю $\varepsilon = 0$. Для $\varepsilon = 0,001$ и $\varepsilon = 0,01$ соответствующие кривые мало отличаются от приведенных.

Как при когерентном, так и при некогерентном рассеянии величина $C(\eta)/C(1)$ существенно зависит от параметра β . Указанные графики построены для случаев $\beta=1$ и $\beta=5$, соответствующих двум крайним наблюдаемым областям (красной и фиолетовой) спектра Солнца.

Из рис. 22 видно, что значения величины $C(\eta)/C(1)$ при когерентном и некогерентном рассеянии заметно отличаются друг от друга. Если же сравнивать их с наблюдаемыми значениями $C(\eta)/C(1)$, найденными для многих линий Хаутгастом [11], то оказывается, что при некогерентном

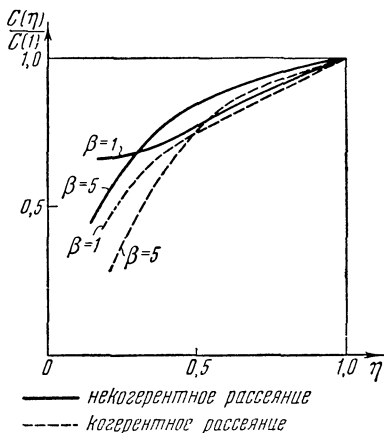


Рис. 22

когерентном рассеянии теория лучше согласуется с наблюдениями, чем при когерентном рассеянии (хотя полного согласия между ними нет). К аналогичным результатам пришел также Саведов [12], вычисливший величину $C(\eta)/C(1)$ при некогерентном рассеянии для другого случая ($a \rightarrow \infty$, $\mu_{\nu_0} = 4 \cdot 10^6$) и другим методом. Хаутгаст [11] из своих наблюдений еще ранее нашел, что изменение далеких крыльев линий при переходе от центра диска к краю может быть объяснено только при некогерентном рассеянии.

В заключение этой главы следует сказать, что в последнее время проблема образования линий поглощения в звездных спектрах привлекает большое внимание астрофизиков. Среди работ этого направления можно отметить работу Стиббса [13], рассмотревшего задачу об образовании линий поглощения при частично когерентном и частично некогерентном рассеянии, работы Миямото [14] и Лабса [15], занимавшихся приближенным решением указанной задачи при некогерентном рассеянии, и др.

ГЛАВА IX

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПОЛЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

В данной главе рассматривается задача о свечении среды, находящейся под воздействием источников излучения переменной интенсивности. В настоящее время эта задача еще мало изучена. Однако с ней приходится часто встречаться в астрофизике и физике.

При решении указанной задачи следует различать два случая. Если среднее время пребывания кванта в среде мало по сравнению с промежутком времени, в течение которого интенсивность источников излучения заметно меняется, то можно считать, что в каждый момент времени в среде осуществляется лучистое равновесие. В этом случае рассмотрение нестационарных процессов свечения сводится к рассмотрению стационарных процессов. Например, чтобы определить изменение свечения неба с течением времени, достаточно найти свечение неба при определенном положении Солнца, а затем в окончательных формулах учесть зависимость зенитного расстояния Солнца от времени. Другим примером может служить свечение оболочек новых звезд. Количество энергии, поступающее от звезды к оболочке, с течением времени меняется (вследствие изменения светимости звезды и удаления оболочки от звезды). Тем не менее расчет спектра оболочки обычно можно выполнять по формулам, полученным при предположении о наличии в оболочке лучистого равновесия.

Однако может иметь место также и противоположный случай, когда в течение среднего времени пребывания кванта в среде происходит сильное изменение интенсивности излучения, возбуждающего свечение среды.

Наиболее ярким примером такого случая является постепенное усиление свечения среды при мгновенном включении источников излучения или высвечивание среды при мгновенном выключении источников излучения. В астрофизике также встречаются подобные явления. В качестве примера можно указать на свечение туманности под действием внезапно вспыхнувшей звезды или высвечивание туманности в течение длительного времени после того, как действие на нее звезды по той или иной причине уже прекратилось. Наличие таких явлений и делает необходимой разработку общей теории нестационарных процессов диффузии излучения.

В настоящей главе задача о нестационарном свечении среды сначала рассматривается при помощи уравнений переноса излучения. Далее та же задача решается путем определения вероятности выхода кванта из среды через некоторый промежуток времени после поглощения его на заданной оптической глубине. В конце главы полученные результаты применяются к свечению новых звезд и туманностей.

§ 1. Уравнение, определяющее функцию $B(\tau, t)$

Как уже сказано, для теории нестационарной диффузии излучения основное значение имеет средняя длительность пребывания кванта в среде. Поэтому прежде всего мы остановимся на причинах, обуславливающих эту длительность.

Во-первых, световой квант затрачивает некоторое время непосредственно на акт рассеяния. Рассматривая рассеяние как поглощение с последующим излучением светового кванта, мы можем сказать, что квант в течение некоторого времени находится в поглощенном состоянии. Обозначим среднее значение этого промежутка времени через t_1 и будем считать, что вероятность излучения кванта в интервале времени от t до $t + dt$ равна

$$e^{-\frac{t}{t_1}} \frac{dt}{t_1}. \quad (1)$$

Во-вторых, световой квант находится в течение некоторого времени в пути между рассеяниями. Как известно, вероятность поглощения кванта на пути от s до $s + ds$ равна

$$e^{-nks} nk ds,$$

где n — число рассеивающих частиц в 1 см^3 и k — коэффициент рассеяния, рассчитанный на одну частицу. Но $s = ct$, где c — скорость света. Поэтому вероятность поглощения кванта в интервале времени от t до $t + dt$ будет равна

$$e^{-\frac{t}{t_2}} \frac{dt}{t_2}, \quad (2)$$

где $t_2 = \frac{1}{cnk}$. Величина t_2 есть среднее время, проводимое квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями.

Важно отметить, что величины t_1 и t_2 обычно оказываются разных порядков. Допустим для примера, что мы имеем дело с рассеянием излучения в спектральной линии. Тогда можно принять $t_1 \approx 10^{-8} \text{ сек}$, $t_2 \approx \frac{100}{n} \text{ сек}$.

Следовательно, величины t_1 и t_2 будут одного порядка при $n \approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Однако, как правило, на практике имеет место один из двух случаев: 1) $t_1 \gg t_2$ при $n \gg 10^{10}$; 2) $t_1 \ll t_2$ при $n \ll 10^{10}$. В условиях физических лабораторий осуществляется, очевидно, первый из этих случаев, так как концентрация атомов не может быть сделана очень малой. Напротив, во многих астрономических объектах (оболочки новых звезд, планетарные туманности, межзвездная среда) осуществляется второй из указанных случаев. В дальнейшем, разумеется, целесообразно рассматривать каждый из этих случаев отдельно.

Чтобы определить среднее время пребывания кванта в данной среде, надо, очевидно, умножить величину $t_1 + t_2$ на среднее число рассеяний, испытываемых квантом. Понятно, что последняя величина может быть получена только из теории диффузии излучения, и она будет определена ниже. Пока же заметим, что среднее число рассеяний кванта в среде может быть очень большим, и поэтому даже при рассеянии излучения в спектральной

линии в лабораторных условиях (т. е. когда $t_1 + t_2 \approx \approx 10^{-8}$ сек) среднее время пребывания кванта в среде может стать величиной, вполне наблюдаемой. Что же касается планетарных туманностей и некоторых других астрономических объектов, то средняя продолжительность пребывания кванта в них может достигать до десятков и сотен лет.

Для решения задачи о нестационарной диффузии излучения мы сначала воспользуемся уравнением переноса излучения. Однако в случае нестационарного поля излучения это уравнение уже нельзя брать в той форме, в какой оно применялось раньше, и потому мы должны вывести более общее уравнение переноса излучения, определяющее изменение интенсивности излучения как с изменением расстояния вдоль луча, так и со временем.

Возьмем элементарную площадку с площадью $d\sigma$, перпендикулярную к направлению излучения. Пусть на площадку падает излучение интенсивности $I(s, t)$ внутри телесного угла $d\omega$ в промежутке времени от t до $t + dt$. Тогда количество энергии, падающее на площадку, будет равно $I(s, t) d\sigma d\omega dt$. На другую площадку с той же площадью $d\sigma$, расположенную на расстоянии ds от первой, будет падать количество энергии, равное $I(s + ds, t - dt) d\sigma d\omega dt$. Разница между указанными количествами энергии создается как за счет поглощения энергии в объеме $d\sigma ds$, так и за счет излучения энергии этим объемом. Обозначая через $\alpha(s)$ объемный коэффициент поглощения и через $\epsilon(s, t)$ — объемный коэффициент излучения, мы можем написать:

$$\begin{aligned} I(s + ds, t + dt) d\sigma d\omega dt - I(s, t) d\sigma d\omega dt = \\ = -\alpha(s) ds I(s, t) d\sigma d\omega dt + \epsilon(s, t) d\sigma ds d\omega dt. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\partial I(s, t)}{\partial s} ds + \frac{\partial I(s, t)}{\partial t} dt = -\alpha(s) ds I(s, t) + \epsilon(s, t) ds,$$

или, учитывая что $ds = c dt$,

$$\frac{\partial I(s, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I(s, t)}{\partial t} = -\alpha(s) I(s, t) + \epsilon(s, t). \quad (3)$$

Это и есть искомое уравнение переноса излучения в случае нестационарного поля излучения.

Для простоты будем считать, что диффузия излучения происходит в одномерной среде. Обозначим через $I_1(\tau, t)$ и $I_2(\tau, t)$ интенсивности излучения, идущего на оптической глубине τ в момент времени t соответственно в сторону возрастающих и убывающих глубин ($d\tau = \alpha ds$). Уравнения переноса излучения в данном случае имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha c} \frac{\partial I_1}{\partial t} &= -I_1 + \frac{\varepsilon}{\alpha}, \\ -\frac{\partial I_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\alpha c} \frac{\partial I_2}{\partial t} &= -I_2 + \frac{\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Полагая $\varepsilon = \alpha B$ и учитывая, что $\alpha = nk$, вместо уравнений (4) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \tau} + t_2 \frac{\partial I_1}{\partial t} &= -I_1 + B, \\ -\frac{\partial I_2}{\partial \tau} + t_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} &= -I_2 + B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Примем, что при элементарном акте рассеяния вероятность «выживания» кванта равна λ , а вероятность излучения через определенный промежуток времени после поглощения определяется приведенным выше законом (1). Тогда функция $B(\tau, t)$ запишется так:

$$B(\tau, t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^t [I_1(\tau, t') + I_2(\tau, t')] e^{-\frac{t-t'}{t_1}} \frac{dt'}{t_1}. \quad (6)$$

Если $n = \text{const}$ (а значит, и $t_2 = \text{const}$), то система уравнений (5) и (6) легко сводится к одному дифференциальному уравнению для определения функции $B(\tau, t)$. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} t_1 \frac{\partial^3 B}{\partial \tau^2 \partial t} + \frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} &= t_1 t_2^2 \frac{\partial^3 B}{\partial t^3} + (2t_1 t_2 + t_2^2) \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \\ &+ [t_1 + (2 - \lambda) t_2] \frac{\partial B}{\partial t} + (1 - \lambda) B. \end{aligned} \quad (7)$$

Разумеется, к уравнению (7) надо добавить еще начальные и граничные условия, в которых должно быть учтено расположение и действие источников света.

После определения из уравнения (7) функции B , из уравнений (5) могут быть найдены величины I_1 и I_2 . В частности, при этом могут быть найдены интересующие нас интенсивности излучения, выходящего из среды, т. е. величины $I_1(\tau_0, t)$ и $I_2(0, t)$.

Как уже говорилось, величины t_1 и t_2 бывают обычно разных порядков. Отметим поэтому два частных случая уравнения (7).

Если $t_1 \gg t_2$, то обозначая $\frac{t}{t_1}$ через u и пренебрегая членами, содержащими $\frac{t_2}{t_1}$, находим:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2 \partial u} + \frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} = \frac{\partial B}{\partial u} + (1 - \lambda) B. \quad (8)$$

В противоположном случае, когда $t_1 \ll t_2$, обозначая $\frac{t}{t_2}$ через u и пренебрегая членами, содержащими $\frac{t_1}{t_2}$, получаем:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 B}{\partial u^2} + (2 - \lambda) \frac{\partial B}{\partial u} + (1 - \lambda) B. \quad (9)$$

Как мы видим, уравнения (8) и (9) напоминают обычное уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \tau^2} = \frac{\partial B}{\partial u} + (1 - \lambda) B. \quad (10)$$

В связи с этим следует отметить, что Комптоном [1] была сделана попытка рассматривать нестационарные процессы диффузии излучения при помощи уравнения (10). Однако Милн [2] показал, что такое рассмотрение может приводить к физическим абсурдным результатам. Учитывая это, он вывел и решил приведенное выше уравнение (8) (при $\lambda = 1$). Здесь мы получили уравнение (7), из которого уравнение Милна вытекает как частный случай. Однако решать это уравнение мы не будем: оно понадобится нам лишь для сравнения с другими уравнениями, которые будут получены ниже.

§ 2. Интегральное уравнение для функции $p(\tau, t)$

Задачу о нестационарном свечении среды мы можем также решить другим способом, основанным на определении вероятности выхода кванта из среды [3].

Обозначим через $p(\tau, t - t') dt$ вероятность того, что световой квант, поглощенный на оптической глубине τ в момент времени t' , выйдет из среды в промежутке времени от t до $t + dt$. Очевидно, что если величина p найдена, то интенсивность выходящего из среды излучения при любых действующих на среду источниках света может быть получена путем некоторого интегрирования. В самом деле, обозначая через $L(\tau, t') d\tau dt'$ количество энергии, приходящее непосредственно от источников света и поглощенное в интервале оптических глубин от τ до $\tau + d\tau$ и в промежутке времени от t' до $t' + dt'$, для интенсивностей выходящего из среды излучения получаем:

$$\left. \begin{aligned} I_2(0, t) &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^t L(\tau, t') p(\tau, t - t') dt', \\ I_1(\tau_0, t) &= \int_0^{\tau_0} d\tau \int_0^t L(\tau, t') p(\tau_0 - \tau, t - t') dt'. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Тот факт, что для решения любой задачи о свечении данной среды требуется знание одной и той же функции $p(\tau, t)$, является большим преимуществом этого метода перед изложенным выше.

Приступая к составлению уравнения, определяющего вероятность выхода кванта из среды, остановимся сначала на случае, когда квант при диффузии в среде находится преимущественно в поглощенном состоянии (т. е. когда $t_1 \gg t_2$). Как и раньше, от переменной t перейдем к новой переменной $u = \frac{t}{t_1}$. Величина $p(\tau, u)$, вообще говоря, складывается из двух частей: из вероятности выхода кванта из среды без рассеяний по пути и из вероятности выхода кванта из среды после ряда рассеяний. В данном случае первая часть будет, очевид-

но, равна $\frac{\lambda}{2} e^{-\tau-u}$. Что касается второй части, то для ее определения надо величину $\frac{\lambda}{2} e^{-|\tau-\tau'|-u'} d\tau' du'$ умножить на $p(\tau', u-u')$ и проинтегрировать это произведение по τ' от 0 до τ_0 и по u' от 0 до u . В результате получаем:

$$p(\tau, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau-u} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau-\tau'|} d\tau' \int_0^u e^{-u'} p(\tau', u-u') du'. \quad (12)$$

Это и есть искомое интегральное уравнение, определяющее функцию $p(\tau, u)$ для случая $t_1 \gg t_2$.

Переходя к другому случаю ($t_2 \gg t_1$), введем новую переменную $u = \frac{t}{t_2}$. Очевидно, что в данном случае световой квант, поглощенный на оптической глубине τ , выходит из среды без рассеяний по пути через время, точно равное τ . Поэтому в выражении для $p(\tau, u)$ соответствующий член будет равен $\frac{\lambda}{2} e^{-\tau} \delta(\tau, u)$, где $\delta(\tau, u)$ — так называемая « δ -функция». Для получения второго члена, учитывающего рассеяние по пути, надо величину $\frac{\lambda}{2} e^{-|\tau-\tau'|} d\tau'$ умножить на $p(\tau', u - |\tau - \tau'|)$ и проинтегрировать это произведение по τ' от 0 до $\frac{\tau+u}{2}$ при $\frac{\tau+u}{2} < \tau_0$ и от 0 до τ при $\frac{\tau+u}{2} > \tau_0$. Мы в качестве верхнего предела возьмем величину $\frac{\tau+u}{2}$, т. е. будем считать, что $\tau_0 = \infty$. Таким образом находим:

$$p(\tau, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau} \delta(\tau, u) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{\tau+u}{2}} e^{-|\tau-\tau'|} p(\tau', u - |\tau - \tau'|) d\tau'. \quad (13)$$

Это есть интегральное уравнение, определяющее функцию $p(\tau, u)$ для случая $t_2 \gg t_1$.

Аналогично может быть составлено интегральное уравнение, определяющее функцию $p(\tau, t)$ и для общего

случая. Это уравнение имеет вид (при $\tau_0 = \infty$)

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau - \frac{t-t_2\tau}{t_1}} + \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{t}{t_2} \right) \int_0^{\tau} e^{-\tau - \tau'} d\tau' \int_{t_2|\tau - \tau'|}^{t-t_2\tau'} e^{-\frac{t'-t_2|\tau - \tau'|}{t_1}} p(\tau', t - t') \frac{dt'}{t_1}. \quad (14)$$

Из полученных выше интегральных уравнений легко могут быть выведены дифференциальные уравнения для определения функции $p(\tau, t)$. Оказывается, что функция $p(\tau, t)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $B(\tau, t)$, при определенных начальных и граничных условиях. Иными словами, функция $p(\tau, t)$ равна функции $B(\tau, t)$ в некоторой частной задаче о свечении среды (см. для сравнения § 2 главы VI).

Приведенные интегральные уравнения для функции $p(\tau, t)$ решаются без особых трудностей. Мы ограничимся нахождением $p(\tau, t)$ для случая $t_1 \gg t_2$, т. е. решением уравнения (12).

Из уравнения (12) следует, что функция $p(\tau, u)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^3 p}{\partial \tau^2 \partial u} + \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = \frac{\partial p}{\partial u} + (1 - \lambda) p \quad (15)$$

при начальном условии

$$p(\tau, 0) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau} \quad (16)$$

и при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial p}{\partial \tau} && \text{при } \tau = 0, \\ p &= -\frac{\partial p}{\partial \tau} && \text{при } \tau = \tau_0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Будем искать частное решение дифференциального уравнения (15) в виде произведения $\Phi(\tau)\Psi(u)$.

Из уравнения (15) получаем:

$$\Phi(\tau) = C \cos x\tau + D \sin x\tau, \quad (18)$$

$$\Psi(u) = e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x^2}\right)u}, \quad (19)$$

где C , D и x — произвольные постоянные. Для выполнения граничных условий необходимо положить

$$Dx = C, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} x\tau_0 = \frac{2x}{x^2 - 1}. \quad (21)$$

Обозначим корни уравнения (21) через $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$. Тогда общее решение уравнения (15), удовлетворяющее граничным условиям, будет иметь вид

$$p(\tau, u) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k (x_k \cos x_k \tau + \sin x_k \tau) e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x_k^2}\right)u}. \quad (22)$$

Коэффициенты D_k находятся из начального условия:

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\tau} = \sum_1^{\infty} D_k (x_k \cos x_k \tau + \sin x_k \tau). \quad (23)$$

Умножая обе части этого соотношения на $x_k \cos x_k \tau + \sin x_k \tau$ и интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 , находим:

$$D_k = \frac{\lambda x_k}{\left[1 + \frac{\tau_0}{2} (1 + x_k^2)\right] (1 + x_k^2)}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (22), получаем:

$$p(\tau, u) = \lambda \sum_1^{\infty} \frac{x_k (x_k \cos x_k \tau + \sin x_k \tau)}{\left[1 + \frac{\tau_0}{2} (1 + x_k^2)\right] (1 + x_k^2)} e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x_k^2}\right)u}. \quad (25)$$

В случае $\tau_0 = \infty$ остается только первое из граничных условий (17), которое выполняется при наложении связи (20) между коэффициентами C и D . Поэтому для

функции $p(\tau, u)$ находим:

$$p(\tau, u) = \int_0^{\infty} D(x) (x \cos x\tau + \sin x\tau) e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x^2}\right)u} dx. \quad (26)$$

Здесь функция $D(x)$ должна быть определена из начального условия:

$$\frac{\lambda}{2} e^{-\tau} = \int_0^{\infty} D(x) (x \cos x\tau + \sin x\tau) dx. \quad (27)$$

Оказывается, что

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \lambda \frac{x}{(1+x^2)^2}. \quad (28)$$

Следовательно, функция $p(\tau, u)$ в случае $\tau_0 = \infty$ будет иметь вид

$$p(\tau, u) = \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^{\infty} (x \cos x\tau + \sin x\tau) e^{-\left(1 - \frac{\lambda}{1+x^2}\right)u} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}. \quad (29)$$

Формулами (25) и (29) и даются выражения для вероятности выхода кванта из среды. Как уже говорилось, при подстановке этих выражений для $p(\tau, u)$ в формулы (11) может быть получено решение любой задачи о свечении среды.

§ 3. Среднее время пребывания кванта в среде

Для практических применений большой интерес представляет определение среднего времени пребывания кванта в среде. Мы обозначим это время через \bar{t} . Очевидно, что

$$\bar{t} = (t_1 + t_2) \bar{z}, \quad (30)$$

где \bar{z} — среднее число рассеяний, испытываемых квантом при его диффузии в среде. Так как величины t_1 и t_2 предполагаются заданными, то задача сводится к определению величины \bar{z} . Разумеется, эта величина не зависит от механизма рассеяния, а зависит только от оптической толщины среды τ_0 и параметра λ (при заданных источниках света).

Чтобы определить величину z для данной среды при любом действующем на нее источнике света, достаточно, очевидно, найти две функции:

$$P(\tau) = \int_0^{\infty} p(\tau, u) du \quad (31)$$

и

$$Z(\tau) = \int_0^{\infty} p(\tau, u) u du. \quad (32)$$

Обозначая через $K(\tau) d\tau$ количество квантов, пришедших от источника света и поглощенных между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$, получаем:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^{\tau_0} Z(\tau) K(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} P(\tau) K(\tau) d\tau}. \quad (33)$$

Для вывода уравнений, определяющих функции $P(\tau)$ и $Z(\tau)$, можно, например, использовать уравнения (12) или (13), определяющие функцию $p(\tau, u)$. Из указанных уравнений легко находим:

$$P(\tau) = \frac{\lambda}{2} e^{-\tau} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau - \tau'|} P(\tau') d\tau', \quad (34)$$

$$Z(\tau) = P(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-|\tau - \tau'|} Z(\tau') d\tau'. \quad (35)$$

Разумеется, уравнения (34) и (35) могли бы быть получены и непосредственно из физических соображений (причем без рассмотрения хода процесса диффузии во времени).

Из интегральных уравнений (34) и (35) следует, что функция $P(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} = (1 - \lambda) P(\tau) \quad (36)$$

при граничных условиях

$$P(0) = P'(0) + \lambda, \quad P(\tau_0) = -P'(\tau_0), \quad (37)$$

а функция $Z(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z(\tau)}{d\tau^2} = (1 - \lambda) Z(\tau) - \lambda P(\tau) \quad (38)$$

при граничных условиях

$$Z(0) = Z'(0) + \lambda, \quad Z(\tau_0) = -Z'(\tau_0). \quad (39)$$

Наибольший интерес для практики представляет случай чистого рассеяния ($\lambda = 1$). В этом случае написанные выше уравнения дают:

$$P(\tau) = \frac{1 + \tau_0 - \tau}{2 + \tau_0}, \quad (40)$$

$$Z(\tau) = 1 + \frac{\tau_0^3 + 3\tau_0^2 - 6}{3(2 + \tau_0)^2} (1 + \tau) - \frac{1 + \tau_0}{2(2 + \tau_0)} \tau^2 + \frac{\tau^3}{6(2 + \tau_0)}. \quad (41)$$

Для получения среднего числа рассеяний при том или ином источнике света найденные выражения для $P(\tau)$ и $Z(\tau)$ надо подставить в формулу (33).

Рассмотрим некоторые примеры. Если источник света находится внутри среды на оптической глубине τ , то для получения среднего числа рассеяний надо просто разделить выражение (41) на выражение (40). Если источники света распределены в среде равномерно, то, согласно формуле (33) для нахождения величины \bar{z} следует проинтегрировать выражения (40) и (41) по τ от 0 до τ_0 и затем разделить одно на другое. В результате получаем:

$$\bar{z} = \frac{24(1 + \tau_0) + 8\tau_0^2 + \tau_0^3}{12(2 + \tau_0)}. \quad (42)$$

Можно также найти среднее число рассеяний, испытанных квантом, прошедшим среду, и квантом, отраженным от среды. Обозначим первое число через \bar{z}_1 , а вто-

рое — через \bar{z}_2 . Легко видеть, что

$$\bar{z}_2 = \frac{\int_0^{\tau_0} Z(\tau) e^{-\tau} d\tau}{\int_0^{\tau_0} P(\tau) e^{-\tau} d\tau} = \frac{Z(0) - P(0)}{P(0) - \frac{\lambda}{2}}, \quad (43)$$

$$\bar{z}_1 = \frac{\int_0^{\tau_0} Z(\tau) e^{-(\tau_0 - \tau)} d\tau}{\int_0^{\tau_0} P(\tau) e^{-(\tau_0 - \tau)} d\tau + e^{-\tau_0}} = \frac{Z(\tau_0) - P(\tau_0)}{P(\tau_0)} \quad (44)$$

(в знаменателе второй формулы мы добавили член $e^{-\tau_0}$ для учета квантов, пропущенных средой без рассеяний).

При помощи полученных выше выражений для $P(\tau)$ и $Z(\tau)$ формулы (43) и (44) дают:

$$\bar{z}_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 + 3\tau_0 + \tau_0^2}{2 + \tau_0}, \quad (45)$$

$$\bar{z}_1 = \frac{\tau_0}{6} \cdot \frac{6 + 6\tau_0 + \tau_0^2}{2 + \tau_0}. \quad (46)$$

Интересно то, что величины \bar{z}_1 и \bar{z}_2 могут быть определены и без знания функции $Z(\tau)$. В самом деле, интеграл

$$\int_0^{\tau_0} Z(\tau) e^{-\tau} d\tau$$

можно рассматривать как интенсивность излучения, выходящего из среды, в которой функция $B(\tau)$ равна $Z(\tau)$. Но в таком случае согласно уравнению (35) величина $\frac{2}{\lambda} P(\tau) d\tau$ будет играть роль количества энергии, приходящей от источников света и поглощенной между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$. Поэтому указанную интенсивность излучения можно записать также в виде

$$\frac{2}{\lambda} \int_0^{\tau_0} P^2(\tau) d\tau.$$

Следовательно, величина \bar{z}_2 будет равна

$$\bar{z}_2 = \frac{\int_0^{\tau_0} P^2(\tau) d\tau}{P(0) - \frac{\lambda}{2}}. \quad (47)$$

Аналогично для величины \bar{z}_1 находим:

$$\bar{z}_1 = \frac{\int_0^{\tau_0} P(\tau) P(\tau_0 - \tau) d\tau}{P(\tau_0)}. \quad (48)$$

Следует отметить, что другой метод для определения среднего числа рассеяний, претерпеваемых квантом в среде, был предложен ранее В. А. Амбарцумяном [4]. Для величины \bar{z} В. А. Амбарцумян получил следующую формулу:

$$\bar{z} = \lambda \frac{\partial \lg I}{\partial \lambda}, \quad (49)$$

где I — интенсивность излучения, выходящего из среды. М. Л. Тер-Микасян [5] вычислил по формуле В. А. Амбарцумяна величины \bar{z}_1 и \bar{z}_2 и пришел к приведенным выше формулам (45) и (46).

В качестве примера применения полученных в этом параграфе формул рассмотрим диффузию L_α -излучения в газовых туманностях. Как известно, L_α -кванты возникают внутри туманности в результате фотопионизации водородных атомов и последующих рекомбинаций. В данном случае для определения среднего числа рассеяний, испытываемых квантом, мы применим формулу (42). При $\tau_0 \gg 1$ указанная формула даст $\bar{z} = \frac{\tau_0^2}{12}$. Чтобы перейти от одномерной среды к трехмерной, надо вместо τ_0^2 писать $3\tau_0^2$ (см. § 2 главы II). Поэтому вместо последней формулы будем иметь $\bar{z} = \frac{\tau_0^2}{4}$. Так как в туманностях $l_1 \ll l_2$, а $l_2 = \frac{1}{nck}$, где k — коэффициент рассеяния, рассчитанный на один атом, то для среднего времени t пребывания

L_α -кванта в туманности получаем:

$$\bar{t} = \frac{\tau_0^2}{4nck}. \quad (50)$$

Можно считать, что $\tau_0 \approx 10^4$ и $n \approx 1$. Поэтому для величины \bar{t} находим значение порядка 300 лет.

В действительности при нахождении величины \bar{t} необходимо учитывать некогерентность рассеяния, а также выход квантов из среды вследствие эффекта Доплера при наличии градиента скорости. В этом случае, как было отмечено в предыдущей главе, значения величины \bar{t} могут оказаться гораздо меньше значений, вычисляемых по формуле (50). Тем не менее и при учете указанных процессов среднее время пребывания L_α -кванта в туманности может остаться довольно большим.

§ 4. Функциональные уравнения для функции $p(\tau, t)$

В § 2 для определения вероятности выхода кванта из среды были составлены и решены интегральные и дифференциальные уравнения. Теперь для нахождения той же величины мы составим функциональные уравнения [6].

Для простоты будем считать, что диффузия квантов происходит в одномерной среде бесконечно большой оптической толщины. При этом ограничимся тем случаем, когда среднее время пребывания кванта в поглощенном состоянии значительно превосходит среднее время пребывания кванта в пути между двумя последовательными рассеяниями (т. е. $t_1 \gg t_2$).

Чтобы получить функциональное уравнение, определяющее функцию $p(\tau, u)$, найдем вероятность выхода кванта из среды с оптической глубины $\tau + \Delta\tau$, т. е. величину $p(\tau + \Delta\tau, u)$. С этой целью выход кванта с глубины $\tau + \Delta\tau$ будем рассматривать как выход кванта с глубины τ с последующим прохождением через дополнительный слой толщины $\Delta\tau$ (без рассеяния или с рассеянием в этом слое). Очевидно, что вероятность

выхода кванта из среды без рассеяния в дополнительном слое равна $p(\tau, u)(1 - \Delta\tau)$. Что же касается вероятности выхода кванта из среды с рассеянием в дополнительном слое, то для ее получения надо величину $p(\tau, u')\Delta\tau$ умножить на $p(0, u - u')du'$ и проинтегрировать это произведение по u' в пределах от 0 до u . В результате находим:

$$p(\tau + \Delta\tau, u) = p(\tau, u)(1 - \Delta\tau) + \Delta\tau \int_0^u p(\tau, u') p(0, u - u') du', \quad (51)$$

откуда

$$\frac{\partial p(\tau, u)}{\partial \tau} = -p(\tau, u) + \int_0^u p(\tau, u') p(0, u - u') du'. \quad (52)$$

Разумеется, уравнение (52) еще не определяет полностью функцию $p(\tau, u)$. Это видно хотя бы из того, что в уравнении (52) не учтен механизм рассеяния. Мы будем считать, что при элементарном акте рассеяния вероятность «выживания» кванта равна λ , а вероятность излучения кванта в интервале времени от u до $u + du$ после поглощения равна $e^{-u} du$. В таком случае для величины $p(0, u)$ получаем:

$$p(0, u) = \frac{\lambda}{2} e^{-u} + \frac{\lambda}{2} \int_0^u e^{-u'} \rho(u - u') du', \quad (53)$$

где

$$\rho(u) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} p(\tau, u) d\tau. \quad (54)$$

Величина $\rho(u) du$ представляет собой вероятность отражения кванта от среды в промежутке времени от u до $u + du$ после падения на нее.

Из уравнений (52), (53) и (54) легко можно получить одно уравнение для определения функции $\rho(u)$. Для этого умножим обе части уравнения (52) на $e^{-\tau} d\tau$ и про-

интегрируем от 0 до ∞ . Сделав это, находим:

$$\begin{aligned} -p(0, u) + p(u) &= \\ &= -p(u) + \int_0^u \rho(u') p(0, u - u') du', \end{aligned} \quad (55)$$

или после дифференцирования по u

$$\begin{aligned} 2p'(u) &= p'(0, u) + \frac{\lambda}{2} p(u) + \\ &+ \int_0^u \rho(u') p'(0, u - u') du'. \end{aligned} \quad (56)$$

Но из уравнения (53) следует, что

$$p'(0, u) + p(0, u) = \frac{\lambda}{2} p(u). \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56), мы и приходим к искомому уравнению, определяющему функцию $p(u)$:

$$p'(u) + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) p(u) = \frac{\lambda}{4} \int_0^u \rho(u') p(u - u') du'. \quad (58)$$

Чтобы решить уравнение (58), применим к нему оператор Лапласа. Обозначив

$$\bar{p}(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} p(u) du, \quad (59)$$

из уравнения (58) получаем:

$$-\frac{\lambda}{4} + s\bar{p}(s) + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\bar{p}(s) = \frac{\lambda}{4} \bar{p}^2(s), \quad (60)$$

или

$$\bar{p}(s) = \frac{2}{\lambda}(s+1) - 1 - \frac{2}{\lambda} \sqrt{(s+1)^2 - \lambda(s+1)}. \quad (61)$$

По обычным правилам операционного исчисления из

уравнения (61) находим:

$$\rho(u) = \frac{2}{\pi} \lambda \int_0^1 e^{-(1-\lambda y)u} \sqrt{y(1-y)} dy. \quad (62)$$

После определения функции $\rho(u)$ аналогично может быть найдена и функция $p(\tau, u)$. Применяв оператор Лапласа к уравнению (52), получаем:

$$\frac{\partial \bar{p}(\tau, s)}{\partial \tau} = -\bar{p}(\tau, s) [1 - \bar{p}(0, s)], \quad (63)$$

откуда

$$\bar{p}(\tau, s) = \bar{p}(0, s) e^{-\tau[1 - \bar{p}(0, s)]}. \quad (64)$$

Но, как следует из подстановки (62) в (53), функция $p(0, u)$ равна

$$p(0, u) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{-(1-\lambda y)u} \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy. \quad (65)$$

Поэтому

$$\bar{p}(0, s) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{1+s}}. \quad (66)$$

Подставляя (66) в (64), находим:

$$\bar{p}(\tau, s) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda}{1+s}} \right) e^{-\tau \sqrt{1 - \frac{\lambda}{1+s}}}. \quad (67)$$

Решение уравнения (67) имеет вид

$$\begin{aligned} p(\tau, u) &= \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 e^{-(1-\lambda)y} \left(\sin \tau \sqrt{\frac{1-y}{y}} + \sqrt{\frac{1-y}{y}} \cos \tau \sqrt{\frac{1-y}{y}} \right) dy. \end{aligned} \quad (68)$$

Сделав здесь замену $y = \frac{1}{1+x^2}$, мы приходим к ранее полученной формуле (29).

При помощи введенной выше функции $\rho(u)$ легко может быть решена любая задача о свечении среды при освещении ее внешними источниками света. Обозначим

через $I_0(u)$ интенсивность излучения, падающего от внешних источников света на границу среды, и через $I(u)$ — интенсивность излучения, выходящего из среды. Очевидно, что величина $I(u)$ следующим образом выражается через величину $I_0(u)$:

$$I(u) = \int_u^u I_0(u') \rho(u - u') du'. \quad (69)$$

Допустим, например, что в течение промежутка времени от $-\infty$ до 0 на границу среды падало излучение постоянной интенсивности I_0 , а затем освещение среды прекратилось. Тогда, как следует из формулы (69), высвечивание среды будет происходить по закону

$$I(u) = I_0 \int_u^\infty \rho(u) du. \quad (70)$$

Значения функции $\rho(u)$ при разных значениях параметра λ приведены в таблице 35 (с погрешностью до $2^0/0$).

4
Таблица 35
Функция $\rho(u)$

$\lambda \backslash u$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,025	0,049	0,074	0,099	0,123	0,148	0,173	0,197	0,222	0,246
0,2	0,020	0,041	0,062	0,084	0,106	0,129	0,152	0,175	0,199	0,223
0,4	0,017	0,035	0,053	0,072	0,092	0,112	0,133	0,156	0,179	0,203
0,6	0,014	0,029	0,045	0,060	0,079	0,098	0,116	0,139	0,161	0,185
0,8	0,011	0,024	0,038	0,052	0,068	0,085	0,104	0,125	0,145	0,168
1,0	0,009	0,020	0,032	0,045	0,059	0,073	0,091	0,111	0,131	0,154
1,2	0,008	0,017	0,027	0,038	0,051	0,065	0,081	0,099	0,119	0,141
1,4	0,006	0,014	0,023	0,033	0,044	0,057	0,072	0,089	0,108	0,129
1,6	0,005	0,012	0,019	0,028	0,038	0,050	0,063	0,079	0,098	0,119
1,8	0,004	0,010	0,016	0,024	0,033	0,044	0,056	0,071	0,089	0,110
2,0	0,004	0,008	0,014	0,020	0,028	0,038	0,050	0,064	0,081	0,102
2,2	0,004	0,007	0,012	0,017	0,024	0,033	0,044	0,053	0,074	0,095
2,4	0,003	0,006	0,010	0,015	0,021	0,029	0,039	0,052	0,068	0,088
2,6	0,003	0,005	0,008	0,013	0,018	0,026	0,035	0,047	0,061	0,082
2,8	0,002	0,004	0,007	0,011	0,016	0,023	0,031	0,043	0,057	0,076
3,0	0,002	0,003	0,006	0,009	0,014	0,020	0,028	0,040	0,053	0,071

Отметим, что при больших значениях u имеет место следующее асимптотическое представление:

$$\rho(u) = \frac{1}{u \sqrt{\pi \lambda u}} e^{-(1-\lambda)u}. \quad (71)$$

§ 5. Высвечивание среды

Знание функции $p(\tau, u)$ позволяет решить любую задачу о свечении рассматриваемой среды. Здесь мы остановимся на задачах о высвечивании среды, т. е. о свечении среды после выключения источников излучения. Как и в предыдущем параграфе, будем считать, что $t_1 \gg t_2$. Время u будем отсчитывать от момента выключения источников излучения.

Поставленная задача может быть легко решена в следующих двух случаях.

1. Нам известно действие источников света за все время, предшествовавшее их выключению. В данном случае для интенсивности излучения, выходящего из среды, имеем:

$$I(u) = \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^0 L(\tau, u') p(\tau, u - u') du', \quad (72)$$

где через $L(\tau, u') d\tau du'$ обозначено количество энергии, пришедшее непосредственно от источников света и поглощенное между оптическими глубинами τ и $\tau + d\tau$ в промежутке времени от u' до $u' + du'$.

Если источники излучения стационарны, т. е. функция L не зависит от u , то вместо формулы (72) получаем:

$$I(u) = \int_0^{\infty} L(\tau) d\tau \int_u^{\infty} p(\tau, u') du'. \quad (73)$$

Допустим, например, что на среду падало внешнее излучение постоянной интенсивности I_0 . Тогда

$$L(\tau) = I_0 e^{-\tau},$$

и из формулы (73) вытекает ранее полученная формула (70).

2. Нам известно распределение энергии в среде в момент выключения источников света. В этом случае

$$I(u) = \int_0^{\infty} R(\tau) p(\tau, u) d\tau, \quad (74)$$

где $R(\tau) d\tau$ представляет собой количество энергии, заключенное между оптическими глубинами от τ до $\tau + d\tau$ в момент времени $u = 0$. Очевидно, что величина $R(\tau)$ связана с функцией $B(\tau)$ соотношением

$$R(\tau) = \frac{2}{\lambda} B(\tau).$$

Допустим в виде примера, что в момент выключения источников света

$$R(\tau) = a_0 + a_1\tau. \quad (75)$$

Тогда согласно формуле (74)

$$I(u) = a_0 A_0(u) + a_1 A_1(u), \quad (76)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} A_0(u) &= \int_0^{\infty} p(\tau, u) d\tau, \\ A_1(u) &= \int_0^{\infty} p(\tau, u) \tau d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Найдем сначала величину $A_0(u)$. Оказывается, что для этого нет необходимости знать функцию $p(\tau, u)$, а достаточно знать лишь функцию $p(0, u)$. В самом деле, из уравнения (52) получаем:

$$-p(0, u) = -A_0(u) + \int_0^u A_0(u') p(0, u - u') du', \quad (78)$$

или, применив оператор Лапласа,

$$\bar{A}_0(s) = \frac{\bar{p}(0, s)}{1 - \bar{p}(0, s)}. \quad (79)$$

Будем считать, что в среде происходит чистое рассеяние. Тогда, подставляя в (79) выражение для $\bar{p}(0, s)$, даваемое формулой (66) при $\lambda = 1$, находим:

$$\bar{A}_0(s) = \sqrt{1 + \frac{1}{s}} - 1. \quad (80)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$A_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{-yu} \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy. \quad (81)$$

Аналогично находится и величина $A_1(u)$. Она оказывается равной

$$A_1(u) = 1 - A_0(u). \quad (82)$$

Следовательно, для искомой интенсивности излучения $I(u)$ получаем:

$$I(u) = a_1 + \frac{a_0 - a_1}{\pi} \int_0^1 e^{-yu} \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy. \quad (83)$$

§ 6. Свечение звезды после отрыва оболочки

Полученная в предыдущем параграфе формула (83) может быть применена к решению одной из задач, связанных с проблемой свечения новых звезд. Как известно, при вспышке новой звезды происходит отрыв от звезды оболочки, которая затем постепенно рассеивается в пространстве. Возникает вопрос, как будет светиться звезда после отрыва оболочки.

Рассмотрим указанную задачу для одномерной среды. Мы будем считать, что среда имеет бесконечно большую оптическую толщину и источники излучения находятся на бесконечно большой оптической глубине. В стационарном состоянии данной среды функция $R(\tau) = 2B(\tau)$ определяется формулой

$$R(\tau) = H(1 + \tau), \quad (84)$$

где H — поток излучения.

Обозначим оптическую толщину оторвавшегося слоя через τ_* . Тогда функция $R(\tau)$ в момент отрыва оболочки будет равна

$$R(\tau) = H(1 + \tau_* + \tau), \quad (85)$$

где τ — оптическая глубина, отсчитываемая от новой границы среды.

После отрыва слоя толщиной τ_* среда будет высвечиваться, причем распределение энергии в среде будет переходить от закона (85) к закону (84).

Если мы применим формулу (83) к случаю, когда распределение энергии в среде дается формулой (84), то, как и следовало ожидать, получим:

$$I(u) = H. \quad (86)$$

В интересующем же нас случае, когда в начальный момент времени распределение энергии в среде дается формулой (85), величина $I(u)$ будет равна

$$I(u) = H \left(1 + \frac{\tau_*}{\pi} \int_0^1 e^{-yu} \sqrt{\frac{1-y}{y}} dy \right). \quad (87)$$

При больших значениях u вместо формулы (87) имеем:

$$I(u) = H \left(1 + \frac{\tau_*}{\sqrt{\pi u}} \right). \quad (88)$$

Формула (87) и дает решение поставленной задачи, т. е. определяет количество энергии, излучаемой средой после отрыва от нее слоя оптической толщиной τ_* .

Чтобы применить полученную формулу к новым звездам, надо знать физические условия в месте отрыва оболочки от звезды. В настоящее время определить их очень трудно. По приближенным оценкам автора [6] оптическая толщина оболочки в момент отрыва оказывается порядка 10^8 , температура в месте отрыва — порядка $5 \cdot 10^6$ градусов, концентрация атомов — порядка $2 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$. При таких условиях величина t_1 оказывается порядка 10^{-8} сек , причем $t_1 \gg t_2$.

Формула (87) позволяет определить изменение светимости самой звезды после отрыва от нее оболочки.

Найдем, например, какой будет светимость звезды через несколько дней после начала вспышки. Принимая в формуле (88) $\tau_* = 10^8$, $u = 10^{14}$ (так как $u = \frac{t}{t_1}$, $t = 10^6$ сек, $t_1 = 10^{-8}$ сек), получаем, что к указанному времени светимость звезды будет примерно только в 10 раз превосходить светимость звезды до вспышки. Иными словами, поверхностная температура звезды, равная в начале вспышки $5\,000\,000^\circ$, понизится к этому времени приблизительно до $100\,000^\circ$. Если же учесть, что после отрыва оболочки начинается истечение материи из звезды, приводящее к образованию протяженной фотосферы, то поверхностная температура звезды будет еще ниже.

По формуле (88) можно также определить количество энергии, излучаемое звездой за данный промежуток времени. От начала вспышки до момента времени u излучается энергия порядка

$$H\tau_* \sqrt{u}. \quad (89)$$

Оценивая по этой формуле количество энергии, излучаемое звездой в течение нескольких первых дней после начала вспышки, получаем, что оно будет порядка 10^{43} эрг.

В действительности в течение указанного промежутка времени новая звезда излучает энергию порядка 10^{44} — 10^{45} эрг. Расхождение между приведенными цифрами нельзя устранить учетом энергии, заключенной в оболочке (она оказывается также порядка 10^{43} эрг). Приходится поэтому допустить, что либо высвечивание звезды происходит более быстро (например, вследствие истечения материи из звезды), либо во время вспышки действуют дополнительные источники энергии.

Для теории свечения новых звезд большой интерес представляет также задача о свечении оболочки в первый период вспышки. Свечение оболочки в это время происходит как за счет энергии, заключенной в оболочке в начале вспышки (оболочка высвечивается), так и за счет энергии, поступающей в оболочку от самой звезды. Трудность задачи состоит в том, что оптические свойства

оболочки с течением времени меняются. В частности, быстро меняется оптическая толщина оболочки (от значения порядка 10^8 в начале вспышки до значения порядка 1 в эпоху максимума блеска). Таким образом, мы встречаемся с задачей о диффузии излучения в среде с переменными оптическими свойствами.

Приближенное решение задачи о свечении расширяющейся оболочки новой звезды в период от начала вспышки до момента максимума блеска было дано в работе автора [?]. При этом считалось, что количество энергии, заключенное в оболочке в начале вспышки, закон изменения светимости самой звезды и закон изменения оптической толщины оболочки являются заданными. В результате было определено изменение с течением времени светимости оболочки, а также ее визуального блеска и поверхностной температуры. Полученные выводы в общем согласуются с результатами наблюдений.

§ 7. Изменение ионизации со временем

В заключение этой главы мы рассмотрим еще одну задачу, связанную с нестационарным свечением газовых туманностей и оболочек звезд с яркими линиями в спектрах (звезд типа Ве, повых звезд и др.).

Как известно, свечение указанных объектов вызывается ультрафиолетовым излучением звезд. Под действием этого излучения происходит ионизация атомов, за ней следуют рекомбинации и «каскадные» переходы электронов с уровня на уровень. Такие переходы и ведут к появлению ярких линий в видимой части спектра. Так, в частности, образуются яркие линии бальмеровской серии водорода. Возникшие при фотоионизации свободные электроны могут также возбуждать атомы при столкновениях. Таким путем появляются запрещенные линии в спектрах туманностей.

Обычно при теоретической интерпретации свечения туманностей и звездных оболочек делается предположение, что в каждый момент времени число рекомбинаций равно числу ионизаций. В большинстве случаев такое предположение не вызывает сомнений вследствие

сравнительно медленного изменения интенсивности высоко-частотного излучения звезды, производящего ионизацию атомов. Однако в некоторых случаях интенсивность ионизирующего излучения меняется довольно быстро, что влечет за собой свечение звездной оболочки при отсутствии ионизационного равновесия.

В этом параграфе мы рассматриваем задачу об изменении степени ионизации атомов в оболочке, находящейся под воздействием переменного излучения звезды. Для простоты будем считать, что температура звезды сначала мала, а затем внезапно сильно возрастает. Тогда до «вспышки» звезды атомы в оболочке не ионизованы, и она не светится. После «вспышки» начинается ионизация атомов в оболочке, влекущая за собой ее свечение. Усиление блеска оболочки продолжается до тех пор, пока не установится ионизационное равновесие, соответствующее возросшей температуре звезды.

При решении данной задачи следует различать два случая: 1) оптическая толщина оболочки за границей основной серии атома до «вспышки» меньше единицы (оболочка малой оптической толщины) и 2) указанная величина больше единицы (оболочка большой оптической толщины). Мы рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Оболочка малой оптической толщины. Пусть $n_1(t)$ и $n^+(t)$ — число нейтральных и ионизованных атомов в 1 см^3 соответственно в момент t , а n — общее число атомов данного элемента 1 см^3 , так что

$$n_1(t) + n^+(t) = n.$$

В начальный момент времени, за который мы примем момент «вспышки», $n_1(0) = n$, $n^+(0) = 0$.

Дифференциальное уравнение, определяющее изменение ионизации атомов с течением времени, имеет вид

$$\frac{dn^+}{dt} = n_1 k H - n_e n^+ \sum_1^{\infty} C_i. \quad (90)$$

Здесь H — число квантов за границей основной серии, падающих от звезды на 1 см^2 оболочки за 1 сек , k — ко-

эффицент поглощения, рассчитанный на один атом, n_e — число свободных электронов в 1 см^3 , $n_e n^+ C_i$ — число захватов свободных электронов ионами на i -й уровень в 1 см^3 за 1 сек .

Значения величин n_1 , n^+ , n_e в равновесном состоянии обозначим соответственно через n_1^* , n_*^+ , n_e^* . Очевидно, что

$$\frac{n_*^+}{n_1^*} = \frac{kH}{n_e^* \sum_1^{\infty} C_i}. \quad (91)$$

Относительно концентрации свободных электронов можно сделать одно из двух предположений: 1) величина n_e задана и не зависит от времени; 2) число свободных электронов равно числу ионов ($n_e = n^+$). Если основным поставщиком свободных электронов является водород, то первое из указанных предположений осуществляется при рассмотрении ионизации атомов с потенциалами ионизации выше водородного, в то время как водород полностью ионизован, а второе — при рассмотрении ионизации водорода.

При выполнении первого предположения решение уравнения (90) имеет вид

$$n^+(t) = n_*^+ \left[1 - e^{-n_e^* \sum_1^{\infty} C_i \left(1 + \frac{n_*^+}{n_1^*}\right) t} \right] \quad (92)$$

а при выполнении второго предположения

$$n^+(t) = n_*^+ \frac{1 - e^{-n_e^* \sum_1^{\infty} C_i \left(2 + \frac{n_*^+}{n_1^*}\right) t}}{1 + \frac{n_1^*}{n_*^+} e^{-n_e^* \sum_1^{\infty} C_i \left(2 + \frac{n_*^+}{n_1^*}\right) t}}. \quad (93)$$

Из формул (92) и (93) видно, что время установления ионизационного равновесия тем больше, чем меньше концентрация свободных электронов n_e^* и степень ионизации $\frac{n_*^+}{n_1^*}$ в равновесном состоянии.

Оболочка большой оптической толщины. В этом случае изменение числа ионизованных атомов в 1 см^3 на расстоянии r от центра звезды определяется уравнением

$$\frac{dn^+}{dt} = n_1 k H e^{-\tau} - n_e n^+ \sum_2^{\infty} C_i, \quad (94)$$

где τ — оптическое расстояние данного места от внутренней границы оболочки, т. е.

$$\tau = \int_{r_1}^r n_1 k dr. \quad (95)$$

В уравнении (94) не учитываются захваты на первый уровень и ионизация под действием диффузного излучения оболочки, так как эти процессы компенсируют друг друга

Для упрощения уравнения (94) будем считать, что толщина оболочки значительно меньше ее расстояния от звезды ($r_2 - r_1 \ll r_1$). В таком случае величина H в оболочке будет постоянна.

Допуская, что $n_e = \text{const}$, и обозначая

$$\frac{kH}{n_e \sum_2^{\infty} C_i} = \gamma, \quad t n_e \sum_2^{\infty} C_i = u, \quad (96)$$

вместо (94) имеем:

$$\frac{dn^+}{du} = n_1 \gamma e^{-\tau} - n^+. \quad (97)$$

Величина γ представляет собой степень ионизации $\frac{n^+}{n_1}$ в равновесном состоянии на внутренней границе оболочки (т. е. при $\tau = 0$).

При сделанных допущениях легко найти оптическое расстояние τ в виде функции от безразмерного времени u . Умножая (97) на $h dr$ и интегрируя от r_1 до r , получаем:

$$- \frac{d\tau}{du} = \gamma (1 - e^{-\tau}) - \tau_0 + \tau, \quad (98)$$

где τ_0 — оптическое расстояние данного места в начальный момент времени. Из (11) находим:

$$\int_{\tau}^{\tau_0} \frac{d\tau}{f(\tau)} = u, \quad (99)$$

где

$$f(\tau) = \gamma(1 - e^{-\tau}) - \tau_0 + \tau. \quad (100)$$

Легко также найти отношение $\frac{n_1}{n}$ как функцию от оптической глубины τ . Из (97) с помощью (98) получаем:

$$\frac{dn_1}{d\tau} f(\tau) = n_1 f'(\tau) - n, \quad (101)$$

откуда

$$\frac{n_1}{n} = f(\tau) \left\{ \frac{1}{f(\tau_0)} + \int_{\tau}^{\tau_0} \frac{d\tau}{f^2(\tau)} \right\}. \quad (102)$$

Формулами (99) и (102) определяется степень ионизации в зависимости от u и τ_0 , т. е. от времени и места в оболочке. Для примера по указанным формулам была вычислена величина $\frac{n_1}{n}$ для случая $\gamma = 100$. Результаты вычислений, дающие величину $\frac{n_1}{n}$ в зависимости от τ_0 для разных значений u , приведены на рис. 23 (стр. 346).

Рассмотрение формул (99) и (102) показывает (и рис. 23 иллюстрирует это), что в каждый момент времени оболочка может быть разделена на две области: «ионизованную» ($\frac{n^+}{n_1} > 1$) и «неионизованную» ($\frac{n^+}{n_1} < 1$) с очень резкой границей между ними. Приблизительно эта граница находится там, где $\tau \approx 1$. Такой результат вполне понятен, так как до тех пор, пока для данного слоя $\tau \gg 1$, ионизирующее излучение звезды до него не доходит. Только тогда, когда благодаря ионизации более близких к звезде слоев оболочки их оптическая толщина становится порядка единицы, начинается ионизация в данном слое.

Таким образом, процесс постепенного усиления ионизации в оболочке можно рассматривать как перемещение границы между ионизованной и неионизованной областями. Закон этого перемещения получается из формулы (99). Полагая в ней $\tau = 1$, находим:

$$\tau_0 = \gamma(1 - e^{-u}). \quad (103)$$

Грубо говоря, ионизация доходит до того места, оптическое расстояние которого от внутренней границы оболочки в начальный момент времени равно γ .

Из (103) следует, что в рассматриваемом случае время установления ионизационного равновесия («время релаксации») равно

$$t_* = \frac{1}{n_e \sum_2^{\infty} C_i}. \quad (104)$$

Мы видим, что в случае оболочки большой оптической толщины,

как и следовало ожидать, время релаксации гораздо больше, чем в случае оболочки малой оптической толщины (поскольку обычно $\frac{n_*^+}{n_1^*} \gg 1$).

Для оценки времени релаксации надо знать величину $\sum_2^{\infty} C_i$. При температурах порядка $10\,000^\circ$ для водорода $\sum_2^{\infty} C_i \approx 10^{-13}$. Это значит, что если $n_e \approx 10^6$, то время релаксации около года.

Усиление свечения оболочки. Увеличение числа ионизованных атомов в оболочке влечет за собой увеличение числа рекомбинаций, а значит и усиление свечения оболочки в спектральных линиях. Количество энергии, излучаемое за 1 сек оболочкой в линии, соответствующей

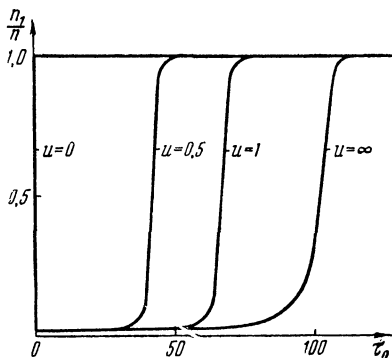


Рис. 23

переходу с k -го уровня на i -й, равно

$$E_{ki} = A_{ki} h\nu_{ik} \frac{n_k}{n_e n^+} \int n_e n^+ dV, \quad (105)$$

где A_{ki} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода, $h\nu_{ik}$ — энергия кванта, n_k — число атомов в k -м состоянии в 1 см^3 , dV — элемент объема оболочки. Величина $\frac{n_k}{n_e n^+}$, являющаяся функцией от электронной температуры, находится из рассмотрения уравнений стационарности для каждого дискретного уровня атома.

Если оптическая толщина оболочки до вспышки звезды меньше единицы, то сразу после вспышки начинается свечение всей оболочки. Усиление свечения оболочки происходит вследствие увеличения числа ионизованных атомов в каждом объеме. В данном случае для определения величины E_{ki} надо подставить в формулу (105) выражение (92) (при $n_e = \text{const}$) или выражение (93) (при $n_e = n^+$) и произвести интегрирование по всему объему оболочки.

Если оптическая толщина оболочки до вспышки больше единицы, то сначала начинают светиться ближайшие к звезде части оболочки, а затем и более далекие. Усиление свечения оболочки в этом случае происходит вследствие постепенного увеличения светящегося объема.

Очевидно, что такой характер свечения оболочки большой оптической толщины будет иметь место не только при $n_e = \text{const}$, как было показано выше, но и при $n_e = n^+$. Поэтому при обоих предположениях относительно n_e интеграл, входящий в (105), распространяется лишь на светящуюся (т. е. ионизованную) область и может быть представлен в виде

$$\int n_e n^+ dV = \bar{n}_e N^+(t), \quad (106)$$

где \bar{n}_e — средняя концентрация свободных электронов в светящейся области и $N^+(t)$ — полное число ионизованных атомов в этой области. Величина \bar{n}_e может считаться не зависящей от времени, величина $N^+(t)$ возрастает с течением времени.

Чтобы получить уравнение, определяющее величину $N^+(t)$, проинтегрируем уравнение (94) по объему оболочки. Пользуясь (106), находим:

$$\frac{dN^+}{dt} = \bar{H} - N^+ \bar{n}_e \sum_2^{\infty} C_i, \quad (107)$$

где \bar{H} — полное число квантов, излучаемых звездой за границей основной серии. Отсюда при $N^+(0) = 0$ получаем:

$$N^+(t) = \frac{\bar{H}}{\bar{n}_e \sum_2^{\infty} C_i} \left(1 - e^{-t \bar{n}_e \sum_2^{\infty} C_i} \right). \quad (108)$$

Знание величины $N^+(t)$ дает возможность определить количество энергии, излучаемой оболочкой в спектральной линии. Подставляя (106) и (108) в (105), находим:

$$E_{ki} = A_{ki} h \nu_{ik} \frac{n_k \bar{H}}{n_e n^+ \sum_2^{\infty} C_i} \left(1 - e^{-t \bar{n}_e \sum_2^{\infty} C_i} \right). \quad (109)$$

Этой формулой и определяется величина E_{ki} как функция от времени t для линии, возникающей в результате фотоионизаций и рекомбинаций.

Одним из примеров свечения оболочки при отсутствии ионизационного равновесия является Новая Геркулеса 1934 г. после апрельского минимума блеска. До минимума в течение нескольких месяцев из звезды происходило мощное выбрасывание вещества, приведшее к образованию очень протяженной и разреженной оболочки. В апреле мощность истечения внезапно сильно ослабла и вскрылась горячая звезда (с температурой порядка 70 000°). Под действием излучения звезды начался процесс ионизации в оболочке, вызвавший появление ярколинейчатого спектра, характерного для газовых туманностей. Благодаря этому началось вторичное возрастание блеска Новой Геркулеса, продолжавшееся более месяца. Оно закончилось тогда, когда

свечение оболочки пришло в соответствие с возросшей температурой звезды. Медленность установления ионизационного равновесия в данном случае объясняется малой плотностью оболочки.

Теоретическую интерпретацию свечения Новой Геркулеса после апрельского минимума блеска впервые дал Гротриан^[9]. Однако он неправильно считал, что ионизация происходит одновременно во всем объеме оболочки. Интерпретация, основанная на применении выведенных выше формул, была дана автором^[8]. При этом выяснилось, что формула (109) хорошо представляет наблюдаемый ход интенсивностей балмеровских линий при $n_e \approx 3 \cdot 10^6 \text{ см}^3$. При помощи той же формулы было объяснено неодинаковое поведение красного и фиолетового компонентов эмиссионных линий.

В дальнейшем И. Н. Минин^[10] рассмотрел задачу об изменении с течением времени электронной температуры оболочки. Возникающие при фотоионизации свободные электроны постепенно теряют свою кинетическую энергию при неупругих столкновениях с различными атомами и ионами. При небольшой плотности вещества процесс изменения электронной температуры идет довольно медленно и может наблюдаться. Применяв полученные им формулы к оболочке Новой Геркулеса, И. Н. Минин объяснил изменение интенсивностей линий, возбуждаемых электронными ударами.

Свечение оболочек при отсутствии ионизационного равновесия может также наблюдаться в случае звезд типа Ве. Как известно, из этих звезд происходит иррегулярное выбрасывание вещества. Если мощность выбрасывания вещества убывает, то количество квантов высокочастотного излучения, доходящих от звезды до выброшенной ранее оболочки, возрастает. Благодаря этому усиливается ионизация атомов в оболочке. В. Г. Горбацкий^[11] рассмотрел этот процесс, приняв во внимание не только ионизацию из первого состояния, но и ионизацию из второго состояния, т. е. рецив более общее уравнение, чем (107). В результате ему удалось определить число атомов водорода во втором состоянии. С усилением ионизации атомов в оболочке В. Г. Горбацкий связывает

появление узких линий поглощения бальмеровской серии в спектрах некоторых звезд типа Ве (в частности, Плейоны).

Высвечивание оболочки. Кроме рассмотренного выше процесса усиления ионизации в оболочке под действием внезапно вспыхнувшей звезды, представляет также интерес и противоположный процесс: падение ионизации в оболочке после прекращения действия на нее излучения звезды.

При падении степени ионизации в оболочке происходит увеличение оптической толщины оболочки за границей основной серии данного атома. Если указанная оптическая толщина все время остается меньше единицы, то уменьшение числа ионизованных атомов определяется уравнением

$$\frac{dn^+}{dt} = -n_e n^+ \sum_1^{\infty} C_i. \quad (110)$$

Если же оптическая толщина оболочки за границей основной серии с самого начала или с некоторого момента становится больше единицы, то в уравнении (110) следует учесть ионизацию под действием диффузного излучения оболочки, возникающего при захватах электронов на первый уровень. Приблизительно это можно сделать, отбросив первый член суммы в правой части уравнения. Подчеркнем, что при любой оптической толщине оболочки падение ионизации происходит одновременно во всех частях оболочки.

Из уравнения (110) следует, что

$$n^+(t) = n^+(0) e^{-t n_e \sum_1^{\infty} C_i} \quad (111)$$

при $n_e = \text{const}$ и

$$n^+(t) = \frac{n^+(0)}{t n^+(0) \sum_1^{\infty} C_i + 1} \quad (112)$$

при $n_e = n^+$.

Падение степени ионизации в оболочке сопровождается высвечиванием оболочки как в непрерывном спектре, так и в спектральных линиях. Чтобы определить количество энергии, излучаемое оболочкой в линии, надо подставить выражение (111) или (112) в формулу (105).

Мы видим, что существенное уменьшение числа ионизованных атомов в оболочке (а значит, и уменьшение количества излучаемой ею энергии) происходит в течение промежутка времени, определенного формулой (104). В газовых туманностях $n_e \approx 10^3 - 10^4 \text{ см}^{-3}$. Поэтому указанный промежуток времени оказывается для них порядка нескольких сотен лет.

Прекращение действия звезды на туманность может быть вызвано, в частности, начавшимся истечением материи из звезды. В таком случае ближайшие к звезде части оболочки будут поглощать высокочастотное излучение звезды. Если количество выбрасываемой из звезды материи велико, то вокруг звезды образуется протяженная фотосфера со сравнительно низкой температурой. Между тем свечение туманности, соответствующее высокой температуре, будет происходить еще весьма долго. Возможно, что именно так объясняется свечение газовых туманностей, связанных с довольно холодными звездами.

ГЛАВА X

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

В этой главе мы вернемся к рассмотрению задачи о рассеянии монохроматического излучения в плоском слое, освещенном параллельными лучами, в стационарном случае. Индикатрису рассеяния будем считать произвольной. Точное решение указанной задачи было дано в главе III. Теперь мы получим приближенное решение той же задачи [1-4].

Следует отметить, что отыскание приближенных решений данной задачи в виде простых формул представляет значительный интерес для многих практических применений.

Сущность метода, применяемого в этой главе, состоит в том, что рассеяние первого порядка учитывается точно, а рассеяния высших порядков приближенно — путем сохранения в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра только двух первых членов. Таким путем получены формулы, определяющие интенсивности излучения, рассеянного плоским слоем, при любой оптической толщине этого слоя, при любой форме индикатрисы рассеяния и при любой отражательной способности прилегающей к слою поверхности.

Содержание главы следующее. Сначала рассмотрен случай чистого рассеяния, затем принято во внимание наличие истинного поглощения. Полученные формулы применены к атмосферам Земли и планет, а также к морю.

§ 1. Случай чистого рассеяния

Пусть плоский слой оптической толщины τ_0 освещен параллельными лучами, падающими под углом $\vartheta_0 = \arccos \zeta$ к нормали при азимуте φ_0 . Обозначим через πS освещенность площадки, перпендикулярной к этим лучам, на верхней границе слоя. Будем считать, что в слое происходит чистое рассеяние излучения ($\lambda = 1$), причем индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ не зависит от глубины. Искомую интенсивность диффузного излучения, идущего на оптической глубине τ под углом $\vartheta = \arccos \eta$ к нормали при азимуте φ , обозначим через $I(\tau, \eta, \varphi)$.

Уравнения, определяющие величину $I(\tau, \eta, \varphi)$, получаются из уравнений (82) главы I при $\lambda = 1$. Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} &= -I(\tau, \eta, \varphi) + B(\tau, \eta, \varphi), \\ B(\tau, \eta, \varphi) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') x(\gamma') d\eta' + \frac{S}{4} x(\gamma) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma' &= \eta \eta' + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi'), \\ \cos \gamma &= \eta \zeta + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Граничными условиями служат соотношения

$$\left. \begin{aligned} I(0, \eta, \varphi) &= 0 \text{ при } \eta > 0, \\ I(\tau_0, \eta, \varphi) &= 0 \text{ при } \eta < 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

выражающие собой отсутствие рассеянного излучения, падающего на слой от границ.

Сначала мы рассмотрим случай простейшей сферической индикатрисы рассеяния

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma, \quad (4)$$

где x_1 — некоторый параметр. В данном случае вместо

второго из уравнений (1) получаем:

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \bar{I}(\tau) + x_1 \bar{H}(\tau) \eta + x_1 \bar{G}(\tau) \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ + \frac{S}{4} [1 + x_1 \eta \zeta + x_1 \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0)] e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (5)$$

Здесь

$$\bar{I}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') d\eta', \quad (6)$$

$$\bar{H}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') \eta' d\eta', \quad (7)$$

$$\bar{G}(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi' - \varphi_0) d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') \sqrt{1 - \eta'^2} d\eta'. \quad (8)$$

Очевидно, что

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi' - \varphi_0) d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') \sqrt{1 - \eta'^2} d\eta' = 0$$

вследствие симметричности функции $I(\tau, \eta', \varphi')$ относительно $\varphi' - \varphi_0$.

Величина $\bar{I}(\tau)$ есть средняя интенсивность диффузного излучения на оптической глубине τ , $4\pi\bar{H}(\tau)$ — поток диффузного излучения в направлении возрастающих глубин, $4\pi\bar{G}(\tau)$ — поток диффузного излучения в направлении $\varphi = \varphi_0$ в горизонтальной плоскости.

Мы видим, что при индикатрисе рассеяния (4) функция $B(\tau, \eta, \varphi)$ представляется в виде

$$B(\tau, \eta, \varphi) = B'(\tau, \eta) + B''(\tau, \eta) \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (9)$$

Поэтому, как следует из уравнения переноса излучения, функция $I(\tau, \eta, \varphi)$ представляется аналогично:

$$I(\tau, \eta, \varphi) = I'(\tau, \eta) + I''(\tau, \eta) \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (10)$$

Легко получить, что величины $I'(\tau, \eta)$ и $I''(\tau, \eta)$ определяются независимо одна от другой из следующих уравнений:

$$\eta \frac{dI'(\tau, \eta)}{d\tau} = -I'(\tau, \eta) + \bar{I}(\tau) + x_1 \bar{H}(\tau) \eta + \frac{S}{4} (1 + x_1 \eta \zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (11)$$

где

$$\bar{I}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I'(\tau, \eta) d\eta, \quad \bar{H}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I'(\tau, \eta) \eta d\eta \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} \eta \frac{dI''(\tau, \eta)}{d\tau} &= \\ &= -I''(\tau, \eta) + x_1 \bar{G}(\tau) \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{S}{4} x_1 \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\bar{G}(\tau) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} I''(\tau, \eta) \sqrt{1 - \eta^2} d\eta. \quad (14)$$

Очевидно, что для каждой из величин I' и I'' имеют место те же самые граничные условия (3), что и для величины I .

Займемся сперва решением уравнения (11). Для этого, как и раньше (глава II, § 3), воспользуемся приближенным соотношением

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I'(\tau, \eta) \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} \bar{I}(\tau) \quad (15)$$

и запишем граничные условия приближенно в виде

$$2\bar{H}(0) = -\bar{I}(0), \quad 2\bar{H}(\tau_0) = \bar{I}(\tau_0). \quad (16)$$

Интегрируя обе части уравнения (11) по η в пределах от -1 до $+1$, получаем:

$$\frac{d\bar{H}(\tau)}{d\tau} = \frac{S}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (17)$$

а значит,

$$\bar{H}(\tau) = F - \frac{S}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta. \quad (18)$$

Постоянная интегрирования $4\pi F$ представляет собой полный поток излучения (сумму потоков диффузного и прямого излучений).

Умножая обе части уравнения (11) на η и интегрируя по η в пределах от -1 до $+1$, находим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \int_{-1}^{+1} I'(\tau, \eta) \eta^2 d\eta = -\bar{H}(\tau) + \frac{x_1}{3} \bar{H}(\tau) + \frac{x_1}{12} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta. \quad (19)$$

Отсюда при учете соотношений (15) и (18) следует:

$$\bar{I}(\tau) = C - (3 - x_1) F \tau - \frac{3}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta^2, \quad (20)$$

где C — новая постоянная интегрирования.

Постоянные C и F находятся из граничных условий (16). Эти условия дают:

$$C = \frac{S\zeta}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \zeta \right) - 2F, \quad (21)$$

$$[4 + (3 - x_1) \tau_0] F = \frac{S\zeta}{2} R(\tau_0, \zeta), \quad (22)$$

где

$$R(\tau_0, \zeta) = 1 + \frac{3}{2} \zeta + \left(1 - \frac{3}{2} \zeta \right) e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}. \quad (23)$$

Таким образом, мы определили обе величины $\bar{I}(\tau)$ и $\bar{H}(\tau)$, содержащие функцию $I'(\tau, \eta)$ под знаком интеграла. Подставляя полученные для них выражения в уравнение (11), находим:

$$\eta \frac{dI'(\tau, \eta)}{d\tau} = -I'(\tau, \eta) + C + x_1 F \eta - (3 - x_1) F \tau + \frac{S}{4} (1 - 3\zeta^2) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (24)$$

Интегрирование этого уравнения дает нам искомую функцию $I'(\tau, \eta)$ (т. е. интенсивность излучения, усредненную по азимуту).

Аналогично может быть решено уравнение (13). Не останавливаясь на этом, приведем лишь окончательный результат. Функция $I''(\tau, \eta)$ очень быстро убывает с возрастанием τ , так что на больших оптических глубинах интенсивность излучения может считаться не зависящей от азимута. Что же касается поверхностных слоев, то в них (при не очень больших значениях x_1) функция $I''(\tau, \eta)$ определяется в основном рассеянием первого порядка. Поэтому мы примем, что $\bar{G} = 0$, и будем искать $I''(\tau, \eta)$ из уравнения

$$\eta \frac{dI''(\tau, \eta)}{d\tau} = -I''(\tau, \eta) + \frac{S}{4} x_1 \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (25)$$

Пользуясь (24) и (25), получаем следующее уравнение для определения интенсивности излучения $I(\tau, \eta, \varphi)$:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + C + x_1 F \eta - (3 - x_1) F \tau + \\ + \frac{S}{4} [1 - 3\zeta^2 + x_1 \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0)] e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (26)$$

Допустим теперь, что индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ произвольна. В таком случае рассеяние первого порядка мы будем учитывать точно, а при определении рассеяний высших порядков возьмем только два первых члена в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра. Иными словами, рассеяния высших порядков будем определять при индикатрисе рассеяния, даваемой формулой (4), в которой

$$x_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma d\gamma. \quad (27)$$

Согласно сказанному, чтобы получить уравнение, определяющее величину $I(\tau, \eta, \varphi)$ при произвольной индикатрисе рассеяния $x(\gamma)$, мы должны вычесть из правой части уравнения (26) член, учитывающий рассеяние первого порядка при индикатрисе рассеяния $1 + x_1 \cos \gamma$, и добавить соответствующий член при заданной индикатрисе рассеяния. В результате приходим к следующему

уравнению:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + C + x_1 F \eta - (3 - x_1) F \tau - \frac{S}{4} (3\zeta^2 + x_1 \eta \zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} + \frac{S}{4} x(\gamma) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (28)$$

Интегрирование уравнения (28) при граничных условиях (3) дает:

$$I(\tau, \eta, \varphi) = (C + 3F\eta) \left(e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) - (3 - x_1) F \tau e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\eta}} + \frac{S}{4} [x(\gamma) - 3\zeta^2 - x_1 \eta \zeta] \left[e^{\tau \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\zeta} \right)} - 1 \right] e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \frac{\zeta}{\eta - \zeta} \quad (29)$$

для излучения, идущего сверху вниз, и

$$I(\tau, -\eta, \varphi) = (C - 3F\eta) \left(e^{-\frac{\tau}{\eta}} - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) - (3 - x_1) F \left(\tau e^{-\frac{\tau}{\eta}} - \tau_0 e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) + \frac{S}{4} [x(\gamma) - 3\zeta^2 + x_1 \eta \zeta] \left[e^{-\tau \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} \right)} - e^{-\tau_0 \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} \right)} \right] \frac{\zeta}{\eta + \zeta} \quad (30)$$

для излучения, идущего снизу вверх. Во втором случае мы заменили η на $-\eta$, так что в обоих случаях $\eta > 0$. В формуле (29) $\cos \gamma$ определяется вторым из равенств (2), в формуле (30)

$$\cos \gamma = -\eta \zeta + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (31)$$

Из формул (29) и (30) получаются следующие выражения для интенсивностей излучения, выходящего из среды:

$$I(\tau_0, \eta, \varphi) = (C + 3F\eta) \left(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) - (3 - x_1) F \tau_0 + \frac{S}{4} [x(\gamma) - 3\zeta^2 - x_1 \eta \zeta] \left(e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) \frac{\zeta}{\zeta - \eta}, \quad (32)$$

$$I(0, -\eta, \varphi) = (C - 3F\eta) \left(1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \right) + (3 - x_1) F \tau_0 e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + \frac{S}{4} [x(\gamma) - 3\zeta^2 + x_1 \eta \zeta] \left[1 - e^{-\tau_0 \left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta} \right)} \right] \frac{\zeta}{\eta + \zeta}. \quad (33)$$

Входящие в приведенные формулы постоянные S и F определяются соотношениями (21) и (22). Используя указанные соотношения, а также переходя от интенсивностей излучения $I(\tau_0, \eta, \varphi)$ и $I(0, -\eta, \varphi)$ к коэффициентам яркости $\sigma(\eta, \zeta, \varphi)$ и $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$ при помощи равенств $I(\tau_0, \eta, \varphi) = S\sigma(\eta, \zeta, \varphi)\zeta$, $I(0, -\eta, \varphi) = S\rho(\eta, \zeta, \varphi)\zeta$, (34) вместо формул (32) и (33) находим:

$$\sigma(\eta, \zeta, \varphi) = \frac{R(\tau_0, \eta)R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3 - x_1)\tau_0} - \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \right) + \\ + [x(\gamma) - (3 + x_1)\eta\zeta] \sigma_1(\eta, \zeta), \quad (35)$$

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \\ = 1 - \frac{R(\tau_0, \eta)R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3 - x_1)\tau_0} + [(3 + x_1)\eta\zeta - 2(\eta + \zeta) + x(\gamma)] \rho_1(\eta, \zeta). \quad (36)$$

Здесь $\sigma_1(\eta, \zeta)$ и $\rho_1(\eta, \zeta)$ — коэффициенты яркости, обусловленные рассеянием первого порядка при сферической индикатрисе рассеяния:

$$\sigma_1(\eta, \zeta) = \frac{1}{4} e^{-\frac{\tau_0}{\eta} - \frac{\tau_0}{\zeta}} \frac{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} - e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}}{\eta - \zeta}, \quad \rho_1(\eta, \zeta) = \frac{1}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta})}}{\eta + \zeta}. \quad (37)$$

Как известно, коэффициенты яркости должны быть симметричными функциями от углов падения и отражения (или пропускания). Наши приближенные формулы (35) и (36) удовлетворяют этому условию.

Сравнение формул (35) и (37) с приведенными ранее точными формулами для величин ρ и σ показывает, что приближенные формулы дают погрешность порядка 10%.

Формулы (35) и (36) могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\eta, \zeta, \varphi) &= x(\gamma)\sigma_1(\eta, \zeta) + \Delta\sigma(\eta, \zeta), \\ \rho(\eta, \zeta, \varphi) &= x(\gamma)\rho_1(\eta, \zeta) + \Delta\rho(\eta, \zeta), \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

где члены $x(\gamma)\sigma_1(\eta, \zeta)$ и $x(\gamma)\rho_1(\eta, \zeta)$ учитывают рассеяние первого порядка, а члены $\Delta\sigma(\eta, \zeta)$ и $\Delta\rho(\eta, \zeta)$ — рассеяния высших порядков. В работе автора [4] даны подробные таблицы величин σ_1 , ρ_1 , $\Delta\sigma$ и $\Delta\rho$ для разных значений τ_0 , η , ζ и x_1 .

§ 2. Учет отражения света поверхностью

Среда, рассеивающая излучение, обычно ограничена поверхностью, которая излучение отражает. Примером может служить планетная атмосфера, ограниченная снизу поверхностью планеты. Чтобы учесть отражение света от поверхности, надо соответствующим образом задать граничные условия [вместо граничных условий (3) или (16)].

Допустим, что поверхность ограничивает среду снизу и отражает излучение изотропно. Альбедо поверхности будем считать не зависящим от угла падения и обозначим через A . Это значит, что если освещенность поверхности равна E , то интенсивность излучения, отраженного от поверхности, равна $I = \frac{A}{\pi} E$.

В данном случае поверхность освещена как излучением, идущим непосредственно от источников света и ослабленным в среде, так и диффузным излучением среды. Поэтому интенсивность отраженного от поверхности излучения будет равна

$$I_2 = \frac{A}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 I(\tau_0, \eta, \varphi) \eta d\eta + \pi S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta \right]. \quad (39)$$

Мы обозначим среднюю интенсивность падающего на поверхность диффузного излучения через I_1 . Тогда предыдущее соотношение переписывается в виде

$$I_2 = A(I_1 + S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta). \quad (40)$$

Нам надо связать между собой значения на границе величин \bar{I} и \bar{H} . Приближенно мы имеем:

$$\bar{I} = \frac{1}{2}(I_1 + I_2), \quad \bar{H} = \frac{1}{4}(I_1 - I_2), \quad (41)$$

откуда

$$I_1 = \bar{I} + 2\bar{H}, \quad I_2 = \bar{I} - 2\bar{H}. \quad (42)$$

Подставляя (42) в (40), получаем:

$$\bar{I} - 2\bar{H} = A(\bar{I} + 2\bar{H} + S e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}} \zeta). \quad (43)$$

Соотношение (43) является искомым граничным условием при $\tau = \tau_0$. Граничным условием при $\tau = 0$ остается, очевидно, первое из соотношений (16).

При указанных граничных условиях должны быть найдены постоянные \bar{C} и \bar{F} . Первое из условий (16) приводит к соотношению (21), а условие (43) дает:

$$2\bar{F} = \frac{(1-A)R(\tau_0, \zeta)S\zeta}{4 + (3-x_1)(1-A)\tau_0}. \quad (44)$$

Чтобы получить интенсивности излучения, выходящего из среды, надо постоянные \bar{C} и \bar{F} , определенные из соотношений (21) и (44), подставить в формулы (32) и (33). При этом в правую часть формулы (33) следует добавить член

$$A(\bar{I} + 2\bar{H} + Se^{-\frac{\tau_0}{\zeta}\zeta})e^{-\frac{\tau_0}{\eta}},$$

учитывающий излучение, отраженное от поверхности и выходящее из среды без рассеяний.

В результате для коэффициентов яркости среды, ограниченной отражающей поверхностью, находим:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\eta, \zeta, \varphi) = & \frac{[(1-A)R(\tau_0, \eta) + 2A]R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3-x_1)(1-A)\tau_0} - \frac{1}{2}(e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} + e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}) + \\ & + [x(\gamma) - (3+x_1)\eta\zeta]\sigma_1(\eta, \zeta), \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\eta, \zeta, \varphi) = & 1 - \frac{(1-A)R(\tau_0, \eta)R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3-x_1)(1-A)\tau_0} + \\ & + [(3+x_1)\eta\zeta - 2(\eta + \zeta) + x(\gamma)]\rho_1(\eta, \zeta). \quad (46) \end{aligned}$$

Из сравнения формул (35) и (36) с формулами (45) и (46) видно, что вторые могут быть получены из первых путем введения поправок:

$$\bar{\sigma} - \sigma = \frac{A}{1-A \frac{(3-x_1)\tau_0}{4 + (3-x_1)\tau_0}} \cdot \frac{2R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3-x_1)\tau_0} \left[1 - \frac{R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3-x_1)\tau_0} \right], \quad (47)$$

$$\bar{\rho} - \rho = \frac{A}{1-A \frac{(3-x_1)\tau_0}{4 + (3-x_1)\tau_0}} \cdot \frac{2R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3-x_1)\tau_0} \cdot \frac{2R(\tau_0, \eta)}{4 + (3-x_1)\tau_0}. \quad (48)$$

Отметим, что величина

$$\frac{2R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3 - x_1)\tau_0}$$

представляет собой отношение освещенности нижней границы среды к освещенности верхней границы сверху, а величина

$$1 - \frac{R(\tau_0, \zeta)}{4 + (3 - x_1)\tau_0}$$

есть отношение освещенности верхней границы снизу к освещенности верхней границы сверху (при $A = 0$). Сравнивая между собой формулы (47) и (48) с точными формулами, полученными в § 3 главы VII, мы видим, что приближенные и точные выражения для $\sigma - \sigma$ и $\rho - \rho$ по своей структуре совершенно одинаковы.

Следует подчеркнуть, что приведенные выше формулы справедливы лишь при предположении о неизменности индикатрисы рассеяния в среде. Однако во многих средах (например, в земной атмосфере) индикатриса рассеяния меняется в зависимости от оптической глубины. В таких случаях в приведенных формулах под $x(\gamma)$ следует понимать некоторую среднюю индикатрису рассеяния. Обобщение этих формул на тот случай, когда $x(\gamma)$ зависит от τ , дано в статье С. Д. Гутшабаха [5].

Задача о рассеянии света в среде с меняющимися оптическими свойствами рассматривалась также в работах В. А. Крата [6] и Е. С. Кузнецова [7].

§ 3. Применения к земной атмосфере

В первом приближении можно считать, что в земной атмосфере происходит чистое рассеяние излучения. Поэтому к ней могут быть применены формулы, полученные в предыдущем параграфе. Ниже указываются некоторые из таких применений.

1. Освещенность земной поверхности. Пусть E_0 — освещенность верхней границы атмосферы и E — освещенность земной поверхности (вызванная как

прямым излучением Солнца, так и рассеянным светом неба). При наших обозначениях

$$E_0 = \pi S \zeta. \quad (49)$$

Чтобы определить величину E , заметим, что суммарный поток излучения равен $4\pi F$. На нижней границе атмосферы этот поток представляет собой разность освещенности E и энергии, отраженной от поверхности, AE . Таким образом, мы имеем:

$$(1 - A) E = 4\pi F. \quad (50)$$

Но величина F дается формулой (44). Поэтому получаем:

$$E = \frac{2R_0(\tau_0, \zeta)}{4 + (3 - x_1)(1 - A)\tau_0} E_0. \quad (51)$$

Этой простой формулой и определяется полная освещенность земной поверхности.

Пусть E_1 — освещенность земной поверхности, создаваемая прямым излучением Солнца. Очевидно,

$$E_1 = E_0 e^{-\frac{\tau_0}{\zeta}}. \quad (52)$$

Доля прямого солнечного излучения в полной освещенности земной поверхности получается делением (52) на (51).

Входящая в формулу (51) величина A есть альbedo земной поверхности. Летом $A \approx 0,1 - 0,2$ (альbedo почвы и растительных покровов), зимой $A \approx 0,7 - 0,8$ (альbedo снега). Из формулы (51) видно, что зимой освещенность земной поверхности больше, чем летом (при одинаковых значениях τ_0 и ζ).

Приближенные формулы для полной освещенности земной поверхности были предложены также другими авторами (В. Г. Кастров [8], А. Н. Гордов [9] и др.). Сравнение этих формул друг с другом, а также с формулой (51) дано в статье Л. Г. Махоткина [10].

2. Яркость неба. Относительное распределение яркости по небу дается коэффициентом яркости $\sigma(\eta, \zeta, \varphi)$, определенным формулой (45). В рассматриваемом случае величины, входящие в эту формулу, имеют следующий

смысл: γ — угол между направлением на данную точку неба и направлением на Солнце, ϑ и φ — зенитное расстояние и азимут данной точки неба, ϑ_0 и φ_0 — зенитное расстояние и азимут Солнца, $\cos \vartheta = \eta$, $\cos \vartheta_0 = \zeta$.

В случае равномерно облачного неба при большой оптической толщине облаков из формулы (45) получаем:

$$\bar{\sigma}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{\left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta_0\right) \left[(1-A) \left(1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta\right) + 2A \right]}{4 + (3-x_1)(1-A)\tau_0}. \quad (53)$$

Из формулы (53) видно, что относительное распределение яркости по облачному небу не зависит от вида индикатрисы рассеяния, а зависит лишь от альбедо земной поверхности. При $A \neq 0$ яркость неба с увеличением зенитного расстояния ϑ убывает пропорционально $1 + \frac{3}{2} \cos \vartheta$. При $A = 1$ яркость неба везде одинакова.

3. Определение индикатрисы рассеяния. Сравнивая наблюдаемое распределение яркости по небу с теоретическим распределением, можно определить индикатрису рассеяния земной атмосферы. Для этого следует получить из наблюдений коэффициенты яркости неба на разных угловых расстояниях от Солнца при небольшой высоте Солнца над горизонтом.

Пусть σ' — отношение яркости данной точки неба к яркости горизонтально расположенного белого экрана. Введенный выше коэффициент яркости σ равен величине σ' , умноженной на E/E_0 , так как σ относится к освещенности E_0 на верхней границе атмосферы, а σ' — к освещенности суммарным светом Солнца и неба на нижней границе атмосферы. Поэтому вместо формулы (35) мы имеем:

$$\sigma' \frac{E}{E_0} = x(\gamma) \sigma_1 + \Delta \sigma. \quad (54)$$

Если нельзя пренебречь отражением света от земной поверхности, то в правую часть этого соотношения надо добавить член $\bar{\sigma} - \sigma$, определенный формулой (47).

Чтобы определить входящие в формулу (54) величины E/E_0 , σ_1 и $\Delta \sigma$, надо найти из наблюдений оптическую

толщину земной атмосферы τ_0 . Это можно сделать обычным способом -- путем измерения яркости прямых солнечных лучей, прошедших через атмосферу, при разных зенитных расстояниях Солнца. Другой (более простой, но менее точный) способ определения величины τ_0 заключается в измерении отношения освещенности прямой солнечной радиацией E_1 к суммарной освещенности E и сравнении его с теоретическим значением E_1/E , найденным из формул (51) и (52).

Если величина τ_0 известна, то величины E/E_0 , σ_1 и $\Delta\sigma$ могут быть определены по приведенным выше формулам или по таблицам, содержащимся в работе [4]. Подставляя значения этих величин в формулу (54) и пользуясь полученными из наблюдений значениями величины σ' , мы можем найти индикатрису рассеяния $x(\gamma)$. Так как величина $\Delta\sigma$ зависит от параметра x_1 , то следует для этого параметра взять приближенное значение, а затем уточнить его по найденной индикатрисе рассеяния.

Критерием правильности сделанных наблюдений и вычислений может служить условие нормировки индикатрисы рассеяния:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} x(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1. \quad (55)$$

Описанным способом индикатриса рассеяния земной атмосферы была определена в г. Елабуге летом 1943 г. В результате были получены 10 индикатрис рассеяния, оказавшихся весьма похожими друг на друга. Можно было ожидать увеличения вытянутости индикатрисы с ростом τ_0 , однако из-за небольшого интервала изменения τ_0 при наших наблюдениях (от 0,19 до 0,23) эту зависимость уверенно проследить трудно, хотя она и намечается. Поэтому была получена средняя из всех индикатрис, которая дана в таблице 36 (стр. 366). Величина x_1 для этой индикатрисы оказалась равной $x_1 = 0,63$.

Следует отметить что если бы мы приняли во внимание только рассеяние первого порядка, то получили бы индикатрису рассеяния, почти лишенную «выемки»

вблизи $\gamma = 100^\circ$. Это вполне понятно, ибо в тех направлениях, где величина $x(\gamma)$ мала, яркость неба существенно зависит от рассеяний высших порядков, и пренебрегать ими нельзя.

Таблица 36

Индикатриса рассеяния земной атмосферы

γ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180°
$x(\gamma)$	4,6	3,3	1,9	1,3	0,94	0,75	0,64	0,65	0,72	0,85	1,03	1,1	1,2

Определение индикатрисы рассеяния земной атмосферы при учете только рассеяния первого порядка производилось многими авторами. Ряд работ выполнила Е. В. Пясковская-Фесенкова [11, 12], определившая индикатрису рассеяния для разных длин волн. В. А. Крат [13] на основе своих наблюдений предложил простую эмпирическую формулу для индикатрисы рассеяния земной атмосферы.

§ 4. Световой режим при наличии истинного поглощения

В § 1 была рассмотрена задача о свечении среды, освещенной параллельными лучами, в случае чистого рассеяния. Теперь мы допустим, что наряду с рассеянием в среде происходит истинное поглощение излучения (т. е. $\lambda < 1$). Для простоты оптическую толщину среды будем считать бесконечно большой ($\tau_0 = \infty$).

Исходными уравнениями в данном случае являются:

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + B(\varphi, \eta, \varphi),$$

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta', \varphi') x(\gamma') d\eta' + x(\gamma) \frac{\lambda}{4} S e^{-\frac{\tau}{\zeta}},$$

(56)

где углы γ и γ' определены соотношениями (2).

Как и в § 1, сначала предположим, что индикатриса рассеяния имеет форму $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$. Тогда интенсивность излучения $I(\tau, \eta, \varphi)$ представляется в виде (10), причем величины $I'(\tau, \eta)$ и $I''(\tau, \eta)$ определяются уравнениями

$$\eta \frac{dI'(\tau, \eta)}{d\tau} = -I'(\tau, \eta) + \lambda \bar{I}(\tau) + \lambda x_1 \bar{H}(\tau) \eta + \frac{\lambda S}{4} (1 + x_1 \eta \zeta) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (57)$$

$$\eta \frac{dI''(\tau, \eta)}{d\tau} = -I''(\tau, \eta) + \lambda x_1 \bar{G}(\tau) \sqrt{1 - \eta^2} + \frac{\lambda S}{4} x_1 \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (58)$$

являющимися обобщением уравнений (11) и (13).

Найдем входящие в уравнения (57) и (58) величины $\bar{I}(\tau)$, $\bar{H}(\tau)$ и $\bar{G}(\tau)$. Из уравнения (57) получаем:

$$\frac{d\bar{H}(\tau)}{d\tau} = -(1 - \lambda) \bar{I}(\tau) + \lambda \frac{S}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \quad (59)$$

и при допущении справедливости соотношения (15)

$$\frac{d\bar{I}(\tau)}{d\tau} = -(3 - \lambda x_1) \bar{H}(\tau) + \lambda \frac{S}{4} x_1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \zeta. \quad (60)$$

Из (59) и (60) следует:

$$\frac{d^2 \bar{I}(\tau)}{d\tau^2} = (3 - \lambda x_1)(1 - \lambda) \bar{I}(\tau) - [3 + (1 - \lambda)x_1] \frac{\lambda S}{4} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (61)$$

Решение уравнения (61), удовлетворяющее условию $\bar{I} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\bar{I}(\tau) = Ce^{-k\tau} + De^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (62)$$

где

$$k^2 = (3 - \lambda x_1)(1 - \lambda), \quad (63)$$

$$= -\frac{3 + (1 - \lambda)x_1 \zeta^2}{1 - k^2 \zeta^2} \frac{\lambda S}{4}, \quad (64)$$

C — произвольная постоянная. Чтобы определить постоянную C , надо воспользоваться граничным условием $\bar{I}(0) = -2\bar{H}(0)$.

Подставляя (62) в (60), находим:

$$(3 - \lambda x_1) \bar{H}(\tau) = k C e^{-k\tau} + \left(\frac{1}{\zeta} D + \frac{\lambda S}{4} x_1 \zeta \right) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}. \quad (65)$$

Поэтому указанное выше граничное условие дает:

$$C(3 - \lambda x_1 + 2k) = -\frac{\lambda S}{2} x_1 \zeta - D \left(3 - \lambda x_1 + \frac{2}{\zeta} \right), \quad (66)$$

или при учете (64)

$$C = \frac{\lambda S}{4} \frac{\zeta}{3 - \lambda x_1 + 2k} \left\{ \frac{3 + (1 - \lambda) x_1}{1 - k^2 \zeta^2} [2 + (3 - \lambda x_1) \zeta] - 2x_1 \right\}. \quad (67)$$

Для нахождения величины $\bar{G}(\tau)$ воспользуемся приближенным соотношением

$$\bar{G}(\tau) = \frac{\pi}{16} \int_{-1}^{+1} I''(\tau, \eta) d\eta. \quad (68)$$

Тогда из уравнения (58) получаем:

$$\frac{d^2 \bar{G}(\tau)}{d\tau^2} = k_1^2 \bar{G}(\tau) - \frac{3\pi^2}{128} \lambda S x_1 \sqrt{1 - \zeta^2} e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (69)$$

где

$$k_1^2 = 3 \left(1 - \frac{\pi^2}{32} \lambda x_1 \right). \quad (70)$$

Решение уравнения (69) при условиях, что $G \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и $G = \frac{2}{3} \frac{dG}{d\tau}$ при $\tau = 0$, имеет вид

$$\bar{G}(\tau) = C_1 e^{-k_1 \tau} + D_1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (71)$$

где

$$D_1 = -\frac{3\pi^2}{128} \lambda S x_1 \frac{\zeta^2 \sqrt{1 - \zeta^2}}{1 - k_1 \zeta^2}, \quad (72)$$

$$C_1 = -D_1 \frac{3 + \frac{2}{\zeta}}{3 + 2k_1}. \quad (73)$$

После определения величин $\bar{I}(\tau)$, $\bar{H}(\tau)$ и $\bar{G}(\tau)$ интенсивности излучения $I'(\tau, \eta)$ и $I''(\tau, \eta)$ легко находятся путем интегрирования уравнений (57) и (58).

Предположим теперь, что индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ произвольна. В данном случае, как и в § 1, рассеяние первого порядка мы будем учитывать точно, а рассеяние высших порядков приближенно, сохраняя в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра только два первых члена. Поэтому функция $B(\tau, \eta, \varphi)$ представляется в виде

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \lambda \bar{I}(\tau) + \lambda x_1 \bar{H}(\tau) \eta + \lambda x_1 \bar{G}(\tau) \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\lambda}{4} Sx(\gamma) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (74)$$

где параметр x_1 определен формулой (27).

Для входящих в соотношение (74) величин $\bar{I}(\tau)$, $\bar{H}(\tau)$ и $\bar{G}(\tau)$ мы возьмем полученные выше выражения (62), (65) и (71). Подставляя найденное выражение для $B(\tau, \eta, \varphi)$ в уравнение переноса излучения и интегрируя его, получаем искомые интенсивности рассеянного средой излучения.

Найдем, пользуясь указанными формулами, интенсивность излучения, выходящего из среды (т. е. интенсивность излучения, диффузно отраженного средой). Переходя от интенсивности излучения $I(0, \eta, \varphi)$ к коэффициенту яркости $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$ при помощи второго из соотношений (34), имеем:

$$S\rho(\eta, \zeta, \varphi)\zeta = \int_0^{\infty} B(\tau, -\eta, \varphi) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (75)$$

где под η понимается косинус угла отражения.

Подстановка (74) в (75) дает:

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \lambda \frac{S}{4} \frac{x(\gamma)}{\eta + \zeta} + A(\eta, \zeta) + A_1(\eta, \zeta) \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (76)$$

где

$$A(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{S\zeta} \int_0^{\infty} [\bar{I}(\tau) - x_1 \bar{H}(\tau) \eta] e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}, \quad (77)$$

$$A_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda}{S\zeta} x_1 \sqrt{1 - \eta^2} \int_0^{\infty} \bar{G}(\tau) e^{-\frac{\tau}{\eta}} \frac{d\tau}{\eta}. \quad (78)$$

Выполняя интегрирование и производя небольшие преобразования, получаем:

$$A(\eta, \zeta) = \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{1+k\eta} \frac{1}{1+k\zeta} \frac{1}{3-\lambda x_1+2k} \frac{1}{\eta+\zeta} \left\{ 2(3-\lambda x_1)(\eta+\zeta) + \right. \\ \left. + [3+(1-\lambda)x_1][3+(1-\lambda)x_1+2k]\eta\zeta - 2kx_1\eta\zeta - \right. \\ \left. - 2kx_1(\eta^2+\zeta^2) - 2kx_1^2(1-\lambda)\eta^2\zeta^2 - x_1^2\eta\zeta(1+k\eta)(1+k\zeta) \right\}, \quad (79)$$

$$A_1(\eta, \zeta) = \frac{\lambda^2}{4} x_1^2 \frac{3\pi^2}{32} \frac{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)}}{(3+2k_1)(1+k_1\eta)(1+k_1\zeta)} \left[2 + (3+2k_1) \frac{\eta\zeta}{\eta+\zeta} \right]. \quad (80)$$

Формулами (76), (79) и (80) и определяется искомый коэффициент яркости среды бесконечно большой оптической толщины при наличии истинного поглощения.

Заметим, что из указанных формул может быть получен коэффициент яркости и в случае чистого рассеяния. Для этого надо положить в них $\lambda = 1$. Так как в данном случае $k = 0$, то выражение для $A(\eta, \zeta)$ сильно упрощается и приводится к виду

$$A(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} + \frac{3+x_1}{4} \frac{\eta\zeta}{\eta+\zeta}. \quad (81)$$

Если отбросить последний член в формуле (76), то при $\lambda = 1$ найдем:

$$\rho(\eta, \zeta, \varphi) = \frac{1}{4} \frac{x(\gamma)}{\eta+\zeta} + \frac{1}{2} + \frac{3+x_1}{4} \frac{\eta\zeta}{\eta+\zeta}. \quad (82)$$

Легко видеть, что формула (82) совпадает с формулой (36) при $\tau_0 = \infty$, полученной без учета зависимости рассеяний высших порядков от азимута. Последний член формулы (76) учитывает эту зависимость, и поэтому она более точна, чем формула (82).

§ 5. Оптические свойства планетных атмосфер

В теории переноса лучистой энергии определяются интенсивности излучения, рассеянного средой, при заданных оптических свойствах среды. Перед исследователем планетных атмосфер стоит обратная задача. Ему известны из наблюдений интенсивности излучения, рассеянного атмосферой, и требуется найти путем сравнения наблюдений с теорией оптические свойства атмосферы. В § 3 было показано, как могут быть определены оптические свойства земной атмосферы [индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ и оптическая толщина τ_0] по наблюдаемой яркости неба. Теперь мы рассмотрим задачу об определении оптических свойств планетной атмосферы по наблюдаемой яркости диска планеты.

Все планеты по оптической толщине атмосферы могут быть разбиты на две группы. Одни планеты (Венера, Юпитер, Сатурн) обладают атмосферами, оптическая толщина которых велика по сравнению с единицей. В этом случае через атмосферу не видна поверхность планеты. Другие планеты окружены атмосферами небольшой оптической толщины. Примером таких планет может служить Марс. Через атмосферу Марса хорошо видна его поверхность.

Рассмотрим сначала планеты первой группы. Из них наиболее удобна для исследований Венера, которая наблюдается при всевозможных углах фазы. Считая оптическую толщину атмосферы Венеры бесконечно большой, мы сейчас применим к ней результаты, полученные в предыдущем параграфе.

Так как альbedo Венеры меньше единицы (около 0,6), то в ее атмосфере некоторую роль играет истинное поглощение света. Если бы индикатриса рассеяния была сферической, то при указанном альbedo было бы $\lambda = 0,95$. Однако можно ожидать, что в атмосфере Венеры индикатриса рассеяния сильно вытянута вперед, вследствие чего величина λ будет еще ближе к единице, чем при сферической индикатрисе рассеяния (см. § 3 главы III). Поэтому мы будем пренебрегать величинами порядка $1 - \lambda$.

Формула (79) при отбрасывании членов порядка $1 - \lambda$ принимает вид

$$A(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} + \frac{3+x_1}{4} \frac{\eta\zeta}{\eta+\zeta} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{1-\lambda}{3-x_1}} (2+3\eta)(2+3\zeta). \quad (83)$$

Формулу (80) приближенно можно записать так:

$$A_1(\eta, \zeta) = \frac{x_1^2}{2(3+2\sqrt{3-x_1})} \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)}. \quad (84)$$

Пользуясь формулой (76), в которой величины $A(\eta, \zeta)$ и $A_1(\eta, \zeta)$ определены формулами (83) и (84) [или более точными формулами (79) и (80)], мы можем найти распределение яркости по диску планеты при любом угле фазы. Из сравнения теоретического распределения яркости с наблюдаемым распределением при разных углах фазы могут быть найдены индикатриса рассеяния $x(\gamma)$ и величина λ в планетной атмосфере.

Для определения оптических свойств планетной атмосферы может быть также использована зависимость звездной величины планеты m от угла фазы α . Чтобы получить теоретическую зависимость m от α , выразим входящие в формулу (76) углы η , ζ и $\varphi - \varphi_0$ через планетоцентрические координаты ω , ψ и угол фазы α (рис. 24). Угол фазы есть угол при планете между направлением на Солнце и направлением на Землю. Так как $\gamma = \pi - \alpha$, то из формулы (31) следует:

$$\cos \alpha = \eta\zeta - \sqrt{(1-\eta^2)(1-\zeta^2)} \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (85)$$

Далее, пользуясь рис. 24, находим:

$$\zeta = \cos \psi \cos(\alpha - \omega), \quad \eta = \cos \psi \cos \omega. \quad (86)$$

Пусть πS — освещенность площадки, перпендикулярной к солнечным лучам, на верхней границе атмосферы Венеры. Тогда интенсивность излучения, диффузно отраженного атмосферой, будет равна $S\rho(\eta, \zeta, \varphi)\zeta$, а количество энергии, идущее от элемента площади $d\sigma$ в единице телесного угла, будет $S\rho(\eta, \zeta, \varphi)\zeta\eta d\sigma$. Так как $d\sigma = a^2 \cos \psi d\psi d\omega$, где a — радиус планеты, то указанное количество энергии

может быть записано в виде

$$S a^2 \rho(\eta, \zeta, \varphi) \cos(\alpha - \omega) \cos \omega \cos^3 \phi \, d\phi \, d\omega. \quad (87)$$

Чтобы получить полное количество энергии, идущее от Венеры в направлении Земли в единице телесного угла, надо проинтегрировать выражение (87) по ϕ в преде-

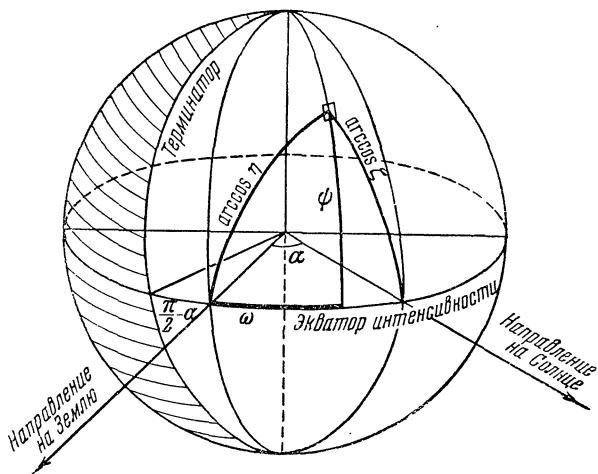


Рис. 24.

лах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$ и по ω в пределах от $\alpha - \frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. от терминатора до края диска. Обозначая через Δ расстояние от Венеры до Земли, для освещенности Земли от Венеры получаем:

$$E_V = 2S \frac{a^2}{\Delta^2} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \omega) \cos \omega \, d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\eta, \zeta, \varphi) \cos^3 \phi \, d\phi. \quad (88)$$

Так как освещенность Земли от Солнца равна $E_S = \pi S \left(\frac{r}{R}\right)^2$, где r — расстояние от Солнца до Венеры и

R — расстояние от Солнца до Земли, а $\frac{E_V}{E_S} = 2,512^{m_\odot - m}$, где m_\odot — звездная величина Солнца, то мы находим:

$$2,512^{m_\odot - m} = \\ = \frac{2}{\pi} \left(\frac{Ra}{r\Delta} \right)^2 \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha - \omega) \cos \omega d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\eta, \zeta, \varphi) \cos^3 \psi d\psi. \quad (89)$$

Если в соотношение (89) подставить выражение для $\rho(\eta, \zeta, \varphi)$, то мы получим искомую теоретическую зависимость звездной величины планеты m от угла фазы α .

Пользуясь формулой (76), вместо соотношения (89) получаем:

$$x(\pi - \alpha)f(\alpha) + g(\alpha) = h(\alpha), \quad (90)$$

где введены обозначения

$$f(\alpha) = \frac{1}{4} \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \omega \cos(\alpha - \omega)}{\cos \omega + \cos(\alpha - \omega)} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi = \\ = \frac{\pi}{16} \left[1 - \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4} \right], \quad (91)$$

$$g(\alpha) = \int_{\alpha - \frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega \cos(\alpha - \omega) d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} [A(\eta, \zeta) + \\ + A_1(\eta, \zeta) \cos(\varphi - \varphi_0)] \cos^3 \psi d\psi, \quad (92)$$

$$h(\alpha) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{r\Delta}{Ra} \right)^2 2,512^{m_\odot - m}. \quad (93)$$

Величина $h(\alpha)$ зависит только от наблюдательных данных, а величина $g(\alpha)$, кроме угла фазы α , зависит также от величин λ и x_1 .

При помощи соотношения (90), а также формул

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} x(\gamma) \sin \gamma \, d\gamma = 1, \quad \frac{3}{2} \int_0^{\pi} x(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma \, d\gamma = x_1 \quad (94)$$

можно определить индикатрису рассеяния $x(\gamma)$ и значение параметра x_1 в планетной атмосфере, если известна из наблюдений зависимость звездной величины планеты от угла фазы.

По данным Рессела, звездная величина Венеры дается формулой

$$m = -4,71 + 0,01322\alpha + 0,000000425\alpha^2 \quad (95)$$

в пределах от $\alpha = 24^\circ$ до $\alpha = 156^\circ$ при среднем расстоянии Венеры от Солнца и единичном расстоянии от Земли, а звездная величина Солнца равна $m_\odot = -26^m,72$.

Найденная с этими данными индикатриса рассеяния в атмосфере Венеры приведена в таблице 37. Числа в скобках в таблице — результат экстраполяции. Чтобы получить индикатрису рассеяния более точно, необходимы наблюдения Венеры при углах фазы, близких к 0 и 180° .

Отношение коэффициента истинного поглощения к сумме коэффициентов рассеяния и истинного поглощения для атмосферы Венеры оказалось равным $\lambda = 0,989$.

Т а б л и ц а 37

Индикатриса рассеяния атмосферы Венеры

γ	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180°
$x(\gamma)$	(7,2)	(6,0)	2,70	1,50	1,00	0,67	0,51	0,40	0,35	0,41	0,56	(0,65)	(0,70)

Из таблиц 36 (стр. 366) и 37 видно, что индикатрисы рассеяния атмосфер Земли и Венеры весьма похожи друг на друга, а также на те, которые вычисляются на основе теории Ми. Это говорит прежде всего о том, что

приведенные выше формулы достаточно точны, так как при выводе их не делалось никаких предположений о виде индикатрисы рассеяния.

Однако индикатриса рассеяния атмосферы Венеры более сильно вытянута вперед, чем индикатриса рассеяния атмосферы Земли (для первой из них $x_1 = 1,3$, а для второй $x_1 = 0,63$). Это значит, что в атмосфере Венеры рассеяние света крупными частицами играет гораздо большую роль, чем в атмосфере Земли.

Приведенные выше результаты определения оптических свойств атмосферы Венеры были получены автором [2]. В дальнейшем аналогичную работу выполнили Н. П. Барабашев и В. И. Езерский [14]. Для этого они использовали формулы (90) и (94) и кривую блеска Венеры, полученную Данжоном. Найденная ими индикатриса рассеяния оказалась в общем похожей на приведенную в таблице, однако еще более сильно вытянутой вперед (для нее $x_1 \doteq 1,7$, а $\lambda = 0,995$). Н. П. Барабашев и В. И. Езерский при помощи полученных автором величин $x(\gamma)$ и λ вычислили также распределение яркости по диску Венеры и, сравнив его с наблюдаемым распределением яркости, констатировали удовлетворительное согласие между ними. К такому же выводу пришел и занимавшийся тем же вопросом Л. И. Шингарев [15]. Так как названные исследователи имели в своем распоряжении результаты фотометрических наблюдений Венеры в разных лучах (полученные Н. П. Барабашевым), то из указанного анализа они сделали также некоторые более тонкие заключения об оптических явлениях в атмосфере Венеры.

Определение оптических свойств атмосфер Юпитера и Сатурна представляет большие трудности, так как угол фазы этих планет почти не меняется, оставаясь все время близким к нулю. Однако при наличии достаточно точной абсолютной фотометрии Юпитера и Сатурна можно надеяться определить параметры λ и x_1 для их атмосфер.

При определении оптических свойств атмосферы Марса, обладающей небольшой оптической толщиной, следует одновременно определять и оптические свойства поверхности планеты. Увеличение числа параметров, подлежа-

щих определению, сильно усложняет интерпретацию фотометрических наблюдений Марса. К тому же угол фазы Марса меняется в сравнительно небольших пределах (от 0 до 47°).

Изучением Марса занималась Н. Н. Сытинская [16], получившая фотографии Марса в разных лучах во время великого противостояния 1939 г. Интерпретация наблюдений производилась при помощи приближенных формул для коэффициентов яркости, приведенных в § 2. Индикатриса рассеяния атмосферы планеты считалась известной (в одном варианте — рэлевская, в другом — приведенная в таблице 36 для земной атмосферы). В результате была определена оптическая толщина атмосферы Марса для разных длин волн. В видимой части спектра она оказалась равной приблизительно 0,05.

§ 6. Применение к оптике моря

Полученные выше формулы могут быть применены не только к газообразным средам, но и к жидкостям. Особый интерес представляет применение их к водным бассейнам, в частности к морю.

Море освещено как прямым излучением Солнца, так и излучением, рассеянным атмосферой. Излучение, падающее на море, частично от него отражается, а частично попадает внутрь моря. Часть квантов, попавших в море, выходит наружу после рассеяний в море. Интенсивность излучения, выходящего из моря, сравнима с интенсивностью излучения, отраженного морем. Это следует из того, что различные моря имеют разный цвет.

Оптическую толщину моря можно считать бесконечно большой. Поэтому для определения интенсивности диффузного излучения моря могут быть использованы формулы, полученные в § 4.

Для простоты мы примем, что море освещено только солнечными лучами. Вступающие в море лучи преломляются на границе. В дальнейшем под ζ мы будем понимать косинус угла падения лучей после преломления и под πS — созданную этими лучами освещенность перпендикулярной к ним площадки.

Процесс рассеяния света в море описывается уравнениями (56). В принятом нами приближении для функции $B(\tau, \eta, \varphi)$ получается формула (74), в которой величины $\bar{I}(\tau)$, $\bar{H}(\tau)$ и $\bar{G}(\tau)$ определены формулами (62), (65) и (71) соответственно.

Однако входящие в указанные формулы постоянные C и C_1 должны быть найдены из новых граничных условий. Эти условия должны выражать собой тот факт, что излучение, подходящее со стороны моря к поверхности, может зеркально отразиться от нее (т. е. испытать внутреннее отражение). Если к поверхности подходит излучение интенсивности I под углом $\arccos \eta$ к нормали, то интенсивность отраженного излучения будет равна $r(\eta) I$, где функция $r(\eta)$ определяется формулой Френеля. При $\eta < \eta_0$, где $\arccos \eta_0$ — угол полного внутреннего отражения, $r(\eta) = 1$.

Граничные условия, учитывающие внутреннее отражение, мы запишем приближенно, приняв, что интенсивности I' и I'' падающего на границу излучения не зависят от направления. Тогда получаем:

$$\bar{I}(0) = \frac{1}{2} I' \left[1 + \int_0^1 r(\eta) d\eta \right], \quad (96)$$

$$\bar{H}(0) = \frac{1}{2} I' \left[-\frac{1}{2} + \int_0^1 r(\eta) \eta d\eta \right]. \quad (97)$$

Отсюда следует:

$$\bar{I}(0) = -R\bar{H}(0), \quad (98)$$

где

$$R = \frac{1 + \int_0^1 r(\eta) d\eta}{\frac{1}{2} - \int_0^1 r(\eta) \eta d\eta}. \quad (99)$$

Аналогично находим:

$$\bar{G}(0) = \frac{R}{3} \left(\frac{dG}{d\tau} \right)_{\tau=0}. \quad (100)$$

Для моря вычисление по формуле (99) дает $R = 6,7$. Если бы внутреннее отражение отсутствовало, то было бы $r = 0$, $R = 2$, и из соотношений (98) и (100) мы получили бы граничные условия, которыми пользовались раньше.

При помощи граничных условий (98) и (100) для постоянных C и C_1 имеем:

$$C(3 - \lambda x_1 + Rk) = -R \frac{\lambda S}{4} x_1 \zeta - D \left(3 - \lambda x_1 + \frac{R}{\zeta} \right), \quad (101)$$

$$C_1 = -D_1 \frac{3 + \frac{R}{\zeta}}{3 + Rk_1}. \quad (102)$$

Функция $B(\tau, \eta, \varphi)$ в рассматриваемом случае равна

$$\begin{aligned} B(\tau, \eta, \varphi) = & \lambda (C e^{-k\tau} + D e^{-\frac{\tau}{\zeta}}) + \frac{\lambda x_1 \eta}{3 - \lambda x_1} \left[k C e^{-k\tau} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{D}{\zeta} + \frac{\lambda S}{4} x_1 \zeta \right) e^{-\frac{\tau}{\zeta}} \right] + \lambda x_1 (C_1 e^{-k_1 \tau} + \\ & + D_1 e^{-\frac{\tau}{\zeta}}) \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\lambda S}{4} x(\gamma) e^{-\frac{\tau}{\zeta}}, \quad (103) \end{aligned}$$

где постоянные C и C_1 определены только что полученными формулами (101) и (102).

Пользуясь выражением (103) для функции $B(\tau, \eta, \varphi)$ и уравнением переноса излучения, мы можем определить интенсивность излучения на любой оптической глубине. Например, при $\tau = 0$ получаем:

$$\begin{aligned} I(0, -\eta, \varphi) = & \lambda \left(\frac{C}{1 + k\eta} + \frac{D\zeta}{\eta + \zeta} \right) - \\ & - \frac{\lambda x_1 \eta}{3 - \lambda x_1} \left(\frac{kC}{1 + k\eta} + \frac{D + \frac{\lambda S}{4} x_1 \zeta^2}{\eta + \zeta} \right) + \lambda x_1 \left(\frac{C_1}{1 + k_1 \eta} + \frac{D_1 \zeta}{\eta + \zeta} \right) \times \\ & \times \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\lambda S}{4} x(\gamma) \frac{\zeta}{\eta + \zeta} \quad (\eta > 0). \quad (104) \end{aligned}$$

Формула (104) дает интенсивность излучения, подходящего снизу к поверхности моря. Чтобы получить интенсивность излучения, выходящего из моря, надо выражение (104) умножить на величину $[1 - r(\eta)] n^2$, где n — показатель преломления атмосферы относительно воды, и учесть изменение направления луча вследствие преломления (см. § 8 главы VII).

При помощи формулы (103) можно также определить световой режим в глубоких слоях моря (при $\tau \gg 1$). В данном случае в выражении для функции $B(\tau, \eta, \varphi)$ сохраняются только члены, содержащие множитель $e^{-k\tau}$, т. е.

$$B(\tau, \eta) = b(\eta) e^{-k\tau}, \quad (105)$$

где

$$b(\eta) = \lambda C \left(1 + \frac{kx_1\eta}{3 - \lambda x_1} \right) \quad (106)$$

и

$$k = \sqrt{(1 - \lambda)(3 - \lambda x_1)}. \quad (107)$$

Поэтому для интенсивности излучения на оптической глубине τ получаем:

$$I(\tau, \eta) = \frac{b(\eta)}{1 - k\eta} e^{-k\tau}. \quad (108)$$

Здесь $\eta > 0$ для излучения, идущего сверху вниз, и $\eta < 0$ для излучения, идущего снизу вверх.

Из того факта, что для глубоких слоев моря можно перейти от выражения (103) к выражению (105), следуют два вывода: 1) в глубоких слоях интенсивность прямого солнечного излучения мала по сравнению с интенсивностью диффузного излучения; 2) в этих слоях интенсивность диффузного излучения не зависит от азимута.

Сделанные выводы справедливы только тогда, когда $k < \frac{1}{\xi}$. Для воды величина k мала (вследствие сильной вытянутости вперед индикатрисы рассеяния и близости параметра λ к единице), а потому указанное неравенство выполняется. Если бы значения параметров x_1 и λ были малы, то при определении величины k из

формулы (107) мы могли бы получить $k > 1$. Однако такой результат связан с тем, что формула (107) приближенная. При точном рассмотрении вопроса всегда будет $k < 1$, т. е. сделанные выше выводы будут всегда справедливы.

Напомним, что точное рассмотрение задачи о световом режиме в глубоких слоях среды бесконечно большой оптической толщины было выполнено в § 6 главы III. Там было показано, что функции $B(\tau, \eta)$ и $I(\tau, \eta)$ имеют вид (105) и (108), а величина k при индикатрисе рассеяния $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$ определяется из уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \left(1 + x_1 \frac{1-\lambda}{k^2} \right) \lg \frac{1+k}{1-k} - \lambda x_1 \frac{1-\lambda}{k^2} = 1. \quad (109)$$

При малых значениях k вместо (109) получаем формулу

$$\lambda k^2 = (1 - \lambda)(3 - \lambda x_1), \quad (110)$$

которая при значениях λ , близких к единице, переходит в формулу (107).

Полученные выше формулы могут быть использованы для решения различных задач оптики моря. Приведем два примера.

1. Пусть некоторый предмет погружен в море. Вообще говоря, он вызывает возмущение светового режима и благодаря этому может быть обнаружен. Поставим вопрос, какой должна быть отражательная способность предмета, чтобы он не был виден.

Для простоты допустим, что предмет представляет собой тонкую пластинку, расположенную в горизонтальной плоскости и отражающую падающее на нее излучение зеркально. Интенсивность излучения, падающего на верхнюю поверхность предмета под углом $\arccos \eta$ к нормали, согласно формулам (106) и (108) равна

$$I(\tau, \eta) = \left(1 + \frac{kx_1\eta}{3 - \lambda x_1} \right) \frac{\lambda C}{1 - k\eta} e^{-k\tau}. \quad (111)$$

Чтобы предмет не был виден, необходимо, чтобы интен-

сивность излучения, отраженного от предмета, определялась формулой

$$I(\tau, -\eta) = \left(1 - \frac{kx_1\eta}{3 - \lambda x_1}\right) \frac{\lambda C}{1 + k\eta} e^{-k\tau}, \quad (112)$$

т. е. чтобы коэффициент отражения верхней поверхности предмета был бы равен

$$r_*(\eta) = \frac{3 - \lambda x_1 - kx_1\eta}{3 - \lambda x_1 + kx_1\eta} \cdot \frac{1 - k\eta}{1 + k\eta}. \quad (113)$$

Для коэффициента отражения нижней поверхности предмета получится такая же формула с изменением знака на противоположный перед η .

Мы видим, что для верхней поверхности $r_* < 1$, для нижней поверхности $r_* > 1$. Первое соотношение может быть выполнено, второе не может. Поэтому самое лучшее, что можно сделать, чтобы замаскировать предмет, это подобрать r_* для верхней поверхности согласно формуле (113) и выкрасить его нижнюю поверхность в белый цвет. Интересно отметить, что приблизительно такую окраску имеет тело рыб.

Аналогично может быть рассмотрена задача о видимости в воде предмета более сложной формы и отражающего излучение не зеркально, а во все стороны.

2. Полученные выше формулы для интенсивностей излучения, рассеянного морем, относятся к определенной частоте ν . От частоты зависит не только интенсивность излучения, вступающего в море, но и оптические свойства моря: коэффициент истинного поглощения κ , коэффициент рассеяния σ и индикатриса рассеяния $x(\gamma)$. Поэтому будут функциями от ν и величины, входящие в приведенные выше формулы:

$$\text{оптическая глубина } \tau = \int_0^z (\kappa + \sigma) dz,$$

$$\text{параметр } \lambda = \frac{\sigma}{\kappa + \sigma} \text{ и параметр } x_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma d\gamma.$$

Если указанные функции от γ известны, то, пользуясь формулой (108), мы можем определить спектральный состав диффузного излучения в глубоких слоях моря. Вообще говоря, он будет сильно отличаться от спектрального состава солнечного излучения и, кроме того, будет меняться с изменением глубины.

При помощи формулы (104) можно также вычислить интенсивность излучения, выходящего из моря, в зависимости от частоты. Это излучение добавляется к излучению, отраженному от поверхности моря, и определяет собой цвет моря. Различие в цвете разных морей объясняется тем, что зависимость величин κ , σ и $x(\gamma)$ от частоты для разных морей различна.

Впервые правильное объяснение цвета моря было дано в работах В. В. Шулейкина [17] и Рамана [18]. Подробное рассмотрение этого вопроса, а также ряда других вопросов оптики моря содержится в книге В. В. Шулейкина [19].

В начале этого параграфа было сделано предположение, что море освещено прямыми солнечными лучами. В действительности, однако, на поверхность моря падает также диффузное излучение атмосферы. Поэтому интенсивность излучения, рассеянного морем, будет равна

$$I = I_S + I_A,$$

где I_S и I_A — интенсивности излучения, обусловленные рассеянием света, попавшим в море от Солнца и из атмосферы соответственно.

Величина I_S определена формулами, приведенными выше. Очевидно, что величина I_A также может быть получена из этих формул. Пусть $I_0(\zeta, \varphi_0) d\omega$ — интенсивность излучения, вступившего из атмосферы в море под углом $\arccos \zeta$ к нормали при азимуте φ_0 внутри телесного угла $d\omega$. Тогда для определения величины I_A надо величину I_S умножить на $\frac{I_0(\zeta, \varphi_0)}{\pi S} d\omega$ и проинтегрировать полученное произведение по всем направлениям вступившего в море диффузного излучения.

В заключение этой главы следует сказать, что изложенный в ней приближенный метод был предложен 15 лет

назад. С тех пор теория переноса излучения достигла больших успехов, благодаря которым могут быть, повидимому, разработаны более эффективные приближенные методы.

В последнее время выяснилась также важность ряда задач, которые почти не рассматривались ранее. В виде примера можно указать задачу о переносе излучения в среде с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния. Другим примером может служить расчет поля излучения в среде, в которой величины λ и $x(\gamma)$ зависят от координат. Решением этих задач будет сделан существенный вклад в теорию переноса излучения.

ЛИТЕРАТУРА

К главе I

1. R a y l e i g h, On the scattering of light by small particles, Phil. Mag. 41, 102, 447, 1871.
2. M i e G., Beiträge zur Optik trüben Medien, Speziell kolloidaler Metallösungen, Ann. d. Phys. 25, 1908.
3. Ш у л е й к и н В. В., Scattering of Light by very big Colloidal Particles, Phil. Mag. 48, 1924.
4. Ш и ф р и н К. С., Рассеяние света в мутной среде, Гостехиздат, 1951.
5. Х в о л ь с о н О. Д., Grundzüge einer mathematischen Theorie der inneren Diffusion des Lichtes, Изв. Петербургской Академии наук 33, 221, 1890.
6. А м б а р ц у м я н В. А., Рассеяние и поглощение света в планетных атмосферах, Уч. Зап. ЛГУ, № 82, 1941.
7. M i n n a e r t M., The reciprocity principle in lunar photometry, Ap. J. 93, 403, 1941.
8. M i l n e E. A., Radiative equilibrium in the outer layers of a star, MN 81, 361—375, 1921.
9. М у с т е л ь Э. Р., Теория лучистого равновесия звездных атмосфер для коэффициента поглощения, зависящего от частоты, Труды ГАИШ, т. XII, вып. 2, 1940.
10. C h a n d r a s e k h a r S., On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. VII, Ap. J. 101, 328, 1945.
11. E d d i n g t o n A. S., The Formation of Absorption Lines, MN 89, 620, 1929.

К главе II

1. Ф е с е н к о в В. Г., Об отражении света матовыми поверхностями, Изв. Русск. астр. общ. 22, № 3, 1916.
2. S c h o e n b e r g E., Theoretische Photometrie, Handbuch der Astrophysik II/1, Berlin, 1929.

3. Кузнецов Е. С., Применение формул теории негоризонтальной видимости к расчету яркости неба и дальности видимости для простейших форм индикатрисы рассеяния, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофизич. 9, № 3, 1945.
4. Кузнецов Е. С. и Овчинский Б. В., Результаты численного решения интегрального уравнения теории рассеяния света в атмосфере. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 4, 1949.
5. Schwarzschild K., Über des Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre, Göttinger Nachr. 41, 1906.
6. Schuster A., Radiation through a Foggy Atmosphere, Ap. J. 21, 1, 1905.
7. Eddington A., The internal constitution of the Stars, Cambridge, 1926.
8. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Oxford, 1950 (русск. перевод: Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953).
9. Кузнецов Е. С., Общий метод построения приближенных уравнений переноса лучистой энергии, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофизич., № 4, 1951.
10. Kourganoff V., Sur la constance du flux intégré dans les atmosphères stellaires et la résolution de l'équation de transfert, C. R. 225, 491, 1947.
11. Kourganoff V., With the collaboration of I. W. Busbridge, Basic methods in transfer problems, Oxford, 1952.
12. Marshak R. E., The variational method for asymptotic neutron densities, Ph. Rev. 71, 688, 1947.
13. Davison B., A remark on the variational method, Ph. Rev. 71, 694, 1947.
14. Le Caine J., Application of a variational method to Milne's problem, Ph. Rev. 72, 564, 1947.
15. Su Shu Huang, The variational method for problems of radiative transfer, Ap. J. 117, 211, 1953.
16. Menzel D. H. and Sen H. K., Transfer of radiation, Ap. J. 110, 1, 1949; 113, 482, 1951.
17. Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge Tracts 31, 1934.
18. Фок В. А., О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Матем. сб. 14 (56), № 1—2, 1944.

К главе III

1. Амбарцумян В. А., Об одномерном случае задачи о рассеивающей и поглощающей среде конечной оптической толщины, Изв. АН Арм. ССР, № 1—2, 1944.
2. Амбарцумян В. А., К вопросу о диффузном отражении света мутной средой, ДАН СССР 38, № 8, 1943.
3. Амбарцумян В. А., К задаче о диффузном отражении света, ЖЭТФ 13, вып. 9—10, 1943.
4. Амбарцумян В. А., О рассеянии света атмосферами планет, АЖ 19, № 5, 1942.
5. Амбарцумян В. А., Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз. 3, 1942.
6. Амбарцумян В. А., Диффузия света через рассеивающую среду большой оптической толщины, ДАН СССР 43, № 3, 1944.
7. Соболев В. В., О световом режиме в глубоких слоях мутной среды, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз. 8, № 5, 1944.
8. Барабашев Н. П., Результаты фотометрии Сатурна, Труды Астр. обс. ХГУ 1 (9), 1950.

К главе IV

1. Соболев В. В., О коэффициентах яркости плоского слоя мутной среды, ДАН СССР 61, № 5, 1948.
2. Соболев В. В., О диффузном отражении и пропускании света плоским слоем мутной среды, ДАН СССР 69, № 3, 1949.
3. Соболев В. В., К задаче о диффузном отражении и пропускании света, ДАН СССР 69, № 4, 1949.
4. Соболев В. В., О распределении яркости по диску звезды, АЖ 26, № 1, 1949.
5. Carlén T., Arkiv för Mat., Astr. och Fysik 16, № 26, 1922.

К главе V

1. Соболев В. В., О поляризации рассеянного света, Уч. зап. ЛГУ, № 16, 1949.

2. Chandra Sekhar S., On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere, Ap. J. 103, 351, 1946; 104, 110, 1946; 105, 164, 1947 и др.
3. Домбровский В. А., О поляризации излучения звезд ранних спектральных типов, ДАН АрмССР 10, № 5, 1949.

К главе VI

1. Соболев В. В., Новый метод в теории рассеяния света, АЖ 28, вып. 5, 1951.
2. Strömgren B., The influence of electron capture on the contours Fraunhofer lines, Zs. f. Ap. 10, 237, 1935.
3. Chandra Sekhar S., On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere. XX, Ap. J. 106, 145, 1947.
4. Норак Н. Г., Lundquist Ch. A., The transfer of radiation by an emitting atmosphere, Ap. J. 116, 477, 1952; 119, 542, 1954; 121, 175, 1955.
5. Амбарцумян В. А., Точечный источник света в мутной среде, Бюлл. Ерев. астр. obs., № 6, 1945.
6. Соболев В. В., Точечный источник света между параллельными плоскостями, ДАН СССР 42, 176, 1944.
7. Каплан С. А., Отражение света пылевыми туманностями, АЖ 29, вып. 3, 1952.
8. Каплан С. А. и Климишин И. А., Рассеяние света в сферических туманностях, Цирк. Астр. obs. Львовск. ун-та, № 27, 1953.
9. Биберман Л. М., К теории рассеяния света в изотропных средах, ЖЭТФ 23, вып. 1(7), 1952.

К главе VII

1. Кузнецов Е. С., Рассеяние света в среде, прилегающей к отражающей стенке с заданным альбедо, Изв. АН СССР, серия геогр и геофиз., № 5, 1942.
2. Кузнецов Е. С., К вопросу об учете диффузного отражения света поверхностью Земли в задаче о рассеянии света в атмосфере, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофизич. 8, № 1, 1945.
3. Соболев В. В., О коэффициентах яркости плоского слоя мутной среды, ДАН СССР, 61, № 5, 1948.
4. Van de Hulst U., Scattering in a planetary atmosphere, Ap. J. 107, 220, 1948.

К главе VIII

1. Н е н у е у L. G., The Doppler effect in Resonance Lines, Proc. Nat. Acad. Sc. **26**, 50, 1940.
2. С о б о л е в В. В., Диффузия излучения с перераспределением по частотам, I, Вестн. Ленингр. ун-та, № 5, 1955; II, № 11, 1955.
3. Б и б е р м а н Л. М., К теории диффузии резонансного излучения, ЖЭТФ **17**, 416, 1947.
4. А м б а р ц у м я н В. А., On the radiative equilibrium of a planetary nebula, Бюлл. Пулк. обс. **13**, 3, 1933.
5. Z a n s t r a H., Radiation pressure in an expanding nebula, MN **95**, 84, 1934.
6. С о б о л е в В. В., Световое давление в расширяющейся туманности, АЖ **21**, 143, 1944.
7. Z a n s t r a H., On scattering with redistribution and radiation pressure in a Stationary nebula, Bull. of the Astr. Inst. Neth., XI, № 401, 1949.
8. С о б о л е в В. В., Некогерентное рассеяние света в звездных атмосферах, АЖ **26**, 129, 1949.
9. B u s b r i d g e I d a W., Coherent and non-coherent scattering in the theory of line formation, MN **113**, 52, 1953.
10. С о б о л е в В. В., Образование линий поглощения при некогерентном рассеянии света, АЖ, **31**, 231, 1954.
11. H o u t g a s t J., The variations in the profiles of strong Fraunhofer lines, Utrecht, 1942.
12. S a v e d o f f M. P., Formation of Absorption lines by noncoherent Scattering, Ap. J. **115**, 509, 1952.
13. S t i b b s D. W. N., On a problem in the theory of formation of absorption lines, MN, **113**, 493, 1953.
14. M i y a m o t o S., On the calculation of noncoherent contours, Publ. Astr. Soc. Japan. **6**, № 9, 1954; **7**, № 1, 1955.
15. L a b s D., Untersuchungen zur inkohärenten Streuung in Fraunhoferlinien, Zs. f. Astroph. **28**, 150, 1951; **34**, 173, 1954.

К главе IX

1. C o m p t o n K. T., Some properties of resonance radiation and excited atoms, Phil. Mag. **45**, 750, 1923.
2. M i l n e E. A., Journ. Lond. Math. Soc. **1**, 1, 1926.

3. С о б о л е в В. В., К теории нестационарного поля излучения. I, АЖ 29, вып. 4, 1952.
4. А м б а р ц у м я н В. А., О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде, ДАН Арм. ССР 8, № 3, 1948.
5. Т е р-М л к а е л я н М. Л., Одномерный случай задачи о числе рассеяний при диффузии фотонов, ДАН АрмССР 8, № 4, 1948.
6. С о б о л е в В. В., К теории нестационарного поля излучения. II, АЖ 29, вып. 5, 1952.
7. С о б о л е в В. В., К теории свечения новых звезд, АЖ31, № 1, 1954.
8. С о б о л е в В. В., Свечение звездной оболочки при отсутствии лучистого равновесия, АЖ27, вып. 2, 1950.
9. G r o t r i a n W., Zur physikalischen Deutung der Lichtkurve der N Her, Zs. f. Ap. 13, 215, 1937.
10. М и н и н И. Н., Изменение электронной температуры в звездных оболочках при отсутствии лучистого равновесия, АЖ 29, вып. 2, 1952.
11. Г о р б а ц к и й В. Г., О причинах появления узких линий поглощения в спектрах звезд типа Ве, АЖ 31, вып. 6, 1954.

К главе X

1. С о б о л е в В. В., Приближенное решение задачи о рассеянии света в среде с произвольной подкатрисой рассеяния, АЖ 20, № 5—6, 1943.
2. С о б о л е в В. В., Об оптических свойствах атмосферы Венеры, АЖ 21, № 5, 1944.
3. С о б о л е в В. В., О рассеянии света в атмосферах планет, Труды юбилейной научной сессии ЛГУ, 1948.
4. С о б о л е в В. В., О рассеянии света в атмосферах Земли и планет, Уч. зап. ЛГУ, № 116, 1949.
5. Г у т н а б а ш С. Д., Рассеяние света в среде с меняющейся индикатрисой рассеяния, Уч. зап. ЛГУ, № 153, 1952.
6. К р а т В. А., Некоторые задачи теории рассеяния света в земной атмосфере, АЖ 19, № 1, 1942.
7. К у з н е ц о в Е. С., Теория негоризонтальной видимости, Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 5, 1943.
8. К а с т р о в В. Г., Некоторые вопросы теории рассеяния света в чистой атмосфере, Журнал геофизики, № 2, 1933.

9. Гордов А. Н., О возможности применения теории рассеяния света к реальной атмосфере, Журнал геофизики, № 4, 1936.
 10. Махоткин Л. Г., О способах вычисления рассеянной освещенности при ясном небе, Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5, 1953.
 11. Пясковская-Фесенкова Е. В., Об асимметрии атмосферной индикатрисы рассеяния, ДАН СССР, 73, № 2, 1950.
 12. Пясковская-Фесенкова Е. В., Зависимость рассеяния света в атмосфере от длины волны, ДАН СССР 80, № 4, 1951.
 13. Крат В. А., Индикатриса рассеяния света в земной атмосфере, АЖ 20, вып. 5—6, 1943.
 14. Барабашев Н. П. и Езерский В. И., Фотометрия Венеры, Изв. АН КазССР, № 90, 1950.
 15. Шингарев Л. И., К вопросу о роли рассеяния света в атмосфере Венеры, Публ. астр. обс. ХГУ, № 8, 1948; Труды Астр. обс. ХГУ 1(9), 1950.
 16. Сытинская Н. Н., Фотометрическое исследование планеты Марс. Труды юбилейной научной сессии ЛГУ, 1948.
 17. Шулейкин В. В., О цветности моря, Изв. ин-та физики и биофизики, 1922.
 18. Ramán S. V., On the Molecular Scattering of Light in Water and the Colour of the Sea, Proc. Roy. Soc. 104, 64, 1922.
 19. Шулейкин В. В., Физика моря, т. I, ОНТИ, 1933.
-

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
110	7 св.	$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{\frac{\tau_0}{\zeta}} \varphi(t_0, \zeta) dt_0$	$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{\frac{t_0}{\zeta}} \varphi(t_0, \zeta) dt_0$
149	1 сл.	Басбриож	Басбридж
161	6 св.	$\sin \vartheta \sin \vartheta$	$\sin \vartheta \sin \vartheta'$
209	14 сл.	$\psi(\eta)$ и $\psi(\eta)$	$\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$

Зак. 490.

Соболев Виктор Викторович.

Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд
и планет.

Редактор *И. Е. Рахлин.*

Техн. редактор *С. С. Гаврилов.*

Корректор *Н. В. Казанская.*

Сдано в набор 22/VIII 1956 г. Подписано к печати 23/X 1956 г. Бумага 84×108^{1/32}. Физ. печ. л. 12,25. Услов. печ. л. 20,09. Уч.-изд. л. 18,40. Тираж 3000 экз. Т-10520. Цена книги 11 руб. 20 коп. Заказ № 490.

Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

16-я типография Главполиграфпрома Министерства культуры СССР.

Москва, Трехпрудный пер., д. 9.